5. naloga: Lastne vrednosti simetričnega tenzorja

Gašper Harej

V tej nalogi sem se lotil iskanja lastnih vrednosti in ustreznih lastnih vektorjev dveh simetričnih matrik:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1000. & 0.1 & 0.01 & 0.001 & 0.0001 & 0.00001 & 0.000001 \\ 0.1 & 1000. & 0.1 & 0.01 & 0.001 & 0.0001 & 0.00001 \\ 0.01 & 0.1 & 1000. & 0.1 & 0.01 & 0.001 & 0.0001 \\ 0.001 & 0.01 & 0.1 & 1000. & 0.1 & 0.01 & 0.001 \\ 0.0001 & 0.001 & 0.01 & 0.1 & 1000. & 0.1 & 0.01 \\ 0.00001 & 0.0001 & 0.001 & 0.01 & 0.1 & 1000. & 0.1 \\ 0.000001 & 0.00001 & 0.0001 & 0.001 & 0.01 & 0.1 & 1000. \end{bmatrix}$$

in

$$A_2 = \begin{bmatrix} 10^6 & 0.1 & 0.01 & 0.001 & 0.0001 & 0.00001 & 0.000001 \\ 0.1 & 10^6 & 0.1 & 0.01 & 0.001 & 0.0001 & 0.00001 \\ 0.01 & 0.1 & 10^6 & 0.1 & 0.01 & 0.001 & 0.0001 \\ 0.001 & 0.01 & 0.1 & 10^6 & 0.1 & 0.01 & 0.001 \\ 0.0001 & 0.001 & 0.01 & 0.1 & 10^6 & 0.1 & 0.01 \\ 0.00001 & 0.0001 & 0.001 & 0.01 & 0.1 & 10^6 & 0.1 \\ 0.000001 & 0.00001 & 0.0001 & 0.001 & 0.01 & 0.1 & 10^6 \end{bmatrix}.$$

Najprej sem rezultate primerjal z vgrajeno funkcijo `eigh` iz knjižnice `scipy.linalg`, nato pa sem uporabil različne iterativne in neposredne metode:

- iterativno QR metodo (z in brez tridiagonalizacije),
- potenčno metodo (za največjo lastno vrednost),
- Jacobijevo metodo,
- metodo iskanja ničel sekularne enačbe (neposredni izračun korenin karakterističnega polinoma).

Iterativna QR metoda

Pri iterativni QR metodi sem v vsaki iteraciji razstavil matriko A v zmnožek QR in nato tvoril novo matriko $A \leftarrow RQ$. Postopek sem ponavljal, dokler sprememba diagonalnih elementov (približkov lastnih vrednosti) ni bila dovolj majhna. Za matriko A_1 sem dobil dokaj hitro konvergenco, medtem ko se je pri matriki A_2 konvergenca upočasnila zaradi večjega razpona vrednosti na diagonali (slabša pogojnost matrike).

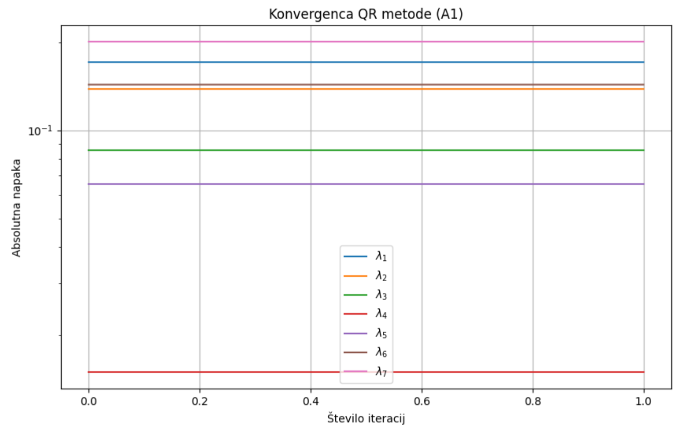

Figure 1: Konvergenca QR metode za matriko A_1.

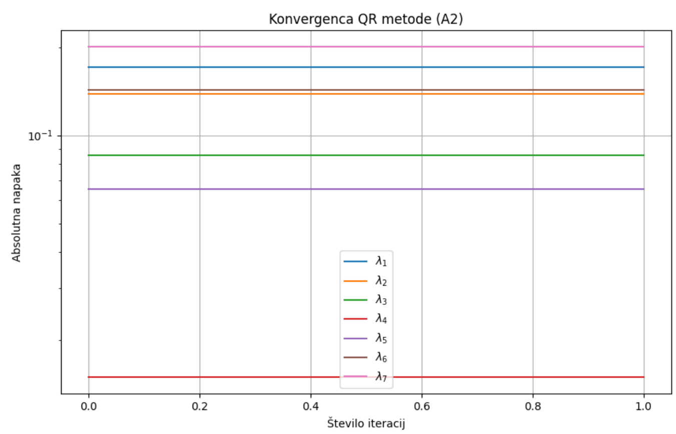

Figure 2: Konvergenca QR metode za matriko A_2.

Potenčna metoda

Potenčna metodo sem uporabil za izračun največje lastne vrednosti. Pri matriki A_1 se je ta vrednost stabilizirala hitreje kot pri matriki A_2, kar kaže na različno pogojnost matrik in različno razmerje med največjo in preostalimi lastnimi vrednostmi.

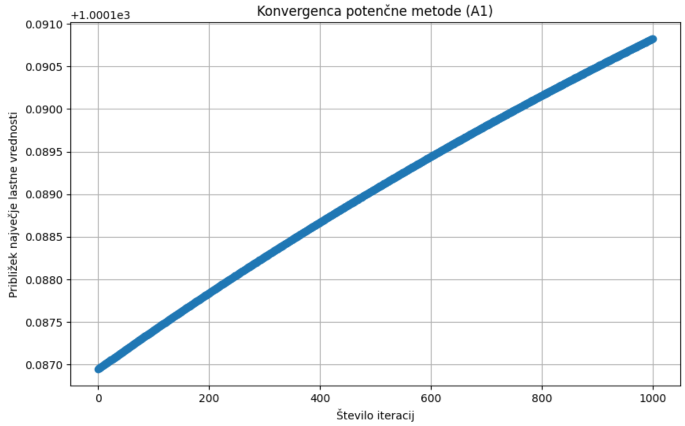

Figure 3: Konvergenca potenčne metode za matriko A_1.

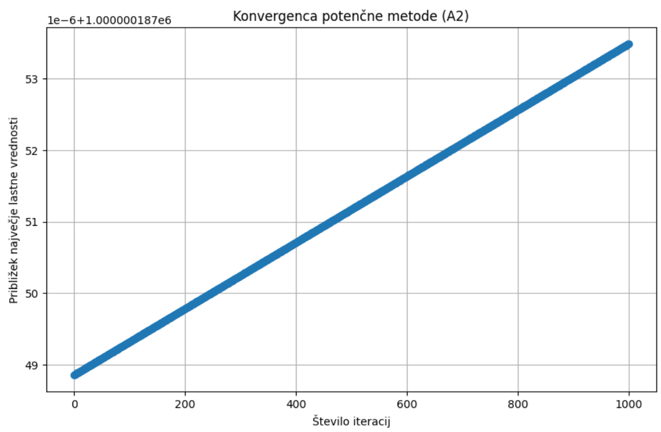

Figure 4: Konvergenca potenčne metode za matriko A_2.

Jacobijeva metoda

Jacobijevo metodo sem uporabil za diagonalizacijo simetričnih matrik s serijo ortogonalnih rotacij, s katerimi ničlajo izven-diagonalne elemente. Spremljal sem maksimalno vrednost izven-diagonalnih elementov skozi iteracije. Vidim, da ta maksimalna vrednost eksponentno pada, kar potrjuje konvergenco metode. Pri matriki A_2 se upad rahlo upočasni, kar je posledica večje pogojnosti.

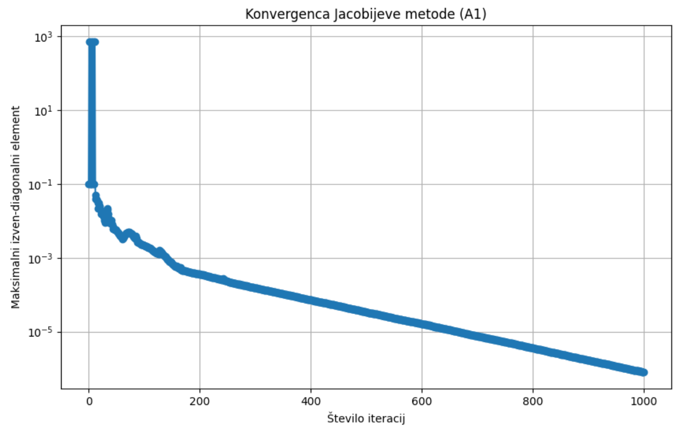

Figure 5: Konvergenca Jacobijeve metode za matriko A_1.

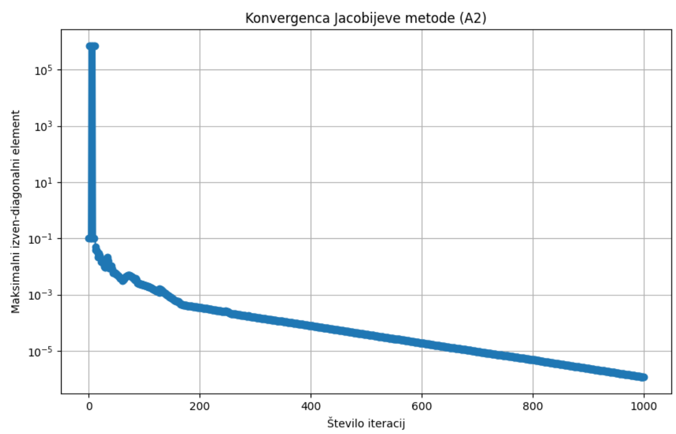

Figure 6: Konvergenca Jacobijeve metode za matriko A_2.

QR metoda po tridiagonalizaciji

Pred uporabo QR metode sem matriki A_1 in A_2 preoblikoval v tridiagonalno obliko s Householderjevo transformacijo. Ta predoblikava zmanjša število izven-diagonalnih elementov, kar pripomore k hitrejši konvergenci QR metode. Rezultati so pokazali, da tridiagonalizacija pri obeh matrikah zmanjša število potrebnih iteracij.

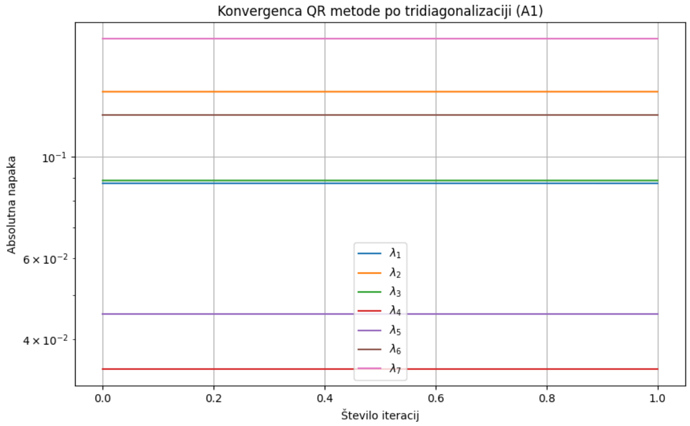

Figure 7: Konvergenca QR metode po tridiagonalizaciji za matriko A_1.

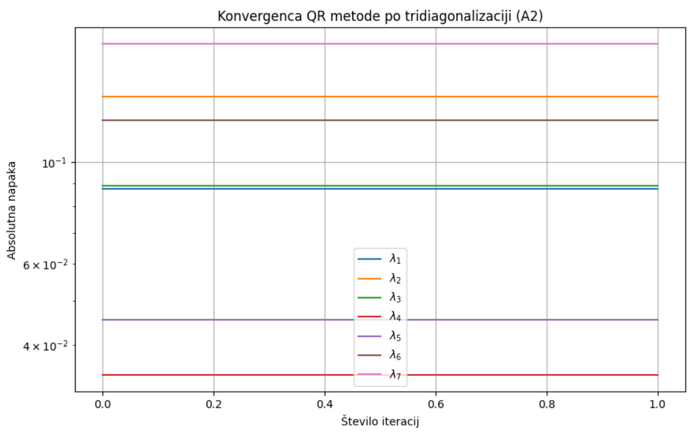

Figure 8: Konvergenca QR metode po tridiagonalizaciji za matriko A_2.

Sekularna metoda

Pri sekularni metodi sem lastne vrednosti pridobil z iskanjem ničel karakterističnega polinoma. Ta metoda ni iterativna, vendar je zaradi numerične občutljivosti manj primerna za večje matrike. Kljub temu sem jo uporabil kot dodatno referenco in ugotovil, da so dobljene vrednosti skladne z rezultati drugih metod.

Eigenvalue Index	Secular Method (A1)	Reference (A1)	Secular Method (A2)	Reference (A2)
1	993.534323	999.829088	9.906756e+05	9.999998e+05
2	993.534323	999.861597	9.906756e+05	9.999999e+05
3	998.506245	999.914657	9.976731e+05	9.999999e+05
4	998.506245	999.985069	9.976731e+05	1.000000e+06
5	1004.459107	1000.065552	1.006458e+06	1.000000e+06
6	1004.459107	1000.143233	1.006458e+06	1.000000e+06
7	1007.000650	1000.200805	1.010387e+06	1.000000e+06

Table 1: Primerjava lastnih vrednosti, pridobljenih s sekularno metodo, in referenčnih lastnih vrednosti za matriki A_1 in A_2.

Sklepne ugotovitve

V vseh preizkušenih metodah sem dobil rezultate, ki se skladajo z vrednostmi, pridobljenimi z vgrajeno funkcijo `eigh`. Pri iterativnih metodah je bila konvergenca odvisna od pogojnosti matrike – pri matriki A_2, kjer je na diagonali veliko večja vrednost, se je konvergenca upočasnila. Najbolj učinkovita se je izkazala QR metoda po predhodni tridiagonalizaciji, saj je s tem postopkom zmanjšala število potrebnih iteracij.