Poročilo o Numeričnem Reševanju Diferencialnih Enačb

Gašper Harej

7. april 2025

Uvod

V tem poročilu bom predstavil rešitve dveh nelinearnih diferencialnih enačb, in sicer:

- Enačbe $\dfrac{du}{dx} = a\,e^{-2x} - u^4$ z začetnim pogojem $u(0) = 0$, kar ustreza modelu hlajenja (ali gretja) žarilne nitke iz naloge.
- Enačbe $\dfrac{dy}{dt} = y^2 + 2\,t^2$ z začetnim pogojem $y(0) = 1$. Pri tej enačbi je znano, da se rešitev divergence (singularnost) pojavi pri približno $t \approx 0.9$.

Najprej sem sprogramiral različne metode po *navodilih iz naloge*. Nato sem s pomočjo programskega okolja Python (knjižnice `NumPy`, `matplotlib` in `SciPy`) pridobil več grafičnih prikazov. Na vsaki sliki sem prikazal različne pristope:

- **Eulerjeva** metoda (nizek red, hitro nestabilna za večje korake),
- **Midpoint (RK2)** metoda,
- **Runge-Kutta 4. reda (RK4)**,
- **Runge-Kutta-Fehlberg** (RK45) – adaptivni korak,
- **Adams-Bashforth-Moulton** (ABM) prediktor-korektor, ipd.

V prvem delu sem reševal enačbo $\dfrac{du}{dx} = a\,e^{-2x} - u^4$ za $a = 10$, preveril sem stabilnost različnih metod in izvedel še družino rešitev za več vrednosti parametra a. V drugem delu sem reševal enačbo $\dfrac{dy}{dt} = y^2 + 2t^2$ za $y(0) = 1$ in raziskal, kako se metode obnašajo v okolici singularnosti. Spodaj sledi kratek pregled slik in opisi.

1 Teoretični oris

V *navadni diferencialni enačbi (NDE)* tipa

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x),$$

iščemo zvezno funkcijo $x(t)$, ki ustreza začetnemu pogoju $x(t_0) = x_0$. Pri metodi *Euler* ($\mathcal{O}(h)$ globalna natančnost) delam preprosti prirastek:

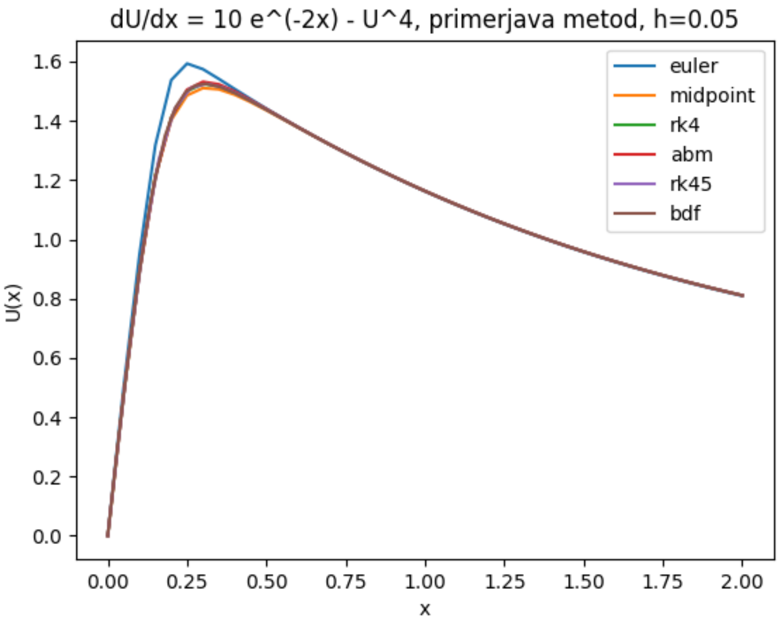
$$x_{n+1} = x_n + h\,f(t_n, x_n).$$

Midpoint (RK2) in klasična Runge-Kutta 4. reda (RK4) sta stabilnejši in natančnejši, vendar sta še vedno *fiksno-koračni*. Metoda `solve_ivp` v Pythonu uporablja **adaptivne** strategije (RK45, BDF), ki sproti prilagajajo dolžino koraka glede na ocenjeno napako.

Pri močnih nelinearnostih (npr. $y^2 + 2t^2$) lahko pride do eksplozivne rasti in *singularnosti* rešitve – enačba preneha imeti končno vrednost pri nekem končnem času. Numerične metode se tam močno soočajo z napakami in nestabilnostjo.

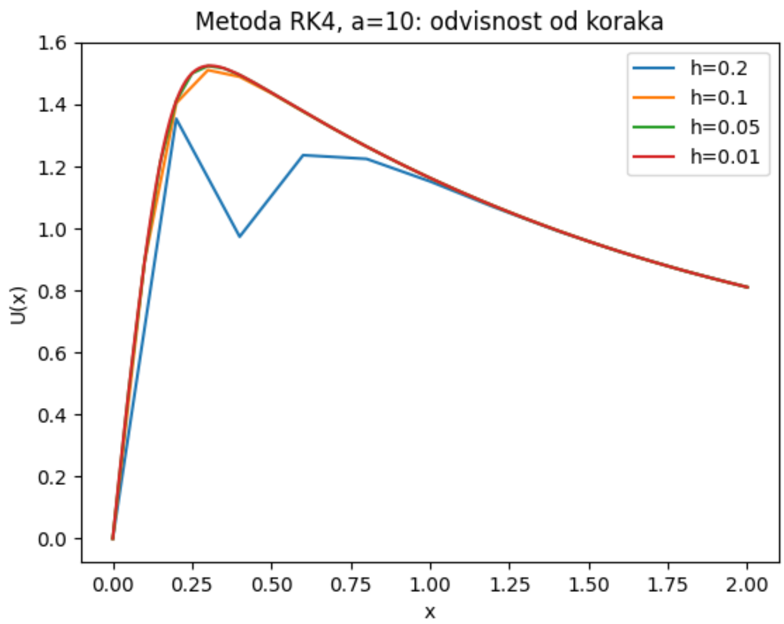
2 Rešitev Enačbe $\frac{du}{dx} = a\,e^{-2x} - u^4$

Za $a = 10$ sem na Sliki 1 prikazal primerjavo več metod (Euler, Midpoint, RK4, ...) pri izbranem koraku. Opazil sem, da Eulerjeva metoda lahko odstopa že za razmeroma zmeren korak.



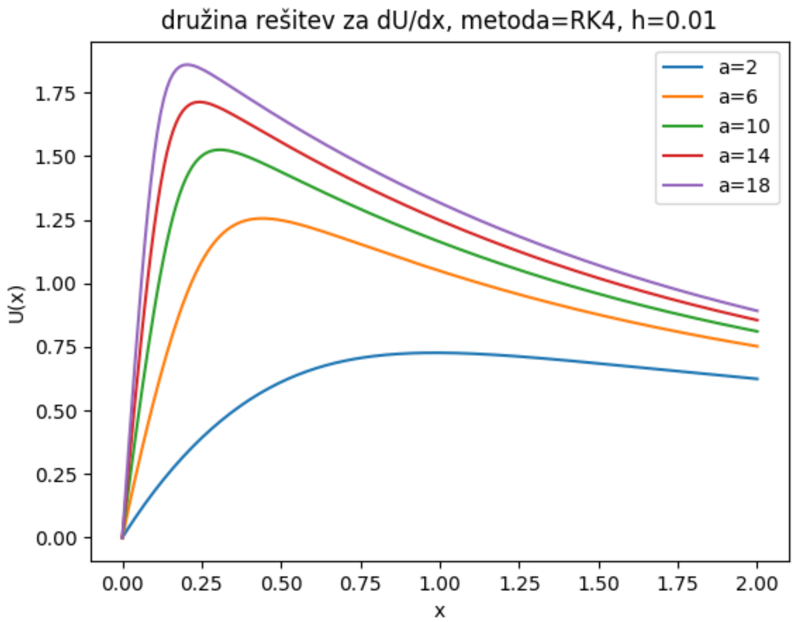
Slika 1: Primerjava različnih metod za $\frac{du}{dx} = 10\,e^{-2x} - u^4$.

Na Sliki 2 je prikazan vpliv velikosti koraka (npr. 0.2, 0.1, 0.05, 0.01) pri metodi RK4. Vidim, da se za manjši korak rešitve lepo *zbližajo* in stabilno aproksimirajo funkcijo $u(x)$.



Slika 2: Vpliv različnih korakov pri RK4 za $a = 10$. Manjši korak pomeni boljšo natančnost.

V nadaljevanju sem izrisal še *družino* rešitev za več vrednosti a, kar je prikazano na Sliki 3. Uporabil sem stabilno metodo, npr. RK4 z majhnim korakom $h = 0.01$. Jasno se vidi, kako se krivulje razlikujejo pri različnih a, zlasti pri večjem a je začetni dvig temperature (oziroma funkcije $u(x)$) bolj izrazit.

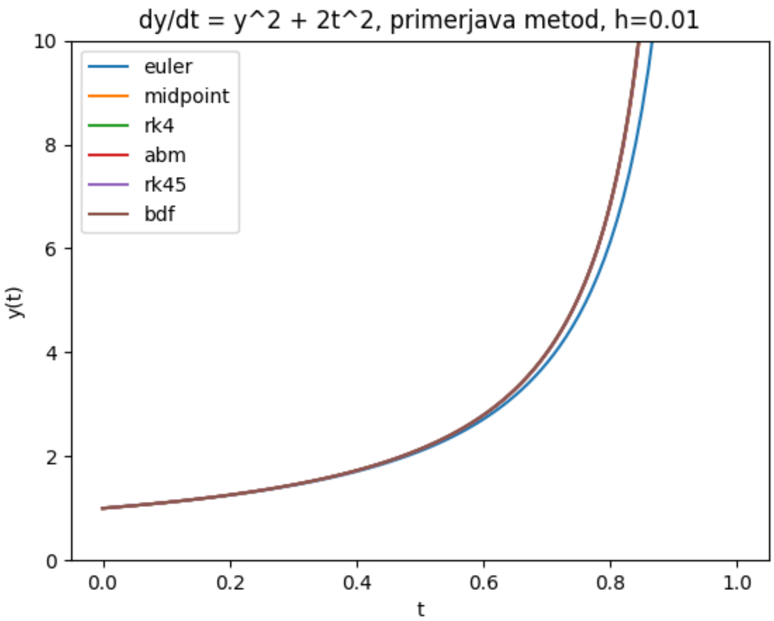


Slika 3: Družina rešitev enačbe $\frac{du}{dx} = a\, e^{-2x} - u^4$ za $a \in \{2, 6, 10, 14, 18\}$.

Opomba o ekstremih: Če bi želel *posebej natančno* določiti najvišjo temperaturo in trenutek, ko nastopi, bi priporočal uporabo metode RK4 ali adaptivne metode (npr. RK45) z *natančno nastavljeno* toleranco, po možnosti tudi z več vmesnimi točkami okoli maksimuma.

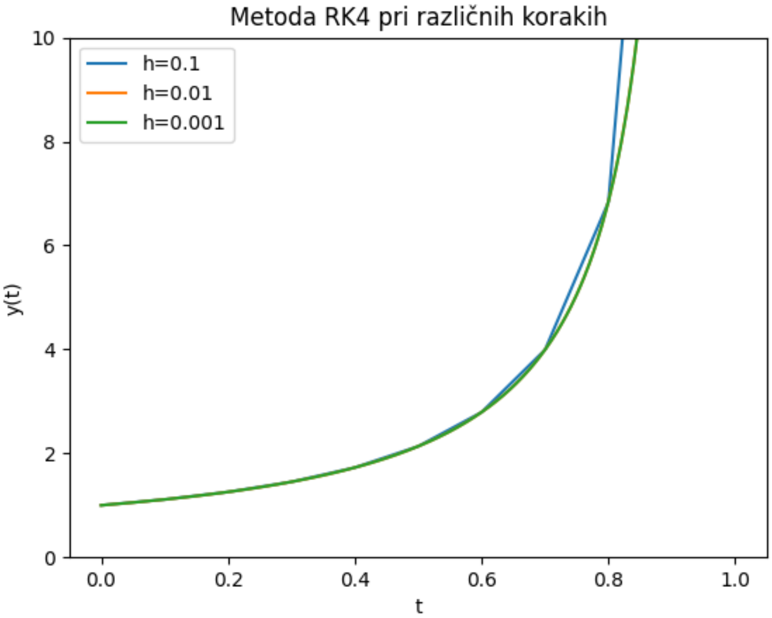
3 Rešitev Enačbe $\dfrac{dy}{dt} = y^2 + 2t^2$

Pri drugi enačbi, $\dfrac{dy}{dt} = y^2 + 2t^2$, z začetnim pogojem $y(0) = 1$, se rešitev divergira pri $t \approx 0.9$. Na Sliki 4 sem prikazal primerjavo šestih metod (Euler, Midpoint, RK4, ABM, RK45, BDF) pri koraku $h = 0.01$.



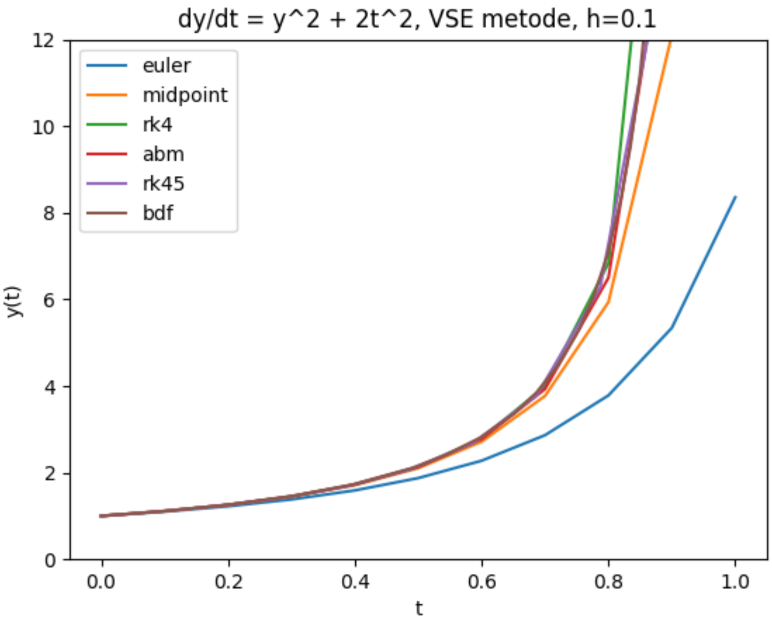
Slika 4: Vse metode za $\frac{dy}{dt} = y^2 + 2t^2$, pri $h = 0.01$.

Spreminjanje koraka pomembno vpliva, kar se lepo vidi na Sliki 5, kjer je za *eno samo* metodo (RK4) prikazano, kako pri $h = 0.1$, $h = 0.01$ in $h = 0.001$ rešitev različno hitro stremi k singularnosti.

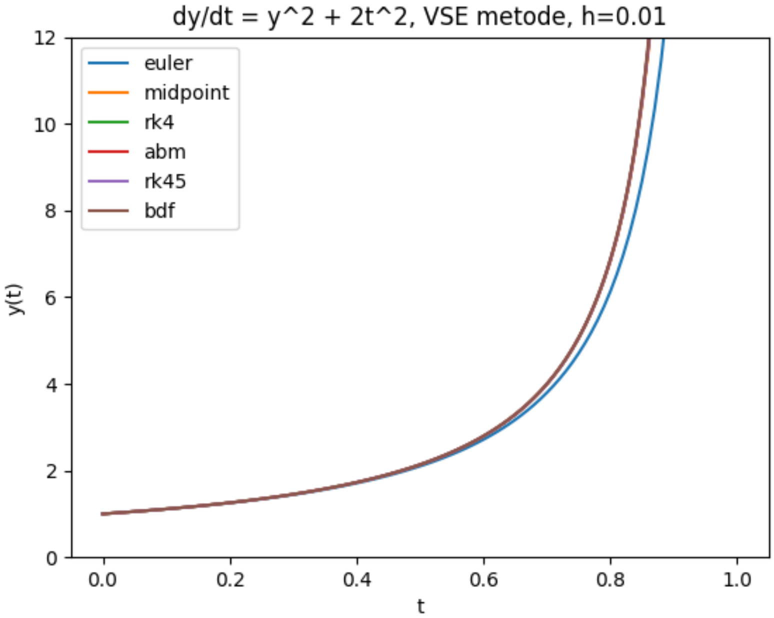


Slika 5: Samo metoda RK4, različni koraki h. Za večji korak hitro naraste napaka.

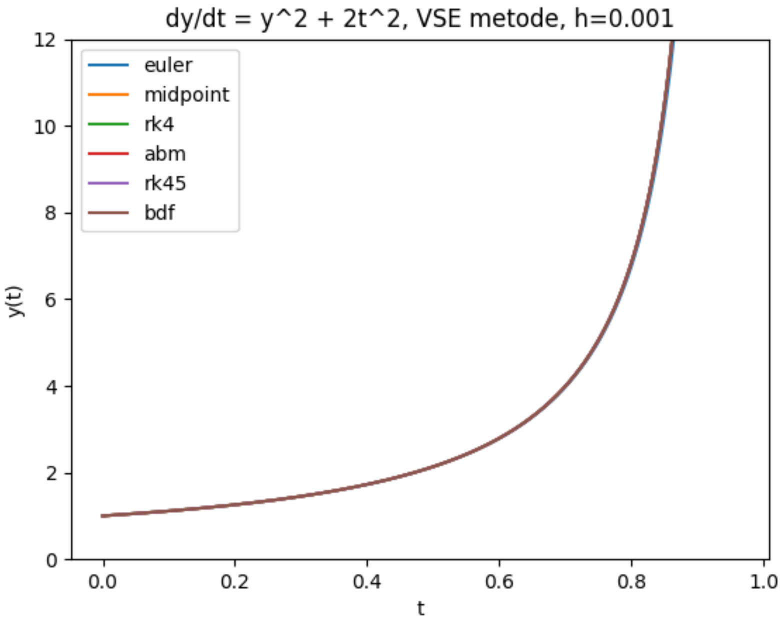
Če pa za *vse* metode naenkrat zberem rešitve in jih primerjam pri $h = 0.1$, $h = 0.01$ in $h = 0.001$, dobim vrsto grafov. Primeri so Slike 6, 7 in 8. Eulerjeva metoda pri $h = 0.1$ pogosto hitro "preskoči" realno vrednost, Midpoint in RK4 sta bolj zanesljivi, `solve_ivp` (RK45, BDF) pa sta prilagodljivi.



Slika 6: Vse metode pri $h = 0.1$. Eulerjeva in nekatere druge z večjimi napakami.

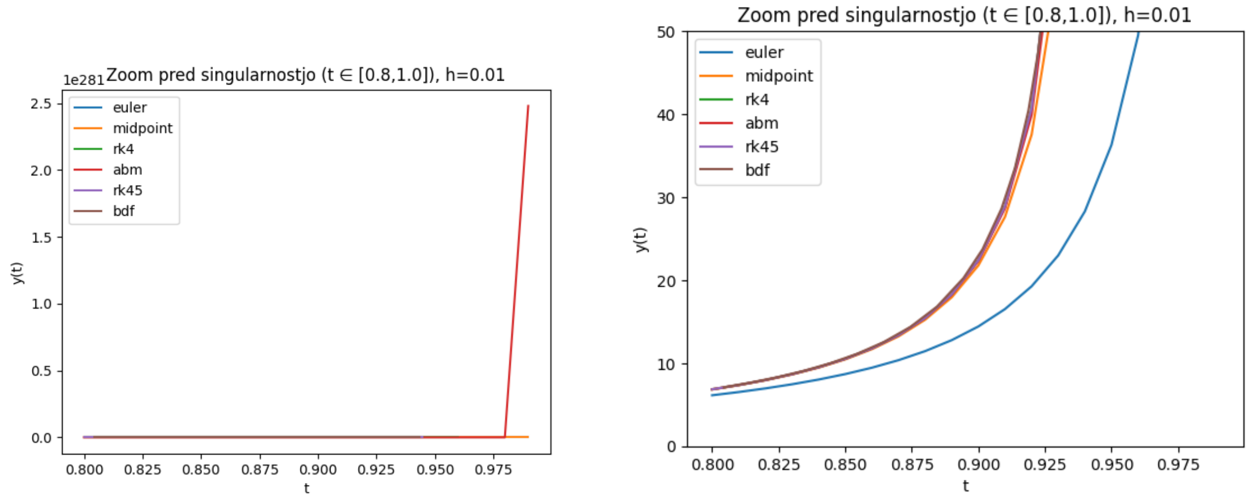


Slika 7: Vse metode pri $h = 0.01$. Rešitve se že bolj ujemajo.



Slika 8: Vse metode pri $h = 0.001$. Tu se še bolj približamo resnični divergenčni točki pri $t \approx 0.9$.

Nazadnje je zanimivo še podrobneje pogledati območje pred divergenco, denimo $t \in [0.8, 1.0]$. Na Sliki 9 sem združil *dva* zoom prikaza: leva slika prikazuje osnovno povečavo, kjer se vidi, da so Euler in Midpoint (za večji korak) precej oddaljeni od bolj natančnih metod, desna slika pa še dodatno izostri dogajanje pri $t \approx 0.975$, kjer se RK45 in BDF očitno prilagodita nenadni rasti.



Slika 9: Povečava grafa pri $t \approx 0.9$. V levem prikazu je vidna rast do pribl. $y = 0.5$, desni prikaz pa pokaže še večjo eksplozivnost pri $t > 0.95$.

Povzetek: Če želim *visoko natančnost*, bom izbral vsaj *RK4* ali *RK45* z *dovolj majhnim* korakom. Za probleme s hitrim povečevanjem funkcije (bližina singularnosti) je posebej koristno, da ima metoda *adaptivni* korak, kot to počne `solve_ivp(RK45)` s primerno nastavljeno toleranco.