Začetni problem PDE — diferenčna metoda

Avtor: Gašper Harej

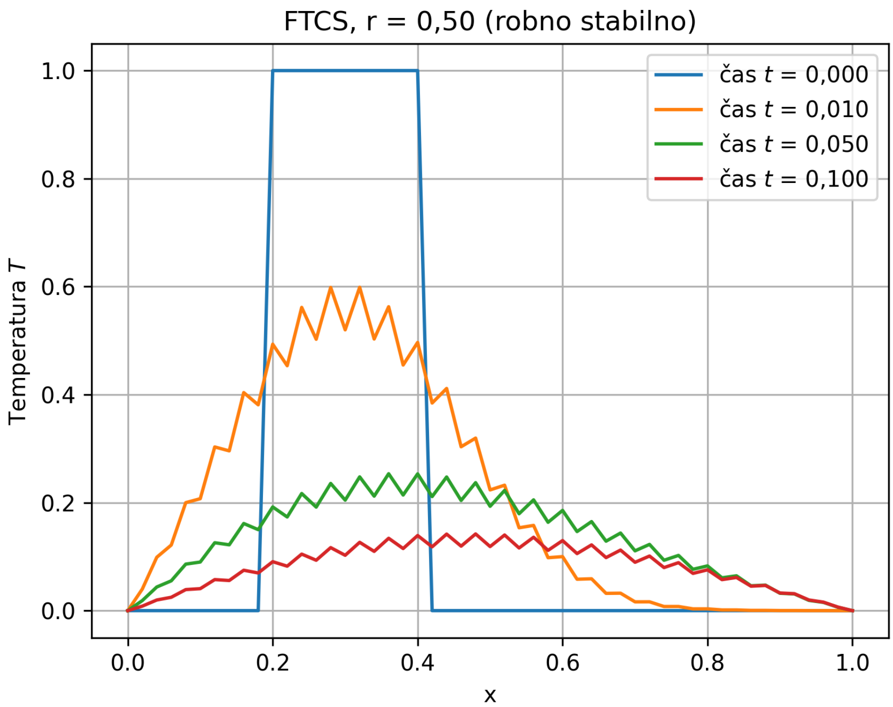
Maj 2025

V tem poročilu sem opisal izpeljavo in numerične eksperimente pri reševanju enodimenzionalnega začetnega problema parcialnih diferencialnih enačb. Najprej sem preizkusil aproksimacijo difuzijske enačbe z eksplicitno FTCS-shemo in implicitno Crank–Nicolsonovo metodo, nato pa sem obravnaval še valovno enačbo s stabilno eksplicitno shemo.

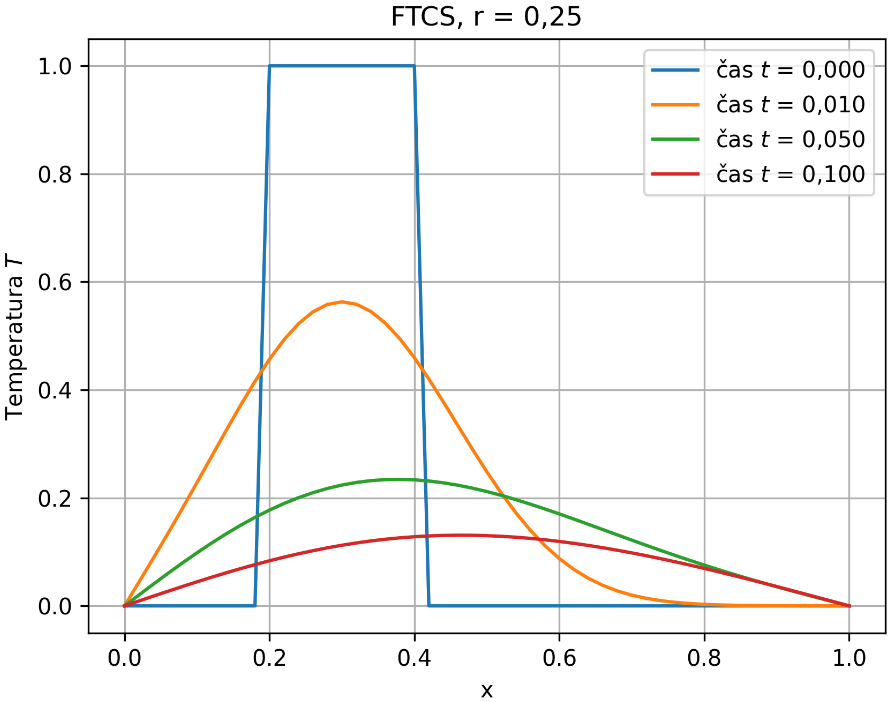
1 Difuzijska enačba

Difuzijsko enačbo sem reševal na intervalu $0 \le x \le a$ z Dirichletovimi robnimi pogoji $T(0,t) = T(a,t) = 0$. Začetni temperaturni profil je bil enak okolici ($T = 0$), le na odseku $0.2a \le x \le 0.4a$ sem vrednost postavil na T_0. Skozi račun sem nastavil $a = 1$, $D = 1$ in $T_0 = 1$.

Najprej sem izvedel FTCS-shemo, kjer sem preizkusil dve vrednosti razmerja $r = D\,\Delta t/\Delta x^2$, in sicer $r = 0.50$ (robno stabilno) in $r = 0.25$. Na sliki 1 je prikazan temperaturni profil pri časih $t = 0$, 0.01, 0.05, 0.1 za $r = 0.50$. Opazil sem izrazite numerične oscilacije in zobat profil. Nasprotno sem pri $r = 0.25$ (slika 2) dobil bolj gladek gradient in znatno manj oscilacij.

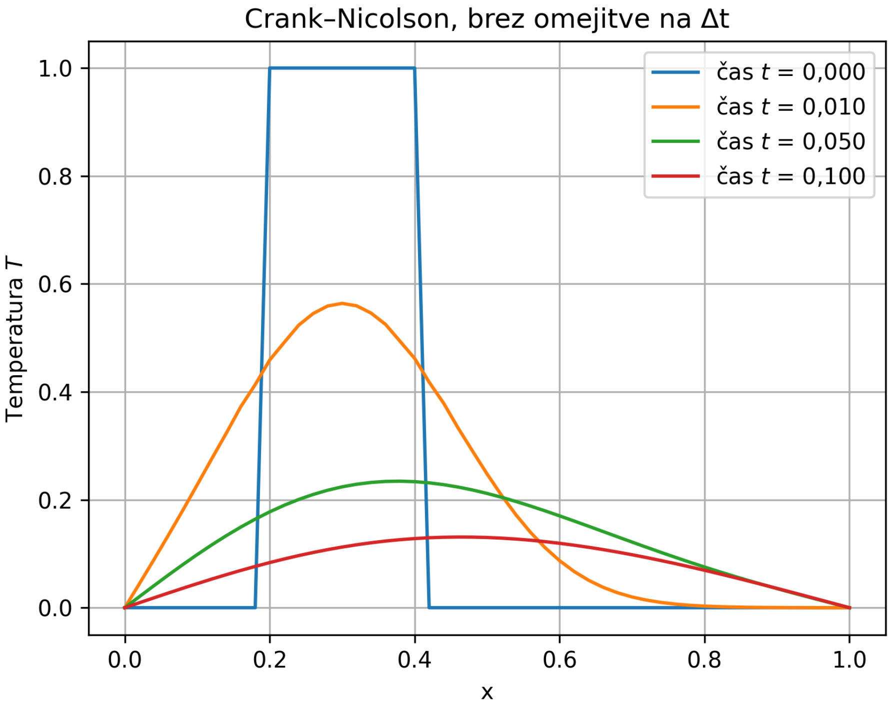


Slika 1: Temperaturni profil z FTCS ($r = 0,50$) pri časih $t = 0,00$ (modro), $t = 0,01$ (oranžno), $t = 0,05$ (zeleno) in $t = 0,10$ (rdeče). Vidne so numerične oscilacije zaradi velikosti koraka.



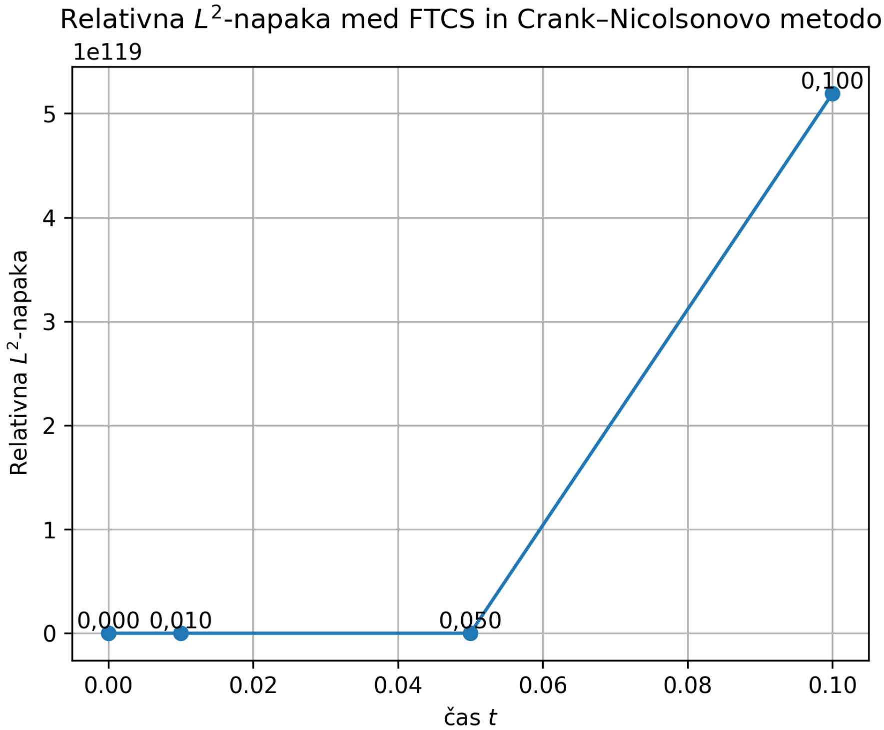
Slika 2: Temperaturni profil z FTCS ($r = 0,25$) pri enakih časih. Profili so bolj gladki in stabilni, vendar čistost metode omejuje časovna napaka reda $O(\Delta t)$.

Nato sem uporabil Crank–Nicolsonovo metodo, ki je drugega reda v času in ne zahteva omejitve na velikost Δt. Rezultati na sliki 3 kažejo monotono difuzijo brez oscilacij, kar sem pričakoval zaradi implicitne narave metode.



Slika 3: Temperaturni profil z Crank–Nicolsonovo metodo pri istih časih. Profili so visoke gladkosti in brez numeričnih artefaktov.

Za kvantitativno primerjavo sem izračunal relativno L^2-napako med FTCS ($\Delta t = 0.0005$, $r = 0.25$) in Crank–Nicolson pri enakih časih. Graf napak na sliki 4 kaže, da se profil FTCS s časom vse bolj oddaljuje od natančnejše Crank–Nicolsonove rešitve.

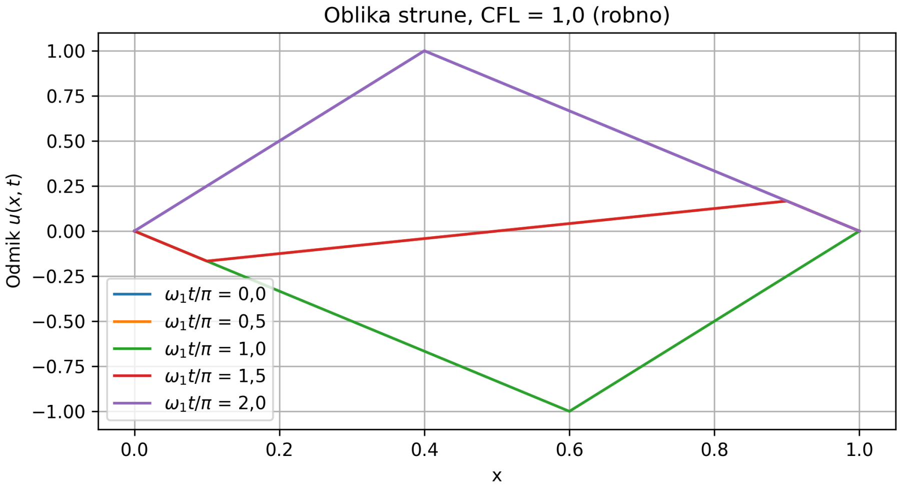


Slika 4: Relativna L^2-napaka FTCS glede na Crank–Nicolson za čase $t = 0,00,\ 0,01,\ 0,05,\ 0,10$. Pri $t > 0,05$ napaka hitro narašča.

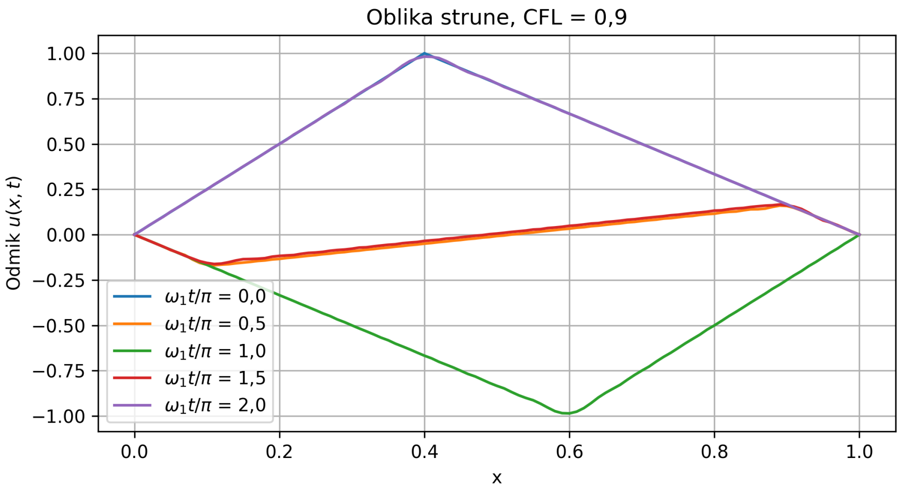
2 Valovna enačba

Valovno enačbo sem reševal z eksplicitno shemo drugega reda v času. Začetni odmik sem definiral kot trikotno obliko z vrhom pri $x = 0,4a$ in začetno hitrostjo enako nič. Izračune sem izvedel za tri vrednosti CFL-števila $c\Delta t/\Delta x = 1.0,\ 0.9,\ 0.5$.

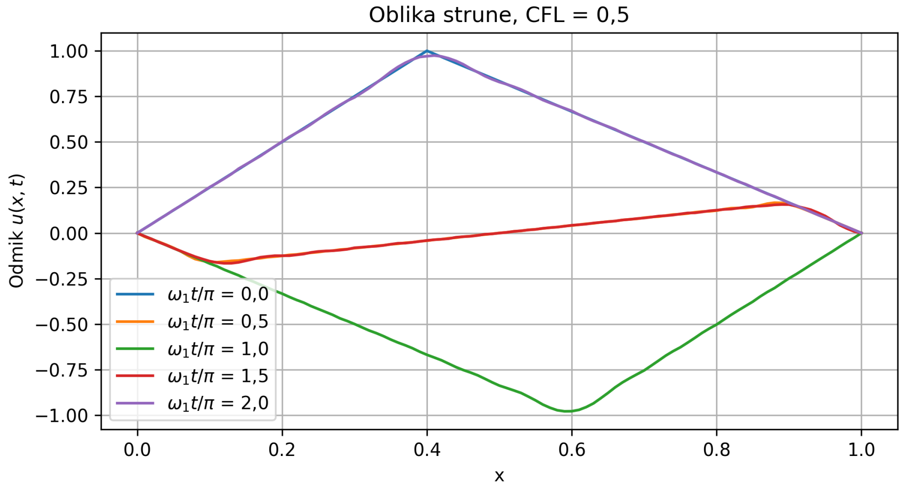
Na sliki 5 vidim, da sem pri algoritmu z *CFL*=1.0 praviloma prenesel trikotno obliko naprej brez izgube (robno stabilno). Pri ‘CFL=0.9‘ (slika 6) nastanejo tanke numerične popačenosti, vendar je pripoved vala še razločna. Pri ‘CFL=0.5‘ (slika 7) je razmeroma velika disperzija, ki postopoma zamegli robove vala.



Slika 5: Oblika strune za CFL=1,0 (robno stabilno) pri $\omega_1 t/\pi$ = 0, 0,5, 1,0, 1,5, 2,0. Val se prenaša brez disipacije.

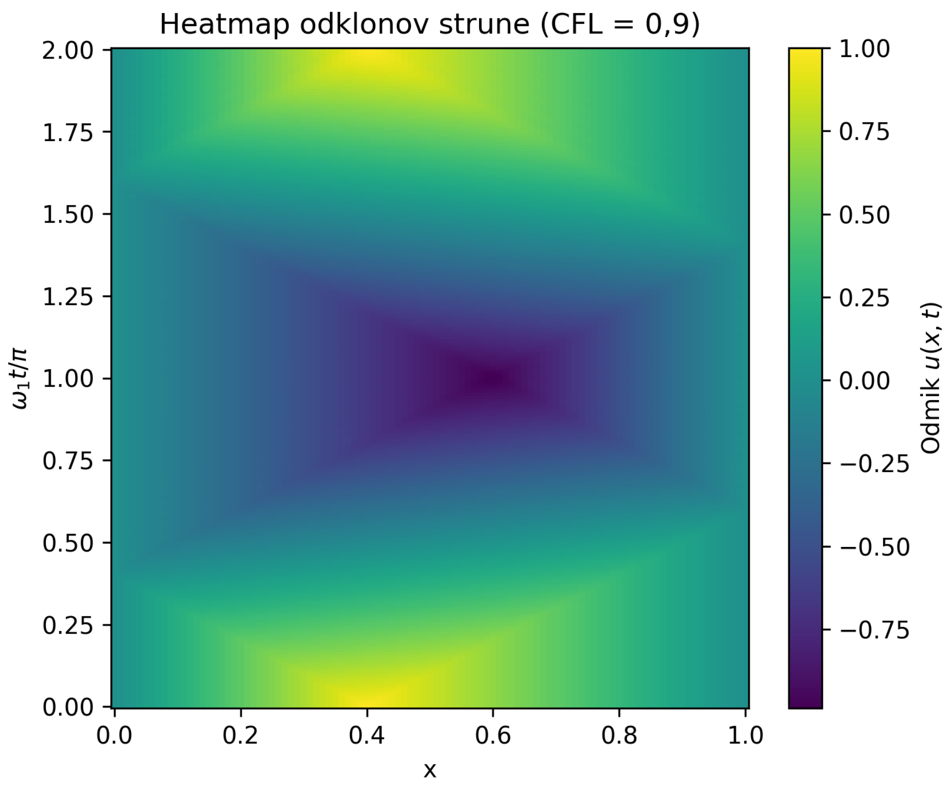


Slika 6: Oblika strune za CFL=0,9. Vidne so manjše numerične nepravilnosti v robnih delih zaradi nestabilnosti sheme.



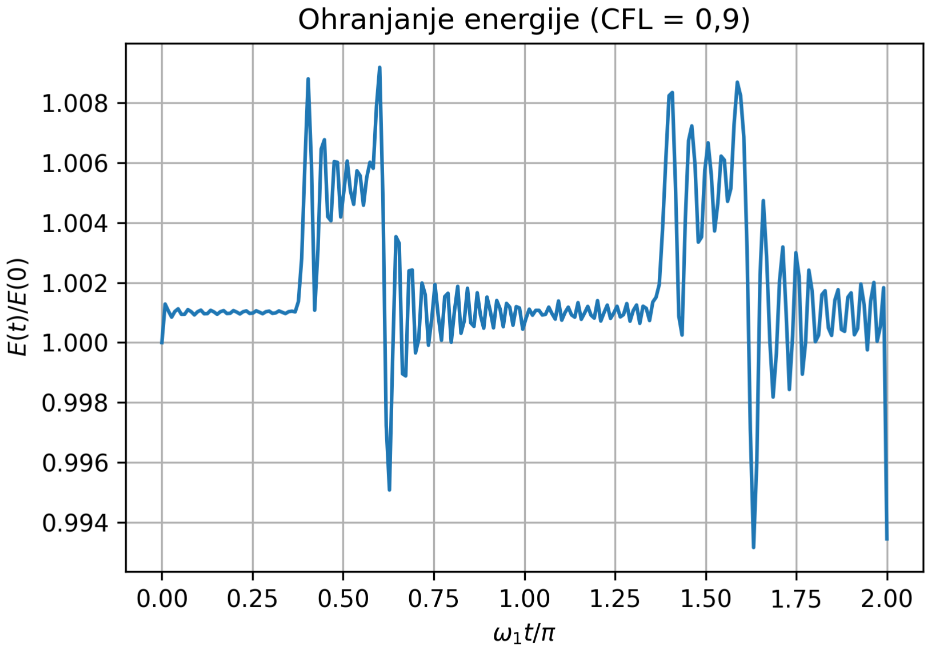
Slika 7: Oblika strune za *CFL*=0,5. Metoda povzroči disperzijo in zglajen rob vala.

Poleg časovnih profilov sem še za CFL=0.9 izrisal bunductor grafikon (heatmap) odklonov strune od $t = 0$ do $t = 2\pi/\omega_1$ (slika 8). S tem sem dobil pregleden vpogled v potek vala skozi prostor in čas.



Slika 8: Heatmap odklonov strune za CFL=0,9. V barvni lestvici je razvidna periódnost vala in Lorenzova struktura propagacije.

Za dodatno analizo sem spremljal tudi ohranjanje energije valovne enačbe. Graf omenjeno kvantiteto $E(t)/E(0)$ za CFL=0.9 prikazuje slika 9. Energija se ohranja znotraj majhnih nihanj (¡ 1%), kar sem interpretiral kot potrditev stabilnosti in konzervativnosti sheme.



Slika 9: Razmerje energije $E(t)/E(0)$ skozi čas pri CFL=0,9. Majhna nihanja kažejo na delno numerično disipacijo, ki pa ostaja pod 1%.

3 Zaključek

V tej nalogi sem preizkusil in primerjal eksplicitne ter implicitne diferenčne metode za difuzijsko in valovno enačbo. Pri difuzijski enačbi sem ugotovil, da Crank–Nicolsonova metoda združuje stabilnost in višjo natančnost v času, medtem ko FTCS povzroča numerične artefakte pri velikih časovnih korakih. Pri valovni enačbi sem potrdil, da je stabilnost odvisna od CFL-št.