

Poročilo o numeričnem reševanju matematičnega nihala in poševnega meta

Gašper Harej

April 2025

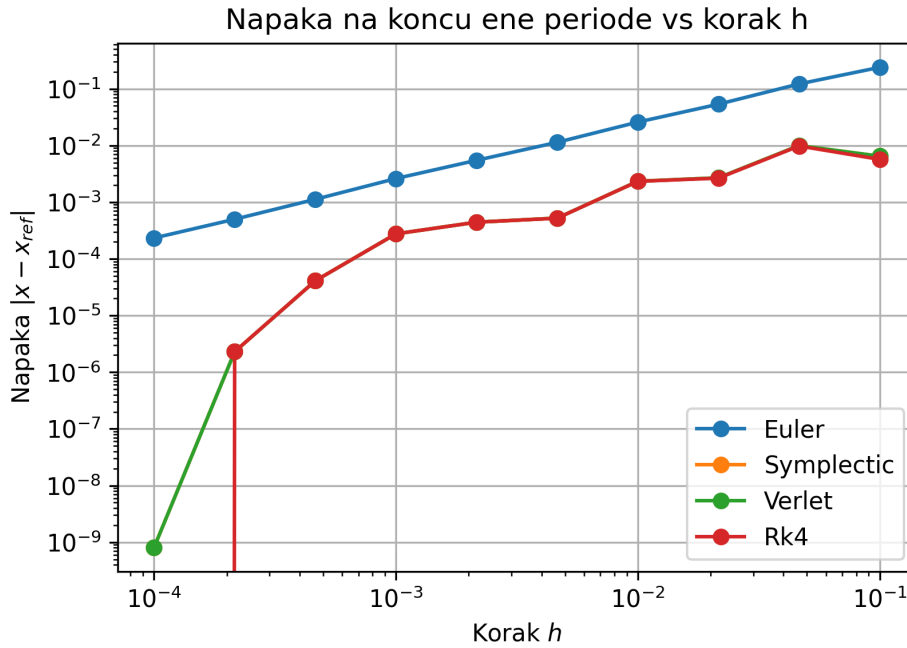
Uvod

V tem poročilu predstavljam rešitve naloge, v kateri sem numerično raziskal gibanje preprostega matematičnega nihala in izvedel študijo poševnega meta z upoštevanjem kvadratnega zračnega upora dodal pa sem še vpliv naključno izbranega vektorja vetra in vpliv Coriolisove sile na neki geografski širini. Pri nalogi sem implementiral eksplicitne in simplektične metode za nihalo ter poročal o natančnosti, periodični stabilnosti in ohranitvi energije. Pri poševnem metu sem izračunal optimalni izstrelišni kot tako brez vetra kot z vetrom in Coriolisovo silo, poleg tega pa sem analiziral razpršenost točk pristankov pri različnih vetrovnih pogojih.

1 Matematično nihalo

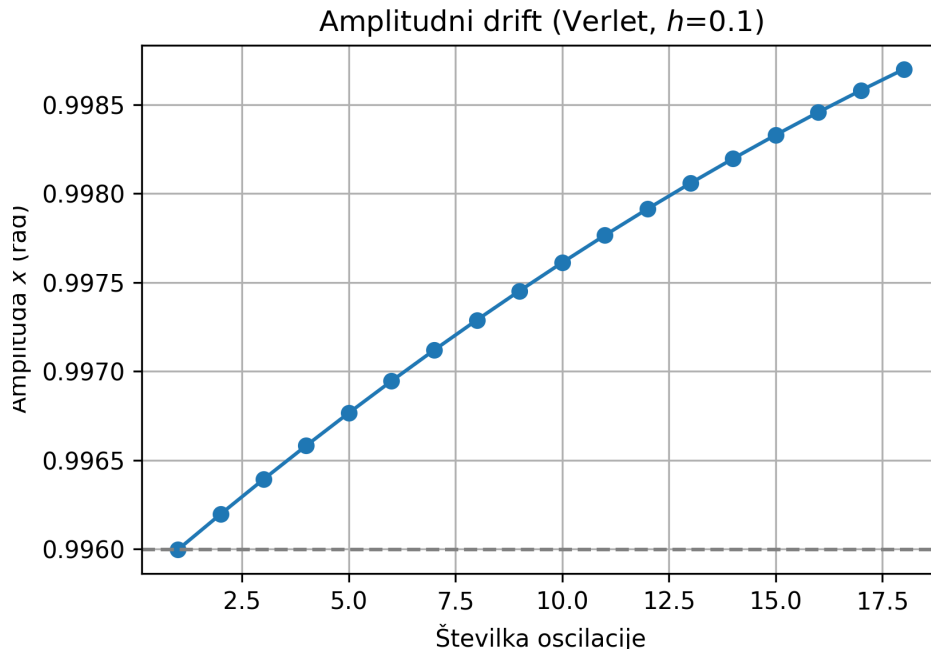
Pri študiju nihala sem upošteval enačbo $m x'' = -\sin x$, ki sem jo pretvoril v sistem prvega reda. Implementiral sem metode Euler, simplektično Euler, Verlet in Runge–Kutta 4. reda. Za oceno natančnosti sem vzel referenčno rešitev z metodi RK4 in korakom $h = 10^{-4}$ ter izračunal absolutno napako $|x(T) - x_{\text{ref}}|$ po eni periodi $T = 2\pi$ za različne velikosti koraka.

Slika 1 prikazuje log–log graf napake na koncu ene periode kot funkcijo koraka h . V grafu se jasno pokaže, da ima Euler metoda linearno odvisnost napake od koraka, medtem ko simplektične metode in RK4 dosegajo višje stopnje konvergence.



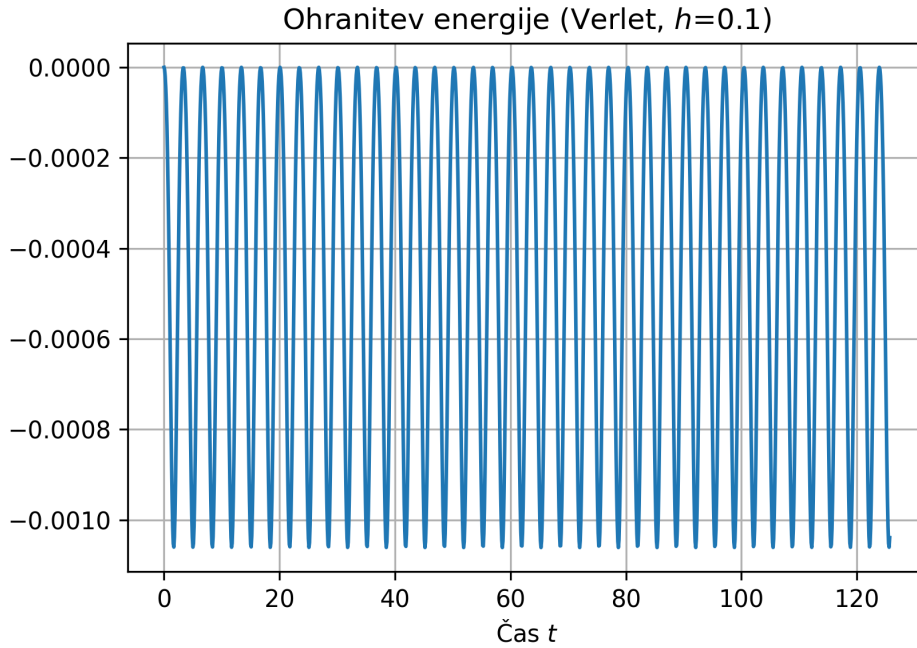
Slika 1: Napaka $|x(T) - x_{\text{ref}}|$ na koncu ene periode v odvisnosti od koraka h .

Za oceno periodične stabilnosti sem izbral Verlet metodo s korakom $h = 0.1$ in simuliral 20 nihajev. Na Sliki 2 je prikaz amplitude kot funkcije številke oscilacije. Začetna amplituda $x(0) = 1$ se je po 18 nihaju spremenila na približno 0.9987, kar pomeni relativni drift manj kot 0.3



Slika 2: Amplitudni drift Verlet metode ($h = 0.1$) skozi 20 nihajev.

Ker je ohranjanje energije ključni pokazatelj simplektičnosti, sem izračunal Hamiltonian $E(t) = 1 - \cos x + \frac{1}{2}v^2$ in na Sliki 3 prikazal odklon $E(t) - E(0)$. Ugotovil sem, da se energija periodično oscilira okoli ničle z amplitudo reda 10^{-3} brez sistematičnega trenda.

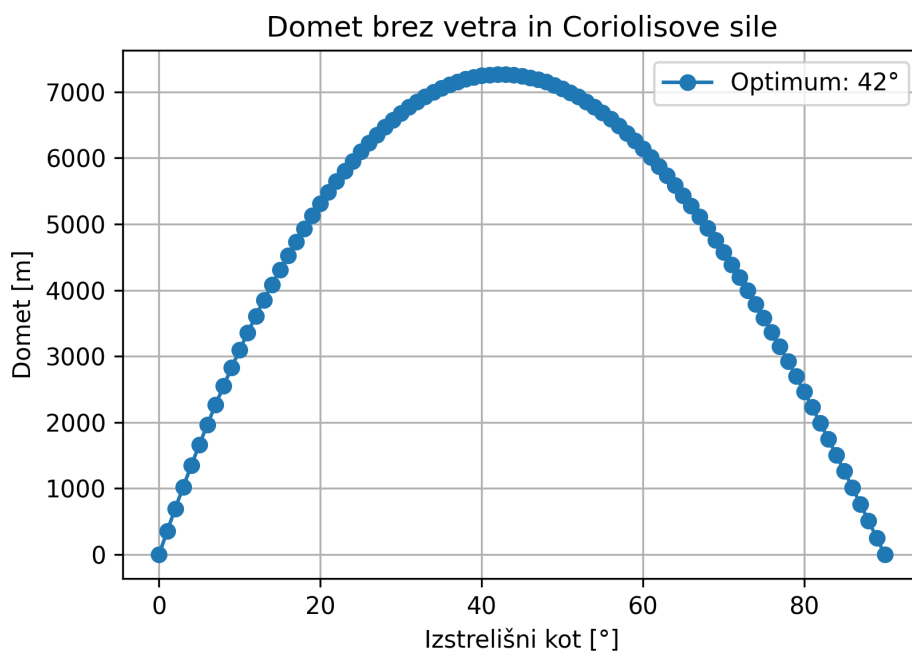


Slika 3: Ohranitev energije pri Verlet metodi ($h = 0.1$): prikaz $E(t) - E(0)$ skozi čas.

2 Poševni met

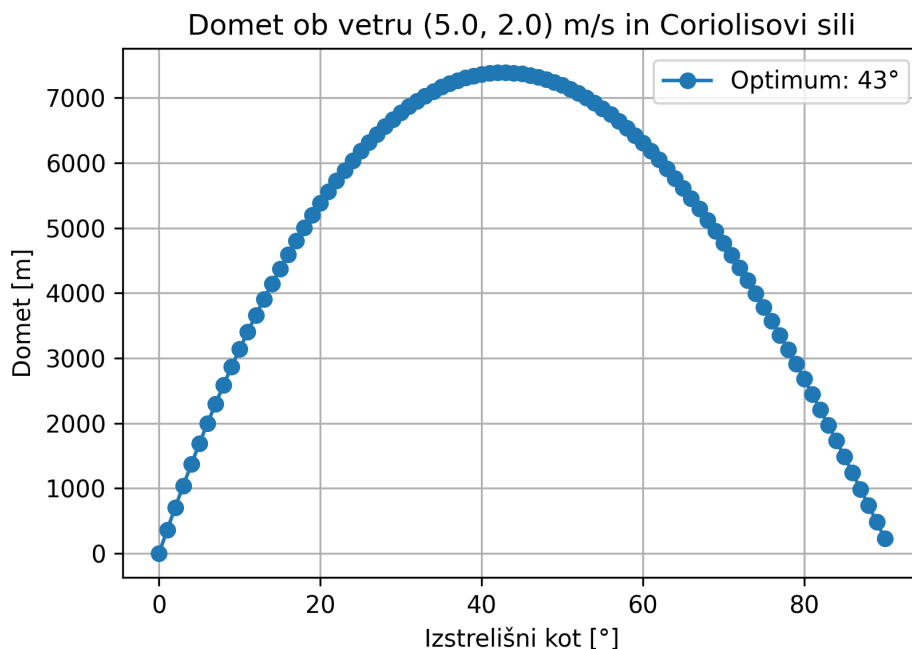
Za analizo poševnega meta sem modeliral dvokvadratni zračni upor z gostoto zraka $\rho = 1.28 \text{ kg/m}^3$, presečno površino $A = 0.0030 \text{ m}^2$ in koeficientom upora $c = 1$, kotno hitrost Zemlje $\omega = 7.292 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$ ter geografsko širino $\varphi = 46^\circ$. S pomočjo funkcije *solve_ivp* sem integral tri primere: brez vetra in Coriolisove sile, z izbranimi vetrovnima komponentama $(5, 2) \text{ m/s}$ in Coriolisovo silo, ter razpršenost pristankov pri kotu $\theta = 70^\circ$ za množico vetrovnih vektorjev \mathbf{z} in brez Coriolisove sile.

Graf dometa kot funkcije kota brez vetra in brez Coriolisove sile prikazuje Slika 4. Optimizirani kot je 42° , torej ni klasičnih 45° zaradi prisotnosti upora.



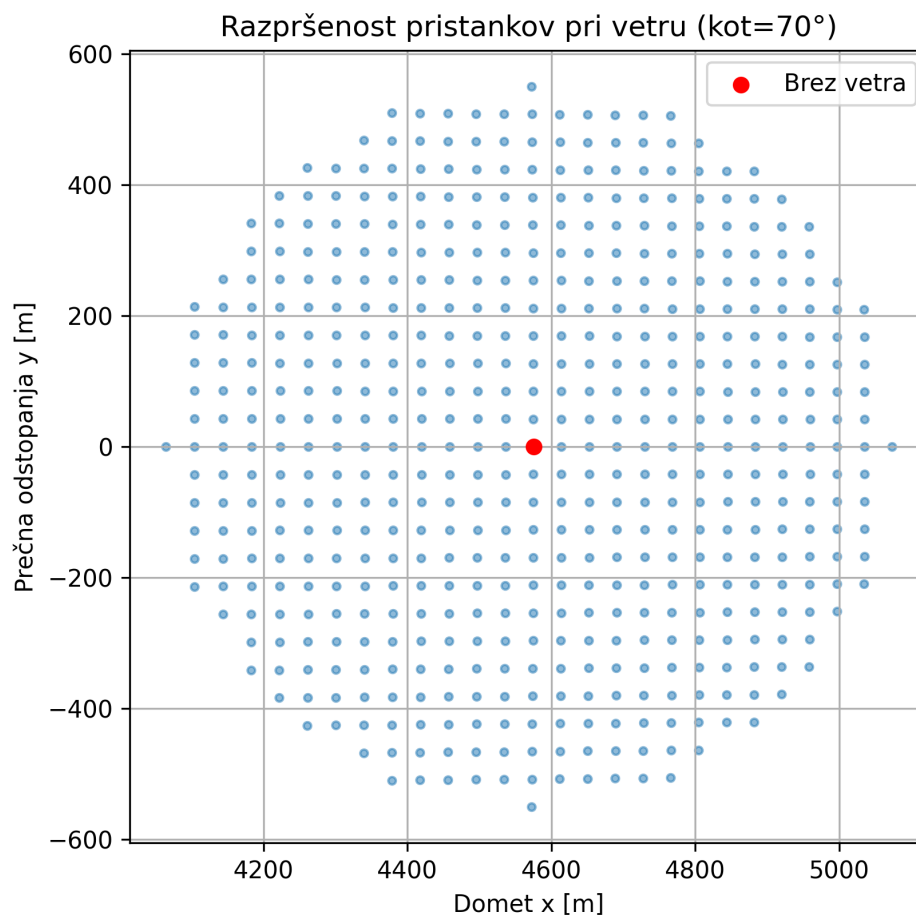
Slika 4: Domet poševnega meta brez vetra in brez Coriolisove sile kot funkcija izstrelišnega kota.

Ko sem v model vključen veter (5,2) m/s in Coriolisovo silo, se je optimalni kot premaknil na 43°, kar prikazuje Slika 5.



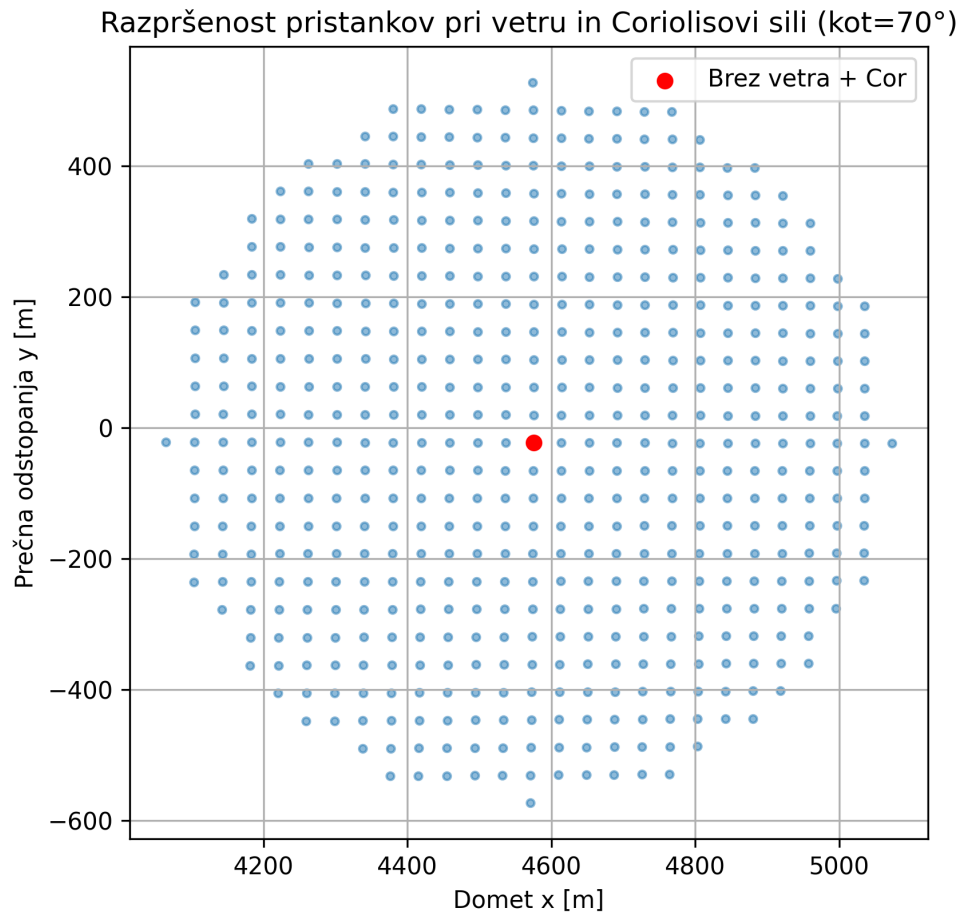
Slika 5: Domet ob vetru (5,2) m/s in Coriolisovi sili kot funkcija kota, optimum pri 43°.

Razpršenost točk pristankov pri kotu 70° brez upoštevanja Coriolisove sile sem predstavil na Sliki 6. Sila vetra povzroči prečne odklone do približno 500 m v obe smeri.



Slika 6: Razpršenost pristankov pri različnih vetrovnih vektorjih brez Coriolisove sile.

Če sem enako analizo ponovil z vključenim Coriolisom, sem dobil Sliko 7. Razpršenost se rahlo spremeni, saj Coriolisova sila dodatno odstopa v severno–južni smeri.



Slika 7: Razpršenost pristankov pri različnih vetrovnih vektorjih z vključeno Coriolisovo silo.

Zaključek

Preveril sem natančnost in stabilnost metod na primeru matematičnega nihala, kjer so simplektične metode bistveno bolj primerne za dolgoročne simulacije zaradi ohranitve energije in amplitude. Poševni met z dvokvadratnim upornim členom pokaže, da je optimalni izstrelišni kot nižji od idealnih 45°, še bolj pa ga spreminjajo veter in Coriolisova sila. Razpršenost pristankov nakazuje, da moramo pri točnostnih izračunih upoštevati realne meteorološke in inertne vplive.