
Conteúdo

Prefácio	xvii
1 Representação e Modelagem de Sinais Objetivos	1
do Capítulo	1
1.1 Introdução	
1.2 Modelação Matemática de Sinais	12
1.3 Sinais de Tempo Contínuo	4
1.3.1 Operações de sinalização	5
1.3.2 Blocos de construção básicos para sinais de tempo contínuo.	15
1.3.3 Decomposição de impulsos para sinais de tempo contínuo.	28
1.3.4 Classificações de sinal.	30
1.3.5 Definições de energia e potência	35
1.3.6 Propriedades de simetria	42
1.3.7 Representação gráfica de sinais senoidais usando fasores.	47
1.4 Sinais de Tempo Discreto	49
1.4.1 Operações de sinalização	51
1.4.2 Blocos de construção básicos para sinais de tempo discreto.	57
1.4.3 Decomposição de impulsos para sinais discretos no tempo.	65
1.4.4 Classificações de sinal.	66
1.4.5 Definições de energia e potência	70
1.4.6 Propriedades de simetria	71
1.5 Leitura Adicional	73
Exercícios MATLAB.	73
Computação e representação gráfica de sinais de tempo contínuo.	73
Descrever sinais usando segmentos lineares por partes.	76
Operações de sinal para sinais de tempo contínuo.	77
Criação de sinais periódicos.	78
Funções para blocos de construção básicos.	79
Computação e representação gráfica de sinais de tempo discreto.	80
Extensão periódica de um sinal de tempo discreto.	81
Problemas	82
Problemas MATLAB.	90
Projetos MATLAB.	91

2 Analisando sistemas de tempo contínuo no domínio do tempo Objetivos do capítulo	95
2.1 Introdução	95
2.2 Linearidade e Invariância no Tempo.	98
2.2.1 Linearidade em sistemas de tempo contínuo.	98
2.2.2 Invariância temporal em sistemas de tempo contínuo.	101
2.2.3 Sistemas CTLTI	104
2.3 Equações Diferenciais para Sistemas de Tempo Contínuo	105
2.4 Equações Diferenciais Ordinárias de Coeficiente Constante	108
2.5 Resolvendo Equações Diferenciais	112
2.5.1 Solução da equação diferencial de primeira ordem.	113
2.5.2 Solução da equação diferencial geral.	118
2.5.3 Encontrando a resposta natural de um sistema de tempo contínuo.	119
2.5.4 Encontrando a resposta forçada de um sistema de tempo contínuo.	132
2.6 Representação em Diagrama de Blocos de Sistemas de Tempo Contínuo	137
2.7 Resposta ao Impulso e Convolução	141
2.7.1 Encontrando a resposta ao impulso de um sistema CTLTI.	142
2.7.2 Operação de convolução para sistemas CTLTI.	145
2.8 Causalidade em Sistemas de Tempo Contínuo	155
2.9 Estabilidade em Sistemas de Tempo Contínuo	157
2.10 Solução Numérica Aproximada de uma Equação Diferencial	160
2.11 Leitura Adicional	162
Exercícios MATLAB.	162
Testando a linearidade de sistemas de tempo contínuo.	162
Teste de invariância de tempo de sistemas de tempo contínuo.	164
Usando a linearidade para determinar a resposta do circuito RC.	166
Solução numérica do circuito RC pelo método de Euler.	167
Solução numérica melhorada do circuito RC.	170
Problemas	172
Problemas MATLAB.	180
Projetos MATLAB.	182
 3 Analisando sistemas de tempo discreto no domínio do tempo Objetivos do capítulo	185
3.1 Introdução	185
3.2 Linearidade e Invariância no Tempo.	186
3.2.1 Linearidade em sistemas de tempo discreto.	187
3.2.2 Invariância temporal em sistemas de tempo discreto.	189
3.2.3 Sistemas DTLTI	191
3.3 Equações de Diferença para Sistemas de Tempo Discreto	191
3.4 Equações de diferenças lineares de coeficiente constante	201
3.5 Resolvendo Equações de Diferenças	205
3.5.1 Encontrando a resposta natural de um sistema de tempo discreto.	207
3.5.2 Encontrando a resposta forçada de um sistema de tempo discreto.	216
3.6 Representação em diagrama de blocos de sistemas de tempo discreto.	221
3.7 Resposta ao Impulso e Convolução	226
3.7.1 Encontrando a resposta ao impulso de um sistema DTLTI.	226
3.7.2 Operação de convolução para sistemas DTLTI.	229
3.8 Causalidade em Sistemas de Tempo Discreto	238
3.9 Estabilidade em Sistemas de Tempo Discreto	238

3.10 Leitura Adicional	241
Exercícios MATLAB.	242
Funções de escrita para filtros de média móvel.	242
Testando as funções escritas no MATLAB Exercício 3.1.	242
Escrevendo e testando uma função para o suavizador exponencial.	244
Resolução iterativa de uma equação de diferenças.	244
Implementando um sistema de tempo discreto a partir de seu diagrama de blocos.	245
Sistema de tempo discreto do MATLAB Exercício 3.5 revisitado	248
Convolução usando MATLAB.	249
Implementando um filtro de média móvel por convolução.	251
Problemas	253
Problemas MATLAB.	259
Projetos MATLAB.	261
 4 Análise de Fourier para sinais e sistemas de tempo contínuo Objetivos do capítulo	265
4.1 Introdução	265
4.2 Análise de Sinais Periódicos de Tempo Contínuo	266
4.2.1 Aproximando um sinal periódico com funções trigonométricas.	266
4.2.2 Série trigonométrica de Fourier (TFS)	272
4.2.3 Série de Fourier Exponencial (EFS)	281
4.2.4 Série compacta de Fourier (CFS)	
4.2.5 Existência de séries de Fourier	295
4.2.6 Fenômeno de Gibbs	298
4.2.7 Propriedades da série de Fourier.	300
4.3 Análise de Sinais de Tempo Contínuo Não Periódicos	303
4.3.1 Transformada de Fourier	
4.3.2 Existência da transformada de Fourier	303
4.3.3 Desenvolvendo uma visão mais aprofundada.	308
4.3.4 Transformadas de Fourier de alguns sinais.	312
4.3.5 Propriedades da transformada de Fourier	330
4.3.6 Aplicação da transformada de Fourier a sinais periódicos.	367
4.4 Energia e Potência no Domínio da Frequência.	370
4.4.1 Teorema de Parseval	370
4.4.2 Densidade espectral de energia e potência.	
4.4.3 Autocorrelação.	372
4.5 Conceito de função do sistema	
4.6 Sistemas CTLTI com Sinais de Entrada Periódicos	381
4.6.1 Resposta de um sistema CTLTI a um sinal exponencial complexo.	384
4.6.2 Resposta de um sistema CTLTI a um sinal senoidal.	385
4.6.3 Resposta de um sistema CTLTI a um sinal de entrada periódico.	386
4.7 Sistemas CTLTI com sinais de entrada não periódicos	390
4.8 Leitura Adicional	393
Exercícios MATLAB.	396
Calculando aproximação harmônica finita para trem de pulso.	396
Calculando várias aproximações para trem de pulso.	397
Representando graficamente o espectro de linha no Exemplo 4.5.	398
Espectro de linha para o Exemplo 4.6.	400
Função do sistema gráfico para circuito RC.	401
Problemas	402

Problemas MATLAB.	409
Projetos MATLAB.	409
5 Análise de Fourier para Sinais e Sistemas de Tempo Discreto	413
Objetivos do Capítulo .	413 .
5.1 Introdução .	413 .
5.2 Análise de Sinais Periódicos de Tempo Discreto .	414 414 .
5.2.1 Série de Fourier em Tempo Discreto (DTFS) .	423
5.2.2 Propriedades do DTFS.	431 432 .
5.3 Análise de sinais de tempo discreto não periódicos.	433
5.3.1 Transformada de Fourier em tempo discreto (DTFT) .	435 .
5.3.2 Desenvolvendo uma visão mais aprofundada.	438 .
5.3.3 Existência da DTFT.	438 .
5.3.4 DTFT de alguns sinais.	438 .
5.3.5 Propriedades da DTFT.	446 .
5.3.6 Aplicando DTFT a sinais periódicos.	462 .
5.4 Energia e Potência no Domínio da Frequência .	466 .
5.4.1 Teorema de Parseval .	466 .
5.4.2 Densidade espectral de energia e potência.	467 .
5.4.3 Autocorrelação.	473 .
5.5 Conceito de Função do Sistema .	478 481
5.6 Sistemas DTLTI com sinais de entrada periódicos.	481
5.6.1 Resposta de um sistema DTLTI a um sinal exponencial complexo.	481
5.6.2 Resposta de um sistema DTLTI ao sinal senoidal.	482 .
5.6.3 Resposta de um sistema DTLTI a um sinal de entrada periódico.	482 .
5.7 Sistemas DTLTI com sinais de entrada não periódicos .	485
5.8 Transformada discreta de Fourier .	487
5.8.1 Relação da DFT com a DTFT .	488 491
5.8.2 Preenchimento zero .	493
5.8.3 Propriedades da DFT.	495
5.8.4 Usando a DFT para aproximar os coeficientes EFS.	510
5.8.5 Usando a DFT para aproximar a transformada de Fourier contínua.	511
5.9 Leitura Adicional .	513
Exercícios MATLAB.	513
Desenvolvendo funções para implementar análise e síntese de DTFS. .	514
Testando funções DTFS.	515
Desenvolvendo e testando uma função para implementar a convolução periódica.	515
Resposta de estado estacionário do sistema DTLTI à entrada senoidal.	516
Explorando a relação entre o DFT e o DTFT.	517
Usando o DFT para aproximar o DTFT. .	518
Desenvolvendo funções para mudança de tempo circular e reversão de tempo.	519
Computação de componentes simétricos e antissimétricos conjugados. .	520
Usando as propriedades de simetria da DFT. .	520
Convolução circular e linear usando a DFT.	521
Desenvolvendo uma função de convolução usando a DFT. .	522
Aproximação exponencial da série de Fourier usando a DFT .	522
Testando a função de aproximação EFS.	523
Aproximação por transformada de Fourier usando DFT.	524
Problemas .	526
Problemas MATLAB.	533

Projetos MATLAB.	535
6 Objetivos do Capítulo de Amostragem e Reconstrução .	537
6.1 Introdução .	537
6.2 Amostragem de um sinal de tempo contínuo.	539
6.2.1 Critério de amostragem de Nyquist. .	.
6.2.2 DTFT do sinal amostrado. .	545
6.2.3 Amostragem de sinais senoidais.	549
6.2.4 Questões práticas da amostragem .	555
6.3 Reconstrução de um sinal a partir de sua versão amostrada. .	.
6.4 Reamostragem de sinais de tempo discreto. .	560
6.4.1 Reduzindo a taxa de amostragem por um fator inteiro.	567
6.4.2 Aumentando a taxa de amostragem por um fator inteiro.	571
6.5 Leitura Adicional .	574
Exercícios MATLAB.	575
Relações espetrais na amostragem por impulso. .	575
DTFT de sinal discreto no tempo obtido por amostragem.	576
Amostragem de um sinal senoidal.	578
Amostragem natural.	579
Amostragem de espera de ordem zero. .	579
Gráficos de sinais para amostragem natural e de ordem zero.	580
Reconstrução da exponencial do lado direito.	582
Espectro de frequência do sinal reconstruído.	.
Reamostragem de sinais de tempo discreto. .	585
Problemas .	589
Problemas MATLAB.	592
Projetos MATLAB.	593
7 Transformada de Laplace para Sinais e Sistemas de Tempo Contínuo Objetivos do capítulo .	597
7.1 Introdução .	597
7.2 Características da Região de Convergência.	616
7.3 Propriedades da Transformada de Laplace.	620
7.3.1 Linearidade .	620
7.3.2 Mudança de horário .	623
7.3.3 Deslocamento no domínio s .	626
7.3.4 Escalonamento no tempo e s-domínios .	628
7.3.5 Diferenciação no domínio do tempo.	630
7.3.6 Diferenciação no domínio s .	631
7.3.7 Propriedade de convolução .	633
7.3.8 Propriedade de integração .	.
7.4 Transformada Laplace Inversa .	636
7.4.1 Expansão em frações parciais com pólos simples.	.
7.4.2 Expansão de frações parciais com múltiplos pólos. .	639
7.5 Usando a Transformada de Laplace com Sistemas CTLTI.	.
7.5.1 Relacionando a função do sistema com a equação diferencial .	646
7.5.2 Resposta de um sistema CTLTI a um sinal exponencial complexo.	651
7.5.3 Resposta de um sistema CTLTI a uma senóide amortecida exponencialmente.	653
7.5.4 Gráfico polo-zero para uma função do sistema.	655

7.5.5 Interpretação gráfica do gráfico pólo-zero.	657
7.5.6 Função e causalidade do sistema	663
7.5.7 Funcionamento e estabilidade do sistema	663
7.5.8 Sistemas Allpass	667
7.5.9 Sistemas inversos	670
7.5.10 Gráficos de Bode	672
7.6 Estruturas de Simulação para Sistemas CTLTI	685
7.6.1 Implementação de forma direta	685
7.6.2 Cascata e formas paralelas.	688
7.7 Transformada de Laplace unilateral.	690
7.7.1 Mudança de horário	691
7.7.2 Diferenciação no tempo	693
7.7.3 Teoremas de valor inicial e final.	696
7.8 Leitura Adicional	698
Exercícios MATLAB.	698
Gráfico tridimensional da transformada de Laplace.	698
Calculando a transformada de Fourier a partir da transformada de Laplace.	701
Representando graficamente pólos e zeros.	702
Cálculos de resíduos.	702
Cálculos simbólicos para a transformada de Laplace.	704
Calculando a resposta de frequência de um sistema a partir do layout polo-zero.	706
Resposta de frequência do layout polo-zero revisitado.	707
Objetos do sistema.	708
Parcelas de Bode.	709
Resolução de uma equação diferencial através da transformada de Laplace..	709
Problemas	710
Problemas MATLAB.	721
Projetos MATLAB.	723
8 z-Transformada para sinais e sistemas de tempo discreto Objetivos	725
do capítulo	725
8.1 Introdução	725
8.2 Características da Região de Convergência.	747
8.3 Propriedades da Transformada z.	753
8.3.1 Linearidade	753
8.3.2 Mudança de horário	757
8.3.3 Inversão do tempo	758
8.3.4 Multiplicação por um sinal exponencial.	760
8.3.5 Diferenciação no domínio z.	762
8.3.6 Propriedade de convolução	764
8.3.7 Valor inicial	768
8.3.8 Propriedade de correlação	769
8.3.9 Propriedade da soma	772
8.4 Transformada z inversa	774
8.4.1 Integral de inversão	774
8.4.2 Expansão de fração parcial	776
8.4.3 Divisão longa	783
8.5 Usando o z-Transform com sistemas DTLTI.	789
8.5.1 Relacionando a função do sistema com a equação de diferenças.	789
8.5.2 Resposta de um sistema DTLTI a um sinal exponencial complexo.	792

8.5.3 Resposta de um sistema DTLTI a uma senóide amortecida exponencialmente	795
8.5.4 Interpretação gráfica do gráfico pólo-zero	797
8.5.5 Função e causalidade do sistema	804
8.5.6 Função e estabilidade do sistema	808
8.5.7 Sistemas Allpass	811
8.5.8 Sistemas inversos	813
8.6 Estruturas de Implementação para Sistemas DTLTI	813
8.6.1 Implementações de forma direta	818
8.6.2 Formas em cascata e paralelas	818
8.7 Transformada z unilateral	822
8.8 Leitura Adicional	827
Exercícios MATLAB.	
Gráfico tridimensional da transformada z.	827
Calculando a DTFT a partir da transformada z.	829
Representando graficamente pólos e zeros.	830
Usando a função de convolução para multiplicação polinomial.	831
Expansão de fração parcial com MATLAB.	831
Desenvolvendo uma função para divisão longa.	832
Calculando a resposta de frequência de um sistema a partir do layout polo-zero.	834
Resposta de frequência do layout polo-zero revisitado.	835
Cálculos preliminares para um diagrama de blocos em forma de cascata.	836
Cálculos preliminares para um diagrama de blocos em forma de cascata revisitado.	837
Cálculos preliminares para um diagrama de blocos de forma paralela.	838
Implementando um sistema usando seções de segunda ordem.	839
Resolução de uma equação de diferenças através da transformada z.	841
Problemas	842
Problemas MATLAB.	
Projeto MATLAB.	852
9 Análise de Sistemas em Espaço de Estados	857
Objetivos do Capítulo	857
9.1 Introdução	857
9.2 Modelagem em Espaço de Estados de Sistemas de Tempo Contínuo	859
9.2.1 Modelos de espaço de estados para sistemas CTLTI	861
9.2.2 Obtenção do modelo de espaço de estado a partir da descrição física	863
9.2.3 Obtenção do modelo de espaço de estados a partir da equação diferencial	865
9.2.4 Obtendo o modelo de espaço de estados a partir da função do sistema	866
9.2.5 Modelos alternativos de espaço de estados	874
9.2.6 Sistemas CTLTI com múltiplas entradas e/ou saídas	876
9.2.7 Solução do modelo de espaço de estados	878
9.2.8 Cálculo da matriz de transição de estado	882
9.2.9 Obtendo a função do sistema a partir do modelo de espaço de estado	887
9.3 Modelagem de Espaço de Estados de Sistemas de Tempo Discreto	885
9.3.1 Modelos de espaço de estados para sistemas DTLTI	889
9.3.2 Obtenção do modelo de espaço de estados a partir da equação de diferenças	890
9.3.3 Obtendo o modelo de espaço de estados a partir da função do sistema	892
9.3.4 Solução do modelo de espaço de estados	896
9.3.5 Obtendo a função do sistema a partir do modelo de espaço de estado	898
9.4 Discretização do Modelo de Espaço de Estados em Tempo Contínuo	898
9.5 Leitura Adicional	901

Exercícios MATLAB.	902
Obtenção do modelo de espaço de estados a partir da função do sistema.	902
Diagonalizando a matriz de estado.	903
Cálculo da matriz de transição de estado.	905
Resolvendo a equação de estado homogêneo.	907
Cálculo simbólico da matriz de transição de estado.	909
Obtendo a função do sistema a partir do modelo de espaço de estados em tempo contínuo.	910
Obtendo a função do sistema a partir do modelo de espaço de estados em tempo discreto.	910
Discretização do modelo de espaço de estados.	911
Discretização pelo método de Euler.	912
Problemas	914
Problemas MATLAB.	920
 10 Análise e projeto de filtros Objetivos do capítulo	923
10.1 Introdução	923
10.2 Transmissão sem distorções	924
10.3 Filtros Ideais	929
10.4 Projeto de Filtros Analógicos	934
10.4.1 Filtros passa-baixa Butterworth	936
10.4.2 Filtros passa-baixo Chebyshev	943
10.4.3 Filtros passa-baixa Chebyshev inversos.	951
10.4.4 Transformações de filtros analógicos	955
10.5 Projeto de Filtros Digitais	959
10.5.1 Projeto de filtros IIR	959
10.5.2 Projeto de filtros FIR	971
10.6 Leitura Adicional	981
Exercícios MATLAB.	982
Projeto de filtro analógico Butterworth.	982
Polinômios de Chebyshev.	982
Projeto de filtro analógico Chebyshev tipo I.	983
Determinação dos parâmetros do filtro analógico de Chebyshev.	984
Projeto de filtro analógico Chebyshev tipo II.	985
Transformação do filtro passa-baixa para passa-alta.	986
Transformações de passa-baixa para passa-banda e passa-baixa para rejeição de banda.	987
Projeto de impulso invariante.	988
Projeto de filtro IIR usando transformação bilinear.	989
Projeto de filtro IIR usando transformação bilinear revisitado.	990
Um exemplo completo de projeto de filtro IIR.	991
Projeto do filtro FIR usando o método da série de Fourier.	992
Projeto de filtro FIR usando a técnica de Parks-McClellan.	994
Problemas	995
Problemas MATLAB.	1000
Projetos MATLAB.	1003

11 Modulação de amplitude	1007
Objetivos do capítulo	1007 .
11.1 Introdução	1007 .
11.2 A Necessidade de Modulação.	1009 .
11.3 Tipos de Modulação	1010 .
11.4 Modulação de Amplitude.	1011 .
11.4.1 Espectro de frequência do sinal AM.	1015 .
11.4.2 Equilíbrio de potência e eficiência da modulação	1024 .
11.4.3 Geração de sinais AM.	1026 .
11.4.4 Demodulação de sinais AM.	1033 .
11.5 Modulação de portadora suprimida de banda lateral dupla.	1038 .
11.5.1 Espectro de frequência do sinal DSB-SC	1040 .
11.6 Modulação de banda lateral única	1043 .
11.7 Leitura Adicional	1048 .
Exercícios MATLAB.	1048
Calcule e represente graficamente o sinal AM.	1048 .
Espectro EFS do sinal AM modulado por tom.	1049 .
Função para simular um modulador chaveado.	1050 .
Testando o modulador de comutação.	1051 .
Função para simular um modulador quadrático...	1052 .
Testando o modulador de lei quadrática.	1053 .
Função para simular detector de envelope.	1054 .
Testando a função do detector de envelope	1055 .
Problemas	1056 .
Problemas MATLAB.	1059 .
Projetos MATLAB.	1060 .
A Números Complexos e a Fórmula de Euler	1063
A.1 Introdução	1063 .
A.2 Aritmética com Números Complexos	1065 .
A.2.1 Adição e subtração	1065 .
A.2.2 Multiplicação e divisão	1066 .
A.3 Fórmula de Euler	1067 .
B Relações Matemáticas	1069
B.1 Identidades Trigonométricas	1069 .
B.2 Integrais Indefinidos	1070 .
B.3 Pares de transformadas de Laplace.	1070 .
B.4 Pares z-transformados	1071 .
C Formas Fechadas para Somas de Séries Geométricas	1073
C.1 Série Geométrica Infinita	1073 .
C.2 Séries Geométricas de Comprimentos Finitos	1074 .
C.3 Série Geométrica de Comprimento Finito (Forma Alternativa)	1074 .
D Ortogonalidade de funções de base	1075 .
D.1 Ortogonalidade para séries trigonométricas de Fourier	1075 .
D.2 Ortogonalidade para Séries de Fourier Exponencial	1077 .
D.3 Ortogonalidade para Séries de Fourier em Tempo Discreto	1077 .

E Expansão de Frações Parciais E.1	1079
Expansão de Frações Parciais para Sinais e Sistemas de Tempo Contínuo . . . 1079	E.2
Expansão de Frações Parciais para Sinais e Sistemas de Tempo Discreto . . . 1085	
F Revisão da álgebra matricial	1087
Índice	1091

Prefácio

O assunto de sinais e sistemas é um componente integral de qualquer programa de graduação em engenharia elétrica. Também tem aplicações em engenharia da computação, engenharia mecânica, engenharia aeroespacial e bioengenharia. Abrange análise, projeto e implementação de sistemas, bem como problemas envolvendo interação sinal-sistema. Uma sólida formação em sinais e sistemas é essencial para que o aluno possa se aventurar em áreas como processamento de sinais, processamento de imagens, sistemas de comunicação e controle.

Este livro foi escrito com o objetivo de fornecer um tratamento moderno de sinais e sistemas no nível de graduação. Abrange sinais e sistemas de tempo contínuo e discreto e pode ser usado como o livro-texto principal para um curso introdutório de um semestre em sinais e sistemas ou para uma sequência de curso de dois semestres. Também pode ser usado para auto-estudo. O estilo de escrita é amigável ao aluno, começando com o básico de cada tópico e avançando gradualmente. Provas e derivações que podem ser ignoradas com segurança em uma primeira leitura são codificadas por cores. Além disso, conceitos e conclusões importantes são destacados para se destacar. Nenhum conhecimento prévio de sinais e sistemas é assumido. O nível de apresentação é apropriado para um estudante de engenharia do segundo ou terceiro ano com experiência em cálculo diferencial.

Existem muitos livros excelentes disponíveis para uso em cursos de graduação na área de sinais e sistemas. Alguns amadureceram por longos períodos de tempo, décadas em vez de apenas anos, e ganharam grande popularidade e tração entre instrutores e alunos. Consequentemente, a escrita de um novo livro sobre sinais e sistemas é uma tarefa difícil, pois deve-se considerar as questões de quais novas ideias o livro empregaria e que valor agregaria ao ensino do assunto. Este livro-texto resultou dos esforços do autor nas últimas duas décadas na tentativa de encontrar maneiras de incorporar o software ao ensino da matéria não apenas como uma ferramenta computacional, mas também pedagógica. Ele utiliza o software MATLAB devido à sua popularidade na comunidade de engenharia e sua disponibilidade para uma variedade de sistemas operacionais. O uso do software é integrado ao material em vários níveis:

1. Programas interativos: Programas MATLAB baseados em interface gráfica com o usuário permitem a visualização de conceitos-chave de sinais e sistemas. Somos todos aprendizes visuais; tendemos a nos lembrar de uma cena interessante em um filme muito melhor do que algo que ouvimos no rádio ou algo que lemos em um livro. Indo um passo adiante, se também formos capazes de controlar a cena de um filme por meio de nossas ações, podemos nos lembrar ainda melhor das relações de causa e efeito entre nossas ações e os resultados que elas criam. Esta é talvez a principal razão pela qual as crianças podem se tornar muito proficientes em videogames. Um grande número de programas interativos estão disponíveis para download com este

livro didático. Alguns permitem que uma figura estática no texto ganhe vida em um computador onde o aluno pode alterar parâmetros-chave e observar os resultados de tais alterações para entender as relações de causa e efeito. Alguns pegam um exemplo resolvido no texto e o expandem de maneira aberta para permitir que o aluno crie cenários “e se”.

Alguns programas fornecem animações para conceitos difíceis de ensinar. Exemplos deste grupo incluem convolução linear, representação de sinais em série de Fourier, convolução periódica, visualizações tridimensionais para Laplace e transformadas z e resposta de sistemas em estado estacionário.

2. Código MATLAB para exemplos resolvidos: A maioria dos exemplos resolvidos em cada capítulo tem listagens MATLAB associadas disponíveis para download. Essas listas incluem comentários detalhados e são úteis de várias maneiras: Elas ajudam o aluno a comparar seu trabalho com uma solução de computador. Eles reforçam boas práticas de codificação. Eles também permitem que o aluno experimente alterar os valores dos parâmetros e executar o código novamente.
3. Exercícios de MATLAB: Além das listagens de código associadas a exemplos resolvidos, há uma seção no final de cada capítulo que contém exercícios autônomos de MATLAB que conduzem o aluno através da exploração e/ou simulação de um conceito, desenvolvendo o necessário código passo a passo. As etapas intermediárias são explicadas em detalhes e as boas práticas de codificação são aplicadas em todo o livro. Os exercícios são projetados para ajudar o aluno a se tornar mais proficiente com o MATLAB enquanto trabalha em problemas no contexto de sinais e sistemas. Além disso, os exercícios do MATLAB são sincronizados com a cobertura do material. Em pontos específicos do texto, o aluno é encaminhado para exercícios de MATLAB relevantes para o tópico que está sendo discutido. O objetivo não é apenas fornecer soluções rápidas para problemas no estilo livro de receitas, mas também desenvolver uma percepção adicional e uma compreensão mais profunda do material por meio do uso de so
4. Problemas e projetos baseados em MATLAB: Além dos problemas tradicionais de final de capítulo, o livro contém problemas que requerem soluções MATLAB e ideias de projetos baseados em MATLAB. Estes podem ser usados por instrutores como base para tarefas de computador.
5. A cobertura MATLAB do livro é integrada ao navegador de ajuda do aplicativo MATLAB. Isso permite que o aluno tenha o livro didático e um computador executando o MATLAB lado a lado enquanto estuda. Além disso, dá ao instrutor a liberdade de exibir os exercícios do MATLAB em um projetor durante a palestra, sem a necessidade de digitar e executar qualquer código, se preferir.

Embora o software seja parte integrante do livro-texto e tenha como objetivo distingui-lo de outros trabalhos da mesma área, ele “nunca atrapalha”. Se desejado, pode-se ignorar todo o conteúdo relacionado ao MATLAB e usá-lo como um livro tradicional para ensinar ou aprender sinais e sistemas. A cobertura da teoria não está repleta de segmentos de código.

Em vez disso, todos os exercícios, problemas e projetos do MATLAB são apresentados em suas próprias seções no final de cada capítulo, com referências fornecidas na narrativa do capítulo.

Além do uso do software, o livro inclui 287 exemplos resolvidos e 350 problemas tradicionais de final de capítulo.

Organização do Material

O Capítulo 1 trata da modelagem matemática de sinais de tempo contínuo e discreto.

Blocos de construção básicos para sinais de tempo contínuo e discreto são apresentados, bem como operações matemáticas aplicadas a sinais. Métodos de classificação para sinais são

discutido; definições de energia de sinal e potência de sinal são dadas. A ideia de decomposição de impulso de um sinal é apresentada como preparação para a discussão da operação de convolução nos capítulos posteriores. O conceito de fasor é introduzido para sinais senoidais de tempo contínuo. O capítulo inclui exercícios de MATLAB que enfocam as técnicas de geração e representação gráfica de sinais, desenvolvimento de funções para blocos de construção básicos e simulação de operações de sinal.

No Capítulo 2, o conceito de um sistema de tempo contínuo é introduzido. Simplificando suposições de linearidade e invariância de tempo que são úteis na construção de uma estrutura para análise e projeto de sistemas são discutidos. O capítulo prossegue com o uso de equações diferenciais lineares de coeficiente constante para descrever o comportamento de sistemas lineares. Em vez de resumir o histórico anterior na resolução de equações diferenciais ou simplesmente encaminhar o aluno aos livros didáticos de matemática, os métodos de solução de equações diferenciais são explicados em um nível suficiente para trabalhar com sistemas lineares e invariantes no tempo. Se os alunos já tiverem sido expostos a um curso sobre equações diferenciais, as seções correspondentes deste capítulo podem ser puladas ou revisadas rapidamente. A representação de uma equação diferencial por um diagrama de blocos também é brevemente discutida. Os conceitos de resposta ao impulso e convolução são desenvolvidos e sua ligação com a equação diferencial do sistema é mostrada. São dadas definições de estabilidade e causalidade, bem como as condições no domínio do tempo para um. Exercícios MATLAB são fornecidos para testar linearidade e invariância de tempo de sistemas de tempo contínuo e para obter soluções numéricas aproximadas para equações diferenciais.

O Capítulo 3 fornece um tratamento da análise no domínio do tempo para sistemas de tempo discreto e faz um paralelo com a cobertura do Capítulo 2. sistemas por meio de suas equações de diferenças. Métodos de solução para equações de diferenças são resumidos para fins de integridade. A representação de uma equação de diferenças por um diagrama de blocos é discutida. Os conceitos de resposta ao impulso e convolução são desenvolvidos para sistemas de tempo discreto, e sua relação com a equação de diferenças do sistema é mostrada. Os conceitos de estabilidade e causalidade também são detalhados para sistemas de tempo discreto. O capítulo inclui exercícios de MATLAB que enfocam a implementação de software de sistemas de tempo discreto a partir de equações de diferenças ou usando convolução de tempo discreto.

O Capítulo 4 trata da análise de Fourier de sinais e sistemas de tempo contínuo. Começa com a análise de sinais periódicos de tempo contínuo em termos de seu conteúdo de frequência. Primeiro, a ideia de encontrar a melhor aproximação para um sinal periódico através do uso de algumas funções trigonométricas é explorada para construir a intuição. Em seguida, são discutidas variantes trigonométricas, exponenciais e compactas da série de Fourier. A transformada de Fourier para sinais não periódicos é então introduzida generalizando a representação exponencial da série de Fourier de um sinal periódico com período infinitamente grande. Uma discussão do teorema de Parseval é fornecida levando aos conceitos de energia e densidade espectral de potência para sinais determinísticos. O conceito de função do sistema é introduzido para sistemas de tempo contínuo. A resposta de sistemas lineares e invariantes no tempo a sinais de entrada periódicos e não periódicos é estudada. O capítulo inclui uma série de exercícios de MATLAB que lidam com aproximações de harmônicos finitos para sinais periódicos e o problema de representar graficamente as funções do sistema.

O desenvolvimento do Capítulo 5 reflete o do Capítulo 4 para sinais de tempo discreto. A análise de sinais periódicos de tempo discreto através do uso de séries de Fourier de tempo discreto (DTFS) é apresentada. Em seguida, a transformada de Fourier em tempo discreto (DTFT) é desenvolvida generalizando a série de Fourier em tempo discreto. A relação entre os coeficientes DTFS de um sinal periódico e a DTFT de um único período isolado dele é enfatizada para destacar a ligação entre os índices dos coeficientes DTFS e as frequências angulares de

o espectro DTFT. Conceitos de espectros de energia e potência para sinais determinísticos de tempo discreto são discutidos. A função do sistema baseada em DTFT é introduzida. A resposta de sistemas lineares e invariantes no tempo a sinais de entrada periódicos e não periódicos é estudada. Uma introdução à transformada discreta de Fourier (DFT) é fornecida por meio de uma transição suave do DTFS. O capítulo fornece exercícios de MATLAB lidando com cálculos DTFS, convolução periódica, resposta de estado estacionário de sistemas lineares invariantes no tempo para sinais de entrada senoidais de tempo discreto, a relação entre DFT e DTFT, o uso do DFT para aproximar o DTFT, tempo circular deslocamento e reversão, propriedades de simetria da DFT, convolução via DFT e uso da DFT na aproximação de séries de Fourier contínuas e/ou transformadas.

O Capítulo 6 é dedicado ao tema da amostragem. Primeiro, o conceito de amostragem por impulso de um sinal de tempo contínuo é explorado. A relação entre as transformadas de Fourier do sinal original e sua versão amostrada por impulso é explorada, e o critério de amostragem de Nyquist é derivado. O DTFT do sinal de tempo discreto obtido por amostragem está relacionado à transformada de Fourier do sinal de tempo contínuo original. O fenômeno de aliasing é explicado através da ênfase especial dada à amostragem de sinais senoidais. São discutidas formas práticas de amostragem, como amostragem natural e amostragem por espera de ordem zero.

A reconstrução de um sinal contínuo a partir de sua versão em tempo discreto por meio de retenção de ordem zero e primeira, bem como interpolação de banda limitada, é estudada. O capítulo termina com uma discussão sobre reamostragem de sinais de tempo discreto e os conceitos de dizimação e interpolação. Vários exercícios MATLAB são fornecidos com foco na amostragem de senoides, amostragem e reconstrução de ordem zero e primeira, relações espectrais na amostragem e reamostragem de sinais de tempo discreto.

No Capítulo 7, a transformada de Laplace é discutida como uma ferramenta de análise para sinais e sistemas de tempo contínuo. Sua relação com a transformada de Fourier de tempo contínuo é explorada. A maior parte do capítulo concentra-se na variante mais geral e bilateral da forma transformada de Laplace. As características de convergência da transformada, bem como o conceito de região de convergência são introduzidos. Em seguida, as propriedades fundamentais da transformada de Laplace são detalhadas e exemplos resolvidos de utilização dessas propriedades são fornecidos. O método de encontrar a transformada inversa de Laplace por meio do uso da expansão da fração parcial é explicado.

O capítulo prossegue com a aplicação da transformada de Laplace à análise de sistemas lineares invariantes no tempo. Ênfase especial é colocada em fazer as conexões entre a função do sistema no domínio s, a equação diferencial e a resposta ao impulso. É ilustrada a interpretação gráfica de diagramas polo-zero com a finalidade de determinar a resposta de frequência de sistemas CT-LTI. O capítulo também fornece uma discussão dos conceitos de causalidade e estabilidade conforme eles se relacionam com a função do sistema de domínio s. As características dos sistemas allpass e dos sistemas inversos são descritas e uma introdução aos gráficos de Bode é fornecida. As estruturas de forma direta, cascata e simulação paralela para sistemas CT-LTI são derivadas da função do sistema s-domain. Finalmente, a versão unilateral da transformada de Laplace é apresentada como uma ferramenta prática para uso na solução de equações diferenciais lineares de coeficiente constante com condições iniciais especificadas. O capítulo inclui uma série de exercícios de MATLAB que lidam com a visualização tridimensional da transformada de Laplace, cálculo da transformada de Fourier a partir da transformada de Laplace, gráficos de diagramas de polo-zero, cálculos de resíduos para expansão de frações parciais, cálculos simbólicos para a transformada de Laplace, cálculo da resposta de frequência do layout polo-zero, o uso de objetos do sistema MATLAB, gráficos de Bode e solução de uma equação diferencial usando a transformada unilateral de Laplace.

O Capítulo 8 é dedicado ao estudo da transformada z, e sua estrutura é semelhante à do Capítulo 7 para a transformada de Laplace. A transformada z é introduzida como uma forma mais geral

versão da transformada de Fourier em tempo discreto (DTFT) estudada no Capítulo 5. A relação entre a transformada z e a DTFT é ilustrada. As características de convergência da transformada z são explicadas e a importância do conceito de região de convergência é destacada. Propriedades fundamentais da transformada z são detalhadas juntamente com exemplos resolvidos de seu uso. O problema de encontrar a transformada z inversa usando a integral de inversão, expansão de fração parcial e divisão longa é discutido. Exemplos são fornecidos com soluções detalhadas usando a expansão de fração parcial e divisão longa para calcular a transformada inversa para todos os tipos possíveis da região de convergência. A aplicação da transformada z à análise de sistemas lineares invariantes no tempo é tratada em detalhes. As conexões entre a função do sistema no domínio z, a equação de diferença e a resposta ao impulso são exploradas para fornecer informações. É ilustrada a interpretação gráfica de diagramas pólo-zero com a finalidade de determinar a resposta de frequência de sistemas DTLTI.

Os conceitos de causalidade e estabilidade são discutidos sob a perspectiva da função do sistema no domínio z. As características dos sistemas allpass e dos sistemas inversos são descritas. Estruturas de implementação direta, cascata e paralela para sistemas DTLTI são derivadas da função do sistema z-domain. A versão unilateral da transformada z é apresentada como uma ferramenta prática para uso na resolução de equações de diferenças lineares de coeficiente constante com condições iniciais especificadas. O capítulo inclui uma série de exercícios MATLAB que lidam com a visualização tridimensional da transformada z, cálculo da DTFT a partir da transformada z, gráficos de diagramas pólo-zero, relação entre convolução e multiplicação polinomial, expansão de fração parcial e divisão longa, cálculo da resposta de frequência do layout polo-zero, cálculos para o desenvolvimento de diagramas de blocos, implementação de sistemas DTLTI usando seções de segunda ordem em cascata e solução de uma equação de diferença usando a transformada z unilateral.

O Capítulo 9 fornece um tratamento introdutório da análise de espaço de estados de sistemas de tempo contínuo e de tempo discreto. A análise de sistemas de tempo contínuo é estudada na Seção 9.1, seguida por uma análise similar de sistemas de tempo discreto na Seção 9.2. Essa estrutura permite que o material adequado seja escolhido com base nos conteúdos de um determinado curso. Dentro de cada uma das duas primeiras seções, o conceito de variáveis de estado é desenvolvido começando com uma equação diferencial (ou diferença) e expressando-a em termos de equações diferenciais ou de diferenças de primeira ordem. Os métodos de obtenção de modelos de espaço de estado a partir de uma descrição física do sistema ou de uma função do sistema também são detalhados conforme aplicável. A solução do modelo de espaço de estado é dada tanto para sistemas de tempo contínuo quanto para sistemas de tempo discreto. A Seção 9.3 é dedicada ao problema do uso de modelos de espaço de estados para obtenção de um sistema de tempo discreto que se aproxime do comportamento de um sistema de tempo contínuo. Os exercícios do MATLAB para este capítulo tratam da obtenção de um modelo de espaço de estado a partir da função do sistema, diagonalização da matriz de estado, cálculo da matriz de transição de estado, solução da equação de estado homogêneo, cálculo simbólico da matriz de transição de estado, obtenção da função do sistema de o modelo de espaço de estado e a discretização do modelo de espaço de estado.

O Capítulo 10 concentra-se na aplicação do material apresentado até agora para a análise e projeto de filtros de tempo contínuo e discreto. A discussão começa com uma introdução à transmissão sem distorção e ao comportamento ideal do filtro. Um tratamento introdutório de projeto de filtro analógico usando Butterworth, Chebyshev e funções de aproximação inversa de Chebyshev é dado. Embora a maioria dos cursos introdutórios sobre sinais e sistemas ignore o projeto de filtros analógicos, é útil para o aluno ter uma compreensão básica das ideias por trás do projeto de filtros analógicos para apreciar o uso de protótipos analógicos em filtros de tempo discreto e entender o interação de parâmetros como ordem do filtro, frequências críticas, ondulação e atenuação. A discussão de filtros analógicos é seguida por uma discussão de métodos de projeto para filtros de tempo discreto IIR e FIR. Os exercícios de MATLAB incluídos neste

o capítulo se concentra no uso do MATLAB para projeto de filtro analógico usando aproximações de Butterworth e Chebyshev, transformações de frequência de passa-baixa para outros tipos de filtro, projeto IIR usando invariância de impulso e transformação bilinear e projeto de filtro FIR usando o método da série Fourier ou o método Parks-McClellan. Em vez de usar a “Ferramenta de Análise e Projeto de Filtros” do MATLAB, a ênfase é colocada no uso de funções primitivas para o projeto passo a passo de filtros de uma forma paralela à discussão do capítulo.

O Capítulo 11 fornece um tratamento introdutório de outra aplicação do material na área de sistemas de comunicação, ou seja, modulação de amplitude. Começa introduzindo a ideia de modulação e a necessidade dela. A geração de sinais modulados em amplitude e sua análise no domínio da frequência usando as técnicas desenvolvidas nos capítulos anteriores são discutidas. Técnicas para demodulação de sinais modulados em amplitude são resumidas. Duas variantes de modulação de amplitude, ou seja, modulação de portadora suprimida de banda lateral dupla e modulação de banda lateral única, são brevemente apresentadas. O capítulo contém exercícios de MATLAB que abrangem computação e representação gráfica do sinal AM, computação da representação exponencial da série de Fourier do sinal AM modulado por tom, simulação do modulador de comutação e do modulador de lei quadrática e simulação do detector de envelope.

Vários apêndices são fornecidos para números complexos e a fórmula de Euler, várias relações matemáticas, provas de ortogonalidade para as funções de base usadas na análise de Fourier, expansão de frações parciais e uma breve revisão da álgebra matricial.

Para o instrutor

A organização do material permite que o livro seja usado em uma variedade de circunstâncias e para uma variedade de necessidades.

- O material pode ser coberto em sua totalidade em uma sequência de dois semestres.
- Um curso de um semestre sobre sinais e sistemas de tempo contínuo pode ser baseado nas Seções 1 a 3 do Capítulo 1, seguidas pelos Capítulos 2, 4, 7. As seções do Capítulo 2 que lidam com a solução de equações diferenciais de coeficiente constante linear podem ser pulou ou revisou rapidamente se os alunos tiveram um curso anterior sobre equações diferenciais. Materiais selecionados dos Capítulos 9 (Seção 9.1), 10 (Seções 10.1 a 10.4) e 11 podem ser usados com base na disponibilidade de tempo e nas necessidades curriculares.
- Um curso de um semestre sobre sinais e sistemas de tempo discreto pode ser baseado na Seção 4 do Capítulo 1, seguido pelos Capítulos 3, 5, 6 e 8. Material selecionado dos Capítulos 9 (Seções 9.3 e 9.4), 10 (Seção 10.5) e 11 podem ser utilizados conforme disponibilidade de tempo e necessidades curriculares.

Materiais Suplementares

Os seguintes materiais complementares estão disponíveis para os instrutores que adotarem o livro-texto para uso em sala de aula:

- Um manual de soluções em formato pdf que contém soluções para os problemas no final de cada capítulo, incluindo os problemas do MATLAB
- Slides de apresentação para palestras em formato pdf

- Slides de apresentação em formato pdf para as soluções de problemas individuais, adequados para usar em palestras.
- Arquivos de imagem em formato postscript encapsulado para as figuras do livro

Os seguintes materiais complementares estão disponíveis para todos os usuários do livro:

- Um arquivo para download contendo arquivos de código MATLAB para programas interativos baseados em GUI, exercícios e exemplos no livro, bem como os arquivos necessários para integrá-los ao navegador de ajuda do MATLAB

Materiais para download estão disponíveis no site da editora e em

www.signalsandsystems.org

Agradecimentos

Sou grato a muitos de meus colegas do corpo docente que revisaram partes do manuscrito e me deram ideias e sugestões para melhorias. O feedback deles ajudou a moldar o conteúdo do livro. Também sou grato aos meus alunos do ECE 436, que usaram partes do material em vários estágios de desenvolvimento e forneceram feedback.

A experiência da equipe de projeto da CRC press foi inestimável. Gostaria de agradecer a Nora Konopka por ser uma editora maravilhosa com quem trabalhar. Agradecimentos também a Charlotte Byrnes e Jessica Vakili por sua paciência e encorajamento ao longo do projeto.

O professor Ronald C. Houts, meu orientador desde a época da pós-graduação, desenvolveu e alimentou meu interesse inicial no campo do processamento de sinais, e sou grato por isso.

Por fim, gostaria de agradecer à minha namorada, Esin, por me aturar e me apoiar durante a redação deste texto.

Capítulo 1

Representação de sinal e Modelagem

Objetivos do Capítulo

- Compreender o conceito de sinal e como trabalhar com modelos matemáticos de sinais.
- Discutir tipos de sinais fundamentais e operações de sinais usados no estudo de sinais e sistemas. Experimente métodos de simulação de sinais de tempo contínuo e discreto com o MATLAB.
- Aprender várias maneiras de classificar sinais e discutir propriedades de simetria.
- Explorar as características dos sinais senoidais. Aprenda a representação fasorial da senoidal sinais e como os fasores ajudam na análise.
- Compreender a decomposição de sinais usando funções de impulso unitário de tipo.
- Aprenda as definições de energia e potência.

1.1 Introdução

Os sinais fazem parte do nosso dia a dia. Trabalhamos com uma ampla variedade de sinais no dia a dia, quer percebemos ou não. Quando um comentarista em um estúdio de transmissão de rádio fala em um microfone, as ondas sonoras criam mudanças na pressão do ar ao redor do microfone. Se estivermos no mesmo estúdio, as membranas em nossos ouvidos detectam as mudanças na pressão do ar e as percebemos como som. Mudanças de pressão também causam vibrações na membrana dentro do microfone. Em resposta, o microfone produz uma tensão elétrica variável no tempo de tal forma que as variações da tensão elétrica

imitar as variações de pressão do ar no estúdio. Assim, o microfone atua como um transdutor que converte um sinal acústico em um sinal elétrico. Este é apenas um passo no processo de transmissão de rádio. O sinal elétrico produzido por um microfone é modificado e aprimorado de várias maneiras, e sua força é aumentada. Em seguida, é aplicado a uma antena transmissora que o converte em um sinal eletromagnético adequado para transmissão aérea a longas distâncias. Essas ondas eletromagnéticas preenchem o espaço aéreo em que vivemos. Um sinal eletromagnético captado pela antena de um receptor de rádio é convertido de volta na forma de um sinal de tensão elétrica que é posteriormente processado no receptor de rádio e enviado a um alto-falante. O alto-falante converte esse sinal de tensão elétrica em vibrações que recriam as variações de pressão do ar semelhantes àquelas que iniciaram todo o processo no estúdio de transmissão.

O exemplo de transmissão discutido acima inclui sinais acústicos, elétricos e eletromagnéticos. Exemplos de diferentes sinais físicos também podem ser encontrados ao nosso redor. Variações no tempo de grandezas como força, torque, velocidade e aceleração podem ser tomadas como exemplos de sinais mecânicos. Por exemplo, em um automóvel, um tacômetro mede a velocidade do veículo como um sinal e produz uma tensão elétrica cuja força é proporcional à velocidade em cada instante de tempo. Posteriormente, o sinal elétrico produzido pelo tacômetro pode ser utilizado em um sistema de controle de velocidade para regular a velocidade do veículo.

Considere uma fotografia em escala de cinza impressa a partir de um negativo de filme obtido com uma câmera de filme antigo. Cada ponto da fotografia possui um tom de cinza que varia do preto puro ao branco puro. Se pudermos representar tons de cinza numericamente, digamos com valores variando de 0,0 a 1,0, então a fotografia pode ser tomada como um sinal. Nesse caso, a força de cada ponto não é uma função do tempo, mas sim uma função das distâncias horizontal e vertical de um ponto de referência, como o canto inferior esquerdo da fotografia. Se uma câmera digital for usada para capturar uma imagem, o sinal resultante será ligeiramente diferente. O sensor de uma câmera digital é feito de células fotossensíveis dispostas em um padrão de grade retangular. Cada célula mede a intensidade da luz que recebe e produz uma voltagem proporcional a ela. Assim, o sinal que representa uma imagem digital também consiste em valores de intensidade de luz em função das distâncias horizontais e verticais. A diferença é que, devido ao número finito de células no sensor, apenas os valores de distância que são múltiplos da largura da célula e da altura da célula são significativos. A informação de intensidade de luz só existe para determinados valores de distância, sendo indefinida entre eles.

Exemplos de sinais também podem ser encontrados fora das disciplinas de engenharia. Os mercados financeiros, por exemplo, dependem de certos indicadores econômicos para decisões de investimento. Um desses indicadores amplamente utilizado é o Dow Jones Industrial Average (DJIA), que é calculado como uma média ponderada dos preços das ações de 30 grandes empresas públicas. As variações diárias do DJIA podem ser usadas pelos investidores para avaliar a saúde da economia e tomar decisões de compra ou venda.

1.2 Modelagem Matemática de Sinais

Na seção anterior, discutimos vários exemplos de sinais que encontramos no dia-a-dia. Esses sinais estão em uma ou outra forma física; alguns são sinais elétricos, alguns estão na forma de variações da pressão do ar ao longo do tempo, alguns correspondem a variações no tempo de uma força ou um torque em um sistema mecânico e alguns representam intensidade de luz e/ou cor em função da distância horizontal e vertical de um ponto de referência. Lá

são outras formas físicas também. Ao trabalhar com sinais, temos um ou ambos os seguintes objetivos em mente:

1. Compreender as características do sinal quanto ao seu comportamento no tempo e quanto às frequências que contém (análise do sinal).
Por exemplo, considere o sinal elétrico produzido por um microfone. Duas pessoas pronunciando a mesma palavra no microfone não produzem necessariamente o mesmo sinal exato. Seria possível reconhecer o locutor pelo seu sinal? Seria possível identificar a palavra falada?
2. Desenvolver métodos de criação de sinais com características desejadas (síntese de sinal).
Considere um teclado eletrônico que sintetiza sons de diferentes instrumentos musicais, como o piano e o violino. Naturalmente, para criar o som de qualquer um dos instrumentos, precisamos entender as características dos sons que esses instrumentos produzem. Outros exemplos são a síntese da fala humana a partir de texto impresso por software de conversão de texto em fala e a síntese de sinais de teste em um laboratório para testar e calibrar equipamentos especializados.

Além disso, os sinais são freqüentemente usados em conjunto com sistemas. Um sinal é aplicado a um sistema como entrada e o sistema responde ao sinal produzindo outro sinal chamado de saída. Por exemplo, o sinal de uma guitarra elétrica pode ser aplicado (conectado via cabo) a um sistema que aumenta sua potência ou aprimora acusticamente o som. Em problemas que envolvem a interação de um sinal com um sistema podemos ter objetivos adicionais:

3. Compreender como um sistema responde a um sinal e porquê (análise do sistema).
Que características do sinal de entrada o sistema retém desde sua entrada até sua saída? Quais características do sinal de entrada são modificadas pelo sistema e de que maneiras?
4. Desenvolver métodos de construção de um sistema que responda a um sinal de alguma forma prescrita (síntese do sistema).
Compreender as diferentes características dos sinais também nos ajudará no projeto de sistemas que afetam os sinais das maneiras desejadas. Um exemplo é o projeto de um sistema para realçar o som de um violão e dar a ele a “sensação” de ser tocado em uma sala de concertos com certas propriedades acústicas. Outro exemplo é o sistema de controle automático de velocidade de um automóvel que é necessário para acelerar ou desacelerar o automóvel até a velocidade desejada dentro de restrições prescritas.

Ao analisar sinais de diferentes formas físicas, precisamos desenvolver uma estrutura uniforme. Certamente não seria prático desenvolver diferentes métodos de análise para diferentes tipos de sinais físicos. Portanto, trabalhamos com modelos matemáticos de sinais físicos.

A maioria dos exemplos utilizados em nossa discussão até agora envolvia sinais na forma de uma quantidade física variando ao longo do tempo. Existem exceções; alguns sinais podem estar na forma de variações de uma quantidade física sobre uma variável espacial. Exemplos disso são a distribuição da força ao longo do comprimento de uma viga de aço ou a distribuição da intensidade da luz em diferentes pontos de uma imagem. Para simplificar a discussão, focaremos nossa atenção em sinais que são funções do tempo. As técnicas que serão desenvolvidas são igualmente aplicáveis a sinais que também utilizam outras variáveis independentes.

O modelo matemático para um sinal está na forma de uma fórmula, função, algoritmo ou gráfico que descreve aproximadamente as variações de tempo do sinal físico.

1.3 Sinais de Tempo Contínuo

Considere $x(t)$, uma função matemática do tempo escolhida para aproximar a força da quantidade física no instante de tempo t . Nesta relação, t é a variável independente e x é a variável dependente. O sinal $x(t)$ é referido como um sinal de tempo contínuo ou um sinal analógico. Um exemplo de um sinal de tempo contínuo é mostrado na Fig. 1.1.

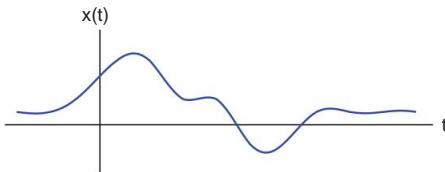


Figura 1.1 – Um sinal de tempo contínuo.

A Fig. 1.2 ilustra o modelo matemático para um segmento de 25 ms do sinal de voz que corresponde à vogal “o” na palavra “hello”. Da mesma forma, um segmento de 25 ms do som de um violino tocando a nota A3 é mostrado na Fig. 1.3.

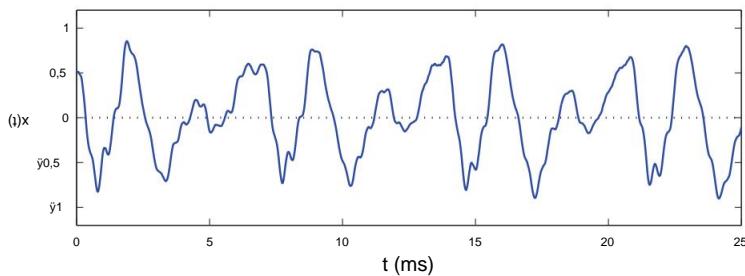


Figura 1.2 – Um segmento da vogal “o” da palavra “hello”.

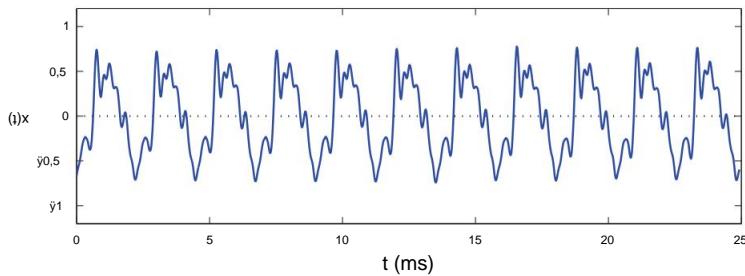


Figura 1.3 – Um segmento do som de um violino.

Alguns sinais podem ser descritos analiticamente. Por exemplo, a função

$$x(t) = 5 \operatorname{sen}(12t)$$

descreve um sinal senoidal. Às vezes é conveniente descrever um modelo de sinal juntando vários segmentos de sinal, cada um modelado com uma função diferente. Um

1.3. Sinais de Tempo Contínuo

exemplo disso é

$$x(t) = \begin{cases} e^{-3t} - e^{-6t} & , t \geq 0 \\ 0 & , t < 0 \end{cases}$$

Recursos de software: Veja MATLAB Exercício 1.1.

1.3.1 Operações de sinal

Nesta seção, discutiremos as operações no domínio do tempo que são comumente usadas no trabalho com sinais de tempo contínuo. Alguns são operadores aritméticos simples. Exemplos disso são adição e multiplicação de sinais no domínio do tempo, adição de um deslocamento constante a um sinal e multiplicação de um sinal com um fator de ganho constante. Outras operações de sinal que são úteis na definição de relações de sinal são deslocamento de tempo, escalonamento de tempo e reversão de tempo. Operações de sinal mais avançadas, como convolução e amostragem, serão abordadas por conta própria nas partes posteriores deste livro.

Operações aritméticas

A adição de um deslocamento constante A ao sinal $x(t)$ é expressa como

$$g(t) = x(t) + A \quad (1.1)$$

Em cada instante de tempo, a amplitude do resultado $g(t)$ é igual à amplitude do sinal $x(t)$ mais o valor de deslocamento constante A . Um exemplo prático de adicionar um deslocamento constante a um sinal é a remoção do componente dc na saída de um circuito amplificador classe A através de acoplamento capacitivo. A Fig. 1.4 ilustra a adição de valores positivos e negativos de deslocamento a um sinal.

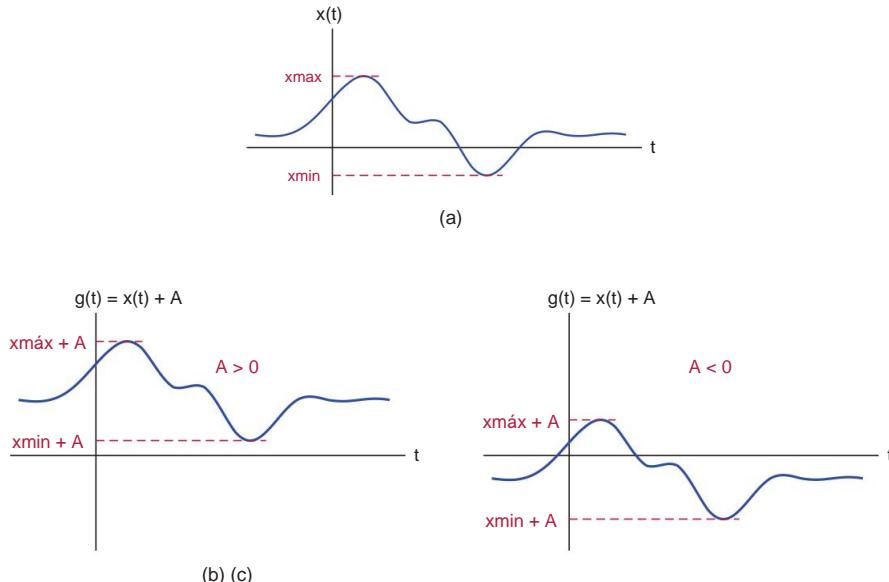


Figura 1.4 – Adicionando um offset A ao sinal $x(t)$: (a) Sinal original $x(t)$, (b) $g(t) = x(t) + A$ com $A > 0$, (c) $g(t) = x(t) + A$ com $A < 0$.

Um sinal também pode ser multiplicado com um fator de ganho constante:

$$g(t) = B \cdot x(t) \quad (1.2)$$

O resultado desta operação é um sinal $g(t)$, cuja amplitude é igual ao produto da amplitude do sinal $x(t)$ e o fator de ganho constante B em cada instante de tempo.

Isso é ilustrado na Fig. 1.5.

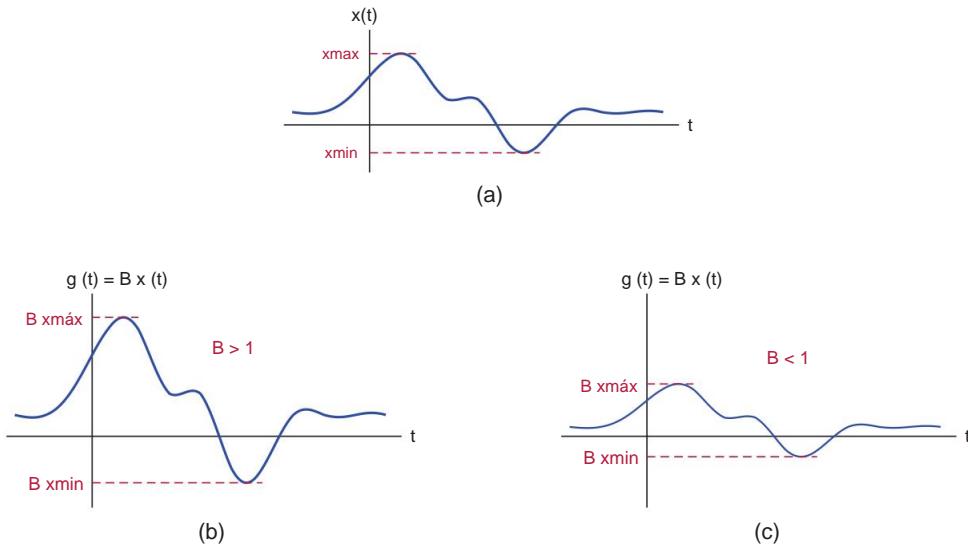


Figura 1.5 – Multiplicando o sinal $x(t)$ com um fator de ganho constante: (a) Sinal original $x(t)$, (b) $g(t) = B \cdot x(t)$ com $B > 1$, (c) $g(t) = B \cdot x(t)$ com $B < 1$.

Um exemplo prático da Eq. (1.2) é um amplificador de ganho constante usado para amplificar o sinal de tensão produzido por um microfone.

A adição de dois sinais é realizada adicionando as amplitudes dos dois sinais em cada instante de tempo. Para dois sinais $x_1(t)$ e $x_2(t)$, a soma

$$g(t) = x_1(t) + x_2(t) \quad (1.3)$$

é calculado em cada instante de tempo $t = t_1$ adicionando os valores $x_1(t_1)$ e $x_2(t_2)$. Isso é ilustrado na Fig. 1.6.

Somadores de sinal são úteis em uma ampla variedade de aplicações. Por exemplo, em um estúdio de gravação de áudio, os sinais provenientes de vários microfones podem ser somados para criar uma peça musical complexa.

A multiplicação de dois sinais é realizada de maneira semelhante. Dados dois sinais $x_1(t)$ e $x_2(t)$, o produto

$$g(t) = x_1(t) \cdot x_2(t) \quad (1.4)$$

é um sinal cuja amplitude em qualquer instante de tempo $t = t_1$ é igual ao produto das amplitudes dos sinais $x_1(t)$ e $x_2(t)$ no mesmo instante de tempo, ou seja, $g(t_1) = x_1(t_1) \cdot x_2(t_1)$. Isso é ilustrado na Fig. 1.7.

Um exemplo de aplicação prática da multiplicação de dois sinais é a modulação da amplitude de um sinal portador senoidal com um sinal de mensagem. Isso será explorado quando discutirmos a modulação de amplitude no Capítulo 11.

1.3. Sinais de Tempo Contínuo

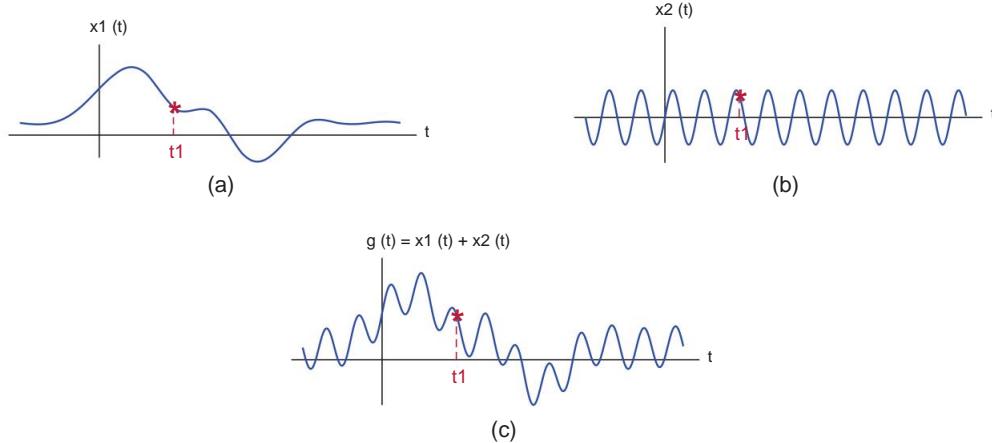


Figura 1.6 – Adicionando sinais de tempo contínuo: (a) O sinal $x_1(t)$, (b) o sinal $x_2(t)$, (c) o sinal de soma $g(t) = x_1(t) + x_2(t)$.

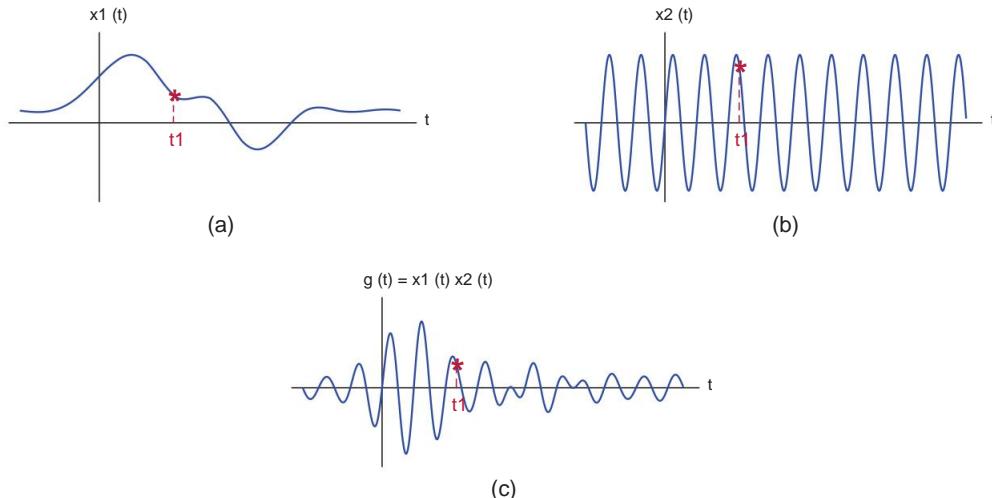


Figura 1.7 – Multiplicando sinais de tempo contínuo: (a) O sinal $x_1(t)$, (b) o sinal $x_2(t)$, (c) o sinal do produto $g(t) = x_1(t) \cdot x_2(t)$.

Exemplo 1.1: Offset e ganho

constantes Considere o sinal mostrado na Fig. 1.8. Esboce os sinais

a. $g_1(t) = 1,5 x(t) + 1$

b. $g_2(t) = -1,3 x(t) + 1$

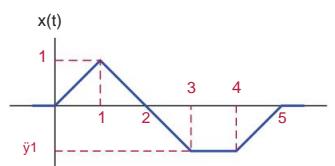


Figura 1.8 – O sinal $x(t)$ para o Exemplo 1.1.

Solução:

a. Multiplicar o sinal com um fator de ganho constante de 1,5 faz com que todas as amplitudes do sinal sejam escalonadas em 1,5. O sinal intermediário $g1a(t) = 1,5 \times (t)$ é mostrado na Fig. 1.9(a).

Na próxima etapa, o sinal $g1(t) = g1a(t) - 1$ é obtido diminuindo o gráfico do sinal $g1a(t)$ em 1 em todos os instantes de tempo. O resultado é mostrado na Fig. 1.9(b).

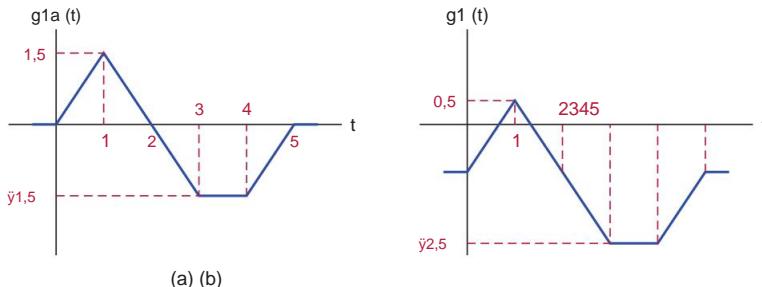


Figura 1.9 – Sinais para o Exemplo 1.1: (a) $g1a(t) = 1,5 \times (t)$, (b) $g1(t) = 1,5 \times (t) - 1$.

b. Procederemos de forma semelhante. Neste caso, o fator de ganho é negativo, então as amplitudes do sinal exibirão mudança de sinal. O sinal intermediário $g2a(t) = -1,3 \times (t)$ é mostrado na Fig. 1.10(a). Na próxima etapa, o sinal $g2(t) = g2a(t) + 1$ é obtido elevando o gráfico do sinal $g2a(t)$ em 1 em todos os instantes de tempo. O resultado é mostrado na Fig. 1.10(b).

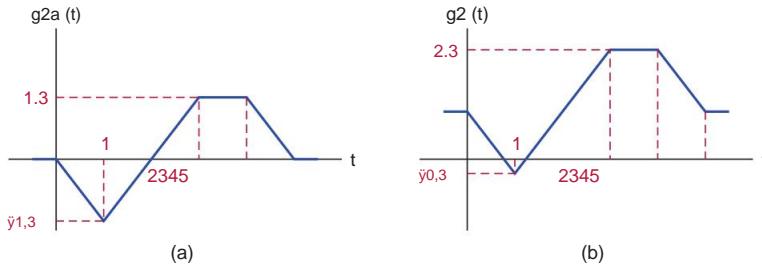


Figura 1.10 – Sinais para o Exemplo 1.1: (a) $g2a(t) = -1,3 \times (t)$, (b) $g2(t) = -1,3 \times (t) + 1$.

Recursos de software: Veja MATLAB Exercício 1.2.

Demonstração Interativa: sop demo1

O programa de demonstração “sop demo1.m” é baseado no Exemplo 1.1. Ele permite a experimentação com operações elementares de sinal envolvendo deslocamento constante e fator de ganho constante.

Especificamente, o sinal $x(t)$ mostrado na Fig. 1.8 é usado como base do programa de demonstração, e o sinal

$$g(t) = Bx(t) + A$$

é calculado e representado graficamente. Os parâmetros A e B podem ser ajustados por meio de controles deslizantes.

Recursos de software:

sop demo1.m

1.3. Sinais de Tempo Contínuo

Exemplo 1.2: Operações aritméticas com sinais de tempo contínuo

Dois sinais $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são mostrados na Fig. 1.11. Esboce os sinais

- a. $g_1(t) = x_1(t) + x_2(t)$ b. $g_2(t) = x_1(t) \cdot x_2(t)$

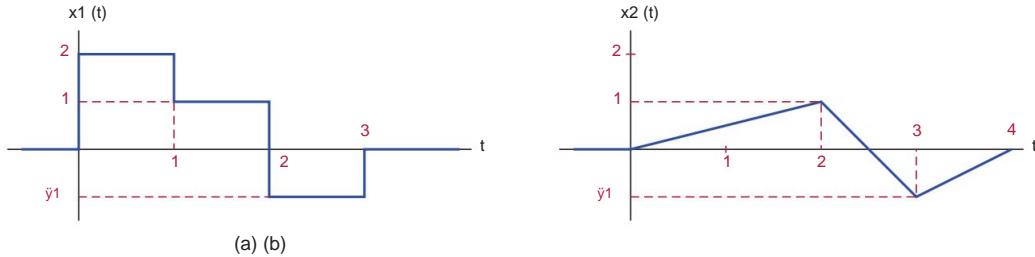


Figura 1.11 – Sinais $x_1(t)$ e $x_2(t)$ para o Exemplo 1.2.

Solução: As seguintes descrições analíticas dos sinais $x_1(t)$ e $x_2(t)$ podem ser inferidas a partir das descrições gráficas fornecidas na Fig. 1.11:

$$x_1(t) = \begin{cases} 2, & 0 < t < 1 \\ 1, & 1 < t < 2 \\ 0, & \text{de outra forma} \end{cases}$$

$$\text{e } x_2(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t, & 0 < t < 2 \\ 2t+5, & 2 < t < 3 \\ t-4, & 3 < t < 4 \\ 0, & \text{de outra forma} \end{cases}$$

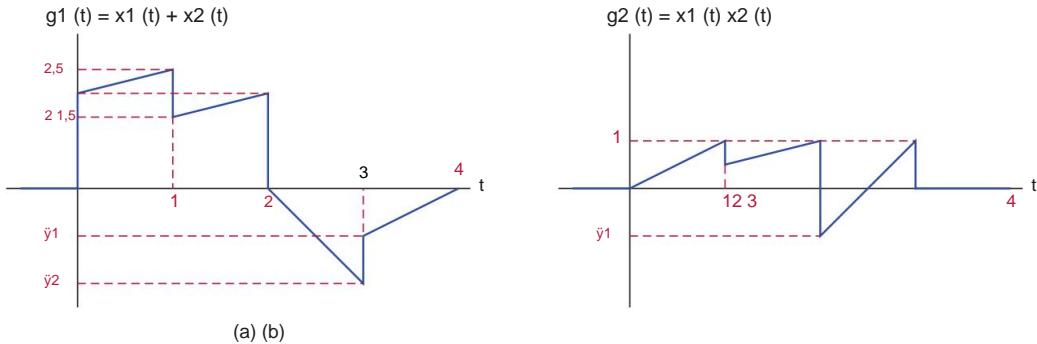
- a. A adição dos dois sinais pode ser realizada adicionando os valores em cada segmento separadamente.
A forma analítica da soma é

$$g_1(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t + 2, & 0 < t < 1 \\ \frac{2}{2}t + 1, & 1 < t < 2 \\ 2t+4, & 2 < t < 3 \\ t-4, & 3 < t < 4 \\ 0, & \text{de outra forma} \end{cases} \quad (1.5)$$

- e é mostrado graficamente na Fig. 1.12(a). b. O produto dos dois sinais também pode ser calculado para cada segmento e é obtido

$$g_2(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < 1 \\ \frac{1}{2}t, & 1 < t < 2 \\ 2t-5, & 2 < t < 3 \\ 0, & \text{de outra forma} \end{cases} \quad (1.6)$$

Esse resultado é mostrado na Fig. 1.12(b).

**Figura 1.12** – Sinais $g_1(t)$ e $g_2(t)$ para o Exemplo 1.2.

Recursos de software:

[ex_1_2.m](#)

mudança de tempo

Uma versão deslocada no tempo do sinal $x(t)$ pode ser obtida através

$$g(t) = x(t - \tau) \quad (1.7)$$

onde τ é qualquer constante positiva ou negativa. A Fig. 1.13 ilustra a relação descrita pela Eqn. (1.7). Na parte (a) da Fig. 1.13, a amplitude de $x(t)$ no instante $t = t_1$ é marcada com um marcador em forma de estrela. Deixe esse marcador representar um evento especial que ocorre dentro do sinal $x(t)$. Substituindo $t = t_1 + \tau$ na Eqn. (1.7) obtemos

$$g(t_1 + \tau) = x(t_1) \quad (1.8)$$

Assim, no sinal $g(t)$, o mesmo evento ocorre no instante de tempo $t = t_1 + \tau$. Se τ for positivo, $g(t)$ é uma versão atrasada de $x(t)$ e τ é a quantidade de tempo de atraso. Um τ negativo, por outro lado, corresponde ao avanço do sinal no tempo por um valor igual a $|\tau|$.

escala de tempo

Uma versão em escala de tempo do sinal $x(t)$ é obtida através da relação

$$g(t) = x(at) \quad (1.9)$$

onde a é uma constante positiva. Dependendo do valor de a , o sinal $g(t)$ é uma versão comprimida ou expandida de $x(t)$. A Fig. 1.14 ilustra essa relação. Usaremos uma lógica semelhante àquela empregada para explicar o comportamento do time shifting: Na parte (a) da Fig. 1.14, deixe o marcador em forma de estrela no instante de tempo $t = t_1$ representar um evento especial no sinal $x(t)$. Substituindo $t = t_1/a$ na Eqn. (1.9) obtemos

$$g\left(\frac{t_1}{a}\right) = x(t_1) \quad (1.10)$$

O evento correspondente em $g(t)$ ocorre no instante de tempo $t = t_1/a$. Assim, um valor de parâmetro de escala de $a > 1$ resulta no sinal $g(t)$ sendo uma versão comprimida de $x(t)$.

Por outro lado, $a < 1$ leva a um sinal $g(t)$ que é uma versão expandida de $x(t)$.

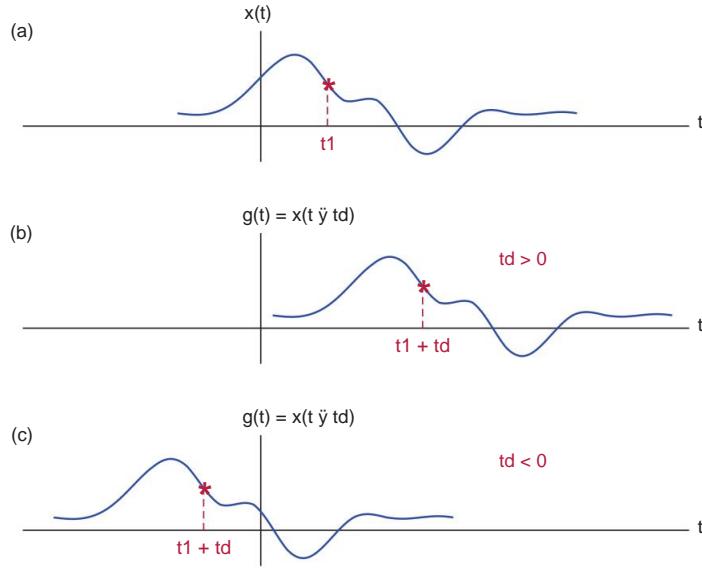


Figura 1.13 – Deslocamento no tempo de um sinal: (a) Sinal original $x(t)$, (b) Sinal deslocado no tempo $g(t)$ para $td > 0$, (c) Sinal deslocado no tempo $g(t)$ para $td < 0$.

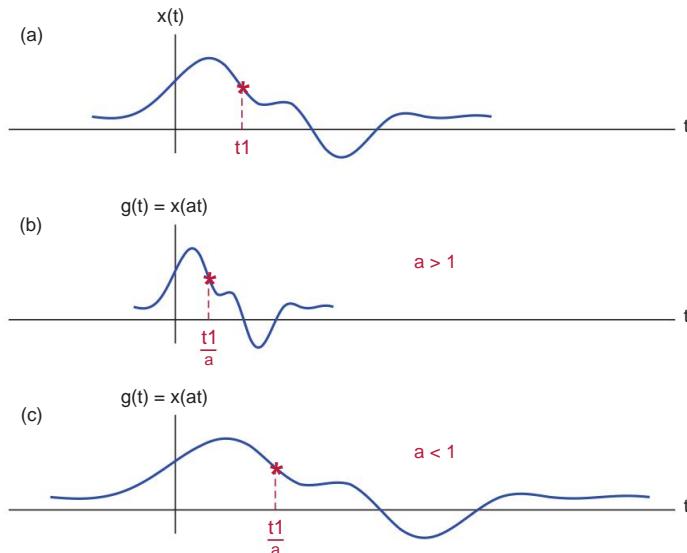


Figura 1.14 – Escala de tempo de um sinal: (a) Sinal original $x(t)$, (b) Sinal de escala de tempo $g(t)$ para $a > 0$, (c) Sinal de escala de tempo $g(t)$ para $a < 0$.

reversão do tempo

Uma versão reversa no tempo do sinal $x(t)$ é obtida através

$$g(t) = x(\bar{y}t) \quad (1.11)$$

que é ilustrado na Fig. 1.15.

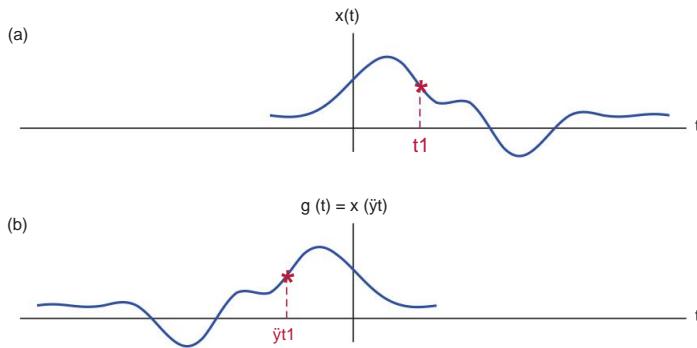


Figura 1.15 – Sinal inverso no tempo: (a) Sinal original $x(t)$, (b) Sinal invertido no tempo $g(t)$.

Um evento que ocorre no instante $t = t_1$ no sinal $x(t)$ é duplicado no instante $t = \bar{y}t_1$ no sinal $g(t)$. Graficamente, isso corresponde a dobrar ou inverter o sinal em torno do eixo vertical.

Demonstração Interativa: sop demo2

O programa de demonstração “sop demo2.m” é baseado na discussão acima e permite a experimentação com operações elementares de sinais, ou seja, deslocamento, escalonamento e reversão de um sinal, bem como adição e multiplicação de dois sinais. A operação de sinal desejada é selecionada no controle da lista suspensa. Quando aplicável, o controle deslizante para o parâmetro de atraso de tempo td ou o parâmetro de escala de tempo a torna-se disponível para facilitar o ajuste do valor correspondente. Além disso, o marcador em forma de estrela usado nas Figs. 1.13 a 1.15 também é mostrado nos gráficos para $x(t)$ e $g(t)$ quando for relevante para a operação do sinal escolhido.

Recursos de software:

sop demo2.m

Exemplo 1.3: Operações básicas para sinais de tempo contínuo

Considere o sinal $x(t)$ mostrado na Fig. 1.16. Esboce os seguintes sinais:

$$a. g(t) = x(2t - 5), b. h(t)$$

$$= x(\bar{y}4t + 2).$$

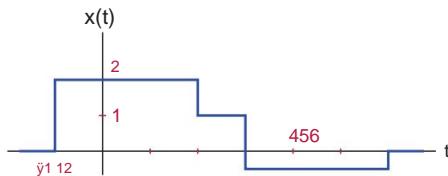


Figura 1.16 – O sinal $x(t)$ para o Exemplo 1.3.

1.3. Sinais de Tempo Contínuo

Solução:

- a. Obteremos $g(t)$ em duas etapas: Seja um sinal intermediário definido como $g_1(t) = x(2t)$, uma versão em escala de tempo de $x(t)$, mostrada na Fig. 1.17(b). O sinal $g(t)$ pode ser expresso como

$$g(t) = g_1(t - 2,5) = x(2[t - 2,5]) = x(2t - 5)$$

e é mostrado na Fig. 1.17(c).

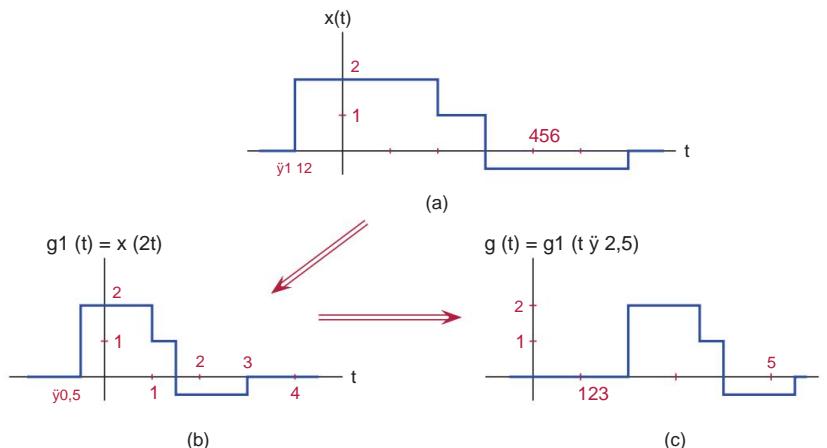


Figura 1.17 – (a) O sinal intermediário $g_1(t)$, e (b) o sinal $g(t)$ para o Exemplo 1.3.

- b. Neste caso usaremos dois sinais intermediários: Seja $h_1(t) = x(4t)$. Um segundo sinal intermediário $h_2(t)$ pode ser obtido deslocando o tempo $h_1(t)$ de modo que $h_2(t) = h_1(t + 0,5)$

$$= x(4[t + 0,5]) = x(4t + 2)$$

Por fim, $h(t)$ pode ser obtido através da reversão temporal de $h_2(t)$:

$$h(t) = h_2(\bar{y}t) = x(\bar{y}4t + 2)$$

As etapas envolvidas no esboço de $h(t)$ são mostradas na Fig. 1.18(a)–(d).

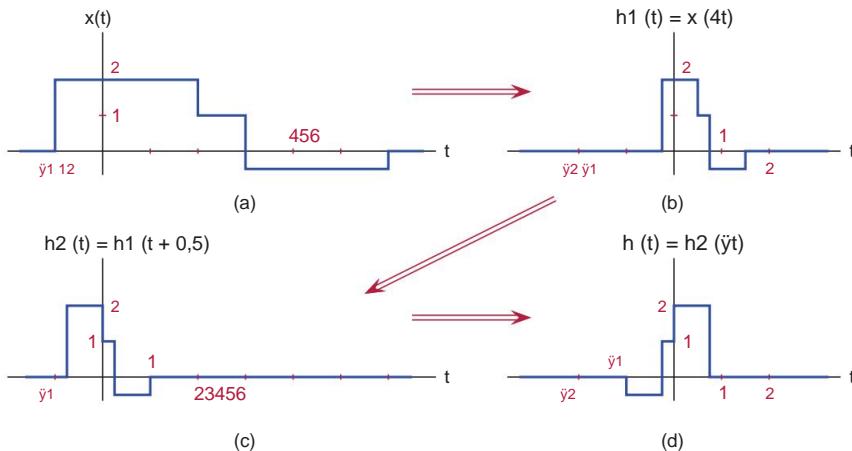


Figura 1.18 – (a) O sinal intermediário $h_1(t)$, (b) o sinal intermediário $h_2(t)$ e (c) o sinal $h(t)$ para o Exemplo 1.3.

Recursos de software: Veja MATLAB Exercício 1.3.

Integração e diferenciação As

operações de integração e diferenciação são amplamente utilizadas no estudo de sistemas lineares. Dado um sinal de tempo contínuo $x(t)$, um novo sinal $g(t)$ pode ser definido como sua derivada de tempo na forma

$$g(t) = \frac{dx(t)}{dt} \quad (1.12)$$

Um exemplo prático disso é a relação entre a corrente $i_C(t)$ e a tensão $v_C(t)$ de um capacitor ideal com capacidade C dada por

$$i_C(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt} \quad (1.13)$$

Por exemplo, se a tensão na forma de uma onda triangular periódica mostrada na Fig. 1.19(a) for aplicada a um capacitor ideal, a corrente que flui através do capacitor seria proporcional à sua derivada, resultando em um sinal de onda quadrada como mostrado na Fig. 1.19(b).

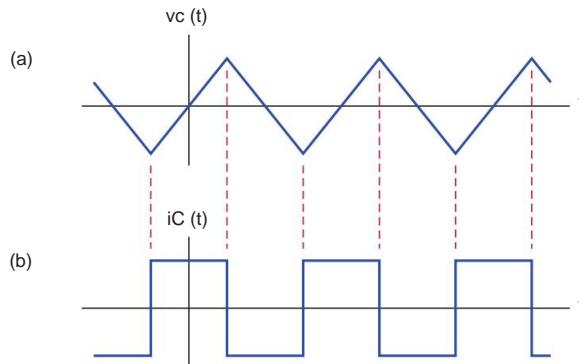


Figura 1.19 – (a) Uma forma de onda triangular periódica $v_C(t)$ usada como a tensão de um capacitor, e (b) o sinal de corrente de onda quadrada periódica $i_C(t)$ resultante.

Da mesma forma, um sinal pode ser definido como a integral de outro sinal na forma

$$g(t) = \int_{y_0}^t x(\ddot{y}) dy \quad (1.14)$$

A relação entre a corrente $i_L(t)$ e a tensão $v_L(t)$ de um indutor ideal pode servir como exemplo disso. Especificamente temos

$$i_L(t) = \frac{1}{\text{EU}} \int_{y_0}^t v_L(\ddot{y}) dy \quad (1.15)$$

Se a tensão na forma de uma onda quadrada periódica mostrada na Fig. 1.20(a) for aplicada a um indutor ideal, a corrente que flui através dele seria proporcional à sua integral, resultando em uma forma de onda triangular periódica, conforme mostrado na Fig. 1.20(b).

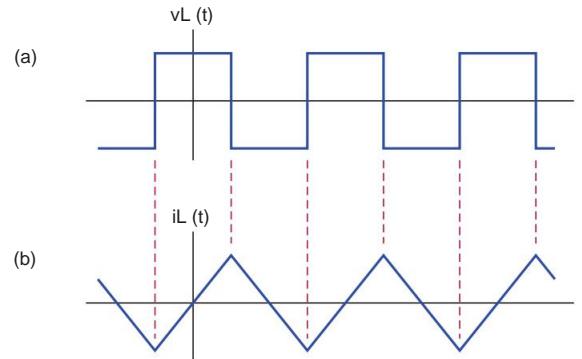


Figura 1.20 – (a) Um sinal periódico de onda quadrada $vL(t)$ usado como a tensão de um indutor, e (b) o sinal de corrente triangular periódico $iL(t)$ resultante.

1.3.2 Blocos de construção básicos para sinais de tempo contínuo

Existem certas formas básicas de sinais que podem ser usadas como blocos de construção para descrever sinais com maior complexidade. Nesta seção, estudaremos alguns desses sinais. Modelos matemáticos para sinais mais avançados podem ser desenvolvidos combinando esses blocos de construção básicos por meio do uso das operações de sinal descritas na Seção 1.3.1.

Função de impulso

unitário Veremos no restante deste capítulo, bem como nos capítulos seguintes, que a função de impulso unitário desempenha um papel importante na modelagem matemática e na análise de sinais e sistemas lineares. É definido pelas seguintes equações:

$$\ddot{y}(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t = 0 \\ \text{indefinido}, & \text{se } t \neq 0 \end{cases} \quad (1.16)$$

e

$$\int_{yy}^{\ddot{y}} \ddot{y}(t) dt = 1 \quad (1.17)$$

Observe que a Eq. (1.16) por si só representa uma definição incompleta da função $\ddot{y}(t)$ já que a amplitude dela é definida apenas quando $t = 0$, e é indefinida no instante de tempo $t = 0$. Eq. (1.17) preenche esse vazio definindo a área sob a função $\ddot{y}(t)$ como sendo a unidade. A função de impulso não pode ser representada graficamente usando a prática comum de representar graficamente a amplitude em função do tempo, pois a única amplitude de interesse ocorre em um único instante de tempo $t = 0$ e tem um valor indefinido. Em vez disso, usamos uma seta para indicar a localização dessa amplitude indefinida, conforme mostrado na Figura 1.21.

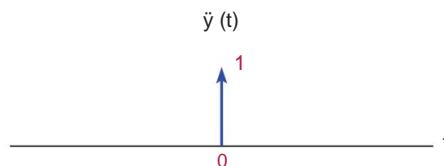


Figura 1.21 – Função impulso unitário.

Em vários problemas deste texto, utilizaremos versões deslocadas e escalonadas da função de impulso. A função $a \delta(t - t_1)$ representa uma função de impulso unitário que é deslocada no tempo por t_1 e dimensionada pelo fator de escala constante a . É descrito pelas equações

$$a \delta(t - t_1) = \begin{cases} 0, & \text{se } t = t_1 \\ \text{indefinido}, & \text{t1 se } t \neq t_1 \end{cases} \quad (1.18)$$

e

$$\int_{-\infty}^{\infty} a \delta(t - t_1) dt = a \quad (1.19)$$

e é mostrado na Fig. 1.22.

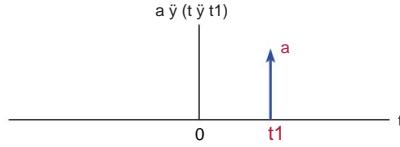


Figura 1.22 – Função impulso escalonado e deslocado no tempo.

Nas Figs. 1.21 e 1.22 o valor exibido ao lado da seta para cima não é um valor de amplitude. Em vez disso, representa a área da função de impulso.

Em Eq. (1.17) e (1.19) os limites de integração não precisam ser infinitos; qualquer conjunto de limites de integração que inclua o impulso produziria o mesmo resultado. Com qualquer incremento de tempo $\delta t > 0$ Eqn. (1.17) pode ser escrita na forma alternativa

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (1.20)$$

e Eq. (1.19) pode ser escrita na forma alternativa

$$\int_{-\infty}^{\infty} a \delta(t - t_1) dt = a \quad (1.21)$$

Como uma função que tem amplitude zero em todos os lugares, exceto em um ponto, pode ter uma área diferente de zero sob ela? Uma maneira de visualizar como isso pode funcionar é começar com um pulso retangular centrado na origem, com uma duração de a e uma amplitude de $1/a$, conforme mostrado na Fig. 1.23(a). Matematicamente, o pulso $q(t)$ é definido como

$$q(t) = \begin{cases} \frac{1}{a}, & |t| < \frac{a}{2} \\ 0, & |t| > \frac{a}{2} \end{cases} \quad (1.22)$$

A área sob o pulso é claramente igual à unidade independente do valor de a . Agora imagine o parâmetro a ficando menor, resultando em um pulso mais estreito. À medida que o pulso se torna mais estreto, ele também se torna mais alto, conforme mostrado na Fig. 1.23(b). A área sob o pulso permanece a unidade. No limite, conforme o parâmetro a se aproxima de zero, o pulso se aproxima de um impulso, ou seja

$$\delta(t) = \lim_{a \rightarrow 0} [q(t)] \quad (1.23)$$

Isso é ilustrado na Figura 1.23(c).

1.3. Sinais de Tempo Contínuo

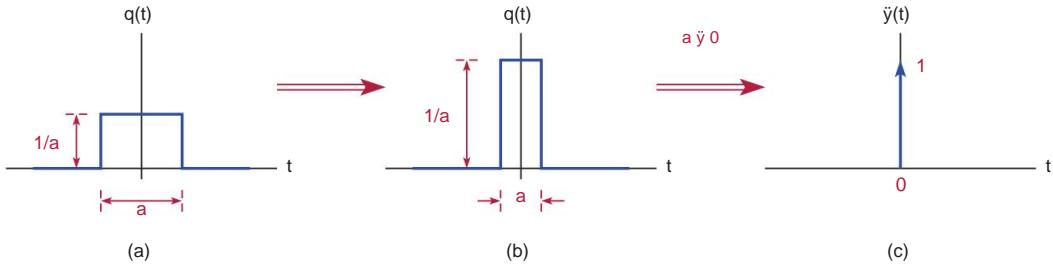


Figura 1.23 – Obtenção de um impulso unitário como limite de um pulso com área unitária. (a) O pulso $q(t)$, (b) uma versão mais estreita e mais alta obtida pela redução de a , (c) função de impulso unitário obtida como limite.

Também é possível obter um impulso unitário como limite de outras funções além de um pulso retangular. Outro exemplo de função que se aproxima de um impulso unitário no limite é a função gaussiana. Considere o limite

$$\tilde{y}(t) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a^2} e^{-t^2/a^2} \quad (1.24)$$

A função gaussiana dentro do limite tem área unitária e se torna mais estreita à medida que o parâmetro a se torna menor. Isso é ilustrado na Fig. 1.24.

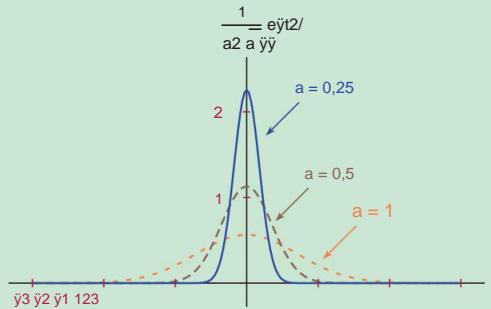


Figura 1.24 – Obtenção de um impulso unitário como limite de um pulso gaussiano.

Uma terceira função que produz um impulso unitário no limite é um pulso sinc quadrado. Isso é também é possível definir um impulso unitário como o caso limite do pulso sinc quadrado:

$$\tilde{y}(t) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{a}{(\pi t)^2} \operatorname{sinc}^2 \frac{\pi t}{a} \quad (1.25)$$

A convergência desse limite para um impulso unitário é ilustrada na Fig. 1.25.

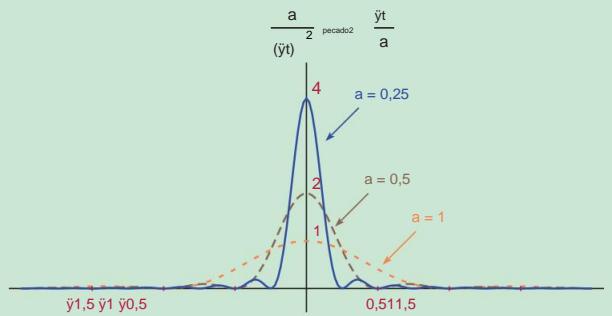


Figura 1.25 – Obtenção de um impulso unitário como limite de um pulso sinc quadrado.

Demonstração interativa: imp

demo O programa de demonstração “imp demo.m” ilustra a construção de uma função de impulso unitário como o limite de funções com área unitária, ou seja, um pulso retangular, um pulso gaussiano e um pulso sinc quadrado. Consulte as Eqs. (1.23), (1.24) e (1.25), bem como as correspondentes Figs. 1.23, 1.24 e 1.25 para detalhes.

O parâmetro usado para alterar a forma de cada uma dessas funções pode ser variado usando um controle deslizante. Observe como cada função exibe maior semelhança com o impulso unitário à medida que o valor de a é reduzido.

Recursos de software:

`imp demo.m`

A função de impulso tem duas propriedades fundamentais que são úteis. O primeiro, referida como a propriedade de amostragem¹ da função de impulso, é declarada como

$$f(t) \delta(t - t_1) = f(t_1) \delta(t - t_1) \quad (1.26)$$

onde $f(t)$ é qualquer função do tempo que é contínua em $t = t_1$. Intuitivamente, como $\delta(t - t_1)$ é igual a zero para todo $t = t_1$, o único valor da função $f(t)$ que deve ter algum significado em termos do produto $f(t) \delta(t - t_1)$ é seu valor em $t = t_1$. A propriedade de amostragem da função de impulso unitário é ilustrada na Fig. 1.26.

Uma consequência da Eq. (1.26) é a propriedade de peneiração da função de impulso que é expressa como

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_1) dt = f(t_1) \quad (1.27)$$

A integral do produto de uma função $f(t)$ e uma função de impulso unitário deslocado no tempo é igual ao valor de $f(t)$ avaliado no local do impulso unitário. A propriedade de peneiração expressa pela Eqn. (1.27) é fácil de justificar pelo uso da propriedade de amostragem.

¹ Um estudo matemático completo das funções de singularidade, como a função de impulso unitário, é bastante avançado e está muito além do escopo deste texto. Do ponto de vista teórico, pode-se estabelecer condições sob as quais a propriedade de amostragem dada pela Eqn. (1.26) pode não valer. No entanto, será válido e útil para nossos propósitos na formulação de modelos de sinais para aplicações de engenharia.

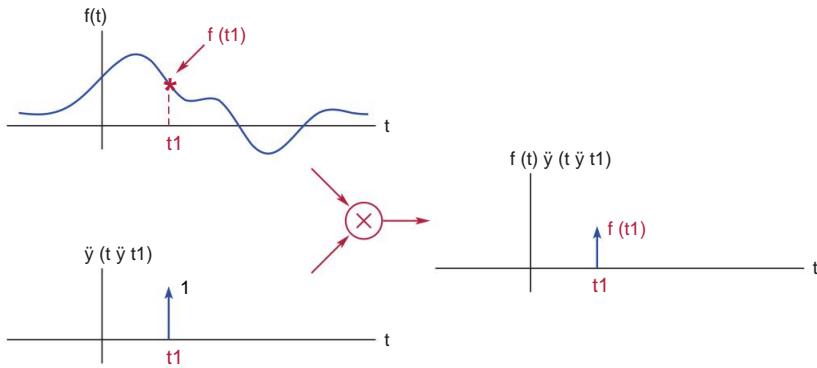


Figura 1.26 – Ilustração da propriedade de amostragem da função impulso unitário.

Substituindo a Eq. (1.26) na Eqn. (1.27) obtemos

$$\begin{aligned}
 \hat{\int}_{\text{yy}}^{\text{y}} f(t) \delta(t - t_1) dt &= \hat{\int}_{\text{yy}}^{\text{y}} f(t_1) \delta(t - t_1) dt \\
 &= f(t_1) \hat{\int}_{\text{yy}}^{\text{y}} \delta(t - t_1) dt \\
 &= f(t_1)
 \end{aligned} \tag{1.28}$$

Como discutido acima, os limites da integral na Eqn. (1.27) não precisam ser infinitamente grandes para que o resultado seja válido; qualquer intervalo de integração que inclua o impulso funcionará. Dado um incremento de tempo $\bar{t} > 0$, o seguinte também é válido:

$$\hat{\int}_{t_1 + \bar{t}}^{t_1 + \bar{t}} f(t) \delta(t - t_1) dt = f(t_1) \tag{1.29}$$

Deve ficar claro a partir da discussão anterior que a função de impulso unitário é uma idealização matemática. Nenhum sinal físico é capaz de ocorrer sem demorar e ainda fornecer um resultado diferente de zero quando integrado. Portanto, nenhum sinal físico que utilize a função impulso unitário como modelo matemático pode ser obtido na prática.

Essa percepção naturalmente leva à pergunta “por que precisamos do sinal de impulso unitário?” ou a pergunta “como o sinal de impulso unitário é útil?” A resposta a essas perguntas reside no fato de que a função de impulso unitário é um bloco de construção fundamental útil na aproximação de eventos que ocorrem rapidamente. O uso da função de impulso unitário nos permite olhar para um sinal como uma série de eventos que ocorrem momentaneamente.

Considere a propriedade de peneiração da função de impulso que foi descrita pela Eqn. (1.27). Através do uso da propriedade de peneiramento, podemos focar no comportamento de um sinal em um instante específico no tempo. Usando a propriedade de peneiramento repetidamente a cada instante de tempo imaginável, podemos analisar um sinal em termos de seu comportamento em função do tempo. Essa ideia ficará mais clara quando discutirmos a decomposição de impulso de um sinal na próxima seção, que mais tarde se tornará a base do desenvolvimento que leva à operação de convolução no Capítulo 2. Mesmo que o sinal de impulso não seja obtido na prática, ele pode ser aproximado usando uma série de funções; os três sinais que consideramos nas Figs. 1.23, 1.24 e 1.25 são possíveis candidatos quando o parâmetro α é razoavelmente pequeno.

Função degrau

unitário A função degrau unitário é útil em situações em que precisamos modelar um sinal que é ligado ou desligado em um instante de tempo específico. É definido da seguinte forma:

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (1.30)$$

A função $u(t)$ é ilustrada na Fig. 1.27.

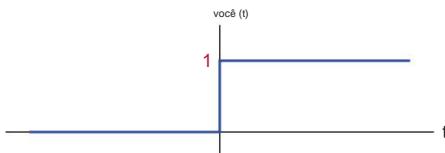


Figura 1.27 – Função degrau unitário.

Uma versão deslocada no tempo da função degrau unitário pode ser escrita como

$$u(t \ddot{\vee} t_1) = \begin{cases} 1, & t > t_1 \\ 0, & t < t_1 \end{cases} \quad (1.31)$$

e é mostrado na Fig. 1.28.



Figura 1.28 – Função degrau unitário deslocado no tempo.

Considere um sinal senoidal dado por

$$x(t) = \sin(2\pi f_0 t) \quad (1.32)$$

que oscila para todos os valores de t . Se precisarmos representar um sinal senoidal que é ativado no tempo $t = 0$, podemos usar a função degrau unitário com a Eqn. (1.32), e escreva

$$x(t) = \sin(2\pi f_0 t) u(t) = \begin{cases} \sin(2\pi f_0 t), & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Alternativamente, o sinal pode ser ligado em um instante de tempo arbitrário $t = t_1$ através do uso de uma função de passo unitário com deslocamento de tempo:

$$x(t) = \sin(2\pi f_0 t) u(t \ddot{\vee} t_1) = \begin{cases} \sin(2\pi f_0 t), & t > t_1 \\ 0, & t < t_1 \end{cases}$$

A Fig. 1.29 ilustra esse uso da função degrau unitário para ligar um sinal em um instante de tempo especificado.

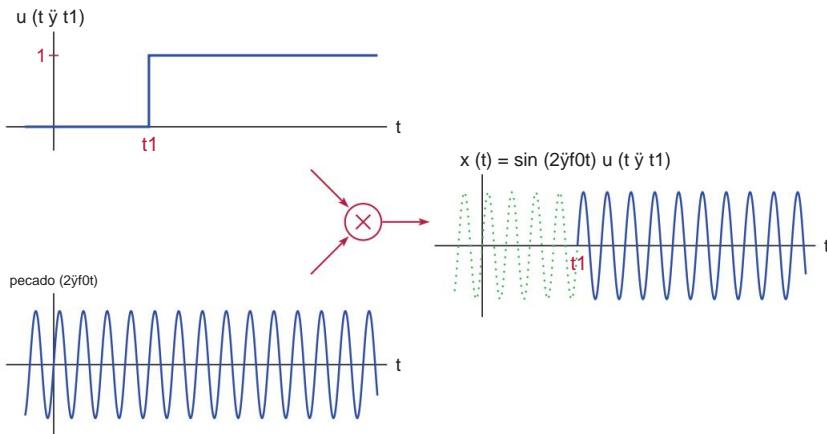


Figura 1.29 – O uso da função degrau unitário para ligar um sinal em um tempo especificado.

Demonstração interativa: stp

demo1 Este programa de demonstração ilustra o uso da função de passo de unidade para ativar um sinal em um horário específico. Baseia-se na Fig. 1.29. O parâmetro de atraso t_1 para a função de passo unitário pode ser variado usando o controle deslizante.

Recursos de software:

stp demo1.m

Por outro lado, suponha que o sinal senoidal esteja ligado há muito tempo e gostaríamos de desligá-lo no instante de tempo $t = t_1$. Isso poderia ser feito pela multiplicação do sinal senoidal com uma função de passo unitário invertida e deslocada no tempo na forma

$$x(t) = \sin(2\pi f_0 t) u(\tilde{y}t + t_1) = \begin{cases} \sin(2\pi f_0 t), & t < t_1 \\ 0, & t > t_1 \end{cases}$$

e é ilustrado na Fig. 1.30.

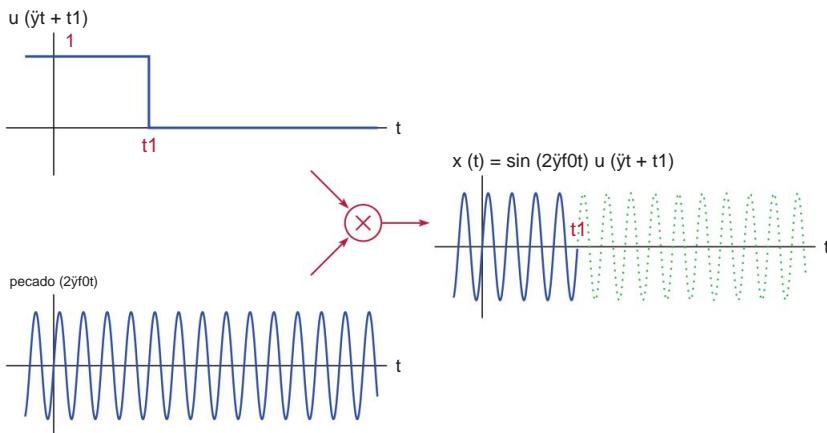


Figura 1.30 – O uso da função degrau unitário para desligar um sinal em um tempo especificado.

Demonstração interativa: stp_demo2

Este programa de demonstração ilustra o uso da função de passo de unidade para desligar um sinal em um horário específico. Baseia-se na Fig. 1.30. Como em “stp_demo1.m”, o parâmetro de atraso t_1 para a função de passo unitário pode ser variado usando o controle deslizante.

Recursos de software:

stp demo2.m

A relação entre a função degrau unitário e a função de impulso unitário é importante. A função degrau unitário pode ser expressa como uma integral contínua da função de impulso unitário:

$$u(t) = \int_{\tilde{y}}^t \delta(\tilde{y}) d\tilde{y} \quad (1.33)$$

Na Eq. (1.33) mudamos a variável independente para \tilde{y} para evitar qualquer confusão com o limite superior t de integração. Lembre-se de que a integral da função impulso unitário é igual à unidade, desde que o impulso esteja dentro dos limites de integração. Este é realmente o caso na Eq. (1.33) se o limite superior da integral for positivo, isto é, se $t = t_0 > 0$. Por outro lado, se $t = t_0 < 0$, então o intervalo de integração para antes da localização do impulso e o resultado do integral é zero. Isso é ilustrado na Fig. 1.31.

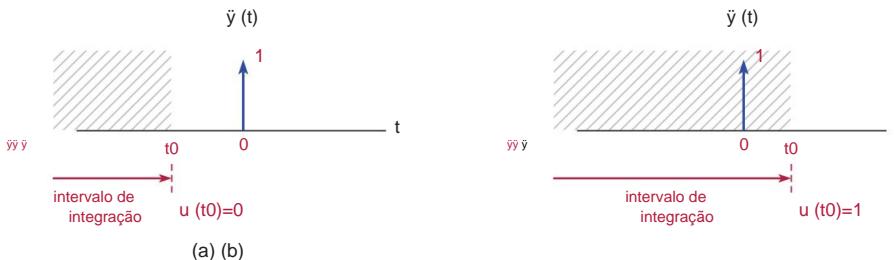


Figura 1.31 – Obtendo um passo unitário através da integral de execução do impulso unitário: (a) $t = t_0 < 0$, (b) $t = t_0 > 0$.

Na Fig. 1.23 e nas Eqns. (1.22) e (1.23) representamos a função impulso unitário como o limite de um pulso retangular com área unitária. A Fig. 1.32 ilustra a integral contínua de tal pulso. No limite, o resultado da integral em execução se aproxima da função degrau unitário como a $\tilde{y} \rightarrow 0$.

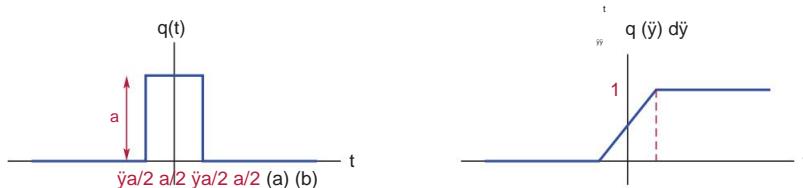


Figura 1.32 – (a) Aproximação do pulso retangular a um impulso unitário, (b) execução integral do pulso retangular como uma aproximação a um degrau unitário.

1.3. Sinais de Tempo Contínuo

A função de impulso unitário pode ser escrita como a derivada da função degrau unitário, ou seja,

$$\ddot{y}(t) = \frac{du}{dt} \quad (1.34)$$

consistentes com a Eq. (1.33).

Função pulso unitário

Definiremos a função pulso unitário como um pulso retangular com largura unitária e amplitude unitária, centrado na origem. Matematicamente, pode ser expresso como

$$\ddot{y}(t) = \begin{cases} 1, & |t| < \frac{1}{2} \\ 0, & |t| > \frac{1}{2} \end{cases} \quad (1.35)$$

e é mostrado na Fig. 1.33.

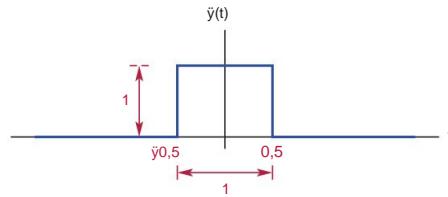


Figura 1.33 – Função pulso unitário.

A função de pulso unitário pode ser expressa em termos de funções de passo unitário deslocadas no tempo como

$$\ddot{y}(t) = ut + \frac{1}{2} \ddot{y} \text{ mas } \ddot{y} - \frac{1}{2} \quad (1.36)$$

As etapas na construção de um sinal de pulso unitário a partir de funções degrau unitário são ilustradas na Fig. 1.34. Também é possível construir um sinal de pulso unitário usando funções de impulso unitário. Deixar

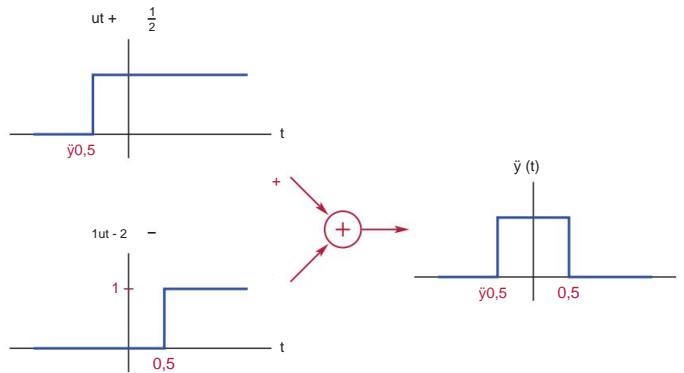


Figura 1.34 – Construindo um sinal de pulso unitário usando funções degrau unitário.

nós substituímos a Eq. (1.33) na Eqn. (1.36) para obter

$$\begin{aligned}\ddot{y}(t) &= \hat{\int}_{\frac{t-1}{2}}^{\frac{t+1}{2}} \ddot{y}(\ddot{y}) d\ddot{y} \hat{\int}_{\frac{t-1}{2}}^{\frac{t+1}{2}} \ddot{y}(\ddot{y}) d\ddot{y} \\ &= \hat{\int}_{t-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} \ddot{y}(\ddot{y}) d\ddot{y}\end{aligned}\quad (1.37)$$

O resultado na Eq. (1.37) pode ser interpretada da seguinte forma: Para que o resultado da integral seja igual à unidade, o impulso precisa aparecer entre os limites da integração. Isso requer que o limite inferior seja negativo e o limite superior seja positivo. Assim temos

$$\begin{aligned}\hat{\int}_{t-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} \ddot{y}(\ddot{y}) d\ddot{y} &= \begin{cases} 1, & \text{se } t - \frac{1}{2} < 0 \text{ e } t + \frac{1}{2} > 0 \\ 0, & \text{de outra forma} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1, & \frac{t-1}{2} < t < \frac{t+1}{2} \\ 0, & \text{de outra forma} \end{cases}\end{aligned}\quad (1.38)$$

que corresponde à definição do sinal de pulso unitário dada na Eqn. (1.35). Uma ilustração gráfica da Eqn. (1.37) é dado na Fig. 1.35.

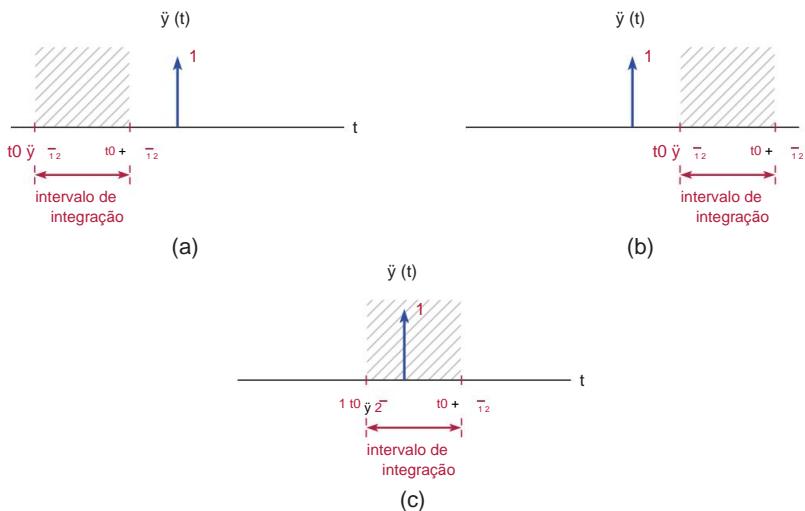


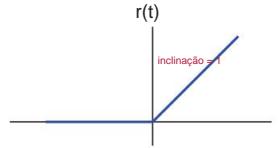
Figura 1.35 – Construindo um pulso unitário integrando um impulso unitário: (a) $t = t_0 < \frac{y_1}{2}$, (b) $t = t_0 > \frac{1}{2}$, (c) $\frac{y_1}{2} < t < \frac{1}{2}$.

Função de rampa unitária

A função rampa unitária é definida como

$$r(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}\quad (1.39)$$

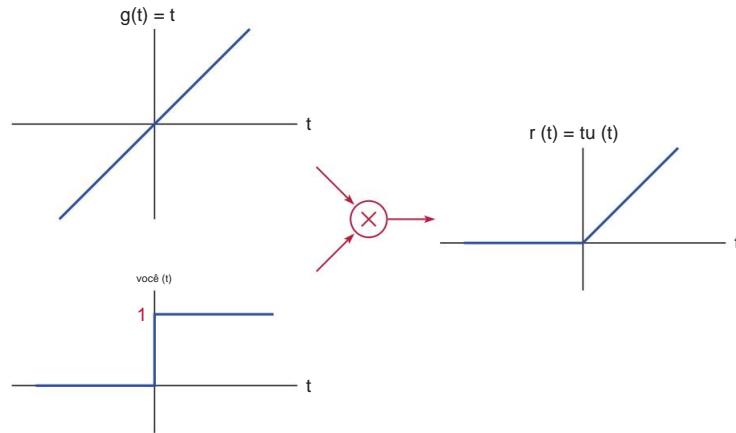
Tem amplitude zero para $t < 0$ e inclinação unitária para $t \geq 0$. Esse comportamento é ilustrado na Fig. 1.36.

**Figura 1.36** – Função rampa unitária.

Uma definição equivalente da função de rampa unitária pode ser escrita usando o produto de um sinal linear $g(t) = t$ e a função degrau unitário como

$$r(t) = tu(t) \quad (1.40)$$

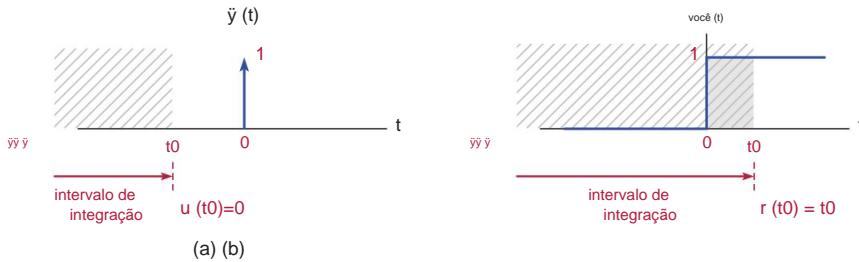
conforme ilustrado na Fig. 1.37.

**Figura 1.37** – Construindo uma função de rampa unitária.

Alternativamente, a função de rampa unitária pode ser reconhecida como a integral da função degrau unitário:

$$r(t) = \int_{\tilde{y}}^t u(\tilde{y}) d\tilde{y} \quad (1.41)$$

como mostrado na Fig. 1.38.

**Figura 1.38** – Obtenção de uma função de rampa unitária como a integral de execução de um degrau unitário.

Encontraremos versões com deslocamento de tempo e com escala de tempo da função de rampa unitária úteis em construção de sinais que possuem segmentos lineares por partes.

Função de triângulo unitário

A função do triângulo unitário é definida como

$$\hat{y}(t) = \begin{cases} \hat{y} & t + 1, \hat{y} < 0 \hat{y} + 1, 0 \\ \hat{y} & t < 1 0, \text{ caso contrário} \\ \hat{y} & \end{cases} \quad (1.42)$$

e é mostrado na Fig. 1.39.

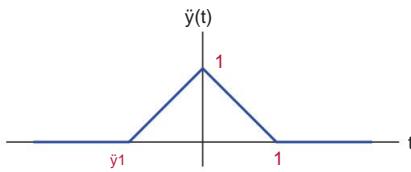


Figura 1.39 – Função triângulo unitário.

A função de triângulo unitário pode ser expressa em termos de funções de rampa unitária deslocadas e escaladas como

$$\hat{y}(t) = r(t+1) - 2r(t) + r(t-y) \quad (1.43)$$

Para entender a Eq. (1.43) observaremos a inclinação da forma de onda do triângulo unitário em cada segmento. O primeiro termo $r(t+1)$ tem uma inclinação de 0 para $t < -y$ e uma inclinação de 1 para $t > -y$. A adição do termo $-2r(t)$ altera a inclinação para -1 para $t > 0$. O último termo, $r(t-y)$, torna a inclinação 0 para $t > 1$. O processo de construção de um triângulo unitário de deslocamento e as funções de rampa unitária em escala são ilustradas na Fig. 1.40.

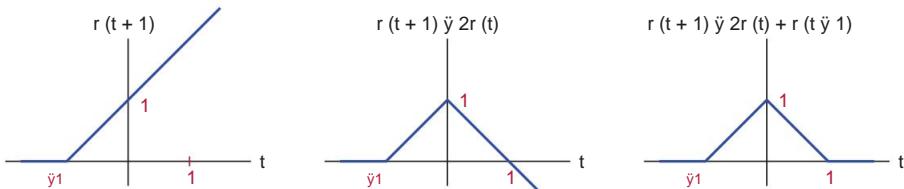


Figura 1.40 – Construção de um triângulo unitário usando funções de rampa unitária.

Demonstração interativa: wav demo1

O programa explorador de formas de onda “wav demo1.mm” permite a experimentação com os blocos básicos de construção de sinais discutidos na Seção 1.3.2. O sinal $x(t)$ representado graficamente é construído na forma

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) + x_4(t) + x_5(t)$$

Cada termo $x_i(t)$, $i = 1, \dots, 5$ na Eqn. (1.44) pode ser uma função escalonada e com deslocamento de tempo, rampa, pulso ou triângulo. Além disso, as funções de passo e rampa podem ser invertidas no tempo;

1.3. Sinais de Tempo Contínuo

funções de pulso e triângulo podem ser escalonadas no tempo. Se forem necessários menos de cinco termos para $x(t)$, os termos desnecessários podem ser desativados.

Recursos de software:

wav demo1.m

Sinais senoidais

A forma geral de um sinal senoidal é

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi) \quad (1.44)$$

onde A é a amplitude do sinal e ω_0 é a frequência em radianos que tem a unidade de radianos por segundo, abreviada como rad/s. O parâmetro ϕ é o ângulo de fase inicial em radianos. A frequência radiana ω_0 pode ser expressa como

$$\omega_0 = 2\pi f_0 \quad (1.45)$$

onde f_0 é a frequência em Hz. Este sinal é mostrado na Fig. 1.41.

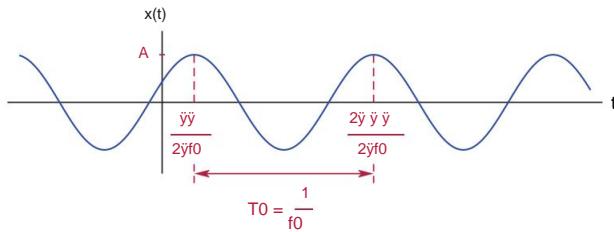


Figura 1.41 – Sinal senoidal $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi)$.

O parâmetro de amplitude A controla o valor de pico do sinal. A fase ϕ afeta as localizações dos picos:

- Se $\phi = 0$, a forma de onda do cosseno tem um pico na origem $t_0 = 0$. Outros picos positivos ou negativos da forma de onda estariam em instantes de tempo que são soluções da equação

$$2\pi f_0 t_k = k\pi, \quad k: \text{inteiro} \quad (1.46)$$

o que leva a $t_k = k/(2f_0)$.

- Com um valor diferente de ϕ , o primeiro pico é deslocado para $t_0 = \phi/(2\pi f_0)$, o instante de tempo que satisfaz a equação $2\pi f_0 t_0 + \phi = 0$. Outros picos da forma de onda são deslocados para instantes de tempo $t_k = (k\pi - \phi)/(2\pi f_0)$ que são soluções para a equação

$$2\pi f_0 t_k + \phi = k\pi, \quad k: \text{inteiro} \quad (1.47)$$

Finalmente, a frequência f_0 controla a repetição da forma de onda. Vamos nos referir à parte do sinal de um pico positivo para o próximo como um ciclo, conforme mostrado na Fig. 1.41. Quando expresso em Hz, f_0 é o número de ciclos (ou períodos) do sinal por segundo. Conseqüentemente, cada ciclo ou período abrange $T_0 = 1/f_0$ segundos.

Demonstração interativa: sin demo1

Este programa de demonstração ilustra as principais propriedades de um sinal senoidal com base na discussão anterior. Consulte a Eq. (1.44) e Fig. 1.41. Os controles deslizantes permitem que a amplitude A, a frequência f₀ e a fase ϕ sejam variadas.

1. Observe o valor da amplitude de pico da forma de onda mudando em resposta a mudanças no parâmetro A.
2. Preste atenção na relação recíproca entre a frequência f₀ e o período T₀.
3. Defina f₀ = 250 Hz e $\phi = 0$ graus. Conte o número de ciclos completos em 40 ms no intervalo de tempo $\Delta t = 20$ ms. Como o número de ciclos completos corresponde ao valor de f₀?
4. Quando $\phi = 0$, a forma de onda coseno tem um pico em t = 0. Mude a fase ϕ ligeiramente na direção negativa movendo o controle deslizante para a esquerda e observe o pico do meio da forma de onda se mover para a direita. Observe o valor desse atraso causado pela mudança em ϕ e relate-o com a Eqn. (1.47).

Recursos de software:

sin demo1.m

1.3.3 Decomposição de impulso para sinais de tempo contínuo

A propriedade de peneiração da função de impulso unitário é dada pela Eqn. (1.27). Usando esta propriedade, um sinal x(t) pode ser expresso na forma

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta t) \Delta t \delta(t - n\Delta t) \quad (1.48)$$

Vamos explorar essa relação com um pouco mais de detalhes para obter mais informações. Suponha que quiséssemos aproximar o sinal x(t) usando uma série de retângulos com largura Δt cada.

Deixe cada retângulo ser centrado em torno do instante de tempo $t_n = n\Delta t$ onde n é o índice inteiro, e também deixe a altura de cada retângulo ser ajustada à amplitude do sinal x(t) no ponto médio do retângulo. Nossa aproximação de x(t) estaria na forma

$$\hat{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta t) \Delta t \frac{t - n\Delta t}{\Delta t} \quad (1.49)$$

que é representado graficamente na Fig. 1.42.

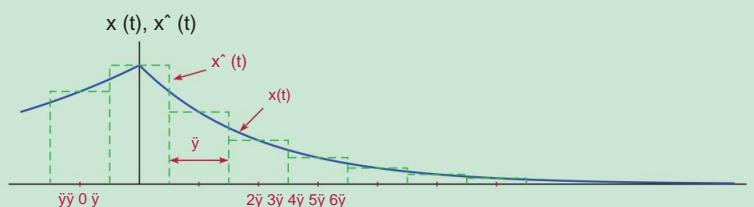


Figura 1.42 – Aproximando um sinal com pulsos retangulares.

1.3. Sinais de Tempo Contínuo

Vamos multiplicar e dividir o termo no somatório do lado direito da Eqn. (1,49) por \ddot{y} para obter

$$\hat{x}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n\ddot{y}) \frac{1}{\ddot{y}} \ddot{y} - \frac{t \ddot{y} n \ddot{y}}{\ddot{y}} \quad (1.50)$$

Além disso, definiremos $p_n(t)$ como

$$p_n(t) = \ddot{y} \ddot{y} - \frac{t \ddot{y} n \ddot{y}}{\ddot{y}} \quad (1.51)$$

Claramente, $p_n(t)$ é um pulso retangular de largura \ddot{y} e altura $(1/\ddot{y})$, e é centrado em torno do instante de tempo $(n\ddot{y})$. Tem unidade de área independente do valor de \ddot{y} . Substituindo a Eq. (1.51) na Eqn. (1.50) leva a

$$\hat{x}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n\ddot{y}) p_n(t) \ddot{y} \quad (1.52)$$

Sabemos pelas Eqns. (1.22) e (1.23) e Fig. 1.23 que a função impulso unitário $\ddot{y}(t)$ pode ser obtida como o limite de um pulso retangular com área unitária tornando-o mais estreito e mais alto ao mesmo tempo. Portanto, o pulso $p_n(t)$ se transforma em impulso se forçarmos $\ddot{y} \rightarrow 0$.

$$\lim_{\ddot{y} \rightarrow 0} [p_n(t)] = \lim_{\ddot{y} \rightarrow 0} \ddot{y} \ddot{y} - \frac{t \ddot{y} n \ddot{y}}{\ddot{y}} = \ddot{y}(t) \quad (1.53)$$

Assim, se tomarmos o limite da Eqn. (1.52) como $\ddot{y} \rightarrow 0$, a aproximação torna-se uma igualdade:

$$\begin{aligned} x(t) &= \lim_{\ddot{y} \rightarrow 0} \ddot{y} \ddot{y} [\hat{x}(t)] \\ &= \lim_{\ddot{y} \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} x(n\ddot{y}) p_n(t) \ddot{y} \end{aligned} \quad (1.54)$$

No limite² obtemos $p_n(t) \rightarrow \delta(t)$, $n\ddot{y} \rightarrow \delta$ e $\ddot{y} \rightarrow d\delta$. Além disso, a soma na Eqn. (1.54) se transforma em uma integral, e obtemos a Eqn. (1.48). Esse resultado será útil quando derivarmos a relação de convolução no próximo capítulo.

Demonstração interativa: id demo.m

O programa de demonstração “id demo.m” ilustra a derivação da decomposição do impulso conforme descrito nas Eqns. (1,48) a (1,54). Ela mostra a progressão de $\hat{x}(t)$ conforme definido pela Eqn. (1.49) em $x(t)$ conforme o valor de \ddot{y} se aproxima de zero. Um controle deslizante permite que o valor de \ddot{y} seja ajustado.

Recursos de software:

id demo.m

² Deve-se notar que não estamos buscando uma prova matematicamente rigorosa aqui, mas sim algumas entendimento. Estamos assumindo que $x(t)$ é uma função de bom comportamento que permite o limite na Eqn. (1,54).

1.3.4 Classificações de sinal

Nesta seção iremos resumir vários métodos e critérios para classificar os tipos de sinais de tempo contínuo que serão úteis em nossas discussões futuras.

Sinais reais vs. complexos

Um sinal real é aquele em que a amplitude é real em todos os instantes de tempo. Por exemplo, se modelarmos uma tensão ou corrente elétrica com uma função matemática de tempo, o sinal resultante $x(t)$ obviamente tem valor real. Em contraste, um sinal complexo é aquele em que a amplitude do sinal também pode ter uma parte imaginária. Um sinal complexo pode ser escrito na forma cartesiana usando suas partes real e imaginária como

$$x(t) = x_r(t) + x_i(t) \quad (1.55)$$

ou na forma polar usando sua magnitude e fase como

$$x(t) = |x(t)| e^{j\phi(t)} \quad (1.56)$$

As duas formas nas Eqns. (1.55) e (1.56) podem ser relacionados entre si através do seguinte conjunto de equações:

$$|x(t)| = \sqrt{x_r^2(t) + x_i^2(t)} \quad (1.57)$$

$$\phi(t) = \tan^{-1} \frac{x_i(t)}{x_r(t)} \quad (1.58)$$

$$x_r(t) = |x(t)| \cos(\phi(t)) \quad (1.59)$$

$$x_i(t) = |x(t)| \operatorname{sen}(\phi(t)) \quad (1.60)$$

Ao derivar as Eqns. (1.59) e (1.60) usamos a fórmula de Euler.

Apesar de focarmos principalmente no uso de sinais de valor real em nossa discussão no restante deste texto, haverá momentos em que o uso de modelos de sinais complexos será útil.

Sinais periódicos vs. sinais não

periódicos Um sinal é considerado periódico se satisfaz

$$x(t + T_0) = x(t) \quad (1.61)$$

em todos os instantes de tempo t , e para um valor específico de $T_0 > 0$. O valor T_0 é referido como o período do sinal. Um exemplo de um sinal periódico é mostrado na Fig. 1.43.

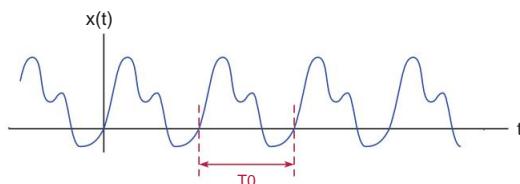


Figura 1.43 – Exemplo de um sinal que é periódico.

$$3 e^{\pm ja} = \cos(a) \pm j \operatorname{sen}(a)$$

Aplicando a definição de periodicidade da Eqn. (1.61) para $x(t+T_0)$ em vez de $x(t)$ obtemos

$$x(t+2T_0) = x(t+T_0) \quad (1.62)$$

que, quando combinado com a Eqn. (1.61), implica que

$$x(t+2T_0) = x(t) \quad (1.63)$$

e, através do uso repetido deste processo, podemos mostrar que

$$x(t+kT_0) = x(t) \quad (1.64)$$

para qualquer valor inteiro de k . Assim concluímos que, se um sinal é periódico com período T_0 , então também é periódico com períodos de $2T_0, 3T_0, \dots, kT_0, \dots$ onde k é um número inteiro qualquer. Quando nos referirmos ao período de um sinal periódico, implicaremos o menor valor positivo de T_0 que satisfaça a Eqn. (1.61). Nos casos em que discutimos vários períodos para o mesmo sinal, nos referiremos a T_0 como o período fundamental para evitar ambiguidade.

A frequência fundamental de um sinal periódico é definida como o recíproco de seu período fundamental:

$$f_0 = \frac{1}{T_0} \quad (1.65)$$

Se o período fundamental T_0 for expresso em segundos, então a frequência fundamental f_0 correspondente será expressa em Hz.

Exemplo 1.4: Trabalhando com um sinal periódico

complexo Considere um sinal definido por

$$\begin{aligned} x(t) &= x_r(t) + x_i(t) \\ &= A \cos(2\bar{y}f_0t + \bar{\phi}) + j A \sin(2\bar{y}f_0t + \bar{\phi}) \end{aligned}$$

Usando Eq. (1.57) e (1.58), a forma complexa polar deste sinal pode ser obtida como $x(t) = |x(t)| e^{j\phi_x(t)}$ com módulo e fase dados por

$$|x(t)| = [\sqrt{A^2 \cos^2(2\bar{y}f_0t + \bar{\phi}) + A^2 \sin^2(2\bar{y}f_0t + \bar{\phi})}]^{1/2} = A \quad (1.66)$$

e

$$x(t) = \tan \bar{\phi}_1 \frac{\sin(2\bar{y}f_0t + \bar{\phi})}{\cos(2\bar{y}f_0t + \bar{\phi})} = \tan \bar{\phi}_1 [\tan(2\bar{y}f_0t + \bar{\phi})] = 2\bar{y}f_0t + \bar{\phi} \quad (1.67)$$

respectivamente. Ao derivar os resultados nas Eqns. (1.66) e (1.67) contamos com as identidades trigonométricas apropriadas.⁴ Uma vez que a magnitude $|x(t)|$ e a fase $x(t)$ são obtidos, podemos expressar o sinal $x(t)$ na forma complexa polar:

$$x(t) = |x(t)| e^{j\phi_x(t)} = A e^{j(2\bar{y}f_0t + \bar{\phi})} \quad (1.68)$$

Os componentes das formas cartesianas e polar complexa do sinal são mostrados na Fig.

1.44. As partes real e imaginária de $x(t)$ têm uma diferença de fase de 90 graus entre elas.

Quando a parte real do sinal passa por um pico, a parte imaginária passa por zero e vice-versa. A fase de $x(t)$ foi encontrada na Eqn. (1.66) para ser uma função linear do

⁴ $\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$, e $\tan(a) = \sin(a) / \cos(a)$.

variável de tempo t . A aparência de linha quebrada da característica de fase na Fig. 1.44 é devida à normalização dos ângulos de fase para mantê-los na faixa $\hat{\gamma} < \gamma < \hat{\gamma}$.

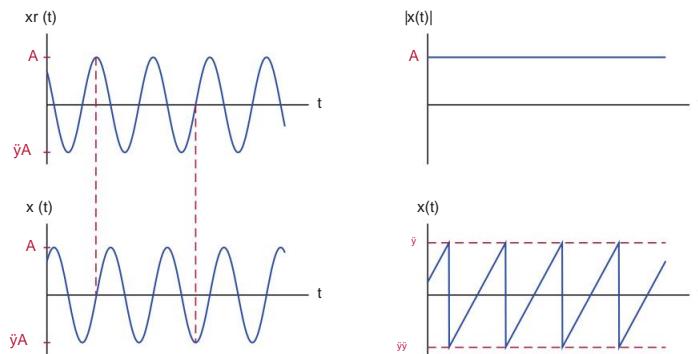


Figura 1.44 – Representações cartesianas e polares do sinal $x(t)$ no Exemplo 1.4.

Recursos de software:

[ex1_4.m](#)

Demonstração interativa: [cexp](#)

Este demonstração é baseada no Exemplo 1.4 e na Fig. 1.44. Ele permite a experimentação com os quatro gráficos da Fig. 1.44 enquanto varia os parâmetros A , f_0 e $\hat{\gamma}$. Três controles deslizantes na parte superior da janela da interface gráfica do usuário podem ser usados para variar os três parâmetros dentro de suas faixas prescritas: $0,5 \leq A \leq 5$, $50\text{Hz} \leq f_0 \leq 500\text{Hz}$ e $-180^\circ \leq \hat{\gamma} \leq 180^\circ$, respectivamente. Mover um controle deslizante para a direita aumenta o valor do parâmetro que ele controla e movê-lo para a esquerda faz o oposto. Também é possível digitar o valor desejado de um parâmetro no campo de edição associado ao seu controle deslizante. Varie os parâmetros e observe o seguinte:

- À medida que a amplitude A é aumentada, os gráficos para $x_r(t)$, $x_i(t)$ e $|x(t)|$ acordo de escala ingly, no entanto, a fase $x(t)$ não é afetada.
- A alteração de $\hat{\gamma}$ causa um atraso de tempo em $x_r(t)$ e $x_i(t)$.

Recursos de software:

[cexp demo.m](#)

Recursos de software: Veja MATLAB Exercício 1.4.

Exemplo 1.5: Periodicidade de sinais senoidais de tempo

contínuo Considere dois sinais senoidais de tempo contínuo

$$x_1(t) = A_1 \sin(2\pi f_1 t + \phi_1)$$

e

$$x_2(t) = A_2 \sin(2\pi f_2 t + \phi_2)$$

Determine as condições sob as quais o sinal de soma

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

também é periódico. Além disso, determine o período fundamental do sinal $x(t)$ em função dos parâmetros relevantes de $x_1(t)$ e $x_2(t)$.

Solução: Com base na discussão acima, sabemos que os sinais senoidais individuais $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são periódicos com períodos fundamentais de T_1 e T_2 respectivamente, e as seguintes propriedades de periodicidade podem ser escritas:

$$x_1(t + m_1 T_1) = x_1(t), \quad T_1 = 1/f_1 \quad (1.69)$$

$$x_2(t + m_2 T_2) = x_2(t), \quad T_2 = 1/f_2 \quad (1.70)$$

onde m_1 e m_2 são valores inteiros arbitrários. Para que o sinal de soma $x(t)$ seja periódico com período T_0 , precisamos da relação

$$x(t + T_0) = x(t) \quad (1.71)$$

ser válida em todos os instantes de tempo. Em termos dos sinais $x_1(t)$ e $x_2(t)$, isso requer

$$x_1(t + T_0) + x_2(t + T_0) = x_1(t) + x_2(t) \quad (1.72)$$

Usando Eq. (1.69) e (1.70) com a Eqn. (1.72) chegamos à conclusão de que a Eqn. (1.71) seria válida se dois inteiros m_1 e m_2 pudessem ser encontrados tais que

$$T_0 = m_1 T_1 = m_2 T_2 \quad (1.73)$$

ou, em termos das frequências envolvidas,

$$\frac{1}{f_0} = \frac{m_1}{f_1} = \frac{m_2}{f_2} \quad (1.74)$$

A soma de dois sinais senoidais $x_1(t)$ e $x_2(t)$ é periódica desde que suas frequências sejam múltiplos inteiros de uma frequência f_0 , ou seja, $f_1 = m_1 f_0$ e $f_2 = m_2 f_0$. O período do sinal de soma é $T_0 = 1/f_0$. A frequência f_0 é a frequência fundamental de $x(t)$.

O raciocínio acima pode ser facilmente estendido para qualquer número de sinais senoidais adicionados junto. Considere um sinal $x(t)$ definido como

$$x(t) = \sum_{n=1}^N \text{Um pecado}(2\pi f_n t + \phi_n) \quad (1.75)$$

O sinal $x(t)$ é periódico desde que as frequências de todos os seus componentes sejam múltiplos inteiros de uma frequência fundamental f_0 , ou seja,

$$f_n = m_n f_0, \quad n = 1, \dots, N \quad (1.76)$$

Essa conclusão será significativa quando discutirmos a representação em série de Fourier de sinais periódicos no Capítulo 4.

Exemplo 1.6: Mais sobre a periodicidade dos sinais senoidais

Discuta a periodicidade dos sinais

- a. $x(t) = \sin(2\pi 1,5t) + \sin(2\pi 2,5t)$
- b. $= \sin(2\pi 1,5t) + \sin(2\pi 2,75t)$

Solução:

- a. Para este sinal, a frequência fundamental é $f_0 = 0,5$ Hz. As duas frequências de sinal podem ser expressas como

$$f_1 = 1,5 \text{ Hz} = 3f_0 \text{ e } f_2 = 2,5 \text{ Hz} = 5f_0$$

O período fundamental resultante é $T_0 = 1/f_0 = 2$ segundos. Dentro de um período de $x(t)$ existem $m_1 = 3$ ciclos completos da primeira senóide e $m_2 = 5$ ciclos da segunda senóide. Isso é ilustrado na Fig. 1.45.

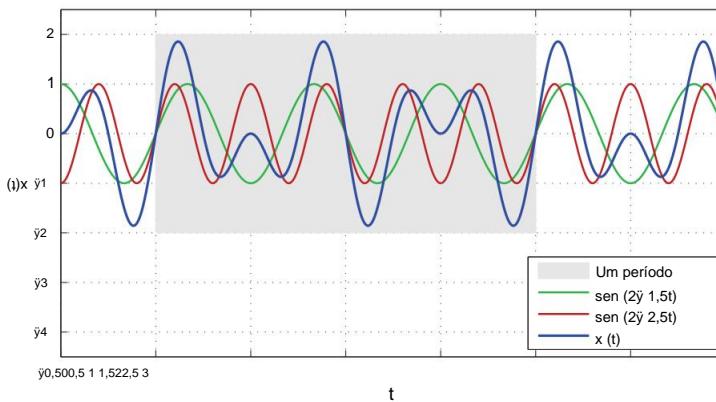


Figura 1.45 – Periodicidade de $x(t)$ do Exemplo 1.6.

- b. Neste caso, a frequência fundamental é $f_0 = 0,25$ Hz. As duas frequências de sinal podem ser expressas como

$$f_1 = 1,5 \text{ Hz} = 6f_0 \text{ e } f_2 = 2,75 \text{ Hz} = 11f_0$$

O período fundamental resultante é $T_0 = 1/f_0 = 4$ segundos. Dentro de um período de $y(t)$ existem $m_1 = 6$ ciclos completos da primeira senóide e $m_2 = 11$ ciclos da segunda senóide. Isso é ilustrado na Fig. 1.46.

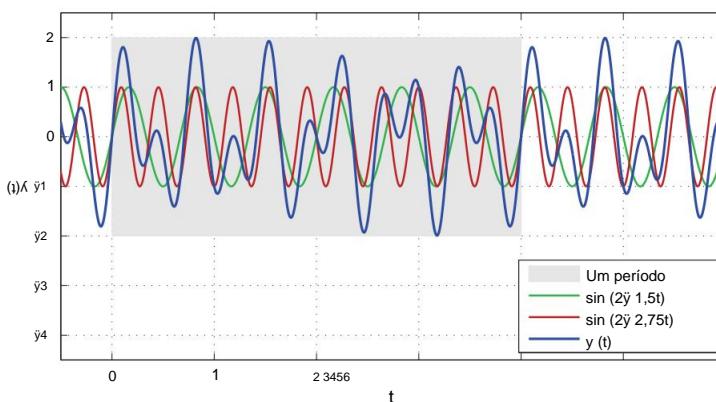


Figura 1.46 – Periodicidade de $y(t)$ do Exemplo 1.6.

1.3. Sinais de Tempo Contínuo

Recursos de software:

ex 1_6h

ex 1_6b.m

[Demonstração interativa: sin demo2](#)

Este programa de demonstração permite a exploração da periodicidade dos sinais multitons. Um sinal do tipo dado pela Eqn. (1.75) pode ser representado graficamente usando até quatro frequências. O início e o fim de um período do sinal são indicados no gráfico com linhas verticais tracejadas.

Recursos de software:

pecado demo2.m

Sinais determinísticos vs.

aleatórios Sinais determinísticos são aqueles que podem ser descritos completamente de forma analítica no domínio do tempo. Os sinais com os quais trabalhamos neste capítulo foram todos exemplos de sinais determinísticos. Sinais aleatórios, por outro lado, são sinais que ocorrem devido a fenômenos aleatórios que não podem ser modelados analiticamente. Um exemplo de sinal aleatório é o sinal de fala convertido na forma de onda de tensão elétrica por meio de um microfone. Um segmento muito curto de um sinal de fala foi mostrado na Fig. 1.2. Outros exemplos de sinais aleatórios são o sinal de vibração registrado durante um terremoto por um sismógrafo, o sinal de ruído gerado por um resistor devido a movimentos aleatórios e colisões de seus elétrons e a energia térmica que essas colisões produzem. Uma característica comum desses sinais é o fato de que a amplitude do sinal não é conhecida em nenhum instante de tempo e não pode ser expressa por meio de uma fórmula. Em vez disso, devemos tentar modelar as características estatísticas do sinal aleatório em vez do próprio sinal. Essas características estatísticas estudadas incluem valores médios da amplitude do sinal ou amplitude quadrada do sinal, distribuição de várias probabilidades envolvendo amplitude do sinal e distribuição de energia ou potência do sinal normalizado entre diferentes frequências. O estudo de sinais aleatórios está além do escopo deste texto, e o leitor deve consultar um dos muitos textos excelentes disponíveis sobre o assunto.

1.3.5 Definições de energia e potência

Energia de um

sinal Com sinais e sistemas físicos, o conceito de energia está associado a um sinal que é aplicado a uma carga. A fonte de sinal fornece a energia que deve ser dissipada pela carga. Por exemplo, considere uma fonte de tensão com tensão $v(t)$ conectada aos terminais de um resistor com resistência R conforme mostrado na Fig. 1.47(a). Seja $i(t)$ a corrente que flui através do resistor. Se quiséssemos usar a tensão $v(t)$ como nossa base nos cálculos de energia, a energia total dissipada no resistor seria

$$E = \int_{yy}^y v(t)i(t) dt = \int_{yy}^y \frac{v^2(t)dt}{R} \quad (1.77)$$

Como alternativa, considere o arranjo da Fig. 1.47(b), onde uma fonte de corrente com uma corrente variável no tempo $i(t)$ é conectada aos terminais do mesmo resistor. Nesse caso, a energia dissipada no resistor seria calculada como

$$E = \int_{yy}^y v(t)i(t) dt = \int_{yy}^y R i^2(t) dt \quad (1.78)$$

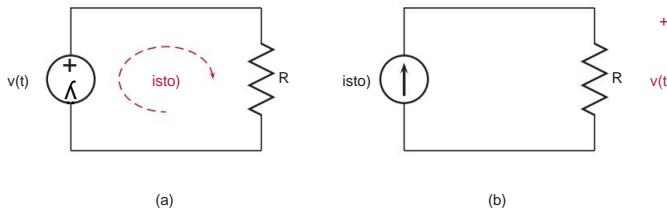


Figura 1.47 – Dissipação de energia em uma carga quando (a) uma fonte de tensão é usada e (b) uma fonte de corrente é usada.

No contexto deste texto, usamos modelos de sinais matemáticos que são independentes da natureza física dos sinais que estão sendo modelados. Um sinal como $x(t)$ pode representar uma tensão, uma corrente ou alguma outra quantidade física variável no tempo. Seria desejável ter uma definição de energia do sinal baseada apenas no modelo matemático do sinal, sem qualquer referência à carga e à quantidade física da qual o modelo matemático pode ter sido derivado. Se não sabemos se a função $x(t)$ representa uma tensão ou uma corrente, qual das duas equações discutidas acima devemos usar para calcular a energia produzida pelo sinal? Comparando Eq. (1.77) e (1.78) é óbvio que, se o valor do resistor for $R = 1 \Omega$, então ambas as equações produziriam o mesmo valor numérico:

$$E = \int_{yy}^y \frac{v2(t)}{(1-eu(t))} dt = \int_{yy}^y (1-eu(t)) dt \quad (1.79)$$

Esta é precisamente a abordagem que faremos. Para simplificar nossa análise e eliminar a necessidade de sempre prestar atenção às grandezas físicas que levam aos nossos modelos matemáticos, definiremos a energia normalizada de um sinal de valor real $x(t)$ como

$$Ex = \hat{\int_{\omega}} x2(t)dt \quad (1,80)$$

desde que a integral na Eqn. (1,80) pode ser calculado. Se o sinal $x(t)$ tiver um valor complexo, então sua energia normalizada é calculada como

$$Ex = \hat{\int}_{\mathbb{R}^n} |x(t)|^2 dt \quad (1,81)$$

onde $|x(t)|$ é a norma do sinal complexo. Em situações em que a energia do sinal normalizado não é computável, podemos calcular a potência normalizada do sinal.

Exemplo 1.7: Energia de um sinal exponencial do lado

direito Calcule a energia normalizada do sinal exponencial do lado direito

$$x(t) = A \sin \omega t u(t)$$

onde $\ddot{y} > 0$.

Solução: O sinal $x(t)$ é mostrado na Fig. 1.48. Observe como a amplitude do sinal começa com um valor de $x(0) = A$ e diminui para $x(1/\bar{y}) = A/e$ após $1/\bar{y}$ segundos. No instante de tempo $t = 2/\bar{y}$ segundos, a amplitude é ainda mais baixa para $x(2/\bar{y}) = A/e^2$. Por isso,

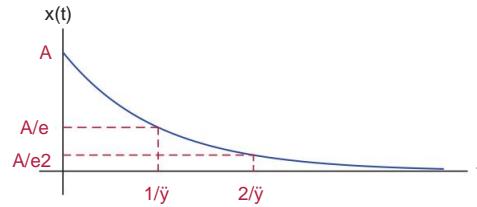


Figura 1.48 – O sinal $x(t)$ para o Exemplo 1.7.

o parâmetro \bar{y} controla a taxa na qual a amplitude do sinal decai ao longo do tempo. A energia normalizada deste sinal pode ser calculada pela aplicação da Eqn. (1.80) como

$$E_x = \int_0^{\infty} A^2 e^{-2\bar{y}t} dt = A^2 \frac{e^{-2\bar{y}t}}{-2\bar{y}} \Big|_0^{\infty} = \frac{A^2}{2\bar{y}} \quad (1.82)$$

A restrição $\bar{y} > 0$ era necessária, pois sem ela não poderíamos calcular a integral na Eqn. (1.82).

Demonstração interativa:

demonstração exp Este programa de demonstração é baseado no Exemplo 1.7, Fig. 1.48 e Eqn. (1.82). Os parâmetros A e \bar{y} do sinal exponencial do lado direito $x(t)$ podem ser controlados com os controles deslizantes disponíveis.

1. A forma da exponencial do lado direito depende do parâmetro \bar{y} . Observe os pontos-chave com amplitudes A/e e A/e^2 conforme o parâmetro \bar{y} é variado.
2. Observe como a energia E_x do sinal exibido se relaciona com a forma do exponencial sinal.

Recursos de software:

`exp_demo.m`

Operador de média de

tempo Na preparação para definir a potência em um sinal, precisamos primeiro definir a média de tempo de um sinal. Usaremos o operador ... para indicar a média de tempo. Se o sinal $x(t)$ for periódico com período T_0 , sua média de tempo pode ser calculada como

$$x_{\text{avg}}(t) = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) dt \quad (1.83)$$

Se o sinal $x(t)$ for não periódico, a definição de tempo médio na Eqn. (1.83) pode ser generalizado com o uso do operador limite como

$$x_{\text{avg}}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt \quad (1.84)$$

Uma maneira de entender a Eqn. (1.84) é ver o sinal não periódico $x(t)$ como se fosse periódico com um período infinitamente grande, de modo que nunca consigamos ver o padrão do sinal se repetir.

Exemplo 1.8: Tempo médio de um trem

de pulso Calcule o tempo médio de um trem de pulso periódico com amplitude A e período $T_0 = 1$ s, definido pelas equações

$$x(t) = \begin{cases} A, & 0 < t < d \\ 0, & d < t < 1 \end{cases}$$

e

$$x(t + k T_0) = x(t + k) = x(t) \text{ para todo } t \text{ e todos os inteiros } k$$

O sinal $x(t)$ é mostrado na Fig. 1.49.

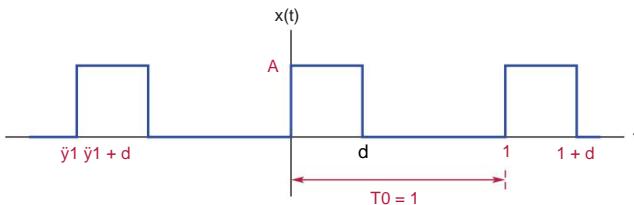


Figura 1.49 – O sinal do trem de pulso periódico $x(t)$ para o Exemplo 1.8.

Solução: O parâmetro d é a largura do pulso dentro de cada período. Como a duração de um período é $T_0 = 1$ s, o parâmetro d também pode ser considerado como a fração da duração do período na qual a amplitude do sinal é igual a A unidades. Neste contexto, d é referido como o ciclo de trabalho do trem de pulso. Para calcular a média de tempo de $x(t)$, precisamos aplicar a Eqn. (1.83) durante um período:

$$x(t) = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) dt = \frac{1}{1} \int_0^d (A) dt + \int_d^1 (0) dt = A d$$

Como esperado, a média de tempo do sinal de trem de pulso $x(t)$ é proporcional à amplitude de pulso A e ao ciclo de trabalho d .

Demonstração interativa: tavg

demo Este programa de demonstração ilustra a média de tempo do trem de pulso $x(t)$ conforme mostrado na Fig. 1.49 do Exemplo 1.8 com amplitude A e ciclo de trabalho d . Os valores de ambos os parâmetros podem ser ajustados usando os controles deslizantes fornecidos. Observe como o trem de pulso muda quando o ciclo de trabalho é variado. Preste atenção também na linha vermelha tracejada que mostra o valor da média temporal $x(t)$.

Recursos de software:

tavg demo.m

Potência de um

sinal Considere novamente os circuitos simples da Fig. 1.47 que foram usados na definição da energia normalizada do sinal. Usando $v(t)$ como a tensão nos terminais da carga e $i(t)$ como a corrente que flui através da carga, a potência instantânea dissipada no resistor de carga seria

$$p_{\text{inst}}(t) = v(t) i(t) \quad (1.85)$$

1.3. Sinais de Tempo Contínuo

Se a carga for escolhida para ter um valor de $R = 1 \ddot{y}$, a potência instantânea normalizada pode ser definida como

$$pnorm(t) = x^2(t) \quad (1.86) \text{ onde } x(t) \text{ pode representar a}$$

tensão ou a corrente. Freqüentemente, um conceito mais útil é a potência média normalizada definida como a média temporal de $pnorm(t)$, ou seja

$$Px = \overline{x^2(t)} \quad (1.87)$$

Observe que esta definição funcionará para sinais periódicos e não periódicos. Para um sinal periódico, a Eqn. (1.87) pode ser usado com a Eqn. (1.83) para render

$$Px = \frac{1}{T} \int_{-\dot{y}T/2}^{T/2} x^2(t) dt \quad (1.88)$$

Para um sinal não periódico, a Eqn. (1.84) pode ser substituída na Eqn. (1.87), e temos

$$Px = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\dot{y}T/2}^{T/2} x^2(t) dt \quad (1.89)$$

Em nossa discussão, estamos assumindo que o sinal $x(t)$ tem valor real. Se precisarmos considerar sinais de valor complexo, então a definição de potência do sinal pode ser generalizada usando a norma quadrada do sinal na operação de média de tempo:

$$Px = |x(t)|^2 \quad (1.90)$$

Lembre-se de que a norma ao quadrado de um sinal complexo é calculada como

$$|x(t)|^2 = x(t)x\bar{y}(t) \quad (1.91)$$

onde $x\bar{y}(t)$ é o conjugado complexo de $x(t)$. Assim, a potência de um sinal complexo periódico é

$$Px = \frac{1}{T} \int_{-\dot{y}T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt \quad (1.92)$$

e a potência de um sinal complexo não periódico é

$$Px = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\dot{y}T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt \quad (1.93)$$

Exemplo 1.9: Potência de um sinal

senoidal Considere o sinal

$$x(t) = A \sin(2\dot{y}f_0 t + \dot{y})$$

que não é limitado no tempo. É óbvio que a energia deste sinal não pode ser calculada, pois a integral na Eqn. (1.80) não daria um valor finito. Por outro lado, a potência do sinal pode ser calculada através do uso da Eqn. (1.88). O período do sinal é $T_0 = 1/f_0$, portanto

$$Px = f_0 \int_{-\dot{y}1/2f_0}^{1/2f_0} A^2 \sin^2(2\dot{y}f_0 t + \dot{y}) dt \quad (1.94)$$

Usando a identidade trigonométrica apropriada,5 podemos escrever a Eqn. (1,94) como

$$P_x = f_0 \hat{y} \int_{1/2f_0}^{1/2f_0} \frac{A^2}{2} dt \hat{y} f_0 \hat{y} \int_{1/2f_0}^{1/2f_0} \frac{A^2}{2} \cos(4\hat{y}f_0t + 2\hat{y}) dt \quad (1,95)$$

A segunda integral na Eqn. (1.95) resulta em zero, pois estamos integrando uma função cosseno com a frequência $2f_0$ em um intervalo de $T_0 = 1/f_0$. A função cosseno tem dois ciclos completos dentro desse intervalo. Assim, a potência média normalizada em um sinal senoidal com uma amplitude de A é

$$P_x = f_0 \hat{y} \int_{1/2f_0}^{1/2f_0} \frac{A^2}{2} A^2 dt = \frac{A^2}{2} \quad (1,96)$$

Este é um resultado que vale a pena lembrar.

Exemplo 1.10: Sinal exponencial do lado direito

revisitado Consideremos novamente o sinal exponencial do lado direito do Exemplo 1.7. Lembre-se de que a expressão analítica para o sinal foi

$$x(t) = A e^{\hat{y}t} u(t)$$

Usando a Eq. (1.89) pode-se mostrar facilmente que, para $\hat{y} > 0$, a potência do sinal é $P_x = 0$. Por outro lado, é interessante ver o que acontece se permitirmos $\hat{y} = 0$. Nesse caso, o sinal $x(t)$ torna-se uma função degrau:

$$x(t) = A u(t)$$

A potência média normalizada do sinal é

$$\begin{aligned} P_x &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\hat{y}T/2}^{T/2} x(t) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\hat{y}T/2}^0 (0) dt + \frac{1}{T} \int_0^{T/2} A^2 dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2}{2} = \frac{A^2}{2} \end{aligned}$$

e a energia do sinal normalizado torna-se infinitamente grande, ou seja, $E_x \hat{y} \hat{y}$.

Sinais de energia versus sinais de

potência Nos Exemplos 1.7 a 1.10, observamos que o conceito de energia do sinal é útil para alguns sinais e não para outros. O mesmo pode ser dito para a potência do sinal. Com base em nossas observações, podemos classificar os sinais encontrados na prática em duas categorias:

- Sinais de energia são aqueles que possuem energia finita e potência zero, ou seja, $E_x < \hat{y}$, e $P_x = 0$.
- Sinais de potência são aqueles que possuem potência finita e energia infinita, ou seja, $E_x \hat{y} \hat{y}$, e $P_x < \hat{y}$.

$$5 \sin^2(a) = \frac{1}{2} [1 - \cos(2a)].$$

1.3. Sinais de Tempo Contínuo

Apenas como observação, todos os sinais de tensão e corrente que podem ser gerados em laboratório ou que ocorrem nos dispositivos eletrônicos que usamos em nosso dia a dia são sinais de energia. É impossível produzir um sinal de energia em qualquer configuração prática, pois isso exigiria uma quantidade infinita de energia. O conceito de sinal de potência existe apenas como uma idealização matemática.

Valor RMS de um sinal

O valor da raiz quadrada média (RMS) de um sinal $x(t)$ é definido como

$$XRMS = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt} \quad (1.97)$$

A média de tempo na Eqn. (1.97) é calculado por meio do uso da Eqn. (1.83) ou Eqn. (1.84), dependendo se $x(t)$ é periódico ou não.

Exemplo 1.11: Valor RMS de um sinal senoidal No

Exemplo 1.9, descobrimos que a potência média normalizada do sinal senoidal $x(t) = A \sin(2\pi f_0 t + \phi)$ é $P_x = x^2(t) = A^2/2$. Com base na Eq. (1.97), o valor RMS deste sinal é

$$XRMS = \sqrt{\frac{A^2}{2}} = \frac{A}{\sqrt{2}} \quad (1.98)$$

conforme ilustrado na Fig. 1.50.

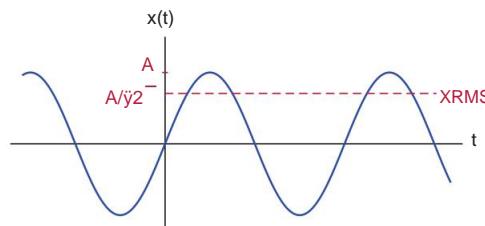


Figura 1.50 – Valor RMS de um sinal senoidal.

Exemplo 1.12: Valor RMS de um sinal multitonal

Considere o sinal bitonal dado por

$$x(t) = a_1 \cos(2\pi f_1 t + \phi_1) + a_2 \cos(2\pi f_2 t + \phi_2)$$

onde as duas frequências são distintas, ou seja, $f_1 \neq f_2$. Determine o valor RMS e a potência média normalizada desse sinal.

Solução: O cálculo do valor RMS e da potência média normalizada para o sinal $x(t)$ requer o cálculo da média de tempo de $x^2(t)$. O quadrado do sinal $x(t)$ é

$$\begin{aligned} x^2(t) &= a_1^2 \cos^2(2\pi f_1 t + \phi_1) + a_2^2 \cos^2(2\pi f_2 t + \phi_2) \\ &\quad + 2 a_1 a_2 \cos(2\pi f_1 t + \phi_1) \cos(2\pi f_2 t + \phi_2) \end{aligned} \quad (1.99)$$

Usando as identidades trigonométricas6 Eqn. (1,99) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} x_2(t) = & \frac{a_2}{2} + \frac{a_2}{2} \cos(2\bar{y}[2f_1]t + 2\bar{y}_1) + \cos(2\bar{y}_2) \\ & + a_1 a_2 \cos(2\bar{y}[f_1 + f_2]t + \bar{y}_1 + \bar{y}_2) + a_1 a_2 \cos(2\bar{y}[f_1 - f_2]t + \bar{y}_1 - \bar{y}_2) \end{aligned}$$

Agora podemos aplicar o operador de média de tempo a $x_2(t)$ para obter

$$\begin{aligned} x_2(t) = & \frac{a_2}{2} + \frac{a_2}{2} \cos(2\bar{y}[2f_1]t + 2\bar{y}_1) + \frac{a_2}{2} \cos(2\bar{y}[2f_2]t + 2\bar{y}_2) \\ & + a_1 a_2 \cos(2\bar{y}[f_1 + f_2]t + \bar{y}_1 + \bar{y}_2) + a_1 a_2 \cos(2\bar{y}[f_1 - f_2]t + \bar{y}_1 - \bar{y}_2) \quad (1,100) \end{aligned}$$

A média de tempo de cada um dos termos do cosseno na Eqn. (1,100) é igual a zero, e obtemos

$$x_2(t) = \frac{a_2}{2} + \frac{a_2}{2} \quad (1.101)$$

Assim, o valor RMS do sinal $x(t)$ é

$$XRMS = \sqrt{\frac{a_2^2}{2} + \frac{a_2^2}{2}} \quad (1.102)$$

e sua potência média normalizada é

$$Px = \frac{a_2}{2} + \frac{a_2}{2} \quad (1.103)$$

A generalização desses resultados para sinais contendo mais de dois componentes senoidais é direta. Se $x(t)$ contiver M componentes senoidais com amplitudes e frequências distintas f_1, f_2, \dots, f_M , seu valor RMS e média normalizada a_1, a_2, \dots, a_M , poder de idade são

$$XRMS = \sqrt{\frac{a_1^2}{2} + \frac{a_2^2}{2} + \dots + \frac{a_M^2}{2}} \quad (1.104)$$

e

$$Px = \frac{a_1^2}{2} + \frac{a_2^2}{2} + \dots + \frac{a_M^2}{2} \quad (1.105)$$

respectivamente.

1.3.6 Propriedades de simetria

Alguns sinais têm certas propriedades de simetria que podem ser utilizadas de várias maneiras na análise. Mais importante, um sinal que pode não ter nenhuma propriedade de simetria ainda pode ser escrito como uma combinação linear de sinais com certas propriedades de simetria.

$$6 \cos^2(a) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2a) \text{ e } \cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2} \cos(a+b) + \frac{1}{2} \cos(a-b).$$

1.3. Sinais de Tempo Contínuo

Simetria par e ímpar

Diz-se que um sinal de valor real tem simetria par se tiver a propriedade

$$x(\bar{y}t) = x(t) \quad (1.106)$$

para todos os valores de t . Um sinal com simetria uniforme permanece inalterado quando é revertido no tempo. A Fig. 1.51(a) mostra um exemplo de sinal com propriedade de simetria par. Da mesma forma, diz-se que um sinal de valor real tem simetria ímpar se tiver a propriedade

$$x(\bar{y}t) = \bar{y}x(t) \quad (1.107)$$

para todos t . A reversão do tempo tem o mesmo efeito que a negação em um sinal com simetria ímpar. Isso é ilustrado na Figura 1.51(b).

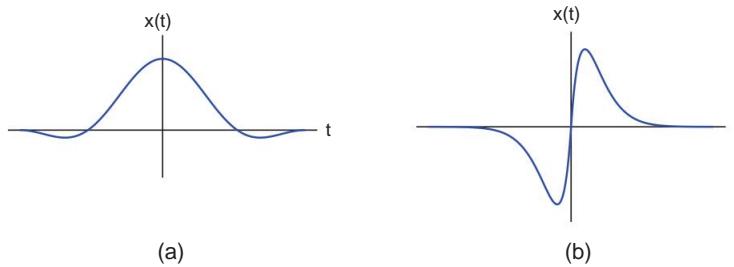


Figura 1.51 – (a) Sinal par, (b) sinal ímpar.

Como exemplo específico, o sinal $x(t) = \cos(\bar{y}t)$ tem simetria par, pois $\cos(\bar{y}\bar{y}t) = \cos(\bar{y}t)$. Da mesma forma, o sinal $x(t) = \sin(\bar{y}t)$ tem simetria ímpar, pois $\sin(\bar{y}\bar{y}t) = \bar{y}\sin(\bar{y}t)$.

Decomposição em componentes pares e ímpares

Sempre é possível dividir um sinal de valor real em dois componentes de tal forma que um dos componentes seja uma função par do tempo e o outro seja uma função ímpar do tempo. Considere a seguinte representação do sinal $x(t)$:

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t) \quad (1.108)$$

onde os dois componentes $x_e(t)$ e $x_o(t)$ são definidos como

$$x_e(t) = \frac{x(t) + x(\bar{y}t)}{2} \quad (1.109)$$

e

$$x_o(t) = \frac{x(t) - x(\bar{y}t)}{2} \quad (1.110)$$

As definições dos dois sinais $x_e(t)$ e $x_o(t)$ garantem que eles sempre somam $x(t)$.

Além disso, as propriedades de simetria $x_e(\bar{y}t) = x_e(t)$ e $x_o(\bar{y}t) = \bar{y}x_o(t)$ são garantidas pelas definições dos sinais $x_e(t)$ e $x_o(t)$ independentemente de quaisquer propriedades de simetria do sinal $x(t)$ pode ou não possuir. As propriedades de simetria de $x_e(t)$ e $x_o(t)$ podem ser facilmente verificadas formando as expressões para $x_e(\bar{y}t)$ e $x_o(\bar{y}t)$ e comparando-as com as Eqns. (1.109) e (1.110).

Vamos usar a Eq. (1.109) para escrever $x_e(\tilde{y}t)$:

$$(1.111) \quad (\tilde{y}t) = x_e(t) - \frac{x_e(\tilde{y}t) + x_e(t)}{2}$$

Da mesma forma, $x_o(\tilde{y}t)$ pode ser encontrado na Eqn. (1.110) como

$$(1.112) \quad (\tilde{y}t) = x_o(t) - \frac{x_e(\tilde{y}t) - x_e(t)}{2}$$

Vamos nos referir a $x_e(t)$ e $x_o(t)$ como o componente par e o componente ímpar de $x(t)$, respectivamente.

Exemplo 1.13: Componentes pares e ímpares de um pulso retangular

Determine os componentes pares e ímpares do sinal de pulso retangular

$$x(t) = \begin{cases} 1 & , 0 < t < 1 \\ 0, & \text{outro lugar} \end{cases}$$

que é mostrado na Fig. 1.52.

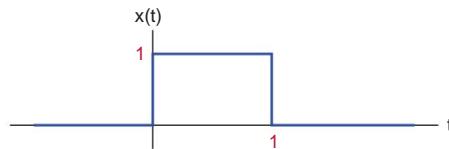


Figura 1.52 – O sinal de pulso retangular do Exemplo 1.13.

Solução: A componente par do sinal $x(t)$ calculada a partir da Eqn. (1.109) é

$$x_e(t) = \frac{\tilde{y}t\tilde{y} - \frac{1}{2} + \tilde{y}\tilde{y}t\tilde{y} - \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{2}\tilde{y}(t/2)$$

Seu componente ímpar é calculado usando a Eqn. (1.110) como

$$x_o(t) = 2 - \frac{1}{2}\tilde{y}t\tilde{y} - \frac{1}{2}\tilde{y}\tilde{y}t\tilde{y} = \frac{1}{2}\tilde{y}(1-t)$$

As duas componentes de $x(t)$ são representadas graficamente na Fig. 1.53.

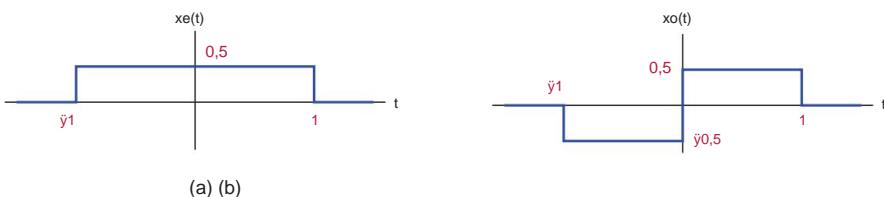


Figura 1.53 – (a) A componente par, e (b) a componente ímpar do sinal de pulso retangular do Exemplo 1.13.

Exemplo 1.14: Componentes pares e ímpares de um sinal senoidal

Considere o sinal senoidal

$$x(t) = 5 \cos(10t + \pi/3) \quad (1.113)$$

Que propriedades de simetria esse sinal possui, se houver? Determine seus componentes pares e ímpares.

Solução: O sinal $x(t)$ é mostrado na Fig. 1.54. Pode-se observar que não tem simetria par nem simetria ímpar.

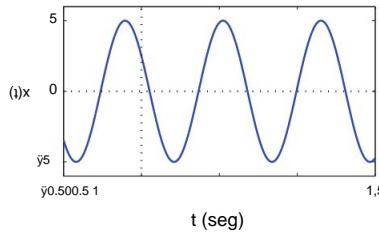


Figura 1.54 – O sinal do Exemplo 1.14.

Usaremos as Equações. (1.109) e (1.110) para decompor esse sinal em seus componentes par e ímpar. O componente par é

$$5x(t) = \frac{1}{2} [5 \cos(10t + \pi/3) + \frac{1}{2} \cos(-10t + \pi/3)] \quad (1.114)$$

Usando a identidade trigonométrica apropriada,⁷ a Eqn. (1.114) pode ser escrita como

$$x_e(t) = 5 \cos(10t) \cos(\pi/3) = 2,5 \cos(10t)$$

Da mesma forma, o componente ímpar de $x(t)$ é

$$5x_o(t) = \frac{1}{2} [5 \cos(10t + \pi/3) - \frac{1}{2} \cos(-10t + \pi/3)] \quad (1.115)$$

que, pelo uso da mesma identidade trigonométrica, pode ser escrita como

$$x_o(t) = \sqrt{5} \sin(10t) \sin(\pi/3) = \sqrt{4,3301} \sin(10t)$$

Os componentes pares e ímpares de $x(t)$ são mostrados na Fig. 1.55.

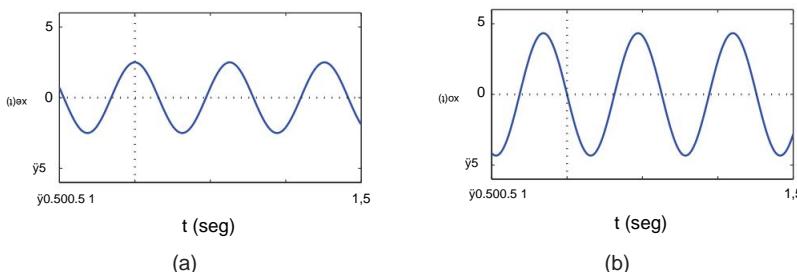


Figura 1.55 – (a) Componente par e (b) componente ímpar do sinal do Exemplo 1.14.

⁷ $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$.

Recursos de software:
ex_14.m

Propriedades de simetria para sinais complexos

Definições de simetria par e ímpar dadas por Eqns. (1.106) e (1.107) para sinais de valores reais podem ser estendidos para funcionar também com sinais de valores complexos. Um sinal de valor complexo é dito ser simétrico conjugado se satisfaz

$$x(\ddot{y}t) = \bar{x}\bar{y}(t) \quad (1.116)$$

para todos t . Para um sinal com simetria conjugada, a reversão do tempo tem o mesmo efeito que a conjugação complexa. Da mesma forma, um sinal de valor complexo é considerado antissimétrico conjugado se satisfaz

$$x(\ddot{y}t) = \dot{y}\ddot{x}(\dot{y}t) \quad (1.117) \text{ para todo } t. \text{ Se um sinal for}$$

antissimétrico conjugado, a inversão do tempo faz com que o sinal seja conjugado e negado simultaneamente.

É fácil ver pelas Eqns. (1.116) e (1.106) que, se o sinal for real, isto é, se $x(t) = \bar{x}(t)$, a definição de simetria conjugada se reduz à de simetria par.

Da mesma forma, a propriedade de antissimetria conjugada reduz a simetria ímpar para um valor real $x(t)$ conforme revelado por uma comparação de Eqns. (1.117) e (1.107).

Exemplo 1.15: Simetria de um sinal exponencial complexo

Considere o sinal exponencial complexo

$$x(t) = A e^{j\dot{y}t}, A: \text{real} \quad (1.118)$$

Que propriedade de simetria esse sinal possui, se houver?

Solução: A reversão do tempo de $x(t)$ resulta em

$$x(\ddot{y}t) = A e^{\dot{y}\ddot{j}t} \quad (1.119)$$

Conjugado complexo do sinal $x(t)$ é

$$\bar{x}(t) = A e^{j\dot{y}t} = A e^{\dot{y}\ddot{j}t} \quad (1.120)$$

Como $x(\ddot{y}t) = \bar{x}(t)$, concluímos que o sinal $x(t)$ é simétrico conjugado.

Decomposição de sinais complexos

É possível expressar qualquer sinal complexo $x(t)$ como a soma de dois sinais

$$x(t) = x_E(t) + x_O(t) \quad (1.121)$$

tal que $x_E(t)$ é conjugado simétrico, e $x_O(t)$ é conjugado antissimétrico. Os dois componentes da decomposição na Eqn. (1.121) são calculados como

$$(t) = \frac{x(t) + x(\ddot{y}t)}{2} x_E \quad (1.122)$$

e

$$(t) = \frac{x(t) - x(\ddot{y}t)}{2} x_O \quad (1.123)$$

As definições de $x_E(t)$ e $x_O(t)$ garantem que eles sempre somam $x(t)$. Além disso, é garantido que os dois componentes tenham as propriedades de simetria conjugada e antissimetria conjugada, respectivamente.

Conjugando a primeira componente $x_E(t)$ obtemos

$$x_{\bar{E}}(t) = \frac{x(t) + x\bar{y}(\bar{y}t)}{2} = \frac{x\bar{y}(t) + x(\bar{y}t)}{2} = x_E(\bar{y}t)$$

provando que $x_E(t)$ é conjugado simétrico. A conjugação do outro componente $x_O(t)$ produz

$$x_{\bar{O}}(t) = \frac{x(t)\bar{y}x\bar{y}(\bar{y}t)}{2} = \frac{x\bar{y}(t)\bar{y}x(\bar{y}t)}{2} = x_O(\bar{y}t)$$

provando que $x_O(t)$ é antissimétrico conjugado.

1.3.7 Representação gráfica de sinais senoidais usando fasores

Em certas situações, achamos conveniente representar um sinal senoidal com uma grandeza complexa denominada fasor. O uso do conceito fasorial é benéfico na análise de sistemas lineares nos quais vários sinais senoidais podem existir com a mesma frequência, mas com amplitude e valores de fase diferentes. Considere novamente um sinal senoidal na forma

$$x(t) = A \cos(2\bar{y}f_0 t + \bar{y}) \quad (1.124)$$

com três parâmetros ajustáveis, ou seja, a amplitude A , a fase \bar{y} e a frequência f_0 . Usando a fórmula de Euler,⁸ é possível expressar o sinal senoidal na Eqn. (1.124) como a parte real de um sinal complexo na forma

$$x(t) = \operatorname{Re} A e^{j(2\bar{y}f_0 t + \bar{y})} \quad (1.125)$$

A função exponencial na Eqn. (1.125) pode ser fatorada em dois termos, produzindo

$$x(t) = \operatorname{Re} A e^{j\bar{y}} e^{j2\bar{y}f_0 t} \quad (1.126)$$

Seja a variável complexa X definida como

$$XA e^{j\bar{y}} \quad (1.127)$$

A variável complexa X pode ser vista como um vetor com norma A e ângulo \bar{y} . A interpretação vetorial de X é ilustrada na Fig. 1.56.

⁸ $e^{ja} = \cos(a) + j \sin(a)$.

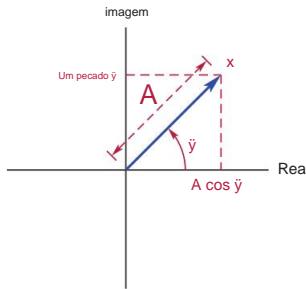


Figura 1.56 – Variável complexa X representada como um vetor.

Usando X na Eqn. (1.126), obtemos

$$x(t) = \operatorname{Re} X e^{j2\hat{y}f_0 t} \quad (1.128)$$

Na Eq. (1.128) o termo exponencial $e^{j2\hat{y}f_0 t}$ representa a rotação. Também é de valor complexo e tem norma unitária. Seu ângulo $2\hat{y}f_0 t$ é uma função linear do tempo. Em um intervalo de um segundo, o ângulo do termo exponencial cresce $2\hat{y}f_0$ radianos, correspondendo a f_0 revoluções em torno da origem. A expressão entre colchetes na Eqn. (1.128) combina o vetor X com este termo exponencial. A combinação representa um vetor com norma A e ângulo de fase inicial \hat{y} que gira à taxa de f_0 revoluções por segundo. Vamos nos referir a este vetor rotativo como um fasor. Em qualquer instante de tempo, a amplitude do sinal $x(t)$ é igual à parte real do fasor. Essa relação é ilustrada na Fig. 1.57.

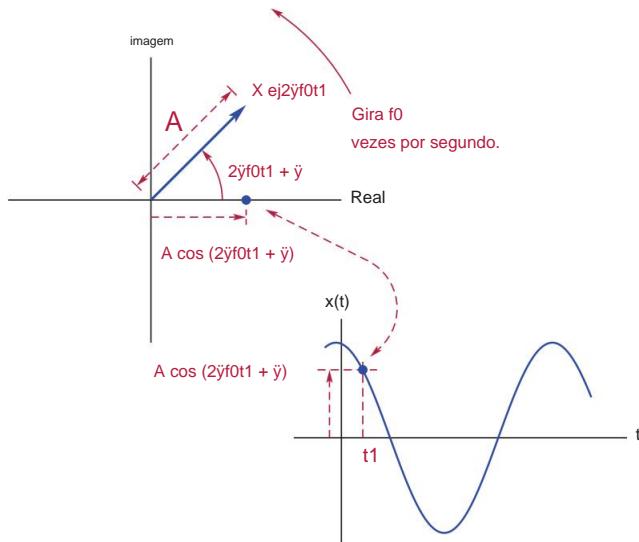


Figura 1.57 – Representação fasorial do sinal $x(t)$.

Demonstração interativa: phs

demo O programa de demonstração em “phs demo.m” fornece uma interface gráfica do usuário para experimentos com fasores.

A janela do gráfico na seção superior direita representa o plano complexo. Um ou dois fasores podem ser visíveis; o primeiro fasor é mostrado em azul e o segundo fasor é mostrado em vermelho. A parte real de cada fasor é mostrada com linhas tracejadas grossas da mesma cor do fasor.

A janela do gráfico na parte inferior mostra a representação no domínio do tempo do sinal que corresponde a cada fasor, usando o mesmo esquema de cores. A soma dos dois sinais senoidais é mostrada em preto. A parte real de cada fasor, exibida com linhas tracejadas grossas no plano complexo, é duplicada no gráfico de tempo para mostrar sua relação com o respectivo sinal variável no tempo.

A norma, o ângulo de fase e a taxa de rotação de cada fasor podem ser especificados inserindo os valores dos parâmetros nos campos marcados com a cor correspondente, azul ou vermelho.

O programa aceita frequências de rotação na faixa de 0,1 $\leq f \leq 10$ Hz. Os valores de magnitude podem ser de 0,5 a 3. Os ângulos de fase iniciais devem estar naturalmente na faixa de $-180^\circ \leq \phi \leq 180^\circ$ graus.

A visibilidade de um fasor e seus sinais associados podem ser ativados e desativados usando os controles da caixa de seleção ao lado da janela do gráfico. A variável de tempo pode ser avançada clicando no botão de seta ao lado do controle deslizante. À medida que t aumenta, cada fasor gira no sentido anti-horário em sua frequência especificada.

Recursos de software:

phs demo.m

Recursos de software: Veja MATLAB Exercício 1.5.

1.4 Sinais de Tempo Discreto

Sinais de tempo discreto não são definidos em todos os instantes de tempo. Em vez disso, eles são definidos apenas em instantes de tempo que são múltiplos inteiros de um incremento de tempo fixo T , ou seja, em $t = nT$. Conseqüentemente, o modelo matemático para um sinal de tempo discreto é uma função $x[n]$ na qual a variável independente n é um número inteiro e é chamada de índice de amostra. O sinal resultante é uma sequência indexada de números, cada um dos quais é referido como uma amostra do sinal. Sinais de tempo discreto são frequentemente ilustrados graficamente usando diagramas de haste, um exemplo do qual é mostrado na Fig. 1.58.

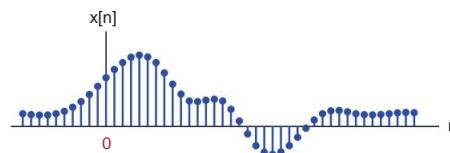


Figura 1.58 – Um sinal de tempo discreto.

Como um exemplo prático de um sinal de tempo discreto, os valores diários de fechamento do Dow Jones Industrial Average para os primeiros três meses de 2003 são mostrados na Fig. 1.59. Neste caso, o intervalo de tempo T corresponde a um dia e as amostras de sinal são indexadas com números inteiros correspondentes aos dias subsequentes de negociação.

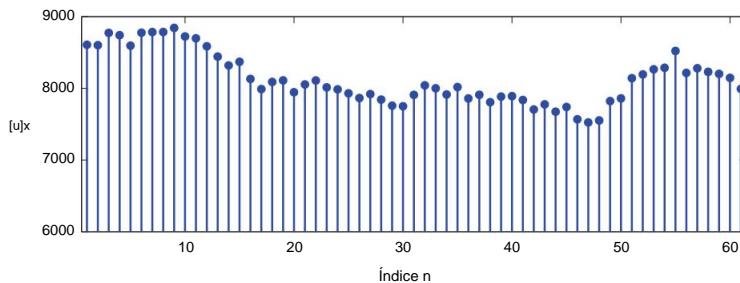


Figura 1.59 – Dow Jones Industrial Average para os três primeiros meses de 2003.

Às vezes, sinais de tempo discreto também são modelados usando funções matemáticas. Por exemplo

$$x[n] = 3 \operatorname{sen}[0,2n]$$

é um sinal senoidal de tempo discreto. Em alguns casos, pode ser mais conveniente expressar um sinal de forma tabular. Uma maneira compacta de tabular um sinal é listar as amostras de sinal significativas entre um par de chaves e separá-las com vírgulas:

$$x[n] = \{ 3.7, 1.3, \dots, 1.5, 3.4, 5.9 \} \quad (1.129)$$

A seta para cima indica a posição do índice de amostra $n = 0$, então temos $x[\hat{n}] = 3.7$, $x[0] = 1.3$, $x[1] = \hat{1.5}$, $x[2] = 3.4$ e $x[3] = 5.9$.

Se a faixa significativa de amostras de sinal a serem tabuladas não incluir $n = 0$, então especificamos qual índice a seta para cima indica. Por exemplo

$$x[n] = \{ 1.1, 2.5, 3.7, 3.2, 2.6 \} \quad (1.130)$$

$\hat{y} n=5$

indica que $x[4] = 1.1$, $x[5] = 2.5$, $x[6] = 3.7$, $x[7] = 3.2$ e $x[8] = 2.6$.

Para consistência no tratamento de sinais de tempo discreto, assumiremos que qualquer sinal de tempo discreto $x[n]$ tem um número infinito de amostras para $\hat{y} < n < \hat{y}$. Se um sinal é descrito em forma tabular como mostrado nas Eqns. (1.129) e (1.130), qualquer amostra não listada será considerada com amplitude zero.

Em um sinal de tempo discreto, a variável de tempo é discreta, mas a amplitude de cada amostra é contínua. Mesmo que a faixa de valores de amplitude possa ser limitada, qualquer amplitude dentro da faixa prescrita é permitida.

Se, além de limitar a variável de tempo ao conjunto dos inteiros, também limitarmos os valores de amplitude a um conjunto discreto, o sinal resultante é chamado de sinal digital. No caso mais simples, existem apenas dois valores possíveis para a amplitude de cada amostra, normalmente indicados por "0" e "1". O sinal correspondente é chamado de sinal binário. Cada amostra de um sinal binário é chamada de bit, que significa dígito binário. Alternativamente, cada amostra de um sinal digital pode assumir um valor de um conjunto de M valores permitidos, e o sinal digital resultante é chamado de sinal M -ário.

1.4.1 Operações de sinal

As operações básicas de sinais para sinais de tempo contínuo foram discutidas na Seção 1.3.1. Nesta seção, discutiremos as operações de sinal correspondentes para sinais de tempo discreto. As operações aritméticas para sinais de tempo discreto apresentam forte semelhança com suas contrapartes de tempo contínuo. Versões de tempo discreto de operações de deslocamento de tempo, escalonamento de tempo e reversão de tempo também serão discutidas. Tecnicamente, o uso da palavra “tempo” é um tanto impreciso para essas operações, pois a variável independente para sinais de tempo discreto é a amostra em dex n que pode ou não corresponder ao tempo. Iremos, no entanto, usar os termos estabelecidos de mudança de tempo, escalonamento de tempo e reversão de tempo, tendo em mente a distinção entre t e n. Operações de sinal mais avançadas, como convolução, serão abordadas em capítulos posteriores.

Operações aritméticas

Considere um sinal de tempo discreto $x[n]$. Um valor de deslocamento constante pode ser adicionado a este sinal para obter

$$g[n] = x[n] + A \quad (1,131)$$

O offset A é adicionado a cada amostra do sinal $x[n]$. Se fôssemos escrever a Eqn. (1,131) para valores específicos do índice n obteríamos

⋮

$$\begin{aligned} g[\ddot{y}1] &= x[\ddot{y}1] + A \\ &= x[0] + A \\ &= x[1] + A \end{aligned}$$

⋮

e assim por diante. Isso é ilustrado na Fig. 1.60.

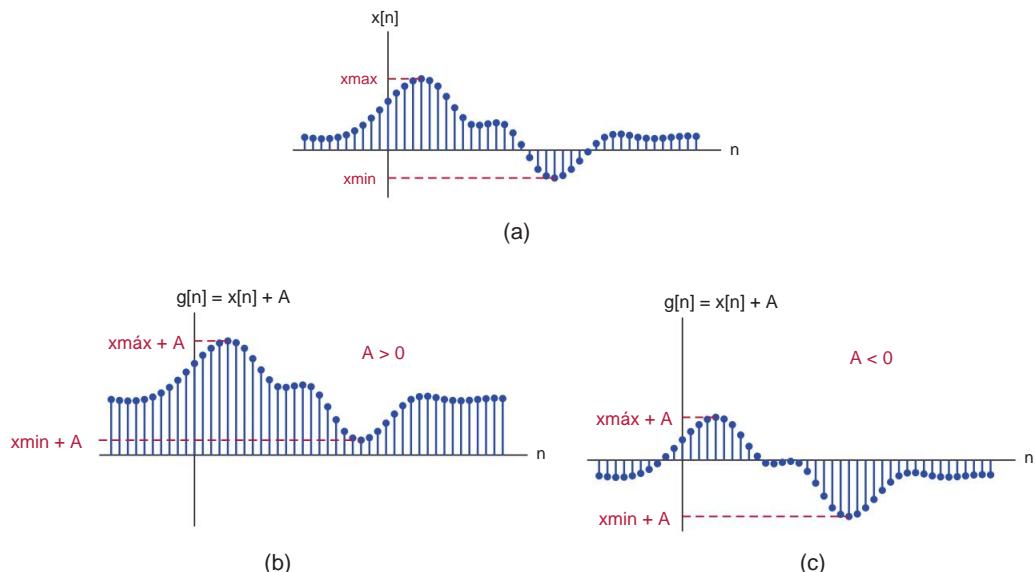


Figura 1.60 – Adicionando um offset A ao sinal $x[n]$: (a) Sinal original $x[n]$, (b) $g[n] = x[n] + A$ com $A > 0$, (c) $g[n] = x[n] + A$ com $A < 0$.

A multiplicação do sinal $x[n]$ com fator de ganho B é expressa na forma

$$g[n] = B x[n] \quad (1.132)$$

O valor de cada amostra do sinal $g[n]$ é igual ao produto da amostra correspondente de $x[n]$ e o fator de ganho constante B. Para valores de índice individuais, temos

$$\begin{aligned} g[\hat{y}1] &= B x[\hat{y}1] \\ g[0] &= B x[0] \\ g[1] &= B x[1] \end{aligned}$$

e assim por diante. Isso é ilustrado na Fig. 1.61.

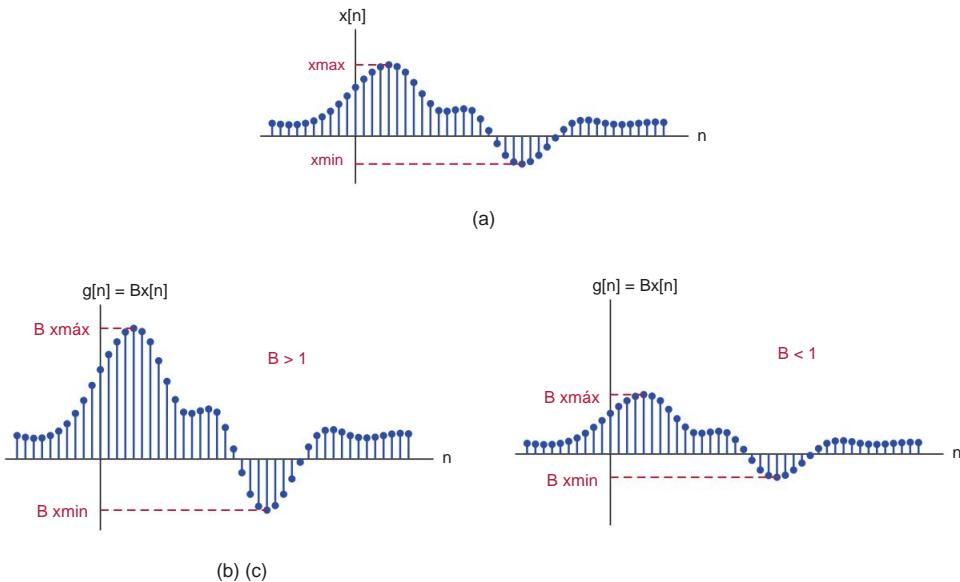


Figura 1.61 – Multiplicando o sinal $x[n]$ com um fator de ganho constante B: (a) Sinal original $x[n]$, (b) $g[n] = B x[n]$ com $B > 1$, (c) $g[n] = B x[n]$ com $B < 1$.

A adição de dois sinais de tempo discreto é realizada adicionando as amplitudes das amostras correspondentes dos dois sinais. Sejam $x1[n]$ e $x2[n]$ os dois sinais que estão sendo adicionados. A soma

$$g[n] = x1[n] + x2[n] \quad (1.133)$$

é calculado para cada valor do índice n como

$$\begin{aligned} g[\hat{y}1] &= x1[\hat{y}1] + x2[\hat{y}1] \\ &= x1[0] + x2[0] \\ &= x1[1] + x2[1] \end{aligned}$$

Isso é ilustrado na Fig. 1.62.

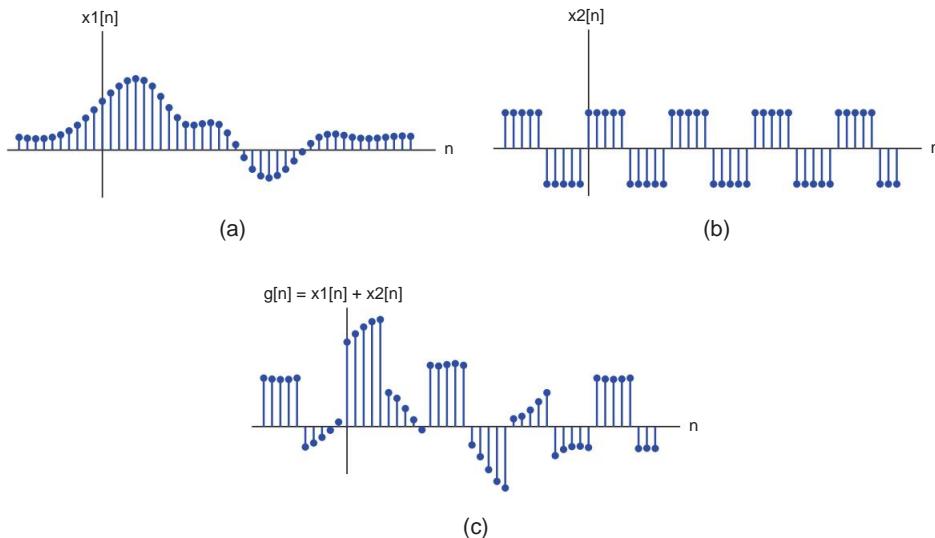


Figura 1.62 – Adicionando sinais de tempo discreto.

Dois sinais de tempo discreto também podem ser multiplicados de maneira semelhante. O produto de dois sinais $x_1[n]$ e $x_2[n]$ é

$$g[n] = x_1[n] x_2[n] \quad (1.134)$$

que pode ser escrito para valores específicos do índice como

$$\begin{aligned} & \vdots \\ g[\ddot{y}_1] &= x_1[\ddot{y}_1] x_2[\ddot{y}_1] g[0] \\ &= x_1[0] x_2[0] g[1] \\ &= x_1[1] x_2[1] \\ & \vdots \end{aligned}$$

e é mostrado na Fig. 1.63.

mudança de tempo

Como os sinais de tempo discreto são definidos apenas para valores inteiros do índice de amostra, as operações de deslocamento de tempo devem utilizar parâmetros de deslocamento de inteiro. Uma versão deslocada no tempo do sinal $x[n]$ é obtida como

$$g[n] = x[n \ddot{y} k] \quad (1.135)$$

onde k é qualquer inteiro positivo ou negativo. A relação entre $x[n]$ e $g[n]$ é ilustrada na Fig. 1.64.

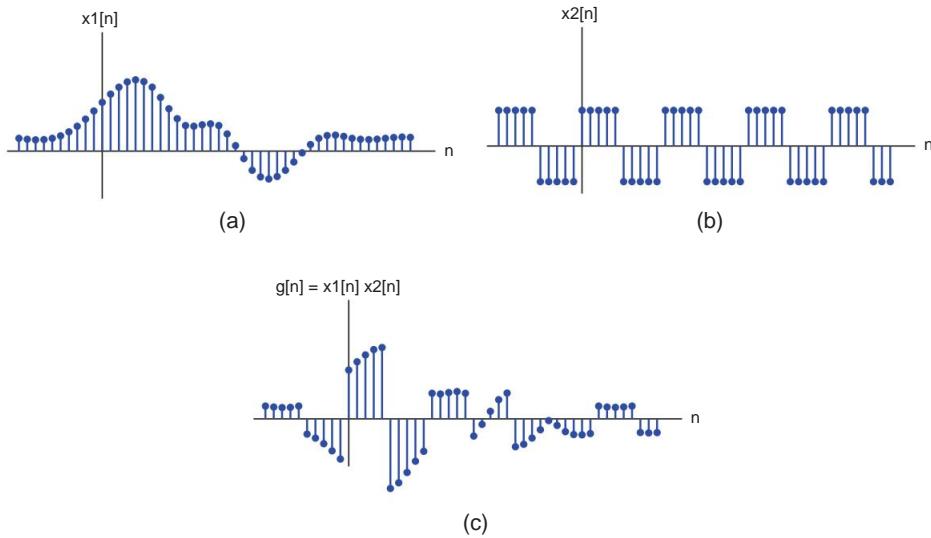


Figura 1.63 – Multiplicação de sinais discretos no tempo.

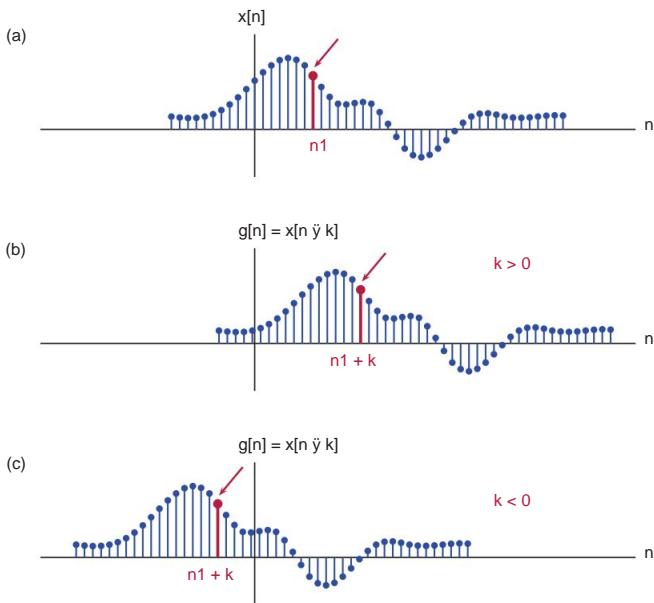


Figura 1.64 – Time shifting de um sinal de tempo discreto.

Na parte (a) da Fig. 1.64, a amostra de $x[n]$ no índice n_1 é marcada com uma haste mais grossa. Deixe essa amostra corresponder a um evento especial no sinal $x[n]$. Substituindo $n = n_1 + k$ na Eqn. (1.135) temos

$$g[n_1 + k] = x[n_1] \quad (1,136)$$

Fica claro pela Eqn. (1.136) que o evento que ocorre em $x[n]$ no índice $n = n_1$ ocorre em $g[n]$ no índice $n = n_1 + k$. Se k for positivo, isso corresponde a um atraso de k amostras. Por outro lado, um k negativo implica um avanço.

escala de tempo

Para sinais de tempo discreto, consideraremos a escala de tempo nas duas formas a seguir:

$$g[n] = x[kn], \quad k: \text{inteiro} \quad (1.137)$$

e

$$g[n] = x[n/k], \quad k: \text{inteiro} \quad (1.138)$$

Vamos primeiro considerar a forma na Eqn. (1.137). A relação entre $x[n]$ e $g[n] = x[kn]$ é ilustrada na Fig. 1.65 para $k = 2$ e $k = 3$.

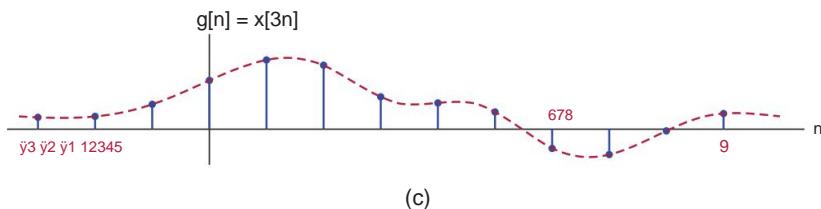
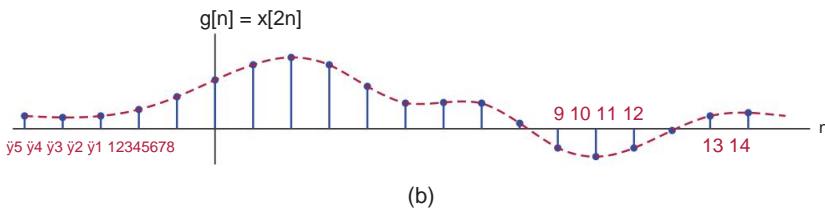
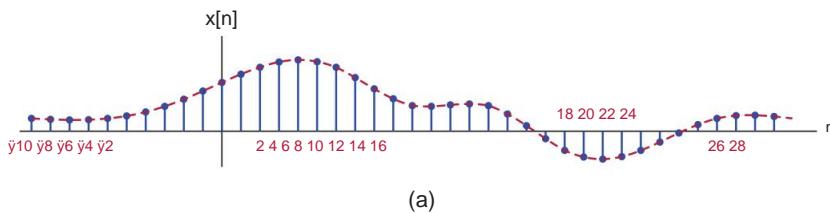


Figura 1.65 – Escalonamento temporal de um sinal $x[n]$ para obter $g[n] = x[kn]$: (a) Sinal original $x[n]$, (b) $g[n] = x[2n]$, (c) $g[n] = x[3n]$.

Será interessante escrever esta relação para vários valores do índice n . Para $k = 2$ temos

$$\dots g[\ddot{y}1] = x[\ddot{y}2], g[0] = x[0], g[1] = x[2], g[2] = x[4], \dots$$

o que sugere que $g[n]$ retém todas as outras amostras de $x[n]$ e descarta as amostras entre elas. Essa relação é ilustrada com mais detalhes na Fig. 1.66.

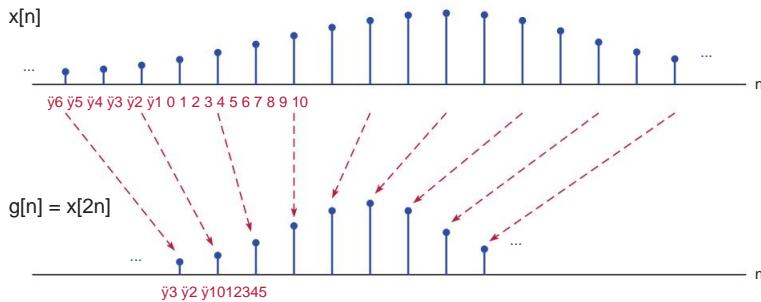


Figura 1.66 – Ilustração de time scaling (downsampling) de um sinal de tempo discreto por um fator de 2.

Para $k = 3$, amostras de $g[n]$ são

$$\dots g[\bar{y}1] = x[\bar{y}3], g[0] = x[0], g[1] = x[3], g[2] = x[6], \dots$$

Nesse caso, cada terceira amostra de $x[n]$ é retida, e as amostras entre elas são descartadas, conforme mostrado na Fig. 1.67.

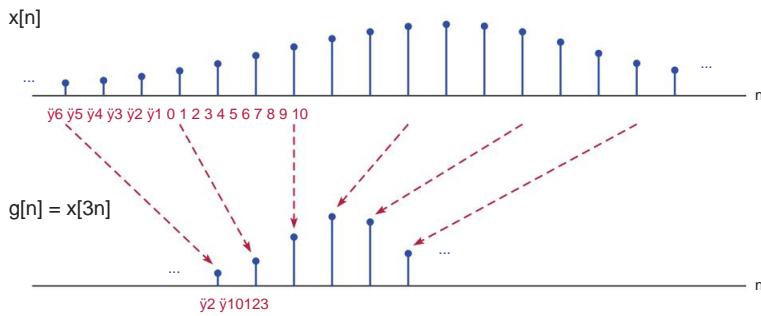


Figura 1.67 – Ilustração da escala temporal (downsampling) de um sinal de tempo discreto por um fator de 3.

Isso levanta uma questão interessante: o ato de descartar amostras leva à perda de informações ou essas amostras eram redundantes em primeiro lugar? A resposta depende das características do sinal $x[n]$ e será explorada quando discutirmos o downsampling e a decimação no Capítulo 6.

Uma forma alternativa de escalonamento de tempo para um sinal de tempo discreto foi dada pela Eqn. (1.138). Considere, por exemplo, o sinal $g[n]$ definido com base na Eqn. (1.138) com $k = 2$:

$$g[n] = x[n/2] \quad (1.139)$$

Como o índice do sinal no lado direito do sinal de igual é $n/2$, a relação entre $g[n]$ e $x[n]$ é definida apenas para valores de n que tornam $n/2$ um número inteiro. Nós podemos escrever

$$\dots g[\bar{y}2] = x[\bar{y}1], g[0] = x[0], g[2] = x[1], g[4] = x[2], \dots$$

As amplitudes de amostra do sinal $g[n]$ para valores ímpares de n não estão vinculadas ao sinal $x[n]$ de forma alguma. Para fins de discussão, vamos definir essas amplitudes de amostra indefinidas

igual a zero. Assim, podemos escrever uma descrição completa do sinal $g[n]$

$$g[n] = \begin{cases} x[n/2], & \text{se } n/2 \text{ é inteiro} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (1.140)$$

A Fig. 1.68 ilustra o processo de obtenção de $g[n]$ a partir de $x[n]$ com base na Eqn. (1.140). A relação entre $x[n]$ e $g[n]$ é conhecida como upsampling e será discutida com mais detalhes no Capítulo 6 no contexto da interpolação.

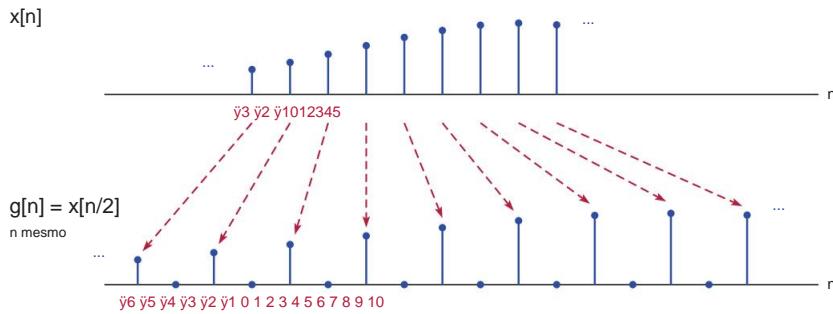


Figura 1.68 – Ilustração do escalonamento temporal (upsampling) de um sinal de tempo discreto por um fator de 2.

reversão do tempo

Uma versão invertida no tempo do sinal $x[n]$ é

$$g[n] = x[\bar{y}n] \quad (1.141)$$

Um evento que ocorre no valor de índice $n = n_1$ no sinal $x[n]$ ocorre no valor de índice $n = \bar{y}n_1$ no sinal $g[n]$. Graficamente, isso corresponde a dobrar ou inverter o sinal $x[n]$ em torno do eixo $n = 0$, conforme ilustrado na Fig. 1.69.

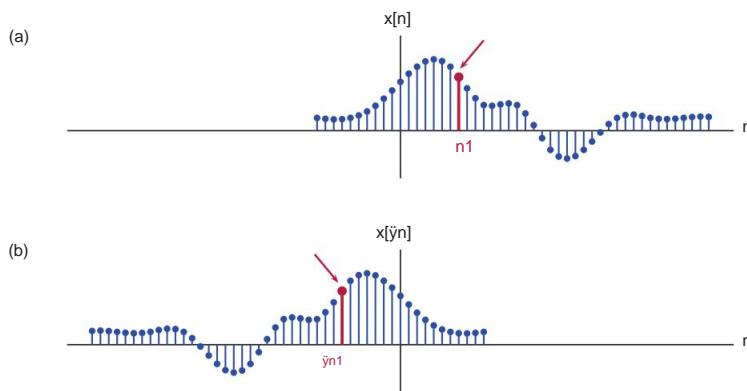


Figura 1.69 – Reversão temporal de um sinal de tempo discreto.

1.4.2 Blocos de construção básicos para sinais de tempo discreto

Nesta seção, veremos os blocos básicos de construção de sinais de tempo discreto que são usados na construção de modelos matemáticos para sinais de tempo discreto com maior complexidade. Nós

Você verá que muitos dos blocos de construção de sinal de tempo contínuo discutidos na Seção 1.3.2 têm contrapartes de tempo discreto que são definidas de forma semelhante e que possuem propriedades semelhantes. Existem também algumas diferenças fundamentais entre as versões de tempo contínuo e discreto dos sinais básicos, e elas serão indicadas ao longo de nossa discussão.

Função de impulso unitário

A função impulso unitário de tempo discreto é definida por

$$\hat{y}[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \quad (1.142)$$

e é mostrado graficamente na Fig. 1.70.

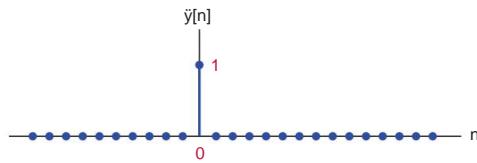


Figura 1.70 – Sinal de impulso unitário de tempo discreto.

Como é evidente a partir da definição na Eqn. (1.142) e Fig. 1.70, a função de impulso unitário de tempo discreto não apresenta as complicações associadas à sua contraparte de tempo contínuo. O sinal $\hat{y}[n]$ é inequivocavelmente definido para todos os valores inteiros do índice de amostra n .

Versões deslocadas e em escala da função de impulso unitário de tempo discreto são frequentemente usadas em problemas envolvendo interação de sistema de sinal. Uma função de impulso unitário que é escalada por a e deslocada no tempo por n_1 amostras é descrita por

$$a \hat{y}[n - n_1] = \begin{cases} a, & n = n_1 \\ 0, & n \neq n_1 \end{cases} \quad (1.143)$$

e é mostrado na Fig. 1.71.

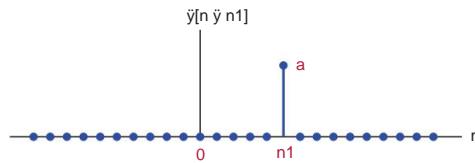


Figura 1.71 – Sinal de impulso unitário de tempo discreto escalado e deslocado.

As propriedades fundamentais da função impulso unitário de tempo contínuo discutidas na Seção 1.3.2 podem ser facilmente adaptadas à sua contraparte de tempo discreto. A propriedade de amostragem da função de impulso unitário de tempo discreto é expressa como

$$x[n] \hat{y}[n - n_1] = x[n_1] \hat{y}[n - n_1] \quad (1.144)$$

É importante interpretar a Eqn. (1.144) corretamente: $x[n]$ e $\hat{y}[n - n_1]$ são ambos sinais de tempo discreto infinitamente longos e podem ser representados graficamente em termos do índice de amostra n , conforme mostrado na Fig. 1.72.

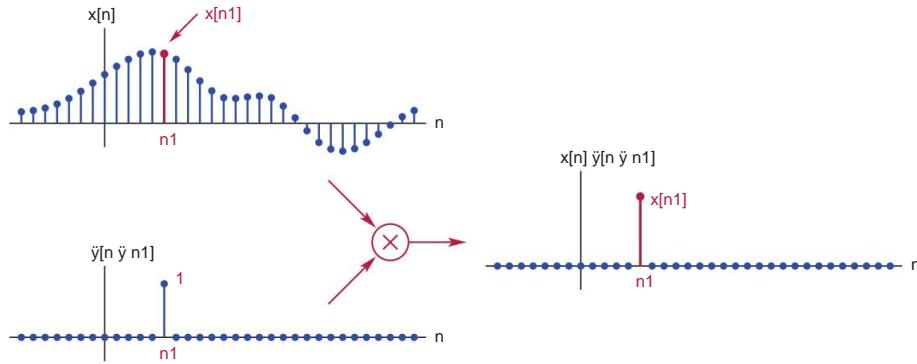


Figura 1.72 – Ilustração da propriedade de amostragem do sinal de impulso unitário de tempo discreto.

A afirmação na Eqn. (1.144) é fácil de justificar: Se os dois sinais $x[n]$ e $\bar{y}[n \neq n_1]$ forem multiplicados amostra por amostra, o sinal do produto é igual a zero para todos, exceto um valor do índice amostral n , e a única amplitude diferente de zero ocorre para $n = n_1$.

Matematicamente temos

$$x[n] \bar{y}[n \neq n_1] = \begin{cases} x[n_1], & n = n_1 \\ 0, & n \neq n_1 \end{cases} \quad (1.145)$$

que é equivalente ao lado direito da Eqn. (1.144).

A propriedade de peneiração para a função de impulso unitário de tempo discreto é expressa como

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \bar{y}[n \neq n_1] = x[n_1] \quad (1.146)$$

que segue facilmente da Eqn. (1.144). Substituindo a Eq. (1.144) na Eqn. (1.146) obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \bar{y}[n \neq n_1] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n_1] \bar{y}[n \neq n_1] \\ &= x[n_1] \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{y}[n \neq n_1] \\ &= x[n_1] \end{aligned} \quad (1.147)$$

onde contamos com a soma de todas as amostras do sinal de impulso igual à unidade.

O resultado da soma na Eqn. (1.146) é um escalar, cujo valor é igual à amostra n_1 do sinal $x[n]$.

Função degrau unitário

A função degrau unitário de tempo discreto também pode ser definida de maneira semelhante à sua versão de tempo contínuo:

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \quad (1.148)$$

A função $u[n]$ é mostrada na Fig. 1.73.

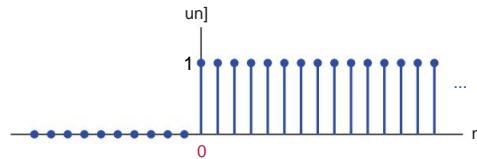


Figura 1.73 – Sinal de passo unitário de tempo discreto.

Como no caso da função de impulso unitário de tempo discreto, esta função também possui uma definição limpa, sem nenhuma das complicações associadas à sua contraparte de tempo contínuo.

Eq. (1.148) fornece uma definição completa da função degrau unitário de tempo discreto para todos os valores inteiros do índice de amostra n . Uma versão deslocada no tempo da função de passo unitário de tempo discreto pode ser escrita como

$$u[n - n_1] = \begin{cases} 1, & n \geq n_1 \\ 0, & n < n_1 \end{cases} \quad (1.149)$$

e é ilustrado na Fig. 1.74.

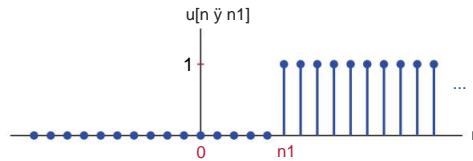


Figura 1.74 – Sinal de passo unitário de tempo discreto deslocado no tempo.

Lembre-se de que um impulso unitário de tempo contínuo pode ser obtido como a primeira derivada do passo unitário de tempo contínuo. Existe uma relação análoga entre as contrapartes de tempo discreto desses sinais. É possível expressar um sinal de impulso unitário de tempo discreto como a primeira diferença do sinal de passo de unidade de tempo discreto:

$$\hat{y}[n] = u[n] - u[n - 1] \quad (1.150)$$

Essa relação é ilustrada na Fig. 1.75.

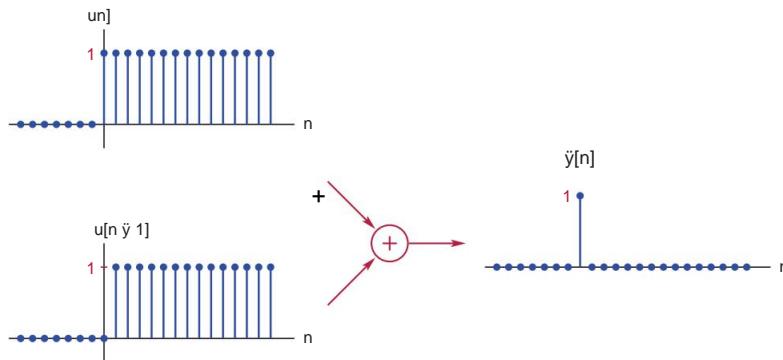


Figura 1.75 – Obtenção de um impulso unitário de tempo discreto a partir de um passo unitário de tempo discreto através da primeira diferença.

Por outro lado, um sinal de degrau unitário pode ser construído a partir de sinais de impulso unitário por meio de uma soma contínua na forma

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^n \delta[k] \quad (1.151)$$

Isso é análogo ao relacionamento integral em execução entre as versões de tempo contínuo desses sinais, fornecido pela Eqn. (1.33). Na Eq. (1.151) estamos adicionando as amostras de um sinal de degrau unitário $\delta[k]$ começando de $k = -\infty$ até e incluindo a amostra para $k = n$. Se n , o limite superior do somatório, for zero ou positivo, o somatório inclui a única amostra com amplitude unitária e o resultado é igual à unidade. Se $n < 0$, a soma termina antes de chegarmos a essa amostra e o resultado é zero. Isso é mostrado na Fig. 1.76.

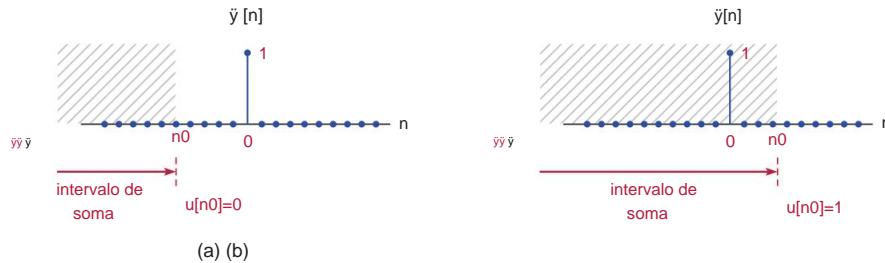


Figura 1.76 – Obtendo um passo unitário de tempo discreto a partir de um impulso unitário de tempo discreto através de uma soma contínua: (a) $n = n_0 < 0$, (b) $n = n_0 > 0$.

Uma abordagem alternativa para obter um passo unitário a partir de um impulso unitário é usar

$$u[n] = \sum_{k=0}^{\hat{n}} \delta[n-\hat{k}] \quad (1.152)$$

em que adicionamos os sinais $\delta[n]$, $\delta[n-1]$, $\delta[n-2], \dots, \delta[n-\hat{k}]$ para construir um sinal de passo unitário. Este é um exemplo de decomposição de impulso que será discutido na Seção 1.4.3.

Função de rampa unitária

A versão de tempo discreto da função de rampa unitária é definida como

$$r[n] = \begin{cases} n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \quad (1.153)$$

e é mostrado na Fig. 1.77.

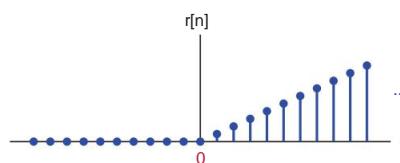


Figura 1.77 – Função rampa unitária de tempo discreto.

A definição na Eqn. (1.153) pode ser escrita de forma mais compacta como o produto do sinal linear $g[n] = n$ e a função de degrau unitário. Podemos escrever $r[n]$ como

$$r[n] = n u[n] \quad (1.154)$$

que é ilustrado na Fig. 1.78.

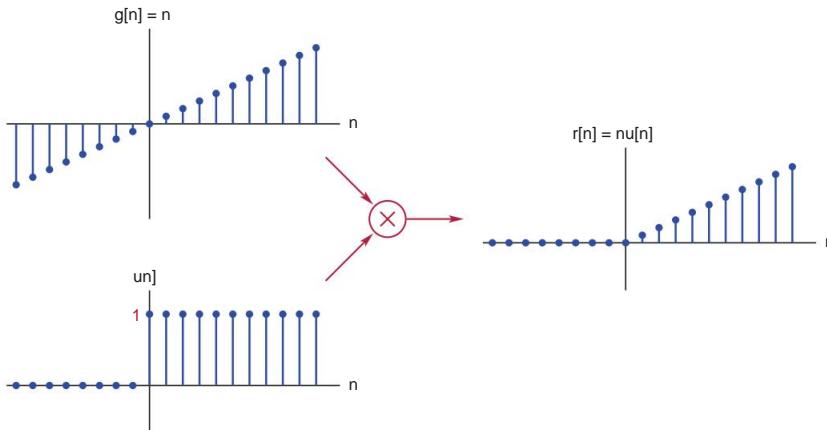


Figura 1.78 – Obtenção de uma rampa unitária de tempo discreto.

Alternativamente, a função de rampa unitária de tempo discreto pode ser expressa como uma soma contínua aplicada à função de degrau unitário de tempo discreto na forma

$$r[n] = \sum_{k=-\infty}^{n-1} u[k] \quad (1.155)$$

Experimentando o somatório na Eqn. (1.155) para alguns valores diferentes do índice n é fácil ver que ele produz valores consistentes com a definição da função rampa unitária dada pela Eqn. (1.154). Isso é análogo ao relacionamento entre as versões de tempo contínuo desses sinais, onde uma integral contínua é usada para obter uma rampa unitária de tempo contínuo a partir de um passo unitário de tempo contínuo, conforme indicado na Eqn. (1.41). O processo de obtenção de uma rampa unitária de tempo discreto por meio de uma soma contínua é ilustrado na Fig. 1.79.

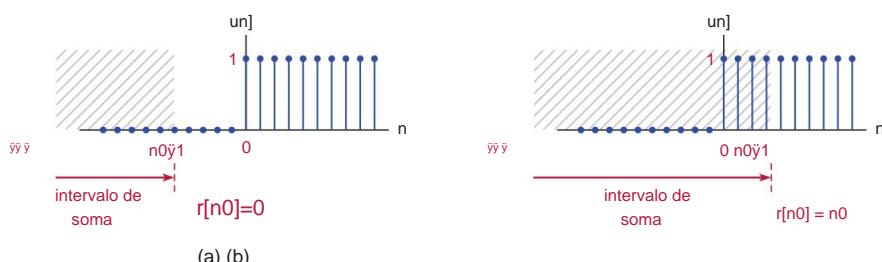


Figura 1.79 – Obtendo uma rampa unitária de tempo discreto a partir de um passo unitário de tempo discreto através de uma soma corrente: (a) $n = n_0 < 0$, (b) $n = n_0 > 0$.

Sinais senoidais

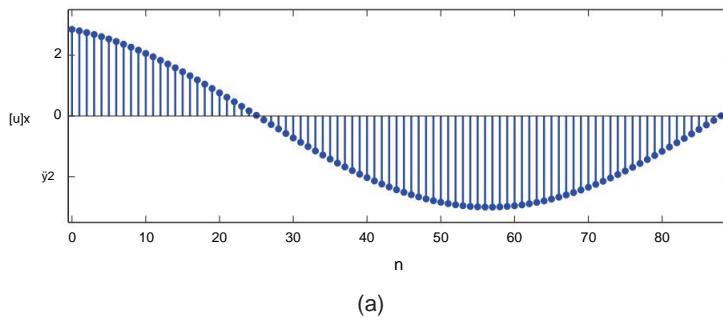
Um sinal senoidal de tempo discreto está na forma geral

$$x[n] = A \cos (\hat{\omega}_0 n + \hat{\phi}) \quad (1.156)$$

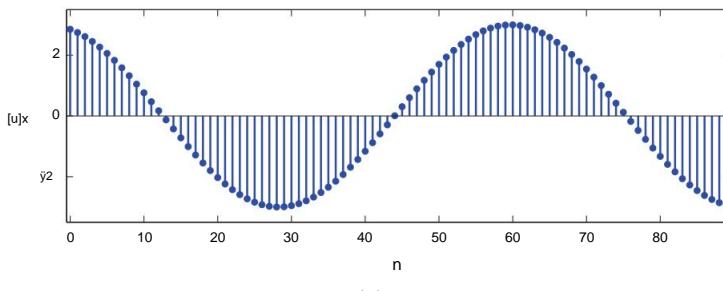
onde A é a amplitude, $\hat{\omega}_0$ é a frequência angular em radianos e $\hat{\phi}$ é o ângulo de fase que também está em radianos. A frequência angular $\hat{\omega}_0$ pode ser expressa como

$$\hat{\omega}_0 = 2\hat{\omega}F_0 \quad (1.157)$$

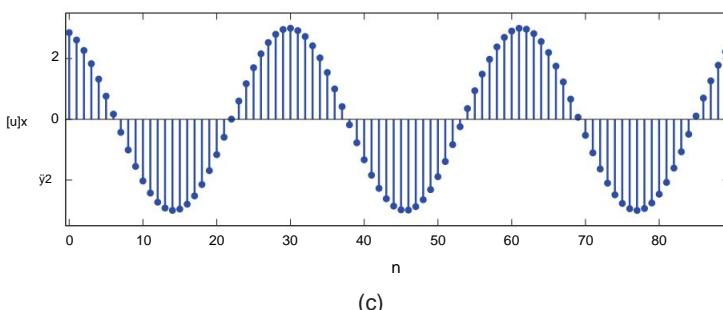
O parâmetro F_0 , uma quantidade adimensional, é referido como a frequência normalizada do sinal senoidal. A Fig. 1.80 ilustra sinais senoidais de tempo discreto para vários valores de $\hat{\omega}_0$.



(a)



(b)



(c)

Figura 1.80 – Sinal senoidal em tempo discreto $x[n] = 3 \cos (\hat{\omega}_0 n + \hat{\phi}/10)$ para (a) $\hat{\omega}_0 = 0,05$ rad, (b) $\hat{\omega}_0 = 0,1$ rad, (c) $\hat{\omega}_0 = 0,2$ rad.

Neste ponto, vamos notar uma diferença fundamental entre uma senoidal de tempo discreto sinal e sua contraparte de tempo contínuo:

1. Um sinal senoidal de tempo contínuo foi definido pela Eqn. (1.44). Seu parâmetro ω_0 está em rad/s, pois aparece próximo à variável de tempo t , e o produto $\omega_0 t$ deve estar em radianos para se qualificar como o argumento de uma função trigonométrica.
2. Em contraste, o parâmetro ω_0 está em radianos, pois aparece próximo a um parâmetro de índice adimensional n , e o produto $\omega_0 n$ deve estar em radianos. Por esta razão, ω_0 é referido como a frequência angular do sinal senoidal de tempo discreto.

Embora a palavra “frequência” seja usada, ω_0 não é realmente uma frequência no sentido tradicional, mas sim um ângulo. Em apoio a esta afirmação, veremos em partes posteriores deste texto que os valores de ω_0 fora do intervalo $-\pi \leq \omega_0 \leq \pi$ são matematicamente indistinguíveis dos valores dentro desse intervalo.

Raciocínio semelhante se aplica ao parâmetro F_0 : não é realmente uma frequência, mas uma quantidade adimensional que pode ser melhor pensada como uma “porcentagem”. Para detalhar melhor os significados dos parâmetros ω_0 e F_0 , vamos considerar o caso de obtenção de um sinal senoidal de tempo discreto a partir de um sinal senoidal de tempo contínuo na forma

$$x_a(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi) \quad (1.158)$$

Vamos avaliar a amplitude de $x_a(t)$ em instantes de tempo que são múltiplos inteiros de T_s e construir um sinal de tempo discreto com os resultados.

$$\begin{aligned} x[n] &= x_a(nT_s) \\ &= A \cos(\omega_0 n T_s + \phi) \\ &= A \cos(2\pi f_0 n T_s + \phi) \end{aligned} \quad (1.159)$$

Isso é ilustrado na Fig. 1.81.

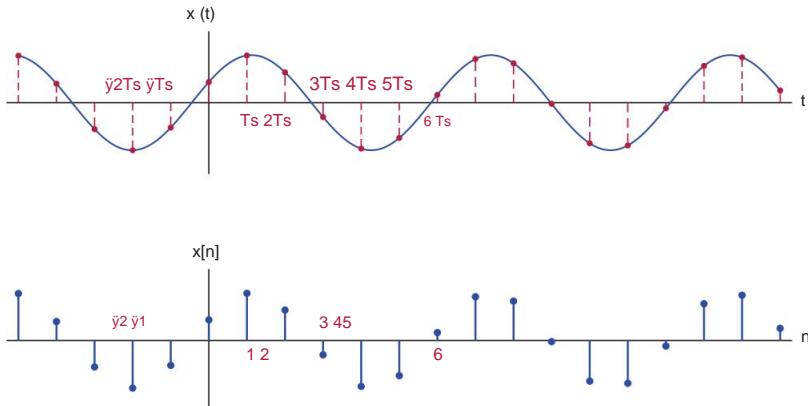


Figura 1.81 – Obtenção de um sinal senoidal de tempo discreto a partir de um sinal senoidal de tempo contínuo.

Como o sinal $x_a(t)$ é avaliado em intervalos de T_s , o número de amostras coletadas por unidade de tempo é

$$f_s = \frac{1}{T_s} \quad (1.160)$$

Substituindo a Eq. (1.160) na Eqn. (1.159) obtemos

$$x[n] = A \cos 2\pi f_0 n + \frac{f_0}{f_s} = A \cos (2\pi f_0 n + \phi) \quad (1.161)$$

que revela o significado da frequência normalizada F_0 :

$$F_0 = \frac{f_0}{f_s} \quad (1.162)$$

O ato de construir um sinal de tempo discreto avaliando um sinal de tempo contínuo em intervalos uniformes é chamado de amostragem e será discutido com mais detalhes no Capítulo 6.

Os parâmetros f_s e T_s são referidos como a taxa de amostragem e o intervalo de amostragem, respectivamente. Eq. (1.162) sugere que a frequência normalizada F_0 é essencialmente a frequência f_0 da senóide de tempo contínuo expressa como uma porcentagem da taxa de amostragem.

1.4.3 Decomposição de impulso para sinais de tempo discreto

Considere um sinal arbitrário de tempo discreto $x[n]$. Vamos definir um novo sinal $x_k[n]$ usando a k -ésima amostra do sinal $x[n]$ em conjunto com uma função de impulso unitário deslocada no tempo

como

$$x_k[n] = x[k] \delta[n - k] = \begin{cases} x[k], & n = kn \\ 0, & n \neq k \end{cases} \quad (1.163)$$

O sinal $x_k[n]$ é um sinal de impulso escalado e deslocado no tempo, cuja única amostra não trivial ocorre no índice $n = k$ com uma amplitude de $x[k]$. Se fôssemos repetir a Eqn. (1.163) para todos os valores possíveis de k , obteríamos um número infinito de sinais $x_k[n]$ para $k = -\infty, \dots, \infty$. Em cada um desses sinais haveria apenas uma amostra não trivial cuja amplitude é igual à amplitude da amostra correspondente de $x[n]$. Por exemplo, considere o sinal

$$x[n] = \{ 3.7, 1.3, 1.5, 3.4, 5.9 \}$$

Os sinais $x_k[n]$ para este caso seriam os seguintes:

$$\begin{aligned} x_{-\infty}[n] &= \{ \dots, 0, 0, 0, 0 \} \\ x_{-1}[n] &= \{ 3.7, 0, 0, 0, 0 \} \\ x_0[n] &= \{ 0, 1.3, 1.5, 0, 0 \} \\ x_1[n] &= \{ 0, 0, 0, 3.4, 0 \} \\ x_2[n] &= \{ 0, 0, 0, 0, 5.9 \} \\ x_3[n] &= \{ 0, 0, 0, 0, 0 \} \end{aligned}$$

O sinal $x[n]$ pode ser reconstruído adicionando esses componentes juntos.

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n - k] \quad (1.164)$$

Eq. (1.164) representa uma decomposição de impulso do sinal de tempo discreto $x[n]$. Nós o usaremos para derivar a relação de convolução no Capítulo 3.

1.4.4 Classificações de sinal

A discussão nesta seção será paralela à da Seção 1.3.4 para sinais de tempo contínuo.

Sinais reais vs. complexos

Um sinal de tempo discreto pode ser real ou complexo. Um sinal complexo pode ser escrito na forma cartesiana usando suas partes real e imaginária como

$$x[n] = x_r[n] + jx_i[n] \quad (1.165)$$

ou na forma polar usando sua magnitude e fase como

$$x[n] = |x[n]| e^{j\phi[n]} \quad (1.166)$$

As equações para converter de uma forma complexa para a outra são idênticas àquelas para sinais complexos de tempo contínuo.

Sinais periódicos vs. sinais não

periódicos Um sinal de tempo discreto é dito periódico se satisfaz

$$x[n] = x[n + N] \quad (1.167)$$

para todos os valores do índice inteiro n e para um valor específico de $N > 0$. O parâmetro N é referido como o período do sinal. Um exemplo de um sinal periódico de tempo discreto é mostrado na Fig. 1.82.

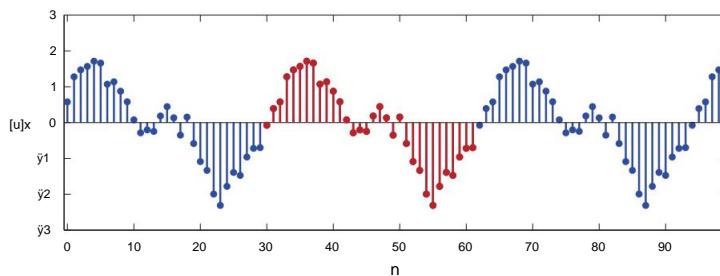


Figura 1.82 – Exemplo de um sinal de tempo discreto que é periódico.

Um sinal de tempo discreto que é periódico com um período de N amostras também é periódico com períodos de $2N, 3N, \dots, kN$ para qualquer inteiro positivo k . Aplicando a definição de periodicidade da Eqn. (1.167) para $x[n + N]$ em vez de $x[n]$ resulta

$$x[n + N] = x[n + 2N] \quad (1.168)$$

Substituindo a Eq. (1.168) na Eqn. (1.167) obtemos

$$x[n] = x[n + 2N] \quad (1.169)$$

e, através do uso repetido deste processo, podemos mostrar que

$$x[n] = x[n + kN] \quad (1.170)$$

O menor valor positivo de N que satisfaz a Eqn. (1.167) é chamado de período fundamental. Para evitar ambigüidade quando nos referirmos ao período de um sinal, o período fundamental será

implícito, a menos que indiquemos especificamente o contrário. A frequência fundamental normalizada de um sinal periódico de tempo discreto é o recíproco de seu período fundamental, ou seja,

$$F_0 = \frac{1}{N} \quad (1.171)$$

Periodicidade de sinais senoidais de tempo discreto A

forma geral de um sinal senoidal de tempo discreto $x[n]$ foi dada pela Eqn. (1.161). Para que $x[n]$ seja periódico, ele precisa satisfazer a condição de periodicidade dada pela Eqn. (1.167).

Especificamente nós precisamos

$$\begin{aligned} A \cos(2\pi F_0 n + \phi) &= A \cos(2\pi F_0 [n + N] + \phi) \\ &= A \cos(2\pi F_0 n + 2\pi F_0 N + \phi) \end{aligned} \quad (1.172)$$

Para a Eq. (1.172) para manter, os argumentos das funções cosseno devem diferir por um múltiplo inteiro de 2π . Esta exigência resulta em

$$2\pi F_0 N = 2\pi k \quad (1.173)$$

e consequentemente

$$N = \frac{k}{F_0} \quad (1.174)$$

para o período N. Como estamos lidando com um sinal de tempo discreto, há o requisito adicional de que o período N obtido da Eqn. (1.174) deve ser um valor inteiro. Assim, o sinal senoidal de tempo discreto definido pela Eqn. (1.161) é periódica desde que a Eqn. (1.174) produz um valor inteiro para N. O período fundamental do sinal senoidal é então obtido usando o menor valor inteiro de k, se houver, que resulta em N sendo um inteiro.

Deve ser óbvio a partir da discussão anterior que, ao contrário de um sinal senoidal de tempo contínuo ser sempre periódico, um sinal senoidal de tempo discreto pode ou não ser periódico. O sinal não será periódico, por exemplo, se a frequência normalizada F0 for um número irracional de modo que nenhum valor de k produza um inteiro N na Eqn. (1.174).

Exemplo 1.16: Periodicidade de um sinal senoidal de tempo discreto

Verifique a periodicidade dos seguintes sinais de tempo discreto:

- a. $x[n] = \cos(0.2n)x[n]$
- b. $= \cos(0.2\pi n + \pi/5)x[n] = \cos(0.3\pi n + \pi/10)$

Solução:

- a. A frequência angular deste sinal é $\omega_0 = 0.2$ radianos que corresponde a uma frequência normalizada de

$$F_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{0.2}{2\pi} = \frac{0.1}{\pi}$$

Isso resulta em um período

$$N = \frac{k}{F_0} = 10\pi k$$

Como nenhum valor de k produziria um valor inteiro para N, o sinal não é periódico.

b. Nesse caso, a frequência angular é $\tilde{\omega}_0 = 0,2\tilde{\omega}$ radianos e a frequência normalizada é $F_0 = 0,1$. O período é

$$N = \frac{k}{F_0} = \frac{k}{0,1} = 10k$$

Para $k = 1$ temos $N = 10$ amostras como o período fundamental. O sinal $x[n]$ é mostrado na Fig. 1.83.

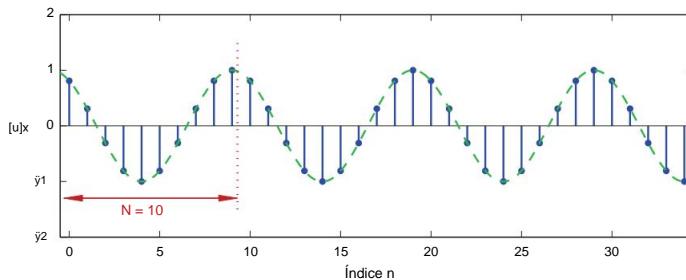


Figura 1.83 – O sinal $x[n]$ para a parte (b) do Exemplo 1.16.

c. Para este sinal, a frequência angular é $\tilde{\omega}_0 = 0,3\tilde{\omega}$ radianos e o correspondente a frequência normalizada é $F_0 = 0,15$. O período é

$$N = \frac{k}{F_0} = \frac{k}{0,15}$$

O menor inteiro positivo k que resultaria em um valor inteiro para o período N é $k = 3$. Portanto, o período fundamental é $N = 3/0,15 = 20$ amostras. O sinal $x[n]$ é mostrado na Fig. 1.84.

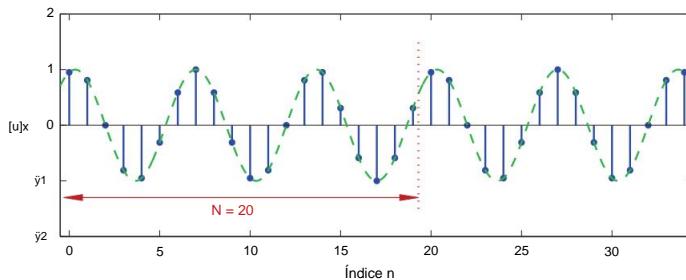


Figura 1.84 – O sinal $x[n]$ para a parte (c) do Exemplo 1.16.

É interessante observar na Fig. 1.84 que o período de $N = 20$ amostras corresponde a três ciclos completos do sinal senoidal de tempo contínuo do qual $x[n]$ pode ter sido derivado (veja o esboço mostrado na figura). Isso se deve ao fato de que $k = 3$ e, com base na Eqn. (1.173), o argumento da função cosseno é avançado por

$$2\tilde{\omega}F_0N = 2\tilde{\omega}k = 6\tilde{\omega} \text{ radianos}$$

após um período de 20 amostras.

Recursos de software:

[ex_1_16h](#)

[ex_1_16b.m](#)

[ex_1_16c.m](#)

Exemplo 1.17: Periodicidade de um sinal senoidal de tempo discreto de vários tons Comentário sobre a periodicidade do sinal de tempo discreto de dois tons

$$x[n] = 2 \cos(0,4\pi n) + 1,5 \sin(0,48\pi n) \quad (1.175)$$

Solução: O sinal está na forma

$$x[n] = x_1[n] + x_2[n] \quad (1.176)$$

com

$$x_1[n] = 2 \cos(\pi n), \quad \pi = 0,4\pi \text{ rad} \quad (1.177)$$

e

$$x_2[n] = 1,5 \sin(\pi n), \quad \pi = 0,48\pi \text{ rad} \quad (1.178)$$

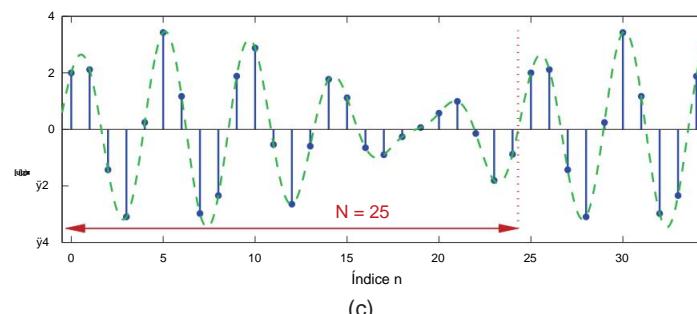
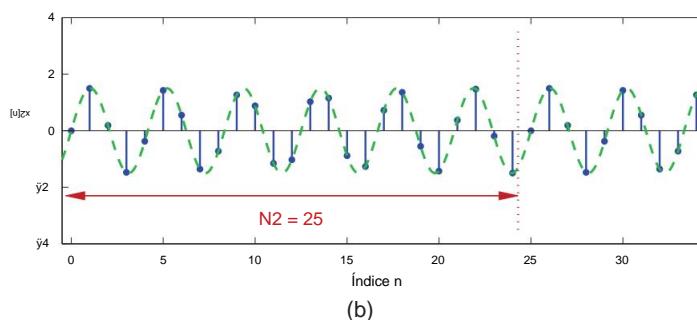
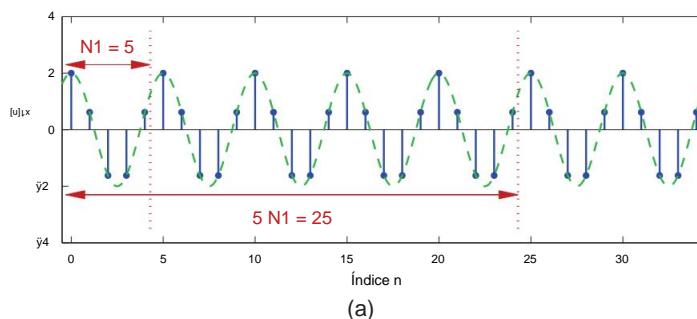


Figura 1.85 – Os sinais usados no Exemplo 1.17: (a) $x_1[n]$, (b) $x_2[n]$, (c) $x[n] = x_1[n] + x_2[n]$.

As frequências normalizadas correspondentes são $F_1 = 0,2$ e $F_2 = 0,24$. O período de cada componente pode ser encontrado da seguinte forma:

$$\text{Para } x_1[n] : N_1 = \frac{k_1}{F_1} = \frac{k_1}{0,2} , \quad k_1 = 1 , \quad N_1 = 5$$

$$\text{Para } x_2[n] : N_2 = \frac{k_2}{F_2} = \frac{0,2k_2}{0,24} , \quad k_2 = 6 , \quad N_2 = 25$$

Assim, o período fundamental para $x_1[n]$ é $N_1 = 5$ amostras, e o período fundamental para $x_2[n]$ é $N_2 = 25$ amostras. O período do sinal total $x[n]$ é $N = 25$ amostras. Dentro do período de $N = 25$ amostras, o primeiro componente $x_1[n]$ completa 5 ciclos desde que $N = 5N_1$.

O segundo componente completa 6 ciclos desde $k_2 = 6$ para obter um valor inteiro para N_2 . Isso é ilustrado na Figura 1.85.

Recursos de software:

ex_1 17.m

Sinais determinísticos vs. aleatórios

Sinais determinísticos são sinais que podem ser descritos completamente de forma analítica no domínio do tempo. Sinais aleatórios são sinais que não podem ser modelados analiticamente. Eles podem ser analisados em termos de suas propriedades estatísticas. O estudo de sinais aleatórios está além do escopo deste texto, e o leitor deve consultar um dos muitos textos excelentes disponíveis sobre o assunto.

1.4.5 Definições de energia e potência

Energia de um sinal

A energia de um sinal de tempo discreto de valor real é calculada como

$$E_x = \sum_{n=0}^{\hat{y}} x_2[n]^2 \quad (1.179)$$

desde que possa ser calculado. Se o sinal em consideração for de valor complexo, sua energia é dada por

$$E_x = \sum_{n=0}^{\hat{y}} |x[n]|^2 \quad (1.180)$$

Operador de média de tempo

Usaremos o operador ... para indicar a média de tempo. Se o sinal $x[n]$ for periódico com período N , sua média de tempo pode ser calculada como

$$\bar{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \quad (1.181)$$

Para um sinal $x[n]$ não periódico, a definição de tempo médio na Eqn. (1.181) pode ser generalizado com o uso do operador limite como

$$\bar{x}[n] = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{2 \text{ milhões} + 1} \sum_{n=\hat{y}M}^{M-1} x[n]} \quad (1.182)$$

Potência de um sinal

A potência média de um sinal de tempo discreto de valor real é calculada como

$$P_x = \bar{x^2[n]} \quad (1.183)$$

Esta definição funciona para sinais periódicos e não periódicos. Para um sinal periódico, a Eqn. (1.181) pode ser usado com a Eqn. (1.183) para render

$$P_x = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x^2[n] \quad (1.184)$$

Para um sinal não periódico, a Eqn. (1.182) pode ser substituída na Eqn. (1.183) para render

$$P_x = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^{M} x^2[n] \quad (1.185)$$

Equações (1.184) e (1.185) se aplicam a sinais de valor real. Se o sinal em consideração for complexo, então as Eqns. (1.184) e (1.185) podem ser generalizados usando a norma quadrada do sinal $x[n]$, ou seja,

$$P_x = \bar{|x[n]|^2} \quad (1.186)$$

Assim, a potência de um sinal complexo periódico é

$$P_x = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 \quad (1.187)$$

e a potência de um sinal complexo não periódico é

$$P_x = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^{M} |x[n]|^2 \quad (1.188)$$

Sinais de energia versus sinais de

potência Assim como nos sinais de tempo contínuo, também é possível classificar os sinais de tempo discreto com base em sua energia e potência:

- Sinais de energia são aqueles que possuem energia finita e potência zero, ou seja, $\text{Ex} < \infty$ e $P_x = 0$.
- Sinais de potência são aqueles que possuem potência finita e energia infinita, ou seja, $\text{Ex} = \infty$ e $P_x < \infty$.

1.4.6 Propriedades de simetria

As definições das propriedades de simetria dadas na Seção 1.3.6 para sinais de tempo contínuo podem ser facilmente adaptadas para sinais de tempo discreto. Além disso, sinais de tempo discreto sem simetria podem ser expressos em termos de componentes simétricos.

Simetria par e ímpar

Um sinal de tempo discreto de valor real é ainda simétrico se satisfizer

$$x[\bar{y}n] = x[n] \quad (1.189)$$

para todos os valores inteiros do índice de amostra n . Em contraste, um sinal de tempo discreto com simetria ímpar satisfaz

$$x[\bar{y}n] = -x[n] \quad (1.190)$$

para todos n . Um sinal $x[n]$ que é mesmo simétrico permanece inalterado quando é invertido no tempo. Se $x[n]$ tiver simetria ímpar, a inversão do tempo faz com que o sinal seja negado. Exemplos de sinais de tempo discreto com simetria par e ímpar são mostrados na Fig. 1.86(a) e (b).

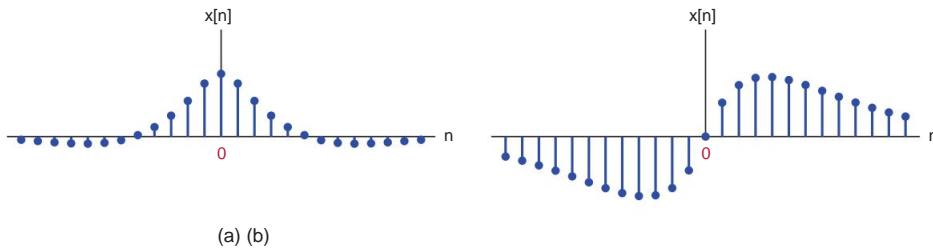


Figura 1.86 – (a) Sinal discreto no tempo com simetria par, (b) sinal discreto no tempo com simetria ímpar.

Decomposição em componentes pares e ímpares

Como no caso de sinais de tempo contínuo, qualquer sinal de tempo discreto de valor real $x[n]$ pode ser escrito como a soma de dois sinais, um com simetria par e outro com simetria ímpar. O sinal $x[n]$ não precisa ter nenhuma propriedade de simetria para que isso funcione. Considere a seguinte representação do sinal $x[n]$:

$$x[n] = x_e[n] + x_o[n] \quad (1.191)$$

O sinal $x_e[n]$ é o componente par definido como

$$x_e[n] = \frac{x[n] + x[\bar{y}n]}{2} \quad (1.192)$$

e $x_o[n]$ é o componente ímpar definido como

$$x_o[n] = \frac{x[n] - x[\bar{y}n]}{2} \quad (1.193)$$

Pode-se verificar facilmente que $x_e[\bar{y}n] = x_e[n]$ e $x_o[\bar{y}n] = -x_o[n]$. Além disso, os sinais $x_e[n]$ e $x_o[n]$ sempre somam $x[n]$ devido à forma como são definidos.

Propriedades de simetria para sinais

complexos Definições de simetria par e ímpar dadas por Eqns. (1.189) e (1.190) para um sinal de valor real $x[n]$ podem ser estendidas para se aplicar também a sinais de valor complexo. Um sinal de valor complexo $x[n]$ é simétrico conjugado se satisfaz

$$x[\bar{y}n] = \bar{x}[n] \quad (1.194)$$

1.5. Leitura adicional

para todos n . Da mesma forma, $x[n]$ é antisimétrico conjugado se satisfaz

$$x[\bar{n}] = \bar{x}\bar{y}[n] \quad (1.195)$$

para todos n . Se $x[n]$ for conjugado simétrico, invertê-lo no tempo tem o mesmo efeito que conjugar. Para um antisimétrico conjugado $x[n]$, a reversão do tempo é equivalente à conjugação e à negação aplicadas simultaneamente.

Se o sinal $x[n]$ tem valor real, então seu complexo conjugado é igual a ele mesmo, ou seja, $\bar{x}\bar{y}[n] = x[n]$. Neste caso, a definição de simetria conjugada se reduz à de simetria par, como pode ser visto nas Equações. (1.194) e (1.189). Da mesma forma, a propriedade de antissimetria conjugada reduz a simetria ímpar para um $x[n]$ de valor real.

Decomposição de sinais complexos

Qualquer sinal complexo $x[n]$ pode ser expresso como a soma de dois sinais dos quais um é conjugado simétrico e o outro é conjugado antisimétrico. O componente $xE[n]$ definido como

$$[n] = 2 \frac{x[n] + \bar{x}\bar{y}[\bar{n}]}{xE} \quad (1.196)$$

é sempre simétrica conjugada, e a componente $xO[n]$ definida como

$$xO[n] = 2 \frac{x[n] - \bar{x}\bar{y}[\bar{n}]}{xO} \quad (1.197)$$

é sempre antisimétrico conjugado. O relacionamento

$$x[n] = xE[n] + xO[n] \quad (1.198)$$

mantém devido à forma como $xE[n]$ e $xO[n]$ são definidos.

1.5 Leitura Adicional

- [1] AB Carlson e PB Crilly. Sistemas de comunicação. McGraw-Hill, 2009.
- [2] RP Kanwal. Funções Generalizadas: Teoria e Aplicações. Birkhäuser, 2004.
- [3] P. Prandoni e M. Vetterli. Processamento de Sinal para Comunicações. Comunicação e Ciências da Informação. Taylor & Francis, 2008.
- [4] A. Spanias, T. Painter e V. Atti. Processamento e Codificação de Sinais de Áudio. Wiley, 2006.
- [5] M. Tohyama. Som e Sinais. Tecnologia de Sinais e Comunicações. Springer, 2011.
- [6] U. Zölzer. Processamento de sinal de áudio digital. Wiley, 2008.

Exercícios MATLAB

MATLAB Exercício 1.1: Computação e representação gráfica de sinais de tempo

contínuo Frequentemente temos a necessidade de simular modelos matemáticos de sinais em um computador. Algumas vezes isso é feito para verificar os resultados de cálculos manuais envolvendo um sinal ou para obter

visão gráfica do comportamento do sinal. Em outras ocasiões, podemos precisar de uma aproximação numérica do modelo matemático de um sinal para uso em um estudo de simulação envolvendo um problema de interação de sistema de sinal. Neste exercício, exploraremos métodos de computação e representação gráfica de modelos de sinais de tempo contínuo no MATLAB.

Advertência: Como qualquer linha ou vetor de coluna deve ter um número finito de elementos, uma representação completamente precisa de um sinal de tempo contínuo não é possível no MATLAB. O melhor que podemos fazer é aproximar um sinal de tempo contínuo construindo um vetor que contenha amplitudes do sinal em instantes de tempo igualmente espaçados. Se o vetor usado para esse propósito tiver um número suficiente de valores de amplitude e se o espaçamento de tempo desses valores de amplitude for escolhido com cuidado,⁹ o resultado ainda pode ser uma aproximação razoavelmente boa para um sinal de tempo contínuo. Ao representar graficamente tal sinal, as amplitudes do sinal são conectadas com linhas retas para dar a aparência de um sinal de tempo contínuo.

a. Calcular o sinal

$$x_1(t) = 5 \sin(12t)$$

em 500 pontos no intervalo de tempo $0 \leq t \leq 5$ e faça um gráfico do resultado.

Solução: Digite as três linhas a seguir na janela de comando do MATLAB para obter o gráfico da Fig. 1.87.

```
>> t = linspace(0,5,500); >> x1 =
5*sin(12*t); >> plot(t,x1);
```

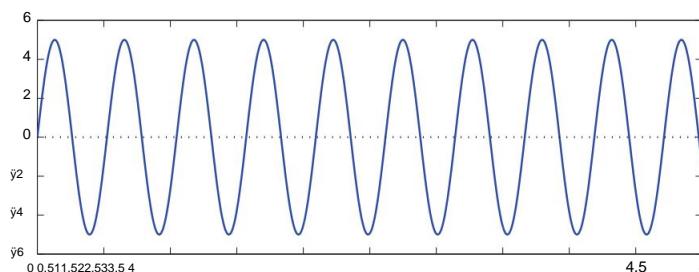


Figura 1.87 – Gráfico obtido no MATLAB Exercício 1.1 parte (a).

b. Calcular e representar graficamente o sinal

$$x_2(t) = \begin{cases} e^{-3t} - e^{-6t} & , \quad t \geq 0 \\ 0 & , \quad t < 0 \end{cases}$$

no intervalo de tempo $0 \leq t \leq 5$ segundos, utilizando um incremento de tempo de $\Delta t = 0,01$ segundos.

Solução: Este sinal pode ser calculado e representado graficamente com as seguintes declarações:

```
>> t = [0:0.01:5]; >> x2 =
exp(-3*t)-exp(-6*t); >> plot(t,x2);
```

A primeira linha demonstra um método alternativo de construção de um vetor de tempo. O resultado é mostrado na Fig. 1.88.

⁹ Um método mais formal para determinar o espaçamento de tempo apropriado para os valores de amplitude do sinal ser dada quando discutimos o assunto da amostragem no Capítulo 6.

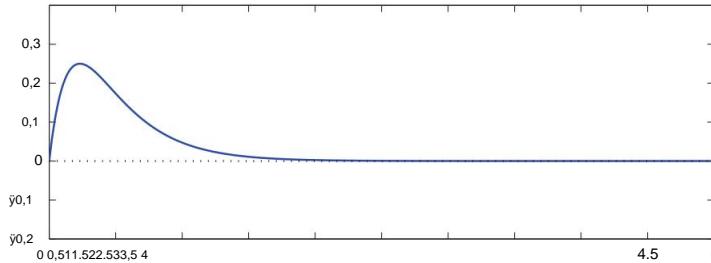


Figura 1.88 – Gráfico obtido no MATLAB Exercício 1.1 parte (b).

c. Calcular e representar graficamente o sinal

$$x_2(t) = \begin{cases} e^{-3t} - e^{-6t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

no intervalo de tempo $\tilde{y}2 \leq t \leq 3$ segundos, usando um incremento de tempo de $\tilde{y}t = 0,01$ segundos.

Solução: O sinal que precisamos representar graficamente é o mesmo que o sinal da parte (b). A pequena complicação apresentada por este exercício se deve ao fato de que precisamos representar graficamente o sinal começando em um instante de tempo negativo, e as amplitudes do sinal são iguais a zero para valores negativos de t . Como resultado, duas descrições separadas do sinal precisam ser utilizadas, uma para $t < 0$ e outra para $t \geq 0$. Na parte (b), evitamos esse problema fazendo o gráfico do sinal apenas para valores positivos de t e, portanto, usando uma única expressão analítica para calcular todas as amplitudes do sinal.

O método mais simples de lidar com esse problema é usar o operador lógico “ \geq ” que significa “maior que ou igual a”. As linhas a seguir produzem o gráfico mostrado na Fig. 1.89.

```
>> t = [-2:0.01:3]; >> w =
(t>=0); >> x2 =
(exp(-3*t)-exp(-6*t)).*w; >> plot(t,x2);
```

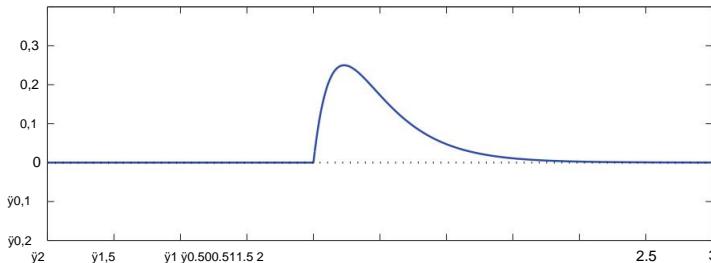


Figura 1.89 – Gráfico obtido no MATLAB Exercício 1.1 parte (c).

Erro comum: É importante usar o operador de multiplicação elemento por elemento “ $.$ ” e não o operador de multiplicação vetorial “ $\cdot\cdot\cdot$ ” na terceira linha acima. A expressão para calcular o vetor “ $x2$ ” envolve dois vetores do mesmo tamanho, a saber “ $(exp(-3*t)-exp(-6*t))$ ” e “ w ”. O operador “ $.$ ” cria um vetor de mesmo tamanho multiplicando os elementos correspondentes dos dois vetores. O operador “ $\cdot\cdot\cdot$ ”, por outro lado, é usado para calcular o produto escalar de dois vetores e não funcionaria neste caso.

d. Calcular e representar graficamente o sinal

$$x_3(t) = \begin{cases} e^{-3t} - e^{-6t} & , 0 \leq t \leq 1 \\ , & \text{caso contrário} \end{cases}$$

no intervalo de tempo $\leq t \leq 3$ segundos, usando um incremento de tempo de $\Delta t = 0,01$ segundos.

Solução: Este sinal é semelhante ao da parte (c). A única diferença é que $x_3(t) = 0$ para $t > 1$. O teste lógico precisa ser modificado para refletir isso. Usando o operador lógico e “&”, podemos digitar as seguintes linhas na janela de comando do MATLAB para calcular e representar $x_3(t)$:

```
>> t = [-2:0,01:3]; >> x3 =
(exp(-3*t)-exp(-6*t)).*((t>=0)&(t<=1)); >> plot(t,x3);
```

O gráfico resultante é mostrado na Fig. 1.90.

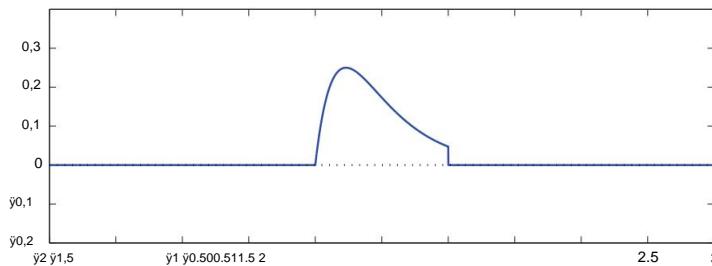


Figura 1.90 – Gráfico obtido em MATLAB Exercício 1.1 parte (d).

Recursos de software:

matex 1_1h
matex 1_1b.m
matex 1_1c.m
matex 1_1d.m

MATLAB Exercício 1.2: Descrevendo sinais usando segmentos lineares por partes

Considere o sinal $x(t)$ obtido no Exemplo 1.1 e mostrado na Fig. 1.8. Um sinal como este também pode ser descrito especificando os pontos finais de segmentos lineares e interpolando entre eles. A função MATLAB `interp1(..)` é usada para esse propósito.

Os pontos finais do sinal em consideração são

$$(tp, xp) = \{(0, 0), (1, 1), (3, 1), (4, 0), (6, 0)\}$$

O código abaixo calcula o sinal para $\leq t \leq 6$ e representa graficamente o resultado.

```
>> tp = [-1,0,1,3,4,5,6]; >> xp =
[0,0,1,-1,0,0]; >> t = [-1:0,01:6]; >>
x = interp1(tp,xp,t,'linear');
>> plot(t,x,'b-',tp,xp,'ro'); grid;
```

Atenção: A função `interp1(..)` exige que todos os valores de tp sejam distintos, ou seja, dois pontos não podem ter o mesmo valor de tempo. Como resultado, os sinais que possuem descontinuidades (bordas verticais) não podem ser representados graficamente usando esta abordagem.

Recursos de software:

matex_1_2.m

MATLAB Exercício 1.3: Operações de sinal para sinais de tempo contínuo

No MATLAB Exercício 1.1 usamos vetores para representar modelos matemáticos para sinais de tempo contínuo. Essa abordagem costuma ser útil para simular problemas de interação do sistema de sinal e será utilizada extensivamente nas partes posteriores deste livro. Neste exercício, no entanto, consideraremos abordagens alternativas para representar sinais no MATLAB com o objetivo de experimentar operações de sinal como deslocamento de tempo, escalonamento de tempo e reversão de tempo.

Considere novamente o sinal $x(t)$ usado no Exemplo 1.3 e mostrado na Fig. 1.16. Analiticamente $x(t)$ pode ser escrito na forma

$$x(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t < -1 \\ 2t + 2 & , \quad -1 \leq t < 3 \\ 0.5 & , \quad t \geq 3 \end{cases}$$

As três linhas de código a seguir criam um vetor "x" para representar esse sinal e grafá-lo.

```
>> t = [-10:0.01:10]; >> x = 2*((t>=-1)&(t<2))+1*((t>=2)&(t<3))-0.5*((t>=3)&(t<=6)); >> plot(t,x);
```

Como "x" é um vetor, não há uma maneira fácil de calcular e representar graficamente os sinais $g(t) = x(2t + 5)$ e $h(t) = x(-4t + 2)$ que foram representados graficamente no Exemplo 1.3. Em vez de usar um vetor, mudaremos nossa estratégia e usaremos uma função MATLAB para representar o sinal. Crie um arquivo de texto ASCII chamado "sigx.m" no diretório atual e coloque as duas linhas a seguir nele:

```
função x = sigx(t)
x = 2*((t>=-1)&(t<2))+1*((t>=2)&(t<3))-0.5*((t>=3)&(t<=6));
```

O resultado é uma função MATLAB `sigx(..)` que retorna o valor do sinal $x(t)$ em qualquer instante de tempo especificado, ou mesmo em um conjunto de instantes de tempo especificados. Um vetor "g" que contém os valores de amplitude para o sinal $g(t) = x(2t + 5)$ pode ser calculado e representado graficamente com o seguinte conjunto de declarações:

```
>> t = [-10:0.01:10]; >> g =
sigx(2*t+5); >> gráfico(t,g);
```

O gráfico resultante deve corresponder à Fig. 1.17(c). Da mesma forma, um vetor "h" com valores de amplitude do sinal $h(t) = x(-4t + 2)$ pode ser calculado e representado graficamente com as declarações

```
>> t = [-10:0.01:10]; >> h =
sigx(-4*t+2); >> plot(t,h);
```

O gráfico produzido deve corresponder à Fig. 1.18(c).

O uso da função `sigx(..)` nos permite escrever operações de sinal de forma natural. Uma pequena desvantagem é que requer a criação de um arquivo ASCII “`sigx.m`” no disco com o código de função nele. Isso pode nem sempre ser desejável, especialmente se o sinal $x(t)$ for usado apenas para um exercício e não for necessário novamente. Um método alternativo é criar uma função anônima que não precise ser salva em um arquivo. Uma função anônima é criada para a sessão atual do MATLAB e permanece na memória enquanto o MATLAB permanecer ativo. Ele é descartado quando o MATLAB é fechado. A seguinte declaração cria uma função anônima com o nome “`sx`” que funciona da mesma forma que a função `sigx(..)`:

```
>> sx = @(t) 2*((t>= -1)&(t <2))+1*((t>=2)&(t<3))-0.5*((t>= 3)&(t<=6));
```

Os sinais $g(t)$ eh (t) agora podem ser calculados e representados graficamente usando

```
>> plot(t,sx(2*t-5)); >>
plot(t,sx(-4*t+2));
```

Recursos de software:

`matex 1.3b`
`matex 1.3b.m`
`matex 1.3c.m`
`matex 1.3d.m`
`sigx.m`

Exercício 1.4 do MATLAB: Criando sinais periódicos

O MATLAB tem várias funções para criar formas de onda periódicas específicas. Neste exercício vamos explorar as funções `square(..)` e `sawtooth(..)`. Depois, apresentaremos uma técnica simples para criar formas de onda periódicas arbitrárias.

a. Um período de um sinal de onda quadrada é definido como

$$x(t) = \begin{cases} \frac{\bar{y}}{2}, & 0 < t < \frac{T}{2} \\ \bar{y}1, & \frac{T}{2} < t < T \end{cases}$$

A função MATLAB `square(..)` produz um sinal de onda quadrada com período igual a $T = 2\bar{y}$ por padrão, então precisamos usar a operação de escala de tempo para obtê-lo com qualquer outro valor de T . O código abaixo irá calcular e representar graficamente uma onda quadrada com período $T = 1$ s para o intervalo de tempo $\bar{y}1 < t < 10$ s.

```
>> t = [-1:0.01:10]; >> x =
quadrado (2*pi*t); >> plot(t,x);
```

b. Um sinal de onda quadrada com um ciclo de trabalho de $0 < d \leq 1$ é definido como

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < Td \\ \bar{y}1, & Td < t < T \end{cases}$$

O código a seguir calculará e representará graficamente um sinal de onda quadrada com período $T = 1$ s e ciclo de trabalho $d = 0,2$ (ou 20 por cento).

```
>> x = quadrado (2*pi*t,20); >> plot(t,x);
```

c. A função `sawtooth(..)` gera uma forma de onda dente de serra com período $T = 2\pi$. Isso é definição para um período é

$$x(t) = t/T \text{ para } 0 < t < T$$

O código abaixo pode ser usado para obter um sinal dente de serra com período $T = 1,5$ s.

```
>> x = dente de serra (2*pi*t/1,5); >>
plot(t,x);
```

d. Um sinal $x(t)$ que é periódico com período $T = 2,5$ s é definido através do seguinte:

$$x(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1 \\ e^{-5(t-1)}, & t \geq 2,5 \end{cases} \quad \text{e } x(t + 2,5k) = x(t)$$

O seguinte pode ser usado para representar graficamente este sinal no intervalo de tempo $0 < t < 12$ s.

```
>> t = [-2:0,01:12]; >> x1 =
@(t) t.*((t>=0)&(t<1))+exp(-5*(t-1)).*((t>=1)&(t< 2.5)); >> x = x1(mod(t,2.5)); >> plot(t,x); grade;
```

A estratégia é direta: primeiro criamos uma função anônima “`x1`” para descrever um período do sinal.

Na próxima linha, usamos essa função anônima com o argumento `mod(t,2.5)` para causar repetição periódica.

Recursos de software:

`matex_1_4h.m`
`matex_1_4b.m`
`matex_1_4c.m`
`matex_1_4d.m`

Exercício 1.5 do MATLAB: Funções para blocos de construção

básicos É possível estender o MATLAB desenvolvendo funções personalizadas para executar tarefas que são encontradas com frequência. Neste exercício, desenvolveremos algumas funções simples para o cálculo dos blocos básicos de construção de sinais descritos na Seção 1.3.2.

A função de passo unitário pode ser implementada criando um arquivo de texto com o nome “`ss_step.m`” e as duas linhas a seguir:

```
1 função x = ss_step(t) x = 1*(t>=0);
2
```

Ele retorna os valores de amplitude para a função degrau unitário avaliada em cada instante de tempo especificado pelo vetor “`t`”. A função de rampa unitária pode ser implementada com as duas linhas a seguir salvas em um arquivo de texto denominado “`ss_ramp.m`”:

```
1 função x = ss_ramp(t) x = t.*(t>=0);
2
```

As funções para calcular um pulso unitário e um triângulo unitário podem ser desenvolvidas com base nas funções `ss_step(..)` e `ss_ramp(..)`. Obteremos o pulso unitário aplicando a Eqn. (1.36) da seguinte forma:

1 função $x = ss_pulse(t)$ $x = ss_step(t+0,5) -$
2 $ss_step(t-0,5);$

Da mesma forma, um triângulo unitário pode ser obtido pela aplicação da Eqn. (1.43):

1 função x = ss_tri(t)
2 x = rampa_ss (t+1)-2* rampa_ss (t)+rampa_ss (t-1);

Recursos de software:

matex 15.m

ss passo.m

ss rampa.m

ss pulso.m ss

tri.m

Exercício 1.6 do MATLAB: Computação e representação gráfica de sinais de tempo

discreto Em exercícios anteriores, representamos sinais de tempo contínuo usando a função `plot(..)` que conecta pontos com linhas retas para que o efeito visual seja consistente com um sinal definido em todos os instantes de tempo. Quando trabalhamos com sinais de tempo discreto, usaremos um diagrama de haste para enfatizar a natureza de tempo discreto do sinal.

a. Calcular e representar graficamente o sinal

$$x1[n] = \{ 1.1, 2.5, 3.7, 3.2, 2.6 \} \quad (1.199)$$

ÿ n=5

para o intervalo do índice de amostra 4 $\leq n \leq$ 8.

Solução: Digite as três linhas a seguir na janela de comando do MATLAB para obter o gráfico mostrado na Fig. 1.91.

```
>> n = [4:8]; >> x1 =  
[1,1, 2,5, 3,7, 3,2, 2,6]; >> haste(n,x1);
```

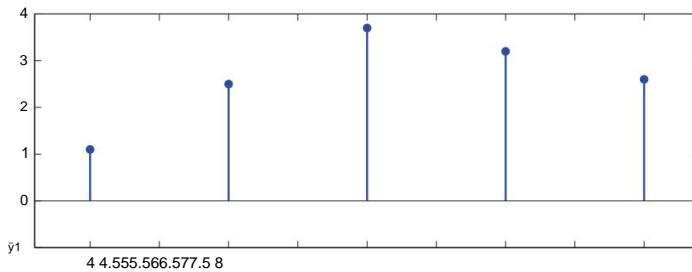


Figura 1.91 – Gráfico obtido no MATLAB Exercício 1.6 parte (a).

b. Calcular e representar graficamente o sinal

$$x_2[n] = \sin(0.2n)$$

para o intervalo de índice $n = 0, 1 \dots 99$.

Solução: Este sinal pode ser calculado e representado graficamente com as seguintes declarações:

```
>> n = [0:99]; >> x2 =
sin(0,2*n); >> haste(n,x2);
```

O resultado é mostrado na Fig. 1.92.

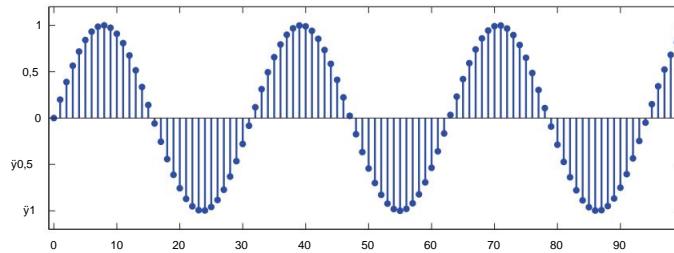


Figura 1.92 – Gráfico obtido no MATLAB Exercício 1.6 parte (b).

c. Calcular e representar graficamente o sinal

$$x3[n] = \begin{cases} \sin(0,2n), & 0 \leq n \leq 39 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

para o intervalo $n = \bar{y}20, \dots, 59$.

Solução: O sinal $x3[n]$ a ser representado graficamente é semelhante ao sinal da parte (b), mas é um sinal de comprimento finito que é igual a zero para $n < 0$ e para $n > 39$. Como no Exercício 1.1 do MATLAB, resolveremos resolver esse problema usando operadores lógicos no vetor índice “n”. Digite as seguintes instruções na janela de comando para calcular e representar graficamente o sinal $x3[n]$.

```
>> n = [-20:59]; >> x3 =
sin(0,2*n).*((n>=0)&(n<=39)); >> haste(n,x3);
```

O resultado é mostrado na Fig. 1.93.

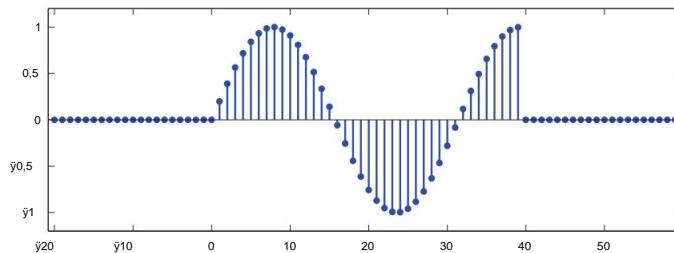


Figura 1.93 – Gráfico obtido em MATLAB Exercício 1.6 parte (c).

Recursos de software:

matex 1_6h
matex 1_6b.m
matex 1_6c.m

MATLAB Exercício 1.7: Extensão periódica de um sinal de tempo discreto Às

vezes, um sinal de tempo discreto periódico é especificado usando amostras de um período. Seja $x[n]$ um sinal de comprimento N com amostras no intervalo $n = 0, \dots, N - 1$. Vamos definir o sinal

$\tilde{x}[n]$ como a extensão periódica de $x[n]$ de modo que

$$\tilde{x}[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n + mN]$$

Neste exercício desenvolveremos uma função MATLAB para estender periodicamente um sinal de tempo discreto. A função ss_per(..) dada abaixo toma um vetor "x" que contém um período (N amostras) de $x[n]$. O segundo argumento "idx" é um vetor que contém os índices nos quais o sinal de extensão periódica deve ser avaliado. As amostras do sinal periódico $\tilde{x}[n]$ são retornadas no vetor "xtilde".

```

1 função xtilde = ss_per(x,idx)
2     N = comprimento(x); % Período do sinal . n = mod(idx ,N); %
3     Indexação do módulo.
4     x(nn);                 % Índices MATLAB começam com 1. nn = n+1; xtilde =
5
6 fim
```

Considere um sinal de comprimento 5 $x[n]$ dado por

$$x[n] = n \quad , \quad \text{para } n = 0, 1, 2, 3, 4$$

A extensão periódica $\tilde{x}[n]$ pode ser calculada e representada graficamente para $n = -15, \dots, 15$ com as seguintes declarações:

```

>> x = [0,1,2,3,4] >> n = [-15:15]
>> xtilde = ss_per(x,n) >>
stem(n,xtilde)
```

E se precisarmos calcular e representar graficamente uma versão reversa no tempo $\tilde{x}[-n]$ no mesmo intervalo? Isso também pode ser feito facilmente usando as seguintes declarações:

```
>> xtilde = ss_per(x,-n) >> haste(n,xtilde)
```

Recursos de software:

matex 1_7.m

ss_por.m

problemas

1.1. Esboce e rotule cada um dos sinais definidos abaixo:

$$\begin{aligned}
 \text{a. } x_a(t) = & \begin{cases} 0, & t < 0 \text{ ou } t > 4 \\ 2, & -1 < t < 1 \\ 1, & 2 < t < 3 \\ -t+1, & 3 < t < 4 \\ 2, & t \geq 4 \end{cases} \\
 \text{b. } x_b(t) = & \begin{cases} 0, & t < 0 \text{ ou } t > 5 \\ t, & -2 < t < 2 \\ \sqrt{t+4}, & 3 < t < 4 \\ \sqrt{2t+7}, & 4 < t < 5 \\ -t-5, & t \geq 5 \end{cases}
 \end{aligned}$$

1.2. Considere os sinais mostrados na Fig. P.1.2. Para cada sinal, escreva a descrição analítica de forma segmentada semelhante às descrições dos sinais do Problema 1.1.

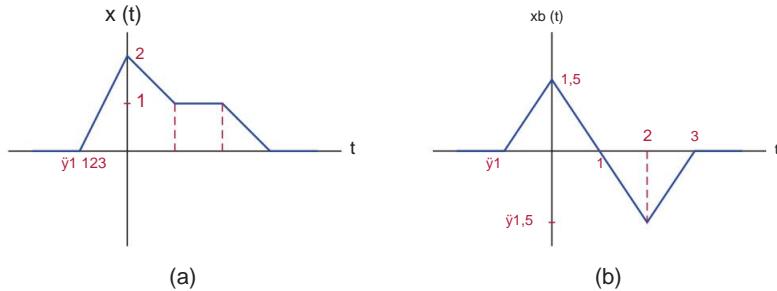


Figura P. 1.2

1.3. Usando os dois sinais $xa(t)$ e $xb(t)$ dados na Fig. P.1.2, calcule e esboce os sinais especificados abaixo:

- a. $g1(t) = xa(t) + xb(t)$
- b. $(t) = xa(t) xb(t)$
- c. $(t)=2xa(t) - xb(t)+3$

1.4. Para o sinal $x(t)$ mostrado na Fig. P.1.4, calcule o seguinte:

- a. $g1(t) = x(\tilde{y}t) g2$
- b. $(t) = x(2t)$
- c. $g3(t) = x \frac{t}{2}$
- d. $g4(t) = x(\tilde{y}t + 3) t \tilde{y} 1$
- e. $g5(t) = x \frac{-}{3}$
- f. $g6(t) = x(4t \tilde{y} 3) t$
- g. $g7(t) = x 1 \tilde{y} 3 -$

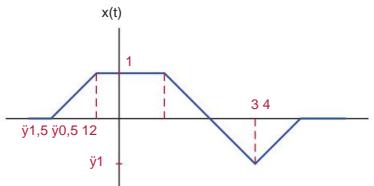


Figura P. 1.4

1.5. Considere o sinal

$$x(t) = e^{\tilde{y}t} - e^{\tilde{y}2t} u(t)$$

Determine e esboce os seguintes sinais derivados de $x(t)$ por meio de operações de sinal:

- a. $g1(t) = x(2t \tilde{y} 1) g2$
- b. $(t) = x(\tilde{y}t + 2)$

c. $g_3(t) = x \frac{(3t+5)}{t-1}$

d. $g_4(t) = x \frac{-3}{3}$

1.6. Seja b uma constante positiva. Mostre que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} b t = \bar{y}(t) b$$

Dica: Comece com a Eqn. (1.23) que expressa a função impulso como o limite de um pulso $q(t)$ com altura $1/a$ e área unitária. Aplique escala de tempo para $q(t)$ e então tome o limite como a $\bar{y}(0)$.

1.7. Considere novamente a Eq. (1.23) que expressa a função impulso como o limite de um pulso $q(t)$ com altura $1/a$ e área igual à unidade. Mostre que, para pequenos valores de a , temos

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \int_{t_1 - a/2}^{t_1 + a/2} f(t) q(t) dt = f(t_1)$$

onde $f(t)$ é qualquer função contínua no intervalo $t_1 - a/2 < t < t_1 + a/2$. Em seguida, tomando o limite desse resultado, mostre que a propriedade de peneiramento da função de impulso é válida.

1.8. Esboce cada uma das seguintes funções.

a. $\bar{y}(t) + \bar{y}(t-1) + \bar{y}(t-2)$

b. $\bar{y}(t-1) + u(t)$

c. $e^{\bar{y}t} \bar{y}(t)$

d. $1) e^{\bar{y}t} [u(t-1) - u(t-2)]$

e. $e^{\bar{y}t} \bar{y}(t-0,1n)$

$n=0$

1.9. Esboce cada uma das funções a seguir no intervalo de tempo $\bar{y}1 \leq t \leq 5$. Em seguida, use o programa explorador de formas de onda “wav demo1.m” para verificar

a. seus resultados. $u(t) + u(t-1) - 3u(t-2)$

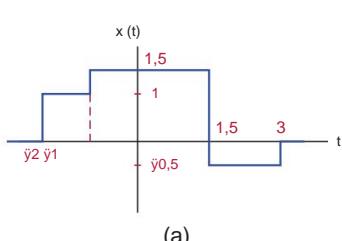
b. $2) + u(t-3) r(t) - 2r(t-2)$

c. $+ r(t-3) u(t) + r(t-2) - u(t-3) r(t-4)$

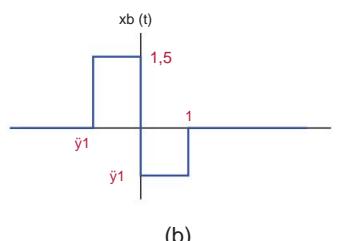
d. $2\bar{y} \frac{2}{2} - \frac{1}{1,5} + 2\bar{y}(t-3)$

e. $\bar{y}(t) + 2\bar{y}(t-1) + 1,5\bar{y}(t-3) - \bar{y}(t-4)$

1.10. Expresse cada um dos sinais mostrados na Fig. P.1.10 usando funções de passo unitário com escala e tempo deslocado. Em seguida, use o programa explorador de formas de onda “wav demo1.m” para verificar seus resultados.



(a)



(b)

Figura P. 1.10

1.11. Considere novamente os sinais na Fig. P.1.10. Expresse cada sinal usando funções de pulso unitário com escala e tempo deslocado. Em seguida, use o programa explorador de formas de onda “wav demo1.m” para verificar seus resultados.

1.12. Expresse o sinal $x(t)$ mostrado na Fig. P.1.12 usando

- Funções de rampa unitária
- Funções de triângulo unitário

Em cada caso, verifique seus resultados usando o programa explorador de formas de onda “wav demo1.m”.

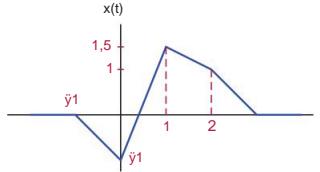


Figura P. 1.12

1.13. Suponha que em um experimento coletamos dados na forma de (t_i, x_i) pares para $i = 1, \dots, N$, e gostaríamos de construir um sinal de tempo contínuo $x(t)$ por interpolação linear, ou seja, conectando os pontos com segmentos de reta como mostrado na Fig. P.1.13(a). A única restrição é que todos os valores t_i são distintos; não há dois pontos de dados com o mesmo valor de tempo. Vamos definir uma função triangular assimétrica na forma

$$\hat{y}_s(t, a, b) = \begin{cases} 0 & , t < \hat{y}_a \text{ ou } t > b \\ +1 & , \hat{y}_a < t < 0 \\ -\frac{t - \hat{y}_a}{b - \hat{y}_a} & , 0 < t < b \\ 0 & , \text{outros} \end{cases}$$

que é mostrado na Fig. P.1.13(b). Desenvolva um método para expressar o sinal interpolado linearmente $x(t)$ em termos das funções do triângulo assimétrico.

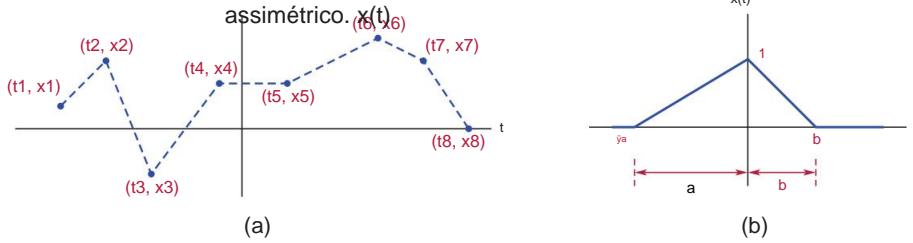


Figura P. 1.13

1.14. A derivada temporal da função impulso unitário $\hat{y}(t)$ é chamada de duplo. Dada uma função $f(t)$ que é contínua em $t = 0$ e também tem primeira derivada contínua em $t = 0$, mostre que

$$\hat{\int} f(t) \hat{y}(t) dt = \hat{y}f(0) \frac{df}{dt} \Big|_{t=0}$$

Dica: use a integração por partes e, em seguida, aplique a propriedade de peneiração da função de impulso.

1.15. A função signum é definida como

$$\text{sinal}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$$

Expresse a função $\text{sgn}(t)$ em termos da função degrau unitário.

1.16. Usando a fórmula de Euler, prove as seguintes identidades:

a. $\cos(a) = \frac{e^{ja} + e^{-ja}}{2}$

b. $\sin(a) = \frac{e^{ja} - e^{-ja}}{2j}$

c. $\frac{d}{da} [\cos(a)] = -\sin(a)$

d. $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$

e. $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$

f. $\cos^2(a) = \frac{1 + \cos(2a)}{2}$

1.17. Usando a definição de periodicidade, determine se cada sinal abaixo é periódico ou não.

Se o sinal for periódico, determine o período fundamental e a frequência fundamental.

a. $x(t) = 3 \cos(2t + \pi/10) u(t)$

b. $= 2 \sin(\pi/20)t u(t) = 3$

c. $\cos(2t + \pi/10) u(t) x(t) = \cos^2(3t)$

d. $\pi/3) x(t) = e^{\pi/3} |t| \cos(2t)$

e.

f. $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{\pi/2 k T_s} u(t - k T_s)$

gh. $x(t) = e^{j(2t + \pi/10)}$

$(t) = e^{j(\pi/10 + j2)t}$

1.18. Determine a periodicidade de cada um dos sinais multitonos dados abaixo. Para aqueles que são periódicos, determine o período fundamental e a frequência fundamental.

a. $x(t) = 2 \cos(5t + \pi/10) + 3 \sin(5\pi t) x(t) =$

b. $\cos(10\pi t) + 3 \sin(30\pi t + \pi/4) x(t) = \sin(30\pi t + \pi/4)$

c. $2t + \sin(2t) x(t) = \cos(45\pi t)$

d. $+ \cos(55\pi t)$

1.19. Um sinal $g(t)$ é definido em termos de outro sinal $x(t)$ como

$$g(t) = A x(t), \quad A = 0$$

- a. Se $x(t)$ é um sinal de energia com energia normalizada igual a E_x , mostre que $g(t)$ também é um sinal de energia. Determine a energia normalizada de $g(t)$ em termos de E_x e A . b. Se $x(t)$ é um sinal de potência com potência média normalizada igual a P_x , mostre que $g(t)$ também é um sinal de potência. Determine a potência média normalizada de $g(t)$ em termos de P_x e A .

1.20. Um sinal $g(t)$ é definido em termos de outro sinal $x(t)$ como $g(t) = A x(t) + B$, $A, B = 0$

- a. Se $x(t)$ é um sinal de energia com energia normalizada igual a E_x , $g(t)$ é um sinal de energia ou um sinal de potência?

Determine a energia normalizada ou a potência média normalizada de $g(t)$, conforme apropriado, em termos de E_x , A e B .

1.21. Determine a energia normalizada de cada um dos sinais dados abaixo.

$$\begin{aligned} a. x(t) &= e^{-2|t|} \\ &= e^{-2t} u(t) \quad c. x(t) = e^{-2t} \\ &\cos(5t) u(t) \end{aligned}$$

Dica: expresse o termo do cosseno em $x(t)$ usando a fórmula de Euler antes de elevar ao quadrado e integrar.

1.22. Determine a energia normalizada de cada um dos sinais mostrados na Fig. P.1.23.

1.23. Determine a potência média normalizada de cada um dos sinais periódicos mostrados na Fig. P.1.23.

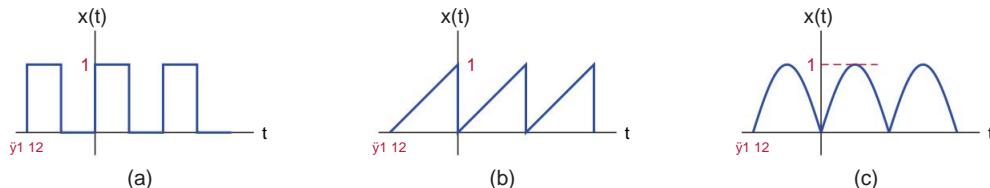


Figura P.1.23

1.24. No Exemplo 1.12, o valor RMS de um sinal multiton foi derivado para o caso de frequências distintas. Agora considere o sinal

$$x(t) = 2 \cos(2\pi f_1 t) + 3 \sin(2\pi f_1 t) + 6 \cos(2\pi f_2 t)$$

onde os dois primeiros termos têm a mesma frequência. Determine o valor RMS do sinal.

1.25. Identifique quais dos sinais na Fig. P.1.25 são pares, quais são ímpares e quais sinais não são nem pares nem ímpares.

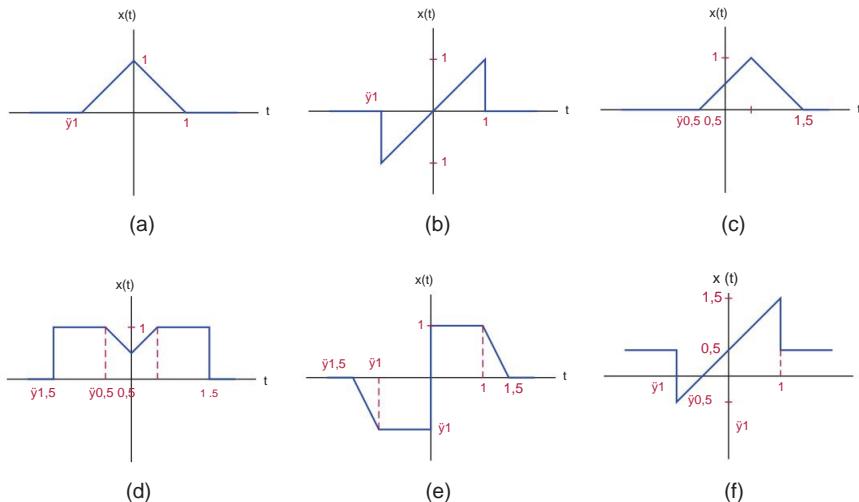


Figura P.1.25

1.26. Considere um sinal $x(t)$. Mostre que

- a. Se $x(t)$ é par, então

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt = 2 \int_0^{\infty} x(t) dt$$

- b. Se $x(t)$ é ímpar, então

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt = 0$$

1.27. Seja $x(t) = x_1(t)x_2(t)$. Mostre que

- a. Se $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são pares, então $x(t)$ é par. b.

Se $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são ímpares, então $x(t)$ é par. c.

Se $x_1(t)$ é par e $x_2(t)$ é ímpar, então $x(t)$ é ímpar.

1.28. Determine as componentes conjugadas simétricas e conjugadas antissimétricas do sinal $x(t) = e^{j(2t+10y)t}$. Esboce cada componente na forma polar, ou seja, em termos de magnitude e fase.

1.29. Para cada um dos sinais listados abaixo, encontre os componentes pares e ímpares $x_e(t)$ e $x_o(t)$. Em cada caso, esboce o sinal original e seus dois componentes.

- a. $x(t) = e^{j5t} \sin(t) u(t)$
- b. $x(t) = e^{j3|t|} \cos(t)$
- c. $x(t) = e^{j3|t|} \sin(t)$
- d. $x(t) = t e^{j3t} + 2 u(t)$
- e. $x(t) = e^{j2|t|} j1$

1.30. Determine e esboce as componentes pares e ímpares do sinal $x(t)$ usado no Problema 1.12 e mostrado na Fig. P.1.12.

1.31. Transforme cada um dos sinais senoidais dados abaixo em forma fasorial.

- a. $x(t) = 3 \cos(200\pi t)$
- b. $x(t) = 7 \sin(100\pi t)$
- c. $x(t) = 2 \sin(10\pi t) + 5 \cos(10\pi t)$

1.32. Usando uma frequência operacional de $f_0 = 10$ Hz, expresse os fasores dados abaixo como sinais no domínio do tempo.

a. $X = 5 ej14\pi$

b. $X = 2 ej28\pi + 3 ej18\pi$

c. $X = 2 ej28\pi - 3 ej18\pi$

1.33. Para o sinal $x[n]$ mostrado na Fig. P.1.33, esboce os seguintes sinais.

- a. $g[n] = x[n - 3]$
- b. $g[n] = x[2n - 3]$
- c. $g[n] = x[jn]$
- d. $g[n] = x[2 - n]$
- e. $g[n] = \begin{cases} x[n/2], & \text{se } n/2 \text{ é inteiro} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$

f. $g[n] = x[n] \circ[n]$
 gh $g[n] = x[n] \circ[n \circ 3] g[n]$
 $= x[n] \{u[n + 2] \circ u[n \circ 2]\}$

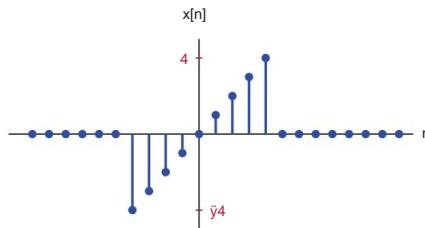


Figura P. 1.33

1.34. Considere o sinal senoidal de tempo discreto

$$x[n] = 5 \cos \left(\frac{3\pi}{23}n + \frac{\pi}{4} \right)$$

O sinal é periódico? Se sim, determine o período fundamental.

1.35. Esboce cuidadosamente cada sinal descrito abaixo.

- a. $x[n] = \{ 1, -1, 3, -2, 5 \}$
- b. $x[n] = (0,8)n u[n] x[n]$
- c. $= u[n] \circ u[n \circ 10] x[n] = r[n]$
- d. $\circ 2r[n \circ 5] + r[n \circ 10]$

1.36. Determine a energia normalizada de cada sinal descrito no Problema 1.35.

1.37. Considere um sinal $x[n]$. Mostre que

a. Se $x[n]$ é par, então

$$x[n] = x[0] + 2 \sum_{n=\circ M}^{M-1} x[n]$$

b. Se $x[n]$ é ímpar, então

$$x[n] = 0 \quad \text{para } n \neq 0$$

1.38. Seja $x[n] = x_1[n] x_2[n]$. Mostre que

- a. Se $x_1[n]$ e $x_2[n]$ são pares, então $x[n]$ é par.
- b. Se $x_1[n]$ e $x_2[n]$ são ímpares, então $x[n]$ é par.
- c. Se $x_1[n]$ é par e $x_2[n]$ é ímpar, então $x[n]$ é ímpar.

1.39. Determine os componentes pares e ímpares do sinal $x[n]$ mostrado na Fig. P.1.39.

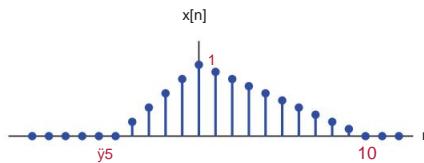


Figura P. 1.39

Problemas MATLAB

1.40. Escreva um script MATLAB para calcular e representar graficamente os sinais $xa(t)$ e $xb(t)$ descritos no Problema 1.1. Use uma função anônima para cada sinal com base na descrição analítica fornecida (consulte o Exercício 1.1 do MATLAB). Faça um gráfico de cada sinal no intervalo $\tilde{y}1 \leq t \leq 6$ com um incremento de tempo de $\tilde{y}t = 0,01$. Rotule os eixos adequadamente.

1.41.

- Considere os sinais $xa(t)$ e $xb(t)$ descritos no Problema 1.2. Usando a função `interp1(..)` do MATLAB, calcule cada sinal no intervalo de tempo $\tilde{y}2 \leq t \leq 4$ com um incremento de tempo de $\tilde{y}t = 0,01$ (consulte o Exercício 1.2 do MATLAB).
- Em seguida, calcule os sinais $g1(t)$, $g2(t)$ e $g3(t)$ a partir dos sinais $xa(t)$ e $xb(t)$ conforme especificado no Problema 1.3. Faça o gráfico de cada sinal no mesmo intervalo de tempo da parte (a). Rotule cuidadosamente os eixos de cada gráfico.

1.42. Consulte os sinais $g1(t)$ e $g2(t)$ encontrados no Exemplo 1.2 e mostrados na Fig. 1.12.

Desenvolva um script MATLAB para verificar as formas analíticas desses sinais dados por Eqns. (1.5) e (1.6). Seu roteiro deve

- Calcula amostras de cada sinal no intervalo de tempo $\tilde{y}1 \leq t \leq 4$ usando um incremento de tempo de $\tilde{y}t = 0,01$ s.
- Faça um gráfico dos resultados usando a função “`subplot`”.

Assegure-se de que os cálculos da parte (a) correspondam diretamente às Eqns. (1.5) e (1.6).

1.43. Consulte o sinal $x(t)$ usado no Problema 1.4 e mostrado na Fig. P.1.4.

- Expresse o sinal $x(t)$ através do uso de uma função anônima do MATLAB que utiliza a função `interp1(..)`.
- Usando o MATLAB, calcule e represente graficamente cada um dos sinais das partes (a) a (g) do Problema 1.4 no intervalo de tempo $\tilde{y}10 < t < 10$ s, usando um incremento de tempo de $\tilde{y}t = 0,02$ s. Compare os gráficos do MATLAB com aqueles obtidos manualmente no Problema 1.4.

1.44. Consulte o sinal $x(t)$ usado no Problema 1.5.

- Expresse o sinal $x(t)$ por meio do uso de uma função anônima do MATLAB. b. Usando o MATLAB, calcule e represente graficamente cada um dos sinais das partes (a) a (d) do Problema 1.5 no intervalo de tempo $\tilde{y}10 < t < 10$ s, usando um incremento de tempo de $\tilde{y}t = 0,02$ s. Compare os gráficos do MATLAB com aqueles obtidos manualmente no Problema 1.5.

1.45. Usando as funções MATLAB ss_step(..), ss_ramp(..), ss_pulse(..) e ss_trí(..) desenvolvidas no MATLAB Exercício 1.5, faça o gráfico de cada um dos sinais especificados no Problema 1.9, partes (a) até (e) no intervalo de tempo $\tilde{y}2 < t < 8$ s, usando um incremento de tempo de $\tilde{y}\Delta t = 0,01$ s.
Compare os gráficos do MATLAB com aqueles obtidos manualmente no Problema 1.9.

1.46. Considere o sinal $x(t)$ usado no Problema 1.12 e representado graficamente na Fig. P.1.12.

- Expresse esse sinal por meio de uma função MATLAB anônima que utiliza a função ss_ramp(..) e represente graficamente o resultado em um intervalo de tempo apropriado. b. Repita a parte (a) usando a função ss_trí(..) em vez da função ss_ramp(..). c. No MATLAB, calcule e represente graficamente as componentes pares e ímpares do sinal $x(t)$. Código Eq. (1.109) e (1.110) diretamente no MATLAB para esta finalidade. Compare seus gráficos MATLAB com aqueles obtidos manualmente no Problema 1.30.

1.47. Considere o sinal de tempo discreto $x[n]$ usado no Problema 1.33 e representado graficamente na Fig. P.1.33.

- Expresse esse sinal por meio de uma função MATLAB anônima que utiliza a função ss_ramp(..) e represente graficamente o resultado para o intervalo de índice $n = \tilde{y}10, \dots, 10$. b. Expressa cada um dos sinais nas partes (a) até (h) do Problema 1.33 no MATLAB e represente graficamente os resultados. Use as funções ss_step(..) e ss_ramp(..) conforme necessário.

1.48. Considere o sinal de tempo discreto $x[n]$ usado no Problema 1.39 e representado graficamente na Fig. P.1.39.

- Expresse esse sinal por meio de uma função MATLAB anônima que utiliza a função ss_ramp(..) e represente graficamente o resultado para o intervalo de índice $n = \tilde{y}10, \dots, 10$. b. Escreva um script para calcular e representar graficamente os componentes pares e ímpares desse sinal.

Projetos MATLAB

1.49. No Problema 1.13, foi desenvolvido um método para interpolação linear entre pontos de dados (t_i, x_i) para $i = 1, \dots, N$ usando a função de triângulo assimétrico mostrada na Fig. P.1.13b.

- Escreva uma função MATLAB ss_trs(..) para calcular valores da função triângulo assimétrico em instantes de tempo especificados no vetor “t”. A função deve ter a sintaxe

```
x = ss_trs(t,a,b)
```

onde “t” é um vetor linha. Os argumentos “a” e “b” são ambos escalares positivos. Teste sua função para calcular e representar graficamente as funções $\tilde{y}s(t, 3, 2)$, $\tilde{y}s(t, 1, 4)$ e $\tilde{y}s(t, 2, 7, 1, 3)$ no intervalo de tempo $\tilde{y}5 \leq t \leq 5$ usando um incremento de tempo $\tilde{y}\Delta t = 0,01$.

- Em seguida, escreva uma função MATLAB ss_interp(..) para interpolar entre um conjunto de dados pontos. A função deve ter a sintaxe

```
x = ss_interp (tvec ,xvec ,t)
```

Os argumentos “tvec” e “xvec” são vetores linha de igual comprimento. O vetor “tvec” contém t_1, \dots, t_N , e o vetor “xvec” contém x_1, \dots, x_N . O vetor “x” retornado contém valores do sinal interpolado em instantes de tempo especificados no vetor “t”.

c. Escreva um script MATLAB para testar a função `ss_interp(..)` com o conjunto de pontos de dados

$$(t_i, x_i) = ((4, 0.5), (3, 1.5), (2, 1), (0.5, 1), (1, 1), (3, 2), (4, 1.5), (5, 0))$$

Faça um gráfico do sinal interpolado no intervalo de tempo $\tilde{4} \leq t \leq 5$ usando um incremento de tempo de $\Delta t = 0.01$.

1,50. Em alguns sistemas digitais, como brinquedos baratos, sinais senoidais em frequências específicas podem ser gerados por meio de consulta à tabela, eliminando assim a necessidade de o sistema incluir a capacidade de calcular funções trigonométricas. As amostras correspondentes a exatamente um período do sinal senoidal são calculadas antecipadamente e armazenadas na memória. Quando o sinal é necessário, o conteúdo da tabela de consulta é reproduzido repetidamente. Considere um sinal senoidal

$$x_a = \cos(2\pi f_1 t)$$

com $f_1 = 1336$ Hz. Seja $x_1[n]$ um sinal senoidal de tempo discreto obtido pela avaliação de $x_a(t)$ em intervalos de 125 s correspondentes a uma taxa de amostragem de 8.000 amostras por segundo.

$$x_1[n] = x_a \frac{n}{8000}$$

a. Determine o período fundamental N_1 para o sinal $x_1[n]$. b. Escreva um script MATLAB para realizar o seguinte: - Crie um vetor “ x_1 ” que

contenha exatamente um período do sinal.

- Repetindo o vetor “ x_1 ” quantas vezes forem necessárias, crie um vetor “ x ” que contém 8000 amostras do sinal senoidal que corresponde a um tempo de duração de 1 segundo.

- Reproduza o som resultante usando a função `sound(..)` do MATLAB. Se o período fundamental foi calculado corretamente na parte (a), as seções repetidas do sinal devem se encaixar perfeitamente e você deve ouvir um tom limpo. c. Modifique o script da parte (b) para que o número de amostras usadas na criação do vetor “ x_1 ” seja 10 vezes menor que o valor correto encontrado na parte (a). Crie um vetor “ x ” repetindo este vetor imperfeito “ x_1 ” quantas vezes forem necessárias. Ouça a reprodução de áudio do vetor “ x ” e comente a diferença. Além disso, represente graficamente o sinal resultante. Usando a ferramenta de zoom, amplie a área de transição entre duas repetições e observe a falha na transição devido à duração incorreta do período.

d. Repita as partes (a) a (c) usando o sinal senoidal

$$x_b = \cos(2\pi f_2 t)$$

com $f_2 = 852$ Hz, e o sinal de tempo discreto correspondente

$$x_2[n] = x_b \frac{n}{8000}$$

e. Considere o sinal de tom duplo

$$x[n] = x_1[n] + x_2[n]$$

Usando o método de consulta de tabela com os vetores “ x_1 ” e “ x_2 ” obtidos acima, gere um vetor que contenha 8.000 amostras do sinal de tom duplo. Reproduza o vetor resultante e comente.

1.51. Neste projeto, será explorado o conceito de sinalização de multifrequência de tom duplo (DTMF). Como o nome indica, os sinais DTMF são misturas de duas senoides em frequências distintas. Eles são usados em comunicações através de linhas telefônicas analógicas. Uma versão particular da sinalização DTMF é utilizada na discagem de um número com telefones de botão de pressão, um esquema conhecido como discagem por tom. Quando o chamador discia um número, o gerador DTMF produz um sinal de tom duplo para cada dígito discado. O sinal sintetizado está na forma

$$x_k(t) = \sin(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_2 t), \quad 0 \leq t \leq T_d$$

As atribuições de frequência para os dígitos em um teclado de telefone são mostradas na Fig. P.1.51.

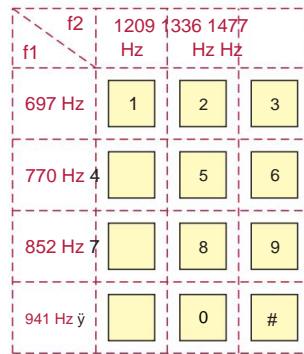


Figura P. 1.51

O objetivo deste projeto é desenvolver uma função de sintetizador DTMF para MATLAB.

- a. Desenvolva uma função chamada ss_dtmf1(..) para produzir o sinal para um dígito. A sintaxe da função deve ser

```
x = ss_dtmf1 (n,t)
```

O primeiro argumento “n” é o dígito para o qual o sinal DTMF deve ser gerado. Deixe os valores n = 0 até n = 9 representarem as teclas correspondentes no teclado. Mapeie as duas chaves restantes “*” e “#” para os valores n = 10 e n = 11, respectivamente. Por fim, o valor n = 12 deve representar uma pausa, ou seja, um período de silêncio. O vetor “t” contém os instantes de tempo nos quais o sinal DTMF x (t) é avaliado e retornado no vetor “x”.

- b. Desenvolva uma função chamada ss_dtmf(..) com a sintaxe

```
x = ss_dtmf(número,dt,nd,np)
```

Os argumentos para a função ss_dtmf(..) são definidos da seguinte forma:

number: O número de telefone a ser discado, inserido como um vetor. Por exemplo, para discar o número 555-1212, o vetor “número” seria inserido como

```
número = [5,5,5,1,2,1,2]
```

dt: O incremento de tempo Δt a ser usado no cálculo das amplitudes do DTMF sinal.

nd: Parâmetro para controlar a duração do sinal DTMF para cada dígito. A duração de cada dígito deve ser

$$T_d = n_d \cdot t$$

np: Parâmetro para controlar a duração da pausa entre dígitos consecutivos. A duração de pausa deve ser

$$T_p = n_p \cdot t$$

A função ss_dtmf(..) deve usar a função ss_dtmf1(..) para produzir os sinais $x_k(t)$ para cada dígito (e as pausas entre os dígitos) e anexá-los para criar o sinal $x(t)$.

- c. Escreva um script para testar a função ss_dtmf(..) com o número 555-1212. Use um incremento de tempo de 125 microsegundos correspondente a 8.000 valores por segundo. A duração de cada dígito deve ser de 200 milissegundos com pausas de 80 milissegundos entre os dígitos.
- d. Reproduza o sinal resultante $x(t)$ usando a função sound(..) .

Capítulo 2

Analizando o Tempo Contínuo Sistemas no domínio do tempo

Objetivos do Capítulo

- Desenvolver a noção de sistema de tempo contínuo.
- Aprenda a simplificar as suposições feitas na análise de sistemas. Discuta os conceitos de linearidade e invariância no tempo e seu significado.
- Explorar o uso de equações diferenciais para representar sistemas de tempo contínuo.
- Desenvolver métodos para resolver equações diferenciais para calcular o sinal de saída de um sistema em resposta a um sinal de entrada especificado.
- Aprenda a representar uma equação diferencial na forma de um diagrama de blocos que pode ser usado como base para a simulação de um sistema.
- Discuta o significado da resposta ao impulso como uma forma de descrição alternativa para sistemas lineares e invariantes no tempo.
- Aprenda como calcular o sinal de saída para um sistema linear e invariante no tempo usando convolução. Compreender a interpretação gráfica dos passos envolvidos na realização da operação de convolução.
- Aprenda os conceitos de causalidade e estabilidade conforme eles se relacionam com sistemas fisicamente realizáveis e utilizáveis.

2.1 Introdução

Neste capítulo, começaremos nosso exame do conceito de sistema. Uma definição excessivamente simplificada e bastante ampla de um sistema pode ser dada da seguinte forma:

Em geral, um sistema é qualquer entidade física que recebe um conjunto de um ou mais sinais físicos e, em resposta, produz um novo conjunto de um ou mais sinais físicos.

Considere um microfone que detecta as variações na pressão do ar criadas pela voz de um cantor e produz um pequeno sinal elétrico na forma de uma voltagem variável no tempo. O microfone atua como um sistema que facilita a conversão de um sinal acústico em um sinal elétrico. Em seguida, considere um amplificador conectado aos terminais de saída do microfone. Ele pega o sinal elétrico de pequena amplitude do microfone e produz uma réplica em escala maior adequada para uso com um alto-falante. Por fim, um alto-falante conectado aos terminais de saída do amplificador converte o sinal elétrico em som. Podemos ver cada uma das entidades físicas, nomeadamente o microfone, o amplificador e o alto-falante, como sistemas individuais. Alternativamente, podemos olhar para a combinação de todos os três componentes como um sistema que consiste em três subsistemas trabalhando juntos.

Outro exemplo é a transmissão de imagens de um estúdio de televisão para os aparelhos de televisão de nossas casas. O sistema que atinge o objetivo de trazer som e imagem do estúdio para nossas casas é bastante complexo e consiste em um grande número de subsistemas que realizam as tarefas de 1) converter som e imagem em sinais elétricos no estúdio, 2) transformação de sinais elétricos em diferentes formatos para fins de aprimoramento, codificação e transmissão, 3) transmissão de sinais elétricos ou eletromagnéticos pelo ar ou por conexão a cabo, 4) recebimento de sinais elétricos ou eletromagnéticos no ponto de destino, 5) processamento de sinais elétricos para convertê-los em formatos adequados para um aparelho de televisão e 6) exibir as imagens e reproduzir o som no aparelho de televisão.

Dentro de um sistema de grande escala, alguns dos sinais físicos são sinais de tempo contínuo, enquanto outros são sinais de tempo discreto ou digitais.

Nem todos os sistemas de interesse são elétricos. Um automóvel é um exemplo de sistema de grande escala que consiste em vários subsistemas mecânicos, elétricos e eletromecânicos trabalhando juntos. Outros exemplos são sistemas econômicos, sistemas de transporte de massa, sistemas ecológicos e redes de computadores. Em cada um desses exemplos, sistemas de grande escala são construídos como coleções de subsistemas de menor escala interconectados que trabalham juntos para atingir um objetivo prescrito.

Neste livro não tentaremos um tratamento completo de nenhum sistema particular de grande escala. Em vez disso, vamos concentrar nossos esforços no desenvolvimento de técnicas para entender, analisar e projetar subsistemas com modelos precisos e práticos baseados em leis da física e transformações matemáticas. Em geral, um sistema pode ser visto como qualquer entidade física que define as relações de causa e efeito entre um conjunto de sinais conhecidos como entradas e outro conjunto de sinais conhecidos como saídas. Os sinais de entrada são excitações que dirigem o sistema, e os sinais de saída são as respostas do sistema a essas excitações.

No Capítulo 1, discutimos métodos básicos de modelagem matemática de sinais de tempo contínuo e de tempo discreto como funções do tempo.

O modelo matemático de um sistema é uma função, fórmula ou algoritmo (ou um conjunto de funções, fórmulas, algoritmos) para recriar aproximadamente a mesma relação causa-efeito entre os modelos matemáticos dos sinais de entrada e de saída.

Se focarmos nossa atenção em sistemas de entrada/saída única, a interação entre o sistema e seus sinais de entrada e saída pode ser ilustrada graficamente como mostrado na Fig. 2.1.

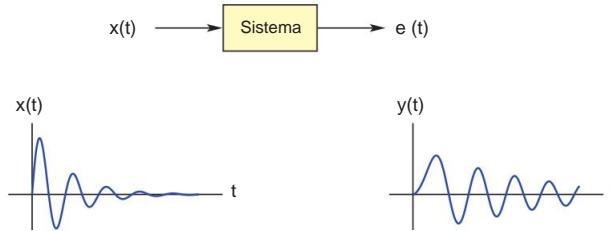


Figura 2.1 – Interação sinal-sistema em tempo contínuo.

Se os sinais de entrada e saída são modelados com funções matemáticas $x(t)$ e $y(t)$ respectivamente, então o próprio sistema precisa ser modelado como uma função, fórmula ou algoritmo de algum tipo que converte o sinal $x(t)$ no sinal $y(t)$. Às vezes, podemos ter a necessidade de projetar um sistema para obter um determinado efeito desejado na conversão do sinal de entrada $x(t)$ para o sinal de saída $y(t)$. Por exemplo, um amplificador aumenta o nível de potência de um sinal que pode ser muito fraco para ser ouvido ou transmitido, preservando seu conteúdo de informação. Um filtro seletivo de frequência pode ser usado para remover ou aumentar certas frequências em um sinal. Um sistema de reconhecimento de fala pode analisar o sinal $x(t)$ na tentativa de reconhecer determinadas palavras, com o objetivo de realizar determinadas tarefas, como conectar o chamador à pessoa certa por meio de um sistema automatizado de menus telefônicos.

Em contraste com os sistemas que projetamos para alcançar um resultado desejado, às vezes o efeito de um determinado sistema no sinal de entrada não é desejado, mas um que somos forçados a aceitar, tolerar ou manipular. Por exemplo, uma conexão com fio é frequentemente usada para que um sinal existente em um determinado local possa ser duplicado em um local remoto distante. Nesse caso, esperamos que a conexão do fio seja transparente dentro do esquema de transmissão do sinal do ponto A ao ponto B; no entanto, isso geralmente não é o caso.

Os condutores físicos usados para a conexão dos fios estão longe do ideal e causam mudanças no sinal à medida que ele viaja de A para B. As características da própria conexão representam um sistema que é mais incômodo do que qualquer outra coisa. Podemos precisar analisar esse sistema e encontrar maneiras de compensar os efeitos indesejados desse sistema se quisermos nos comunicar com sucesso.

A relação entre os sinais de entrada e saída de um sistema de tempo contínuo será modelada matematicamente como

$$y(t) = \text{Sys}\{x(t)\} \quad (2.1)$$

onde o operador $\text{Sys}\{\dots\}$ representa a transformação aplicada a $x(t)$. Essa transformação pode ser qualquer coisa, desde uma muito simples até uma muito complicada. Considere, por exemplo, um sistema que amplifica seu sinal de entrada por um fator de ganho constante K para produzir um sinal de saída

$$y(t) = K x(t) \quad (2.2)$$

ou um que atrasa seu sinal de entrada por um atraso de tempo constante \bar{y} para produzir

$$y(t) = x(t - \bar{y}) \quad (2.3)$$

ou um sistema que produz um sinal de saída que é proporcional ao quadrado do sinal de entrada como em

$$y(t) = K [x(t)]^2 \quad (2.4)$$

Nos três exemplos acima, temos definições de sistema que podem ser expressas na forma de funções simples. Isso não é sempre o caso. Sistemas mais interessantes têm mais

definições complicadas que não podem ser reduzidas a uma simples função do sinal de entrada, mas devem ser expressas por meio de um algoritmo, uma série de relações funcionais interconectadas de alguma forma ou uma equação diferencial.

Ao derivar modelos matemáticos válidos para sistemas físicos, contamos com leis estabelecidas da física que são aplicáveis a componentes individuais de um sistema. Por exemplo, considere um resistor em um circuito eletrônico. Ao modelar matematicamente um resistor, usamos a lei de Ohm, que afirma que a tensão entre os terminais de um resistor é proporcional à corrente que flui através dele. Isso leva à conhecida relação $v = Ri$ entre a tensão do resistor e a corrente do resistor. Por outro lado, experimentos de laboratório indicam que a resistência de um resistor de carbono real varia em função da temperatura, fato que é negligenciado no modelo matemático baseado na lei de Ohm. Assim, a lei de Ohm fornece uma simplificação da relação física envolvida. Se esta simplificação é aceitável ou não, depende das especificidades do circuito no qual o resistor é usado. Quão significativas são os desvios do modelo matemático do resistor em relação ao comportamento do resistor real? Quão significativas são as mudanças de temperatura que causam esses desvios? Quão sensível é o circuito às variações no valor de R ? As respostas a essas e outras perguntas semelhantes são usadas para determinar se o modelo matemático simples é apropriado ou se um modelo mais sofisticado deve ser usado. A modelagem de um sistema sempre envolve alguma simplificação das relações físicas entre sinais de entrada e saída. Isso é necessário para obter modelos matemáticos práticos para uso na compreensão do comportamento do sistema. Deve-se tomar cuidado para evitar simplificações excessivas e garantir que o modelo resultante seja uma aproximação razoavelmente precisa da realidade.

Dois pressupostos simplificadores comumente usados para modelos matemáticos de sistemas são a linearidade e a invariância no tempo, que serão os assuntos da Seção 2.2. A Seção 2.3 enfoca o uso de equações diferenciais para representar sistemas de tempo contínuo. As restrições que devem ser colocadas nas equações diferenciais para modelar sistemas lineares e invariantes no tempo serão discutidas na Seção 2.4. Métodos para resolver equações diferenciais lineares de coeficiente constante serão discutidos na Seção 2.5. A derivação de diagramas de blocos para simulação de sistemas lineares contínuos e invariantes no tempo será o assunto da Seção 2.6. Na Seção 2.7, discutimos o significado da resposta ao impulso e seu uso no contexto do operador de convolução para determinar o sinal de saída de um sistema. Os conceitos de causalidade e estabilidade de sistemas são discutidos nas Seções 2.8 e 2.9, respectivamente.

2.2 Linearidade e Invariância no Tempo

Na maior parte deste livro, focaremos nossa atenção em uma classe particular de sistemas referidos como sistemas lineares e invariantes no tempo. Linearidade e invariância no tempo serão duas propriedades importantes que, quando presentes em um sistema, nos permitirão analisá-lo usando técnicas bem estabelecidas da teoria de sistemas lineares. Em contraste, a análise de sistemas que não são lineares e invariantes no tempo tende a ser mais difícil e geralmente depende de métodos específicos para os tipos de sistemas que estão sendo analisados.

2.2.1 Linearidade em sistemas de tempo contínuo

Um sistema é dito linear se a transformação matemática $y(t) = \text{Sys}\{x(t)\}$ que governa a relação entrada-saída do sistema satisfaz as duas equações a seguir para quaisquer dois sinais de entrada $x_1(t), x_2(t)$ e qualquer fator de ganho constante arbitrário γ .

Condições para linearidade:

$$\text{Sistema } \{x_1(t) + x_2(t)\} = \text{Sistema } \{x_1(t)\} + \text{Sistema } \{x_2(t)\} \quad (2.5)$$

$$\text{Sys } \{\ddot{y}_1 x_1(t)\} = \ddot{y}_1 \text{ Sys } \{x_1(t)\} \quad (2.6)$$

A condição na Eq. (2.5) é a regra de aditividade que pode ser expressa da seguinte forma: A resposta de um sistema linear à soma de dois sinais é igual à soma das respostas individuais a cada um dos dois sinais de entrada. A condição na Eq. (2.6) é a regra de homogeneidade. Dito verbalmente, dimensionar o sinal de entrada de um sistema linear por um fator de ganho constante faz com que o sinal de saída seja dimensionado com o mesmo fator de ganho. Os dois critérios dados pelas Eqns. (2.5) e (2.6) podem ser combinados em uma equação que é chamada de princípio da superposição.

Princípio da superposição:

$$\text{Sys } \{\ddot{y}_1 x_1(t) + \ddot{y}_2 x_2(t)\} = \ddot{y}_1 \text{ Sys } \{x_1(t)\} + \ddot{y}_2 \text{ Sys } \{x_2(t)\} \quad (2.7)$$

Um sistema de tempo contínuo é linear se satisfaz o princípio da superposição estabelecido na Eqn. (2.7) para quaisquer dois sinais de entrada arbitrários $x_1(t)$, $x_2(t)$ e quaisquer duas constantes arbitrárias \ddot{y}_1 e \ddot{y}_2 . O princípio da superposição aplicado a dois sinais pode ser expresso verbalmente da seguinte forma: A resposta do sistema a uma soma ponderada de dois sinais de entrada é igual à mesma soma ponderada das respostas do sistema a sinais de entrada individuais. Este conceito é muito importante e é ilustrado graficamente na Fig. 2.2.

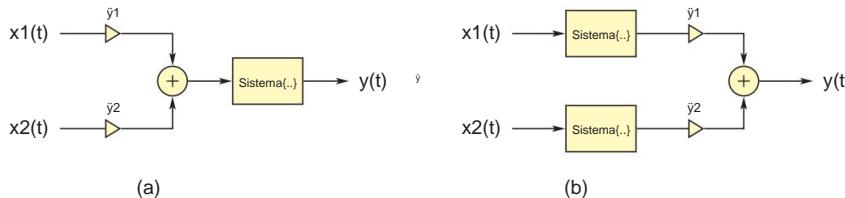


Figura 2.2 – Ilustração da Eqn. (2.7). As duas configurações mostradas são equivalentes se o sistema considerado for linear.

Além disso, se a superposição funciona para a soma ponderada de quaisquer dois sinais de entrada, pode-se provar por indução que ela também funciona para um número arbitrário de sinais de entrada.

Matematicamente temos

$$\begin{aligned} \text{sistema} & \sum_{i=1}^N \ddot{y}_i x_i(t) = \\ & \sum_{i=1}^N \ddot{y}_i \text{ Sys } \{x_i(t)\} \end{aligned} \quad (2.8)$$

A forma generalizada do princípio da superposição pode ser expressa verbalmente como segue: A resposta de um sistema linear a uma soma ponderada de N sinais arbitrários é igual à mesma soma ponderada das respostas individuais do sistema a cada um dos N sinais. Seja $y_i(t)$ a resposta ao componente de entrada $x_i(t)$ sozinho, ou seja, $y_i(t) = \text{Sys } \{x_i(t)\}$ para

$i = 1, \dots, N$. O princípio da superposição implica que

$$\sum_{i=1}^N y_i(t) = \sum_{i=1}^N y_i x_i(t) \quad (2.9)$$

Isso é ilustrado graficamente na Fig. 2.3.

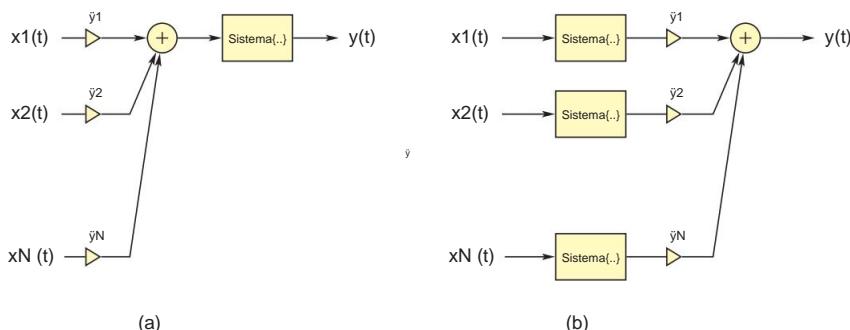


Figura 2.3 – Ilustração da Eqn. (2.7). As duas configurações mostradas são equivalentes se o sistema considerado for linear.

Testar a linearidade de um sistema envolve verificar se o princípio da superposição é válido verdadeiro com dois sinais de entrada arbitrários. O Exemplo 2.1 demonstrará esse procedimento.

Exemplo 2.1: Testando a linearidade de sistemas de tempo

contínuo Quatro sistemas diferentes são descritos abaixo por meio de suas relações de entrada-saída. Para cada um, determine se o sistema é linear ou não:

- a. $y(t) = 5x(t)$
- b. $y(t) = 5x(t) + 3$
- c. $y(t) = 3[x(t)]^2$
- d. $y(t) = \cos(x(t))$

Solução:

- a. Se dois sinais de entrada $x_1(t)$ e $x_2(t)$ forem aplicados ao sistema individualmente, eles produzirão os sinais de saída $y_1(t) = 5x_1(t)$ e $y_2(t) = 5x_2(t)$ respectivamente. Seja o sinal de entrada $x(t) = y_1x_1(t) + y_2x_2(t)$. O sinal de saída correspondente é encontrado usando a definição do sistema:

$$\begin{aligned} y(t) &= 5x(t) \\ &= 5[y_1x_1(t) + y_2x_2(t)] = y_1 \\ &[5x_1(t)] + y_2[5x_2(t)] = y_1 \\ &(t) + y_2x_2(t) \end{aligned}$$

O princípio da superposição é válido; portanto, este sistema é linear.

- b. Se dois sinais de entrada $x_1(t)$ e $x_2(t)$ forem aplicados ao sistema individualmente, eles produzirão os sinais de saída $y_1(t) = 5x_1(t) + 3$ e $y_2(t) = 5x_2(t) + 3$ respectivamente.

Usaremos novamente o sinal de entrada combinado $x(t) = \ddot{y}_1 x_1(t) + \ddot{y}_2 x_2(t)$ para teste. O sinal de saída correspondente para este sistema é

$$\begin{aligned} y(t) &= 5x(t) + 3 \\ &= 5\ddot{y}_1 x_1(t) + 5\ddot{y}_2 x_2(t) + 3 \end{aligned}$$

O sinal de saída $y(t)$ não pode ser expresso na forma $y(t) = \ddot{y}_1 y_1(t) + \ddot{y}_2 y_2(t)$. O princípio da superposição não é válido neste caso. O sistema da parte (b) não é linear.

- c. Usando dois sinais de entrada $x_1(t)$ e $x_2(t)$ individualmente, os sinais de saída correspondentes produzidos por este sistema são $y_1(t) = 3[x_1(t)]^2$ e $y_2(t) = 3[x_2(t)]^2$ respectivamente. A aplicação da combinação linear $x(t) = \ddot{y}_1 x_1(t) + \ddot{y}_2 x_2(t)$ ao sistema produz o sinal de saída

$$\begin{aligned} y(t) &= 3[\ddot{y}_1 x_1(t) + \ddot{y}_2 x_2(t)]^2 [x_1 \\ &\quad t]^2 + 6\ddot{y}_1\ddot{y}_2 x_1(t)x_2(t) + 3\ddot{y}_2 [x_2(t)]^2 = 3\ddot{y}_2 \end{aligned}$$

É claro que este sistema também não é linear.

- d. Os sinais de teste $x_1(t)$ e $x_2(t)$ aplicados ao sistema produzem individualmente os sinais de saída $y_1(t) = \cos[x_1(t)]$ e $y_2(t) = \cos[x_2(t)]$ respectivamente. Sua combinação linear $x(t) = \ddot{y}_1 x_1(t) + \ddot{y}_2 x_2(t)$ produz o sinal de saída

$$y(t) = \cos[\ddot{y}_1 x_1(t) + \ddot{y}_2 x_2(t)]$$

Este sistema também não é linear.

Recursos de software: Veja MATLAB Exercício 2.1.

2.2.2 Invariância de tempo em sistemas de tempo contínuo

Outro conceito importante na análise de sistemas é a invariância no tempo. Um sistema é dito invariante no tempo se suas características de comportamento não mudam com o tempo. Considere um sistema de tempo contínuo com a relação entrada-saída

$$\text{Sys}\{x(t)\} = y(t)$$

Se o sinal de entrada aplicado a um sistema invariante no tempo for deslocado no tempo por \ddot{y} segundos, o único efeito desse atraso deve ser causar uma quantidade igual de deslocamento no tempo no sinal de saída, mas, caso contrário, deixar a forma do sinal de saída inalterado. Se for esse o caso, esperaríamos que a relação

$$\text{Sys}\{x(t-\ddot{y})\} = y(t-\ddot{y})$$

também ser válido.

Condição para invariância no tempo:

$$\text{Sys}\{x(t)\} = y(t) \text{ implica que } \text{Sys}\{x(t-\ddot{y})\} = y(t-\ddot{y}) \quad (2.10)$$

Essa relação é representada na Fig. 2.4.

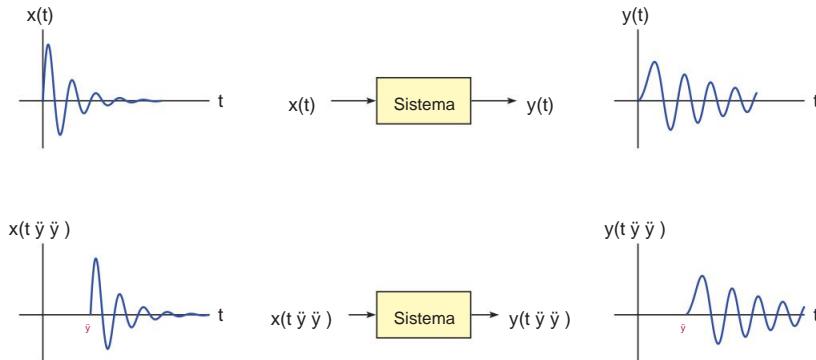


Figura 2.4 – Ilustração da invariância temporal.

Alternativamente, a relação descrita pela Eqn. (2.10) pode ser caracterizada pela equivalência das duas configurações de sistema mostradas na Fig. 2.5.

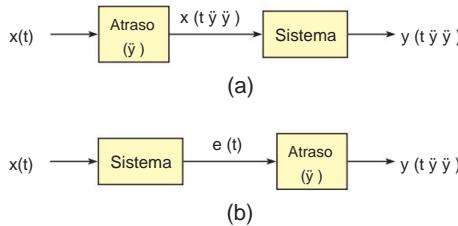


Figura 2.5 – Outra interpretação da invariância no tempo. As duas configurações mostradas são equivalentes para um sistema invariante no tempo.

Testar um sistema para invariância de tempo envolve verificar se a Eqn. (2.10) vale para qualquer sinal de entrada arbitrário. Este procedimento será demonstrado no Exemplo 2.2.

Exemplo 2.2: Testando a invariância temporal de sistemas de tempo

contínuo Três sistemas diferentes são descritos abaixo por meio de suas relações entrada-saída. Para cada um, determine se o sistema é invariante no tempo ou não:

- a. $y(t) = 5x(t)$
- b. $y(t) = 3 \cos(x(t))$
- c. $y(t) = 3 \cos(x(t))$

Solução:

- a. Para este sistema, se o sinal de entrada $x(t)$ é atrasado por \bar{y} segundos, o correspondente sinal de saída seria

$$\text{Sys}\{x(t \ddot{\wedge} \bar{y})\} = 5x(t \ddot{\wedge} \bar{y}) = y(t \ddot{\wedge} \bar{y})$$

e, portanto, o sistema é invariante no tempo.

- b. Seja o sinal de entrada $x(t \ddot{\wedge} \bar{y})$. A saída do sistema é

$$\text{Sys}\{x(t \ddot{\wedge} \bar{y})\} = 3 \cos(x(t \ddot{\wedge} \bar{y})) = y(t \ddot{\wedge} \bar{y})$$

Este sistema também é invariante no tempo.

c. Novamente usando o sinal de entrada atrasado $x(t - \frac{y}{\dot{y}})$ obtemos a saída

$$\text{Sys}\{x(t - \frac{y}{\dot{y}})\} = 3 \cos(t) x(t - \frac{y}{\dot{y}}) = y(t - \frac{y}{\dot{y}})$$

Nesse caso, o sistema não é invariante no tempo, pois o sinal de entrada deslocado no tempo leva a uma resposta que não é a mesma que uma versão deslocada no tempo do sinal de saída original.

Antes de deixarmos este exemplo, usaremos esta última parte do problema como uma oportunidade para abordar uma fonte comum de confusão. A questão pode ser levantada se o termo t no argumento da função cosseno deve ser substituído por $t - \frac{y}{\dot{y}}$ também. Em outras palavras, deveríamos ter escrito

$$\text{Sys}\{x(t - \frac{y}{\dot{y}})\} = ? 3 \cos(t - \frac{y}{\dot{y}}) x(t - \frac{y}{\dot{y}})$$

o que teria levado à conclusão de que o sistema em consideração poderia ser invariante no tempo? A resposta é não. O termo $\cos(t)$ faz parte da definição do sistema e não faz parte do sinal de entrada ou de saída. Portanto, não podemos incluí-lo no processo de sinais de entrada e saída de deslocamento de tempo.

Recursos de software: Veja MATLAB Exercício 2.2.

Exemplo 2.3: Usando a propriedade de

linearidade Um sistema de tempo contínuo com relação entrada-saída $y(t) = \text{Sys}\{x(t)\}$ é linear. Não se sabe se o sistema é invariante no tempo ou não. Assuma que as respostas do sistema a quatro sinais de entrada $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ e $x_4(t)$ mostrados na Fig. 2.6 são conhecidas.

Discuta como as informações fornecidas podem ser usadas para encontrar a resposta deste sistema ao sinal $x(t)$ mostrado na Fig. 2.7.

Solução: Olhando à primeira vista para os quatro sinais de entrada dados, percebemos que $x(t)$ é uma versão deslocada no tempo de $x_1(t)$, ou seja, $x(t) = x_1(t - 0,5)$. Como resultado, podemos ser tentados a concluir que $y(t) = y_1(t - 0,5)$, no entanto, essa seria a abordagem errada, pois o sistema não é necessariamente invariante no tempo. Não sabemos com certeza que o sinal de entrada $x_1(t - 0,5)$ produz a resposta $y_1(t - 0,5)$. Pela mesma razão, não podemos basear nossa solução na ideia de construir o sinal de entrada de $x_2(t)$ e $x_3(t)$ como

$$x(t) = x_2(t) + x_3(t - 1,5) \quad (2.11)$$

uma vez que envolve deslocamento no tempo do sinal $x_3(t)$, e não sabemos a resposta do sistema para $x_3(t - 1,5)$. Precisamos encontrar uma maneira de construir o sinal de entrada a partir dos sinais de entrada fornecidos, usando apenas operadores de escala e adição, mas sem usar qualquer deslocamento de tempo. Uma solução possível é escrever $x(t)$ como

$$x(t) = 0,6 x_2(t) + 0,8 x_4(t) \quad (2.12)$$

Como o sistema é linear, o sinal de saída é

$$y(t) = 0,6 y_2(t) + 0,8 y_4(t) \quad (2.13)$$

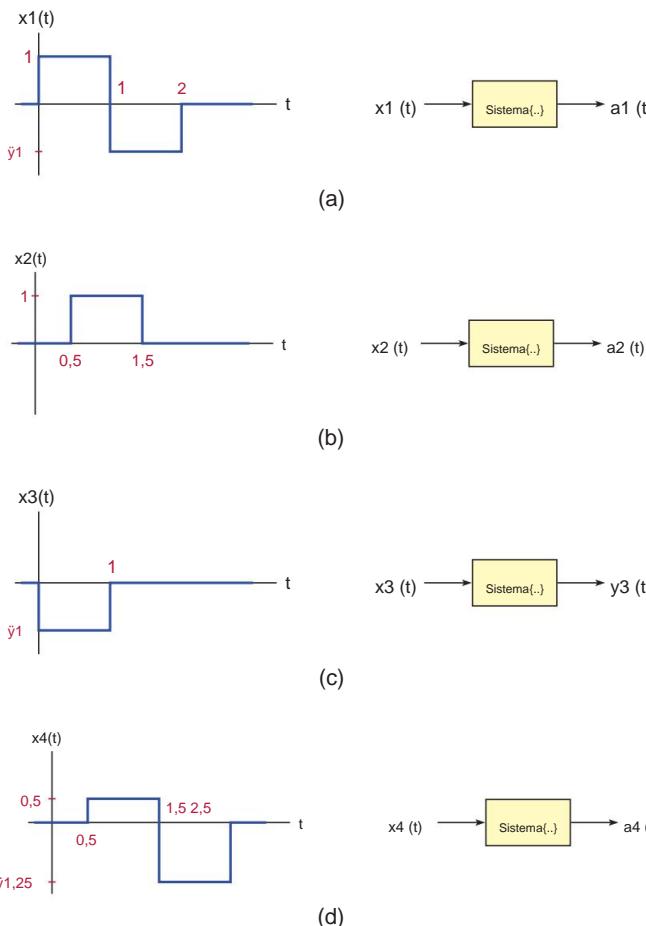


Figura 2.6 – Pares de entrada-saída para o Exemplo 2.3.

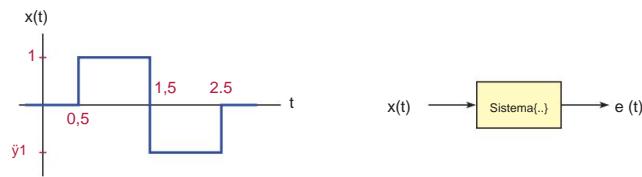


Figura 2.7 – Sinal de entrada para o Exemplo 2.3.

2.2.3 Sistemas CTLTI

No restante deste livro, trabalharemos com sistemas de tempo contínuo que são lineares e invariantes no tempo. Uma série de técnicas de projeto e análise no domínio do tempo e da frequência serão desenvolvidas para tais sistemas. Para simplificar, usaremos o acrônimo CTLTI para nos referirmos a sistemas lineares de tempo contínuo e sistemas invariantes no tempo.

2.3 Equações Diferenciais para Sistemas de Tempo Contínuo

Um método de representar a relação estabelecida por um sistema entre seus sinais de entrada e saída é uma equação diferencial que descreve aproximadamente a interação das grandezas físicas dentro do sistema. Tal equação diferencial normalmente envolve os sinais de entrada e saída, bem como várias derivadas de um ou de ambos. Segue um exemplo:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y(t) \dot{y} - 2x(t) = 0$$

Se precisarmos modelar um sistema mecânico com uma equação diferencial, relações físicas entre grandezas como massa, força, torque e aceleração podem ser usadas. No caso de um circuito elétrico, usamos as relações físicas existentes entre várias tensões e correntes no circuito, bem como as propriedades dos componentes do circuito que ligam essas tensões e correntes. Por exemplo, sabe-se que a tensão entre os condutores de um indutor é aproximadamente proporcional à taxa de variação da corrente que flui através do indutor. Usando as funções $v_L(t)$ e $i_L(t)$ como modelos matemáticos para a tensão do indutor e a corrente do indutor, respectivamente, o modelo matemático para um indutor ideal é

$$v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$$

Da mesma forma, sabe-se que a corrente que flui através de um capacitor é proporcional à taxa de variação da tensão entre seus terminais, levando ao modelo matemático de um capacitor ideal como

$$i_C(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt}$$

onde $v_C(t)$ e $i_C(t)$ são os modelos matemáticos para a tensão do capacitor e a corrente do capacitor, respectivamente.



Figura 2.8 – Modelos matemáticos para (a) indutor ideal, (b) capacitor ideal.

O indutor ideal e o capacitor ideal representam uma simplificação significativa das versões da vida real desses dispositivos com suas tensões físicas e quantidades de corrente. Os exemplos a seguir demonstrarão o processo de obtenção de uma equação diferencial a partir da descrição física de um sistema.

Exemplo 2.4: Equação diferencial para circuito RC

simples Considere o circuito RC simples de primeira ordem mostrado na Fig. 2.9. O sinal de entrada $x(t)$ é a tensão aplicada a uma combinação em série de um resistor e um capacitor, e o sinal de saída é a tensão $y(t)$ nos terminais do capacitor.

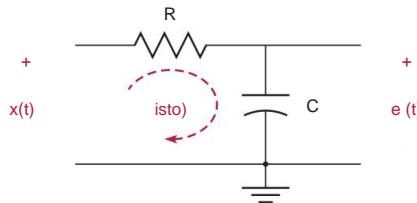


Figura 2.9 – Circuito RC para o Exemplo 2.4.

Embora o circuito RC seja um exemplo muito simples de sistema, ele será útil na discussão de conceitos fundamentais da teoria de sistemas lineares e será usado como base para vários exemplos a seguir. As técnicas que desenvolveremos usando o circuito RC simples da Fig. 2.9 como pano de fundo serão aplicáveis à solução de problemas mais complexos envolvendo toda uma série de outros sistemas lineares.

Sabe-se da teoria do circuito que tanto o resistor quanto o capacitor carregam o mesmo corrente $i(t)$. Além disso, a queda de tensão nos terminais do resistor é

$$v_R(t) = R i(t) \quad (2.14)$$

e a tensão do capacitor $y(t)$ é governada pela equação

$$i(t) = C \frac{dy(t)}{dt} \quad (2.15)$$

Usando Eq. (2.14) e (2.15) a relação entre os sinais de entrada e saída pode ser escrita como

$$RC \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t) dt \quad (2.16)$$

Multiplicando ambos os lados da Eqn. (2.16) por $1/RC$, temos

$$\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{RC} y(t) = \frac{x(t)}{RC} \quad (2.17)$$

Eq. (2.17) descreve o comportamento do sistema por meio de sua relação entrada-saída.

Se $x(t)$ for especificado, $y(t)$ pode ser determinado resolvendo a Eqn. (2.17) usando métodos de solução analítica ou técnicas de aproximação numérica. A equação diferencial serve como uma descrição completa do sistema neste caso. Por exemplo, a resposta do sistema ao sinal de entrada senoidal $x(t) = \sin(2\pi f_0 t)$ pode ser encontrada resolvendo a equação diferencial

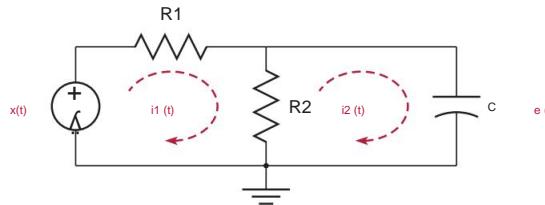
$$\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{RC} y(t) = \frac{\sin(2\pi f_0 t)}{RC}$$

Se estivermos interessados em descobrir como o mesmo sistema responde a um único pulso isolado com amplitude e duração unitárias, resolveríamos a seguinte equação diferencial:

$$\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{RC} y(t) = \frac{1}{RC} \delta(t)$$

Exemplo 2.5: Outro circuito RC

Encontre uma equação diferencial entre os sinais de entrada e saída do circuito mostrado na Fig. 2.10.

**Figura 2.10** – Circuito para o Exemplo 2.5.

Solução: Usando as duas correntes de malha $i_1(t)$ e $i_2(t)$ e aplicando a lei de tensão de Kirchhoff (KVL) obtemos as duas equações a seguir:

$$\ddot{y}x(t) + R_1 i_1(t) + R_2 [i_1(t) \ddot{y} i_2(t)] = 0 \quad (2.18)$$

$$R_2 [i_2(t) \ddot{y} i_1(t)] + y(t) = 0 \quad (2.19)$$

Também sabemos que a corrente que percorre o capacitor é proporcional à taxa de variação de sua tensão. Portanto

$$i_2(t) = C \frac{dy(t)}{dt} \quad (2.20)$$

Substituindo a Eq. (2.20) na Eqn. (2.19) e resolvendo para $i_1(t)$ resulta

$$i_1(t) = C \frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{R_2} e(t) \quad (2.21)$$

Finalmente, usando as Eqns. (2.20) e (2.21) na Eqn. (2.18) resulta em

$$\ddot{y}x(t) + R_1 C \frac{dy(t)}{dt} - \frac{R_1 + R_2}{R_2} y(t) = 0$$

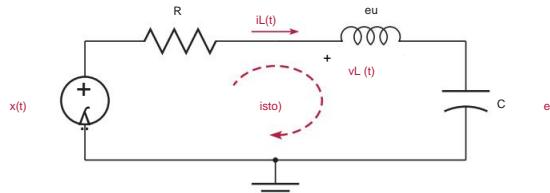
que pode ser rearranjada para produzir a equação diferencial que procuramos:

$$\frac{dy(t)}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} y(t) = x(t) \frac{1}{R_1 C} \quad (2.22)$$

A ordem de uma equação diferencial é determinada pela derivada de ordem mais alta que aparece nela. Nos Exemplos 2.4 e 2.5 obtivemos equações diferenciais de primeira ordem; portanto, os sistemas que representam também são de primeira ordem. No próximo exemplo trabalharemos com um circuito que produzirá uma equação diferencial de segunda ordem e, consequentemente, um sistema de segunda ordem.

Exemplo 2.6: Equação diferencial para circuito RLC

Encontre uma equação diferencial entre o sinal de entrada $x(t)$ e o sinal de saída $y(t)$ para servir como modelo matemático para o circuito RLC série mostrado na Fig. 2.11.

**Figura 2.11** – Circuito para o Exemplo 2.6.

Solução: Aplicando KVL ao redor do loop principal, obtemos

$$\ddot{y}x(t) + R i(t) + vL(t) + y(t) = 0 \quad (2.23)$$

com $x(t)$ e $y(t)$ representando os sinais de entrada e saída do sistema, respectivamente.

A tensão do indutor é proporcional à derivada temporal da corrente:

$$vL(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad (2.24)$$

Da mesma forma, percebendo que a corrente de loop $i(t)$ é proporcional à derivada temporal da tensão do capacitor $y(t)$, podemos escrever

$$i(t) = C \frac{dy(t)}{dt} \quad (2.25)$$

Diferenciando ambos os lados da Eqn. (2.25) em relação aos rendimentos temporais

$$\frac{di(t)}{dt} = C \frac{d^2y(t)}{dt^2} \quad (2.26)$$

e substituindo a Eq. (2.26) na Eqn. (2.24) obtemos

$$vL(t) = LC \frac{d^2y(t)}{dt^2} \quad (2.27)$$

Finalmente, substituindo as Eqns. (2.25) e (2.27) na Eqn. (2.23) leva à equação diferencial para o circuito RLC:

$$\ddot{y}x(t) + RC \frac{dy(t)}{dt} + LC \frac{d^2y(t)}{dt^2} + y(t) = 0$$

Reorganizando os termos, temos

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{1}{LC} y(t) + \frac{1}{RC} \frac{dy(t)}{dt} + x(t) = 0 \quad (2.28)$$

Assim, o circuito RLC da Fig. 2.11 leva a uma equação diferencial de segunda ordem.

2.4 Equações Diferenciais Ordinárias de Coeficiente Constante

Na Seção 2.2 discutimos as propriedades de uma classe de sistemas conhecidos como lineares e invariantes no tempo. As suposições de linearidade e invariância no tempo nos permitem desenvolver um conjunto robusto de métodos e técnicas para analisar e projetar sistemas. Veremos em partes posteriores deste texto que, ao limitar nosso foco a sistemas que são lineares e invariantes no tempo (para os quais usamos o acrônimo CTLTI), poderemos usar a operação de convolução e o conceito de função do sistema para o cálculo do sinal de saída.

Nos Exemplos 2.4, 2.5 e 2.6, exploramos métodos para encontrar equações diferenciais para vários circuitos elétricos. Em geral, os sistemas CTLTI podem ser modelados com equações diferenciais ordinárias que possuem coeficientes constantes. Uma equação diferencial ordinária é aquela que não contém derivadas parciais. A equação diferencial que representa uma

2.4. Equações Diferenciais Ordinárias de Coeficiente Constante

O sistema CTLTI contém o sinal de entrada $x(t)$, o sinal de saída $y(t)$, bem como as derivadas de tempo simples dos dois, a saber

$$\frac{dky(t)}{dt^k}, \quad k = 0, \dots, N$$

e

$$\frac{dkx(t)}{dt^k}, \quad k = 0, \dots, M$$

Uma equação diferencial geral de coeficiente constante representando um sistema CTLTI é, portanto, na forma

$$\text{um } \frac{dN}{dt} y(t) \frac{dN-1}{dt} y(t) + a_0 y(t) = +a_N y(t) + \dots + \frac{a_1}{dt^N} dt^N y(t) dt$$

$$\frac{dM}{dt} x(t) \frac{dM-1}{dt} x(t) \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t) \frac{bM}{dt^M} + \frac{bM-1}{dt^M-1} + \dots + b_1 dt \quad (2.29)$$

ou pode ser expresso na forma de soma fechada.

Equação diferencial ordinária de coeficiente constante:

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{dky(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{dkx(t)}{dt^k} \quad (2.30)$$

A ordem da equação diferencial (e, portanto, a ordem do sistema) é o maior de N e M . Como exemplo, a equação diferencial dada por Eqn. (2.17) para o circuito da Fig. 2.9 ajusta-se à forma padrão da Eqn. (2.30) com $N = 1$, $M = 0$, $a_1 = 1$, $a_0 = 1/RC$ e $b_0 = 1/RC$. Da mesma forma, a equação diferencial dada pela Eqn. (2.28) para o circuito da Fig. 2.11 também está de acordo com o formato padrão da Eqn. (2.30) com $N = 2$, $M = 0$, $a_2 = 1$, $a_1 = R/L$, $a_0 = 1/LC$ e $b_0 = 1/LC$.

Em geral, uma equação diferencial ordinária de coeficiente constante na forma da Eqn. (2.30) tem uma família de soluções. Para encontrar uma solução única para $y(t)$, os valores iniciais do sinal de saída e suas primeiras $N - 1$ derivadas precisam ser especificados em um instante de tempo $t = t_0$. Nós precisamos saber

$$y(t_0), \quad \left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=t_0}, \dots, \quad \left. \frac{dN-1}{dt} y(t) \right|_{t=t_0}$$

para encontrar a solução para $t > t_0$.

Exemplo 2.7: Verificando a linearidade e a invariância temporal de uma equação

diferencial Determine se a equação diferencial de coeficiente constante de primeira ordem

$$\frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_0 x(t) dt \quad (2.31)$$

representa um sistema CTLTI.

Solução: Para verificar a linearidade do sistema descrito pela equação diferencial de primeira ordem da Eqn. (2.31) assumiremos que dois sinais de entrada $x_1(t)$ e $x_2(t)$ produzem o

respostas $y_1(t)$ e $y_2(t)$ respectivamente. Os pares de entrada-saída devem satisfazer a equação diferencial. Portanto nós temos

$$\frac{dy_1(t)}{dt} + a_0 y_1(t) = b_0 x_1(t) \quad (2.32)$$

e

$$\frac{dy_2(t)}{dt} + a_0 y_2(t) = b_0 x_2(t) \quad (2.33)$$

Agora vamos construir um novo sinal de entrada como uma combinação linear de $x_1(t)$ e $x_2(t)$ na forma

$$x_3(t) = \ddot{y}_1 x_1(t) + \ddot{y}_2 x_2(t) \quad (2.34)$$

onde \ddot{y}_1 e \ddot{y}_2 são duas constantes arbitrárias. Se o sistema em consideração for linear, então com $x_3(t)$ como sinal de entrada, a solução da equação diferencial deve ser

$$y_3(t) = \ddot{y}_1 y_1(t) + \ddot{y}_2 y_2(t) \quad (2.35)$$

Será que $y(t) = y_3(t)$ satisfaz a equação diferencial quando a entrada é igual a $x(t) = x_3(t)$?

Usando $y_3(t)$ na equação diferencial obtemos

$$\frac{dy_3(t)}{dt} + a_0 y_3(t) = [\ddot{y}_1 y_1(t) + \ddot{y}_2 y_2(t)] + a_0 [\ddot{y}_1 y_1(t) + \ddot{y}_2 y_2(t)] dt \quad (2.36)$$

Reorganizando os termos do lado direito da Eqn. (2.36) temos

$$\frac{dy_3(t)}{dt} + a_0 y_3(t) = \ddot{y}_1 dt + \frac{dy_1(t)}{dt} + a_0 y_1(t) + \ddot{y}_2 dt + \frac{dy_2(t)}{dt} + a_0 y_2(t) \quad (2.37)$$

e substituindo as Eqs. (2.32) e (2.33) na Eqn. (2.37) resulta em

$$\begin{aligned} \frac{dy_3(t)}{dt} + a_0 y_3(t) &= \ddot{y}_1 [b_0 x_1(t)] + \ddot{y}_2 [b_0 x_2(t)] dt \\ &= b_0 [\ddot{y}_1 x_1(t) + \ddot{y}_2 x_2(t)] \\ &= b_0 x_3(t) \end{aligned} \quad (2.38)$$

Os sinais $x_3(t)$ e $y_3(t)$ como um par satisfazem a equação diferencial. Como resultado, podemos ser tentados a concluir que o sistema correspondente é linear, no entanto, faremos uma abordagem cautelosa e investigaremos um pouco mais: Comecemos reconhecendo que a equação diferencial que estamos considerando está na mesma forma que a uma obtida no Exemplo 2.4 para o circuito RC simples. De fato, seria idêntico a ele com $a_0 = b_0 = 1/RC$. No circuito RC simples, o sinal de saída é a tensão nos terminais do capacitor.

O que aconteceria se o capacitor fosse inicialmente carregado com V_0 volts? Será que a Eq. (2.35) ainda é válido? Vamos escrever a Eq. (2.35) no tempo $t = t_0$:

$$y_3(t_0) = \ddot{y}_1 y_1(t_0) + \ddot{y}_2 y_2(t_0) \quad (2.39)$$

Por outro lado, por causa da carga inicial do capacitor, qualquer solução encontrada deve começar com o mesmo valor inicial $y(t_0) = V_0$ e continuar a partir desse ponto. Nós devemos ter

$$y_1(t_0) = V_0, y_2(t_0) = V_0, y_3(t_0) = V_0$$

É claro que a Eq. (2.39) só pode ser satisfeita se $V_0 = 0$, ou seja, se o capacitor não tiver carga inicial. Portanto, a equação diferencial na Eqn. (2.31) representa um sistema CTLTI se e somente se o valor inicial do sinal de saída for igual a zero.

2.4. Equações Diferenciais Ordinárias de Coeficiente Constante

Outro argumento para nos convencermos de que um sistema com condições iniciais diferentes de zero não pode ser linear é o seguinte: Com base na segunda condição de linearidade dada pela Eqn. (2.6), um sinal de entrada zero deve produzir um sinal de saída zero (basta definir $\ddot{y}_1 = 0$). Um sistema com um estado inicial diferente de zero $y(t_0) = V_0$ produz um sinal de saída diferente de zero mesmo se o sinal de entrada for zero e, portanto, não pode ser linear.

Em seguida, precisamos verificar o sistema descrito pela equação diferencial na Eqn. (2.31) para invariância no tempo. Se substituirmos a variável de tempo t por $(t - \ddot{y})$, obtemos

$$\frac{dy(t - \ddot{y})}{dt} + a_0 y(t - \ddot{y}) = b_0 x(t - \ddot{y}) dt$$

Atrasar o sinal de entrada em \ddot{y} faz com que o sinal de saída também seja atrasado em \ddot{y} . Portanto, o sistema é invariante no tempo.

No Exemplo 2.7 verificamos que a equação diferencial de coeficiente constante de primeira ordem corresponde a um sistema CTLTI desde que o sistema esteja inicialmente relaxado. Também é uma tarefa direta provar que a equação diferencial geral de coeficiente constante dada pela Eqn. (2.30) corresponde a um sistema CTLTI se todas as condições iniciais forem iguais a zero.

Assumindo que dois sinais de entrada $x_1(t)$ e $x_2(t)$ produzem os sinais de saída $y_1(t)$ e $y_2(t)$ respectivamente, verificaremos se o sinal de entrada $x_3(t) = \ddot{y}_1 x_1(t) + \ddot{y}_2 x_2(t)$ leva ao sinal de saída $y_3(t) = \ddot{y}_1 y_1(t) + \ddot{y}_2 y_2(t)$. Através da diferenciação repetida, pode-se mostrar que

$$\begin{aligned} \frac{dkx_3(t)}{dtk} &= \frac{dk}{dtk} (\ddot{y}_1 x_1(t) + \ddot{y}_2 x_2(t)) dtk \\ &= \ddot{y}_1 \frac{dkx_1(t)}{dtk} + \ddot{y}_2 \frac{dkx_2(t)}{dtk} \end{aligned} \quad (2.40)$$

para $k = 0, \dots, M$, e similarmente,

$$\begin{aligned} \frac{dky_3(t)}{dtk} &= \frac{dk}{dtk} (\ddot{y}_1 y_1(t) + \ddot{y}_2 y_2(t)) \\ &= \ddot{y}_1 \frac{dky_1(t)}{dtk} + \ddot{y}_2 \frac{dky_2(t)}{dtk} \end{aligned} \quad (2.41)$$

para $k = 0, \dots, N$. Substituindo a Eq. (2.41) para o lado esquerdo da Eqn. (2.30) rende

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^N \ddot{y}_1 \frac{dky_1(t)}{dtk} + \ddot{y}_2 \frac{dky_2(t)}{dtk} &= \sum_{k=0}^N \ddot{y}_1 \frac{dkx_1(t)}{dtk} + \ddot{y}_2 \frac{dkx_2(t)}{dtk} \\ &= \ddot{y}_1 \sum_{k=0}^N \frac{dkx_1(t)}{dtk} + \ddot{y}_2 \sum_{k=0}^N \frac{dkx_2(t)}{dtk} \end{aligned} \quad (2.42)$$

Como assumimos que $[x_1(t), y_1(t)]$ e $[x_2(t), y_2(t)]$ são pares de soluções e, portanto, satisfazem a equação diferencial, temos

$$\sum_{k=0}^N \ddot{y}_1 \frac{dky_1(t)}{dtk} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{dkx_1(t)}{dtk} \quad (2.43)$$

e

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{dky_2(t)}{dt_k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{dkx_2(t)}{dt_k} \quad (2.44)$$

Usando Eq. (2.43) e (2.44) na Eqn. (2.42) pode ser mostrado que

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^N a_k \frac{dky_3(t)}{dt_k} &= \sum_{k=0}^M b_k \ddot{y}_1 \frac{dkx_1(t)}{dt_k} + \ddot{y}_2 \frac{dkx_2(t)}{dt_k} \\ &= \sum_{k=0}^M b_k \frac{dkx_3(t)}{dt_k} \end{aligned} \quad (2.45)$$

onde, na última etapa, utilizamos o resultado encontrado na Eqn. (2.40). Como condição adicional, a Eqn. (2.41) também deve ser satisfeita em $t = t_0$ para todas as derivadas na equação diferencial, exigindo

$$\left. \frac{dky(t)}{dt_k} \right|_{t=t_0} = 0 \quad (2.46)$$

para $k = 0, \dots, N - 1$.

A equação diferencial

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{dky(t)}{dt_k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{dkx(t)}{dt_k}$$

representa um sistema linear desde que todas as condições iniciais sejam iguais a zero:

$$y(t_0) = 0, \quad \left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=t_0} = 0, \dots, \quad \left. \frac{d^{N-1}y(t)}{dt^{N-1}} \right|_{t=t_0} = 0$$

A invariância temporal do sistema correspondente também pode ser provada facilmente substituindo T por $t - \ddot{y}$ na Eqn. (2.30):

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{dky(t - \ddot{y})}{dt_k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{dkx(t - \ddot{y})}{dt_k} \quad (2.47)$$

2.5 Resolvendo Equações Diferenciais

Um método para determinar o sinal de saída de um sistema em resposta a um sinal de entrada especificado é resolver a equação diferencial correspondente. Em partes posteriores deste texto, estudaremos métodos alternativos para realizar a mesma tarefa. O uso desses métodos alternativos também será vinculado à solução da equação diferencial para fornecer mais informações sobre o comportamento do sistema linear.

Nesta seção, apresentaremos técnicas para resolver equações diferenciais de coeficiente constante linear. Dois métodos distintos serão apresentados; uma que só pode ser usada com uma equação diferencial de primeira ordem e outra que pode ser usada com qualquer equação diferencial de ordem na forma padrão da Eqn. (2.30).

2.5.1 Solução da equação diferencial de primeira ordem

A equação diferencial de primeira ordem

$$\frac{dy(t)}{dt} + \ddot{y}y(t) = r(t) dt \quad (2.48)$$

representa um sistema CTLTI de primeira ordem. Esta poderia ser a equação diferencial do circuito RC considerado no Exemplo 2.4 com $\ddot{y} = 1/RC$ e $r(t) = (1/RC) x(t)$. Nesta seção formularemos a solução geral desta equação diferencial para um valor inicial especificado $y(t_0)$.

Seja a função $f(t)$ definida como

$$f(t) = e^{\ddot{y}t} y(t) \quad (2.49)$$

Diferenciando $f(t)$ em relação aos rendimentos de tempo

$$\begin{aligned} \frac{df(t)}{dt} &= e^{\ddot{y}t} \frac{dy(t)}{dt} + \ddot{y}e^{\ddot{y}t} y(t) \\ &= \ddot{y}e^{\ddot{y}t} + \ddot{y}y(t) dt \end{aligned} \quad (2.50)$$

A expressão entre colchetes é reconhecida como $r(t)$ da Eqn. (2.48), portanto

$$\frac{df(t)}{dt} = \ddot{y}e^{\ddot{y}t} r(t) dt \quad (2.51)$$

Integrando ambos os lados da Eqn. (2.51) ao longo do tempo, obtemos $f(t)$ como

$$f(t) = f(t_0) + \int_{t_0}^t e^{\ddot{y}\ddot{y}r(\ddot{y})d\ddot{y}} \quad (2.52)$$

Usando a Eq. (2.49)

$$f(t_0) = e^{\ddot{y}t_0} y(t_0) \quad (2.53)$$

a solução para $f(t)$ torna-se

$$f(t) = e^{\ddot{y}t_0} y(t_0) + \int_{t_0}^t e^{\ddot{y}\ddot{y}r(\ddot{y})d\ddot{y}} \quad (2.54)$$

A solução para $y(t)$ é encontrada por meio do uso desse resultado na Eqn. (2.49):

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{-\ddot{y}t} f(t) \\ &= e^{-\ddot{y}(t-t_0)} y(t_0) + e^{-\ddot{y}(t-t_0)} \int_{t_0}^t e^{\ddot{y}\ddot{y}r(\ddot{y})d\ddot{y}} \\ &= e^{-\ddot{y}(t-t_0)} y(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-\ddot{y}(t-t_0)} e^{\ddot{y}\ddot{y}r(\ddot{y})d\ddot{y}} \end{aligned} \quad (2.55)$$

Assim, a Eq. (2.55) representa a solução completa da equação diferencial de primeira ordem na Eqn. (2.48), e é prático de usar desde que a função do lado direito $r(t)$ permita uma avaliação fácil da integral.

A equação diferencial

$$\frac{dy(t)}{dt} + \ddot{y}y(t) = r(t), \quad y(t_0) : \text{especificado} \quad (2.56)$$

é resolvido como

$$y(t) = e^{\int_{t_0}^t r(\tau) d\tau} y(t_0) \quad (2.57)$$

Podemos ser tentados a questionar o significado da solução encontrada na Eqn. (2.55) especialmente porque só é aplicável a uma equação diferencial de primeira ordem e, portanto, a um sistema de primeira ordem. O resultado que encontramos será muito útil para trabalhar com sistemas de ordem superior, no entanto, quando estudarmos a descrição do espaço de estado de um sistema CTLTI no Capítulo 9.

Exemplo 2.8: Resposta em degrau unitário do circuito RC

simples Considere o circuito RC simples que foi introduzido pela primeira vez no Exemplo 2.4. Sejam os valores dos elementos $R = 1 \Omega$ e $C = 1/4 F$. Suponha que o valor inicial da saída no tempo $t = 0$ seja $y(0) = 0$. Determine a resposta do sistema a um sinal de entrada na forma de uma função degrau unitário, ou seja, $x(t) = u(t)$.

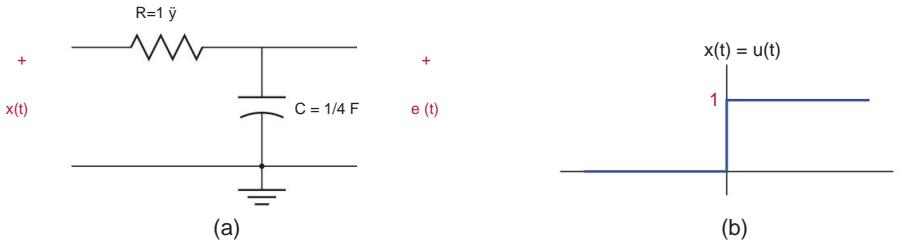


Figura 2.12 – (a) O circuito do Exemplo 2.8, (b) o sinal de entrada $x(t)$.

Solução: A equação diferencial do circuito foi obtida na Eqn. (2.17) do Exemplo 2.4.

Usando o sinal de entrada de passo unitário especificado, ele pode ser escrito como

$$\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{RC} y(t) = u(t) \frac{1}{RC}$$

Aplicando a Eq. (2.57) com $\ddot{y} = 1/RC$, $t_0 = 0$ e $r(t) = (1/RC) u(t)$ temos

$$y(t) = e^{\int_0^t (1/RC) u(\tau) d\tau} y(0) = e^{t/RC} y(0) \quad (2.58)$$

para $t \geq 0$. De forma compacta, o resultado na Eqn. (2.58) é

$$y(t) = e^{t/RC} u(t) \quad (2.59)$$

Se agora substituirmos os valores especificados de R e C na Eqn. (2.59) obtemos o sinal de saída

$$y(t) = e^{t/4} u(t)$$

que é representado graficamente na Fig. 2.13.

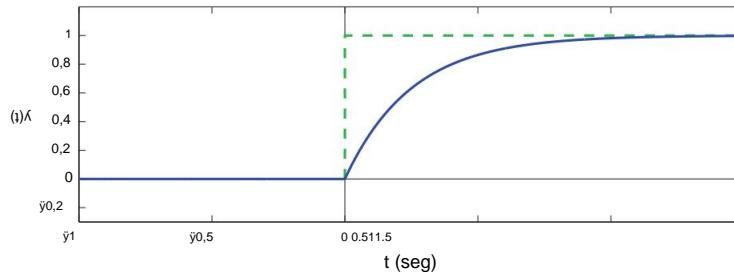


Figura 2.13 – O sinal de saída $y(t)$ para o Exemplo 2.8.

Recursos de software:
ex 2.8.m

Exemplo 2.9: Resposta de pulso do circuito RC simples

Determine a resposta do circuito RC do Exemplo 2.4 a um sinal de pulso retangular

$$x(t) = A \delta(t/w) \quad (2.60)$$

mostrado na Fig. 2.14. Os valores dos elementos para o circuito são $R = 1 \Omega$ e $C = 1/4 \text{ F}$. O valor inicial do sinal de saída no tempo $t = \pi w/2$ é $y(\pi w/2) = 0$.

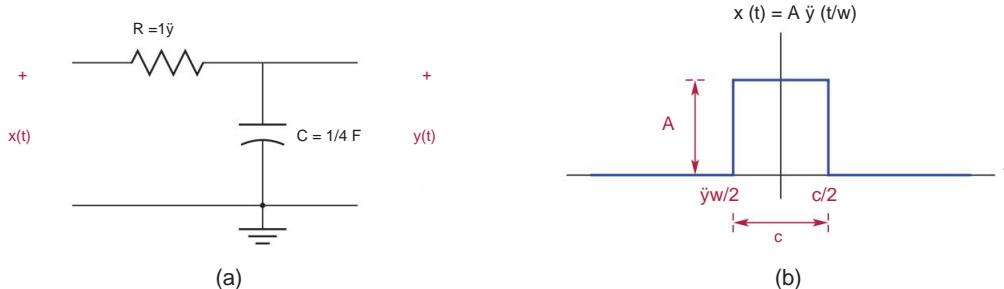


Figura 2.14 – (a) O circuito do Exemplo 2.9, (b) o sinal de entrada $x(t)$.

Solução: A equação diferencial do circuito é obtida da Eqn. (2.17) com a substituição dos valores dos elementos especificados e o sinal de entrada:

$$\frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = 4A \delta(t/w) dt$$

A solução está na forma da Eqn. (2.57) com $\tilde{\gamma} = 4$, $y(\pi w/2) = 0$ e $r(t) = 4A \delta(t/w)$:

$$y(t) = \hat{y} \int_{\pi w/2}^t e^{-4(t-\tilde{\gamma})} 4A \delta(\tilde{\gamma}/w) d\tilde{\gamma} \quad (2.61)$$

A integral neste resultado pode ser calculada usando dois intervalos possíveis da variável t .

Caso 1: $\tilde{\gamma} < t < \frac{c}{2}$

Neste intervalo de t temos $\dot{y}(t/w) = 1$, e a resposta na Eqn. (2.61) simplifica para

$$y(t)=4A \begin{cases} e^{-4(t-\frac{c}{2})} & t < \frac{c}{2} \\ e^{-4(t-\frac{c}{2})} & t \geq \frac{c}{2} \end{cases}$$

que pode ser avaliado como

$$y(t)=4A e^{-4t} \quad t \geq \frac{c}{2} \quad (2.62)$$

Caso 2: $t > \frac{c}{2}$

Neste caso temos $\dot{y}(t/w) = 1$ para $\dot{y}w/2 \leq t \leq w/2$ e $\dot{y}(t/w) = 0$ para $t > w/2$.

O resultado na Eq. (2.61) simplifica para

$$y(t)=4A \begin{cases} e^{-4(t-\frac{c}{2})} & \dot{y}w/2 \leq t \leq w/2 \\ 0 & t > w/2 \end{cases}$$

que leva à resposta

$$y(t)=4A e^{-4t} \begin{cases} e^{-4(\dot{y}w/2-t)} & \dot{y}w/2 \leq t \leq w/2 \\ 0 & t > w/2 \end{cases} \quad (2.63)$$

A resposta completa do sistema pode ser expressa combinando os resultados encontrados nas Eqns. (2.62) e (2.63) como

$$y(t)=\begin{cases} 0 & t < \dot{y}w/2 \\ A e^{-4t} e^{-4(\dot{y}w/2-t)} & \dot{y}w/2 \leq t \leq w/2 \\ 0 & t > w/2 \end{cases}, \quad t > \frac{c}{2} \quad (2.64)$$

O sinal $y(t)$ é mostrado na Fig. 2.15 para $A = 1$ e $w = 1$.

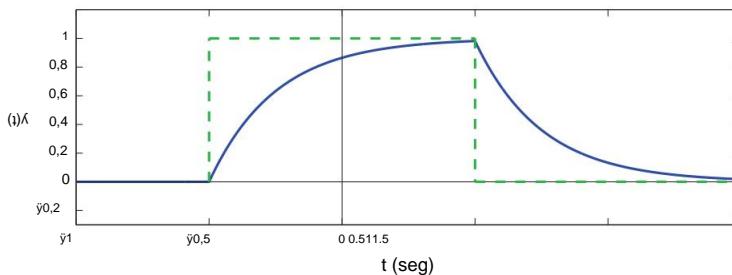


Figura 2.15 – O sinal de saída $y(t)$ para o Exemplo 2.9.

Recursos de software:

ex_2_9.m

Exemplo 2.10: Resposta de pulso do circuito RC simples revisitado

Refaça o problema do Exemplo 2.9 fazendo uso da resposta em degrau unitário encontrada no Exemplo 2.8 juntamente com as propriedades de linearidade e invariância temporal do circuito RC.

Solução: O sinal de pulso usado como entrada no Exemplo 2.9 pode ser expresso como a diferença de dois sinais de degrau unitário na forma, ou seja,

$$x(t) = A u(t/w) = A ut + \frac{c}{2} - \frac{c}{2} u(t - w)$$

Isso é ilustrado na Fig. 2.16.

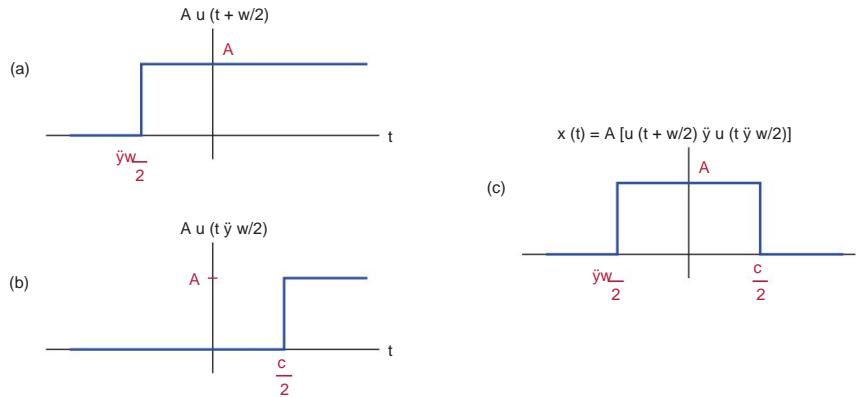


Figura 2.16 – Construindo um pulso a partir de funções degrau deslocadas no tempo.

Como o sistema em consideração é linear, a resposta para $x(t)$ é

$$\begin{aligned} \text{Sys}\{x(t)\} &= \text{Sys} A ut + \frac{c}{2} - \frac{c}{2} \text{ Sys Aut } \\ &= A \text{ Sys ut } + \frac{c}{2} - \frac{c}{2} \text{ Um sistema } \end{aligned} \quad (2.65)$$

Além disso, como o sistema é invariante no tempo, suas respostas a funções degrau unitário deslocadas no tempo podem ser encontradas a partir da resposta em degrau unitário calculada no Exemplo 2.8. Foi determinado que

$$\text{Sys}\{u(t)\} = 1 - e^{-4t} u(t)$$

Usando a propriedade de invariância temporal do sistema, temos

$$\text{Sistema } + \frac{c}{2} = 1 - e^{-4(t+w/2)} u(t) + \frac{c}{2} \quad (2.66)$$

e

$$\text{Sistema } \frac{c}{2} = 1 - e^{-4(t-w/2)} u(t) \frac{c}{2} \quad (2.67)$$

Substituindo as Eq. (2.66) e (2.67) na Eqn. (2.65) encontramos a resposta de pulso do RC circuito como

$$\text{Sys}\{x(t)\} = A 1 - e^{-4(t+w/2)} u(t) + \frac{c}{2} - \frac{c}{2} 1 - e^{-4(t-w/2)} u(t) \frac{c}{2} \quad (2.68)$$

o que está de acordo com o resultado encontrado no Exemplo 2.9. As etapas usadas na solução são ilustradas na Fig. 2.17.

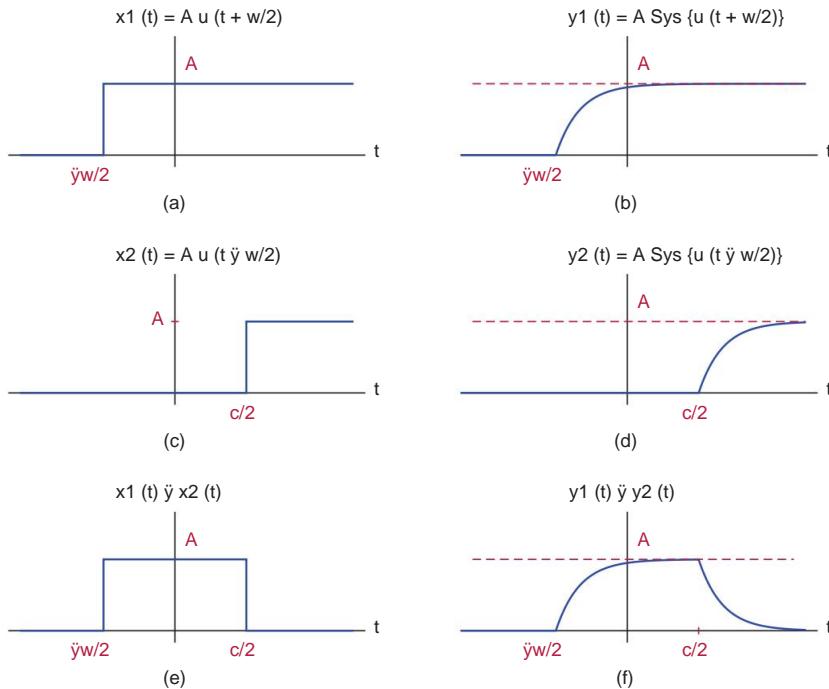


Figura 2.17 – Os passos empregados na solução do Exemplo 2.10.

Recursos de software:

`ex_2_10.m`

Demonstração interativa: `rc_demo1.m`

A demonstração “`rc_demo1.m`” é baseada no Exemplo 2.10, Eqn. (2.65) e Fig. 2.17. A resposta de pulso do circuito RC é obtida a partir de sua resposta ao degrau usando superposição. O pulso de entrada aplicado ao circuito RC é expresso como a diferença de dois sinais de passo, e o sinal de saída é calculado como a diferença das respostas individuais às funções de passo.

Os parâmetros do circuito R e C, bem como a largura de pulso w , podem ser variados usando controles deslizantes.

Recursos de software:

`rc_demo1.m`

Recursos de software: Ver MATLAB Exercício 2.3.

2.5.2 Solução da equação diferencial geral

O método de solução discutido na seção anterior aplica-se apenas a uma equação diferencial de primeira ordem, embora, no Capítulo 9, discutiremos a extensão desse método para equações diferenciais de ordem superior por meio do uso de variáveis de estado. Em nossos esforços para resolver a equação diferencial geral de coeficiente constante na forma dada pela Eqn. (2.30) consideraremos dois componentes separados do sinal de saída $y(t)$ como segue:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) \quad (2.69)$$

O primeiro termo, $y_h(t)$, é a solução da equação diferencial homogênea encontrada ignorando o sinal de entrada, ou seja, definindo $x(t)$ e todas as suas derivadas iguais a zero na Eqn. (2.30) para todos os valores de t :

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = 0 \quad (2.70)$$

Como função matemática, $y_h(t)$ é a solução homogênea da equação diferencial.

Da perspectiva do sinal de saída de um sistema, $y_h(t)$ é chamada de resposta natural do sistema.

Como um dos componentes do sinal de saída, a solução homogênea da equação diferencial ou, de forma equivalente, a resposta natural do sistema ao qual corresponde, $y_h(t)$ depende da estrutura do sistema, bem como do estado inicial de o sistema. Não depende, entretanto, do sinal de entrada aplicado ao sistema. É a parte da resposta que é produzida pelo sistema devido a uma liberação da energia armazenada dentro do sistema. Lembre-se dos circuitos usados nos Exemplos 2.4 a 2.6.

Alguns elementos do circuito, como capacitores e indutores, são capazes de armazenar energia que pode ser liberada posteriormente em determinadas circunstâncias. Se, em algum momento, um capacitor ou um indutor com energia armazenada tiver a chance de liberar essa energia, o circuito poderá produzir uma resposta por meio dessa liberação, mesmo quando não houver nenhum sinal de entrada externo sendo aplicado.

Quando discutirmos a propriedade de estabilidade dos sistemas CTLTI nas seções posteriores deste capítulo, veremos que, para um sistema estável, $y_h(t)$ tende a desaparecer gradualmente com o tempo. Por causa disso, também é chamada de resposta transitória do sistema.

Em contraste, o segundo termo $y_p(t)$ na Eqn. (2.69) é parte da solução devido ao sinal de entrada $x(t)$ ser aplicado ao sistema. É referido como a solução particular da equação diferencial. Depende do sinal de entrada $x(t)$ e da estrutura interna do sistema, mas não depende do estado inicial do sistema. É a parte da resposta que permanece ativa depois que a solução homogênea $y_h(t)$ torna-se gradualmente menor e desaparece. Quando estudarmos o conceito de função do sistema em capítulos posteriores deste texto, vincularemos a solução particular da equação diferencial à resposta de estado estacionário do sistema, ou seja, a resposta a um sinal de entrada que foi aplicado por tempo suficiente tempo para que os termos transitórios desapareçam.

2.5.3 Encontrando a resposta natural de um sistema de tempo contínuo

O cálculo da resposta natural de um sistema CTLTI requer a solução da equação diferencial homogênea. Antes de abordarmos o problema de encontrar a solução homogênea para a equação diferencial geral de coeficiente constante, consideraremos o caso de primeira ordem.

A equação diferencial homogênea de primeira ordem está na forma

$$\frac{dy(t)}{dt} + \ddot{y} y(t) = 0 \quad (2.71)$$

onde \ddot{y} é qualquer constante arbitrária. A equação diferencial homogênea na Eqn. (2.71) tem muitas soluções possíveis. Para encontrar uma única solução entre muitas, também precisamos saber o valor inicial de $y(t)$ em algum instante $t = t_0$. Começaremos escrevendo a Eqn. (2.71) na forma alternativa

$$\frac{dy(t)}{dt} = \ddot{y} y(t) dt \quad (2.72)$$

É evidente da Eqn. (2.72) que a solução que buscamos é uma função $y(t)$ cuja derivada temporal é proporcional a si mesma. Uma função exponencial do tempo tem que

propriedade, para que possamos fazer um palpite para uma solução na forma

$$y(t) = c \text{ est} \quad (2.73)$$

Tentando este palpite¹ na equação diferencial homogênea, temos

$$\frac{d}{dt} c \text{ est} + \ddot{y} \text{ est} = 0 \quad (2.74)$$

que rende

$$s \text{ est} + \ddot{y} \text{ est} = 0 \quad (2.75)$$

Fatorando o termo comum $c \text{ est}$, a Eqn. (2.75) torna-se

$$c \text{ est} (s + \ddot{y}) = 0 \quad (2.76)$$

Existem duas maneiras de fazer o lado esquerdo da Eqn. (2.76) igual a zero:

1. Selecione $c \text{ est} = 0$
2. Selecione $(s + \ddot{y}) = 0$

A primeira escolha leva à solução trivial $y(t) = 0$, e obviamente não é muito útil.

Além disso, como solução, ela só é válida quando o valor inicial do sinal de saída for $y(0) = 0$, pois não podemos satisfazer nenhum outro valor inicial com esta solução. Portanto, devemos escolher o último e usar $s = -\ddot{y}$. Substituindo esse valor de s na Eqn. (2.73) temos

$$y(t) = c e^{-\ddot{y} t} \quad (2.77)$$

onde a constante c deve ser determinada com base no valor inicial desejado de $y(t)$ em $t = t_0$.

Exploraremos isso nos próximos dois exemplos.

Exemplo 2.11: Resposta natural do circuito RC simples

Considere novamente o circuito RC do Exemplo 2.4 mostrado na Fig. 2.18 com os valores dos elementos $R = 1 \Omega$ e $C = 1/4 \text{ F}$. Além disso, deixe os terminais de entrada do circuito serem conectados a uma bateria que fornece ao circuito uma tensão de entrada de 5 V até o instante de tempo $t = 0$.

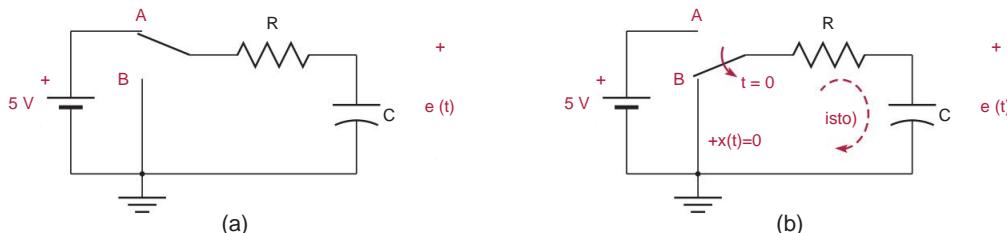


Figura 2.18 – Circuito RC para o Exemplo 2.11: (a) para $t < 0$, (b) para $t \geq 0$.

¹ Outra forma de justificar o palpite utilizado na Eqn. (2.73) é escrever a Eqn. (2.71) na forma

$$\frac{dy}{y} = \ddot{y} dt$$

Integrando ambos os lados leva a

$$\hat{\int} \frac{dy}{y} = \hat{\int} \ddot{y} dt \Rightarrow \ln(y) = \ddot{y} t + K \Rightarrow y(t) = e^{K \ddot{y} t} = c e^{\ddot{y} t}$$

Supondo que a bateria tenha sido conectada ao circuito por um longo tempo antes de $t = 0$, a tensão do capacitor permaneceu em um valor de estado estacionário de 5 V. Deixe a chave ser movida da posição A para a posição B em $t = 0$, garantindo que $x(t) = 0$ para $t \leq 0$. O valor inicial da tensão do capacitor no tempo $t = 0$ é $y(0) = 5$ V. Encontre o sinal de saída em função do tempo.

Solução: Como $x(t) = 0$ para $t > 0$, o sinal de saída é $y(t) = y_h(t)$ e estamos tentando encontrar a solução homogênea. Substituindo os valores dos parâmetros especificados, a equação diferencial homogênea é encontrada como

$$\frac{dy(t)}{dt} + 4 \text{ anos}(t) = 0$$

Precisamos de $(s + 4) = 0$, e a solução homogênea correspondente está na forma

$$y_h(t) = c e^{-4t} = c e^{-4t}$$

para $t \geq 0$. A condição inicial $y_h(0) = 5$ deve ser satisfeita. Substituindo $t = 0$ na solução homogênea, obtemos

$$y_h(0) = c e^{-4(0)} = c = 5$$

Usando o valor encontrado para a constante c , a resposta natural do circuito é

$$y_h(t) = 5 e^{-4t}, \quad \text{para } t \geq 0$$

A resposta natural pode ser expressa de forma mais compacta através do uso da função degrau unitário:

$$y_h(t) = 5 e^{-4t} u(t) \quad (2.78)$$

Esta solução é mostrada na Fig. 2.19.

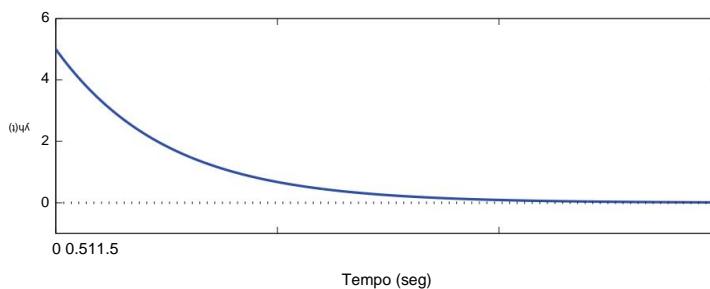


Figura 2.19 – A resposta natural do circuito do Exemplo 2.11.

Em seguida, vamos verificar esta solução contra a equação diferencial homogênea para verificar sua validade. A primeira derivada do sinal de saída é

$$\frac{dy_h(t)}{dt} = \frac{d}{dt} 5 e^{-4t} = -20 e^{-4t}$$

Usando $y_h(t)$ e $dy_h(t)/dt$ na equação diferencial homogênea, temos

$$\frac{dy_h(t)}{dt} + 4 y_h(t) = -20 e^{-4t} + 4 \cdot 5 e^{-4t} = 0$$

indicando que a solução encontrada é válida.

Recursos de software:

ex_2_11.m

Exemplo 2.12: Alteração da hora de início no Exemplo 2.11

Refaça o problema do Exemplo 2.11 com uma pequena alteração: O valor inicial do sinal de saída é especificado no instante de tempo $t = 0,5$ segundos em vez de $t = 0$, e seu valor é $y(0,5) = 10$. Fisicamente, isso corresponderia a usar uma bateria de 10 V em vez da bateria de 5 V mostrada na Fig. 2.18(a) e mover a chave da posição A para a posição B no instante de tempo $t = 0,5$ segundos em vez de $t = 0$. Essas diferenças são ilustradas na Fig. 2.20.

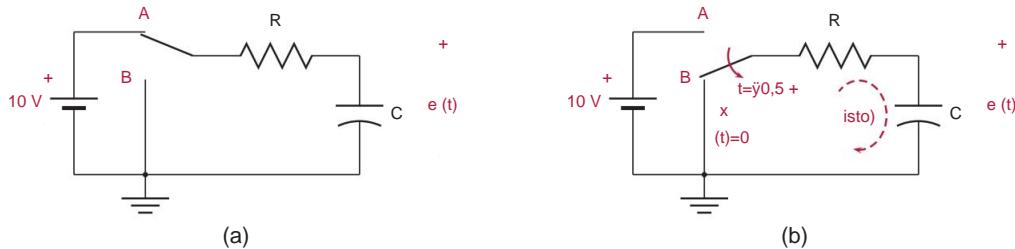


Figura 2.20 – Circuito RC para o Exemplo 2.12: (a) para $t < 0,5$, (b) para $t \geq 0,5$.

Solução: A forma geral da solução encontrada no Exemplo 2.11 ainda é válida, ou seja,

$$y_h(t) = c e^{-4t}$$

Para satisfazer $y(0,5) = 10$, precisamos

$$y_h(0,5) = c e^{-4(0,5)} = c e^{-2} = 10$$

e portanto

$$c = \frac{10}{e^{-2}} = 1,3534 e^2$$

A solução homogênea é

$$y_h(t) = 1,3534 e^{-4t}, \quad \text{para } t \geq 0,5$$

ou, usando a função degrau unitário

$$y_h(t) = 1,3534 e^{-4t} u(t + 0,5) \quad (2,79)$$

Se a condição inicial for especificada em um instante de tempo diferente de $t = 0$, então a solução que encontramos usando o procedimento descrito começa naquele instante de tempo, conforme mostrado na Fig. 2.21.

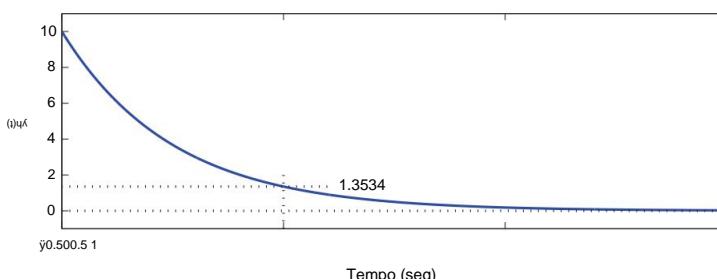


Figura 2.21 – A resposta natural do circuito do Exemplo 2.12.

Recursos de software:
ex 2 12.m

Agora estamos prontos para resolver a equação diferencial homogênea geral na forma

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = 0 \quad (2.80)$$

Se usarmos o mesmo palpite inicial

$$y(t) = c \text{ est} \quad (2.81)$$

para a solução, vários derivados de $y(t)$ serão

$$\frac{dy(t)}{dt} = s c \text{ est}, \quad \frac{d^2y(t)}{dt^2} = s^2 c \text{ est}, \quad \frac{d^3y(t)}{dt^3} = s^3 c \text{ est}, \dots$$

Através da diferenciação repetida, pode-se mostrar que

$$\frac{dky(t)}{dt^k} = s^k c \text{ est} \quad (2.82)$$

Precisamos determinar quais valores do parâmetro s levariam a soluções válidas para a equação diferencial homogênea. Substituindo a Eq. (2.82) na Eqn. (2.80) resulta em

$$\sum_{k=0}^N a_k s^k c \text{ est} = 0 \quad (2.83)$$

Como o termo $c \text{ est}$ é independente do índice de soma k , ele pode ser fatorado para produzir

$$c \text{ est} \sum_{k=0}^N a_k s^k = 0 \quad (2.84)$$

exigindo que uma das seguintes condições seja satisfeita para que $y(t) = c \text{ est}$ seja uma solução da equação diferencial:

1. $c \text{ est} = 0$

Isso leva à solução trivial $y(t) = 0$ para a equação homogênea e, portanto, não é muito interessante.

Além disso, como esta solução nos deixaria sem parâmetros ajustáveis, ela não pode satisfazer nenhuma condição inicial diferente de zero.

P

2. $\sum_{k=0}^N a_k s^k = 0$

a_k

Essa é a chamada equação característica do sistema. Valores de s que são as soluções da equação característica podem ser usados em funções exponenciais como soluções da equação diferencial homogênea.

A equação característica:

$$\sum_{k=0}^N a_k s^k = 0 \quad (2.85)$$

A equação característica é encontrada começando com a equação diferencial homogênea e substituindo a k-ésima derivada do sinal de saída $y(t)$ por s^k .

Para obter a equação característica, substitua:

$$\frac{dky(t)}{dt^k} \quad \ddot{y} s^k$$

Vamos escrever a equação característica na forma aberta:

$$a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_N s^N = 0 \quad (2.86)$$

O polinômio de ordem N no lado esquerdo da Eqn. (2.86) é chamado de polinômio característico e é obtido simplesmente substituindo cada derivada na equação diferencial homogênea pela potência correspondente de s. Sejam as raízes do polinômio característico s_1, s_2, \dots, s_N de modo que a Eqn. (2.86) pode ser escrita como

$$a_N (s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_N) = 0 \quad (2.87)$$

Usando qualquer uma das raízes do polinômio característico, podemos construir um sinal

$$y_k(t) = c_k e^{s_k t}, \quad k = 1, \dots, N \quad (2.88)$$

que satisfaça a equação diferencial homogênea. A solução geral da equação diferencial homogênea é obtida como uma combinação linear de todos os termos válidos na forma da Eqn. (2.88) como

$$y_h(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t} + \dots + c_N e^{s_N t} \quad (2.89)$$

Os coeficientes desconhecidos c_1, c_2, \dots, c_N são determinados a partir das condições iniciais. Os termos exponenciais $e^{s_k t}$ na solução homogênea dada pela Eqn. (2.89) são chamados de modos do sistema. Em capítulos posteriores deste texto veremos que as raízes s_k do polinômio característico do sistema serão idênticas aos pólos da função do sistema e aos autovalores da matriz de estados.

Exemplo 2.13: Conceito de constante

de tempo Vamos nos referir novamente ao circuito RC introduzido no Exemplo 2.4 e mostrado na Fig. 2.9. A equação diferencial que governa o comportamento do circuito foi encontrada na Eqn. (2.17). A equação característica do sistema é encontrada como

$$\frac{dy}{dt} + \frac{1}{RC} y = 0$$

Este é um sistema de primeira ordem, e seu único modo é $e^{-t/RC}$. Se o valor inicial do sinal de saída for $y(0) = V_0$, a solução homogênea da equação diferencial (ou a resposta natural do sistema) é

$$y_h(t) = V_0 e^{-t/RC} u(t) \quad (2.90)$$

Seja o parâmetro γ definido como $\gamma = 1/RC$, e a resposta natural pode ser escrita como

$$y_h(t) = V_0 e^{-\gamma t} u(t) \quad (2.91)$$

Para este tipo de sistema com apenas um modo, o parâmetro \bar{y} é chamado de constante de tempo do sistema. Com base na Eq. (2.91) a constante de tempo \bar{y} representa a quantidade necessária para que a resposta natural diminua para $1/e$ vezes ou, equivalentemente, 36,8 por cento do seu valor inicial. Isso é ilustrado na Fig. 2.22.

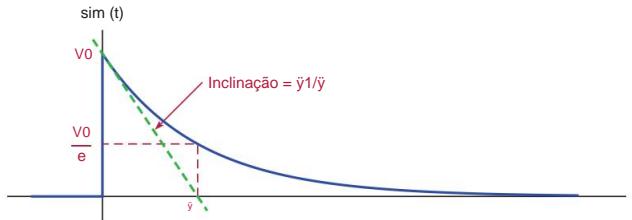


Figura 2.22 – Ilustração da constante de tempo para um sistema de primeira ordem.

Fica evidente na Fig. 2.22 que a reta tangente a $y_h(t)$ em $t = 0$ tem uma inclinação de $\bar{y}1/\bar{y}$, ou seja,

$$\frac{dy_h(t)}{dt} \Big|_{t=0} = \bar{y}1/\bar{y}$$

e intercepta o eixo do tempo em $t = \bar{y}$. A amplitude do sinal de saída em $t = \bar{y}$ é $y_h(\bar{y}) = V_0/e$.

Recursos de software:

ex 2 13.m

Demonstração interativa: rc demo2.m

A demonstração “rc demo2.m” é baseada no Exemplo 2.13, Eqn. (2.91) e Fig. 2.22. A resposta natural do circuito RC é calculada e representada graficamente para um valor inicial especificado. Os parâmetros do circuito R e C e o valor inicial V_0 do sinal de saída no tempo $t = 0$ podem ser variados usando controles deslizantes.

1. Reduza a constante de tempo \bar{y} reduzindo R ou C e observe seu efeito sobre quanto tempo leva para a resposta natural se tornar insignificantemente pequena. Você pode desenvolver uma regra prática sobre quantas constantes de tempo são necessárias para que a resposta natural se torne desprezível?
2. Conforme a constante de tempo é alterada, observe a inclinação da resposta natural no tempo $t = 0$. Quanto maior a inclinação, mais rápido a resposta natural desaparece.

Recursos de software:

rc demo2.m

Exemplo 2.14: Resposta natural do sistema de segunda ordem

A equação diferencial para o circuito RLC usado no Exemplo 2.6 e mostrada na Fig. 2.11 foi dada pela Eqn. (2.28). Sejam os valores dos elementos $R = 5 \Omega$, $L = 1 \text{ H}$ e $C = 1/6 \text{ F}$.

No tempo $t = 0$, a corrente inicial do indutor é $i(0) = 2 \text{ A}$ e a tensão inicial do capacitor é $y(0) = 1,5 \text{ V}$. Nenhum sinal de entrada externo é aplicado ao circuito, portanto $x(t) = 0$.

Determine a tensão de saída $y(t)$.

Solução: Sem um sinal de entrada externo, a solução particular é zero e a solução total da equação diferencial inclui apenas a solução homogênea, ou seja, $y(t) = y_h(t)$. A equação diferencial homogênea é $d^2y(t)/dt^2 + 6y(t) = 0$

A equação característica do sistema é

$$s^2 + 6s + 6 = 0$$

com soluções $s_1 = -3 + \sqrt{5}$ e $s_2 = -3 - \sqrt{5}$. A solução homogênea da equação diferencial está na forma

$y_h(t) = c_1 e^{(-3+\sqrt{5})t} + c_2 e^{(-3-\sqrt{5})t}$ para $t \geq 0$. Os coeficientes desconhecidos c_1 e c_2 precisam ser ajustados para que as condições iniciais especificadas sejam satisfeitas. Avaliando $y_h(t)$ para $t = 0$, obtemos $y_h(0) = c_1 e^{(-3+\sqrt{5})0} + c_2 e^{(-3-\sqrt{5})0} =$

$$c_1 + c_2 = 1,5 \quad (2.93)$$

Usando o valor inicial da corrente do indutor, temos

$$i(0) = C \frac{dy_h(t)}{dt} \Big|_{t=0} = 2$$

a partir do qual o valor inicial da primeira derivada do sinal de saída pode ser obtido como

$$\frac{dy_h(t)}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{eu(0)}{C} = \frac{2}{1/6} = 12$$

Diferenciando a solução encontrada na Eqn. (2.92) e impondo o valor inicial de $dy_h(t)/dt$ leva a

$$\begin{aligned} \frac{dy_h(t)}{dt} \Big|_{t=0} &= \ddot{y}_2 c_1 e^{(-3+\sqrt{5})t} + \ddot{y}_3 c_2 e^{(-3-\sqrt{5})t} \\ &= \ddot{y}_2 c_1 + \ddot{y}_3 c_2 = 12 \end{aligned} \quad (2.94)$$

Os coeficientes c_1 e c_2 podem agora ser determinados resolvendo as Eqns. (2.93) e (2.94) simultaneamente, resultando em

$$c_1 = 16,5 \quad , \quad e c_2 = -15$$

e a resposta natural do sistema é

$$y_h(t) = 16,5 e^{(-3+\sqrt{5})t} - 15 e^{(-3-\sqrt{5})t}, \quad t \geq 0 \quad (2.95)$$

que é representado graficamente na Fig. 2.23.

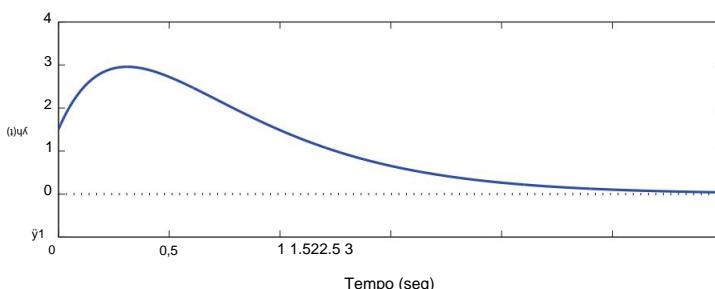


Figura 2.23 – A resposta natural do sistema de segunda ordem do Exemplo 2.14.

Recursos de software:

[ex 2 14.m](#)

No Exemplo 2.14, as duas raízes do polinômio característico mostraram ter valores reais e diferentes uma da outra. Como resultado, conseguimos expressar a solução da equação homogênea na forma padrão da Eqn. (2,89). Vamos agora rever vários cenários possíveis para os tipos de raízes obtidas:

Caso 1: Todas as raízes são distintas e de valor real.

Neste caso, a solução homogênea é

$$y_h(t) = \sum_{k=1}^N c_k e^{s_k t} \quad (2,96)$$

como discutido acima. Se uma raiz real s_k for negativa, o termo correspondente $c_k e^{s_k t}$ decai exponencialmente ao longo do tempo. Alternativamente, se s_k for positivo, o termo correspondente cresce exponencialmente ao longo do tempo e pode fazer com que o sinal de saída fique muito grande sem limites. A Fig. 2.24 ilustra essas duas possibilidades.

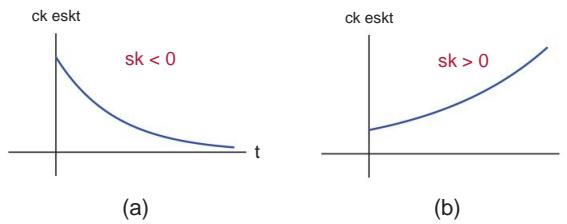


Figura 2.24 – Termos correspondentes às raízes reais da equação característica: (a) $sk < 0$, (b) $sk > 0$.

Caso 2: O polinômio característico tem raízes de valores complexos.

Uma vez que os coeficientes da equação diferencial e, consequentemente, os coeficientes do polinômio característico, são todos de valor real, quaisquer raízes complexas devem aparecer na forma de pares conjugados. Portanto, se $s_1 a = \hat{y}_1 + j\hat{y}_1$ é uma raiz complexa do polinômio característico, então seu conjugado complexo $s_1 b = \hat{y}_1 - j\hat{y}_1$ também deve ser uma raiz. Seja a parte da solução homogênea devida a essas duas raízes

$$\begin{aligned} y_{h1}(t) &= c_{1a} e^{s_1 a t} + c_{1b} e^{s_1 b t} \\ &= c_{1a} e^{(\hat{y}_1 + j\hat{y}_1)t} + c_{1b} e^{(\hat{y}_1 - j\hat{y}_1)t} \end{aligned} \quad (2,97)$$

onde os coeficientes c_{1a} e c_{1b} devem ser determinados a partir das condições iniciais.

Continuando com o raciocínio que iniciamos acima, como os coeficientes da equação diferencial são reais, a solução homogênea $y_h(t)$ também deve ser real.

Além disso, $y_{h1}(t)$, a parte da solução que é devida ao par complexo conjugado de raízes que estamos considerando, também deve ser real. Isso, por sua vez, implica que os coeficientes c_{1a} e c_{1b} também devem formar um par conjugado complexo. Vamos escrever os dois coeficientes na forma complexa polar como

$$c_{1a} = |c_{1a}| e^{j\hat{y}_1} , \quad e c_{1b} = |c_{1b}| e^{-j\hat{y}_1} \quad (2,98)$$

Substituindo a Eq. (2.98) na Eqn. (2.97) leva ao resultado

$$\begin{aligned} y_{h1}(t) &= |c_1| e^{\tilde{\gamma}_1 t} \cos(\tilde{\gamma}_1 t + \tilde{\theta}_1) + |c_1| e^{\tilde{\gamma}_1 t} \sin(\tilde{\gamma}_1 t + \tilde{\theta}_1) \\ &= 2 |c_1| e^{\tilde{\gamma}_1 t} \cos(\tilde{\gamma}_1 t + \tilde{\theta}_1) \end{aligned} \quad (2.99)$$

- a. Um par de raízes conjugadas complexas para o polinômio característico leva a um componente de solução na forma de um sinal de cosseno multiplicado por um sinal exponencial.
- b. A frequência de oscilação do sinal de cosseno é determinada por $\tilde{\gamma}_1$, o imaginário parte das raízes complexas.
- c. A parte real das raízes complexas, $\tilde{\gamma}_1$, impacta a amplitude da solução. Se $\tilde{\gamma}_1 < 0$, então a amplitude do sinal do cosseno decai exponencialmente ao longo do tempo. Em contraste, se $\tilde{\gamma}_1 > 0$, a amplitude do sinal de cosseno cresce exponencialmente ao longo do tempo. Essas duas possibilidades são ilustradas na Fig. 2.25.

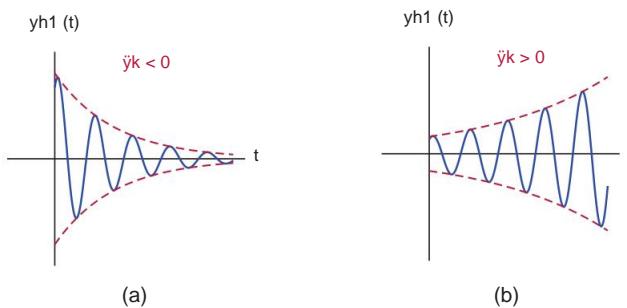


Figura 2.25 – Termos correspondentes ao par de raízes complexas conjugadas da equação característica: (a) $\tilde{\gamma}_1 < 0$, (b) $\tilde{\gamma}_1 > 0$.

Usando a identidade trigonométrica apropriada² também é possível escrever a Eqn. (2.99) como

$$\begin{aligned} y_{h1}(t) &= 2 |c_1| \cos(\tilde{\gamma}_1 t) e^{\tilde{\gamma}_1 t} \cos(\tilde{\gamma}_1 t) - 2 |c_1| \sin(\tilde{\gamma}_1 t) e^{\tilde{\gamma}_1 t} \sin(\tilde{\gamma}_1 t) \\ &= d_1 e^{\tilde{\gamma}_1 t} \cos(\tilde{\gamma}_1 t) + d_2 e^{\tilde{\gamma}_1 t} \sin(\tilde{\gamma}_1 t) \end{aligned} \quad (2.100)$$

Caso 3: O polinômio característico tem algumas raízes múltiplas.

Considere novamente a versão fatorada da equação característica inicialmente dada pela Eqn. (2.87):

$$a_N(s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_N) = 0$$

E se as duas primeiras raízes forem iguais, isto é, $s_2 = s_1$? Se usássemos a abordagem que empregamos até agora, teríamos uma resposta natural na forma

$$\begin{aligned} y_h(t) &= c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t} + \text{outros termos} \\ &= c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_1 t} + \text{outros termos} \\ &= (c_1 + c_2) e^{s_1 t} + \text{outros termos} \\ &= c_1' e^{s_1 t} + \text{outros termos} \end{aligned} \quad (2.101)$$

² $\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b)$.

O problema com a resposta na Eqn. (2.101) é que perdemos um dos coeficientes. Para uma equação diferencial homogênea de ordem N, precisamos satisfazer N condições iniciais em algum instante $t = t_0$, ou seja ,

$$y(t_0), \frac{dy(t)dt}{t=t_0}, \dots, \frac{d^{N-1}y(t)}{dt^{N-1}}|_{t=t_0}$$

Para satisfazer N condições iniciais, precisamos de tantos parâmetros ajustáveis c_1, \dots, c_N às vezes referidos como N graus de liberdade. A perda de um dos coeficientes cria um problema para nossa capacidade de satisfazer N condições iniciais. Para recuperar o coeficiente que perdemos, precisamos de um termo adicional para as duas raízes em $s = s_1$. Uma solução na forma

$$y_h(t) = c_{11} e^{s_1 t} + c_{12} t e^{s_1 t} + \text{outros termos} \quad (2.102)$$

funcionará para este fim. Em geral, uma raiz de multiplicidade r requer r termos na solução homogênea. Se o polinômio característico tiver um fator $(s - s_1)^r$, a solução homogênea resultante será

$$y_h(t) = c_{11} e^{s_1 t} + c_{12} t e^{s_1 t} + \dots + c_{1r} t^{r-1} e^{s_1 t} + \text{outros termos} \quad (2.103)$$

Exemplo 2.15: Resposta natural do sistema de segunda ordem revisitado

Considere novamente o circuito RLC que foi usado pela primeira vez no Exemplo 2.6 e mostrado na Fig. 2.11. No tempo $t = 0$, a corrente inicial do indutor é $i(0) = 0,5 \text{ A}$ e a tensão inicial do capacitor é $y(0) = 2 \text{ V}$. Nenhum sinal de entrada externo é aplicado ao circuito, portanto $x(t) = 0$.

Determine a tensão de saída $y(t)$ se

- a. os valores dos elementos são $R = 2 \Omega$, $L = 1 \text{ H}$ e $C = 1/26 \text{ F}$,
- b. os valores dos elementos são $R = 6 \Omega$, $L = 1 \text{ H}$ e $C = 1/9 \text{ F}$.

Solução: Como nenhum sinal externo de entrada é aplicado ao circuito, o sinal de saída é igual à resposta natural, ou seja, $y(t) = y_h(t)$, que obteremos resolvendo a equação diferencial homogênea. Duas condições iniciais são especificadas. A primeira é que $y_h(0) = 2$.

Usando o valor inicial especificado da corrente do indutor, temos

$$i(0) = C \frac{dy_h(t)}{dt} \Big|_{t=0} = 0,5$$

que leva ao valor inicial para a primeira derivada do sinal de saída como

$$\frac{dy_h(t)}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{0,5}{C}$$

Agora estamos prontos para encontrar as soluções para os dois conjuntos de valores de componentes dados nas partes (a) e (b):

- a. Usando os valores dos componentes especificados, a equação diferencial homogênea é

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 26y(t) = 0$$

e a equação característica é

$$s^2 + 2s + 26 = 0$$

As raízes da equação característica são $s_1 = \tilde{y}1 + j5$ e $s_2 = \tilde{y}1 - j5$. A resposta natural está, portanto, na forma dada pela Eqn. (2.100) com $\tilde{y}1 = \tilde{y}1$ e $\tilde{y}1 = 5$ rad/s.

$$y_h(t) = d1 e^{\tilde{y}t} \cos(5t) + d2 e^{\tilde{y}t} \sin(5t)$$

Agora podemos impor as condições iniciais. A primeira é direta:

$$y_h(0) = d1 = 2$$

Para o valor de capacidade especificado $C = 1/26$ F, o valor inicial de $dy_h(t)/dt$ é

$$\left. \frac{dy_h(t)}{dt} \right|_{t=0} = 13$$

Para impor o valor inicial especificado de $dy_h(t)/dt$ vamos primeiro diferenciar a solução homogênea para obter

$$\frac{dy_h(t)}{dt} = \tilde{y}d1 e^{\tilde{y}t} \cos(5t) + 5d1 e^{\tilde{y}t} \sin(5t) + \tilde{y}d2 e^{\tilde{y}t} \sin(5t) + 5d2 e^{\tilde{y}t} \cos(5t)$$

Avaliando esta derivada em $t = 0$ temos

$$\left. \frac{dy_h(t)}{dt} \right|_{t=0} = \tilde{y}d1 + 5d2 = 13$$

Como descobrimos anteriormente que $d1 = 2$, precisamos de $d2 = 3$ e a resposta natural do circuito é

$$y_h(t) = 2 e^{\tilde{y}t} \cos(5t) + 3 e^{\tilde{y}t} \sin(5t) \quad (2.104)$$

para $t \geq 0$. Essa solução é mostrada na Fig. 2.26(a). b.

Para este caso, a equação diferencial homogênea torna-se

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{9}{\text{anos}} y(t) = 0 + 6 dt^2$$

e a equação característica é

$$s^2 + 6s + 9 = 0 \quad , \quad \text{ou } (s + 3)^2 = 0$$

Como ambas as raízes da equação característica estão em $s_1 = -3$, usaremos uma solução homogênea na forma

$$y_h(t) = c11 e^{-3t} + c12 t e^{-3t}$$

para $t \geq 0$. Impondo o valor inicial $y(0) = 2$ produz

$$c11 = 2$$

para o primeiro coeficiente. Para o valor de capacidade especificado de $C = 1/9$ F, o valor inicial da derivada do sinal de saída é

$$\left. \frac{dy_h(t)}{dt} \right|_{t=0} = 4,5$$

Para satisfazer a condição inicial em $\frac{dyh(t)}{dt}$ vamos diferenciar a solução homogênea e avaliar o resultado em $t = 0$ que produz

$$\begin{aligned} \left. \frac{dyh(t)}{dt} \right|_{t=0} &= \left. \frac{d}{dt} c_{11} e^{-3t} + c_{12} t e^{-3t} \right|_{t=0} \\ &= \ddot{y} 3 c_{11} e^{-3t} + c_{12} e^{-3t} + 3 c_{12} t e^{-3t} \\ &= \ddot{y} 3 c_{11} + c_{12} = 4,5 \end{aligned}$$

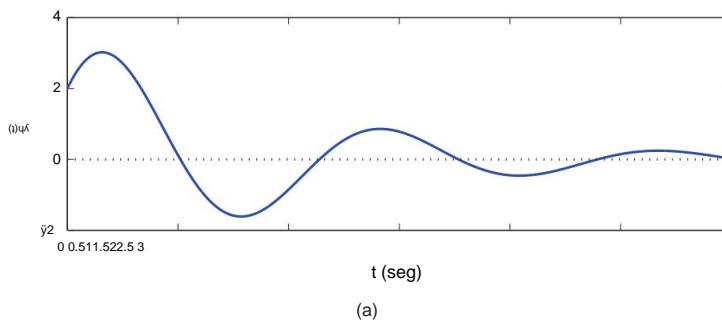
e leva ao resultado

$$c_{12} = 10,5$$

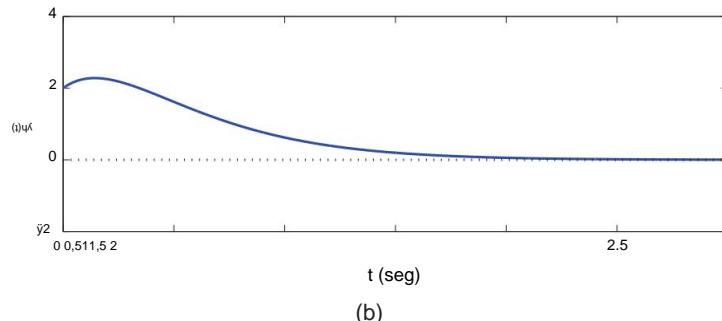
Portanto, a resposta natural para este caso é

$$y_h(t) = 2 e^{-3t} + 10,5 t e^{-3t} \quad (2.105)$$

que é mostrado na Fig. 2.26(b).



(a)



(b)

Figura 2.26 – Respostas naturais no circuito RC no Exemplo 2.15 para (a) raízes da equação característica $s_{1,2} = \ddot{y} 3 \pm j2$, e (b) raízes da equação característica $s_1 = s_2 = \ddot{y} 3$.

Recursos de software:

ex 2 15h

ex 2 15b.m

Demonstração interativa: nr demo1

O programa de demonstração interativo nr demo1.m ilustra diferentes tipos de soluções homogêneas para um sistema de tempo contínuo de segunda ordem baseado nas raízes da característica

polinomial. Lembre-se de que as três possibilidades foram exploradas acima, ou seja, raízes reais distintas, raízes conjugadas complexas e raízes múltiplas.

No programa de demonstração, as duas raízes podem ser especificadas usando controles deslizantes e a resposta natural correspondente pode ser observada. Se as raízes forem reais, elas podem ser controladas independentemente. Se valores complexos forem escolhidos, no entanto, as duas raízes se moverão simultaneamente para manter sua relação conjugada complexa. As localizações das duas raízes s_1 e s_2 são marcadas no plano complexo. A equação diferencial, a equação característica e a solução analítica para a resposta natural são exibidas e atualizadas à medida que as raízes são movidas.

1. Comece com duas raízes reais que são ambas negativas, digamos $s_1 = -0,5$ e $s_2 = -0,5$. Defina as condições iniciais como

$$y_h(t)=0, \quad \frac{dy_h(t)}{dt} = 1 \quad t=0$$

Observe a forma da resposta natural.

2. Mova gradualmente s_2 para a direita, aproximando-o do eixo vertical. Observe as mudanças na forma da resposta natural. O que acontece quando a raiz atinge o eixo vertical, ou seja, quando $s_2 = 0$?
3. Continue movendo s_2 para a direita até $s_2 = 0,3$. Como a resposta natural muda quando uma raiz real se move para o território positivo?
4. Defina as duas raízes como $s_{1,2} = -0,3 \pm j1,2$ e observe a resposta natural.
5. Aumente gradualmente as partes imaginárias das duas raízes em direção a $\pm j4$ enquanto mantém suas partes reais fixas em $-0,3$. Como a mudança nas partes imaginárias afeta a resposta natural?
6. Mova gradualmente as partes reais das duas raízes para a direita enquanto mantém as partes imaginárias iguais a $\pm j4$. Como isso afeta a resposta natural? O que acontece quando as raízes cruzam para o lado direito do eixo vertical?

Recursos de software:

nr_demo1.m

2.5.4 Encontrando a resposta forçada de um sistema de tempo contínuo

Na discussão anterior, concentrarmos nossos esforços em encontrar a solução homogênea da equação diferencial de coeficiente constante que corresponde à resposta natural $y_h(t)$ do sistema em consideração quando nenhum sinal de entrada externo é aplicado a ele. Para completar o processo de solução, também precisamos determinar a solução particular para um sinal de entrada especificado $x(t)$ que é aplicado ao sistema. Para encontrar a solução particular, começamos com um palpite sobre a forma da solução que buscamos e, em seguida, ajustamos seus parâmetros para que o resultado satisfaça a equação diferencial. A forma da solução particular deve incluir o sinal de entrada $x(t)$ e todas as suas derivadas que são linearmente independentes, assumindo que $x(t)$ tem um número finito de derivadas linearmente independentes.

Por exemplo, se o sinal de entrada for $x(t) = \cos(at)$, precisamos construir uma solução particular que inclua os termos $\cos(at)$ e $\sin(at)$ na forma

$$y_p(t) = k_1 \cos(at) + k_2 \sin(at) \quad (2.106)$$

com parâmetros k_1 e k_2 a serem determinados a partir da equação diferencial. Por outro lado, se o sinal de entrada for $x(t) = t^3$, então precisamos de uma solução particular que inclua o

termos t^3 , t^2 , t , e um termo constante na forma

$$y_p(t) = k_3 t^3 + k_2 t^2 + k_1 t + k_0 \quad (2.107)$$

A Tabela 2.1 lista alguns dos tipos comuns de sinais de entrada e as formas de soluções particulares a serem usadas para eles.

Sinal de	Solução particular
entrada K (constante)	
$k_1 K$ come k_1 come K	
$\cos(at)$	$k_1 \cos(at) + k_2 \sin(at)$
$K \sin(at)$	$k_1 \cos(at) + k_2 \sin(at)$
$K t^n$	$k_1 t^n + \dots + k_n t^n + k_0$

Tabela 2.1 – Escolha de uma solução particular para vários sinais de entrada.

Os coeficientes da solução particular são determinados a partir da equação diferencial assumindo que todas as condições iniciais são iguais a zero (lembre-se de que a solução particular não depende das condições iniciais da equação diferencial ou do estado inicial do sistema). As condições iniciais especificadas da equação diferencial são impostas na etapa subsequente para determinar os coeficientes desconhecidos da solução homogênea, não da solução particular.

Agora temos todas as ferramentas necessárias para determinar a resposta forçada do sistema para um sinal de entrada especificado. Segue um resumo do procedimento a ser utilizado:

1. Escreva a equação diferencial homogênea. Encontre a equação característica substituindo as derivadas do sinal de saída pelas potências correspondentes de s.
2. Resolva as raízes da equação característica e escreva a solução homogênea na forma de Eqn. (2.96). Se algumas das raízes forem pares complexos conjugados, use a forma na Eq. (2.97) para eles. Se houver algumas raízes múltiplas, use o procedimento descrito na Eq. (2.103) para eles. Deixar a solução homogênea na forma paramétrica com coeficientes indeterminados; não tente calcular os coeficientes c_1, c_2, \dots da solução homogênea ainda.
3. Encontre a forma da solução particular escolhendo a forma apropriada da Tabela 2.1 ou construindo-a como uma combinação linear do sinal de entrada e suas derivadas no tempo. (Esta última abordagem requer que o sinal de entrada tenha um número finito de derivadas linearmente independentes.)
4. Tente a solução particular na equação diferencial não homogênea e determine os coeficientes k_1, k_2, \dots da solução particular. Neste ponto, a solução particular deve ser determinada exclusivamente. No entanto, os coeficientes da solução homogênea ainda são indeterminados.
5. Adicione a solução homogênea e a solução particular para obter a solução total. Calcule as derivadas necessárias da solução total. Imponha as condições iniciais necessárias à solução total e suas derivadas. Resolva o conjunto de equações resultante para determinar os coeficientes c_1, c_2, \dots da solução homogênea.

Essas etapas para encontrar a solução forçada de uma equação diferencial serão ilustradas no próximo exemplo.

Exemplo 2.16: Resposta forçada do sistema de primeira ordem para entrada

senoidal Considere novamente o circuito RC da Fig. 2.9 com os valores elementares de $R = 1 \Omega$ e $C = 1/4 F$. O valor inicial do sinal de saída é $y(0) = 5$. Determine o sinal de saída em resposta a um sinal de entrada senoidal na forma

$$x(t) = A \cos(\omega t)$$

com amplitude $A = 20$ e frequência radiana $\omega = 8 \text{ rad/s}$.

Solução: Usando os valores dos componentes especificados, a equação diferencial não homogênea do circuito em consideração é

$$\frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = 4x(t) dt$$

e descobrimos no Exemplo 2.11 que a solução homogênea está na forma

$$y_h(t) = C e^{-4t}$$

para $t \geq 0$. Adaremos a tarefa de determinar o valor da constante C até encontrarmos a solução particular. Usando a Tabela 2.1, a forma da solução particular que buscamos é

$$y_p(t) = k_1 \cos(\omega t) + k_2 \sin(\omega t) \quad (2.108)$$

Diferenciando a Eq. (2.108) em relação aos rendimentos de tempo

$$\frac{dy_p(t)}{dt} = -\omega k_1 \sin(\omega t) + \omega k_2 \cos(\omega t) \quad (2.109)$$

A solução particular $y_p(t)$ deve satisfazer a equação diferencial não homogênea. Substituindo as Eqns. (2.108) e (2.109) junto com o sinal de entrada especificado $x(t)$ na equação diferencial obtemos

$$-\omega^2 k_1 \sin(\omega t) + \omega^2 k_2 \cos(\omega t) + 4[k_1 \cos(\omega t) + k_2 \sin(\omega t)] = A \cos(\omega t)$$

que pode ser escrita de forma mais compacta como

$$(4k_1 + \omega^2 k_2 - A) \cos(\omega t) + (4k_2 - \omega^2 k_1) \sin(\omega t) = 0 \quad (2.110)$$

Eq. (2.110) deve ser satisfeita para todos os valores de t , portanto devemos ter

$$4k_1 + \omega^2 k_2 - A = 0 \quad (2.111)$$

e

$$4k_2 - \omega^2 k_1 = 0 \quad (2.112)$$

Equações (2.111) e (2.112) podem ser resolvidos simultaneamente para produzir

$$k_1 = \frac{4A}{16 + \omega^2} \quad \text{e} \quad k_2 = \frac{A\omega}{16 + \omega^2}$$

A solução forçada é obtida adicionando a solução homogênea e a solução particular juntas:

$$\begin{aligned} y(t) &= y_h(t) + y_f(t) \\ &= ce^{\frac{4A}{\ddot{\gamma}}} t + \cos(\frac{A\ddot{\gamma}}{2}t) + \sin(\frac{A\ddot{\gamma}}{2}t) \end{aligned} \quad (2.113)$$

Vamos agora substituir os valores numéricos $A = 20$ e $\ddot{\gamma} = 8$ rad/s. O sinal de saída torna-se

$$y(t) = c e^{\frac{4A}{\ddot{\gamma}}t} + \cos(8t) + 2 \sin(8t)$$

Por fim, vamos impor a condição inicial $y(0) = 5$ para obter

$$y(0) = 5 = c + \cos(0) + 2 \sin(0)$$

que produz $c = 4$. Portanto, a solução completa é

$$y(t) = 4e^{\frac{4A}{\ddot{\gamma}}t} + \cos(8t) + 2 \sin(8t) \quad (2.114)$$

para $t \geq 0$. A solução encontrada na Eqn. (2.114) tem dois componentes fundamentalmente diferentes e pode ser escrita na forma

$$y(t) = yt(t) + y_{ss}(t) \quad (2.115)$$

o primeiro termo

$$yt(t) = 4e^{\frac{4A}{\ddot{\gamma}}t} \quad (2.116)$$

representa a parte do sinal de saída que desaparece com o tempo, ou seja,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} yt(t) = 0$$

É chamado de componente transitória do sinal de saída. o segundo termo

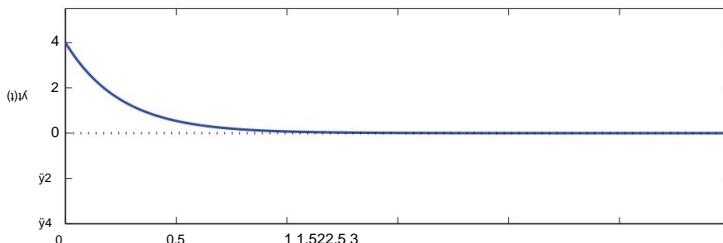
$$y_{ss}(t) = \cos(8t) + 2 \sin(8t) \quad (2.117)$$

é a parte do sinal de saída que permanece depois que o termo transitório desaparece. Portanto, é chamada de resposta de estado estacionário do sistema. Os componentes transitórios e estacionários, bem como a resposta completa, são mostrados na Fig. 2.27.

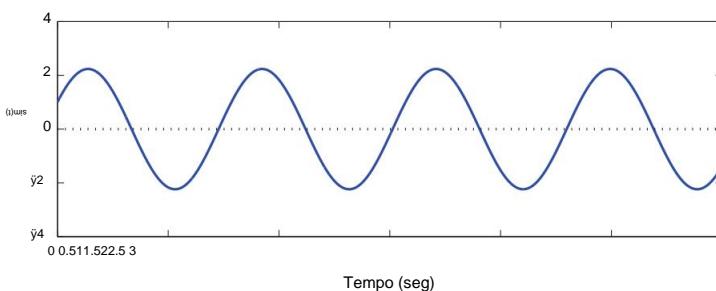
Antes de deixarmos este exemplo, uma observação final é necessária: a solução homogênea para o mesmo circuito foi encontrada no Exemplo 2.11 como

$$y_h(t) = 5e^{\frac{4A}{\ddot{\gamma}}t} \quad (2.118)$$

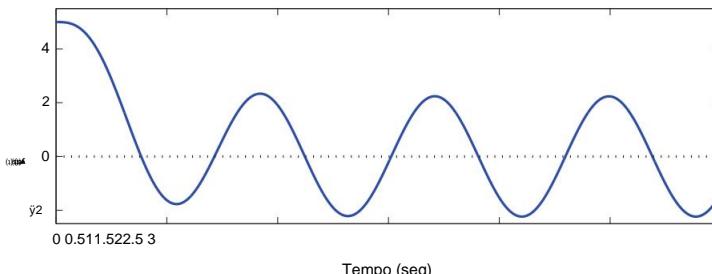
com o sinal de entrada $x(t)$ igual a zero. Neste exemplo, usamos um sinal de entrada senoidal e a parte transitória da resposta obtida na Eqn. (2.116) não corresponde à solução homogênea para o caso de entrada zero; os dois diferem por um fator de escala. Isso justifica nossa decisão de adiar o cálculo da constante c até o final. A condição inicial é especificada para o sinal de saída total $y(t)$ no tempo $t = 0$; portanto, devemos primeiro somar a solução homogênea e a solução particular, e somente depois disso podemos impor o valor especificado de $y(0)$ na solução para determinar a constante c .



(a)



(b)



Tempo (seg)

(c)

Figura 2.27 – Cálculo do sinal de saída do circuito do Exemplo 2.16: (a) componente transitória, (b) componente estacionário, (c) o sinal de saída completo.

Revisitaremos esse exemplo quando estudarmos os conceitos de função do sistema no Capítulo 7.
Recursos de software:

ex_2_16.m

Demonstração interativa: [fr_demo1](#)

O programa de demonstração interativa `fr_demo1.m` é baseado no Exemplo 2.16. Permite a experimentação com parâmetros do problema. A amplitude A é fixada em A = 20 para que o sinal de entrada seja

$$x(t) = 20 \cos(\dot{y}t)$$

A resistência R, a capacidade C, a frequência radiana \dot{y} e o valor de saída inicial $y(0)$ podem ser variados usando controles deslizantes. Pode-se observar o efeito das alterações de parâmetros na resposta transitória $y_t(t)$, na resposta de estado estacionário $y_{ss}(t)$ e na resposta forçada total $y_t(t) + y_{ss}(t)$.

1. Comece com as configurações $R = 5 \Omega$, $C = 10 F$, $\dot{y} = 4 \text{ rad/sey}$ ($0 = 0$). Como o valor inicial do sinal de saída é zero, o sistema resultante é CT-LTI. Além disso, o valor inicial do sinal de entrada também é zero e, portanto, o sinal de saída não possui componente transitória. Observe o valor de amplitude de pico do componente de estado estacionário. Confirme se corresponde ao encontrado no Exemplo 2.16.
2. Agora aumente gradualmente a frequência radiana \dot{y} até $\dot{y} = 12 \text{ rad/s}$ e observe a mudança na amplitude de pico do componente de estado estacionário da saída. Compare com o resultado obtido na Eqn. (2.113).
3. Defina os valores dos parâmetros como $R = 1 \Omega$, $C = 0,3 F$, $\dot{y} = 12 \text{ rad/sey}$ ($0 = 4 V$). A constante de tempo é $\tau = RC = 0,3 \text{ s}$. Comente quanto tempo leva para o componente transitório da saída se tornar insignificante para que o sinal de saída atinja seu comportamento de estado estacionário. (Como regra geral, 4 a 5 constantes de tempo são suficientes para que o sinal de saída seja considerado em estado estacionário.)
4. Aumente gradualmente o valor de R para $R = 3 \Omega$ e observe as mudanças no transiente comportamento.

Recursos de software:

`fr_demo1.m`

2.6 Representação em Diagrama de Blocos de Sistemas de Tempo Contínuo

Até aqui estudamos métodos para analisar sistemas de tempo contínuo representados no domínio do tempo por meio de equações diferenciais ordinárias de coeficiente constante. Dada uma descrição do sistema baseada em uma equação diferencial e um sinal de entrada $x(t)$, o sinal de saída $y(t)$ pode ser determinado resolvendo a equação diferencial.

Em alguns casos, pode ser necessário realizar um sistema de tempo contínuo que tenha uma equação diferencial específica. Alternativamente, pode ser desejado simular um sistema de tempo contínuo em um computador digital em um sentido aproximado. Em problemas que envolvem a realização ou a simulação de um sistema de tempo contínuo, começamos com uma representação em diagrama de blocos da equação diferencial. Uma vez obtido um diagrama de blocos, ele pode ser realizado usando circuitos que aproximam o comportamento de cada componente do diagrama de blocos ou simulado em um computador usando segmentos de código que simulam o comportamento de cada componente.

Em geral, o problema de converter uma equação diferencial em um diagrama de blocos tem várias soluções que são funcionalmente equivalentes, mesmo que pareçam diferentes. Nesta seção, apresentaremos uma técnica específica para obter um diagrama de blocos a partir de uma equação diferencial ordinária de coeficiente constante. Métodos alternativos de construção de diagramas de blocos serão apresentados no Capítulo 7 no contexto da obtenção de um diagrama de blocos a partir de uma função do sistema.

Diagramas de blocos para sistemas de tempo contínuo são construídos usando três tipos de componentes, ou seja, amplificadores de ganho constante, somadores de sinal e integradores. Esses componentes são mostrados na Fig. 2.28. A técnica para encontrar um diagrama de blocos a partir de uma equação diferencial é melhor explicada com um exemplo. Considere uma equação diferencial de terceira ordem na forma

$$\frac{d^3y}{dt^3} + 2\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 4y = 2x \quad \text{Eqn. (2.119)}$$

com $N = 3$ e $M = 2$. A equação é mostrada em

notação compacta com o entendimento de que $x(t)$, $y(t)$ e todas as suas derivadas são funções do tempo. Além disso, por conveniência, escolhemos o coeficiente

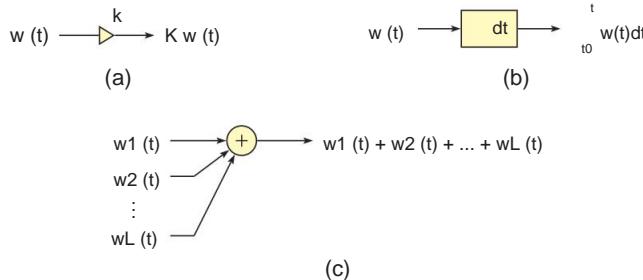


Figura 2.28 – Componentes do diagrama de blocos para sistemas de tempo contínuo: (a) amplificador de ganho constante, (b) integrador, (c) somador de sinal.

da maior derivada de $y(t)$ ser $a_N = 1$ (que, neste caso, passa a ser a_3).

Nos casos em que $a_N = 1$ ambos os lados da Eqn. (2.119) pode ser dividido por a_N para satisfazer esse requisito.

Como primeiro passo para encontrar um diagrama de blocos para esta equação diferencial, introduziremos uma variável intermediária $w(t)$. Essa nova variável será usada no lugar de $y(t)$ no lado esquerdo da equação diferencial na Eqn. (2.119), e o resultado será definido igual a $x(t)$ para produzir

$$\frac{d^3w}{dt^3} \frac{d^2w}{dt^2} \frac{dw}{dt} + a_2 \frac{d^2w}{dt^2} + a_1 \frac{dw}{dt} + a_0 w = x \quad (2.120)$$

A equação diferencial na Eqn. (2.120) é relativamente fácil de implementar na forma de um diagrama de blocos. Rearranjando os termos na Eqn. (2.120) obtemos

$$\frac{d^3w}{dt^3} = x - \dot{y}a_2 \quad \frac{d^2w}{dt^2} = \dot{y}a_1 \quad \frac{dw}{dt} = \dot{y}a_0 w \quad (2.121)$$

Uma possível implementação é mostrada na Fig. 2.29.

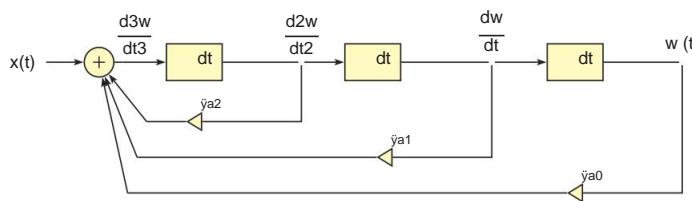


Figura 2.29 – Diagrama de blocos da Eqn. (2.121).

Mostraremos agora que o sinal de saída $y(t)$ pode ser expresso em termos do intervalo variável de dia $w(t)$ como

$$\frac{d^2w}{dt^2} \frac{dw}{dt} y = b_2 + b_1 + b_0 w \quad (2.122)$$

Este é essencialmente o lado direito da equação diferencial na Eqn. (2.119) em que $x(t)$ foi substituído por $w(t)$. Juntos, Eq. (2.120) e (2.122) são equivalentes à Eqn. (2.119).

A prova para a Eq. (2.122) será dada começando pelo lado direito da Eqn. (2.119) e expressando os termos nela por meio do uso da Eqn. (2.120). Temos os seguintes navios de relacionamento:

$$b_0 x = b_0 \quad \frac{d^3 w}{dt^3} \frac{d^2 w}{dt^2} \frac{dw}{dt} + a_2 + a_1 + a_0 \quad (2.123)$$

$$x \frac{d}{dt} b_1 - b_1 \quad \frac{d^4 w}{dt^3} \frac{d^3 w}{dt^2} \frac{d^2 w}{dt} + a_2 + a_1 + a_0 \frac{dt^4}{dt^2} \quad (2.124)$$

$$b_2 = \frac{d^2 x}{dt^2} - dt^2 \quad \frac{d^5 w}{dt^2} \frac{d^4 w}{dt^3} \frac{d^3 w}{dt^4} + a_2 + a_1 + a_0 \frac{dt^5}{dt^3} \quad (2.125)$$

Adicionando Eq. (2.123) até (2.125) obtemos

$$\begin{aligned} &+ b_2 \frac{dt^4}{dt^2} \quad \frac{d^2 x}{dt^2} \frac{d^3 w}{dt^3} \frac{d^4 w}{dt^4} \frac{dx}{dt} b_0 x + b_1 + b_2 = b_0 + \\ &b_2 \quad \frac{d^2 w}{dt^2} \frac{d^3 w}{dt^3} \frac{d^4 w}{dt^4} b_0 + b_1 + \\ &+ b_1 + b_2 \frac{dt^3}{dt^3} \quad \frac{d^2 w}{dt^2} \frac{d^3 w}{dt^3} \frac{dw}{dt} \\ &+ a_0 b_0 w + b_1 + b_2 \frac{dw}{dt} \quad \frac{d^2 w}{dt^2} \\ &= \frac{d^3 a}{dt^3} a_1 + a_0 \frac{dy}{dt} + a_2 + \end{aligned} \quad (2.126)$$

provando que as Eqs. (2.120) e (2.122) são de fato equivalentes à Eqn. (2.119). Assim, a saída $y(t)$ pode ser obtida através do uso da Eqn. (2.122).

Como as derivadas do lado direito da Eqn. (2.122) estão prontamente disponíveis no diagrama de blocos da Fig. 2.29, simplesmente adicionaremos as conexões necessárias a ele para chegar ao diagrama de blocos completo mostrado na Fig. 2.30.

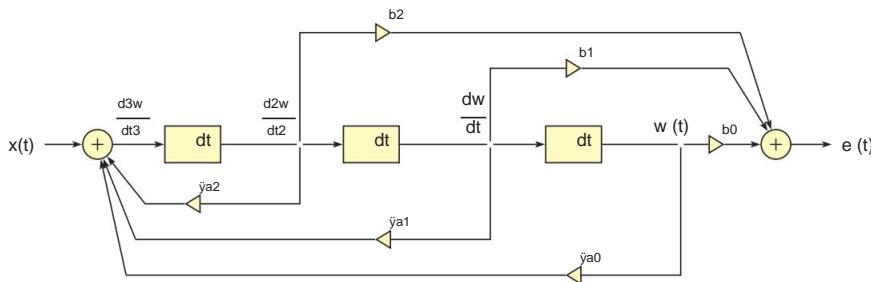


Figura 2.30 – O diagrama de blocos completo para a Eqn. (2.119).

Embora tenhamos usado uma equação diferencial de terceira ordem para demonstrar o processo de construção de um diagrama de blocos, a extensão da técnica para uma equação diferencial de coeficiente constante geral é direta. Na Fig. 2.30, os ganhos de alimentação do

diagrama de blocos são os coeficientes do lado direito b_0, b_1, \dots, b_M da equação diferencial. Os ganhos de feedback do diagrama de blocos são os coeficientes negativos do lado esquerdo $\bar{y}_a_0, \bar{y}_a_1, \dots, \bar{y}_a_N \bar{y}_1$ da equação diferencial. Lembre-se de que devemos ter $a_N = 1$ para que isso funcione.

Impondo condições iniciais

Também é possível incorporar condições iniciais no diagrama de blocos. Na primeira etapa, os valores iniciais de $y(t)$ e suas primeiras $N - 1$ derivadas precisam ser convertidos em valores iniciais correspondentes de $w(t)$ e suas primeiras $N - 1$ derivadas. Posteriormente, o valor inicial apropriado pode ser imposto na saída de cada integrador, conforme mostrado na Fig. 2.31.

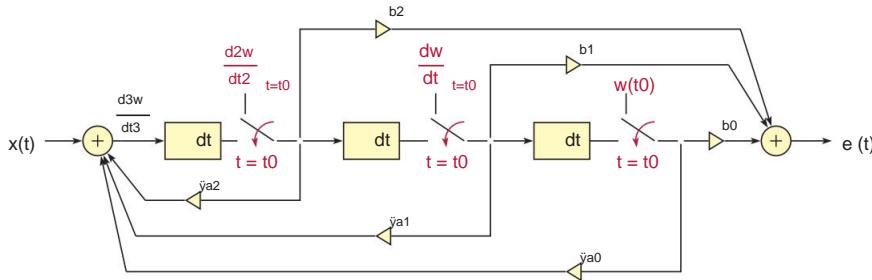


Figura 2.31 – Incorporando condições iniciais em um diagrama de blocos.

Exemplo 2.17: Diagrama de blocos para sistema de tempo

contínuo Construa um diagrama de blocos para resolver a equação diferencial

$$\frac{d^3y}{dt^3} + \frac{d^2y}{dt^2} + 5\frac{dy}{dt} + 13y = x + 2\frac{dt^3}{dt^3} + \frac{dt^2}{dt^2} + \frac{dt}{dt}$$

com o sinal de entrada $x(t) = \cos(20\pi t)$ e sujeito às condições iniciais

$$y(0) = 1, \quad \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = 2, \quad \left. \frac{d^2y}{dt^2} \right|_{t=0} = 4$$

Solução: Usando a variável intermediária $w(t)$, conforme descrito na discussão anterior, obtemos o seguinte par de equações diferenciais equivalentes à equação diferencial original:

$$\frac{d^3w}{dt^3} + \frac{d^2w}{dt^2} + 5\frac{dw}{dt} + 13w = x \quad (2.127)$$

$$y = w + 2\int \frac{dw}{dt} \quad (2.128)$$

As condições iniciais especificadas em termos dos valores de $y, dy/dt$ e d^2y/dt^2 no instante $t = 0$ precisam ser expressas em termos das saídas do integrador $w, dw/dt$ e d^2w/dt^2 no instante $t = 0$. Para isso, começaremos escrevendo a Eqn. (2.128) no tempo $t = 0$:

$$y(0) = 1 = w(0) + 2 \int \frac{dw}{dt} \Big|_{t=0} \quad (2.129)$$

Diferenciando ambos os lados da Eqn. (2.128) e avaliando o resultado em $t = 0$ obtemos

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = 2 = \left. \frac{dw}{dt} \right|_{t=0} + 2 \int \frac{d^2w}{dt^2} \Big|_{t=0} \quad (2.130)$$

2.7. Resposta ao Impulso e Convolução

Diferenciando a Eq. (2.128) duas vezes e avaliando o resultado em $t = 0$ produz

$$\frac{d^2a}{dt^2} \Big|_{t=0} = \ddot{y}4 = \frac{d^2w}{dt^2} \Big|_{t=0} + 2 \frac{d^3w}{dt^3} \Big|_{t=0} \quad (2.131)$$

Valor inicial de d^3w/dt^3 necessário na Eqn. (2.131) é obtido da Eqn. (2.127) como

$$\frac{d^3w}{dt^3} \Big|_{t=0} = x(0) \ddot{y}5 - \frac{d^2w}{dt^2} \Big|_{t=0} \ddot{y}17 - \frac{dw}{dt} \Big|_{t=0} \ddot{y}13 w(0) \quad (2.132)$$

Substituição da Eq. (2.132) na Eqn. (2.131) resulta em

$$\frac{d^2a}{dt^2} \Big|_{t=0} = \ddot{y}4 = \ddot{y}9 - \frac{d^2w}{dt^2} \Big|_{t=0} \ddot{y}34 - \frac{dw}{dt} \Big|_{t=0} \ddot{y}26 w(0) + 2x(0) \quad (2.133)$$

Além disso, sabemos que $x(0) = 1$. Resolvendo Eqns. (2.129), (2.130) e (2.133) os valores iniciais das saídas do integrador são obtidos como

$$w(0) = \frac{\ddot{y}71}{45}, \quad \frac{dw}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{58}{45}, \quad \frac{d^2w}{dt^2} \Big|_{t=0} = \frac{16}{45}$$

O diagrama de blocos pode ser construído como mostrado na Fig. 2.32.

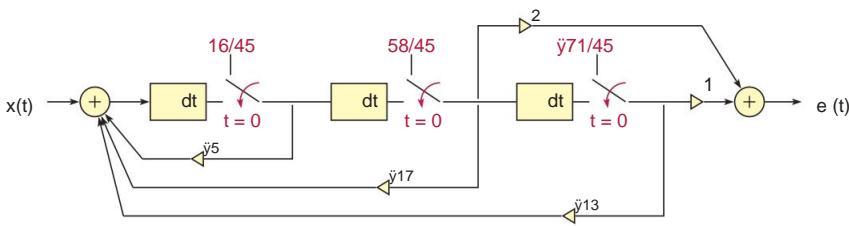


Figura 2.32 – Diagrama de blocos do Exemplo 2.17.

2.7 Resposta ao Impulso e Convolução

Nas seções anteriores deste capítulo, exploramos o uso de equações diferenciais para descrever o comportamento no domínio do tempo de sistemas de tempo contínuo e concluímos que um sistema CTLTI pode ser completamente descrito por meio de uma equação diferencial ordinária de coeficiente constante. Uma descrição alternativa de um sistema CTLTI pode ser dada em termos de sua resposta ao impulso $h(t)$ que é simplesmente a resposta forçada do sistema em consideração quando o sinal de entrada é um impulso unitário. Isso é ilustrado na Fig. 2.33.

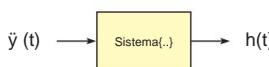


Figura 2.33 – Cálculo da resposta ao impulso para um sistema CTLTI.

Será mostrado mais adiante neste capítulo que a resposta ao impulso também constitui uma descrição completa de um sistema CTLTI. Consequentemente, a resposta de tal sistema a qualquer

sinal de entrada arbitrário $x(t)$ pode ser determinado exclusivamente a partir do conhecimento de seu impulso resposta.

Deve-se notar que nossa motivação para explorar formas de descrição adicionais para sistemas CTLTI não se deve a nenhuma deficiência ou deficiência da equação diferencial do sistema. Sabemos que a equação diferencial é suficiente para a solução de qualquer problema de interação sinal-sistema. A resposta ao impulso $h(t)$ não fornece nenhuma nova informação ou capacidade além daquela fornecida pela equação diferencial. O que ganhamos com isso é um meio alternativo de trabalhar com problemas de interação do sistema de sinal que às vezes pode ser mais conveniente e que pode fornecer informações adicionais sobre o comportamento do sistema. Nas seções a seguir, discutiremos como a resposta ao impulso de um sistema CTLTI pode ser obtida a partir da equação diferencial subjacente. A operação reversa também é possível e será discutida em capítulos posteriores.

2.7.1 Encontrando a resposta ao impulso de um sistema CTLTI

Quando trabalhamos no cálculo da resposta forçada de um sistema a partir de sua equação diferencial, contamos com as entradas da Tabela 2.1 para encontrar uma solução específica. Primeiro, a forma da solução particular apropriada para o tipo de sinal de entrada em consideração é obtida na tabela. A solução particular é então testada contra a equação diferencial e os valores de quaisquer coeficientes desconhecidos são calculados. Em seguida, a solução particular é combinada com a solução homogênea para formar a resposta forçada do sistema, e as condições iniciais são impostas para determinar os valores de quaisquer coeficientes remanescentes.

Ao determinar a resposta ao impulso de um sistema a partir de sua equação diferencial, nos deparamos com um obstáculo: não há nenhuma entrada na Tabela 2.1 que corresponda a um sinal de entrada na forma $x(t) = \dot{y}(t)$. Para uma equação diferencial de primeira ordem, podemos usar a técnica descrita na Seção 2.5.1 e obter a resposta ao impulso por meio do uso da Eqn. (2.55) com $t_0 = 0$, $y(0) = 0$ e $x(\dot{y}) = \dot{y}(\dot{y})$. No entanto, esta abordagem não é aplicável a uma equação diferencial de ordem superior. Portanto, adotaremos uma abordagem ligeiramente diferente para encontrar a resposta ao impulso de um sistema CTLTI:

1. Use uma função degrau unitário para o sinal de entrada e calcule a resposta forçada do sistema usando as técnicas apresentadas nas seções anteriores. Esta é a resposta em degrau unitário do sistema.
2. Diferencie a resposta em degrau unitário do sistema para obter a resposta ao impulso, ou seja,

$$h(t) = \frac{dy(t)}{dt} \quad (2.134)$$

Essa ideia se baseia no fato de que a diferenciação é um operador linear. Dado que

$$y(t) = \text{Sys}\{x(t)\} \quad (2.135)$$

Nós temos

$$\frac{dy(t)dt}{dt} = \frac{d}{dt} \text{Sistema}\{x(t)\} = \text{Sistema} \quad \frac{dx(t)dt}{dt} \quad (2.136)$$

Escolhendo o sinal de entrada como uma função degrau unitário, ou seja, $x(t) = u(t)$, e também lembrando que $du(t)/dt = \dot{u}(t)$, obtemos $du(t)dt$

$$\text{Sys}\{\dot{u}(t)\} = \text{Sys} \quad \frac{d}{dt} = \frac{d}{dt} \text{Sis}\{u(t)\} \quad (2.137)$$

2.7. Resposta ao Impulso e Convolução

É importante lembrar que a relação expressa pela Eqn. (2.137) só é válido para um sistema CTLTI. Esta não é uma limitação séria, pois raramente teremos uma razão para calcular uma resposta ao impulso, a menos que o sistema seja linear e invariante no tempo.

Exemplo 2.18: Resposta ao impulso do circuito RC simples

Determine a resposta ao impulso do circuito RC de primeira ordem do Exemplo 2.4, mostrado na Fig. 2.9, primeiro na forma paramétrica e, em seguida, usando os valores dos elementos $R = 1 \Omega$ e $C = 1/4 F$. Assuma que o sistema está inicialmente relaxado, isto é, não há energia inicial armazenada no sistema. (Lembre-se de que esta é uma condição necessária para que o sistema seja CTLTI.)

Solução: Vamos resolver este problema usando dois métodos diferentes. A equação diferencial para o circuito foi dada pela Eqn. (2.17). Como temos uma equação diferencial de primeira ordem, podemos usar o método de solução que levou à Eqn. (2.55) na Seção 2.5.1. Fazendo $\ddot{y} = 1/RC$, $t_0 = 0$ e $y(0) = 0$ temos

$$y(t) = \hat{\lim}_{t \rightarrow 0} \frac{1}{e^{\dot{y}(t)\dot{y}}/RC} \times \frac{1}{RC} \int_{\dot{y}(t)}^{t_0} dt \quad (2.138)$$

Se o sinal de entrada for escolhido para ser um sinal de impulso unitário, então o sinal de saída torna-se a resposta ao impulso do sistema. Definir $x(t) = \dot{y}(t)$ leva a

$$h(t) = \hat{\lim}_{t \rightarrow 0} \frac{1}{e^{\dot{y}(t)\dot{y}}/RC} \dot{y} \frac{1}{RC} \int_{\dot{y}(t)}^{t_0} dt \quad (2.139)$$

Usando a propriedade de peneiração da função de impulso unitário, obtemos

$$h(t) = u(t) \frac{1}{RC} e^{\dot{y}t/RC}$$

Agora obteremos o mesmo resultado usando o método mais geral desenvolvido na Seção 2.7.1. Lembre-se de que a resposta em degrau unitário do sistema foi encontrada no Exemplo 2.8 Eqn. (2.59) como

$$y(t) = 1 \cdot \dot{y} e^{\dot{y}t/RC} u(t)$$

Diferenciando a Eq. (2.140) em relação ao tempo obtemos a resposta ao impulso:

$$h(t) = \frac{dy(t)}{dt} = \frac{d}{dt} 1 \cdot \dot{y} e^{\dot{y}t/RC} u(t) = \frac{1}{RC} e^{\dot{y}t/RC} u(t)$$

que é o mesmo resultado obtido na Eqn. (2.140). Com a substituição dos valores dos elementos especificados, a resposta ao impulso torna-se

$$h(t) = 4 e^{\dot{y}4t} u(t) \quad (2.140)$$

que é representado graficamente na Fig. 2.34.

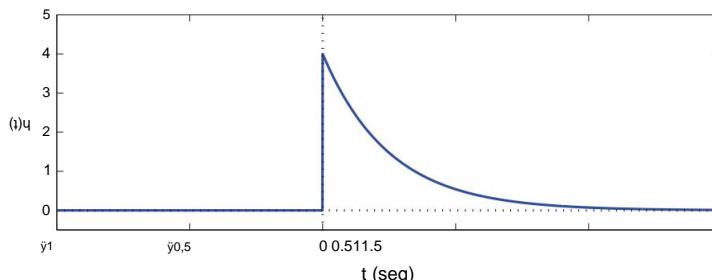


Figura 2.34 – Resposta ao impulso do sistema do Exemplo 2.18.

Recursos de software:
ex_2_18.m

Exemplo 2.19: Resposta ao impulso de um sistema de segunda ordem Determine a resposta ao impulso do circuito RLC que foi usado no Exemplo 2.6 e mostrado na Fig. 2.11. Use valores de elemento $R = 2 \Omega$, $L = 1 \text{ H}$ e $C = 1/26 \text{ F}$.

Solução: A solução homogênea para o sistema foi encontrada na parte (a) do Exemplo 2.15 como sendo

$$y_h(t) = d1 e^{\sqrt{5}t} \cos(5t) + d2 e^{\sqrt{5}t} \sin(5t)$$

Começaremos encontrando a resposta do degrau unitário. A forma da solução particular é obtida na Tabela 2.1 como

$$y_p(t) = k1$$

Testar a solução particular com a equação diferencial leva à conclusão de que $k1 = 1$, e a solução completa é

$$\begin{aligned} y(t) &= y_h(t) + y_p(t) \\ &= d1 e^{\sqrt{5}t} \cos(5t) + d2 e^{\sqrt{5}t} \sin(5t) + 1 \end{aligned}$$

Como estamos determinando a resposta ao impulso, naturalmente assumiremos que o sistema é CT廖I e, portanto, inicialmente relaxado. Isto exige

$$y(0) = d1 + 1 = 0 \quad (2.141)$$

e

$$\begin{aligned} \left. \frac{dy_h(t)}{dt} \right|_{t=0} &= (\ddot{y}d1 + 5\dot{y}d2) e^{\sqrt{5}t} \cos(5t) + (\ddot{y}5d1 - \dot{y}d2) e^{\sqrt{5}t} \sin(5t) \\ &= \ddot{y}d1 + 5d2 = 0 \end{aligned} \quad (2.142)$$

Resolvendo Eq. (2.141) e (2.142) resulta em $d1 = \ddot{y}1$ e $d2 = \ddot{y}0,2$. Portanto, a resposta em degrau unitário do sistema é

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = \ddot{y}e^{\sqrt{5}t} \cos(5t) + (0,2) e^{\sqrt{5}t} \sin(5t) + 1$$

para $t \geq 0$. A resposta ao impulso é encontrada diferenciando a resposta em degrau unitário em relação ao tempo, e é

$$\begin{aligned} &= \frac{dy(t)h(t)}{dt} \\ &= \ddot{y}e^{\sqrt{5}t} \cos(5t) + 5e^{\sqrt{5}t} \sin(5t) + (0,2) e^{\sqrt{5}t} \sin(5t) - (0,2) e^{\sqrt{5}t} \cos(5t) \\ &= (5,2) e^{\sqrt{5}t} \sin(5t) \end{aligned} \quad (2.143)$$

para $t \geq 0$. Esse resultado é representado graficamente na Fig. 2.35.

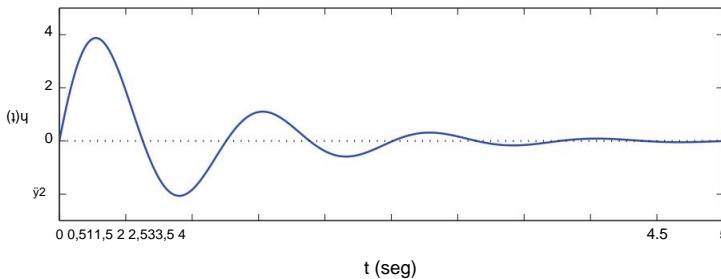


Figura 2.35 – Resposta ao impulso do sistema do Exemplo 2.19.

Recursos de software:
ex_2_19.m

2.7.2 Operação de convolução para sistemas CTLTI

Na Seção 1.3.3 formulamos a decomposição de um sinal arbitrário em funções de impulso. Especificamente, estabelecemos que um sinal $x(t)$ pode ser expresso por meio de uma decomposição na forma

$$x(t) = \sum_{y}^{\infty} x(\bar{y}) \delta(t - \bar{y}) dy \quad (2.144)$$

Usando a Eq. (2.144) o sinal de saída $y(t)$ de um sistema pode ser escrito em termos de seu sinal de entrada $x(t)$ como

$$y(t) = \text{Sys}\{x(t)\} = \text{Sys} \sum_{y}^{\infty} x(\bar{y}) \delta(t - \bar{y}) dy \quad (2.145)$$

Assumindo que o sistema em consideração é linear, tomaremos a liberdade³ de trocar a ordem de integração e transformação do sistema e escrever o sinal de saída como

$$y(t) = \sum_{y}^{\infty} \text{Sys}\{x(\bar{y}) \delta(t - \bar{y})\} dy \quad (2.146)$$

A justificativa para essa ação pode ser dada considerando a integral da Eqn. (2.144) como o caso limite de uma soma infinita conforme demonstrado no Capítulo 1, Eqn. (1.54).

Para fins de discussão, vamos assumir que sabemos que o sistema em consideração é linear, mas não necessariamente invariante no tempo. A resposta de um sistema linear a um sinal de impulso escalado por $x(\bar{y})$ e deslocado no tempo por \bar{y} é

$$\text{Sys}\{x(\bar{y}) \delta(t - \bar{y})\} = x(\bar{y}) \text{Sys}\{\delta(t - \bar{y})\}$$

Eq. (2.146) pode, portanto, ser escrita como

$$y(t) = \sum_{y}^{\infty} x(\bar{y}) \text{Sys}\{\delta(t - \bar{y})\} dy \quad (2.147)$$

³ Eq. (2.146) representa essencialmente o princípio da superposição aplicado a uma soma infinita de termos $x(\bar{y}) \delta(t - \bar{y})$. Existem estudos que concluem que podem ser encontrados sinais e circunstâncias particulares em que a transição da Eqn. (2.145) para a Eqn. (2.146) seria problemático. Para os tipos de sinais e sistemas encontrados na prática de engenharia, no entanto, a Eqn. (2.146) geralmente será válido.

Usando a Eq. (2.147), a resposta de um sistema linear a qualquer sinal de entrada arbitrário $x(t)$ pode ser calculada, desde que conheçamos as respostas do sistema a sinais de impulso deslocados no tempo por todos os valores possíveis. Assim, o conhecimento necessário para determinar a saída de um sistema linear em resposta a um sinal arbitrário $x(t)$ é

$$h\ddot{y}(t) = \text{Sys}\{\ddot{y}(t \ddot{y} \ddot{y})\}, \quad \text{todos } \ddot{y}$$

Enquanto a Eq. (2.147) nos fornece um método viável para determinar a saída do sistema $y(t)$ para qualquer sinal de entrada $x(t)$, a vasta quantidade de conhecimento que precisamos possuir sobre o sistema torna isso altamente impraticável.

Para o resultado na Eqn. (2.147) para ser de uso prático, o pré-requisito de conhecimento sobre o sistema deve ser reduzido a um nível administrável. Seja a resposta ao impulso do sistema definida como

$$h(t) = \text{Sys}\{\ddot{y}(t)\} \quad (2.148)$$

Se, além de linear, o sistema também for invariante no tempo, então a resposta do sistema a qualquer sinal de impulso deslocado pode ser derivada apenas do conhecimento de $h(t)$, isto é,

$$h\ddot{y}(t) = \text{Sys}\{\ddot{y}(t \ddot{y} \ddot{y})\} = h(t \ddot{y} \ddot{y}) \quad (2.149)$$

consistente com a definição de invariância temporal dada pela Eqn. (2.10). Agora o sinal de saída pode ser escrito como

$$y(t) = \hat{\int}_{\ddot{y}}^{\ddot{y}} x(\ddot{y}) h(t \ddot{y} \ddot{y}) d\ddot{y} \quad (2.150)$$

Eq. (2.150) é conhecida como a integral de convolução para sinais de tempo contínuo. O sinal de saída $y(t)$ de um sistema CTLTI é obtido pela convolução do sinal de entrada $x(t)$ e a resposta ao impulso $h(t)$ do sistema. Essa relação é expressa em notação compacta como

$$y(t) = x(t) \ddot{y} h(t) \quad (2.151)$$

onde o símbolo \ddot{y} representa o operador de convolução. Mostraremos mais adiante nesta seção que o operador de convolução é comutativo, ou seja, a relação na Eqn. (2.150) também pode ser escrita na forma alternativa

$$\begin{aligned} y(t) &= h(t) \ddot{y} x(t) \\ &= \hat{\int}_{\ddot{y}}^{\ddot{y}} h(\ddot{y}) x(t \ddot{y} \ddot{y}) d\ddot{y} \end{aligned} \quad (2.152)$$

As funções de $h(t)$ ex (t) podem ser trocadas sem afetar o resultado final.

Resumo da convolução em tempo contínuo:

$$y(t) = x(t) \ddot{y} h(t) = \hat{\int}_{\ddot{y}}^{\ddot{y}} x(\ddot{y}) h(t \ddot{y} \ddot{y}) d\ddot{y} \quad (2.153)$$

$$= h(t) \ddot{y} x(t) = \hat{\int}_{\ddot{y}}^{\ddot{y}} h(\ddot{y}) x(t \ddot{y} \ddot{y}) d\ddot{y} \quad (2.154)$$

Ao calcular a integral de convolução, é útil esboçar os sinais. As etapas gráficas envolvidas no cálculo da convolução de dois sinais $x(t)$ e $h(t)$ em um instante de tempo específico t podem ser resumidas da seguinte forma:

1. Esboce o sinal $x(\tilde{y})$ em função da variável independente \tilde{y} . Isso corresponde a uma simples mudança de nome na variável independente, e o gráfico do sinal $x(\tilde{y})$ aparece idêntico ao gráfico do sinal $x(t)$. (Ver Fig. 2.36.)

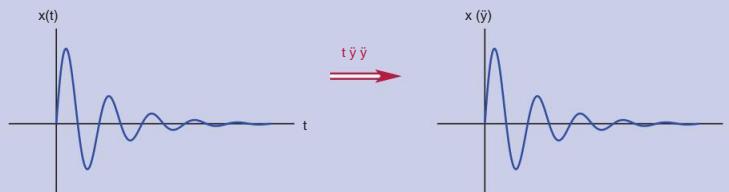


Figura 2.36 – Obtenção de $x(\tilde{y})$ para a integral de convolução.

2. Para um valor específico de t , esboce o sinal $h(t \tilde{y} \tilde{y})$ como uma função do independente variável \tilde{y} . Esta tarefa pode ser dividida em duas etapas, conforme a seguir:

- Esboce $h(\tilde{y}\tilde{y})$ em função de \tilde{y} . Esta etapa equivale a reversão de tempo do sinal $h(\tilde{y})$.
- Em $h(\tilde{y})$ substitua $\tilde{y} \tilde{y} \tilde{y} \tilde{y} t$. Esta etapa rende

$$h(\tilde{y}\tilde{y}) = h(t \tilde{y} \tilde{y}) \quad (2.155)$$

e equivale ao deslocamento de tempo $h(\tilde{y}\tilde{y})$ por t .

Veja a Fig. 2.37 para uma ilustração das etapas para obtenção de $h(t \tilde{y} \tilde{y})$.

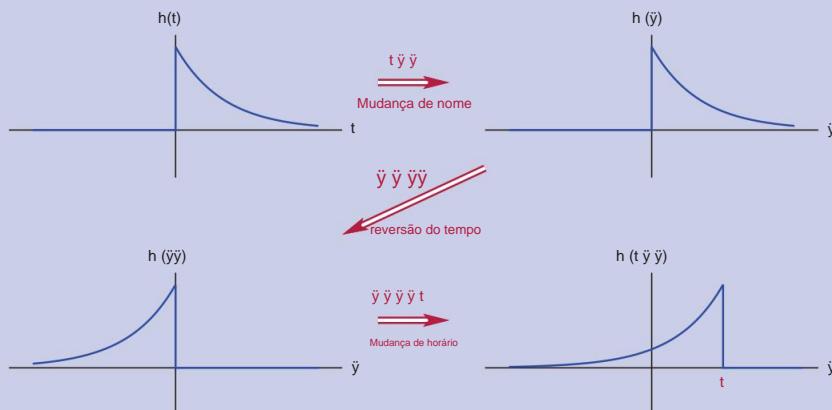


Figura 2.37 – Obtenção de $h(t \tilde{y} \tilde{y})$ para a integral de convolução.

- Multiplique os dois sinais esboçados em 1 e 2 para obter o produto $f(\tilde{y}) = x(\tilde{y}) h(t \tilde{y} \tilde{y})$.
- Calcule a área sob o produto $f(\tilde{y}) = x(\tilde{y}) h(t \tilde{y} \tilde{y})$ integrando-a sobre a variável independente \tilde{y} . O resultado é o valor do sinal de saída no instante de tempo específico t .
- Repita as etapas de 1 a 4 para todos os valores de t de interesse.

Os próximos exemplos ilustrarão os detalhes da operação de convolução para sistemas CTLTI.

Exemplo 2.20: Resposta em degrau unitário do circuito RC

revisitada A resposta em degrau unitário do circuito RC simples foi encontrada no Exemplo 2.8 usando o método de solução direta discutido na Seção 2.5.1. Resolva o mesmo problema usando a operação de convolução.

Solução: No Exemplo 2.18 descobrimos que a resposta ao impulso do circuito RC é

$$h(t) = u(t) \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}$$

Com base na integral de convolução da Eqn. (2.150), as duas funções de que precisamos são $x(\tilde{y})$ e $h(t - \tilde{y})$, ambas como funções de \tilde{y} . A Fig. 2.38 mostra essas funções para os dois casos de $t \leq 0$ e de $t > 0$.

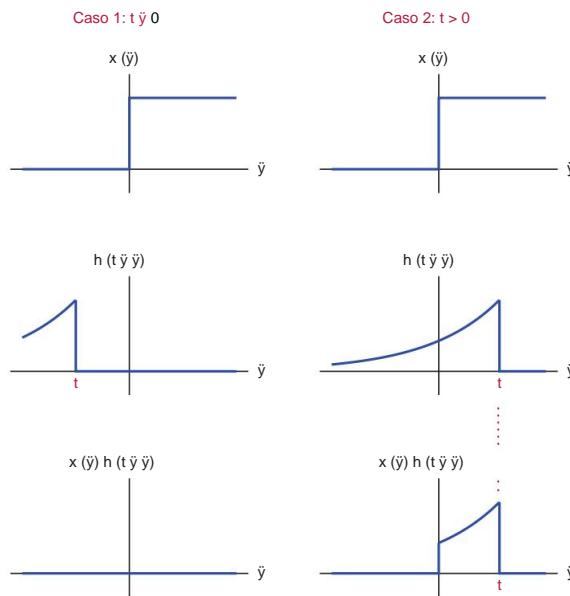


Figura 2.38 – Sinais envolvidos na integral de convolução do Exemplo 2.20.

É óbvio que, para $t \leq 0$, essas duas funções não se sobreponem em nenhum lugar e, portanto, o integrando $x(\tilde{y}) h(t - \tilde{y})$ da integral de convolução é zero para todos os valores de \tilde{y} . Assim, uma conclusão fácil é

$$y(t) = 0, \text{ para } t \leq 0 \text{ Se } t$$

> 0 , as duas funções $x(\tilde{y})$ e $h(t - \tilde{y})$ se sobreponem para valores de \tilde{y} no intervalo $(0, t)$. $\frac{1}{RC} \int_0^t e^{-\frac{(t-\tilde{y})}{RC}} d\tilde{y}$ Portanto, a saída Neste intervalo, temos

$$y(t) = \int_0^t \frac{1}{RC} e^{-\frac{(t-\tilde{y})}{RC}} d\tilde{y} = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}, \quad \text{para } t > 0$$

Usando uma função degrau unitário para contabilizar ambos os segmentos da solução encontrada, a solução geral válida para todo t pode ser escrita como

$$y(t) = 1 - e^{-\frac{t}{RC}} u(t)$$

que concorda com o resultado encontrado no Exemplo 2.8 resolvendo a equação diferencial diretamente.

Demonstração interativa: conv demo1.m

O programa de demonstração “conv demo1.m” é baseado no Exemplo 2.20, e permite a visualização da operação de convolução. Os sinais $x(\tilde{y})$, $h(t \tilde{y} \tilde{y})$ e o produto $[x(\tilde{y}) h(t \tilde{y} \tilde{y})]$ são representados graficamente no lado esquerdo da tela de demonstração. A variável de tempo pode ser avançada por meio de um controle deslizante. À medida que o tempo t varia, os gráficos do fator $h(t \tilde{y} \tilde{y})$ e do integrando $[x(\tilde{y}) h(t \tilde{y} \tilde{y})]$ são atualizados. A área sob o integrando $[x(\tilde{y}) h(t \tilde{y} \tilde{y})]$ é sombreada para corresponder ao resultado da integral para aquele valor particular de t .

Recursos de software:

conv demo1.m

Exemplo 2.21: Resposta de pulso do circuito RC revisitada

Usando a convolução, determine a resposta do circuito RC simples do Exemplo 2.4 a um sinal de entrada de pulso unitário $x(t) = \tilde{y}(t)$.

Solução: Como no exemplo anterior, será útil esboçar as funções envolvidas na integral de convolução, ou seja, $x(\tilde{y})$ e $h(t \tilde{y} \tilde{y})$. Ao fazer isso, consideraremos três possibilidades distintas para a variável de tempo t , conforme mostrado na Fig. 2.39.

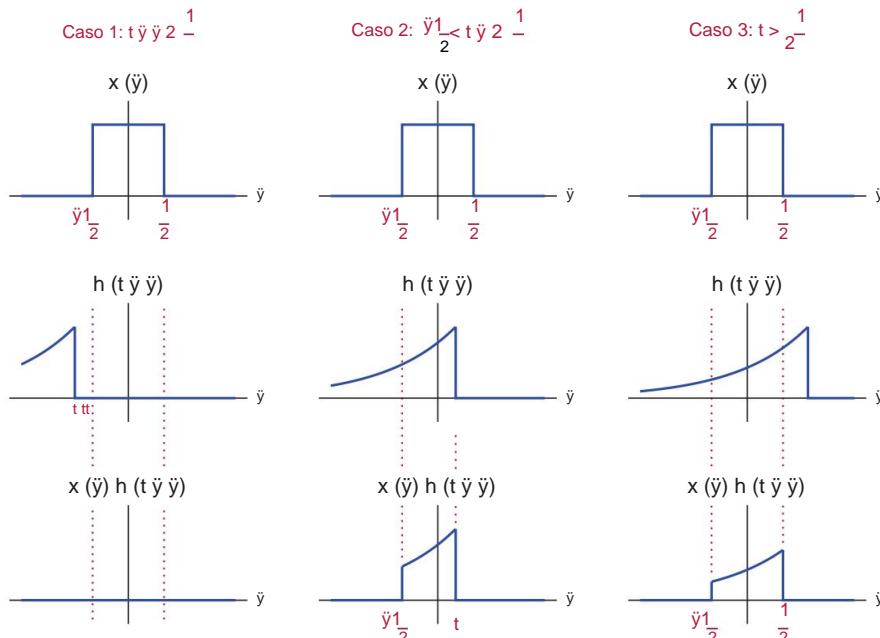


Figura 2.39 – Sinais envolvidos na integral de convolução do Exemplo 2.21.

A integral de convolução será avaliada separadamente para cada um dos três casos. Sugere-se que o leitor siga o desenvolvimento abaixo enquanto usa o programa de demonstração interativo “conv demo2.m” para observar as sobreposições de $x(\tilde{y})$ e $h(t \tilde{y} \tilde{y})$ em cada um dos três casos.

Caso 1: $t \leq \frac{1}{2}$

Não há sobreposição entre as duas funções neste caso, portanto seu produto é igual a zero para todos os valores de \tilde{y} . Como resultado, o sinal de saída é

$$y(t) = 0, \quad 1 \text{ para } t \leq \frac{1}{2} \quad (2.156)$$

Caso 2: $\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2}$

Para este caso, as duas funções se sobrepõem nos limites $\frac{1}{2} < \tilde{y} \leq t$. Configuração de integração de alcance, podemos calcular o sinal de saída como

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-1/2}^t \frac{1}{RC} e^{\tilde{y}(t-\tilde{y})/RC} d\tilde{y} \\ &= 1 - e^{\tilde{y}(t+1/2)/RC}, \quad \text{para } -\frac{1}{2} < t \leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Caso 3: $t > \frac{1}{2}$

Para este caso, a sobreposição das duas funções ocorrerá no intervalo $\frac{1}{2} < \tilde{y} \leq t$. Definindo limites de integração para as extremidades desse novo intervalo, temos

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{RC} e^{\tilde{y}(t-\tilde{y})/RC} d\tilde{y} \\ &= e^{\tilde{y}/RC} \Big|_{-1/2}^{1/2} = e^{1/2RC} - e^{-1/2RC}, \quad \text{para } t > \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Calculamos o sinal de saída em cada um dos três intervalos de tempo distintos que identificamos, principalmente antes do início do pulso, durante o pulso e após o final do pulso. Juntando essas três soluções parciais, a solução completa para o sinal de saída é obtida como

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t \leq \frac{1}{2} \\ 1 - e^{\tilde{y}(t+1/2)/RC}, & \frac{1}{2} < t \leq \frac{1}{2} \\ e^{\tilde{y}/RC} \Big|_{-1/2}^{1/2} = e^{1/2RC} - e^{-1/2RC}, & t > \frac{1}{2} \end{cases} \quad (2.157)$$

e é mostrado na Fig. 2.40.

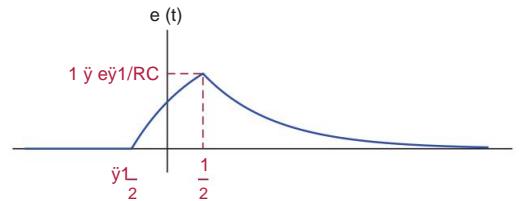


Figura 2.40 – Resultado da convolução para o Exemplo 2.21.

É fácil ver que o sinal de saída encontrado na Eqn. (2.157) torna-se idêntico ao resultado obtido na Eqn. (2.64) do Exemplo 2.9 se definirmos $A = 1$, $w = 1$, $R = 1$ e $C = 1/4 F$.

Recursos de software:

`ex_21.m`

Demonstração interativa: `conv demo2.m`

O programa de demonstração “`conv demo2.m`” é baseado no Exemplo 2.21, Fig. 2.39 e Fig. 2.40. Permite a visualização da operação de convolução. A interface gráfica do usuário é semelhante à de “`conv demo1.m`”, exceto que é adaptada para usar os sinais do Exemplo 2.21.

Recursos de software:

`conv demo2.m`

Exemplo 2.22: Um problema de convolução mais complexo

Considere um sistema com a resposta ao impulso

$$h(t) = e^{-t} [u(t) - u(t-2)]$$

Seja o sinal de entrada aplicado a este sistema

$$\begin{aligned} x(t) &= \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ 1, & 1 \leq t < 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \end{aligned}$$

Determine o sinal de saída $y(t)$ usando convolução.

Solução: As funções $x(\tilde{y})$ e $h(t-\tilde{y})$ envolvidas na integral de convolução são mostradas na Fig. 2.41.

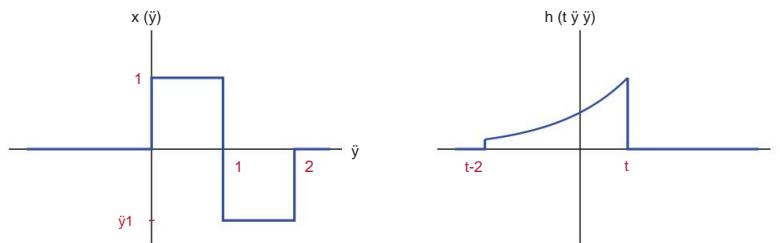


Figura 2.41 – As funções $x(\tilde{y})$ e $h(t-\tilde{y})$ para o problema de convolução do Exemplo 2.22.

Para este problema, precisaremos distinguir entre seis regiões diferentes para a variável de tempo t , conforme mostrado na Fig. 2.42. O programa de demonstração “`conv demo3.m`” pode ser usado junto com a solução descrita abaixo para observar as regiões sobrepostas no tempo.

Caso 1: $t \leq 0$

As funções $x(\tilde{y})$ e $h(t-\tilde{y})$ não se sobrepõem para $t \leq 0$ e, portanto, seu produto é igual a zero para todos os valores de \tilde{y} . Como resultado, o sinal de saída é

$$y(t)=0, \quad \text{para } t \leq 0$$

Caso 2: $0 < t \leq 1$

Neste caso, as duas funções se sobrepõem para o intervalo $0 < \hat{y} \leq t$. O sinal de saída é

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t (1) e^{-\hat{y}(t-\hat{y})} d\hat{y} \\ &= 1 - e^{-t}, \quad \text{para } 0 < t \leq 1 \end{aligned}$$

Caso 3: $1 < t \leq 2$

Neste caso, as duas funções se sobrepõem para o intervalo $0 < \hat{y} \leq t$. No intervalo $0 < \hat{y} \leq 1$ temos $x(\hat{y}) = 1$, e o integrando resultante é positivo. Por outro lado, no intervalo $1 < \hat{y} \leq t$ temos $x(\hat{y}) = -1$, e o integrando é negativo. Como resultado, duas integrais serão necessárias para a solução:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^1 (1) e^{-\hat{y}(t-\hat{y})} d\hat{y} + \int_1^t (-1) e^{-\hat{y}(t-\hat{y})} d\hat{y} \\ &= -1 + 4,4366 e^{-t}, \quad \text{para } 1 < t \leq 2 \end{aligned}$$

Caso 4: $2 < t \leq 3$

Nesse caso, a região de sobreposição é $t-2 < \hat{y} \leq 2$. Além disso, a borda esquerda de $h(t-\hat{y})$ está no intervalo $0 < t-\hat{y} \leq 1$. No intervalo $t-2 < \hat{y} \leq 1$, o sinal de entrada é $x(\hat{y}) = 1$, e o integrando resultante $[x(\hat{y}) h(t-\hat{y})]$ é positivo. No restante do intervalo de sobreposição, ou seja, para $1 < \hat{y} \leq 2$ temos $x(\hat{y}) = -1$, e o integrando é negativo. Novamente, duas integrais serão formadas:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{t-2}^1 (1) e^{-\hat{y}(t-\hat{y})} d\hat{y} + \int_1^2 (-1) e^{-\hat{y}(t-\hat{y})} d\hat{y} \\ &= -0,1353 + 1,9525 e^{-t}, \quad \text{para } 2 < t \leq 3 \end{aligned}$$

Caso 5: $3 < t \leq 4$

Nesse caso, a região de sobreposição é $t-2 < \hat{y} \leq 2$. A borda esquerda de $h(t-\hat{y})$ está no intervalo $1 < t-\hat{y} \leq 2$. O sinal de saída é

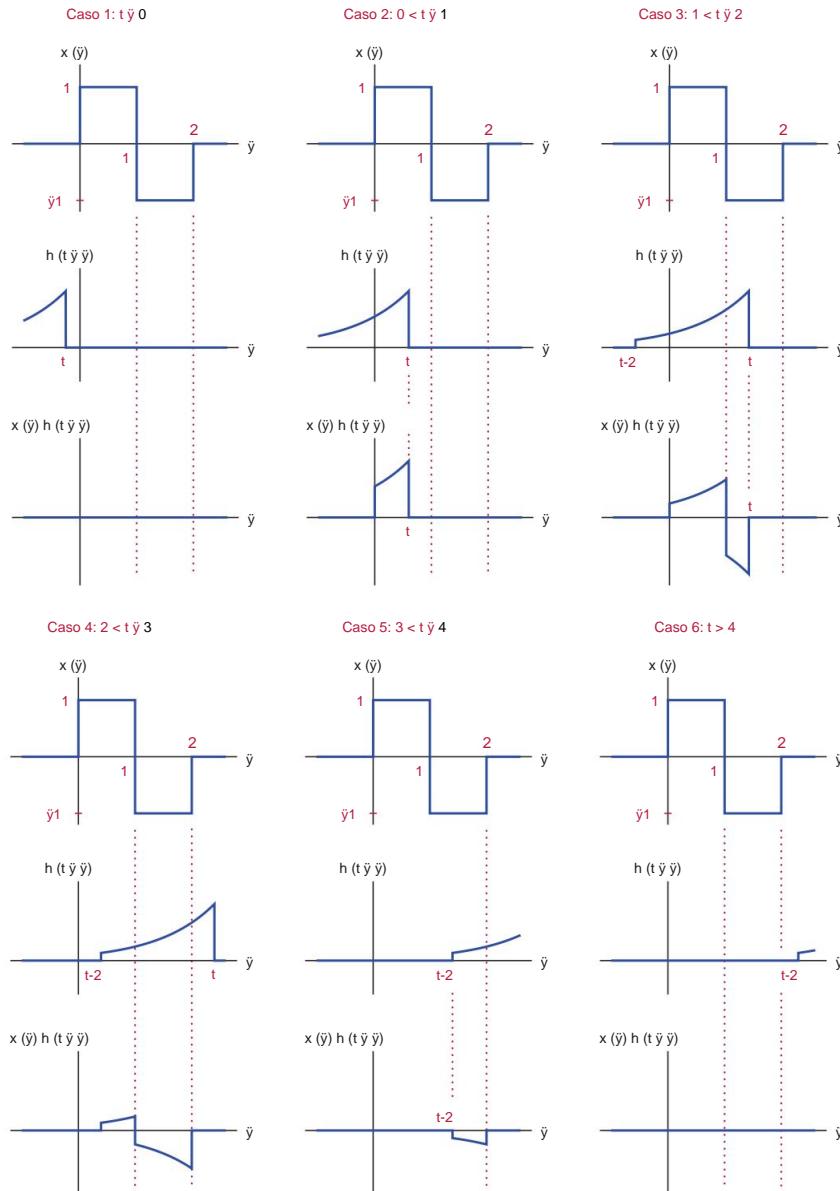
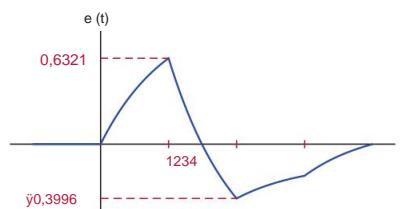
$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{t-2}^2 (-1) e^{-\hat{y}(t-\hat{y})} d\hat{y} \\ &= -0,1353 + 7,3891 e^{-t}, \quad \text{para } 3 < t \leq 4 \end{aligned}$$

Caso 6: $t > 4$

As funções $x(\hat{y})$ e $h(t-\hat{y})$ não se sobrepõem para $t > 4$ e, portanto, o sinal de saída é

$$y(t)=0, \quad \text{para } t > 4$$

O sinal de saída completo é representado graficamente na Fig. 2.43 combinando os resultados encontrados para todas as seis regiões de tempo.

**Figura 2.42** – Sinais envolvidos na integral de convolução do Exemplo 2.22.**Figura 2.43** – Resultado da convolução para o Exemplo 2.22.

Recursos de software:
ex 2.22.m

Demonstração interativa: conv demo3.m

O programa de demonstração “conv demo3.m” é baseado no Exemplo 2.22. Ele facilita a visualização das regiões sobrepostas entre as funções $x(\tilde{y})$ e $h(t - \tilde{y})$ à medida que a variável de tempo t é variada. A interface gráfica do usuário é semelhante às interfaces do usuário de “conv demo1.m” e “conv demo2.m”.

Recursos de software:

conv demo3.m

Nós afirmamos na Eqn. (2.152) que o operador de convolução é comutativo. A prova é direto e agora será dado.

Vamos aplicar a mudança de variável $t - \tilde{y} = \tilde{y}$ à integral na Eqn. (2.150), e escreva como

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) \tilde{y} h(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\tilde{y}} x(t - \tilde{y}) h(\tilde{y}) d\tilde{y} \end{aligned} \quad (2.158)$$

onde também usamos as duas consequências da mudança de variável empregada, a saber

$$1. d\tilde{y} = \tilde{y}d\tilde{y}$$

$$2. \tilde{y} \tilde{y} \pm \tilde{y} \text{ significa } \tilde{y} \tilde{y} \tilde{y}$$

Trocando os limites de integração na Eqn. (2.158) e negando a integral para compensá-la, o sinal de saída pode agora ser escrito como

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\tilde{y}} x(t - \tilde{y}) h(\tilde{y}) d\tilde{y} \\ &= h(t) \tilde{y} x(t) \end{aligned} \quad (2.159)$$

provando assim a propriedade comutativa do operador de convolução.

O exemplo a seguir ilustrará o uso da forma alternativa da convolução integral baseada na propriedade comutativa.

Exemplo 2.23: Usando uma forma alternativa de

convolução Encontre a resposta em degrau unitário do circuito RC com resposta ao impulso

$$h(t) = u(t) \frac{1}{RC} e^{-t/RC}$$

usando a forma alternativa da integral de convolução dada pela Eqn. (2.159).

Solução: Usando a integral de convolução da Eqn. (2.159), as duas funções de que precisamos são $h(\tilde{y})$ e $x(t - \tilde{y})$, ambas como funções de \tilde{y} . A Fig. 2.44 mostra essas funções para os dois casos de $t < 0$ e $t > 0$. Para $t < 0$ essas duas funções não se sobrepõem em nenhum lugar e, portanto, o integrando $[h(\tilde{y}) x(t - \tilde{y})]$ da integral de convolução é zero para todos os valores de \tilde{y} . Concluímos, portanto, que

$$y(t) = 0, \quad \text{para } t < 0 \quad (2.160)$$

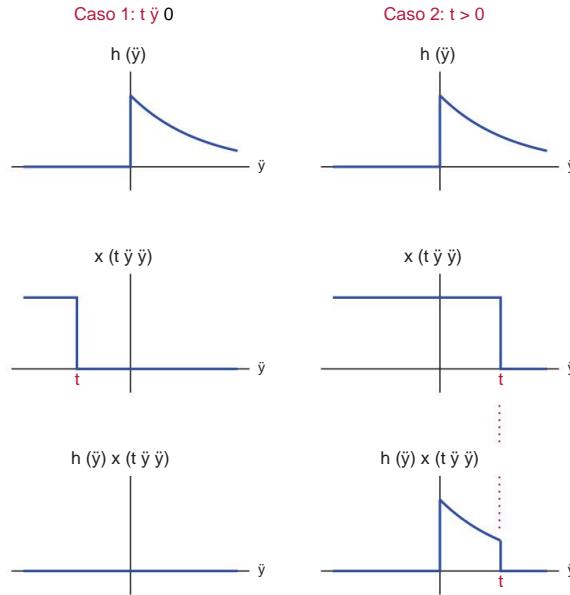


Figura 2.44 – Sinais envolvidos na integral de convolução do Exemplo 2.23.

Para valores de $t > 0$, as duas funções $h(\hat{y})$ e $x(t - \hat{y})$ se sobrepõem para valores de \hat{y} no intervalo $(0, t)$. Portanto, temos $x(t - \hat{y}) = 1$ e $h(\hat{y}) = 0$ para $\hat{y} > t$. Neste

$$y(t) = \int_0^t \frac{1}{RC} e^{\hat{y}t/RC} d\hat{y} = \frac{1}{RC} e^{\hat{y}t/RC} \Big|_0^t = \frac{1}{RC} (e^{yt/RC} - 1), \quad \text{para } t > 0$$

Usando uma função degrau unitário para contabilizar ambos os segmentos da solução encontrada, a solução geral válida para todo t é

$$y(t) = u(t) - u(t-RC) + \frac{1}{RC} (e^{yt/RC} - 1) u(t-RC)$$

o que concorda com o resultado encontrado no Exemplo 2.20.

Demonstração interativa: conv demo4.m

O programa de demonstração “conv demo4.m” é baseado no Exemplo 2.23. Ele facilita a visualização das regiões sobrepostas entre as funções $h(\hat{y})$ e $x(t - \hat{y})$ conforme a variável de tempo t é variada. A interface gráfica do usuário é idêntica à interface do usuário de “conv demo1.m”.

Recursos de software:

conv demo4.m

2.8 Causalidade em Sistemas de Tempo Contínuo

A causalidade é uma característica importante dos sistemas fisicamente realizáveis. Um sistema é considerado causal se o valor atual do sinal de saída depende apenas dos valores atuais e passados de

o sinal de entrada, mas não em seus valores futuros. Por exemplo, um sistema de tempo contínuo com relação entrada-saída

$$y(t) = x(t) + x(t - 0,01) + x(t - 0,02) \quad (2.161)$$

é causal, pois o sinal de saída pode ser calculado com base nos valores atuais e passados do sinal de entrada. Por outro lado, o sistema dado por

$$y(t) = x(t) + x(t - 0,01) + x(t + 0,01) \quad (2.162)$$

é não causal, pois o cálculo do sinal de saída requer a antecipação de um valor futuro do sinal de entrada.

Um sistema não causal pode ser realizado?

A resposta depende do tipo de realização que buscamos. Considere o sistema representado pela Eqn. (2.161). Para fins de discussão, suponha que o sinal $x(t)$ seja a saída de um microfone em um estúdio de gravação onde uma banda ao vivo está tocando. O sinal é atrasado em 0,01 segundos e 0,02 segundos em dois sistemas separados, e as saídas desses sistemas de atraso são adicionadas ao sinal original $x(t)$ para produzir o sinal $y(t)$ em tempo real, ou seja, enquanto a entrada sinal está sendo reproduzido. Esse tipo de processamento de sinal é chamado de processamento em tempo real e é ilustrado na Fig. 2.45.

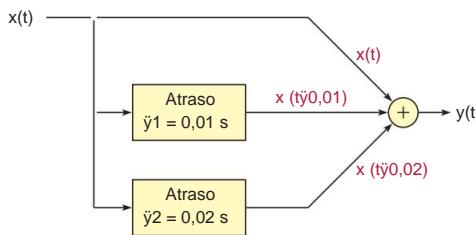


Figura 2.45 – Sistema causal dado pela Eqn. (2.161).

Agora considere o sistema na Eqn. (2.162). Claramente, este sistema não pode ser realizado para processamento em tempo real, pois o valor $x(t + 0,01)$ não está disponível no instante de tempo t quando a saída é calculada. Se devemos realizar este sistema (alguns sistemas não causais podem ter propriedades desejadas em outros aspectos), então devemos realizá-lo no modo de pós-processamento. Os sinais $x(t)$, $x(t - 0,01)$ e $x(t + 0,01)$ são registrados. O sinal de saída é calculado a partir dessas gravações após o fato, por exemplo, depois que a banda termina de tocar a música. Outra forma de olhar para este tipo de processamento é considerar um novo sinal $w(t)$ definido como

$$w(t) = y(t - 0,01) \quad (2.163)$$

e escreva a descrição do sistema em termos do novo sinal de saída atrasado $w(t)$ na forma

$$w(t) = x(t - 0,01) + x(t - 0,02) + x(t) \quad (2.164)$$

O sinal $w(t)$ pode ser calculado em tempo real, e podemos ouvi-lo enquanto a banda está tocando. No entanto, representa uma versão atrasada do sinal de saída real $y(t)$ que nos interessa. Em essência, estamos fazendo o pós-processamento. Alguns sistemas não causais podem se tornar causais por meio da adição de atrasos, como fizemos na Eqn. (2.163). No entanto, veremos que nem sempre isso é possível.

Para sistemas CTI, a propriedade de causalidade pode estar relacionada à resposta ao impulso do sistema. Lembre-se de que o sinal de saída $y(t)$ do sistema é igual à convolução de seu sinal de entrada $x(t)$ e sua resposta ao impulso $h(t)$. Usaremos a forma alternativa da integral de convolução dada por

$$\begin{aligned} y(t) &= h(t) \ddot{\ast} x(t) \\ &= \int_{-\infty}^t h(\tau) x(t - \tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.165)$$

Para que o sistema considerado seja causal, o cálculo de $y(t)$ não deve exigir nenhum valor futuro do sinal de entrada. Conseqüentemente, o termo $x(t - \tau)$ na integral não deve conter referências a quaisquer valores futuros. Nós precisamos

$$t - \tau \geq 0 \quad (2.166)$$

e equivalentemente $\tau \leq t$. Assim, o integrando na Eqn. (2.166) não deve ter nenhum valor diferente de zero para $\tau < 0$. Isso, por sua vez, requer que a resposta ao impulso do sistema seja igual a zero para todos os valores negativos de seu argumento, ou seja,

$$h(t) = 0 \text{ para todo } t < 0 \quad (2.167)$$

Este resultado intuitivamente faz sentido. A resposta ao impulso de um sistema CTI causal não pode começar antes de $t = 0$, pois isso exigiria que o sistema antecipasse a ocorrência do impulso em $t = 0$. Usando a Eqn. (2.167), a relação de convolução na Eqn. (2.165) pode ser escrita na forma do lado direito

$$y(t) = \int_0^t h(\tau) x(t - \tau) d\tau \quad (2.168)$$

2.9 Estabilidade em Sistemas de Tempo Contínuo

Um sistema é considerado estável no sentido BIBO (bounded-inputbounded-output) se qualquer sinal de entrada limitado produzir um sinal de saída limitado.

Um sinal de entrada $x(t)$ é dito limitado se existe um limite superior B_x tal que

$$x(t) < B_x < \bar{x} \quad (2.169)$$

para todos os valores de t . Não importa quão grande seja o limite superior B_x , desde que seja finito. Para que o sistema seja estável, um limite superior finito B_y deve existir para o sinal de saída em resposta a qualquer sinal de entrada limitado conforme descrito pela Eqn. (2.169).

Para a estabilidade de um sistema de tempo contínuo:

$$x(t) < B_x < \bar{x} \text{ implica que } y(t) < B_y < \bar{y} \quad (2.170)$$

Se o sistema em questão for CTI, então gostaríamos de relacionar a condição de estabilidade dada pela Eqn. (2.170) para a resposta ao impulso do sistema, bem como sua equação diferencial. A derivação da condição necessária segue:

O sinal de saída de um sistema CTLTI é encontrado a partir de seu sinal de entrada e resposta ao impulso por meio do uso da integral de convolução

$$y(t) = \hat{\int}_{\tilde{y}}^y h(\tilde{y}) x(t - \tilde{y}) d\tilde{y} \quad (2.171)$$

O valor absoluto do sinal de saída é

$$|y(t)| = \hat{\int}_{\tilde{y}}^y |h(\tilde{y}) x(t - \tilde{y})| d\tilde{y} \quad (2.172)$$

O valor absoluto de uma integral é menor ou igual à integral do valor absoluto do integrando, então podemos escrever a desigualdade

$$|y(t)| \leq \hat{\int}_{\tilde{y}}^y |h(\tilde{y}) x(t - \tilde{y})| d\tilde{y} \quad (2.173)$$

O integrando na Eq. (2.173) pode ser expressa como

$$h(\tilde{y}) x(t - \tilde{y}) = h(\tilde{y}) x(t - \tilde{y}) \quad (2.174)$$

e a desigualdade na Eqn. (2.173) torna-se

$$|y(t)| \leq \hat{\int}_{\tilde{y}}^y |h(\tilde{y})| |x(t - \tilde{y})| d\tilde{y} \quad (2.175)$$

Como $x(t - \tilde{y}) < B_x$ podemos escrever a Eqn. (2.175) como

$$|y(t)| \leq \hat{\int}_{\tilde{y}}^y |h(\tilde{y})| B_x d\tilde{y} \quad (2.176)$$

ou equivalente

$$|y(t)| \leq B_x \hat{\int}_{\tilde{y}}^y |h(\tilde{y})| d\tilde{y} < B_x \int_{\tilde{y}}^y |h(\tilde{y})| d\tilde{y} \quad (2.177)$$

Eq. (2.177) implica que precisamos

$$\hat{\int}_{\tilde{y}}^y |h(\tilde{y})| d\tilde{y} < \infty \quad (2.178)$$

Para que um sistema CTLTI seja estável, sua resposta ao impulso deve ser absolutamente integrável.

Exemplo 2.24: Estabilidade de um sistema de tempo contínuo de primeira ordem Avalie a estabilidade do sistema CTLTI de primeira ordem descrito pela equação diferencial

$$\frac{dy}{dt}(t) + ay(t) = x(t)$$

onde a é uma constante de valor real.

Solução: A resposta ao impulso do sistema em questão é

$$h(t) = e^{\int a \, dt} u(t)$$

como pode ser facilmente verificado através do uso da Eqn. (2.55) com $r(t) = \ddot{y}(t)$, $t_0 = 0$ e $y(0) = 0$. (Tomamos o valor inicial como zero, pois o sistema é especificado como CTLTI.) Agora podemos verificar se o requisito dado pela Eqn. (2.178) é satisfeita.

$$\int_{\dot{y}(0)}^{\dot{y}} h(\dot{y}) d\dot{y} = \int_0^{\infty} e^{\int a \, dt} \ddot{y} dt = \frac{1}{a} \quad \text{desde que } a > 0 \quad (2.179)$$

Assim o sistema é estável se $a > 0$. (Verifique que a integral na Eqn. (2.179) não pode ser calculada se $a \leq 0$.) Também é interessante reconhecer que a equação característica que corresponde à equação diferencial do sistema é

$$s + a = 0$$

e sua única solução está em $s_1 = -a$.

A estabilidade de um sistema CTLTI também pode ser associada aos modos da equação diferencial que governa o comportamento do sistema. No Exemplo 2.24, o sistema provou ser estável para $a > 0$, o que significava que a única raiz do polinômio característico tinha que ser negativa. Além disso, vimos na Seção 2.5.3 que as localizações das raízes do polinômio característico controlam o tipo de comportamento transitório do sistema. No caso de raízes reais, uma raiz real negativa leva a um sinal exponencial decrescente, enquanto uma raiz real positiva produz um sinal exponencial crescente. No caso de um par de raízes complexas conjugadas, se a parte real do par for negativa, o sinal resultante é oscilatório com amplitude exponencialmente decaindo. Se a parte real do par conjugado for positiva, então a resposta oscilatória tem uma amplitude crescente. Resumindo ambos os casos podemos concluir que, para um sistema causal, raízes polinomiais características na metade esquerda do plano complexo estão associadas a comportamento estável, e aquelas na metade direita do plano complexo estão associadas a comportamento instável. Para um sistema CTLTI causal ser estável, todas as raízes do polinômio característico devem estar na metade esquerda do plano complexo.

Uma observação lateral: ao descrever as associações entre as raízes do polinômio característico e a estabilidade, nos referimos a um sistema CTLTI causal. Se fôssemos considerar um sistema anti-causal, cuja resposta ao impulso procede na direção negativa para $t \rightarrow -\infty$, então as associações descritas acima teriam que ser invertidas. Nesse caso, raízes na metade direita do plano complexo levariam a um comportamento instável.

[Por que a estabilidade é importante para um sistema CTLTI?](#)

Um sistema CTLTI instável é capaz de produzir um sinal de saída ilimitado em resposta a pelo menos alguns sinais de entrada limitados. Qual é o significado prático disso? Considere um circuito amplificador operado por bateria que pode ser instável devido a uma falha de projeto. Certamente não esperamos que as tensões em um dispositivo operado por bateria sejam infinitamente grandes, e isso não acontece. O que pode acontecer é que a tensão de saída pode subir até o nível máximo que ela pode atingir fisicamente (provavelmente perto da tensão da fonte de alimentação) e ficar lá, causando a saturação dos componentes do circuito e fazendo com que o sistema cesse sua operação linear útil. Outro exemplo seria um sistema eletromecânico, como um motor elétrico. Se for instável como sistema, suas velocidades podem atingir níveis muito altos para o seu funcionamento normal, podendo causar danos físicos ao motor.

2.10 Solução Numérica Aproximada de uma Equação Diferencial

Para um sistema modelado por meio de uma equação diferencial, o sinal de saída pode ser determinado resolvendo a equação diferencial com o sinal de entrada especificado e as condições iniciais. Na Seção 2.5, exploramos métodos no domínio do tempo para resolver equações diferenciais lineares com coeficientes constantes. Métodos de domínio de transformação para realizar a mesma tarefa serão apresentados no Capítulo 7.

Às vezes, podemos nos deparar com equações diferenciais para as quais soluções analíticas podem ser difíceis ou impossíveis de obter. A equação diferencial pode ter termos não lineares, ou a definição analítica do sinal de entrada aplicado ao sistema pode não ser simples ou prática o suficiente para obter uma solução analítica. Nesses casos, podemos ter que confiar em soluções passo a passo aproximadas que são obtidas em um computador pelo uso de um algoritmo numérico iterativo. Vários algoritmos numéricos para encontrar soluções aproximadas para equações diferenciais estão documentados na literatura, variando de muito simples a muito sofisticados. Uma revisão completa desses algoritmos também está muito além do escopo deste livro e pode ser encontrada em vários livros excelentes sobre análise numérica. Nesta seção, discutiremos brevemente o mais simples dos métodos de solução numérica, o método de Euler, que funciona razoavelmente bem para nossos propósitos, desde que algumas precauções básicas sejam tomadas.

Considere o circuito RC que foi analisado nos Exemplos 2.8 e 2.9 usando técnicas de solução analítica. A equação diferencial de primeira ordem que governa a operação do circuito é

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{1}{RC} y(t) + \frac{1}{RC} x(t) \quad (2.180)$$

onde $x(t)$ e $y(t)$ representam os sinais de entrada e saída, respectivamente. O primeiro passo será reorganizar os termos da equação diferencial para que a derivada do sinal de saída fique sozinha no lado esquerdo do sinal de igual:

$$\frac{dy(t)dt}{dt} = \frac{1}{RC} y(t) + \frac{1}{RC} x(t) \quad (2.181)$$

Eq. (2.181) está na forma geral

$$\frac{dy(t)}{dt} = g[t, y(t)] dt \quad (2.182)$$

onde $g(\dots)$ representa alguma função de t e $y(t)$. Para este circuito específico temos

$$g[t, y(t)] = \frac{1}{RC} y(t) + \frac{1}{RC} x(t) \quad (2.183)$$

Sabemos pelo cálculo básico que uma forma de aproximar uma derivada é por meio do uso de diferenças finitas. No instante de tempo $t = t_0$, a derivada do lado esquerdo da Eqn. (2.182) pode ser aproximado como

$$\left. \frac{dy(t)dt}{dt} \right|_{t=t_0} = \frac{y(t_0 + T) - y(t_0)}{T} \quad (2.184)$$

desde que o intervalo de tempo T seja suficientemente pequeno. Isso é ilustrado na Fig. 2.46. A inclinação da tangente passando pelo ponto $[t_0, y(t_0)]$ representa o valor verdadeiro da derivada $dy(t)/dt$ em $t = t_0$. A inclinação da corda passando pelos pontos $[t_0, y(t_0)]$ e $[t_0 + T, y(t_0 + T)]$ é o valor aproximado da mesma.

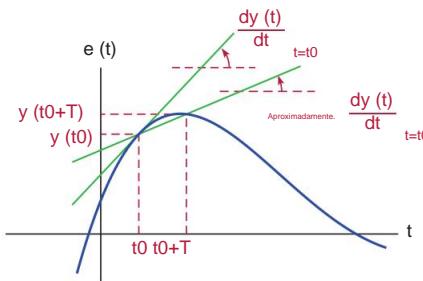


Figura 2.46 – Aproximando a primeira derivada usando uma diferença finita.

Substituindo a Eq. (2.184) na Eqn. (2.182) e rearranjando os termos obtemos

$$y(t_0 + T) \approx y(t_0) + T g[t_0, y(t_0)] \quad (2.185)$$

o que nos dá a fórmula de iteração para o método de Euler. A solução começa com um valor inicial conhecido do sinal de saída no instante $t = t_0$, normalmente $t = 0$. Suponha que $y(0)$ seja dado. Nós o usamos para aproximar $y(T)$ como

$$y(T) \approx y(0) + T g[0, y(0)] \quad (2.186)$$

Para o exemplo do circuito RC, a Eqn. (2.186) torna-se

$$y(T) \approx y(0) + T \frac{1}{RC} y(0) \quad \frac{1}{RC}$$

Tendo obtido um valor aproximado para $y(T)$, podemos usá-lo para aproximar a solução no instante de tempo $t = 2T$ como

$$\begin{aligned} y(2T) &\approx y(T) + T g[T, y(T)] \\ &= y(T) + T \frac{1}{RC} y(T) \quad \frac{1}{RC} \end{aligned}$$

O conhecimento de um valor aproximado para $y(2T)$ pode então ser usado para encontrar um valor aproximado para $y(3T)$ como

$$\begin{aligned} y(3T) &\approx y(2T) + T g[2T, y(2T)] \\ &= y(2T) + T \frac{1}{RC} y(2T) \quad \frac{1}{RC} \end{aligned}$$

e assim por diante. Para que essa técnica de aproximação funcione de maneira razoavelmente precisa, o tamanho do passo T precisa ser escolhido para ser pequeno o suficiente. No que diz respeito ao sistema, uma boa regra prática é que o tamanho do passo T seja 10% da constante de tempo ou menor. Além disso, as variações de tempo do sinal de entrada também devem ser consideradas na seleção do tamanho do passo. O método de Euler pode sofrer de problemas de instabilidade numérica se o tamanho do passo T não for escolhido pequeno o suficiente. Uma variante conhecida como método de Euler reverso melhora a estabilidade da solução. A discussão sobre amostragem no Capítulo 6 esclarecerá ainda mais essa questão.

Embora o método de Euler, conforme apresentado nesta seção, só se aplique a uma equação diferencial de primeira ordem, poderemos generalizá-lo para aplicá-lo a sistemas de ordem superior quando discutirmos modelos de espaço de estados no Capítulo 9.

Os Exercícios 2.4 e 2.5 do MATLAB fornecem exemplos de como encontrar soluções numéricas no MATLAB usando o método de Euler ou os métodos mais sofisticados implementados pelo MATLAB.

Recursos de software: Consulte os Exercícios 2.4 e 2.5 do MATLAB.

2.11 Leitura Adicional

- [1] Chapa SC. Métodos Numéricos Aplicados com MATLAB para Engenheiros e Cientistas. McGraw-Hill, 2008.
- [2] SC Chapra e RP Canale. Métodos Numéricos para Engenheiros. McGraw-Hill, 2010.
- [3] TL Harman, JB Dabney e N. Richert. Matemática de Engenharia Avançada Usando MATLAB V.4. PWS BookWare Companion Series. Editora PWS, 1997.
- [4] PV O'Neil. Engenharia Matemática Avançada. Cengage Learning, 2011.
- [5] Frank L. Separação. Modelagem e Simulação de Sistemas: Uma Introdução. John Wiley e Filhos, 2001.
- [6] CR Wylie e LC Barrett. Engenharia Matemática Avançada. McGraw-Hill, 1995.

Exercícios MATLAB

MATLAB Exercício 2.1: Testando a linearidade de sistemas de tempo contínuo

No Exemplo 2.1 verificamos a linearidade de quatro sistemas diferentes. Em cada caso, começamos com dois sinais arbitrários $x_1(t)$ e $x_2(t)$. Formulamos a resposta de cada sistema ao sinal combinado

$$x(t) = \ddot{y}_1 x_1(t) + \ddot{y}_2 x_2(t)$$

com constantes arbitrárias \ddot{y}_1 e \ddot{y}_2 , e determinou se a resposta ao sinal combinado correspondia à resposta esperada

$$y(t) = \ddot{y}_1 y_1(t) + \ddot{y}_2 y_2(t)$$

para um sistema linear. Neste exercício, simularemos os quatro sistemas considerados no Exemplo 2.1 e os testaremos usando sinais gerados no MATLAB.

Vamos começar criando um vetor “t” de instantes de tempo, e gerando os vetores “x1” e “x2” para corresponder a dois sinais de teste $x_1(t)$ e $x_2(t)$ com os seguintes comandos:

```
>> t = [0:0,01:5]; >> x1 =
cos(2*pi*5*t); >> x2 = exp(-0,5*t);
```

Seja $\ddot{y}_1 = 2$ e $\ddot{y}_2 = 1,25$. O vetor “x” conterá amplitudes do sinal de entrada combinado $x(t) = \ddot{y}_1 x_1(t) + \ddot{y}_2 x_2(t)$ nos instantes de tempo listados no vetor “t”. Para calcular e representar graficamente x(t), digite o seguinte conjunto de comandos:

```
>> alfa1 = 2; >> alfa2
= 1,25; >> x =
alfa1*x1+alfa2*x2; >> plot(t,x);
```

Agora estamos prontos para simular o sistema em consideração. Um método para fazer isso é desenvolver uma função MATLAB para cada sistema. Por exemplo, o sistema da parte (a) do Exemplo 2.1 pode ser simulado usando a função `sys_a(..)` definida com o seguinte código:

```
1 função y = sys_a(x) y = 5*x;
2
```

Essas duas linhas devem ser colocadas em um arquivo chamado “sys am” e salvas em um local visível para o MATLAB. Uma alternativa é usar funções anônimas que foram introduzidas no Exercício 1.3 do MATLAB. Uma função anônima para o sistema na parte (a) do Exemplo 2.1 pode ser inserida digitando

```
>> sys_a = @(x) 5*x;
```

diretamente na janela de comando. Essa é a abordagem preferida em situações em que a função em questão pode ser necessária apenas brevemente e podemos não querer salvá-la em disco.

Uma vez definida a função, a resposta esperada de um sistema linear e a resposta real do nosso sistema podem ser obtidas digitando as seguintes linhas:

```
>> y1 = sys_a(x1); >> y2 =
sys_a(x2); >> exp_y =
alfa1*y1+alfa2*y2; >> y_act = sys_a(x);
```

O vetor “y exp” contém a resposta esperada de um sistema linear, e o vetor “y act” contém o sinal de saída produzido pelo sistema em resposta ao sinal de entrada combinado no vetor “x”.

O script MATLAB listado abaixo representa um programa completo que testa o sistema na parte (a) do Exemplo 2.1 para linearidade.

```
1 % Script: matex_2_1.m 2 % t =
[0:0.01:4]; % Crie um vetor de tempo. 4 x1 = cos(2*pi*5*t); % Sinal de teste 1. 5 x2 =
exp(-0,5*t); % Sinal de teste 2. 6 alpha1 = 2; % Defina os parâmetros
alpha1 % e alpha2. 7 alfa2 = 1,25; x = alfa1*x1+alfa2*x2; % Sinal combinado.

8
9 % Defina funções anônimas para os sistemas no Exemplo 2-1. 10 sys_a = @(x) 5*x; 11 sys_b
= @(x) 5*x+3; 12 sys_c = @(x)
3*x.*x; 13 sys_d = @(x) cos(x);

14 % Teste o sistema na parte (a) do Exemplo 2-1. y1 = sys_a(x1); y2
15 = sys_a(x2); 17 exp_a
16 = alfa1*y1+alfa2*y2;
% Resposta esperada para um sistema linear. 18 y_act = sys_a(x); 19 clf; 20 subplot(1,2,1); 21 plot(t,y_exp);
22 title('y_{exp} = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2') % Resposta real.
+ \alpha_2 % Figura clara.
y_2'
% Gráfico de resposta esperada.
```

```

23 xlabel('t (seg)'); 24
ylabel('Amplitude '); 25 subplot(1,2,2);
(1,2,2); 26 plot(t,y_act); 27
title('y_{act} = Sys_a\{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2\}') 28 xlabel('t (seg)'); 29 ylabel('Amplitude ');

```

O gráfico produzido pelo script é mostrado na Fig. 2.47.

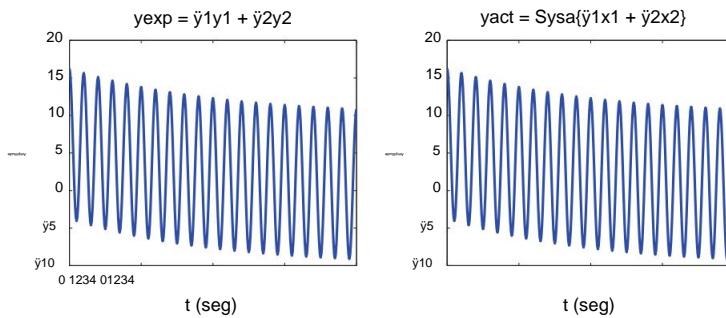


Figura 2.47 – Sinais $y_{exp}(t)$ e $y_{act}(t)$ para MATLAB Exercício 2.1.

Os dois sinais parecem ser idênticos, apoiando nossa conclusão anterior de que o sistema da parte (a) é linear. Uma palavra de cautela é necessária aqui: para que um sistema seja linear, o princípio da superposição deve valer para quaisquer dois sinais $x_1(t)$ e $x_2(t)$ e não apenas para os dois sinais que geramos acima. Se tivéssemos apenas os gráficos da Fig. 2.47 sem nossa análise anterior do Exemplo 2.1, não poderíamos afirmar que o sistema é linear; o melhor que poderíamos fazer seria dizer que o sistema pode ser linear. A não linearidade de um sistema é mais fácil de provar; só precisamos mostrar um caso em que a superposição falha.

Os sistemas nas partes (b) a (d) do Exemplo 2.1 podem ser simulados editando o código acima e alterando a função anônima usada para o sistema.

Recursos de software: `matex 2 1.m`

MATLAB Exercício 2.2: Testando a invariância temporal de sistemas de tempo

contínuo No Exemplo 2.2 verificamos três sistemas quanto à invariância temporal. Em cada caso, um sinal de teste arbitrário foi usado com o sistema em sua forma original $x(t)$ e na forma deslocada no tempo $x(t - \tau)$. Se o sistema em consideração é invariante no tempo, precisamos

$$\text{Sys}\{x(t - \tau)\} = y(t - \tau)$$

onde $y(t)$ é a resposta ao sinal original $x(t)$.

Neste exercício, simularemos os três sistemas considerados no Exemplo 2.2 e os testaremos usando sinais gerados no MATLAB. Lembre-se de que, no Exercício 2.1 do MATLAB, funções anônimas foram usadas para simular os sistemas e vetores do MATLAB foram usados para simular os sinais de entrada. Para o propósito deste exercício, acharemos mais conveniente usar uma função anônima também para o sinal de entrada, pois as mudanças de tempo são mais fáceis de representar com funções em vez de vetores.

Seja o sinal de teste $x(t)$

$$x(t) = e^{-0.5t} u(t)$$

Começaremos criando um vetor “t” de instantes de tempo e desenvolvendo uma função anônima “x” para o sinal de teste $x(t)$ com os seguintes comandos:

```
>> t = [0:0,01:10]; >> x = @(t)
exp(-0.5*t).*(t>=0); >> gráfico(t,x(t),t,x(t-2));
```

Agora estamos prontos para simular o sistema em consideração. Para fins de discussão, vamos pegar o sistema da parte (c) do Exemplo 2.2 e expressá-lo com uma função anônima

como

```
>> sys_c = @(x) 3*cos(t).*x;
```

diretamente na janela de comando. Agora estamos prontos para calcular as respostas do sistema aos sinais $x(t)$ e $x(t-2)$ como

```
>> y1 = sys_c(x(t)); >> y2 =
sys_c(x(t-2));
```

Os vetores “y1” e “y2” são vetores que contêm as respostas do sistema em questão.

As duas respostas podem ser representadas graficamente no mesmo sistema de coordenadas com a declaração

```
>> plot(t,y1,'b-',t,y2,'r');
```

O script MATLAB listado abaixo representa um programa completo que testa o sistema na parte (c) do Exemplo 2.2 para invariância de tempo.

```

1 % Script matex_2_2.m 2 % t =
3 [0:0,01:10]; x = @(t) % Crie um vetor de tempo.
4 exp(-0,5*t).*(t>=0); % Função anônima para sinal de teste.
5 % Defina funções anônimas para os sistemas no Exemplo 2-2.
6 sys_a = @(x) 5*x; 7 sys_b = @(x)
3*cos(x); 8 sys_c = @(x) 3*cos(t).*x; %
Teste o sistema na parte (c) do Exemplo 2-2. y1
9 = sys_c(x(t)); y2 = sys_c(x(t-2)); 12 clf; % Figura clara. 13 plot(t,y1,'b-',t,y2,'r:');
10 % Faça um gráfico das duas
11 respostas. 14 title('Respostas
para x(t) e x(t-2)') 15 xlabel('t (seg)');
16 ylabel('Amplitude'); 17 legend('Sistema\{x(t)
\}', 'Sistema\{x(t-2)\}');
```

O gráfico produzido pelo script é mostrado na Fig. 2.48.

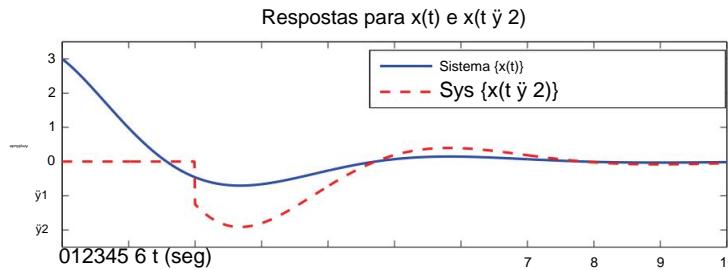


Figura 2.48 – Sinais Sys { $x(t)$ } e Sys { $x(t - 2)$ } para MATLAB Exercício 2.2.

Os dois sinais parecem ter formas diferentes, apoiando nossa conclusão anterior de que o sistema da parte (c) não é invariante no tempo. Os sistemas nas partes (a) e (b) do Exemplo 2.2 podem ser simulados editando o código acima e alterando a função anônima usada para o sistema.

Recursos de software:

matex_2_2.m

MATLAB Exercício 2.3: Usando linearidade para determinar a resposta do circuito RC

Consulte os Exemplos 2.8, 2.9 e 2.10. No Exemplo 2.8, a resposta em degrau unitário do circuito RC simples foi determinada resolvendo a equação diferencial governante. O circuito foi considerado inicialmente relaxado, resultando em $y(0) = 0$. No Exemplo 2.9, determinamos a resposta do mesmo circuito a um sinal de pulso, novamente resolvendo a equação diferencial.

O Exemplo 2.10 explorou uma abordagem alternativa para encontrar a resposta ao sinal de pulso; ou seja, usando a resposta a um passo unitário e o princípio da superposição. (A superposição pode ser usada, pois o circuito é inicialmente relaxado e, portanto, linear e invariante no tempo.)

Neste exercício vamos explorar este conceito usando o MATLAB. A resposta do circuito a um sinal de degrau unitário foi encontrada no Exemplo 2.8 como sendo

$$y_u(t) = \text{Sys}\{u(t)\} = 1 - e^{-4t} u(t)$$

que pode ser expresso por meio de uma função anônima como

$$yu = @(t) (1-exp(-4*t)).*(t>=0);$$

O script listado abaixo usa a resposta em degrau unitário para determinar e representar graficamente a resposta do sistema ao sinal de pulso

$$x1(t) = y(t) = u(t + 0,5) - u(t - 0,5)$$

```

1 % Script: matex_2_3a.m % %
2
3 Função anônima para unidade - resposta degrau. 4 yu = @(t) (1-
exp(-4*t)).*(t>=0); 5 t = [-5:0,01:5]; 6 y1 = yu(t+0,5)-
yu(t-0,5); 7 plot(t,y1);
% Vetor de instantes de tempo.
% Calcula a resposta para x1(t).

```

Essa ideia pode ser estendida para sinais de entrada com maior complexidade. Considere o sinal

$$x_2(t) = u(t) - 2u(t-1) + u(t-2)$$

que é mostrado na Fig. 2.49.

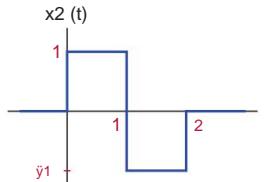


Figura 2.49 – Sinal $x_2(t)$ para MATLAB Exercício 2.3.

```

1 % Roteiro: matex_2_3b.m
2 %
3 % Função anônima para unidade - resposta degrau. 4 yu = @(t) (1-exp
4 (-4*t)).*(t>=0);
5   t = [-5:0.01:5]; y2 = % Vetor de instantes de tempo.
6   yu(t)-2*yu(t-1)+yu(t-2); % Calcula a resposta para x2(t)]. 7 plot(t,y2);

```

Recursos de
software: _matex
2 3a.m _matex 2 3b.m

MATLAB Exercício 2.4: Solução numérica do circuito RC usando o método de Euler Neste exercício usaremos o método de Euler para encontrar uma solução numérica aproximada para o problema do circuito RC do Exemplo 2.8 e compará-la com a solução exata encontrada. O circuito RC e o sinal de entrada são mostrados na Fig. 2.50.

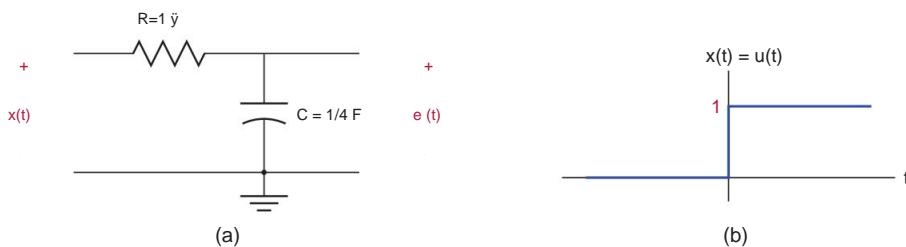


Figura 2.50 – (a) O circuito para MATLAB Exercício 2.4, (b) o sinal de entrada $x(t)$.

Para o sinal de entrada especificado, a equação diferencial do circuito é

$$\frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = 4u(t)$$

Com o circuito inicialmente relaxado, ou seja, com $y(0) = 0$, a solução exata para o sinal de saída encontrada é

$$y(t) = 1 - e^{-4t} u(t) \quad (2.187)$$

Para usar o método de Euler para solução aproximada, escreveremos a equação diferencial na forma

$$\frac{dy(t)}{dt} = g(t, y(t)) dt$$

com a função do lado direito dada por

$$g(t, y(t)) = \dot{y} = -4y + u(t) \quad (2.188)$$

A aproximação do método de Euler $\hat{y}(t)$ para a solução é baseada na fórmula de iteração

$$\begin{aligned} \hat{y}(k+1)Ts &= \hat{y}(kTs) + Ts g(kTs, \hat{y}(kTs)) \\ &= \hat{y}(kTs) + Ts(\dot{y} = -4\hat{y}(kTs) + u(kTs)) \end{aligned} \quad (2.189)$$

O script MATLAB fornecido abaixo calcula e representa graficamente soluções exatas e aproximadas, usando um tamanho de passo de $Ts = 0,1$ s. Além disso, o erro percentual da solução aproximada é calculado como

$$\text{erro percentual} = \frac{\hat{y}(kTs) - y(kTs)}{y(kTs)} \times 100$$

e representado graficamente para $k = 1, 2, \dots, 10$ para abranger um intervalo de tempo de 1 s.

```

1 % Script: matex_2_4.m %
2
3 Ts = 0,1; 4t = % de incremento de tempo
[0:Ts:1]; % Calcule a % Vetor de instantes de tempo
5 solução exata. 6 y = 1-exp(-4*t); % Eq.
(2.186)
7 % Calcule a solução aproximada usando o método de Euler.
8 yhat = zeros(tamanho(t)); 9 yhat(1)
= 0; % Valor inicial. 10 para k = 1:comprimento (yhat)-1,
g = -4* yhat(k)+4; % Eqn.(2.188) yhat(k+1)
11 = yhat(k)+Ts*g; % Eqn.(2.189) firm; % Gráfico de soluções
12 exatas e aproximadas. clf; 16 subtramas (211); 17
13
14 plot(t,y,'-',t,yhat , 'ro'); grade; 18 title('Soluções exatas e
15
aproximadas para circuito
RC '); 19 xlabel('Tempo (seg)'); 20 ylabel('Amplitude
'); 21 legend('Solução exata ','Solução aproximada ',...
22 'Localização','Sudeste'); % Calcule
23 e represente graficamente o erro percentual de aproximação. 24 err_pct =
(yhat - y)./y*100; 25 subtramas (212); 26
plot(t(2: comprimento (t)),err_pct); grid 27 title('Percentual de erro de aproximação');
28 xlabel('Tempo (seg)'); 29 ylabel('Erro (%)');
```

O loop que vai da linha 10 à 13 do código calcula a solução aproximada passo a passo. Os gráficos produzidos pelo script MATLAB acima são apresentados na Fig. 2.51. O maior erro de aproximação parece estar em torno de 21% e diminui com o tempo conforme o sinal de saída se aproxima de seu valor final.

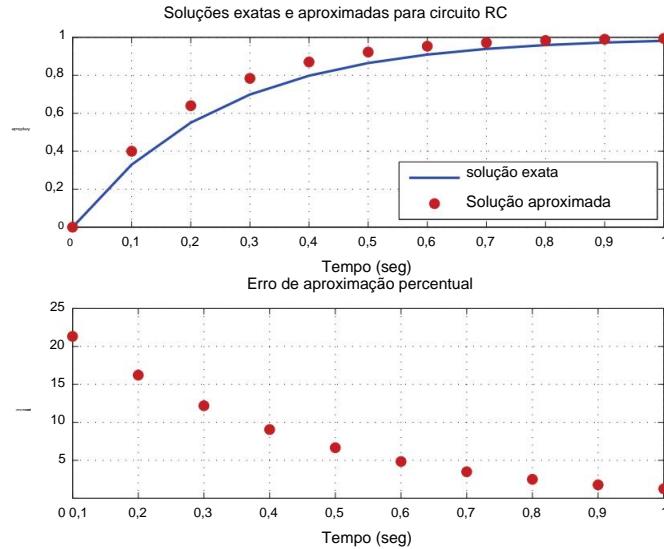


Figura 2.51 – Soluções reais e aproximadas para o circuito RC e o erro percentual para $\hat{y}t = 0,1$ s.

A etapa de tempo que usamos no código acima foi $T_s = 0,1$ segundos, que é 40% da constante de tempo de $\hat{y} = 0,25$ s. Para uma melhor precisão, é necessário um intervalo de tempo menor. O método de Euler é um método de aproximação de primeira ordem e é o mais simples de todos os métodos numéricos para resolver equações diferenciais. A Fig. 2.52 mostra os resultados obtidos com o mesmo script, simplesmente alterando o tamanho do passo para $T_s = 0,02$ segundos ou 8% da constante de tempo. Nesse caso, o maior erro entre as soluções exata e aproximada é da ordem de 4%.

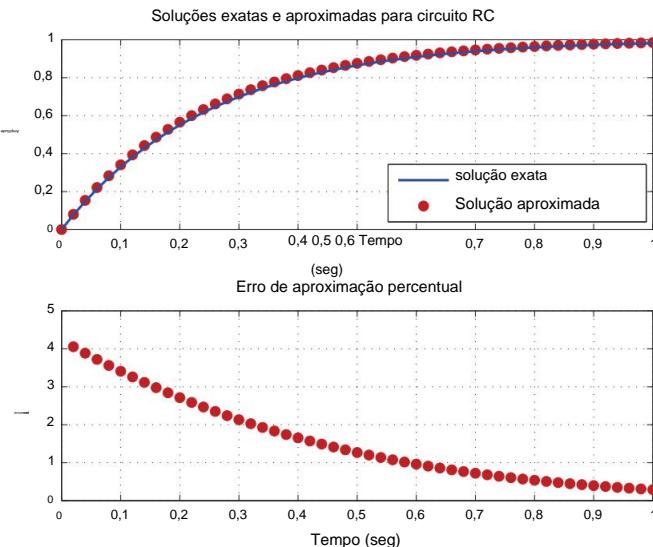


Figura 2.52 – Soluções reais e aproximadas para o circuito RC e o erro percentual para $\hat{y}t = 0,02$ s.

Outra maneira de reduzir o erro de aproximação é usar um método de aproximação de ordem superior mais sofisticado, como veremos no próximo exercício.

Recursos de software:

matex 2.4.m

Exercício 2.5 do MATLAB: Solução numérica aprimorada do circuito RC Para

a solução numérica de equações diferenciais, o MATLAB tem várias funções baseadas em algoritmos mais sofisticados do que o método de Euler que usamos no Exercício 2.4 do MATLAB. Neste exercício vamos usar uma dessas funções, ou seja, a função `ode45(..)`. A função `ode45(..)` usa a técnica Runge-Kutta de 4^a ordem, um método de ordem superior ao método de Euler do exemplo anterior. Para um determinado tamanho de passo, os erros de aproximação para a técnica de Runge-Kutta de 4^a ordem são geralmente menores do que aqueles encontrados com o método de Euler.

Antes de podermos usar a função `ode45(..)`, precisamos escrever uma função para calcular o lado direito $g(t, y(t))$ da equação diferencial. O código para tal função `rc1(..)` é dado abaixo:

```
1 função ydot = rc1(t,y)
2     ydot = -4*y+4;
3 fim
```

A função `rc1(..)` recebe dois argumentos, t e y , e retorna o valor correspondente de $g(t, y(t))$. É usado pela função `ode45(..)` no cálculo da solução aproximada. O script listado abaixo calcula uma solução aproximada no intervalo de tempo $0 \leq t \leq 1$ s usando uma etapa de tempo de $T = 0,1$ s e a compara com a solução exata.

```
1 % Script: matex_2_5a.m % 3 t =
2
3 [0:0.1:1]; % Calcule a solução % Vetor de instantes de tempo
4 exata. 5 y = 1-exp(-4*t); % Eq.(2.187)

6 % Calcule a solução aproximada usando ode45(). [t,yhat] = ode45(@rc1 ,t,0); %
7 Gráfico de soluções exatas e aproximadas.
8 clf; 10 subtramas (211); 11 plot(t,y,'-',t,yhat , 'ro'); grade; 12
9
title('Soluções exatas e
aproximadas para circuito RC '); 13 xlabel('Tempo (seg)'); 14
ylabel('Amplitude '); 15 legend('Solução exata ','Solução aproximada ',...
16 'Localização','Sudeste'); % Calcule
17 e represente graficamente o erro percentual de aproximação.
18 err_pct = (yhat -y). /y *100; 19 subtramas (212); 20
plot(t(2:max(tamanho(t))),err_pct
(2:max(tamanho(t))), 'ro'); grid 21 title('Percentual de erro de aproximação'); 22 xlabel('Tempo (seg)'); 23
ylabel('Erro percentual');
```

Os gráficos produzidos pelo script `matex 2 5a.m` são mostrados na Fig. 2.53. Embora o tamanho do passo seja bastante grande, a precisão da solução obtida é muito melhor do que a obtida no exercício anterior (compare a Fig. 2.53 com a Fig. 2.51).

Se a função do lado direito $g(t, y(t))$ for simples o suficiente para ser expressa em uma linha, uma função anônima pode ser usada no lugar de “`rc1.m`”. O script listado abaixo usa uma função anônima “`rc2`” para resolver o mesmo problema.

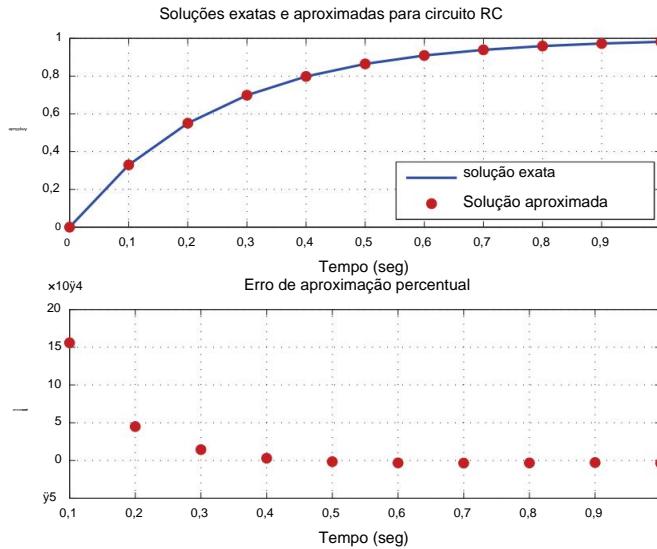


Figura 2.53 – Soluções reais e aproximadas para o circuito RC e o erro percentual com a função `ode45(..)`.

```

1 % Script: matex_2_5b.m % t =
2
3 [0:0.1:1]; % Vetor de instantes de tempo
4 % Calcule a solução exata. 5 y = 1-exp(-4*t); %
Eq.(2.187)
6 % Calcula a solução aproximada usando ode45(). 7 rc2 = @(t,y) -4*y+4; 8
[y,hat] = ode45(rc2,t,0);
9 % Gráfico de soluções exatas e aproximadas. 10 clf; 11
subtrama
(211); 12
plot(t,y,'-',t,yhat,'ro'); grade; 13 title('Soluções exatas
e aproximadas para circuito RC'); 14 xlabel('Tempo (seg)'); 15 ylabel('Amplitude'); 16
legend('Solução exata','Solução
aproximada ','Localização ','Sudeste
'); % Calcule e represente graficamente o erro percentual de aproximação. ....
17
18
19 err_pct = (yhat -y')./y'*100; 20 subtramas
(212); 21
plot(t(2:max(tamanho(t))),err_pct (2:max(tamanho(t))),'ro'); grid 22 title('Percentual de erro de
aproximação'); 23 xlabel('Tempo (seg)'); 24 ylabel('Erro
percentual');

```

Recursos de software:

matex 2 5h

rc1.m

matex 2 5b.m

problemas

2.1. Vários sistemas são especificados abaixo em termos de suas relações de entrada-saída. Para cada caso, determine se o sistema é linear e/ou invariante no tempo.

a. $y(t) = |x(t)| + x(t)$

b. $y(t) = tx(t)$

c. $y(t) = e^{\int_0^t x(\tau) d\tau}$

d. $y(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau$

e. $y(t) = \int_{t-1}^t x(\tau) d\tau$

f. $y(t) = (t+1) \int_0^t x(\tau) d\tau$

2.2. Considere a combinação em cascata de dois sistemas mostrada na Fig. P.2.2(a).



Figura P. 2.2

a. Sejam as relações de entrada-saída dos dois subsistemas dadas como

$$\text{Sys1}\{x(t)\} = 3x(t) \text{ e } \text{Sys2}\{w(t)\} = w(t - 2)$$

Escreva a relação entre $x(t)$ e $y(t)$.

b. Deixe a ordem dos dois subsistemas ser alterada como mostrado na Fig. P.2.2(b). Escreva a relação entre $x(t)$ e $y(t)$. Alterar a ordem de dois subsistemas altera a relação geral de entrada-saída do sistema?

2.3. Repita o Problema 2.2 com os seguintes conjuntos de subsistemas:

a. $\text{Sys1}\{x(t)\} = 3x(t)$ e $\text{Sys2}\{w(t)\} = tw(t)$

b. $\text{Sys1}\{x(t)\} = 3x(t)$ e $\text{Sys2}\{w(t)\} = w(t) + 5$

2.4. Encontre uma equação diferencial entre a tensão de entrada $x(t)$ e a tensão de saída $y(t)$ para o circuito mostrado na Fig. P.2.4. Em $t = 0$, os valores iniciais são

$$i_L(0) = 1 \text{ A} \quad , \quad v_C(0) = 2 \text{ V}$$

Expressse as condições iniciais para $y(t)$ e $dy(t)/dt$.

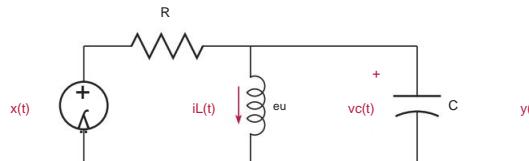


Figura P. 2.4

2.5. Encontre uma equação diferencial entre a tensão de entrada $x(t)$ e a tensão de saída $y(t)$ para o circuito mostrado na Fig. P.2.5. Em $t = 0$, os valores iniciais são

$$v_1(0) = 2 \text{ V} \quad , \quad v_2(0) = \dot{y}_2 \text{ V}$$

Expresse as condições iniciais para $y(t)$ e $dy(t)/dt$.

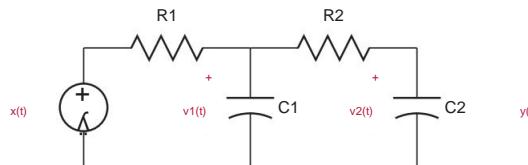


Figura P. 2.5

2.6. Um dos exemplos comumente usados para modelar sistemas dinâmicos com equações diferenciais é o chamado problema predador-presa, que é apresentado da seguinte forma:

Suponha que o seguinte conjunto de regras foi determinado experimentalmente para governar as populações de predadores e presas que vivem no mesmo ambiente:

- O número de presas cresce a uma taxa proporcional ao seu valor atual se não houver predadores.
- O número de predadores diminui a uma taxa proporcional ao seu valor atual se houver não é nenhuma presa.
- O número de encontros entre predador e presa é proporcional ao produto das populações atuais de cada um.
- Cada encontro entre o predador e a presa aumenta o número de predadores e diminui o número de presas.

Designe $x(t)$ como o número de presas no tempo t , e $y(t)$ como o número de predadores no tempo t . Usando constantes de proporção paramétrica conforme necessário, escreva duas equações diferenciais para modelar o sistema. As equações são lineares ou não lineares? Justifique sua resposta.

2.7. Considere a equação diferencial para o circuito RC na Fig. P.2.12:

$$\frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = 4x(t)$$

Seja o sinal de entrada um degrau unitário, ou seja, $x(t) = u(t)$. Usando a técnica de solução de equação diferencial de primeira ordem discutida na Seção 2.5.1, encontre a solução $y(t)$ para $t \geq 0$ sujeito a cada condição inicial especificada abaixo:

- a. $y(0) = 0$
- b. $y(0) = 5$
- c. $y(0) = 1$
- d. $y(0) = \dot{y}_1$
- e. $y(0) = \ddot{y}_3$

2.8. Resolva cada uma das equações diferenciais de primeira ordem dadas abaixo para o sinal de entrada especificado e sujeito à condição inicial especificada. Use a técnica de solução de primeira ordem discutida na Seção 2.5.1.

a. $\frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = x(t), \quad x(t) = u(t), \quad y(0) = \ddot{y}_1$

b. $\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 2x(t), \quad x(t) = u(t) \dot{y} u(t \dot{y} 5), \quad y(0) = 2$

c. $\frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = 3x(t), \quad x(t) = \ddot{y}(t), \quad y(0) = 0,5$

d. $\frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = 3x(t), \quad x(t) = tu(t), \quad y(0) = \ddot{y}_4$

e. $\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 2x(t), \quad x(t) = e^{\ddot{y}2t}u(t), \quad y(0) = \ddot{y}_1$

2.9. Para cada equação diferencial homogênea dada abaixo, encontre a equação característica e mostre que ela possui apenas raízes reais simples. Encontre a solução homogênea para $t \dot{y} 0$ em cada caso sujeito às condições iniciais especificadas.

a. $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3y(t) = 0, \quad y(0) = 3, \quad \frac{dy(t)dt}{t=0} = 0$

b. $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3y(t) = 0, \quad y(0) = \ddot{y}_2 + 4, \quad \frac{dy(t)dt}{t=0} = 1$

c. $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + y(t) = 0, \quad y(0) = 1, \quad \frac{dy(t)dt}{t=0} = \ddot{y}_2$

d. $\frac{d^3a(t)}{dt^3} + 6\frac{d^2a(t)}{dt^2} + 6y(t) = 0, \quad y(0) = 2, \quad \frac{dy(t)dt}{t=0} = \ddot{y}_1, \quad \frac{d^2a(t)}{dt^2}|_{t=0} = 1$

2.10. Para cada equação diferencial homogênea dada abaixo, encontre a equação característica e mostre que pelo menos algumas de suas raízes são complexas. Encontre a solução homogênea para $t \dot{y} 0$ em cada caso sujeito às condições iniciais especificadas.

a. $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3y(t) = 0, \quad y(0) = 2, \quad \frac{dy(t)dt}{t=0} = 0$

b. $\frac{d^2a(t)}{dt^2} + 2y(t) = 0, \quad y(0) = \ddot{y}_2 + 2, \quad \frac{dy(t)dt}{t=0} = \ddot{y}_1$

c. $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3y(t) = 0, \quad y(0) = 5, \quad \frac{dy(t)dt}{t=0} = 0$

d. $\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 2\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2y(t) = 0, \quad y(0) = 1, \quad \frac{dy(t)dt}{t=0} = 0, \quad \frac{d^2y(t)}{dt^2}|_{t=0} = \ddot{y}_2$

2.11. Para cada equação diferencial homogênea dada abaixo, encontre a equação característica e mostre que ela tem raízes de ordem múltipla. Encontre a solução homogênea para $t \dot{y} 0$ em cada caso sujeito às condições iniciais especificadas.

a. $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + y(t) = 0, \quad y(0) = 1 + 2, \quad \frac{dy(t)dt}{t=0} = 0$

- b. $\frac{d^3y(t)}{dt^3} \frac{d^2y(t)}{dt^2} \frac{dy(t)}{dt} + 7 + 16 + 12y(t) = 0, y(0) = 0, \frac{dt^3}{dt} \frac{dt^2}{dt} \frac{dt}{dt}$
- $$\left. \frac{d^2y(t)}{dt^2} \right|_{t=0} = \ddot{y}2, \quad \left. \frac{d^2a(t)}{dt^2} \right|_{t=0} = 1$$
- c. $\frac{d^3y(t)}{dt^3} \frac{d^2y(t)}{dt^2} \frac{dy(t)}{dt} + 8y(t) = 0, y(0) = \ddot{y}1, +6 + 12 \frac{dt^3}{dt} \frac{dt^2}{dt} \frac{dt}{dt}$
- $$\left. \frac{d^2a(t)}{dt^2} \right|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{d^2a(t)}{dt^2} \right|_{t=0} = 3$$

2.12. Considere o circuito RC simples usado no Exemplo 2.8 e mostrado na Fig. P.2.12(a).

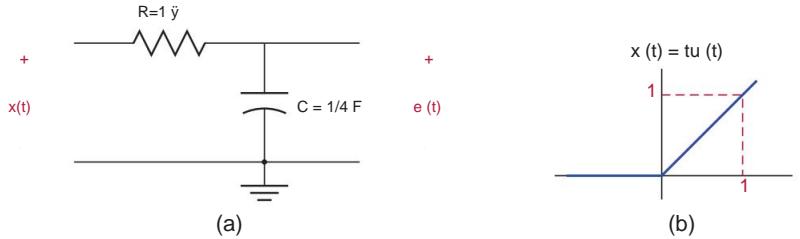


Figura P. 2.12

A equação diferencial entre a tensão de entrada e a tensão de saída foi encontrada para ser

$$\frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = 4x(t) dt$$

Supondo que o circuito esteja inicialmente relaxado, calcule e esboce a resposta ao sinal de rampa unitária $x(t) = r(t) = tu(t)$ mostrado na Fig. P.2.12(b).

2.13. Para cada equação diferencial de primeira ordem fornecida abaixo, encontre a solução para $t \geq 0$ com o sinal de entrada especificado e sujeito ao valor inicial especificado. Use a técnica de solução geral descrita na Seção 2.5.4.

- a. $\frac{dy(t)}{(t)} + 4y(t) = x(t), \frac{dt}{dy} \quad x(t) = u(t), \quad y(0) = \ddot{y}1$
- b. $\frac{+2y}{y}(t) = 2x(t), \frac{dt}{dy} \quad x(t) = \sin(2t) + 2\cos(t), \quad y(0) = 2$
- c. $\frac{(t)=3}{x}(t), \frac{dt}{dy} \quad x(t) = tu(t), \quad y(0) = \ddot{y}4$
- d. $\frac{(t), \frac{dt}{}}{} \quad x(t) = e\ddot{y}2t u(t), \quad y(0) = \ddot{y}1$

2.14. Para cada equação diferencial fornecida abaixo, encontre a solução para $t \geq 0$ com o sinal de entrada especificado e sujeito ao valor inicial especificado. Use a técnica de solução geral descrita na Seção 2.5.4.

- a. $\frac{d^2y(t)}{dt^2} \frac{dy(t)}{dt} + 3 + \frac{x(t)}{dt^2} \frac{dt}{dt}, \quad x(t) = u(t), y(0) = 3, \quad \left. \frac{dy(t)dt}{t=0} \right|_{t=0} = 0$
- b. $\frac{d^2y(t)}{dt^2} \frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{x(t)}{dt^2} \frac{dt}{dt}, \quad x(t) = (t+1)u(t), y(0) = \ddot{y}2 + 4 \frac{dt^2}{dt} \frac{dt}{dt} \frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = x(t), \frac{dt^2}{dt} \frac{dy(t)}{dt}$
- $$\left. \frac{dy(t)dt}{t=0} \right|_{t=0} = 1$$
- c. $\frac{d^2y(t)}{dt^2} \frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{x(t)}{dt^2} \frac{dt}{dt}, \quad x(t) = u(t), y(0) = 2, \quad \left. \frac{dy(t)dt}{t=0} \right|_{t=0} = 0$
- d. $\frac{d^2y(t)}{dt^2} \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t), \frac{dt}{dt}, \quad x(t) = e\ddot{y}2t u(t), y(0) = 1, \quad \left. \frac{dy(t)dt}{t=0} \right|_{t=0} = 0$

2.15. Um sistema é descrito pela equação diferencial

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \ddot{x}(t) + 4$$

e tem as condições iniciais

$$y(0) = \dot{y}(0) = 1$$

Usando a técnica descrita na Seção 2.6, desenhe um diagrama de blocos para simular esse sistema. Incorpore as condições iniciais no diagrama de blocos.

2.16. Desenhe um diagrama de blocos para cada sistema DLTI descrito abaixo por uma equação diferencial.

a. $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 13y(t) = x(t) + 4$

b. $\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 2\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2y(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} + 3x(t) + 4 + 6$

c. $\frac{d^3a(t)}{dt^3} + 6\frac{d^2a(t)}{dt^2} + 12\frac{dy(t)}{dt} + 8y(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} + 4x(t) + 2x(t) +$

2.17. Dois sistemas CTLTI com respostas ao impulso $h_1(t)$ e $h_2(t)$ são conectados em cascata conforme mostrado na Fig. P.2.17(a).

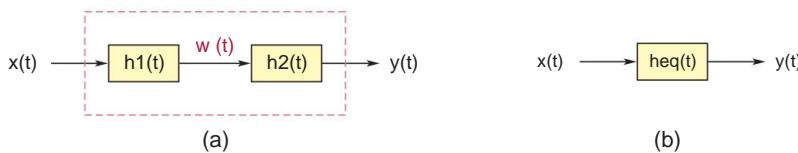


Figura P. 2.17

a. Determine a resposta ao impulso $h_{eq}(t)$ do sistema equivalente, conforme mostrado na Fig. P.2.17(b) em termos de $h_1(t)$ e $h_2(t)$.

Dica: use a convolução para expressar $w(t)$ em termos de $x(t)$. Em seguida, use a convolução novamente para expressar $y(t)$ em termos de $w(t)$.

w(t). b. Seja $h_1(t) = h_2(t) = \dot{y}(t) \delta(t - 0.5)$ onde $\dot{y}(t)$ é o pulso unitário. Determinar e esboçar $h_{eq}(t)$ para o sistema equivalente.

c. Com $h_1(t)$ e $h_2(t)$ conforme especificado na parte (b), considere o sinal de entrada um degrau unitário, que é, $x(t) = u(t)$. Determine e esboçar os sinais $w(t)$ e $y(t)$.

2.18. Dois sistemas CTLTI com respostas ao impulso $h_1(t)$ e $h_2(t)$ são conectados em paralelo conforme mostrado na Fig. P.2.18(a).

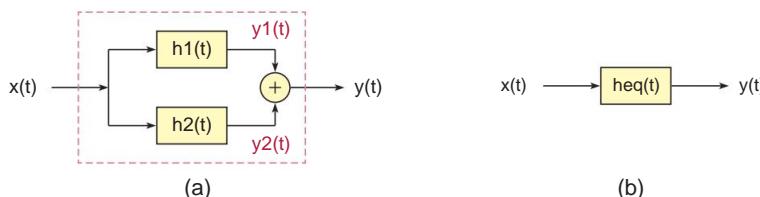


Figura P. 2.18

- a. Determine a resposta ao impulso $h_{eq}(t)$ do sistema equivalente, conforme mostrado na Fig. P.2.18(b) em termos de $h_1(t)$ e $h_2(t)$.

Dica: use a convolução para expressar os sinais $y_1(t)$ e $y_2(t)$ em termos de $x(t)$. Depois, expresse $y(t)$ em termos de $y_1(t)$ e $y_2(t)$.

- b. Seja $h_1(t) = e^{-yt} u(t)$ e $h_2(t) = \dot{y}e^{-yt} u(t)$. Determine e esboce $h_{eq}(t)$ para o sistema equivalente. c. Com

$h_1(t)$ e $h_2(t)$ conforme especificado na parte (b), considere o sinal de entrada um degrau unitário, ou seja, $x(t) = u(t)$. Determine e esboce os sinais $y_1(t)$, $y_2(t)$ e $y(t)$.

- 2.19.** Três sistemas CTLTI com respostas ao impulso $h_1(t)$, $h_2(t)$ e $h_3(t)$ são conectados como mostrado na Fig. P.2.19(a).

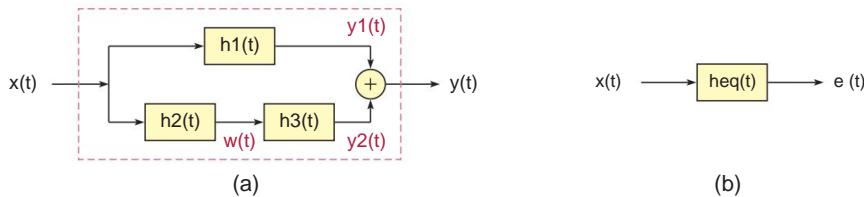


Figura P. 2.19

- a. Determine a resposta ao impulso $h_{eq}(t)$ do sistema equivalente, conforme mostrado na Fig. P.2.19(b) em termos de $h_1(t)$, $h_2(t)$ e $h_3(t)$.
- b. Seja $h_1(t) = e^{-yt} u(t)$, $h_2(t) = \dot{y}(t - 2)$ e $h_3(t) = e^{-yt} u(t)$. Determinar e esboçar $h_{eq}(t)$ para o sistema equivalente.
- c. Com $h_1(t)$, $h_2(t)$ e $h_3(t)$ conforme especificado na parte (b), considere o sinal de entrada um degrau unitário, ou seja, $x(t) = u(t)$. Determine e esboce os sinais $w(t)$, $y_1(t)$, $y_2(t)$ e $y(t)$.

- 2.20.** Considere o sistema CTLTI mostrado na Fig. P.2.20(a).

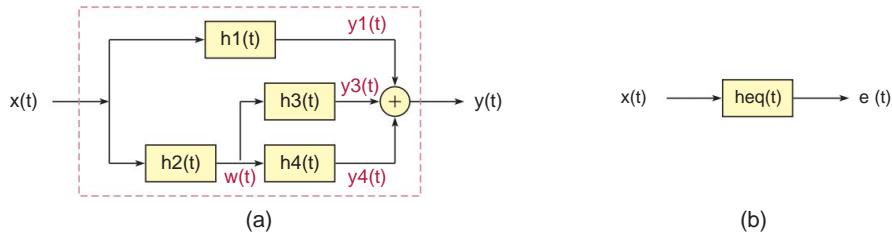


Figura P. 2.20

- a. Expresse a resposta ao impulso do sistema como uma função das respostas ao impulso de os subsistemas.

- b. Deixar

$$h_1(t) = e^{-yt} u(t)$$

$$h_2(t) = h_3(t) = u(t) \dot{y} u(t - 1)$$

e

$$h_4(t) = \ddot{y}(t - 1)$$

Determine a resposta ao impulso $h_{eq}(t)$ do sistema equivalente. c.

Seja o sinal de entrada um degrau unitário, ou seja, $x(t) = u(t)$. Determine e esboce os sinais $w(t)$, $y_1(t)$, $y_3(t)$ e $y_4(t)$.

2.21. Seja $y(t)$ a resposta de um sistema CTLTI a um sinal de entrada $x(t)$. Começando com a definição da integral de convolução, mostre que a resposta do sistema à derivada $dx(t)/dt$ é igual a $dy(t)/dt$.

2.22. Usando a integral de convolução dada pelas Eqns. (2.153) e (2.154) prove cada uma das relações abaixo:

a. $x(t) \ddot{y} \ddot{y}(t) = x(t)$

b. $x(t) \ddot{y} \ddot{y}(t \ddot{y} t_0) = x(t \ddot{y} t_0)$

c. $x(t) \ddot{y} u(t \ddot{y} 2) = \int_{t-t_0}^{t-2} x(\ddot{y}) d\ddot{y}$

d. $x(t) \ddot{y} u(t \ddot{y} t_0) = \int_{t-t_0}^t x(\ddot{y}) d\ddot{y}$

e. $x(t) \ddot{y} \ddot{y} \frac{t - t_0}{T} = \int_{t-t_0-T/2}^{t-T/2} 2x(\ddot{y}) d\ddot{y}$

2.23. A resposta ao impulso de um sistema CTLTI é

$$h(t) = \ddot{y}(t) \ddot{y} \ddot{y}(t \ddot{y} 1)$$

Determine esboce a resposta desse sistema para a forma de onda triangular mostrada na Fig. P.2.23.

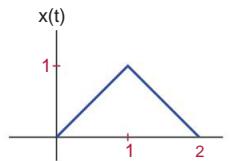


Figura P. 2.23

2.24. Um sistema CTLTI tem a resposta ao impulso

$$h(t) = \ddot{y}(t) + 0,5 \ddot{y}(t \ddot{y} 1) + 0,3 \ddot{y}(t \ddot{y} 2) + 0,2 \ddot{y}(t \ddot{y} 3)$$

Determine esboce a resposta deste sistema ao sinal de entrada exponencial

$$x(t) = e^{\dot{y}t} u(t)$$

mostrado na Fig. P.2.24.

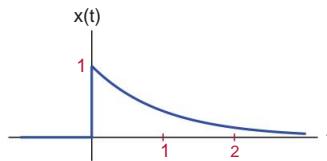


Figura P. 2.24

2.25. Seja $x(t)$ um sinal limitado no intervalo (\bar{y}, \bar{y}) , ou seja

$$x(t) = 0 \text{ para } |t| > \bar{y}$$

Mostre que uma extensão periódica de $x(t)$ pode ser obtida convoluindo-a com um trem de impulso periódico como segue:

$$\tilde{x}(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$$

onde o período é $T_s = 2\bar{y}$.

2.26. Para cada par de sinais $x(t)$ e $h(t)$ dados abaixo, encontre a convolução $y(t) = x(t) * h(t)$. Em cada caso, esboce os sinais envolvidos na integral de convolução e determine os limites de integração adequados.

- (t) a. $x(t) = u(t)$ $h(t) = e^{-2t} u(t)$
- b. $x(t) = u(t)$ $h(t) = e^{-t} \delta(t - 2)$
- c. $x(t) = u(t)$ $h(t) = e^{-2t} u(t)$
- d. $x(t) = u(t)$ $h(t) = e^{-2t} u(t)$

2.27. Para cada par de sinais $x(t)$ e $h(t)$ dados abaixo, encontre a convolução $y(t) = x(t) * h(t)$ primeiramente graficamente e depois analiticamente usando a integral de convolução.

- a. $x(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 2 \\ 0 & \text{outro} \end{cases}$, $h(t) = u(t)$
- b. $x(t) = \begin{cases} 3 & 0 \leq t < 2 \\ 0 & \text{outro} \end{cases}$, $h(t) = e^{-t} u(t)$
- c. $x(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 2 \\ 0 & \text{outro} \end{cases}$, $h(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 2 \\ 0 & \text{outro} \end{cases}$
- d. $x(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 2 \\ 0 & \text{outro} \end{cases}$, $h(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 3 \\ -\frac{1}{2} & 3 \leq t < 6 \\ 0 & \text{outro} \end{cases}$

2.28. Sejam $x(t)$ e $h(t)$ sinais de duração finita de modo que, dados os valores de parâmetro $t_1 < t_2$ e $t_3 < t_4$, temos

$$\begin{aligned} x(t) &= 0 \text{ para } t < t_1 \text{ ou } t > t_2 \\ h(t) &= 0 \text{ para } t < t_3 \text{ ou } t > t_4 \end{aligned}$$

Mostre que a convolução de $x(t)$ e $h(t)$ também é um sinal de duração finita:

$$y(t) = x(t) * h(t) = 0 \text{ para } t < t_5 \text{ ou } t > t_6$$

Determine os limites t_5 e t_6 em termos de t_1 , t_2 , t_3 e t_4 .

2.29. Na Seção 2.9 foi mostrado que, para um sistema CTLTI ser estável no sentido BIBO, a resposta ao impulso deve ser integrável absoluta, ou seja,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\bar{y})| d\bar{y} < \infty$$

Suponha que um determinado sistema não satisfaça essa condição. Prove que o sistema não pode ser estável encontrando um sinal de entrada limitado $x(t)$ que produz um sinal de saída ilimitado $y(t)$.

2.30. O sistema mostrado na Fig. P.2.30 representa a adição de ecos ao sinal $x(t)$:

$$y(t) = x(t) + \hat{y}_1 x(t - \hat{\tau}_1) + \hat{y}_2 x(t - \hat{\tau}_2)$$

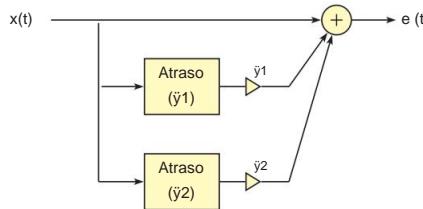


Figura P. 2.30

Comente sobre o sistema

- a. Linearidade
- b. Invariância temporal
- c. Causalidade
- d. Estabilidade

2.31. Para cada sistema descrito abaixo, encontre a resposta ao impulso. Depois determine se o sistema é causal e/ou estável.

$$\begin{aligned} a. y(t) &= \text{Sys}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^t x(\hat{y}) d\hat{y} \\ b. y(t) &= \text{Sys}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^t x(\hat{y}) d\hat{y}, \quad T > 0 \\ c. y(t) &= \text{Sys}\{x(t)\} = \int_{-T}^t x(\hat{y}) d\hat{y}, \quad T > 0 \end{aligned}$$

Problemas MATLAB

2.32. Consulte o Problema 2.2. A combinação em cascata dos dois subsistemas será testada usando o sinal de entrada

$$x(t) = e^{-t} \cos(2t) u(t)$$

Escreva um script MATLAB para fazer o seguinte:

- a. Crie uma função anônima anônima “x” para calcular o sinal de entrada o tempo todo instantes especificados em um vetor “t”.
- b. Implemente o sistema em cascata conforme mostrado na Fig. P.2.2(a). Calcule os sinais $w(t)$ e $y(t)$ no intervalo de tempo $\hat{\tau}_1 \leq t \leq 5$ s usando um incremento de tempo de 0,01 sc
- Implemente o sistema em cascata na forma alternativa mostrada na Fig. P.2.2(b). Calcule os sinais $w(t)$ e $y(t)$ no intervalo de tempo $\hat{\tau}_1 \leq t \leq 5$ s usando um incremento de tempo de 0,01 s. Compare $y(t)$ e $\bar{y}(t)$.

2.33. Repita as etapas do Problema 2.32 usando os subsistemas descritos no Problema 2.3.

2.34. Considere as equações diferenciais dadas no Problema 2.8. Usando o método de Euler, encontre uma solução numérica para cada equação diferencial com o sinal de entrada especificado e

condição inicial. Consulte o Exercício 2.4 do MATLAB para obter um exemplo de como fazer isso. Para cada caso, use um tamanho de passo T_s igual a 10% da constante de tempo e obtenha a solução numérica no intervalo de tempo $0 \leq t \leq 2$ s. Compare a solução numérica com a solução exata encontrada no Problema 2.32.

Dica: A parte (c) pode ser complicada devido ao sinal de entrada do impulso unitário. Aproxime $\tilde{y}(t)$ usando um pulso com área unitária e largura igual ao tamanho do passo.

2.35. Repita o Problema 2.34 usando a função MATLAB `ode45(..)` em vez do método de Euler.

2.36. Consulte o Problema 2.12, no qual a resposta em rampa unitária do circuito RC simples da Fig. P.2.12(a) foi determinada. Como o circuito é considerado inicialmente relaxado, ele é linear e invariante no tempo. Como resultado, a resposta em rampa unitária obtida no Problema 2.12 pode ser utilizada com superposição para encontrar a resposta do circuito a sinais de maior complexidade. Considere o sinal de entrada trapezoidal mostrado na Fig. P.2.36.

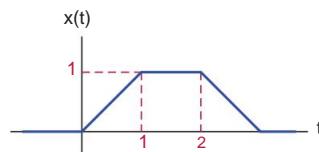


Figura P. 2.36

Desenvolva um script para fazer o seguinte:

- Crie uma função anônima `xr(..)` para calcular a função de rampa unitária no tempo em constantes em um vetor especificado. Você pode querer revisar o script desenvolvido no Exercício 2.3 do MATLAB como exemplo.
- Crie uma função anônima `yr(..)` para calcular a resposta de rampa unitária do RC circuito em instantes de tempo em um vetor especificado.
- Expresse o sinal de entrada $x(t)$ em termos de funções de rampa unitárias com escala e deslocadas no tempo e calcule-o no intervalo de tempo $1 \leq t \leq 5$ segundos com um incremento de 0,01 segundos.
- Expresse a resposta $y(t)$ do circuito em termos de versões em escala e com deslocamento de tempo da resposta de rampa unitária e calcule-a no mesmo intervalo de tempo com o mesmo incremento.
- Faça um gráfico dos sinais de entrada e saída no mesmo sistema de coordenadas.

2.37. Consulte novamente o circuito RC simples mostrado na Fig. P.2.12(a). No Exercício 2.3 do MATLAB, uma função anônima foi desenvolvida para calcular a resposta degrau unitário do circuito.

No Problema 2.36, uma função anônima semelhante foi desenvolvida para calcular sua resposta de rampa unitária. Considere o sinal de entrada mostrado na Fig. P.2.37.

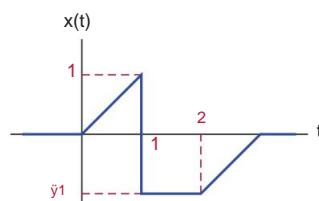


Figura P. 2.37

Desenvolva um script MATLAB para fazer o seguinte:

- a. Expresse o sinal de entrada $x(t)$ usando uma combinação de funções de passo unitário e rampa unitária escalonadas e deslocadas no tempo. b. Use a função anônima $yu(..)$ do Exercício 2.3 do MATLAB e a função anônima $yr(..)$ do Problema 2.36. Expresse o sinal de saída $y(t)$ do circuito em termos de versões em escala e deslocadas no tempo da resposta de degrau unitário e da resposta de rampa unitária e calcule-o no intervalo de tempo $\tilde{y}1 \leq t \leq 5$ segundos com um incremento de 0,01 segundos. c. Faça um gráfico dos sinais de entrada e saída no mesmo sistema de coordenadas.

2.38. Escreva um script para verificar a solução do Problema 2.23. Expresse a forma de onda triangular $x(t)$ usando uma função anônima. Em seguida, calcule e represente graficamente o sinal de saída $y(t)$ no intervalo de tempo $\tilde{y}1 \leq t \leq 5$ s.

2.39. Escreva um script para verificar a solução do Problema 2.24. Expresse o sinal de entrada $x(t) = e^{-t}$ $u(t)$ usando uma função anônima. Em seguida, calcule e represente graficamente o sinal de saída $y(t)$ no intervalo de tempo $\tilde{y}1 \leq t \leq 7$ s.

Projetos MATLAB

2.40. Considere uma equação diferencial homogênea de segunda ordem geral

$$\frac{d^2a(t)}{dt^2} + a_0 y(t) = 0 + a_1$$

com condições iniciais

$$y(0) = p_1, \quad \left. \frac{dy(t)dt}{dt} \right|_{t=0} = p_2$$

Os coeficientes a_1 e a_0 da equação diferencial e os valores iniciais p_1 e p_2 são todos reais e serão deixados como parâmetros.

a. Sejam s_1 e s_2 as raízes do polinômio característico. No papel, resolva a equação diferencial homogênea para as três possibilidades para as raízes:

1. As raízes são reais e distintas.
2. As raízes são um par conjugado complexo.
3. As duas raízes são reais e iguais.

Encontre a solução $y(t)$ em função das raízes s_1 e s_2 , bem como dos valores iniciais p_1 e p_2 .

b. Desenvolva uma função MATLAB `ss_diff2solve(..)` com a sintaxe

$$y = ss_diff2solve(a1, a0, p1, p2, t)$$

O vetor “ t ” contém os instantes de tempo nos quais a solução deve ser calculada.

O vetor “ y ” retornado contém a solução nos instantes de tempo no vetor “ t ” para que a solução possa ser representada graficamente com

$$\text{gráfico}(t, y)$$

Sua função deve executar as seguintes etapas:

1. Forme o polinômio característico e encontre suas raízes.
 2. Determine em qual das três categorias as raízes se encaixam (raízes reais simples, par complexo conjugado ou raízes múltiplas).
 3. Calcule a solução de acordo.
- c. Teste a função `ss_diff2solve(..)` com as equações diferenciais homogêneas nos Problemas 2.9a, b, c, Problemas 2.10a, b, c e Problema 2.11a.

2.41. Consulte a discussão na Seção 2.10 sobre a solução numérica de uma equação diferencial usando o método de Euler. Uma versão modificada deste método é o método de Euler retrógrado que usa a aproximação

$$\frac{dy(t)dt}{t=t_0} \approx \frac{y(t_0) - y(t_0 + T)}{T}$$

em vez da Eq. (2.184). Com esta modificação a Eqn. (2.185) torna-se

$$y(t_0) - y(t_0 + T) + T g[t_0, y(t_0)]$$

Considere o problema do circuito RC cuja solução numérica foi explorada no MATLAB Exercício 2.4.

- a. Comece com o script desenvolvido em MATLAB Exercício 2.4. Modifique-o para que o tamanho do passo seja $T = 0,7$ s e a solução aproximada seja calculada e representada graficamente para $0 < t \leq 7$ s.
- b. Desenvolva um novo script que use o método de Euler reverso para resolver o mesmo problema. Para conseguir isso, comece com a equação diferencial original e aproxime a derivada no lado esquerdo com a diferença inversa. Simplifique a equação resultante e use-a no código. Calcule e represente graficamente a solução aproximada usando um tamanho de passo de $T = 0,7$ s como na parte (a). c. Compare os resultados obtidos nas partes (a) e (b). Observe que o tamanho do passo T usado em ambos os scripts é muito grande em comparação com a constante de tempo. Como o desempenho do método de Euler reverso se compara ao do método de Euler?

2.42. O método de Euler inverso pode ser estendido para aplicar a equações diferenciais de segunda ordem usando a aproximação

$$\frac{d^2a(t)}{dt^2} \approx \frac{y(t_0) - 2y(t_0 + T) + y(t_0 + 2T)}{T^2}$$

para a segunda derivada. Usando essa aproximação, desenvolva um script para calcular e representar graficamente a solução aproximada da equação diferencial homogênea

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} \approx \frac{26}{\text{anos}} y(t) = 0 + 2 \frac{dt^2}{\text{anos}}$$

sujeito às condições iniciais

$$y(0) = 2, \quad \frac{dy(t)dt}{t=0} = 13$$

Experimente a escolha do tamanho do passo T . Compare suas soluções aproximadas com a solução exata encontrada no Exemplo 2.15, parte (a).

Capítulo 3

Analizando o Tempo Discreto Sistemas no domínio do tempo

Objetivos do Capítulo

- Desenvolver a noção de sistema de tempo discreto.
- Aprenda a simplificar as suposições feitas na análise de sistemas de tempo discreto. Discutir os conceitos de linearidade e invariância temporal, e seu significado.
- Explorar o uso de equações de diferenças para representar sistemas de tempo discreto.
- Desenvolver métodos para resolver equações de diferenças para calcular o sinal de saída de um sistema em resposta a um sinal de entrada especificado.
- Aprenda a representar uma equação de diferenças na forma de um diagrama de blocos que pode ser usado como base para simular ou realizar um sistema.
- Discuta o significado da resposta ao impulso como uma forma de descrição alternativa para sistemas lineares e invariantes no tempo.
- Aprenda como calcular o sinal de saída para um sistema linear e invariante no tempo usando convolução. Compreender a interpretação gráfica dos passos envolvidos na realização da operação de convolução.
- Aprenda os conceitos de causalidade e estabilidade conforme eles se relacionam com sistemas fisicamente realizáveis e utilizáveis.

3.1 Introdução

A definição de um sistema de tempo discreto é semelhante à de sua contraparte de tempo contínuo:

Em geral, um sistema de tempo discreto é uma fórmula matemática, método ou algoritmo que define uma relação de causa e efeito entre um conjunto de sinais de entrada de tempo discreto e um conjunto de sinais de saída de tempo discreto.

A interação sinal-sistema envolvendo um sistema de tempo discreto de entrada única e saída única é ilustrada na Fig. 3.1.

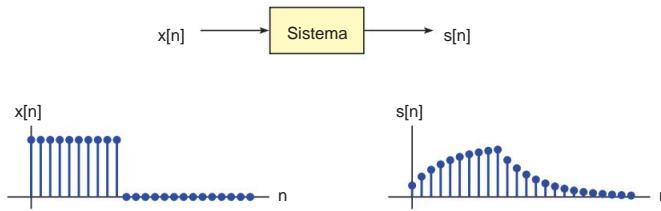


Figura 3.1 – Interação sinal-sistema em tempo discreto.

A relação entrada-saída de um sistema de tempo discreto pode ser expressa na forma

$$y[n] = \text{Sistema}\{x[n]\} \quad (3.1)$$

onde $\text{Sistema}\{\dots\}$ representa a transformação que define o sistema no domínio do tempo.

Um exemplo muito simples é um sistema que simplesmente multiplica seu sinal de entrada por um fator de ganho constante K

$$y[n] = Kx[n] \quad (3.2)$$

ou um sistema que atrasa seu sinal de entrada em m amostras

$$y[n] = x[n - m] \quad (3.3)$$

ou aquele que produz um sinal de saída proporcional ao quadrado do sinal de entrada

$$y[n] = K[x[n]]^2 \quad (3.4)$$

Um sistema com maior complexidade pode ser definido usando uma equação de diferenças que estabelece a relação entre os sinais de entrada e saída.

Dois pressupostos simplificadores comumente usados no estudo de modelos matemáticos de sistemas, a saber, linearidade e invariância no tempo, serão o assunto da Seção 3.2. A Seção 3.3 trata da questão de derivar um modelo de equação de diferenças para um sistema de tempo discreto, e a Seção 3.4 discute as características de equações de diferenças lineares de coeficiente constante. Métodos de solução para equações de diferenças lineares de coeficiente constante são apresentados na Seção 3.5. Diagramas de blocos para a realização de sistemas de tempo discreto são apresentados na Seção 3.6. Na Seção 3.7, discutimos o significado da resposta ao impulso para sistemas de tempo discreto e seu uso no contexto do operador de convolução para determinar o sinal de saída. Os conceitos de causalidade e estabilidade de sistemas são discutidos nas Seções 3.8 e 3.9, respectivamente.

3.2 Linearidade e Invariância no Tempo

Em nossa discussão sobre sistemas de tempo contínuo no Capítulo 2, confiamos fortemente nas suposições simplificadoras de linearidade e invariância de tempo. Vimos que esses dois

As suposições permitem que um conjunto robusto de métodos de análise seja desenvolvido. O mesmo é verdadeiro para a análise de sistemas de tempo discreto.

3.2.1 Linearidade em sistemas de tempo discreto

A propriedade de linearidade será muito importante à medida que analisamos e projetamos sistemas de tempo discreto. As condições de linearidade de um sistema de tempo discreto são:

Condições para linearidade:

$$\text{Sistema } \{x_1[n] + x_2[n]\} = \text{Sistema } \{x_1[n]\} + \text{Sistema } \{x_2[n]\} \quad (3.5)$$

$$\text{Sys } \{\ddot{y}_1 x_1[n]\} = \ddot{y}_1 \text{ Sys } \{x_1[n]\} \quad (3.6)$$

Equações (3.5) e (3.6), referidas como regra da aditividade e regra da homogeneidade, respectivamente, devem ser satisfeitas para quaisquer dois sinais de tempo discreto $x_1[n]$ e $x_2[n]$, bem como para qualquer constante arbitrária \ddot{y}_1 . Esses dois critérios podem ser combinados em uma equação conhecida como princípio da superposição.

Princípio da superposição:

$$\text{Sys } \{\ddot{y}_1 x_1[n] + \ddot{y}_2 x_2[n]\} = \ddot{y}_1 \text{ Sys } \{x_1[n]\} + \ddot{y}_2 \text{ Sys } \{x_2[n]\} \quad (3.7)$$

Expressa verbalmente, Eqn. (3.7) implica que a resposta do sistema a uma soma ponderada de quaisquer dois sinais de entrada é igual à mesma soma ponderada das respostas individuais do sistema a cada um dos dois sinais de entrada. A Fig. 3.2 ilustra esse conceito.

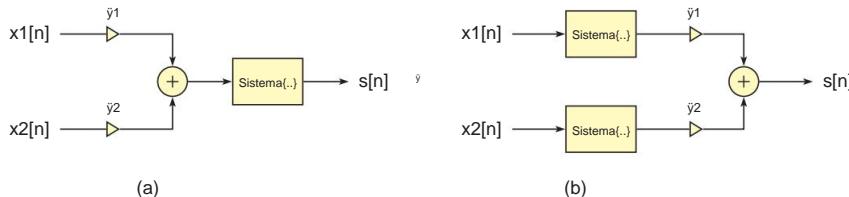


Figura 3.2 – Ilustração da Eqn. (3.7). As duas configurações mostradas são equivalentes se o sistema considerado for linear.

Uma generalização do princípio da superposição para a soma ponderada de N tempo discreto sinais é expresso como

$$\text{sistema} \sum_{i=1}^N \ddot{y}_i x_i[n] = \sum_{i=1}^N \ddot{y}_i \text{ Sys } \{x_i[n]\} \quad (3.8)$$

A resposta de um sistema linear a uma soma ponderada de N sinais arbitrários é igual à mesma soma ponderada de respostas individuais do sistema a cada um dos N sinais. Seja $y_i[n]$ a resposta ao termo de entrada $x_i[n]$ sozinho, ou seja, $y_i[n] = \text{Sys } \{x_i[n]\}$ para $i = 1, \dots, N$.

O princípio da superposição implica que

$$s[n] = \text{Sistema} \sum_{i=1}^N \ddot{y}_i x_i[n] = \sum_{i=1}^N \ddot{y}_i y_i[n] \quad (3.9)$$

Isso é ilustrado na Fig. 3.3.

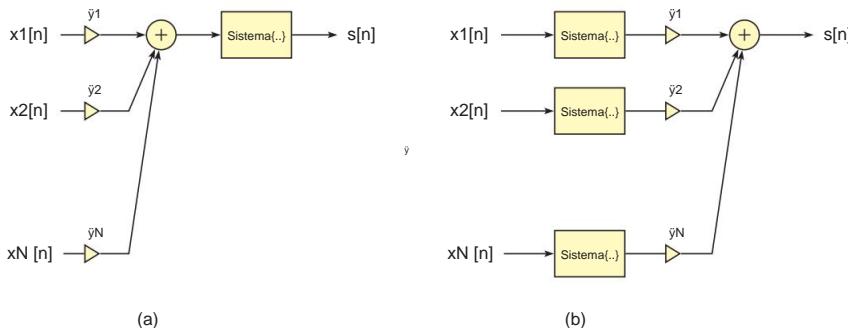


Figura 3.3 – Ilustração da Eqn. (3.7). As duas configurações mostradas são equivalentes se o sistema considerado for linear.

Exemplo 3.1: Testando linearidade em sistemas de

tempo discreto Para cada um dos sistemas de tempo discreto descritos abaixo, determine se o sistema é linear ou não:

- a. $y[n] = 3x[n] + 2x[n-1]$
- b. $y[n] = a \ddot{y} n x[n]$
- c.

Solução:

- a. Para testar a linearidade do sistema, pensaremos em suas respostas aos dois sinais de tempo discreto $x_1[n]$ e $x_2[n]$ como

$$y_1[n] = \text{Sys}\{x_1[n]\} = 3x_1[n] + 2x_1[n-1]$$

e

$$y_2[n] = \text{Sys}\{x_2[n]\} = 3x_2[n] + 2x_2[n-1]$$

A resposta do sistema ao sinal de combinação linear $x[n] = \ddot{y}_1 x_1[n] + \ddot{y}_2 x_2[n]$ é calculada como

$$\begin{aligned} y[n] &= \text{Sys}\{\ddot{y}_1 x_1[n] + \ddot{y}_2 x_2[n]\} \\ &= 3(\ddot{y}_1 x_1[n] + \ddot{y}_2 x_2[n]) + 2(\ddot{y}_1 x_1[n-1] + \ddot{y}_2 x_2[n-1]) = \ddot{y}_1(3x_1[n] \\ &\quad + 2x_1[n-1]) + \ddot{y}_2(3x_2[n] + 2x_2[n-1]) = \ddot{y}_1 y_1[n] + \ddot{y}_2 y_2[n] \end{aligned}$$

O princípio da superposição é válido e, portanto, o sistema em questão é linear.

b. Novamente usando os sinais de teste $x_1[n]$ e $x_2[n]$ temos

$$y_1[n] = \text{Sys}\{x_1[n]\} = 3x_1[n] + 2x_1[n+1]x_1[n-1]$$

e

$$y_2[n] = \text{Sys}\{x_2[n]\} = 3x_2[n] + 2x_2[n+1]x_2[n-1]$$

O uso do sinal de combinação linear $x[n] = \ddot{y}_1 x_1[n] + \ddot{y}_2 x_2[n]$ como entrada para o sistema produz o sinal de saída

$$\begin{aligned} y[n] &= \text{Sys}\{\ddot{y}_1 x_1[n] + \ddot{y}_2 x_2[n]\} \\ &= 3(\ddot{y}_1 x_1[n] + \ddot{y}_2 x_2[n]) \\ &\quad + 2(\ddot{y}_1 x_1[n+1] + \ddot{y}_2 x_2[n+1])(\ddot{y}_1 x_1[n-1] + \ddot{y}_2 x_2[n-1]) \end{aligned}$$

Neste caso, o princípio da superposição não é válido. O sistema da parte (b) não é, portanto, linear.

c. As respostas do sistema aos dois sinais de teste são

$$y_1[n] = \text{Sys}\{x_1[n]\} = a\ddot{y}_1 x_1[n]$$

e

$$y_2[n] = \text{Sys}\{x_2[n]\} = a\ddot{y}_2 x_2[n]$$

e a resposta ao sinal de combinação linear $x[n] = \ddot{y}_1 x_1[n] + \ddot{y}_2 x_2[n]$ é

$$\begin{aligned} y[n] &= \text{Sys}\{\ddot{y}_1 x_1[n] + \ddot{y}_2 x_2[n]\} \\ &= a\ddot{y}_1 (\ddot{y}_1 x_1[n] + \ddot{y}_2 x_2[n]) \\ &= \ddot{y}_1 a\ddot{y}_1 x_1[n] + \ddot{y}_2 a\ddot{y}_1 x_2[n] \\ &= \ddot{y}_1 y_1[n] + \ddot{y}_2 y_2[n] \end{aligned}$$

O sistema é linear.

3.2.2 Invariância temporal em sistemas de tempo discreto

A definição da propriedade invariante no tempo para um sistema de tempo discreto é semelhante à de um sistema de tempo contínuo. Seja um sistema de tempo discreto descrito com a relação entrada-saída $y[n] = \text{Sys}\{x[n]\}$. Para que o sistema seja considerado invariante no tempo, o único efeito da mudança de tempo no sinal de entrada deve ser causar uma quantidade igual de mudança de tempo no sinal de saída.

Condição para invariância de tempo:

$$\text{Sys}\{x[n]\} = y[n] \text{ implica que } \text{Sys}\{x[n-k]\} = y[n-k] \quad (3.10)$$

Essa relação é representada na Fig. 3.4.

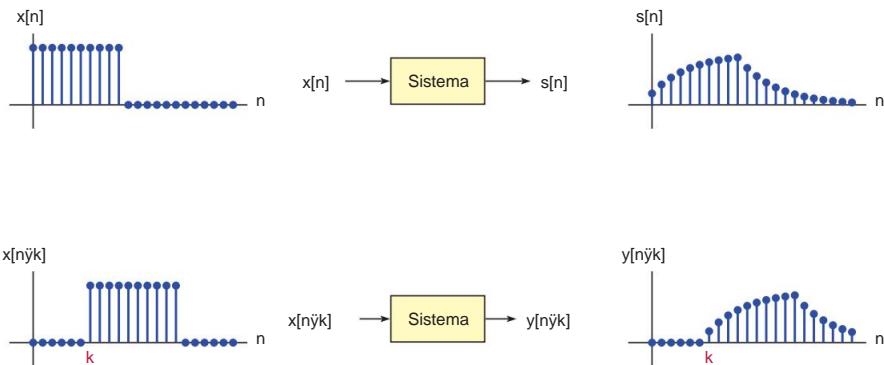


Figura 3.4 – Ilustração da invariância no tempo para um sistema de tempo discreto.

Alternativamente, a natureza invariante no tempo de um sistema pode ser caracterizada pela equivalência das duas configurações mostradas na Fig. 3.5.

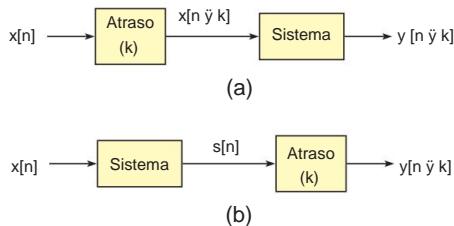


Figura 3.5 – Outra interpretação da invariância no tempo. As duas configurações mostradas são equivalentes para um sistema invariante no tempo.

Exemplo 3.2: Testando a invariância do tempo em sistemas de

tempo discreto Para cada um dos sistemas de tempo discreto descritos abaixo, determine se o sistema é invariante no tempo ou não:

- $y[n] = y[n - 1] + 3x[n]y[n]$
- $= x[n]y[n - 1]y[n] =$
- $nx[n - 1]$

Solução:

- Testaremos a propriedade de invariância de tempo do sistema deslocando no tempo os sinais de entrada e saída pelo mesmo número de amostras e veremos se a relação entrada-saída ainda se mantém. Substituindo o índice n por $n - k$ nos argumentos de todos os termos de entrada e saída, obtemos

$$\text{Sys } \{x[n - k]\} = y[n - k - 1] + 3x[n - k]y[n - k]$$

A relação entrada-saída é mantida, portanto o sistema é invariante no tempo. b. Procedendo de forma similar temos

$$\text{Sys } \{x[n - k]\} = x[n - k]y[n - k - 1] = y[n - k]$$

Este sistema também é invariante no tempo.

c. Substituir o índice n por n - k nos argumentos de todos os termos de entrada e saída produz

$$\text{Sys}\{x[n - k]\} = nx[n - k - 1] = y[n - k]$$

Este sistema claramente não é invariante no tempo, uma vez que a relação entrada-saída não é mais mantida depois que os sinais de entrada e saída são deslocados no tempo.

Deveríamos ter incluído o fator n na operação de deslocamento de tempo quando escrevemos a resposta do sistema a um sinal de entrada com deslocamento de tempo? Em outras palavras, deveríamos ter escrito a resposta como

$$\text{Sys}\{x[n - k]\} = (n - k) x[n - k - 1]$$

A resposta é não. O fator n que multiplica o sinal de entrada faz parte da definição do sistema e não faz parte do sinal de entrada nem do sinal de saída. Portanto, não podemos incluí-lo no processo de sinais de entrada e saída de deslocamento de tempo.

3.2.3 Sistemas DTLTI

Sistemas de tempo discreto que são lineares e invariantes no tempo desempenharão um papel importante no restante deste livro. Desenvolveremos técnicas de análise e projeto no domínio do tempo e da frequência para trabalhar com esses sistemas. Para simplificar a terminologia, usaremos o acrônimo DTLTI para nos referirmos a sistemas lineares de tempo discreto e sistemas invariantes no tempo.

3.3 Equações de diferenças para sistemas de tempo discreto

Na Seção 2.3 discutimos métodos de representação de sistemas de tempo contínuo com equações diferenciais. Usando uma abordagem semelhante, sistemas de tempo discreto podem ser modelados com equações de diferenças envolvendo amostras atuais, passadas ou futuras de sinais de entrada e saída. Começaremos nosso estudo de modelos de sistemas de tempo discreto baseados em equações de diferenças com alguns exemplos. Cada exemplo começará com uma descrição verbal de um sistema e levará a um modelo de sistema na forma de uma equação de diferença. Alguns dos exemplos levarão a sistemas que serão de fundamental importância no restante deste texto, enquanto outros exemplos levarão a sistemas não lineares ou variantes no tempo que não consideraremos mais adiante. Nas seções a seguir, focaremos nossa atenção nas equações de diferenças para sistemas DTLTI e desenvolveremos técnicas de solução para elas usando uma abordagem paralela ao nosso estudo de equações diferenciais para sistemas CTLTI.

Exemplo 3.3: Filtro de média móvel

Um filtro de média móvel de comprimento N é um sistema simples que produz uma saída igual à média aritmética das N amostras mais recentes do sinal de entrada. Seja o sinal de saída de tempo discreto $y[n]$. Se o índice de amostra atual for 100, a amostra de saída atual $y[100]$ seria igual à média aritmética da amostra de entrada atual $x[100]$ e (N - 1) amostras de entrada anteriores. Matematicamente temos

$$\begin{aligned} &= \frac{x[100] + x[99] + \dots + x[100 - (N - 1)]}{N} y[100] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x[100 - k] \end{aligned}$$

A expressão geral para o filtro de média móvel de comprimento N é obtida expressando a n-ésima amostra do sinal de saída em termos das amostras relevantes do sinal de entrada como

$$\begin{aligned} &= \frac{x[n] + x[n-1] + \dots + x[n-(N-1)]}{N} y[n] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x[n-k] \end{aligned} \quad (3.11)$$

Eq. (3.11) é uma equação de diferenças que descreve a relação entrada-saída do filtro de média móvel como um sistema de tempo discreto. A operação do filtro de média móvel de comprimento N é melhor explicada usando a analogia de uma janela, conforme ilustrado na Fig. 3.6.

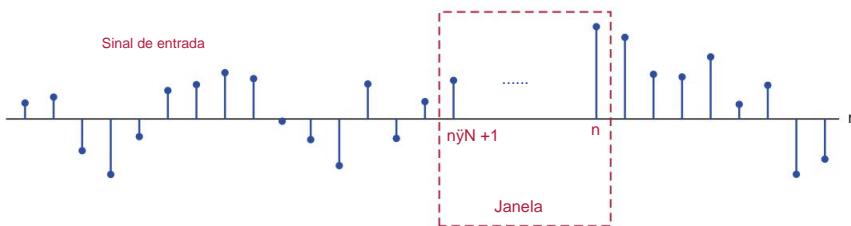


Figura 3.6 – Filtro de média móvel de comprimento N.

Suponha que estejamos observando o sinal de entrada através de uma janela larga o suficiente para conter N amostras do sinal de entrada a qualquer momento. Deixe a janela ficar estacionária e deixe o sinal de entrada $x[n]$ mover-se para a esquerda uma amostra de cada vez, semelhante a uma tira de filme. A amostra atual do sinal de entrada é sempre a amostra mais à direita visível na janela. A amostra de saída atual é a média aritmética das amostras de entrada visíveis através da janela.

Os filtros de média móvel são usados em aplicações práticas para suavizar as variações de um sinal. Um exemplo é a análise das mudanças em um índice financeiro como o Dow Jones Industrial Average. Um investidor pode usar um filtro de média móvel em um sinal que contém os valores do índice para cada dia. Uma janela de média móvel de 50 ou 100 dias pode ser usada para produzir um sinal de saída que desconsidera as flutuações diárias do sinal de entrada e se concentra nas tendências que variam lentamente. O grau de suavização depende de N, o tamanho da janela. Em geral, uma média móvel de 100 dias é mais suave do que uma média móvel de 50 dias.

Seja $x[n]$ o sinal que contém os valores diárias de fechamento do índice para o calendário ano de 2003. As médias móveis de 50 dias são calculadas por

$$y_1[n] = \frac{1}{50} \sum_{k=0}^{49} x[n-k]$$

e as médias móveis de 100 dias são calculadas por

$$y_2[n] = \frac{1}{100} \sum_{k=0}^{99} x[n-k]$$

A Fig. 3.7 mostra os valores diárias do índice para o ano civil de 2003 como um sinal de tempo discreto, bem como as saídas produzidas pelos filtros de média móvel de 50 e 100 dias. Observação

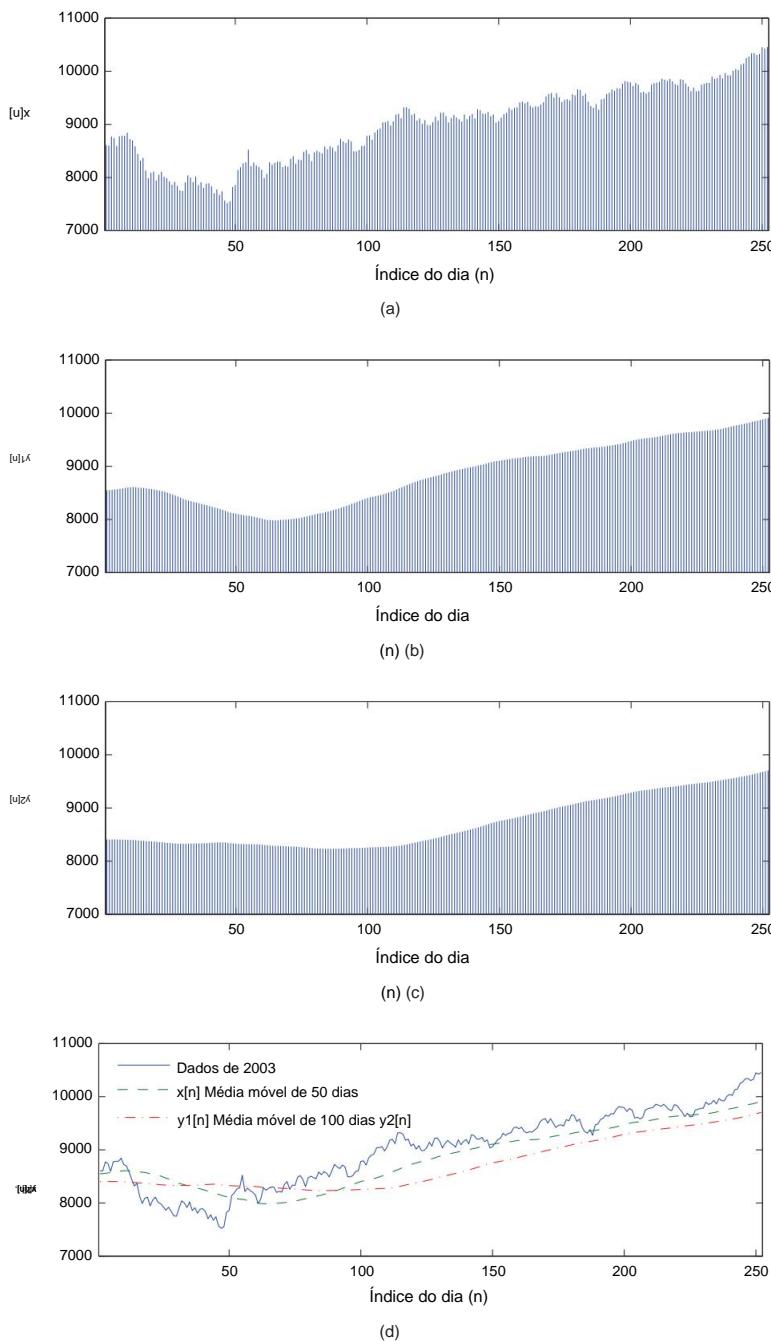


Figura 3.7 – (a) Sinal $x[n]$ representando os valores diários do Dow Jones Industrial Average para o ano civil de 2003, (b) o sinal $y1[n]$ contendo valores médios móveis de 50 dias para o índice, (c) o sinal $y2[n]$ mantendo valores médios móveis de 100 dias para o índice, (d) sinais $x[n]$, $y1[n]$ e $y2[n]$ representados como gráficos de linha no mesmo conjunto de eixos para comparação.

que, no cálculo das amostras de sinal de saída $y1[0], \dots, y1[48]$, bem como das amostras de sinal de saída $y2[0], \dots, y2[98]$, a janela de média tinha que ser fornecidos com valores de dados de 2002 para o índice. Por exemplo, para calcular a média móvel de 50 dias em 1º de janeiro de 2003, 49 amostras anteriores dos dados de dezembro e parte de novembro de 2002 tiveram que ser usadas.

Desenvolveremos uma visão melhor para o tipo de suavização alcançado pela média móvel filtros quando discutimos métodos de análise de domínio de frequência para sistemas de tempo discreto.

Demonstração interativa: ma_demo1

O programa de demonstração interativo ma_demo1.m ilustra o filtro de média móvel de comprimento N discutido no Exemplo 3.3. Devido ao grande número de amostras envolvidas, os dois sinais de tempo discretos são mostrados por meio de plotagens de linha em oposição a plotagens de haste. O primeiro gráfico são os dados do Dow Jones Industrial Average para o ano de 2003, que são precedidos por dados parciais do ano de 2002. O segundo gráfico é o sinal de saída suavizado do filtro de média móvel. O índice de amostra atual n e o comprimento N do filtro de média móvel podem ser especificados por meio dos controles da interface do usuário. O índice de amostra atual é marcado em cada gráfico com um ponto vermelho. Além disso, a janela para o filtro de média móvel é mostrada no primeiro gráfico, sobreposta com os dados de entrada. A linha horizontal verde dentro da janela, bem como as setas verdes, indicam a amplitude média das amostras que caem dentro da janela.

1. Incremente o índice de amostra e observe como a janela desliza para a direita a cada vez. Observe que a amostra mais à direita na janela é a amostra atual e a janela acomoda um total de N amostras.
2. Para cada posição da janela, a amostra de saída atual é a média de todas as amostras de entrada que se enquadram na janela. Observe como a posição da janela se relaciona com o valor da amostra de saída atual.
3. O comprimento do filtro e, consequentemente, a largura da janela, relaciona-se com o grau de suavização alcançado pelo filtro de média móvel. Varie o comprimento do filtro e observe o efeito na suavidade do sinal de saída.

Recursos de software:

ma_demo1.m

Exemplo 3.4: Filtro de média móvel de comprimento

2 Um filtro de média móvel de comprimento 2 produz uma saída pela média da amostra de entrada atual e da amostra de entrada anterior. Essa ação se traduz em uma equação de diferença na forma

$$s[n] = \frac{x[n] + x[n-1]}{2} \quad (3.12)$$

e é ilustrado na Fig. 3.8. A janela através da qual olhamos para o sinal de entrada acomoda duas amostras a qualquer momento, e a amostra de entrada atual está próxima à borda direita da janela. Como no exemplo anterior, assumiremos que a janela é estacionária, e a estrutura do sistema mostrada também é estacionária. Vamos imaginar o sinal de entrada movendo-se para a esquerda, uma amostra de cada vez, como uma tira de filme. O sinal de saída na parte inferior da figura também age como uma tira de filme e se move para a esquerda uma amostra de cada vez, em sincronia com o sinal de entrada. Se quiséssemos escrever a relação entrada-saída do

filtro de média móvel comprimento-2 para vários valores do índice n, teríamos

$$n = 0: y[0] = x[0] + \frac{1}{2}x[1]$$

$$n = 1: y[1] = \frac{1}{2}x[0] + \frac{1}{2}x[1]$$

$$n = 2: y[2] = x[2] + \frac{1}{2}x[1]$$

e assim por diante.

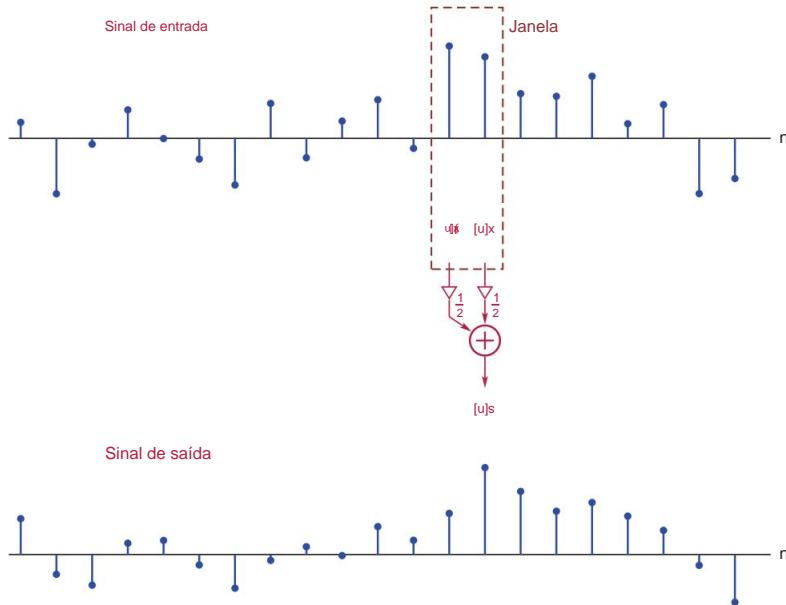


Figura 3.8 – Ilustração do filtro de média móvel de comprimento 2.

Demonstração interativa: ma_demo2

O programa de demonstração interativa `ma_demo2.m` ilustra um filtro de média móvel de comprimento 2 discutido no Exemplo 3.4. Os sinais de entrada e saída seguem a analogia da tira de filme e podem ser movidos alterando o índice atual por meio da interface do usuário. As amostras de sinal de entrada que se enquadram na faixa da janela de comprimento 2 são mostradas na cor vermelha. Várias opções estão disponíveis para o sinal de entrada para experimentação.

1. Defina o sinal de entrada para um impulso unitário e observe o sinal de saída do comprimento-2 filtro de média móvel. Qual é a resposta ao impulso do sistema?
2. Defina o sinal de entrada para um passo unitário e observe o sinal de saída do sistema.
Preste atenção nas amostras de saída à medida que o sinal de entrada transita de uma amplitude de amostra de 0 para 1. O efeito de suavização deve ser mais visível durante essa transição.

Recursos de software:

`ma_demo2.m`

Exemplo 3.5: Filtro de média móvel de

comprimento 4 Um filtro de média móvel de comprimento 4 produz uma saída calculando a média da amostra de entrada atual e das três amostras de entrada anteriores. Essa ação se traduz em uma equação de diferença na forma

$$s[n] = \frac{1}{4} x[n] + \frac{1}{4} x[n-1] + \frac{1}{4} x[n-2] + \frac{1}{4} x[n-3] \quad (3.13)$$

na Fig. 3.9.

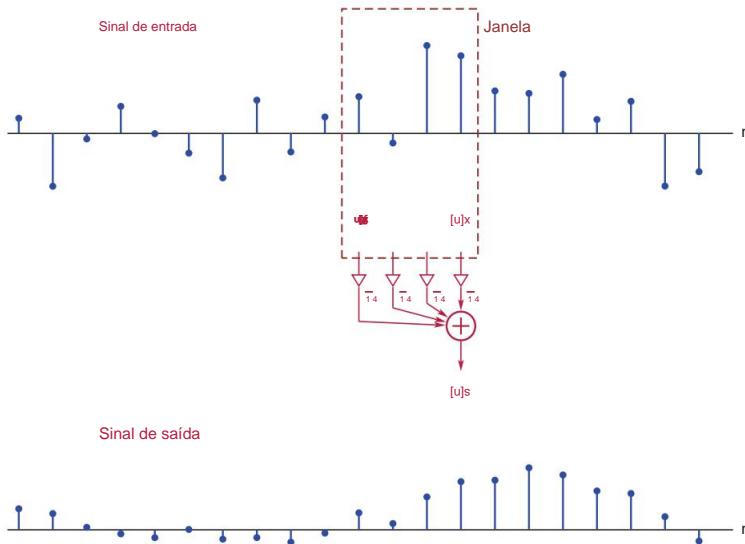


Figura 3.9 – Ilustração do filtro de média móvel de comprimento 4.

Para alguns valores do índice, podemos escrever o seguinte conjunto de equações:

$$\begin{aligned} n=0: y[0] &= x[0] + \frac{1}{4}x[1] + \frac{1}{4}x[2] + \frac{1}{4}x[3] \\ &= x[0] + \frac{1}{4}(x[1] + x[2] + x[3]) \end{aligned}$$

$$n=2: y[2] = \frac{1}{4}x[0] + \frac{1}{4}x[1] + \frac{1}{4}x[2] + \frac{1}{4}x[3]$$

Demonstração interativa: [ma_demo3](#)

O programa de demonstração interativa [ma_demo3.m](#) ilustra um filtro de média móvel de comprimento 4 discutido no Exemplo 3.5. Seu funcionamento é muito semelhante ao do programa [ma_demo2.m](#).

1. Defina o sinal de entrada para um impulso unitário e observe o sinal de saída do comprimento-4 filtro de média móvel. Qual é a resposta ao impulso desse sistema?
2. Defina o sinal de entrada para um passo unitário e observe o sinal de saída do sistema.
Preste atenção nas amostras de saída conforme o sinal de entrada transita de uma amplitude de amostra de 0 para 1. Como o resultado difere do sinal de saída do filtro de média móvel de comprimento 2 em resposta a um degrau unitário?

Recursos de software:

[ma_demo3.m](#)

Recursos de software: Consulte os Exercícios 3.1 e 3.2 do MATLAB.

Exemplo 3.6: Suavizador exponencial

Outro método de suavização de um sinal de tempo discreto é através do uso de um suavizador exponencial que emprega uma equação de diferença com realimentação. A amostra de saída atual é calculada como uma mistura da amostra de entrada atual e a amostra de saída anterior por meio da equação

$$y[n] = (1 - \alpha) y[n-1] + \alpha x[n] \quad (3.14)$$

O parâmetro α é uma constante no intervalo $0 < \alpha < 1$ e controla o grau de suavização. De acordo com a Eq. (3.14), a amostra de saída atual $y[n]$ tem dois contribuintes, a saber, a amostra de entrada atual $x[n]$ e a amostra de saída anterior $y[n-1]$. A contribuição da amostra de entrada atual é proporcional a α , e a contribuição da amostra de saída anterior é proporcional a $1 - \alpha$. Valores menores de α levam a contribuições menores de cada amostra de entrada e, portanto, a um sinal de saída mais suave. Escrevendo a equação de diferenças dada pela Eqn. (3.14) para vários valores do índice amostral n obtemos

$$\begin{aligned} n=0: y[0] &= (1 - \alpha) y[-1] + \alpha x[0] \\ n=1: y[1] &= (1 - \alpha) y[0] + \alpha x[1] \\ n=2: y[2] &= (1 - \alpha) y[1] + \alpha x[2] \end{aligned}$$

e assim por diante. Como a equação de diferenças na Eqn. (3.14) é linear com coeficientes constantes, o suavizador exponencial seria um exemplo de sistema DTLTI desde que seja inicialmente relaxado o que, neste caso, implica que $y[-1] = 0$. A Fig. 3.10 ilustra a aplicação do suavizador exponencial linear mais suave para os dados do Dow Jones Industrial Average de 2003 para $\alpha = 0,1$ e $\alpha = 0,2$.

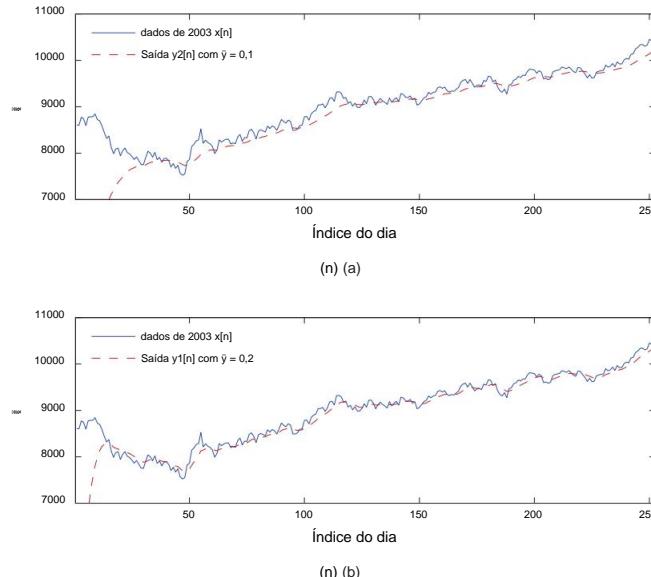


Figura 3.10 – Sinal de entrada $x[n]$ representando os valores diárias do Dow Jones Industrial Average para o ano civil de 2003 em comparação com a saída do suavizador exponencial linear com (a) $\alpha = 0,1$ e (b) $\alpha = 0,2$.

Recursos de software: Veja MATLAB Exercício 3.3.

Demonstração interativa: [es demo](#)

O programa de demonstração interativa [es demo.m](#) ilustra a operação do suavizador exponencial discutido no Exemplo 3.6. Os sinais de entrada e saída seguem a analogia da tira de filme e podem ser movidos alterando o índice atual por meio da interface do usuário. O parâmetro de suavização γ também pode ser variado. Várias opções estão disponíveis para o sinal de entrada para experimentação.

1. Defina o sinal de entrada para um impulso unitário e observe o sinal de saída do suavizador exponencial linear. Qual é o comprimento da resposta ao impulso para este sistema?
2. Varie o parâmetro γ e observe seu efeito na resposta a um impulso unitário.
3. Defina o sinal de entrada para os dados Dow Jones Industrial Average e observe o efeito de suavização à medida que o parâmetro γ é variado.

Recursos de software:

[es demo.m](#)

Exemplo 3.7: Pagamentos de

empréstimos Um uso prático diário de uma equação de diferenças pode ser encontrado no setor bancário: pedir dinheiro emprestado para comprar uma casa ou um carro. O cenário é familiar para todos nós. Pegamos emprestado o valor de que precisamos para comprar a casa ou o carro dos sonhos e depois pagamos um valor fixo para cada um de vários períodos, geralmente medidos em termos de meses. No final de cada mês, o banco calculará nosso novo saldo pegando o saldo do mês anterior, aumentando-o pela taxa de juros mensal e subtraindo o pagamento que fizemos naquele mês. Seja $y[n]$ o valor que devemos no final do n -ésimo mês e $x[n]$ represente o pagamento que fazemos no mês n . Se c é a taxa de juros mensal expressa como uma fração (por exemplo, 0,01 para uma taxa de juros mensal de 1 por cento), então o saldo do empréstimo pode ser modelado como o sinal de saída de um sistema com a seguinte equação de diferenças conforme mostrado na Fig. 3.11 :

$$y[n] = (1 + c) y[n - 1] + x[n] \quad (3.15)$$

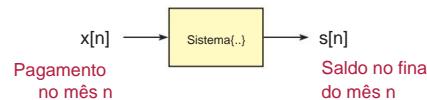


Figura 3.11 – Modelo do sistema para saldo de empréstimos

Expressar a relação entrada-saída do sistema por meio de uma equação de diferenças nos permite analisá-la de várias maneiras. Seja A o valor inicial emprestado no mês $n = 0$, e seja o pagamento mensal igual a B para os meses $n = 1, 2, \dots$. Um método para encontrar $y[n]$ seria resolver a equação de diferenças em Eq. (3.15) com o sinal de entrada

$$x[n] = Bu[n - 1] \quad (3.16)$$

e a condição inicial $y[0] = A$. Alternativamente, podemos tratar o valor emprestado como um pagamento negativo no mês 0 e resolver a equação de diferença com o sinal de entrada

$$x[n] = \ddot{y}A \ddot{y}[n] + Bu[n \ddot{y} 1] \quad (3.17)$$

e a condição inicial $y[\ddot{y}1] = 0$.

Nas partes posteriores deste texto, à medida que desenvolvemos as ferramentas necessárias para a análise de sistemas, revisitaremos esse exemplo. Depois de aprendermos as técnicas para resolver equações lineares de diferenças de coeficiente constante, seremos capazes de encontrar a saída desse sistema em resposta a uma entrada dada pela Eqn. (3.17).

Exemplo 3.8: Um exemplo de dinâmica não linear

Um exemplo interessante do uso de equações de diferenças é visto na teoria do caos e suas aplicações em sistemas dinâmicos não lineares. Deixe a saída $y[n]$ do sistema representar a população de um tipo particular de espécie em um ambiente particular, por exemplo, um certo tipo de planta na floresta tropical. O valor $y[n]$ é normalizado para estar no intervalo $0 < y[n] < 1$ com o valor 1 correspondendo à capacidade máxima da espécie que pode depender da disponibilidade de recursos como comida, água, luz solar direta, etc. No modelo de crescimento logístico, a taxa de crescimento populacional é considerada proporcional à capacidade restante $1 - y[n]$, e a mudança populacional de uma geração para a próxima é dada por

$$y[n] = r(1 - y[n \ddot{y} 1])y[n \ddot{y} 1] \quad (3.18)$$

onde r é uma constante. Este é um exemplo de um sistema não linear que não possui um sinal de entrada. Em vez disso, ele produz um sinal de saída com base em seu estado inicial.

Recursos de software:

[ex 3.8.m](#)

Exemplo 3.9: Método de Newton-Raphson para encontrar a raiz de uma função

Na análise numérica, um dos métodos mais simples para encontrar as raízes reais de uma função bem comportada é a técnica de Newton-Raphson. Considere uma função $u = f(w)$ mostrada na Fig. 3.12. Nossa objetivo é encontrar o valor de w para o qual $u = f(w) = 0$

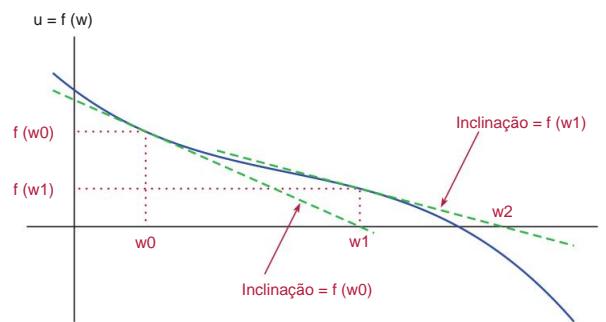


Figura 3.12 – Técnica de descoberta de raízes de Newton Raphson.

Começando com uma estimativa inicial $w = w_0$ para a solução, desenhamos a reta tangente à função naquele ponto, conforme mostrado na Fig. 3.12. O valor $w = w_1$ onde a linha tangente intercepta o eixo real é nosso próximo palpite melhorado para a raiz. A inclinação da tangente

linha é $f(w_0)$, e passa pelo ponto $(w_0, f(w_0))$. Portanto, a equação da reta tangente é

$$u \ddot{y} f(w_0) = f(w_0) (w \ddot{y} w_0) \quad (3.19)$$

No ponto onde a linha tangente intercepta o eixo horizontal, temos $u = 0$ e $w = w_1$.

Substituindo esses valores na Eqn. (3.19) temos

$$\ddot{y}f(w_0) = f(w_0) (w_1 \ddot{y} w_0) \quad (3.20)$$

e resolvendo para w_1 resulta em

$$w_1 = w_0 \ddot{y} \frac{f(w_0)}{f(w_0)} \quad (3.21)$$

Assim, a partir de um palpite inicial w_0 para a solução, encontramos um palpite melhor w_1 por meio do uso da Eqn. (3.21). Repetindo esse processo, uma suposição ainda mais próxima pode ser encontrada como

$$w_2 = w_1 \ddot{y} \frac{f(w_1)}{f(w_1)} \quad (3.22)$$

e assim por diante. A técnica pode ser modelada como um sistema de tempo discreto. Deixe o sinal de saída $y[n]$ representar estimativas sucessivas para a raiz, ou seja, $y[n] = w_n$. O próximo palpite sucessivo pode ser obtido do anterior através da equação de diferenças $f(y[n \ddot{y} 1]) y[n] = y[n \ddot{y} 1] \ddot{y} f(y[n \ddot{y} 1])$

$$\ddot{y} 1] \quad (3.23)$$

Como exemplo de conversão desse procedimento para um sistema de tempo discreto, considere a função

$$u = f(w) = w^2 \ddot{y} A$$

onde A é qualquer número real positivo. Podemos escrever f

$$f(w) = 2w, \quad e \quad \frac{(w) f}{(w)} = \frac{c}{2} = \frac{A}{2w} \quad (3.24)$$

A equação da diferença na Eqn. (3.23) torna-se $y[n \ddot{y} 1]$

$$\begin{aligned} \ddot{y} 1] \ddot{y} & \frac{y[n] = y[n]}{2} + \frac{A}{2a[n \ddot{y} 1]} \\ & = \frac{1}{2} y[n \ddot{y} 1] + \frac{A}{y[n \ddot{y} 1]} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Obviamente a Eq. (3.25) representa uma equação de diferenças não linear. Vamos usar este sistema para encontrar iterativamente a raiz quadrada de 10 que sabemos ser $\sqrt{10} = 3,162278$. A função cuja raiz estamos procurando é $f(w) = w^2 \ddot{y} 10$. Começando com uma suposição inicial de $y[0] = 1$

Nós temos

$$y[1] = \frac{1}{2} y[0] + \frac{10}{y[0]} = \frac{1}{2} 1 + \frac{10}{1} = 5,5$$

A próxima iteração produz

$$y[2] = 2 - \frac{1}{\text{anos}[1]} + \frac{10}{\text{anos}[1]} = \frac{1}{2} 5,5 + \frac{10}{5,5} = 3,659091$$

Continuando desta forma, obtemos $y[3] = 3,196005$, $y[4] = 3,162456$ e $y[5] = 3,162278$, que é preciso como a raiz quadrada de 10 até o sexto dígito decimal.

Recursos de software:

ex 3.9.m

3.4 Equações de diferenças lineares de coeficiente constante

Os sistemas DTLTI podem ser modelados com equações de diferenças lineares de coeficiente constante. Uma equação de diferença linear é aquela em que amostras atuais, passadas e talvez até futuras dos sinais de entrada e saída podem aparecer como termos lineares. Além disso, uma equação de diferença linear de coeficiente constante é aquela em que os termos lineares envolvendo os sinais de entrada e saída aparecem com coeficientes constantes, independentemente do tempo ou de qualquer outra variável.

Os filtros de média móvel que exploramos nos Exemplos 3.3, 3.4 e 3.5 foram descritos por equações de diferença linear de coeficiente constante:

$$\begin{aligned} \text{Comprimento-2: } s[n] &= \frac{1}{2} x[n] + \frac{1}{2} x[n-1] \\ \text{Comprimento-4: } y[n] &= x[n] + 4x[n-1] - 3x[n-2] + x[n-3] \\ \text{Comprimento-10: } y[n] &= \frac{1}{10} x[n] + \frac{9}{10} x[n-1] + \dots + \frac{1}{10} x[n-9] \end{aligned}$$

Uma característica comum dessas três equações de diferença é que as amostras passadas ou futuras do sinal de saída não aparecem no lado direito de nenhuma delas. Em cada uma das três equações de diferenças, a saída $y[n]$ é calculada como uma função das amostras atuais e passadas do sinal de entrada. Em contraste, considere a equação de diferenças para o exponencial mais suave

$$y[n] = (1 - \alpha) y[n-1] + \alpha x[n]$$

ou a equação de diferença para o sistema que calcula o saldo atual de um empréstimo

$$y[n] = (1 + c) y[n-1] - cx[n]$$

Ambos os sistemas também têm equações de diferença linear de coeficiente constante (assumimos que os parâmetros α e c são constantes). O que diferencia os dois últimos sistemas dos três filtros de média móvel acima é que eles também têm feedback na forma de amostras anteriores da saída que aparecem no lado direito da equação de diferença. O valor de $y[n]$ depende da amostra de saída anterior $y[n-1]$.

Exemplos 3.8 e 3.9, nomeadamente o modelo de crescimento logístico e o modelo de Newton-Raphson goritmo para encontrar uma raiz quadrada, utilizou as equações de diferença

$$y[n] = r(1 - y[n-1]) y[n-1]$$

e

$$s[n] = \frac{1}{2} y[n-1] + \frac{A}{y[n-1]}$$

Ambas as equações de diferença são não lineares, pois contêm termos não lineares de $y[n-1]$.

Uma equação geral de diferença linear de coeficiente constante representando um sistema DTLTI está na forma

$$a_0 y[n] + a_1 y[n-1] + \dots + a_N y[n-N+1] + aN y[n-N] =$$

$$b_0 b[n] + b_1 x[n-1] + \dots + bM y[n-M+1] + bM x[n-M] \quad (3.26)$$

ou na forma de soma fechada, conforme mostrado abaixo.

Equação de diferença linear de coeficiente constante:

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n - k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n - k] \quad (3.27)$$

A ordem da equação de diferença (e, portanto, a ordem do sistema que ela representa) é o maior de N e M. Por exemplo, o filtro de média móvel de comprimento 2 discutido no Exemplo 3.4 é um sistema de primeira ordem. Da mesma forma, as ordens dos filtros de média móvel de comprimento 4 e comprimento 10 dos Exemplos 3.5 e 3.3 são 3 e 9, respectivamente.

Uma nota de esclarecimento é necessária aqui: A forma geral que usamos nas Eqns. (3.26) e (3.27) incluem amostras atuais e passadas de $x[n]$ e $y[n]$, mas nenhuma amostra futura. Isto é apenas para fins práticos. A inclusão de amostras futuras em uma equação de diferenças para o cálculo da saída atual não afetaria a linearidade e a invariância temporal do sistema representado por essa equação de diferenças, desde que as amostras futuras também apareçam como termos lineares e com coeficientes constantes. Por exemplo, a equação da diferença

$$y[n] = y[n - 1] + x[n + 2] - 3x[n + 1] + 2x[n] \quad (3.28)$$

ainda é uma equação de diferença linear de coeficiente constante e ainda pode corresponder a um sistema DTLTI. Temos apenas um desafio adicional ao calcular o sinal de saída por meio do uso dessa equação de diferença: precisamos saber os valores futuros do sinal de entrada. Por exemplo, o cálculo de $y[45]$ requer o conhecimento de $x[46]$ e $x[47]$ além de outros termos. Exploraremos isso mais adiante quando discutirmos a propriedade de causalidade mais adiante neste capítulo.

Exemplo 3.10: Verificando a linearidade e a invariância no tempo de uma equação de diferenças Determine se a equação de diferenças lineares de coeficiente constante de primeira ordem na forma

$$a_0 y[n] + a_1 y[n - 1] = b_0 x[n]$$

representa um sistema DTLTI.

Solução: Nossa abordagem será semelhante àquela empregada no Exemplo 2.7 do Capítulo 2 para um sistema de tempo contínuo. Suponha que dois sinais de entrada $x_1[n]$ e $x_2[n]$ produzam os sinais de saída correspondentes $y_1[n]$ e $y_2[n]$ respectivamente. Cada um dos pares de sinal $x_1[n] \neq y_1[n]$ e $x_2[n] \neq y_2[n]$ deve satisfazer a equação da diferença, então temos

$$a_0 y_1[n] + a_1 y_1[n - 1] = b_0 x_1[n] \quad (3.29)$$

e

$$a_0 y_2[n] + a_1 y_2[n - 1] = b_0 x_2[n] \quad (3.30)$$

Deixe um novo sinal de entrada ser construído como uma combinação linear de $x_1[n]$ e $x_2[n]$ como

$$x_3[n] = \bar{y}_1 x_1[n] + \bar{y}_2 x_2[n] \quad (3.31)$$

Para que o sistema descrito pela equação de diferenças seja linear, sua resposta ao sinal de entrada $x_3[n]$ deve ser

$$y_3[n] = \bar{y}_1 y_1[n] + \bar{y}_2 y_2[n] \quad (3.32)$$

e o par de sinal de entrada-saída $x3[n] \ddot{y} y3[n]$ também deve satisfazer a equação de diferença.

Substituindo $y3[n]$ no lado esquerdo da equação de diferenças, obtém-se

$$a0y3[n] + a1y3[n \ddot{y} 1] = a0 (\ddot{y}1 y1[n] + \ddot{y}2 y2[n]) + a1 (\ddot{y}1 y1[n \ddot{y} 1] + \ddot{y}2 y2[n \ddot{y} 1]) \quad (3.33)$$

Reorganizando os termos do lado direito da Eqn. (3.33) temos

$$a0y3[n] + a1y3[n \ddot{y} 1] = \ddot{y}1 (a0 y1[n] + a1 y1[n \ddot{y} 1]) + \ddot{y}2 (a0 y2[n] + a1 y2[n \ddot{y} 1]) \quad (3.34)$$

Substituindo as Eq. (3.29) e (3.30) na Eqn. (3.34) leva a

$$\begin{aligned} a0y3[n] + a1y3[n \ddot{y} 1] &= \ddot{y}1 (b0 x1[n]) + \ddot{y}2 (b0 x2[n]) \\ &= b0 (\ddot{y}1 x1[n] + \ddot{y}2 x2[n]) = b0 \\ &x3[n] \end{aligned} \quad (3.35)$$

provando que o par de sinal de entrada-saída $x3[n] \ddot{y} y3[n]$ satisfaz a equação de diferenças.

Antes de podermos afirmar que a equação de diferenças em questão representa um sistema linear, precisamos verificar o valor inicial de $y[n]$. Sabemos da discussão anterior que uma equação de diferenças como a dada pela Eqn. (3.29) pode ser resolvida iterativamente começando em um valor especificado do índice $n = n0$ desde que o valor da amostra de saída no índice $n = n0 \ddot{y} 1$ seja conhecido. Por exemplo, seja $n0 = 0$ e seja $y[n0 \ddot{y} 1] = y[\ddot{y}1] = A$. Começando com o valor especificado de $y[\ddot{y}1]$, podemos determinar $y[0]$ como

$$y[0] = \frac{a1}{a0} A + b0 x0$$

Tendo determinado o valor de $y[0]$, podemos encontrar $y[1]$ como

$$\begin{aligned} y[1] &= \frac{\ddot{y}a1}{a0} y[0] + b0 x1 \\ &= \frac{\ddot{y}a1}{a0} \frac{\ddot{y}a1}{a0} A + b0 x0 + b0 x1 \end{aligned}$$

e continuar desta forma. Claramente, o resultado obtido depende do valor inicial $y[\ddot{y}1] = A$. Visto que $y1[n]$, $y2[n]$ e $y3[n]$ usados no desenvolvimento acima são todas soluções da equação de diferença para sinais de entrada $x1[n]$, $x2[n]$ e $x3[n]$ respectivamente, cada um deles deve satisfazer a condição inicial especificada, ou seja,

$$y1[\ddot{y}1] = A, y2[\ddot{y}1] = A, y3[\ddot{y}1] = A$$

Além disso, a condição de linearidade na Eqn. (3.32) deve ser satisfeita para todos os valores do índice n incluindo $n = \ddot{y}1$:

$$y3[\ddot{y}1] = \ddot{y}1 y1[\ddot{y}1] + \ddot{y}2 y2[\ddot{y}1]$$

Assim, somos obrigados a concluir que o sistema representado pela Eqn. (3.29) é linear somente se $y[\ddot{y}1] = 0$. No caso geral, precisamos de $y[n0 \ddot{y} 1] = 0$ se a solução for começar no índice $n = n0$.

Nossa próxima tarefa é verificar a propriedade de invariância no tempo do sistema descrito pela equação da diferença. Se substituirmos o índice n por $n \ddot{y} m$, a Eqn. (3.29) torna-se

$$a0y[n \ddot{y} m] + a1y[n \ddot{y} m \ddot{y} 1] = b0x[n \ddot{y} m] \quad (3.36)$$

Atrasar o sinal de entrada $x[n]$ em m amostras faz com que o sinal de saída $y[n]$ seja atrasado na mesma quantidade. O sistema é invariante no tempo.

No Exemplo 3.10 verificamos que a equação de diferença linear de coeficiente constante de primeira ordem corresponde a um sistema DTLI desde que seu estado inicial seja zero. Agora estamos prontos para generalizar esse resultado para a equação de diferença linear de coeficiente constante de qualquer ordem. Deixe os dois sinais de entrada $x_1[n]$ e $x_2[n]$ produzirem os sinais de saída $y_1[n]$ e $y_2[n]$ respectivamente. Os pares de sinal de entrada-saída $x_1[n] \rightarrow y_1[n]$ e $x_2[n] \rightarrow y_2[n]$ satisfazem a equação da diferença, então podemos escrever

$$\sum_{k=0}^N a_k y_1[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x_1[n-k] \quad (3.37)$$

e

$$\sum_{k=0}^N a_k y_2[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x_2[n-k] \quad (3.38)$$

Para testar a linearidade do sistema, construiremos um novo sinal de entrada como uma combinação linear de $x_1[n]$ e $x_2[n]$:

$$x_3[n] = \bar{y}_1 x_1[n] + \bar{y}_2 x_2[n] \quad (3.39)$$

Se o sistema descrito pela equação de diferenças for linear, sua resposta ao sinal de entrada $x_3[n]$ deve ser

$$y_3[n] = \bar{y}_1 y_1[n] + \bar{y}_2 y_2[n] \quad (3.40)$$

Vamos testar o par de sinal de entrada-saída $x_3[n] \rightarrow y_3[n]$ através da equação de diferenças.

Substituindo $y_3[n]$ no lado esquerdo da equação de diferenças, obtém-se

$$\sum_{k=0}^N a_k y_3[n-k] = \sum_{k=0}^N a_k (\bar{y}_1 y_1[n-k] + \bar{y}_2 y_2[n-k]) \quad (3.41)$$

Reorganizando os termos do lado direito da Eqn. (3.41) e separá-los em dois resultados de somas separados

$$\sum_{k=0}^N a_k y_3[n-k] = \sum_{k=0}^N a_k \bar{y}_1 y_1[n-k] + \sum_{k=0}^N a_k \bar{y}_2 y_2[n-k] \quad (3.42)$$

Os dois somatórios do lado direito da Eqn. (3.42) podem ser substituídas por seus equivalentes das Eqns. (3.37) e (3.38), resultando em

$$\sum_{k=0}^N a_k y_3[n-k] = \bar{y}_1 \sum_{k=0}^M b_k x_1[n-k] + \bar{y}_2 \sum_{k=0}^M b_k x_2[n-k] \quad (3.43)$$

Por fim, combinaremos os dois somatórios do lado direito da Eqn. (3.43) de volta em um somatório para obter

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^N a_k y_3[n-k] &= \sum_{k=0}^M b_k (\bar{y}_1 x_1[n-k] + \bar{y}_2 x_2[n-k]) \\ &= \sum_{k=0}^M b_k x_3[n-k] \end{aligned} \quad (3.44)$$

Concluímos que o par de sinal de entrada-saída $x_3[n] \ddot{y} y_3[n]$ também satisfaz a equação de diferenças. A restrição discutida no Exemplo 3.10 em relação às condições iniciais também será aplicável aqui. Se estivermos interessados em encontrar uma solução única para $n \ddot{y} n_0$, então os valores iniciais

$$y[n_0 \ddot{y} 1], y[n_0 \ddot{y} 2], \dots, y[n_0 \ddot{y} N] \text{ são}$$

necessários. A condição de linearidade dada pela Eqn. (3.40) deve ser satisfeita para todos os valores de n incluindo valores de índice $n = n_0 \ddot{y} 1, n_0 \ddot{y} 2, \dots, n_0 \ddot{y} N$. Conseqüentemente, o sistema que corresponde à equação de diferenças na Eqn. (3.27) é linear apenas se todas as condições iniciais forem zero, ou seja,

$$y[n_0 \ddot{y} k]=0$$

para $k = 1, \dots, N$. Em seguida, precisamos verificar a invariância no tempo. Substituindo o índice n por $n \ddot{y} m$ na Eqn. (3.27) temos

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n \ddot{y} m \ddot{y} k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n \ddot{y} m \ddot{y} k] \quad (3.45)$$

indicando que o par de sinal de entrada-saída $x[n \ddot{y} m] \ddot{y} y[n \ddot{y} m]$ também satisfaz a equação de diferenças. Assim, a equação de diferença linear de coeficiente constante é invariante no tempo.

3.5 Resolvendo Equações de Diferenças

O sinal de saída de um sistema de tempo discreto em resposta a um sinal de entrada especificado pode ser determinado resolvendo a equação de diferença correspondente. Em alguns dos exemplos da Seção 3.3, já experimentamos um método para resolver uma equação de diferenças, ou seja, o método iterativo. Considere novamente a equação de diferenças para o suavizador exponencial do Exemplo 3.6. Ao escrever a equação de diferença para cada valor do índice n , conseguimos obter o sinal de saída $y[n]$ uma amostra por vez. Dado o valor inicial $y[\ddot{y} 1]$ do sinal de saída, seu valor para $n = 0$ é encontrado por

$$y[0] = (1 \ddot{y} \ddot{y}) y[\ddot{y} 1] + \ddot{y} x[0]$$

Definindo $n = 1$ obtemos

$$y[1] = (1 \ddot{y} \ddot{y}) y[0] + \ddot{y} x[1]$$

Repetir para $n = 2$ leva a

$$y[2] = (1 \ddot{y} \ddot{y}) y[1] + \ddot{y} x[2]$$

e podemos continuar assim indefinidamente. A função `ss expsmo(..)` desenvolvida no MATLAB Exercício 3.3 é uma implementação da solução iterativa desta equação de diferenças.

O método de solução iterativa não está limitado a sistemas DTLTI; também pode ser usado para resolver as equações de diferenças de sistemas não lineares e/ou variantes no tempo. Considere, por exemplo, a equação de diferenças não lineares para o modelo de crescimento logístico do Exemplo 3.8. Para um valor de parâmetro especificado r e valor inicial $y[\ddot{y} 1]$, a saída em $n = 0$ é

$$y[0] = r (1 \ddot{y} y[\ddot{y} 1]) y[\ddot{y} 1]$$

Em seguida, $y[1]$ é calculado a partir de $y[0]$ como

$$y[1] = r (1 \ddot{y} y[0]) y[0]$$

e assim por diante. A Fig. 3.13 mostra as primeiras 50 amostras da solução obtida dessa maneira para $r = 3,1$ e $y[0] = 0,3$.

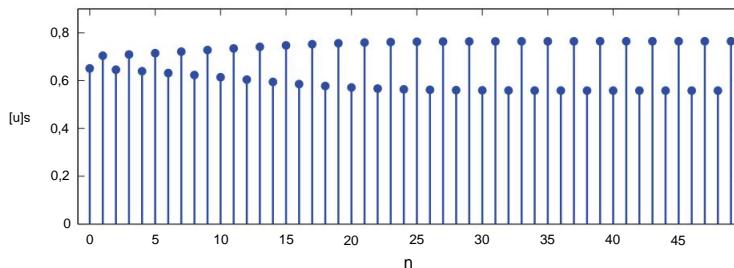


Figura 3.13 – Primeiras 50 amostras da solução iterativa da equação de diferenças para o modelo de crescimento logístico.

A solução iterativa de uma equação de diferenças também pode ser usada como base para a implementação de um sistema de tempo discreto em hardware de processamento de sinal em tempo real. Uma deficiência dessa abordagem, no entanto, é a falta de uma solução analítica completa. Cada vez que iteramos na equação de diferenças, obtemos mais uma amostra do sinal de saída, mas não obtemos uma expressão ou uma fórmula para calcular a saída para um valor arbitrário do índice n . Se precisarmos saber $y[1527]$, devemos primeiro calcular iterativamente as amostras de $y[0]$ a $y[1526]$.

Recursos de software: Veja MATLAB Exercício 3.4.

No restante desta seção, concentraremos nossos esforços no desenvolvimento de um método analítico para resolver equações de diferenças lineares de coeficiente constante. A solução analítica de equações de diferenças não lineares e/ou variantes no tempo é geralmente difícil ou impossível e não será considerada mais adiante neste texto.

O método de solução que estamos prestes a apresentar exibe muitas semelhanças com o método desenvolvido para resolver equações diferenciais ordinárias de coeficiente constante na Seção 2.5. Reconheceremos dois componentes separados do sinal de saída $y[n]$ na forma

$$y[n] = y_h[n] + y_p[n] \quad (3.46)$$

O termo $y_h[n]$ é a solução da equação de diferenças homogênea encontrada ao definir $x[n] = 0$ na Eqn. (3.27) para todos os valores de n :

$$\sum_{k=0}^{N-1} a_k y[n-k] = 0 \quad (3.47)$$

Assim, $y_h[n]$ é o sinal na saída do sistema quando nenhum sinal de entrada é aplicado a ele. Como no caso do tempo contínuo, nos referiremos a $y_h[n]$ como a solução homogênea da equação de diferenças ou, de forma equivalente, como a resposta natural do sistema ao qual corresponde. Depende da estrutura do sistema que se expressa através do conjunto de coeficientes a_i para $i = 0, \dots, N$. Além disso, depende do estado inicial do sistema que é expresso através das amostras de saída $y[n_0], y[n_0+1], \dots, y[n_0+N]$. (Lembre-se de que n_0 é o índice inicial da solução; geralmente usaremos $n_0 = 0$.) Quando discutimos

a propriedade de estabilidade de sistemas DTLTI na Seção 3.9 descobriremos que, para um sistema estável, $y_h[n]$ se aproxima de zero para grandes valores positivos e negativos do índice n .

O segundo termo $y_p[n]$ na Eqn. (3.46) é a parte da solução devida ao sinal de entrada $x[n]$ aplicado ao sistema. É referido como a solução particular da equação de diferenças. Depende tanto do sinal de entrada $x[n]$ quanto da estrutura interna do sistema. É independente do estado inicial do sistema. A combinação da solução homogênea e da solução particular é chamada de solução forçada ou resposta forçada.

3.5.1 Encontrando a resposta natural de um sistema de tempo discreto

Começaremos a discussão do método de solução para resolver a equação homogênea revisitando o suavizador exponencial linear encontrado pela primeira vez no Exemplo 3.6.

Exemplo 3.11: Resposta natural do suavizador exponencial

Determine a resposta natural do suavizador exponencial definido no Exemplo 3.6 se $y[0] = 2$.

Solução: A equação de diferença para o suavizador exponencial foi dada na Eqn. (3.6). A equação de diferenças homogêneas é encontrada definindo $x[n] = 0$:

$$y[n] = (1 - \frac{1}{z}) y[n-1] \quad (3.48)$$

A resposta natural $y_h[n]$ ainda a ser determinada deve satisfazer a equação de diferenças homogêneas. Precisamos começar com um palpite para o tipo de sinal que $y_h[n]$ deve ser e, em seguida, ajustar quaisquer parâmetros relevantes. Portanto, olhando para a Eqn. (3.48), fazemos a pergunta: "Que tipo de sinal de tempo discreto permanece proporcional a si mesmo quando atrasado por uma amostra?" Uma resposta possível é um sinal na forma

$$y_h[n] = c z^n \quad (3.49)$$

onde z é uma constante ainda indeterminada. Atrasando $y[n]$ da Eqn. (3.49) por uma amostra obtemos

$$y_h[n-1] = c z^{n-1} = z^{-1}c z^n = z^{-1}y_h[n] \quad (3.50)$$

Substituindo as Eq. (3.49) e (3.50) na equação de diferenças homogêneas produz

$$c z^n = (1 - \frac{1}{z}) z^{-1}c z^n$$

ou equivalente

$$c z^n - (1 - \frac{1}{z}) z^{-1}c z^n = 0$$

que requer que uma das seguintes condições seja verdadeira para todos os valores de n :

- a. $c z^n = 0$
- b. $1 - \frac{1}{z} z^{-1} = 0$

Não podemos usar a primeira condição, pois ela leva à solução trivial $y[n] = c z^n = 0$ e obviamente não é muito útil. Além disso, a condição inicial $y[0] = 2$ não pode ser satisfeita usando esta solução. Portanto, devemos escolher a última condição e definir $z = (1 - \frac{1}{y})$ para obter

$$y_h[n] = c (1 - \frac{1}{y})^n, \quad \text{para } n \geq 0$$

A constante c é determinada com base no estado inicial desejado do sistema. Queremos $y[\bar{y}1] = 2$, então o impomos como condição na solução encontrada na Eqn. (3.51):

$$yh[\bar{y}1] = c (1 - \bar{y})^{\bar{y}1} = 2$$

Isso produz $c = 2 (1 - \bar{y})$ e

$$yh[n] = 2 (1 - \bar{y}) (1 - \bar{y})^n = 2 (1 - \bar{y})^{n+1}$$

A resposta natural encontrada é mostrada na Fig. 3.14 para $\bar{y} = 1$ e $\bar{y} = 0,2$.

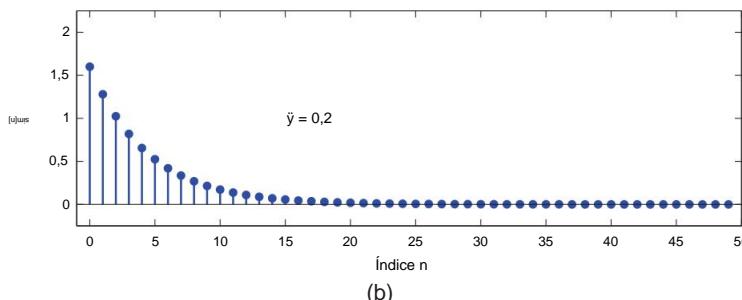
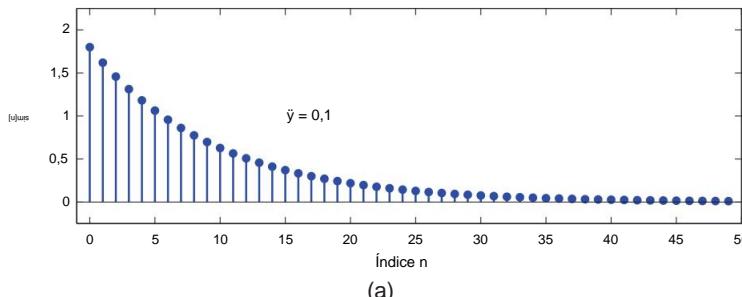


Figura 3.14 – A resposta natural do suavizador exponencial linear para (a) $\bar{y} = 0,1$ e (b) $\bar{y} = 0,2$.

Recursos de software:

ex_3_11.m

Vamos agora considerar a solução da equação geral de diferenças homogêneas na forma

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n - k] = 0 \quad (3.51)$$

Vamos começar com a mesma suposição inicial que usamos no Exemplo 3.11:

$$y[n] = c z^n \quad (3.52)$$

Versões deslocadas da solução homogênea prescrita são $y[n - 1]$

$$= c z^{n-1} = z^{\bar{y}1} c z^n$$

$$y[n - 2] = c z^{n-2} = z^{\bar{y}2} c z^n$$

$$z^{\bar{y}3} = z^{\bar{y}3} c z^n$$

que pode ser expressa na forma geral

$$y[n - k] = c z^n k = z^n c z^n \quad (3.53)$$

Qual valor (ou valores) de z pode ser usado na solução homogênea? Encontraremos a resposta substituindo a Eqn. (3.53) na Eqn. (3.51):

$$\sum_{k=0}^N a_k z^n k = 0 \quad (3.54)$$

O termo $c z^n$ é independente do índice de soma k e pode ser fatorado para produzir

$$c z^n \sum_{k=0}^N z^n k = 0 \quad (3.55)$$

Existem duas maneiras de satisfazer a Eqn. (3.55):

$$1. \quad c z^n = 0$$

Isso leva à solução trivial $y[n] = 0$ para a equação homogênea e, portanto, não é muito interessante. Além disso, não temos como satisfazer quaisquer condições iniciais com esta solução além de $y[i] = 0$ para $i = 1, \dots, N$.

$$2. \quad \sum_{k=0}^N a_k z^n k = 0$$

Essa é a chamada equação característica do sistema. Valores de z que são as soluções da equação característica podem ser usados em funções exponenciais como soluções da equação de diferenças homogêneas.

A equação característica:

$$\sum_{k=0}^N a_k z^n k = 0 \quad (3.56)$$

A equação característica para um sistema DTLTI é encontrada começando com a equação de diferenças homogêneas e substituindo as versões atrasadas do sinal de saída pelas potências negativas correspondentes da variável complexa z .

Para obter a equação característica, substitua:

$$y[n - k] \rightarrow z^n \quad (3.57)$$

A equação característica pode ser escrita na forma aberta como

$$a_0 + a_1 z^n + \dots + a_N z^{N+1} + a_N z^n = 0 \quad (3.58)$$

Se quisermos trabalhar com potências não negativas de z , poderíamos simplesmente multiplicar ambos os lados da equação característica por z^N para obter

$$a_0 z^N + a_1 z^{N+1} + \dots + a_N z^1 + a_N z^N = 0 \quad (3.59)$$

O polinômio no lado esquerdo do sinal de igual na Eqn. (3.59) é o polinômio característico do sistema DTLTI. Sejam as raízes do polinômio característico z_1, z_2, \dots, z_N de forma que a Eqn. (3.59) pode ser escrita como

$$a_0 (a - z_1)(a - z_2) \dots (a - z_N) = 0 \quad (3.60)$$

Qualquer uma das raízes do polinômio característico pode ser usada em um sinal na forma

$$y_i[n] = c_i z^n \quad i = 1, \dots, N \quad (3.61)$$

que satisfaz a equação de diferenças homogêneas:

$$\sum_{k=0}^N a_k y_i[n-k] = 0 \text{ para } i = 1, \dots, N \quad (3.62)$$

Além disso, qualquer combinação linear de todos os termos válidos na forma da Eqn. (3.61) também satisfaz a equação de diferenças homogêneas, então podemos escrever

$$y_h[n] = c_1 z^n + c_2 z^{n-1} + \dots + c_N z^n = \sum_{k=1}^N c_k z^n \quad (3.63)$$

Os coeficientes c_1, c_2, \dots, c_N são determinados a partir das condições iniciais. A exponencial na solução deste sistema homogêneo dada pela Eqn. (3.63) são os modos do sistema. Em partes posteriores do texto, veremos que os modos de um sistema DTLTI correspondem aos pólos da função do sistema e aos autovalores da matriz de estado.

Exemplo 3.12: Resposta natural do sistema de segunda

ordem Um sistema de segunda ordem é descrito pela equação de diferenças

$$5 y[n] - y[n-1] + 6 y[n-2] = 0$$

Determine a resposta natural deste sistema para $n \geq 0$ sujeito às condições iniciais

$$y[0] = 19 \quad , \quad \text{e } y[1] = 53$$

Solução: A equação característica é

$$5 z^2 - z + 6 - \frac{1}{6} = 0$$

com raízes $z_1 = 1/2$ e $z_2 = 1/3$. Portanto, a solução homogênea da equação das diferenças é

$$y_h[n] = c_1 \frac{1}{2}^n + c_2 \frac{1}{3}^n$$

para $n \geq 0$. Os coeficientes c_1 e c_2 precisam ser determinados a partir das condições iniciais. Nós temos

$$\begin{aligned} y_h[0] &= c_1 \frac{1}{2}^0 + c_2 \frac{1}{3}^0 \\ &= 2c_1 + 3c_2 = 19 \end{aligned} \quad (3.64)$$

e

$$\begin{aligned} yh[\ddot{y}] &= c_1 \frac{1}{2} + c_2 \frac{1}{3} \\ &= 4c_1 + 9c_2 = 53 \end{aligned} \quad (3.65)$$

Resolvendo Eq. (3.64) e (3.65) resulta em $c_1 = 2$ e $c_2 = 5$. A resposta natural do sistema é

$$yh[n] = 2 \frac{1}{2}^n u[n] + 5 \frac{1}{3}^n u[n]$$

Recursos de software:

ex 3 12.m

No Exemplo 3.12, a equação característica obtida da equação de diferenças homogênea tinha duas raízes distintas que eram ambas de valor real, permitindo que a solução homogênea fosse escrita na forma padrão da Eq. (3.63). Existem outras possibilidades também. Semelhante à discussão da equação diferencial homogênea na Seção 2.5.3, consideraremos três cenários possíveis:

Caso 1: Todas as raízes são distintas e de valor real.

Isso leva à solução homogênea

$$s[n] = \sum_{k=1}^{N} c_k z_k^n \quad (3.66)$$

para $n \neq n_0$ como vimos no Exemplo 3.12. O valor da raiz real z_k determina o tipo de contribuição feita à solução homogênea pelo termo $c_k z_k^n$. Se $|z_k| < 1$ então z_k^n decai exponencialmente ao longo do tempo. Por outro lado, $|z_k| > 1$ leva a que cresce exponencialmente. Um valor negativo z_k para z_k faz com que o termo correspondente z_k^n termo na solução homogênea tenha amplitudes de amostra positivas e negativas alternadas. As formas possíveis da contribuição z_k^n são mostradas na Fig. 3.15.

Caso 2: O polinômio característico tem raízes de valores complexos.

Como a equação de diferenças e seu polinômio característico têm apenas coeficientes de valor real, quaisquer raízes complexas do polinômio característico devem aparecer em pares conjugados. Portanto, se

$$z_1 = r_1 - ej\dot{\gamma}_1$$

é uma raiz complexa, então seu conjugado

$$z_2 = r_1 + ej\dot{\gamma}_1$$

também deve ser uma raiz. Seja a parte da solução homogênea devida a essas duas raízes

$$\begin{aligned} yh[n] &= c_{1a} z_1^n + c_{1b} z_2^n \\ &= c_{1a} r_1^n e^{-ej\dot{\gamma}_1 n} + c_{1b} r_1^n e^{ej\dot{\gamma}_1 n} \end{aligned} \quad (3.67)$$

Os coeficientes c_{1a} e c_{1b} ainda não foram determinados a partir das condições iniciais. Como os coeficientes da equação de diferenças são reais, a solução $yh[n]$ também deve

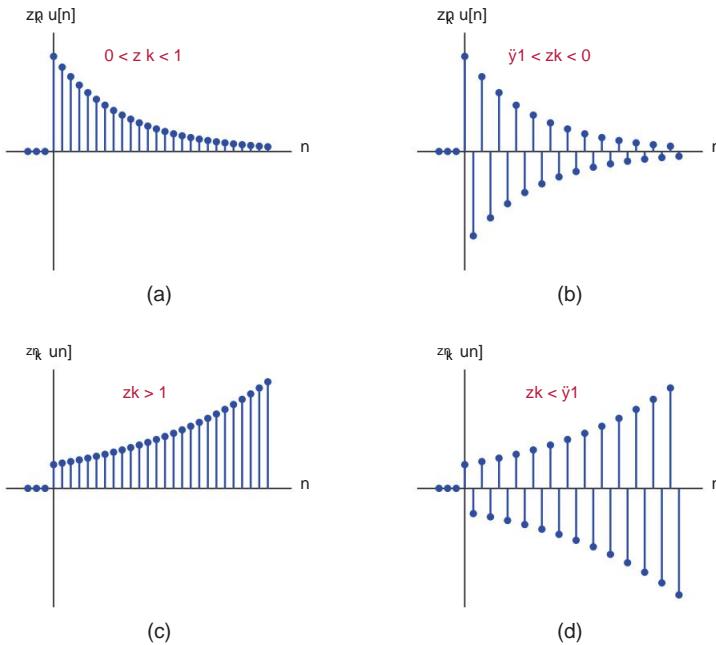


Figura 3.15 – O termo $z^n u[n]$ para (a) $0 < z < 1$, (b) $\bar{y}1 < z < 0$, (c) $z > 1$, (d) $z < \bar{y}1$.

Sê real. Além disso, $yh1[n]$, a parte da solução que é devida ao par complexo conjugado de raízes que estamos considerando também deve ser real. Isso implica que os coeficientes $c1a$ e $c1b$ devem formar um par conjugado complexo. Vamos escrever os dois coeficientes na forma complexa polar como

$$c1a = |c1| e^{j\bar{y}1} , \quad \text{e } c1b = |c1| e^{-j\bar{y}1} \quad (3.68)$$

Substituindo a Eq. (3.68) na Eqn. (3.67) obtemos

$$\begin{aligned} yh1[n] &= |c1| r1 e^{j(\bar{y}1n + \bar{y}1)} + |c1| r1 e^{-j(\bar{y}1n + \bar{y}1)} \\ &= 2 |c1| r1 \cos (\bar{y}1n + \bar{y}1) \end{aligned} \quad (3.69)$$

A contribuição de um par complexo conjugado de raízes para a solução está na forma de um sinal de cosseno multiplicado por um sinal exponencial. A frequência de oscilação do sinal de cosseno de tempo discreto é determinada por $\bar{y}1$. A magnitude das raízes conjugadas complexas, $r1$, afeta o comportamento da amplitude. Se $r1 < 1$, então a amplitude do sinal do cosseno decai exponencialmente ao longo do tempo. Se $r1 > 1$, por outro lado, a amplitude do sinal do cosseno cresce exponencialmente ao longo do tempo. Essas duas possibilidades são ilustradas na Fig. 3.16.

Com o uso da identidade trigonométrica apropriada¹ Eqn. (3.69) também pode ser escrito na forma alternativa

$$\begin{aligned} yh1[n] &= 2 |c1| \cos (\bar{y}1) r1 \cos (\bar{y}1n) - 2 |c1| \sin (\bar{y}1) r1 \sin (\bar{y}1n) \\ &= d1 r1 \cos (\bar{y}1n) + d2 r1 \sin (\bar{y}1n) \end{aligned} \quad (3.70)$$

¹ $\cos (a + b) = \cos (a) \cos (b) - \sin (a) \sin (b)$.

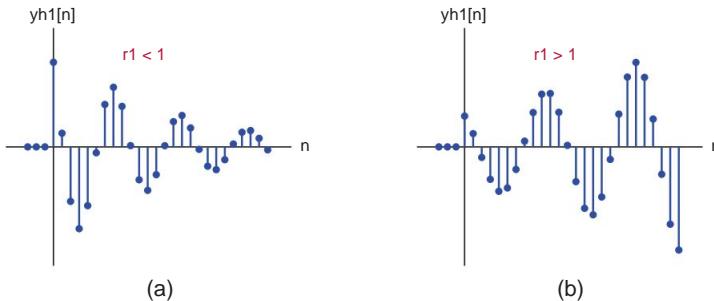


Figura 3.16 – Termos correspondentes a um par de raízes complexas conjugadas da equação característica: (a) $r_1 < 0$, (b) $r_1 > 1$.

Caso 3: O polinômio característico tem algumas raízes múltiplas.

Considere novamente a versão fatorada da equação característica inicialmente dada pela Eqn. (3,60):

$$a_0 (z - z_1) (z - z_2) \dots (z - z_N) = 0$$

E se as duas primeiras raízes forem iguais, isto é, $z_2 = z_1$? Se ignorássemos o fato de que as duas raízes são iguais, teríamos uma resposta natural na forma

$$\begin{aligned}
 yh[n] &= c1 \text{zn} + c2 \text{zh} + \text{outros termos} \\
 &\quad \text{outros termos} \quad 1 \\
 &= (c1 + c2) \text{zn} + \text{outros termos} = \\
 &\sim c1 \text{zn} + \text{outros termos} \quad (3.71)
 \end{aligned}$$

A igualdade de duas raízes leva à perda de um dos coeficientes que precisaremos para satisfazer as condições iniciais. Para recuperar o coeficiente que perdemos, precisamos de um termo adicional para as duas raízes em $z = z_1$, e pode ser obtido considerando uma solução na forma

$$y_h[n] = c_{11} z^n + c_{12} n z^n + \text{outros termos} \quad (3.72)$$

Em geral, uma raiz de multiplicidade r requer r termos na solução homogênea. Se o polinômio característico tiver um fator $(z - z_1)$, a solução homogênea resultante é

$$y_h[n] = c_{11} z^n + c_{12} n z^n + \dots \quad (3.73)$$

Exemplo 3.13: Resposta natural do sistema de segunda ordem revisitada

Determine a resposta natural de cada um dos sistemas de segunda ordem descritos pelas equações de diferenças abaixo:

- a. $y[n] - 1,4 y[n-1] + 0,85 y[n-2] = 0$ com condições iniciais $y[1] = 5$ e $y[2] = 7$.

$$b_v[n] = 1.6 v[n-1] + 0.64 v[n-2] \equiv 0$$

com condições iniciais $y[0] = 2$ e $y'[0] = 0$

Solução:

a. A equação característica é

$$z^2 - 1,4z + 0,85 = 0$$

que pode ser resolvido para produzir

$$z_{1,2} = 0,7 \pm j0,6$$

Assim, as raízes do polinômio característico formam um par conjugado complexo. Eles podem ser escritos na forma complexa polar como

$$z_{1,2} = 0,922 e^{\pm j0,7086}$$

o que nos leva a uma solução homogênea na forma

$$y_h[n] = d_1 (0,922)n \cos (0,7086n) + d_2 (0,922)n \sin (0,7086n)$$

para $n \geq 0$. Os coeficientes d_1 e d_2 precisam ser determinados a partir das condições iniciais.

Avaliando $y_h[n]$ para $n = 0$ e $n = 1$, temos

$$\begin{aligned} y_h[0] &= d_1 (0,922)0 \cos (0,7086 \cdot 0) + d_2 (0,922)0 \sin (0,7086 \cdot 0) \\ &= 0,6923 d_1 + 0,5385 d_2 = 5 \end{aligned} \quad (3,74)$$

e

$$\begin{aligned} y_h[1] &= d_1 (0,922)1 \cos (0,7086 \cdot 1) + d_2 (0,922)1 \sin (0,7086 \cdot 1) \\ &= 0,1893 d_1 + 0,7456 d_2 = 7 \end{aligned} \quad (3,75)$$

Resolvendo Eq. (3,74) e (3,75) resulta em $d_1 = 1,05$ e $d_2 = 5,8583$. A resposta natural do sistema é

$$y_h[n] = 1,05 (0,922)n \cos (0,7086 n) u[n] + 5,8583 (0,922)n \sin (0,7086 n) u[n]$$

e está representado graficamente na Fig. 3.17.

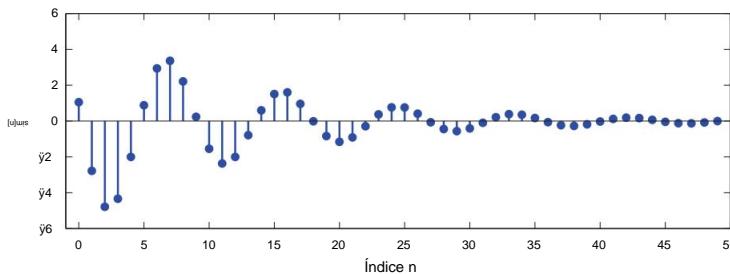


Figura 3.17 – Resposta natural do sistema do Exemplo 3.13 parte (a).

b. Para este sistema a equação característica é

$$z^2 - 1,6z + 0,64 = 0$$

As raízes do polinômio característico são $z_1 = z_2 = 0,8$. Portanto devemos buscar uma solução homogênea na forma da Eqn. (3.72):

$$y_h[n] = c_1 (0,8)n + c_2 n (0,8)^n$$

para $n \geq 0$. Impondo as condições iniciais em $n = \bar{y}_1$ e $n = \bar{y}_2$ obtemos

$$\begin{aligned} y_h[\bar{y}_1] &= c_1 (0,8)\bar{y}_1 + c_2 (\bar{y}_1) (0,8)\bar{y}_1 \\ &= 1,25 c_1 \bar{y}_1 + 1,25 c_2 = 2 \end{aligned} \quad (3,76)$$

e

$$\begin{aligned} y_h[\bar{y}_2] &= c_1 (0,8)\bar{y}_2 + c_2 (\bar{y}_2) (0,8)\bar{y}_2 \\ &= 1,5625 c_1 \bar{y}_2 + 3,125 c_2 = \bar{y}_3 \end{aligned} \quad (3,77)$$

Equações (3.76) e (3.77) podem ser resolvidos para obter os valores dos coeficientes $c_1 = 5,12$ e $c_2 = 3,52$. A resposta natural é

$$y_h[n] = 5,12 (0,8)n + 3,52 n (0,8)^n$$

e está representada graficamente na Fig. 3.18.

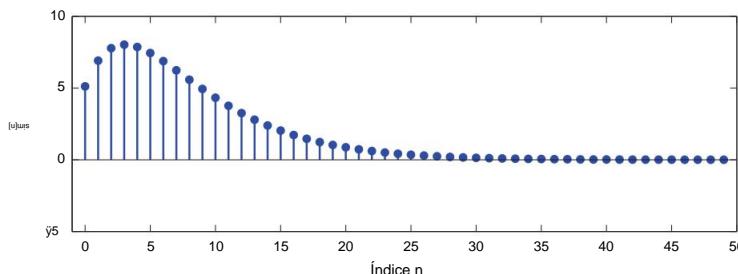


Figura 3.18 – Resposta natural do sistema do Exemplo 3.13 parte (b).

Recursos de
software: ex 3 13h
ex_3_13b.m

Demonstração Interativa: nr demo2

O programa de demonstração interativa nr demo2.m ilustra diferentes tipos de soluções homogêneas para um sistema de tempo discreto de segunda ordem baseado nas raízes do polinômio característico. Três cenários possíveis foram explorados acima, ou seja, raízes reais distintas, raízes conjugadas complexas e raízes reais idênticas.

No programa de demonstração, as duas raízes podem ser especificadas em termos de suas normas e ângulos usando controles deslizantes, e a resposta natural correspondente pode ser observada. Se as raízes forem reais, elas podem ser controladas independentemente. Se as raízes são complexas, elas se movem simultaneamente para manter sua relação conjugada complexa. As localizações das duas raízes z_1 e z_2 são marcadas no plano complexo. Também é mostrado um círculo com raio unitário centrado na origem do plano complexo. A equação de diferenças, a equação característica e a solução analítica para a resposta natural são exibidas e atualizadas à medida que as raízes são movidas.

- Comece com duas raízes complexas conjugadas, conforme fornecido na parte (a) do Exemplo 3.13. Colocou o

raízes como

$$z_{1,2} = 0,922 e^{\pm 40,5998j}$$

Defina os valores iniciais como foram definidos no exemplo, ou seja, $y[\bar{y}_1] = 5$ e $y[\bar{y}_2] = 7$. A resposta natural exibida deve corresponder ao resultado obtido no Exemplo 3.13.

2. Aumente gradualmente a norma da primeira raiz. Como as raízes são complexas, a segunda raiz também mudará para manter a relação conjugada complexa das raízes. Observe a resposta natural à medida que a norma das raízes complexas se torna maior que a unidade e cruza o círculo para fora. O que acontece quando as raízes se cruzam?
3. Traga a norma das raízes de volta para $|z_1| = 0,922$. Diminuir gradualmente o ângulo de z_1 . O ângulo de z_2 também mudará. Como isso afeta a forma da resposta natural?
4. Defina o ângulo de z_1 igual a zero, de modo que o ângulo de z_2 também se torne zero e as raízes possam ser movidas individualmente. Defina as normas das duas raízes como

$$|z_1| = 0,8 \text{ e } |z_2| = 0,5$$

e observe a resposta natural.

5. Aumente gradualmente $|z_1|$ e observe as mudanças na resposta natural, especialmente como a raiz se move para fora do círculo.

Recursos de software:

nr demo2.m

3.5.2 Encontrando a resposta forçada de um sistema de tempo discreto

Na seção anterior concentrarmos nossos esforços em determinar a solução homogênea da equação de diferença linear de coeficiente constante ou, de forma equivalente, a resposta natural $y_h[n]$ do sistema quando não existe nenhum sinal de entrada externo. Como afirmado na Eq. (3.46), a solução completa é a soma da solução homogênea com a solução particular que corresponde ao sinal de entrada aplicado ao sistema. O procedimento para encontrar uma solução particular para uma equação de diferenças é semelhante ao empregado para uma equação diferencial. Começamos com uma suposição fundamentada sobre a forma da solução específica que buscamos e, em seguida, ajustamos os valores de seus parâmetros para que a equação de diferença seja satisfeita.

A forma da solução particular escolhida deve incluir o sinal de entrada $x[n]$, bem como os sinais de entrada atrasados $x[n-k]$ que diferem na forma. Por exemplo, se o sinal de entrada for $x[n] = K \cos(\omega_0 n)$, então assumimos uma solução particular na forma

$$y_p[n] = k_1 \cos(\omega_0 n) + k_2 \sin(\omega_0 n) \quad (3.78)$$

Os termos cosseno e seno são necessários, pois $x[n-k]$ está na forma

$$\begin{aligned} x[n-k] &= K \cos(\omega_0 [n-k]) \\ &= K \cos(\omega_0 n) \cos(\omega_0 k) + K \sin(\omega_0 n) \sin(\omega_0 k) \end{aligned}$$

Outros atrasos de $x[n]$ não produzem quaisquer termos diferentes destes. Se o sinal de entrada estiver na forma $x[n] = nm$, então os atrasos de $x[n]$ conteriam os termos $nm\delta_1, nm\delta_2, \dots, n_1, n_0$, e a solução particular estaria na forma

$$y_p[n] = kmnm + km\delta_1 nm\delta_1 + \dots + k_1 n + k_0 \quad (3.79)$$

A Tabela 3.1 lista alguns dos tipos comuns de sinais de entrada e as formas de soluções particulares a serem usadas para eles.

Sinal de entrada	Solução particular
K (constante)	k_1
$K e^{an}$	$k_1 e^{an}$
$(\ddot{y}_0 n)$	$K \cos(\ddot{y}_0 n) + k_2 \sin(\ddot{y}_0 n)$
$K \sin(\ddot{y}_0 n)$	$k_1 \cos(\ddot{y}_0 n) + k_2 \sin(\ddot{y}_0 n)$
	$k_m n^m + k_{m+1} n^{m+1} + \dots + k_1 n + k_0$

Tabela 3.1 – Escolha de uma solução particular para vários sinais de entrada de tempo discreto.

Os coeficientes desconhecidos k_i da solução particular são determinados a partir da equação de diferenças assumindo que todas as condições iniciais são zero (lembre-se de que a solução particular não depende das condições iniciais da equação de diferenças ou do estado inicial do sistema). As condições iniciais da equação de diferenças são impostas na etapa subsequente para determinar os coeficientes desconhecidos da solução homogênea, não os coeficientes da solução particular. O procedimento para determinar a solução forçada completa da equação de diferença é resumido abaixo:

1. Escreva a equação de diferenças homogêneas e, em seguida, encontre a equação característica substituindo os atrasos do sinal de saída pelas potências negativas correspondentes da variável complexa z .
2. Resolva as raízes da equação característica e escreva a solução homogênea na forma de Eqn. (3.66). Se algumas das raízes aparecerem como pares complexos conjugados, use a forma na Eq. (3.70) para essas raízes. Se houver raízes múltiplas, use o procedimento descrito na Eq. (3.73). Deixar a solução homogênea na forma paramétrica com coeficientes indeterminados; não tente calcular os coeficientes c_1, c_2, \dots da solução homogênea ainda.
3. Encontre a forma da solução particular escolhendo a forma apropriada dela na Tabela 3.1 ou construindo-a como uma combinação linear do sinal de entrada e seus atrasos. (Esta última abordagem requer que os atrasos do sinal de entrada produzam um número finito de formas de sinal distintas.)
4. Experimente a solução particular na equação de diferenças não homogênea e determine os coeficientes k_1, k_2, \dots da solução particular. Neste ponto, a solução particular deve ser exclusivamente determinada. No entanto, os coeficientes da solução homogênea ainda são indeterminados.
5. Adicione a solução homogênea e a solução particular para obter a solução total. Imponha as condições iniciais necessárias e determine os coeficientes c_1, c_2, \dots da solução homogênea.

Os próximos dois exemplos ilustrarão essas etapas.

Exemplo 3.14: Resposta forçada do suavizador exponencial para entrada degrau

unitário Encontre a resposta forçada do suavizador exponencial do Exemplo 3.6 quando o sinal de entrada é uma função degrau unitário e $y[\ddot{y}_1] = 2,5$.

Solução: No Exemplo 3.11, a solução homogênea da equação de diferenças para o suavizador exponencial foi determinada na forma

$$yh[n] = c (1 - \bar{y})^n$$

Para uma entrada em degrau unitário, a solução particular está na forma

$$yp[n] = k1$$

A solução particular deve satisfazer a equação de diferença. Substituindo $yp[n]$ na equação de diferenças, obtemos

$$k1 = (1 - \bar{y}) k1 + \bar{y}$$

e consequentemente $k1 = 1$. A solução forçada é a combinação de soluções homogêneas e particulares:

$$y[n] = yh[n] + yp[n] = c (1 - \bar{y})^n + 1$$

A constante c precisa ser ajustada para satisfazer a condição inicial especificada $y[\bar{y}1] = 2,5$.

$$y[\bar{y}1] = c (1 - \bar{y})^{\bar{y}1} + 1 = 2,5$$

resulta em $c = 1,5 (1 - \bar{y})$, e a resposta forçada do sistema é

$$\begin{aligned} yh[n] &= 1,5 (1 - \bar{y}) (1 - \bar{y})^n + 1 \\ &= 1,5 (1 - \bar{y})^{n+1} + 1, \quad \text{para } n \geq 0 \end{aligned}$$

Este sinal é mostrado na Fig. 3.19 para $\bar{y} = 0,1$.

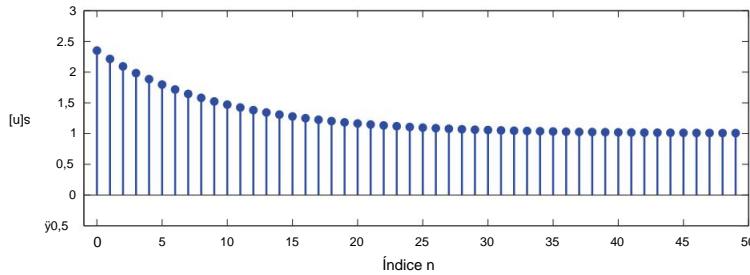


Figura 3.19 – Resposta forçada do sistema do Exemplo 3.14.

Recursos de software:

ex3_14.m

Exemplo 3.15: Resposta forçada do suavizador exponencial para entrada senoidal

Encontre a resposta forçada do suavizador exponencial do Exemplo 3.6 quando o sinal de entrada é uma função senoidal na forma

$$x[n] = A \cos (\bar{y}n)$$

Use os valores de parâmetro $A = 20$, $\bar{y} = 0,2\bar{y}$ e $\bar{y} = 0,1$. O valor inicial do sinal de saída é $y[\bar{y}1] = 2,5$.

Solução: Lembre-se de que a equação de diferenças do suavizador exponencial é

$$y[n] = (1 - \frac{\alpha}{T}) y[n-1] + \frac{\alpha}{T} x[n]$$

A solução homogênea é da forma

$$y_h[n] = c (1 - \frac{\alpha}{T})^n$$

Para um sinal de entrada senoidal, a forma da solução particular apropriada é obtida na Tabela 3.1 como

$$y_p[n] = k_1 \cos(\omega n) + k_2 \sin(\omega n) \quad (3.80)$$

A solução particular deve satisfazer a equação de diferenças do suavizador exponencial. Portanto, precisamos

$$y_p[n] - (1 - \frac{\alpha}{T}) y_p[n-1] = \frac{\alpha}{T} x[n] \quad (3.81)$$

O termo $y_p[n-1]$ é necessário na Eqn. (3.81). Deslocando no tempo ambos os lados da Eqn. (3.80)

$$y_p[n-1] = k_1 \cos(\omega[n-1]) + k_2 \sin(\omega[n-1]) \quad (3.82)$$

Usando as identidades trigonométricas apropriadas2 Eqn. (3.82) pode ser escrita como

$$y_p[n-1] = [k_1 \cos(\omega) - k_2 \sin(\omega)] \cos(\omega n) + [k_1 \sin(\omega) + k_2 \cos(\omega)] \sin(\omega n) \quad (3.83)$$

Vamos definir

$$\ddot{\omega} = 1 - \frac{\alpha}{T}$$

para simplificar a notação. Substituindo as Eq. (3.80) e (3.83) juntamente com o sinal de entrada $x[n]$ na equação de diferenças na Eqn. (3.81) obtemos

$$\begin{aligned} & [k_1 \ddot{\omega} k_1 \cos(\omega) + \ddot{\omega} k_2 \sin(\omega)] \cos(\omega n) \\ & + [k_2 \ddot{\omega} k_1 \sin(\omega) - \ddot{\omega} k_1 \cos(\omega)] \sin(\omega n) \\ & = \ddot{\omega} A \cos(\omega n) \end{aligned} \quad (3.84)$$

Desde a Eq. (3.84) deve ser satisfeita para todos os valores do índice n , os coeficientes de $\cos(\omega n)$ e $\sin(\omega n)$ em ambos os lados do sinal de igual devem ser ajustados individualmente iguais entre si. Isso leva às duas equações

$$k_1 [1 - \frac{\alpha}{T} \cos(\omega)] + k_2 \frac{\alpha}{T} \sin(\omega) = A \quad (3.85)$$

e

$$\ddot{\omega} k_1 \sin(\omega) + k_2 [1 - \frac{\alpha}{T} \cos(\omega)] = 0 \quad (3.86)$$

Equações (3.85) e (3.86) podem ser resolvidos para os coeficientes desconhecidos k_1 e k_2 para produzir

$$k_1 = \frac{\ddot{\omega} A [1 - \frac{\alpha}{T} \cos(\omega)]}{\ddot{\omega}^2 - \frac{\alpha^2}{T^2}} \quad k_2 = \frac{\ddot{\omega} A \sin(\omega)}{\ddot{\omega}^2 - \frac{\alpha^2}{T^2}} \quad (3.87)$$

Agora a solução forçada do sistema pode ser escrita combinando as soluções homogênea e particular como

$$y[n] = y_h[n] + y_p[n]$$

$$(y[n] - \frac{\ddot{\omega} A [1 - \frac{\alpha}{T} \cos(\omega)]}{\ddot{\omega}^2 - \frac{\alpha^2}{T^2}}) \frac{\ddot{\omega} A \sin(\omega)}{\ddot{\omega}^2 - \frac{\alpha^2}{T^2}} = \frac{\ddot{\omega} A \sin(\omega)}{\ddot{\omega}^2 - \frac{\alpha^2}{T^2}} \quad (3.88)$$

² $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ e $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$.

Usando os valores de parâmetro especificados de $A = 20$, $\ddot{y} = 0,2\ddot{y}$, $\ddot{y} = 0,1$ e $\ddot{y} = 0,9$, os coeficientes k_1 e k_2 são avaliados para serem

$$k_1 = 1,5371 \text{ e } k_2 = 2,9907$$

e a resposta forçada do sistema é

$$y[n] = c (0,9)n + 1,5371 \cos (0,2\ddot{y}n) + 2,9907 \sin (0,2\ddot{y}n)$$

Precisamos impor a condição inicial $y[\ddot{y}] = 2,5$ para determinar o coeficiente desconhecido restante c . Para $n = \ddot{y}$, o sinal de saída é $y[\ddot{y}]$

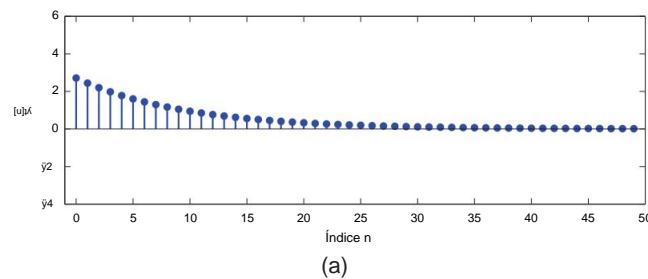
$$\begin{aligned} &= c (0,9)\ddot{y} + 1,5371 \cos (\ddot{y}0,2\ddot{y}) + 2,9907 \sin (\ddot{y}0,2\ddot{y}) \\ &= 1,1111 c \ddot{y} 0,5144 = 2,5 \end{aligned}$$

Resolvendo o coeficiente c resulta em $c = 2,7129$. A resposta forçada agora pode ser escrita na forma completa:

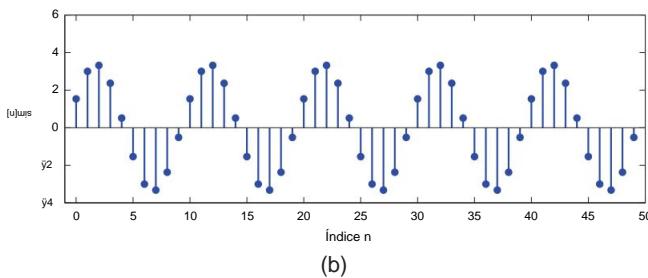
$$y[n] = 2,7129 (0,9)n + 1,5371 \cos (0,2\ddot{y}n) + 2,9907 \sin (0,2\ddot{y}n) \quad (3,89)$$

para $n \geq 0$. A resposta forçada consiste em dois componentes. O primeiro termo na Eq. (3.89) é a resposta transitória

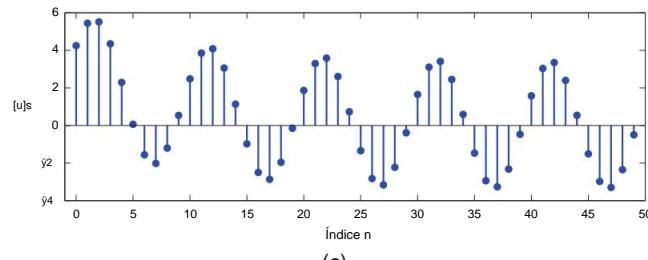
$$yt[n] = 2,7129 (0,9)n \quad (3,90)$$



(a)



(b)



(c)

Figura 3.20 – Os sinais obtidos no Exemplo 3.15: (a) $yt[n]$, (b) e $yss[n]$, (c) $y[n]$.

que é devido ao estado inicial do sistema. Ele desaparece com o tempo. Os termos restantes na Eqn. (3.89) representam a resposta de estado estacionário do sistema:

$$yss[n] = 1,5371 \cos(0,2\bar{\gamma}n) + 2,9907 \sin(0,2\bar{\gamma}n) \quad (3.91)$$

Os sinais $y[n]$, $yt[n]$ e $yss[n]$ são mostrados na Fig. 3.20.

Recursos de software:

[ex 3 15.m](#)

Demonstração interativa: [fr_demo2](#)

O programa de demonstração interativa [fr_demo2.m](#) é baseado no Exemplo 3.15 e permite a experimentação com os parâmetros do problema. A amplitude A é fixada em A = 20 para que o sinal de entrada seja

$$x[n] = 20 \cos(\bar{\gamma}n)$$

O parâmetro de suavização exponencial $\bar{\gamma}$, a frequência angular $\bar{\gamma}$ e o valor de saída inicial $y[\bar{\gamma}1]$ podem ser variados usando controles deslizantes. O efeito das mudanças de parâmetros na resposta transitória $yt[n]$, a resposta em regime permanente $yss[n]$ e a resposta forçada total $yt[n] + yss[n]$ podem ser observados.

1. Comece com as configurações $\bar{\gamma} = 0,1$, $\bar{\gamma} = 0,2\bar{\gamma} = 0,62832$ radianos e $y[\bar{\gamma}1] = 2,5$. Observe o valor de amplitude de pico do componente de estado estacionário. Confirme se ele corresponde ao que foi encontrado no Exemplo 3.15, Fig. 3.20.
2. Agora aumente gradualmente a frequência angular $\bar{\gamma}$ até $\bar{\gamma} = 0,5\bar{\gamma} = 1,5708$ radianos e observe a mudança na amplitude de pico do componente de estado estacionário da saída. Compare com o resultado obtido na Eqn. (3.88).
3. Defina os valores dos parâmetros de volta para $\bar{\gamma} = 0,1$, $\bar{\gamma} = 0,2\bar{\gamma} = 0,62832$ radianos e $y[\bar{\gamma}1] = 2,5$. Preste atenção à resposta transitória e quantas amostras são necessárias para que ela se torne insignificante.
4. Diminua gradualmente o valor de $\bar{\gamma}$ em direção a $\bar{\gamma} = 0,05$ e observe as mudanças no comportamento transitório. Como o valor de $\bar{\gamma}$ afeta o número de amostras necessárias para o sinal de saída atingir o estado estacionário?

Recursos de software:

[fr_demo2.m](#)

3.6 Representação em diagrama de blocos de sistemas de tempo discreto

Um sistema de tempo discreto também pode ser representado com um diagrama de blocos, e existem várias soluções que são funcionalmente equivalentes. Nesta seção, discutiremos apenas uma técnica específica para obter um diagrama de blocos, e a discussão de outras técnicas será adiada para o Capítulo 8.

Os diagramas de blocos são úteis para sistemas de tempo discreto não apenas porque fornecem informações adicionais sobre a operação de um sistema, mas também porque permitem a implementação do sistema em um computador digital. Frequentemente usamos o diagrama de blocos como a primeira etapa no desenvolvimento do código de computador para implementar um sistema de tempo discreto. Um exemplo disso é dado no Exercício 3.5 do MATLAB.

Três tipos de operadores são utilizados na equação de diferença linear de coeficiente constante da Eqn. (3.27): multiplicação de um sinal por um fator de ganho constante, adição de dois sinais e deslocamento de tempo de um sinal. Conseqüentemente, os blocos de construção fundamentais para uso em diagramas de blocos de sistemas de tempo discreto são amplificador de ganho constante, somador de sinal e elemento de atraso de uma amostra, conforme mostrado na Fig. 3.21.

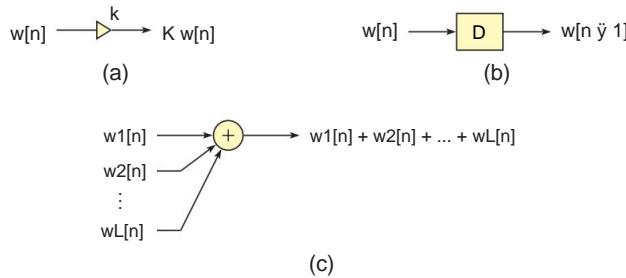


Figura 3.21 – Componentes do diagrama de blocos para sistemas de tempo discreto: (a) amplificador de ganho constante, (b) atraso de uma amostra, (c) somador de sinal.

Começaremos a discussão com uma simples equação de diferenças de terceira ordem expressa como

$$y[n] + a_1 y[n - 1] + a_2 y[n - 2] + a_3 y[n - 3] = b_0 x[n] + b_1 x[n - 1] + b_2 x[n - 2] \quad (3.92)$$

Esta é uma equação de diferença linear de coeficiente constante na forma padrão da Eqn. (3.27) com valores de parâmetro $N = 3$ e $M = 2$. Além disso, o coeficiente do termo $y[n]$ é escolhido para ser $a_0 = 1$. Isso não é muito restritivo, pois, para o caso de $a_0 = 1$, podemos sempre dividir ambos os lados da equação de diferença por a_0 para satisfazer esta condição. Pode-se mostrar que as duas equações de diferenças a seguir que utilizam um sinal intermediário $w(t)$ são equivalentes à Eqn. (3.92):

$$w[n] + a_1 w[n - 1] + a_2 w[n - 2] + a_3 w[n - 3] = x[n] \quad (3.93)$$

$$y[n] = b_0 w[n] + b_1 w[n - 1] + b_2 w[n - 2] \quad (3.94)$$

A prova é direta. Os termos do lado direito da Eqn. (3.92) pode ser escrita usando a Eqn. (3.93) e suas versões deslocadas no tempo. O seguinte pode ser escrito:

$$b_0 x[n] = b_0 w[n] + a_1 w[n - 1] + a_2 w[n - 2] + a_3 w[n - 3] \quad (3.95)$$

$$b_1 x[n - 1] = b_1 w[n - 1] + a_1 w[n - 2] + a_2 w[n - 3] + a_3 w[n - 4] \quad (3.96)$$

$$b_2 x[n - 2] = b_2 w[n - 2] + a_1 w[n - 3] + a_2 w[n - 4] + a_3 w[n - 5] \quad (3.97)$$

Agora estamos em condições de construir o lado direito da Eqn. (3.92) usando as Eqns. (3.95) até (3.97):

$$\begin{aligned} b_0 x[n] + b_1 x[n - 1] + b_2 x[n - 2] &= \\ b_0 w[n] + a_1 w[n - 1] + a_2 w[n - 2] + a_3 w[n - 3] & \\ + b_1 w[n - 1] + a_1 w[n - 2] + a_2 w[n - 3] + a_3 w[n - 4] & \\ + b_2 w[n - 2] + a_1 w[n - 3] + a_2 w[n - 4] + a_3 w[n - 5] & \end{aligned} \quad (3.98)$$

Reorganizando os termos da Eqn. (3.98) podemos escrevê-la na forma

$$\begin{aligned}
 b_0 x[n] + b_1 x[n - 1] + b_2 x[n - 2] = \\
 b_0 w[n] + b_1 w[n - 1] + b_2 w[n - 2] \\
 + a_1 b_0 w[n - 1] + b_1 w[n - 2] + b_2 w[n - 3] \\
 + a_2 b_0 w[n - 2] + b_1 w[n - 3] + b_2 w[n - 4] \\
 + a_3 b_0 w[n - 3] + b_1 w[n - 4] + b_2 w[n - 5]
 \end{aligned} \tag{3.99}$$

e reconhecendo que os termos do lado direito da Eqn. (3.99) são versões deslocadas no tempo de $y[n]$ da Eqn. (3.94) obtemos

$$b_0 x[n] + b_1 x[n - 1] + b_2 x[n - 2] = y[n] + a_1 y[n - 1] + a_2 y[n - 2] + a_3 y[n - 3] \tag{3.100}$$

que é a equação de diferença original dada pela Eqn. (3.92). Portanto, as Eqs. (3.93) e (3.94) formam uma representação equivalente do sistema descrito pela Eqn. (3.92).

Uma possível implementação do diagrama de blocos da equação de diferenças na Eqn. (3.93) é mostrado na Fig. 3.22. Ele recebe o sinal de tempo discreto $x[n]$ como entrada e produz o sinal intermediário $w[n]$ como saída.

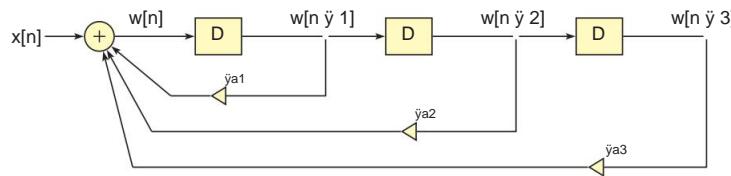


Figura 3.22 – Diagrama de blocos da Eqn. (3.94).

Três elementos de atraso são usados para obter as amostras $w[n - 1]$, $w[n - 2]$ e $w[n - 3]$. O sinal intermediário $w[n]$ é então obtido por meio de um somador que adiciona versões em escala das três amostras anteriores de $w[n]$. Lembre-se de que nosso objetivo final é obter o sinal $y[n]$ que está relacionado ao sinal intermediário $w[n]$ por meio da Eqn. (3.94). O cálculo de $y[n]$ requer o conhecimento de $w[n]$ bem como suas duas amostras anteriores $w[n - 1]$ e $w[n - 2]$, ambas disponíveis no diagrama de blocos da Fig. 3.22. O diagrama de blocos completo do sistema é obtido adicionando as conexões necessárias ao diagrama de blocos da Fig. 3.22, e é mostrado na Fig. 3.23.

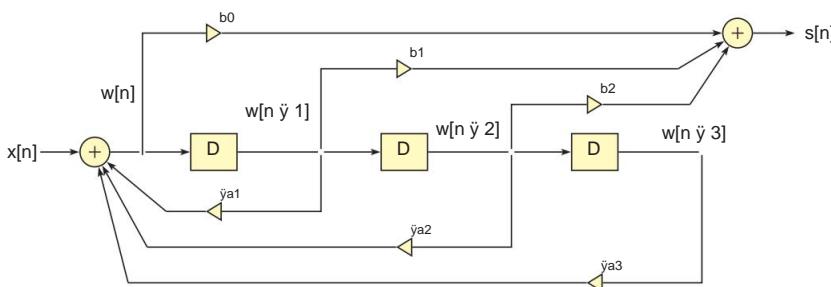


Figura 3.23 – O diagrama de blocos completo para a Eqn. (3.92).

O desenvolvimento acima foi baseado em uma equação de diferença de terceira ordem, no entanto, a extensão da técnica para uma equação geral de diferença linear de coeficiente constante é direta. Na Fig. 3.23, os ganhos de alimentação do diagrama de blocos são os coeficientes do lado direito b_0, b_1, \dots, b_M da equação de diferenças na Eqn. (3.92). Os ganhos de realimentação do diagrama de blocos são os coeficientes negativos do lado esquerdo $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_N$ da equação de diferenças. Lembre-se de que devemos ter $a_0 = 1$ para que isso funcione.

Impondo condições iniciais As

condições iniciais podem ser facilmente incorporadas ao diagrama de blocos. A equação de diferenças de terceira ordem dada pela Eqn. (3.92) normalmente seria resolvida sujeito a valores iniciais especificados para $y[\bar{y}1], y[\bar{y}2]$ e $y[\bar{y}3]$. Para o diagrama de blocos, precisamos determinar os valores correspondentes de $w[\bar{y}1], w[\bar{y}2]$ e $w[\bar{y}3]$ por meio do uso de Eqns. (3.93) e (3.94).

Isso será ilustrado no Exemplo 3.16.

Exemplo 3.16: Diagrama de blocos para sistema de tempo

discreto Construa um diagrama de blocos para resolver a equação de diferenças

$$y[n] - 0,7 y[n - 1] - 0,8 y[n - 2] + 0,84 y[n - 3] = 0,1 x[n] + 0,2 x[n - 1] + 0,3 x[n - 2]$$

com o sinal de entrada $x[n] = u[n]$ e sujeito às condições iniciais

$$y[\bar{y}1] = 0,5, y[\bar{y}2] = 0,3, y[\bar{y}3] = \bar{y}0,4$$

Solução: Usando a variável intermediária $w[n]$, conforme descrito na discussão anterior, podemos escrever o seguinte par de equações de diferenças que são equivalentes à equação de diferenças original:

$$w[n] - 0,7 w[n - 1] - 0,8 w[n - 2] + 0,84 w[n - 3] = x[n] \quad (3.101)$$

$$y[n] = 0,1 w[n] + 0,2 w[n - 1] + 0,3 w[n - 2] \quad (3.102)$$

O diagrama de blocos pode agora ser construído como mostrado na Fig. 3.24.

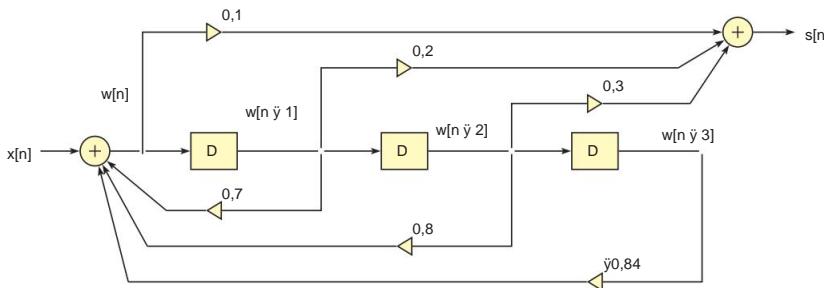


Figura 3.24 – Diagrama de blocos do Exemplo 3.16.

As condições iniciais especificadas em termos dos valores de $y[\bar{y}1], y[\bar{y}2]$ e $y[\bar{y}3]$ precisam ser traduzidas para valores correspondentes de $w[\bar{y}1], w[\bar{y}2]$ e $w[\bar{y}3]$. Escrevendo a Eq. (3.102) para $n = \bar{y}1, \bar{y}2, \bar{y}3$ produz as três equações a seguir:

$$y[\bar{y}1] = 0,1 w[\bar{y}1] + 0,2 w[\bar{y}2] + 0,3 w[\bar{y}3] = 0,5 \quad (3.103)$$

$$y[\bar{y}2] = 0,1 w[\bar{y}2] + 0,2 w[\bar{y}3] + 0,3 w[\bar{y}4] = 0,3 y[\bar{y}3] = 0,1 \quad (3.104)$$

$$w[\bar{y}3] + 0,2 w[\bar{y}4] + 0,3 w[\bar{y}5] = \bar{y}0,4 \quad (3.105)$$

Essas equações precisam ser resolvidas para $w[\ddot{y}1]$, $w[\ddot{y}2]$ e $w[\ddot{y}3]$. As duas incógnitas adicionais, ou seja, $w[\ddot{y}4]$ e $w[\ddot{y}5]$, precisam ser obtidas de outras maneiras. Escrevendo a Eq. (3.101) para $n = \ddot{y}1$ produz

$$w[\ddot{y}1] \ddot{y} 0,7 w[\ddot{y}2] \ddot{y} 0,8 w[\ddot{y}3] + 0,84 w[\ddot{y}4] = x[\ddot{y}1] \quad (3.106)$$

Como $x[n] = u[n]$, sabemos que $x[\ddot{y}1] = 0$, portanto $w[\ddot{y}4]$ pode ser expresso como

$$w[\ddot{y}4] = \ddot{y}1,1905 w[\ddot{y}1] + 0,8333 w[\ddot{y}2] + 0,9524 w[\ddot{y}3] \quad (3.107)$$

que pode ser substituída na Eqn. (3.104) para render

$$y[\ddot{y}2] \ddot{y} 0,3571 w[\ddot{y}1] + 0,35 w[\ddot{y}2] + 0,4857 w[\ddot{y}3] = 0,3 \quad (3.108)$$

Da mesma forma, escrevendo a Eqn. (3.101) para $n = \ddot{y}2$ produz

$$w[\ddot{y}2] \ddot{y} 0,7 w[\ddot{y}3] \ddot{y} 0,8 w[\ddot{y}4] + 0,84 w[\ddot{y}5] = x[\ddot{y}2] \quad (3.109)$$

Sabemos que $x[\ddot{y}2] = 0$, portanto

$$\begin{aligned} w[\ddot{y}5] &= \ddot{y} 1,1905 w[\ddot{y}2] + 0,8333 w[\ddot{y}3] + 0,9524 w[\ddot{y}4] \\ &= \ddot{y} 1,1905 w[\ddot{y}2] + 0,8333 w[\ddot{y}3] \\ &\quad + 0,9524 \ddot{y} 1,1905 w[\ddot{y}1] + 0,8333 w[\ddot{y}2] + 0,9524 w[\ddot{y}3] \\ &= \ddot{y} 1,1338 w[\ddot{y}1] \ddot{y} 0,3968 w[\ddot{y}2] + 1,7404 w[\ddot{y}3] \end{aligned} \quad (3.110)$$

Substituindo as Eq. (3.107) e (3.110) na Eqn. (3.105) obtemos

$$y[\ddot{y}3] = \ddot{y}0,5782 w[\ddot{y}1] + 0,0476 w[\ddot{y}2] + 0,8126 w[\ddot{y}3] = \ddot{y}0,4 \quad (3.111)$$

Equações (3.103), (3.108) e (3.111) podem ser resolvidos simultaneamente para determinar as condições iniciais em termos de $w[n]$ como

$$w[\ddot{y}1] = 1,0682, w[\ddot{y}2] = 1,7149, w[\ddot{y}3] = 0,1674 \quad (3.112)$$

No diagrama de blocos da Fig. 3.24, as saídas dos três elementos de atraso devem ser iguais a esses valores antes de iniciar a simulação.

Demonstração interativa: dgm

demo1 O programa de demonstração interativo dgm demo1.m ilustra a solução da equação de diferenças do Exemplo 3.16 por meio do uso do diagrama de blocos construído e mostrado na Fig.

3.24. Duas escolhas são dadas para o sinal de entrada $x[n]$: um sinal de degrau unitário e um sinal dente de serra periódico, ambos com $x[\ddot{y}1] = x[\ddot{y}2] = 0$. Os valores numéricos das variáveis do nó são mostrados em o diagrama de blocos. Para $n = 0$, os valores iniciais $w[n \ddot{y} 1] = w[\ddot{y}1], w[n \ddot{y} 2] = w[\ddot{y}2]$ e $w[n \ddot{y} 3] = w[\ddot{y}3]$ são mostrados no diagrama conforme calculado no Exemplo 3.16.

Incrementar o índice de amostra n clicando no botão à direita do campo de índice faz com que os valores dos nós sejam atualizados de forma animada, ilustrando a operação do diagrama de blocos. Além disso, as amostras de entrada e saída do sistema são mostradas como gráficos de haste com as amostras atuais indicadas na cor vermelha.

Recursos de software:

dgm_demo1.m

Recursos de software: Veja MATLAB Exercício 3.5.

3.7 Resposta ao Impulso e Convolução

Uma equação de diferença linear de coeficiente constante é suficiente para descrever um sistema DTLTI de modo que o sinal de saída do sistema possa ser determinado em resposta a qualquer sinal de entrada arbitrário. No entanto, muitas vezes achamos conveniente usar formulários de descrição adicionais para sistemas DTLTI. Uma dessas formas de descrição adicionais é a resposta ao impulso, que é simplesmente a resposta forçada do sistema em consideração quando o sinal de entrada é um impulso unitário. Isso é ilustrado na Fig. 3.25.

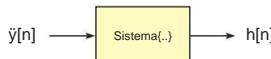


Figura 3.25 – Cálculo da resposta ao impulso para um sistema DTLTI.

A resposta ao impulso também constitui uma descrição completa de um sistema DTLTI. A resposta de um sistema DTLTI a qualquer sinal de entrada arbitrário $x[n]$ pode ser determinada exclusivamente a partir do conhecimento de sua resposta ao impulso.

Na próxima seção, discutiremos como a resposta ao impulso de um sistema DTLTI pode ser obtida a partir de sua equação de diferenças. O inverso também é possível e será discutido em capítulos posteriores.

3.7.1 Encontrando a resposta ao impulso de um sistema DTLTI

Encontrar a resposta ao impulso de um sistema DTLTI equivale a encontrar a resposta forçada do sistema quando a função de forçamento é um impulso unitário, ou seja, $x[n] = \delta[n]$. No caso de uma equação diferencial sem feedback, a resposta ao impulso é encontrada pela substituição direta do sinal de entrada do impulso unitário na equação diferencial. Se a equação de diferenças tiver feedback, encontrar uma forma apropriada para a solução específica pode ser um pouco mais difícil. Essa dificuldade pode ser superada encontrando a resposta de degrau unitário do sistema como um degrau intermediário e, em seguida, determinando a resposta ao impulso do degrau unitário resposta.

O problema de determinar a resposta ao impulso de um sistema DTLTI a partir da equação de diferença governante será explorado nos próximos dois exemplos.

Exemplo 3.17: Resposta ao impulso dos filtros de média móvel

Encontre a resposta ao impulso dos filtros de média móvel de comprimento-2, comprimento-4 e comprimento-N discutidos nos Exemplos 3.3, 3.4 e 3.5.

Solução: vamos começar com o filtro de média móvel de comprimento 2. A equação da diferença governante é

$$y[n] = \frac{1}{2}x[n] + \frac{1}{2}x[n-1]$$

Seja $h_2[n]$ a resposta ao impulso do filtro de média móvel de comprimento 2 (usaremos o subscrito para indicar o comprimento da janela). É fácil calcular $h_2[n]$ is definindo

3.7. Resposta ao Impulso e Convolução

$x[n] = \ddot{y}[n]$ na equação de diferenças:

$$h2[n] = \text{Sistema } \{\ddot{y}[n]\} = \frac{1}{-\ddot{y}[n] + \ddot{y}[n-1]} \frac{1}{2} 2$$

O resultado também pode ser expresso em forma de tabela como

$$h2[n] = \begin{cases} 1/2, & n=0 \\ 1/2, & n=1 \\ 0, & n \geq 2 \end{cases} \quad (3.113)$$

Da mesma forma, para um filtro de média móvel de comprimento 4 com a equação de diferença

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & y[n] = & x[n] & + & x[n-1] & + \\ x[n-3] & 4 & 4 & 4 & 4 & - & - & - & - \end{array}$$

a resposta ao impulso é

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & h4[n] = \text{Sys } \{\ddot{y}[n]\} = & \ddot{y}[n] & + & \ddot{y}[n-1] & + \\ & & & & + & \ddot{y}[n-2] & + & \ddot{y}[n-3] & 4 & 4 & 4 & 4 \end{array}$$

ou em forma tabular

$$h4[n] = \begin{cases} 1/4, & n=0 \\ 1/4, & n=1 \\ 1/4, & n=2 \\ 1/4, & n=3 \\ 0, & n \geq 4 \end{cases} \quad (3.114)$$

Esses resultados são facilmente generalizados para um filtro de média móvel de comprimento N. A equação de diferença do filtro de média móvel de comprimento N é

$$s[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[n-k] \quad (3.115)$$

Substituindo $x[n] = \ddot{y}[n]$ na Eqn. (3.115) obtemos

$$hN[n] = \text{Sistema } \{\ddot{y}[n]\} = \sum_{k=0}^{N-1} \ddot{y}[n-k] \quad (3.116)$$

O resultado na Eq. (3.116) também pode ser escrita em formas alternativas. Uma dessas formas alternativas é

$$hN[n] = \begin{cases} \frac{1}{N}, & n = 0, \dots, N-1 \\ 0, & \text{de outra forma} \end{cases}$$

e outro é

$$hN[n] = \frac{1}{N} u[n] \ddot{y} u[n-N]$$

Exemplo 3.18: Resposta ao impulso do suavizador exponencial

Encontre a resposta ao impulso do suavizador exponencial do Exemplo 3.6 com $y[\ddot{y}1] = 0$.

Solução: Com a condição inicial $y[\ddot{y}1] = 0$, o suavizador exponencial descrito pela equação de diferenças na Eqn. (3.14) é linear e invariante no tempo (consulte a discussão na Seção 3.4). Essas duas propriedades nos permitirão usar a superposição para encontrar sua resposta ao impulso. Lembre-se de que a função de impulso unitário pode ser expressa em termos de funções de degrau unitário como

$$\ddot{y}[n] = u[n] \ddot{y} u[n-1]$$

Como resultado, a resposta ao impulso do suavizador exponencial linear pode ser encontrada através do uso da superposição na forma

$$\begin{aligned} h[n] &= \text{Sistema } \{\ddot{y}[n]\} = \text{Sistema } \{u[n] \ddot{y} u[n \ddot{y} 1]\} \\ &= \text{Sistema } \{u[n]\} \ddot{y} \text{ Sistema } \{u[n \ddot{y} 1]\} \end{aligned} \quad (3.117)$$

Primeiro encontraremos a resposta do sistema a um sinal de degrau unitário. A solução homogênea da equação de diferenças em questão já foi encontrada no Exemplo 3.11 como

$$yh[n] = c (1 \ddot{y} \ddot{y})^n$$

Para uma entrada em degrau unitário, a solução particular está na forma

$$yp[n] = k1$$

Usando esta solução particular na equação de diferenças, obtemos

$$k1 = (1 \ddot{y} \ddot{y}) k1 + \ddot{y}$$

o que leva a $k1 = 1$. Combinando as soluções homogênea e particular, a solução forçada é encontrada na forma

$$y[n] = yh[n] + yp[n] = c (1 \ddot{y} \ddot{y})^n + 1 \quad (3.118)$$

com coeficiente c ainda a ser determinado. Se impusermos agora a condição inicial $y[\ddot{y}1] = 0$ no resultado encontrado na Eqn. (3.118) temos

$$y[\ddot{y}1] = c (1 \ddot{y} \ddot{y})^1 + 1 = 0$$

e consequentemente

$$c = \ddot{y} (1 \ddot{y} \ddot{y})$$

Assim, a resposta em degrau unitário do suavizador exponencial linear é

$$y[n] = \text{Sys } \{u[n]\} = 1 \ddot{y} (1 \ddot{y} \ddot{y}) (1 \ddot{y} \ddot{y})^n$$

para $n \ddot{y} 0$. Em notação compacta, este resultado pode ser escrito como

$$y[n] = 1 \ddot{y} (1 \ddot{y} \ddot{y})^{n+1} u[n] \quad (3.119)$$

Como o sistema é invariante no tempo, sua resposta a uma entrada de degrau unitário atrasada é simplesmente uma versão atrasada de $y[n]$ encontrada na Eqn. (3.119):

$$\begin{aligned} \text{Sistema } \{u[n \ddot{y} 1]\} &= y[n \ddot{y} 1] \\ &= [1 \ddot{y} (1 \ddot{y} \ddot{y})^n] u[n \ddot{y} 1] \end{aligned} \quad (3.120)$$

A resposta ao impulso do suavizador exponencial linear é encontrada usando Eqns. (3.119) e (3.120) como

$$h[n] = y[n] \ddot{y} y[n \ddot{y} 1] = \ddot{y} (1 \ddot{y} \ddot{y})^n u[n] \quad (3.121)$$

e é mostrado na Fig. 3.26 para $\ddot{y} = 0,1$.

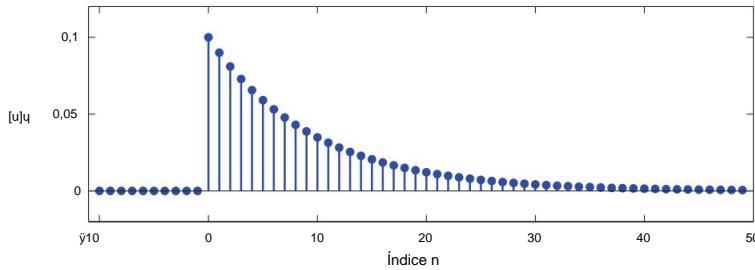


Figura 3.26 – Resposta ao impulso do suavizador exponencial linear do Exemplo 3.18 para $\hat{y} = 0,1$.

Recursos de software:
ex_3_18.m

3.7.2 Operação de convolução para sistemas DLTI

O desenvolvimento da operação de convolução para sistemas DLTI será baseado na decomposição por impulso de um sinal de tempo discreto. Foi estabelecido na Seção 1.4.3 que qualquer sinal arbitrário de tempo discreto pode ser escrito como uma soma de sinais de impulsos escalonados e deslocados, levando a uma decomposição na forma

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \hat{y}[n - k] \quad (3.122)$$

Deslocar no tempo um sinal de impulso unitário por k amostras e multiplicá-lo pela amplitude da k -ésima amostra do sinal $x[n]$ produz o sinal $x_k[n] = x[k] \hat{y}[n - k]$. Repetir esse processo para todos os valores inteiros de k e somar os sinais resultantes leva à Eqn. (3.122).

Se $x[n]$ é o sinal de entrada aplicado a um sistema, o sinal de saída pode ser escrito como

$$y[n] = \text{Sistema } \{x[n]\} = \text{Sistema } \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \hat{y}[n - k] \quad (3.123)$$

O sinal de entrada é a soma das funções de impulso deslocadas e escalonadas. Se o sistema em consideração for linear, então usando a regra de aditividade dada pela Eqn. (3.5) podemos escrever

$$s[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{Sys } \{x[k] \hat{y}[n - k]\} \quad (3.124)$$

Além disso, usando a regra de homogeneidade dada pela Eqn. (3.6), Eq. (3.124) torna-se

$$s[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \text{ Sys } \{\hat{y}[n - k]\} \quad (3.125)$$

Para fins de discussão, vamos assumir que sabemos que o sistema em consideração é linear, mas não necessariamente invariante no tempo. A resposta do sistema linear a qualquer sinal de entrada arbitrário $x[n]$ pode ser calculada por meio do uso da Eqn. (3.125), desde que já conheçamos a resposta do sistema a sinais de impulso deslocados por todos os possíveis

montantes de atraso. O conhecimento necessário para determinar a saída de um sistema linear em resposta a um sinal arbitrário $x[n]$ é

$$\text{Sys } \{\ddot{y}[n \ddot{y} k]\}, \quad \text{tudo } k$$

Eq. (3.125) nos fornece um método viável, embora impraticável, de determinar a saída do sistema $y[n]$ para qualquer sinal de entrada $x[n]$. A quantidade de conhecimento de pré-requisito que devemos possuir sobre o sistema para poder usar a Eqn. (3.125) diminui sua utilidade.

As coisas melhoram, no entanto, se o sistema em consideração também for invariante no tempo.

Seja a resposta ao impulso do sistema definida como

$$h[n] = \text{Sistema } \{\ddot{y}[n \ddot{y} k]\} \quad (3.126)$$

Se, além de linear, o sistema também for invariante no tempo, então a resposta do sistema a qualquer sinal de impulso deslocado pode ser derivada do conhecimento de $h[n]$ por meio de

$$\text{Sys } \{\ddot{y}[n \ddot{y} k]\} = h[n \ddot{y} k] \quad (3.127)$$

consistente com a definição de invariância temporal dada pela Eqn. (3.10). Isso reduz o conhecimento do pré-requisito apenas para a resposta ao impulso $h[n]$, e podemos calcular o sinal de saída como

$$s[n] = \sum_{k=\ddot{y}}^{\ddot{y}} x[k] h[n \ddot{y} k] \quad (3.128)$$

Eq. (3.128) é conhecida como soma de convolução para sinais de tempo discreto. O sinal de saída $y[n]$ de um sistema DTLTI é obtido pela convolução do sinal de entrada $x[n]$ e a resposta ao impulso $h[n]$ do sistema. Essa relação é expressa em notação compacta como

$$y[n] = x[n] \ddot{y} h[n] \quad (3.129)$$

onde o símbolo \ddot{y} representa o operador de convolução. Mostraremos mais adiante nesta seção que o operador de convolução é comutativo, ou seja, a relação na Eqn. (3.128) também pode ser escrita na forma alternativa

$$\begin{aligned} y[n] &= h[n] \ddot{y} x[n] \\ &= \sum_{k=\ddot{y}}^{\ddot{y}} h[k] x[n \ddot{y} k] \end{aligned} \quad (3.130)$$

trocando as funções de $h[n]$ e $x[n]$ sem afetar o resultado final.

Resumo da convolução em tempo discreto:

$$\begin{aligned} y[n] &= x[n] \ddot{y} h[n] = \sum_{k=\ddot{y}}^{\ddot{y}} x[k] h[n \ddot{y} k] \\ &= h[n] \ddot{y} x[n] = \sum_{k=\ddot{y}}^{\ddot{y}} h[k] x[n \ddot{y} k] \end{aligned}$$

Exemplo 3.19: Um exemplo simples de convolução em tempo

discreto Um sistema em tempo discreto é descrito por meio da resposta ao impulso

$$h[n] = \{ 4, 3, 2, 1 \}$$

$$\quad \forall n=0$$

Use a operação de convolução para encontrar a resposta do sistema ao sinal de entrada

$$x[n] = \{ \dots, 3, 7, 4 \}$$

$$\quad \forall n=0$$

Solução: Considere a soma da convolução dada pela Eqn. (3.128). Vamos expressar os termos dentro da soma da convolução, ou seja, $x[k] h[n - k]$, como funções de k .

$$x[k] = \{ \dots, 3, 7, 4 \}$$

$$\quad \forall k=0$$

$$h[\bar{k}] = \{ 1, 2, 3, 4 \}$$

$$\quad \forall k=0$$

$$h[n - k] = \{ 1, 2, 3, 4 \}$$

$$\quad \forall k=n$$

Em sua forma geral, ambos os limites da soma na Eqn. (3.128) são infinitos. Por outro lado, $x[k] = 0$ para valores negativos do índice de soma k , portanto, definir o limite inferior da soma para $k = 0$ não teria nenhum efeito no resultado. Da mesma forma, a última amostra significativa de $x[k]$ está no índice $k = 2$, então o limite superior pode ser alterado para $k = 2$ sem afetar o resultado também, levando a

$$s[n] = \sum_{k=0}^2 x[k] h[n - k] \quad (3.131)$$

Se $n < 0$, temos $h[n - k] = 0$ para todos os termos do somatório na Eqn. (3.131), e a amplitude de saída é zero. Portanto, nos preocuparemos apenas com amostras para as quais $n \geq 0$. O fator $h[n - k]$ possui amostras significativas no intervalo

$$0 \leq n - k \leq 3$$

que pode ser expressa na forma alternativa

$$n \geq 3 \geq k \geq n$$

O limite superior da soma na Eqn. (3.131) pode ser definido igual a $k = n$ sem afetar o resultado, no entanto, se $n > 2$, devemos deixá-lo em $k = 2$. Da mesma forma, o limite inferior pode ser definido como $k = n - 3$, desde que $n - 3 > 0$, caso contrário, deve ser deixado em $k = 0$. Portanto, uma versão compacta da soma de convolução adaptada aos sinais particulares deste exemplo seria

$$s[n] = \sum_{k=\max(0, n-3)}^{\min(2, n)} x[k] h[n - k], \quad \text{para } n \geq 0 \quad (3.132)$$

onde o limite inferior é o maior de $k = 0$ e $k = n - 3$, e o limite superior é o menor de $k = 2$ e $k = n$. Usaremos esse resultado para calcular a convolução de $x[n]$ e $h[n]$.

Para $n = 0$:

$$\begin{aligned} y[0] &= \sum_{k=0}^0 x[k] h[0-k] \\ &= x[0] h[0] = (3)(4) = 12 \end{aligned}$$

Para $n = 1$:

$$\begin{aligned} y[1] &= \sum_{k=0}^1 x[k] h[1-k] \\ &= x[0] h[1] + x[1] h[0] = \\ &= (3)(3) + (7)(4) = 19 \end{aligned}$$

Para $n = 2$:

$$\begin{aligned} y[2] &= \sum_{k=0}^2 x[k] h[2-k] \\ &= x[0] h[2] + x[1] h[1] + x[2] h[0] = \\ &= (3)(2) + (7)(3) + (4)(4) = 31 \end{aligned}$$

Para $n = 3$:

$$\begin{aligned} y[3] &= \sum_{k=0}^2 x[k] h[3-k] \\ &= x[0] h[3] + x[1] h[2] + x[2] h[1] = \\ &= (3)(1) + (7)(2) + (4)(3) = 23 \end{aligned}$$

Para $n = 4$:

$$\begin{aligned} y[4] &= \sum_{k=1}^2 x[k] h[4-k] \\ &= x[1] h[3] + x[2] h[2] = \\ &= (7)(1) + (4)(2) = 15 \end{aligned}$$

Para $n = 5$:

$$\begin{aligned} y[5] &= \sum_{k=2}^2 x[k] h[5-k] \\ &= x[2] h[3] = (4)(1) = 4 \end{aligned}$$

Assim, o resultado da convolução é

$$y[n] = \{ \dots, 12, 19, 31, 23, 15, 4 \}_{n=0}$$

Exemplo 3.20: Exemplo de convolução simples em tempo discreto

revisitado Refaça o problema de convolução do Exemplo 3.19 com as seguintes modificações aplicadas aos dois sinais:

$$h[n] = \{ 4 \quad , 3, 2, 1 \} \\ n=N2$$

e

$$x[n] = \{ \quad , 7, 4 \} \\ n=N1$$

Assuma que os índices iniciais N1 e N2 são constantes conhecidas.

Solução: Precisamos reajustar os limites do índice de somatório. A função x[k] tem amostras significativas no intervalo

$$N1 \leq k \leq N1 + 2 \quad (3.133)$$

Para a função h[n - k], o intervalo significativo do índice k é encontrado a partir da desigualdade

$$N2 \leq n - k \leq N2 + 3$$

cujos termos podem ser rearranjados para produzir

$$n \geq N2 - 3 \geq k \geq n - N2 \quad (3.134)$$

Usando as desigualdades nas Eqns. (3.133) e (3.134) a soma da convolução pode ser escrita como

$$s[n] = \sum_{k=K1}^{K2} x[k] h[n - k] \quad (3.135)$$

com os limites

$$K1 = \max(N1, n - N2 + 3), \quad \text{e} \quad K2 = \min(N1 + 2, n - N2), \quad (3.136)$$

Por exemplo, suponha que tenhamos N1 = 5 e N2 = 7. Usando a Eqn. (3.135) com os limites da Eqn. (3.136) podemos escrever a soma da convolução como

$$s[n] = \sum_{k=\max(5, n-10)}^{\min(7, n-7)} x[k] h[n - k] \quad (3.137)$$

Para que a soma contenha termos significativos, o limite inferior não deve ser maior que o limite superior, ou seja, precisamos

$$\max(5, n - 10) \leq \min(7, n - 7)$$

Como resultado, a amostra significativa mais à esquerda de y[n] ocorrerá no índice n = 12. Em geral, pode ser mostrado (consulte o Problema 3.23 no final deste capítulo) que a amostra significativa mais à esquerda estará no índice n = N1 + N2. A amostra y[12] é calculada como

$$y[12] = \sum_{k=5}^5 x[k] h[12 - k] \\ = x[5] h[7] = (7)(4) = 28$$

Outras amostras de $y[n]$ podem ser calculadas seguindo o procedimento demonstrado no Exemplo 3.19 e produzem o mesmo padrão de valores com a única diferença sendo o índice inicial.

A solução completa é

$$y[n] = \{ \ddot{y}_{12}, 19, 31, 23, 15, 4 \}$$

$\ddot{y} n=12$

Recursos de software: Veja MATLAB Exercício 3.7.

Ao calcular a soma da convolução, é útil esboçar os sinais. As etapas gráficas envolvidas no cálculo da convolução de dois sinais $x[n]$ e $h[n]$ em um valor de índice específico n podem ser resumidas da seguinte forma:

1. Esboce o sinal $x[k]$ como uma função da variável independente k . Isso corresponde a uma simples mudança de nome na variável independente, e o gráfico do sinal $x[k]$ aparece idêntico ao gráfico do sinal $x[n]$. (Ver Fig. 3.27.)

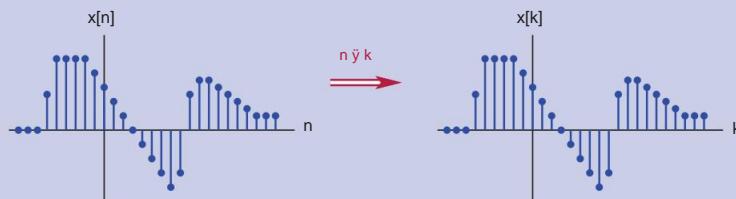


Figura 3.27 – Obtenção de $x[k]$ para a soma da convolução.

2. Para um valor específico de n , esboce o sinal $h[n \ddot{\wedge} k]$ como uma função do independente variável k . Esta tarefa pode ser dividida em duas etapas, conforme a seguir:

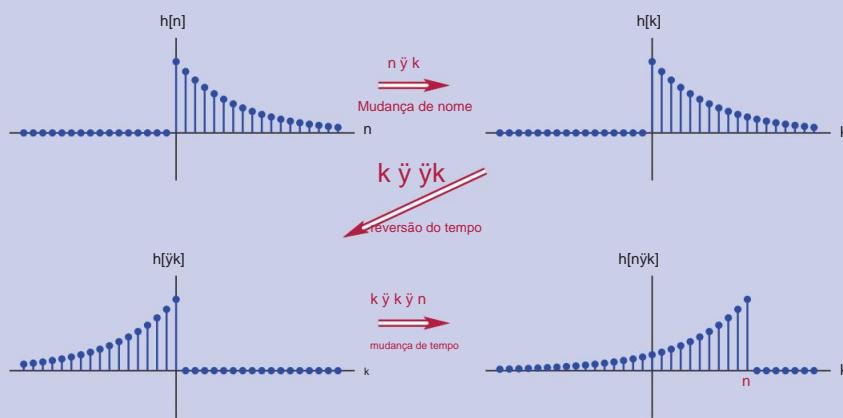
- a. Esboce $h[\ddot{\wedge} k]$ como uma função de k . Esta etapa equivale a reversão de tempo do sinal $h[k]$.
- b. Em $h[\ddot{\wedge} k]$ substitua $k \ddot{\wedge} k \ddot{\wedge} n$. Esta etapa rende

$$h[\ddot{\wedge} k] \underset{k \ddot{\wedge} k \ddot{\wedge} n}{=} h[n \ddot{\wedge} k] \quad (3.138)$$

e equivale a deslocamento de tempo $h[\ddot{\wedge} k]$ por n amostras.

Consulte a Fig. 3.28 para obter uma ilustração das etapas para obter $h[n \ddot{\wedge} k]$.

3. Multiplique os dois sinais esboçados em 1 e 2 para obter o produto $x[k] h[n \ddot{\wedge} k]$.
4. Some as amplitudes de amostra do produto $x[k] h[n \ddot{\wedge} k]$ sobre o índice k . O resultado é a amplitude do sinal de saída no índice n .
5. Repita as etapas 1 a 4 para todos os valores de n que forem de interesse.

Figura 3.28 – Obtenção de $h[n \circledast k]$ para a soma da convolução.

O próximo exemplo ilustrará os detalhes gráficos da operação de convolução para sistemas DTLTI.

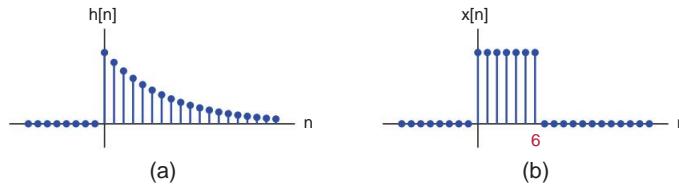
Exemplo 3.21: Um exemplo de convolução de tempo discreto mais envolvido. Um sistema de tempo discreto é descrito através da resposta ao impulso

$$h[n] = (0,9)^n u[n]$$

Use a operação de convolução para encontrar a resposta de um sistema ao sinal de entrada

$$x[n] = u[n] \circledast u[n \circledast 7]$$

Os sinais $h[n]$ e $x[n]$ são mostrados na Fig. 3.29.

Figura 3.29 – Os sinais do Exemplo 3.21: (a) Resposta ao impulso $h[n]$, (b) sinal de entrada $x[n]$.

Solução: Novamente, acharemos útil esboçar as funções $x[k]$, $h[n \circledast k]$ e seu produto antes de começarmos a avaliar o resultado da convolução. Esse esboço é mostrado na Fig. 3.30. Ele revela três possibilidades distintas para a sobreposição de $x[k]$ e $h[n \circledast k]$. A soma da convolução precisa ser configurada para cada uma das três regiões do índice n .

Caso 1: $n < 0$

Não há sobreposição entre as duas funções neste caso, portanto seu produto é igual a zero para todos os valores de k . O sinal de saída é

$$y[n]=0, \text{ para } n < 0$$

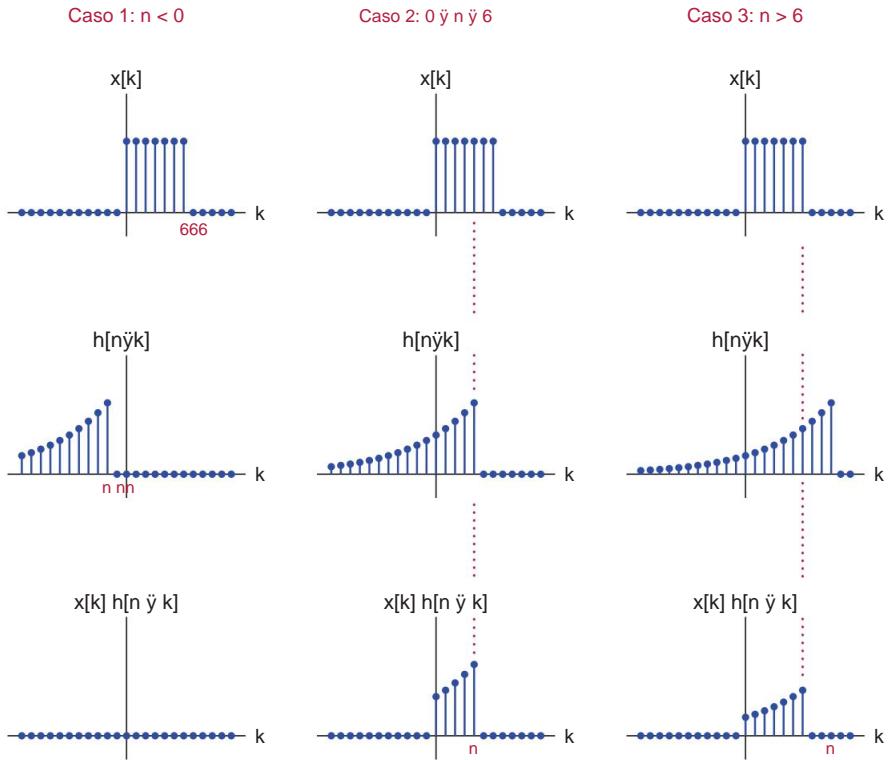


Figura 3.30 – Sinais envolvidos na soma de convolução do Exemplo 3.21.

Caso 2: $0 \leq n \leq 6$

Para este caso, as duas funções se sobrepõem para o intervalo do índice $0 \leq k \leq n$. Definindo limites de soma de acordo, o sinal de saída pode ser escrito como

$$s[n] = \sum_{k=0}^n (1) (0,9)^{n-k} \quad (3.139)$$

A expressão na Eq. (3.139) pode ser simplificada fatorando o termo comum $(0,9)^n$ e usando a fórmula da série geométrica (consulte o Apêndice C) para obter

$$\begin{aligned} y[n] &= (0,9)^n \sum_{k=0}^n (0,9)^{-k} \\ &= (0,9)^n \frac{1 - (0,9)^{-(n+1)}}{1 - (0,9)^{-1}} \\ &= \frac{1}{0,9} (0,9)^n \quad , \quad \text{para } 0 \leq n \leq 6 \end{aligned} \quad (3.140)$$

Caso 3: $n > 6$

Para $n > 6$ a sobreposição das duas funções ocorrerá no intervalo $0 \leq k \leq 6$, portanto os limites de soma precisam ser ajustados.

$$s[n] = \sum_{k=0}^{6} (1)(0.9)^n y[k] \quad (3.141)$$

Novamente fatorando o termo $(0.9)^n$ e usando a fórmula da série geométrica, obtemos

$$\begin{aligned} y[n] &= (0.9)^n \sum_{k=0}^{6} (0.9)^{-k} \\ &= (0.9)^n \frac{1 - (0.9)^7}{1 - (0.9)} \\ &= 9.8168 (0.9)^n, \quad \text{para } n > 6 \end{aligned} \quad (3.142)$$

Assim, calculamos o sinal de saída em cada um dos três intervalos distintos que identificamos. Juntando essas três soluções parciais, a solução completa para o sinal de saída é obtida como

$$s[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 9.8168 (0.9)^n, & 0 \leq n \leq 6 \\ 9.8168 (0.9)^n, & n > 6 \end{cases} \quad (3.143)$$

e é mostrado na Fig. 3.31.

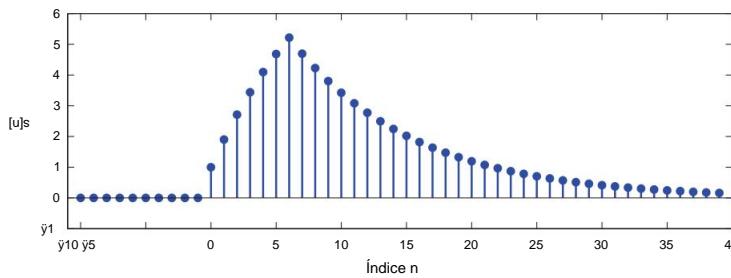


Figura 3.31 – Resultado da convolução para o Exemplo 3.21.

Recursos de software:

`ex_3_21.m`

Demonstração interativa: `conv demo5.m`

O programa de demonstração “`conv demo5.m`” é baseado no problema de convolução em tempo discreto do Exemplo 3.21. Isso facilita a visualização das amostras sobrepostas entre as funções $x[k]$ e $h[n-k]$ à medida que o índice k é variado. A resposta ao impulso usada no programa de demonstração está na forma geral

$$h[n] = a^n u[n] e$$

pode ser idêntica à resposta ao impulso usada no Exemplo 3.21 ajustando $a = 0.9$.

Recursos de software:

`conv demo5.m`

Recursos de software: Veja MATLAB Exercício 3.8.

3.8 Causalidade em Sistemas de Tempo Discreto

A causalidade é uma característica importante dos sistemas fisicamente realizáveis. Um sistema é considerado causal se o valor atual do sinal de saída depende apenas dos valores atuais e passados do sinal de entrada, mas não de seus valores futuros. Por exemplo, um sistema de tempo discreto definido pela relação

$$y[n] = y[n - 1] + x[n] - 3x[n - 1] \quad (3.144)$$

é causal, e um definido por

$$y[n] = y[n - 1] + x[n] - 3x[n + 1] \quad (3.145)$$

é não causal. Os sistemas causais podem ser implementados no modo de processamento em tempo real, onde uma amostra do sinal de saída é calculada em resposta a cada amostra recebida do sinal de entrada. Por outro lado, a implementação de sistemas não causais só pode ser possível no modo de pós-processamento, onde todo o sinal de entrada deve ser observado e registrado antes que o processamento possa começar.

No caso de um sistema DTLTI, a propriedade de causalidade pode ser facilmente relacionada à resposta ao impulso. Lembre-se de que o sinal de saída $y[n]$ de um sistema DTLTI pode ser calculado como a convolução de seu sinal de entrada $x[n]$ com sua resposta ao impulso $h[n]$ como

$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^n h[k] x[n - k] \quad (3.146)$$

Para que o sistema considerado seja causal, o cálculo de $y[n]$ não deve exigir amostras futuras do sinal de entrada. Assim, o termo $x[n - k]$ na soma não deve conter valores de índice no futuro. Isto exige

$$n - k \geq n \Rightarrow k \leq 0 \quad (3.147)$$

O produto $h[k] x[n - k]$ não deve ter nenhum valor diferente de zero para $k < 0$. Portanto, a resposta ao impulso $h[n]$ deve ser igual a zero para todos os valores de índice negativos:

$$h[n] = 0 \text{ para todo } n < 0 \quad (3.148)$$

Para um sistema DTLTI causal, a relação de convolução na Eqn. (3.146) pode ser escrita na forma do lado direito definindo o limite inferior do índice de soma igual a zero:

$$s[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k] x[n - k] \quad (3.149)$$

3.9 Estabilidade em Sistemas de Tempo Discreto

Um sistema é considerado estável no sentido BIBO (bounded-inputbounded-output) se qualquer sinal de entrada limitado produzir um sinal de saída limitado.

Um sinal de entrada de tempo discreto $x[n]$ é dito limitado se existe um limite superior Bx tal que

$$|x[n]| < Bx < \bar{y} \quad (3.150) \text{ para todos os valores do índice inteiro}$$

n . Um sistema de tempo discreto é estável se existe um limite superior finito B_y para o sinal de saída em resposta a qualquer sinal de entrada limitado conforme descrito na Eqn. (3.150).

Para a estabilidade de um sistema de tempo discreto:

$$|x[n]| < Bx < \bar{y} \text{ implica que } |y[n]| < B_y < \bar{y} \quad (3.151)$$

Se o sistema em questão for DTLTI, é possível relacionar a condição de estabilidade dada pela Eqn. (3.151) para a resposta ao impulso do sistema, bem como sua equação de diferenças.

A derivação da condição necessária segue:

O sinal de saída de um sistema DTLTI é encontrado a partir de seu sinal de entrada e resposta ao impulso por meio do uso da soma de convolução expressa como

$$s[n] = \sum_{k=-\bar{y}}^{\bar{y}} h[k] x[n - k] \quad (3.152)$$

O valor absoluto do sinal de saída é

$$|s[n]| = \sum_{k=-\bar{y}}^{\bar{y}} |h[k]| |x[n - k]| \quad (3.153)$$

O valor absoluto de uma soma é menor ou igual à soma dos valores absolutos, então uma desigualdade envolvendo $y[n]$ pode ser escrita como

$$|s[n]| \leq \sum_{k=-\bar{y}}^{\bar{y}} |h[k]| |x[n - k]| \quad (3.154)$$

O termo de soma na Eqn. (3.154) pode ser expressa como

$$|h[k]| |x[n - k]| = |h[k]| |x[n - k]| \quad (3.155)$$

e a desigualdade na Eqn. (3.154) torna-se

$$|s[n]| \leq \sum_{k=-\bar{y}}^{\bar{y}} |h[k]| |x[n - k]| \quad (3.156)$$

Substituindo o termo $|x[n - k]|$ na Eq. (3.156) com Bx torna o termo do lado direito da desigualdade ainda maior, então temos

$$|s[n]| \leq \sum_{k=-\bar{y}}^{\bar{y}} |h[k]| Bx \quad (3.157)$$

ou, fatorando o fator comum Bx

$$|s[n]| \leq Bx \sum_{k=-\bar{y}}^{\bar{y}} |h[k]| < \bar{y} \quad (3.158)$$

Eq. (3.158) nos leva à conclusão

$$\sum_{k=0}^{\infty} |h[k]| < \infty \quad (3.159)$$

Para que um sistema DLTI seja estável, sua resposta ao impulso deve ser somatória absoluta.

Exemplo 3.22: Estabilidade de um filtro de média móvel de comprimento 2

Comentário sobre a estabilidade do filtro de média móvel de comprimento 2 descrito pela equação de diferença

$$y[n] = \frac{1}{2}x[n] + \frac{1}{2}x[n-1]$$

Solução: Abordaremos esse problema de duas maneiras diferentes. Primeiro, vamos verificar diretamente para ver se qualquer sinal de entrada limitado arbitrário é garantido para produzir um sinal de saída limitado.

O valor absoluto do sinal de saída é

$$|y[n]| = \left| \frac{1}{2}x[n] + \frac{1}{2}x[n-1] \right| \quad (3.160)$$

Como o valor absoluto de uma soma é menor ou igual à soma dos valores absolutos, podemos derivar a seguinte desigualdade da Eqn. (3.160):

$$|y[n]| \leq \frac{1}{2}|x[n]| + \frac{1}{2}|x[n-1]| \quad (3.161)$$

Além disso, como assumimos $|x[n]| < B$ para todo n , substituindo $|x[n]|$ e $|x[n-1]|$ termos do lado direito da desigualdade na Eqn. (3.161) não afeta a validade da desigualdade, então temos

$$|y[n]| \leq \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}B = B \quad (3.162)$$

provando que o sinal de saída $y[n]$ é limitado enquanto o sinal de entrada $x[n]$ for.

Uma maneira alternativa de atacar o problema seria verificar a resposta ao impulso para a condição de soma absoluta na Eqn. (3.159). A resposta ao impulso do filtro de média móvel de comprimento 2 é

$$y[n] = \frac{1}{2}h[0] + \frac{1}{2}h[1] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \quad (3.163)$$

que é claramente somável em um sentido absoluto.

Exemplo 3.23: Estabilidade do sistema de saldo do empréstimo

Comente sobre a estabilidade do sistema de saldo do empréstimo discutido no Exemplo 3.7.

Solução: Lembre-se de que a equação de diferença governante é

$$y[n] = (1 + c)y[n-1] + x[n]$$

onde c é uma taxa de juros constante positiva. Este sistema pode ser analisado em termos de estabilidade usando a mesma abordagem que usamos no exemplo anterior. No entanto, faremos uma abordagem mais prática e analisaremos o sistema do ponto de vista de um leigo.

E se pegássemos o dinheiro emprestado e nunca efetuássemos o pagamento? O saldo do empréstimo continuaria crescendo a cada período. Se o valor inicial do sinal de saída for $y[0] = A$ e se $x[n] = 0$ para $n \geq 1$, então teríamos

$$\begin{aligned}y[1] &= (1 + c) A \\y[2] &= (1 + c)^2 A \\&\vdots \\y[n] &= (1 + c)^n A\end{aligned}$$

o que indica que o sistema é instável, pois conseguimos encontrar pelo menos um sinal de entrada limitado que leva a um sinal de saída ilimitado.

Também vale a pena notar que a equação característica é

$$z - (1 + c) = 0$$

e sua única solução está em $z_1 = 1 + c$.

A estabilidade de um sistema DTLTI também pode ser associada aos modos da equação de diferenças que governa seu comportamento. Vimos na Seção 3.5.1 que, para um sistema DTLTI causal, raízes reais e complexas z_k do polinômio característico para o qual $|z_k| \geq 1$ estão associados a comportamento instável. Assim, para um sistema DTLTI causal ser estável, as magnitudes de todas as raízes do polinômio característico devem ser menores que a unidade. Se um círculo é desenhado no plano complexo com seu centro na origem e seu raio igual à unidade, todas as raízes do polinômio característico devem estar dentro do círculo para que o sistema DTLTI causal correspondente seja estável.

Uma observação lateral: ao descrever as associações entre as raízes do polinômio característico e a estabilidade, nos referimos a um sistema DTLTI causal. Se fôssemos considerar um sistema anticausal, cuja resposta ao impulso prossegue na direção negativa para $n \leq 0$, então as associações descritas acima teriam que ser invertidas. Nesse caso, raízes fora do círculo unitário do plano complexo levariam a um comportamento instável.

Por que a estabilidade é importante para um sistema DTLTI?

Um sistema DTLTI instável é aquele capaz de produzir um sinal de saída ilimitado em resposta a pelo menos alguns sinais de entrada limitados. Qual é o significado prático disso?

Como estamos lidando com algoritmos numéricos implementados via software em um computador, um algoritmo instável pode levar a um sinal de saída contendo números que vão crescendo até atingirem magnitudes que não podem mais ser tratadas pelas convenções de representação numérica do processador ou do sistema operacional. Quando isso ocorre, o software que implementa o sistema deixa de funcionar corretamente.

3.10 Leitura Adicional

[1] S. Elaydi. Uma introdução às equações de diferença. Textos de graduação da Springer em Matemática e Tecnologia. Springer, 2005.

[2] WG Kelley e AC Peterson. Equações de diferenças: uma introdução com aplicações. Harcourt/Academic Press, 2001.

[3] V. Lakshmikantham. Teoria das Equações das Diferenças Métodos Numéricos e Aplicações. Marcel Dekker, 2002.

[4] RE Mickens. Equações das Diferenças: Teoria e Aplicações. Van Nostrand Reinhold Companhia, 1990.

Exercícios MATLAB

MATLAB Exercício 3.1: Escrevendo funções para filtros de média móvel

Neste exercício desenvolveremos funções MATLAB para implementar os filtros de média móvel de comprimento 2 e comprimento 4 que foram discutidos nos Exemplos 3.4 e 3.5, respectivamente. Como dito anteriormente, nosso propósito não é o desenvolvimento de funções mais rápidas e eficientes. O MATLAB já inclui algumas funções muito poderosas para implementar uma ampla variedade de sistemas de tempo discreto, e elas certamente também podem ser usadas para a simulação de filtros de média móvel. O uso de duas dessas funções internas do MATLAB, ou seja, `conv(..)` e `filter(..)`, será ilustrado em exercícios posteriores. Neste exercício, nosso objetivo ao desenvolver nossas próprias funções para simular filtros de média móvel é fornecer mais informações sobre sua operação. Portanto, sacrificaremos a velocidade e a eficiência de execução em favor de um melhor entendimento da codificação de uma equação de diferenças para um filtro de média móvel.

Antes de desenvolver qualquer função do MATLAB, seria uma boa ideia considerar como essa função seria eventualmente usada. Nosso desenvolvimento do código MATLAB neste exercício será paralelo à ideia de processamento em tempo real, onde os sinais de entrada e saída existem na forma de "fluxos de dados" de comprimento não especificado. Algorítmicamente, os seguintes passos serão executados:

1. Escolha a amostra de entrada atual do fluxo de entrada.
2. Processe a amostra de entrada atual por meio do filtro de média móvel para calcular a amostra de saída atual.
3. Coloque a amostra de saída atual no fluxo de saída.
4. Repita as etapas 1 a 3.

Vamos começar desenvolvendo uma função chamada "`ss_movavg2`" para implementar a etapa 2 acima para um filtro de média móvel de comprimento 2. A função será usada com a sintaxe

```
y = ss_movavg2 (x)
```

onde "x" representa a amostra de entrada atual e "y" é a amostra de saída atual. Uma vez desenvolvida, a função pode ser colocada no loop descrito acima para simular um filtro de média móvel de comprimento 2 com qualquer fluxo de dados de entrada.

A equação de diferença de um filtro de média móvel de comprimento 2 é

$$y[n] = \frac{1}{2}x[n] + \frac{1}{2}x[n-1]$$

Uma variável local denominada "xnm1" será usada para acompanhar a amostra anterior $x[n-1]$. As duas linhas a seguir calculariam a amostra de saída e atualizariam a amostra de entrada anterior para uso futuro.

```
y = (x+xnm1)/2; xnm1  
= x;
```

Aqui está nosso primeiro desafio: No MATLAB, variáveis locais criadas dentro de funções são descartadas quando a função retorna. Na próxima vez que a mesma função for chamada, sua variável local "xnm1" não terá o valor anteriormente colocado nela. A solução é declarar a variável "xnm1" como uma variável persistente, ou seja, uma variável que retém seu valor entre chamadas de função. A seguir está uma listagem da função concluída ss_movavg2(..):

```

1 função y=ss_movavg2 (x) persistente
2     xnm1; se estiver vazio
3     (xnm1) xnm1 = 0; fim; y
4         = (x+xnm1)/
5     2;
6     xnm1 = x;
7

```

Outro detalhe é que na primeira vez que uma variável persistente é criada (a primeira vez que a função ss_movavg2(..) é chamada), ela é criada como uma matriz vazia. As linhas 3 a 5 do código acima definem a variável "xnm1" igual a zero se ela estiver vazia.

A função ss_movavg4(..) pode ser desenvolvida de maneira semelhante. Considere a Eq. (3.13). Além de $x[n \ddot{y} 1]$, também precisamos acompanhar duas amostras de entrada antes disso, ou seja, $x[n \ddot{y} 2]$ e $x[n \ddot{y} 3]$. Portanto, definiremos duas variáveis locais adicionais com os nomes "xnm2" e "xnm3" e as declararemos como persistentes também. O código para a função ss_movavg4(..) está listado abaixo.

```

1 função y = ss_movavg4 (x)
2     persistente xnm1 xnm2 xnm3; se estiver
3     vazio (xnm1) xnm1 = 0;
4         fim; se estiver
5     vazio
6     (xnm2) xnm2 = 0; fim;
7         se estiver
8     vazio
9     (xnm3) xnm3 = 0; fim; y
10        =
11
12     (x+xnm1+xnm2+xnm3)/4; xnm3 =
13     xnm2; xnm2 =
14     xnm1; xnm1 = x;
15

```

Nas linhas 13 a 15 do código, realizamos a contabilidade e preparamos as três variáveis locais para a próxima chamada da função. O valor $x[n]$ que temos agora será a "amostra anterior" $x[n \ddot{y} 1]$ na próxima vez que esta função for chamada, e uma lógica semelhante também se aplica às outras duas variáveis. Portanto, os valores de {"x", "xnm1" e "xnm2"} precisam ser movidos para {"xnm1", "xnm2" e "xnm3"}, respectivamente. Ao fazer isso, a ordem das atribuições é crítica. Se tivéssemos usado o pedido

```

13 xnm1 = x; 14
xnm2 = xnm1; 15 xnm3
= xnm2;

```

todas as três variáveis teriam terminado (incorrectamente) com o mesmo valor.

Um detalhe final sobre variáveis persistentes é que às vezes pode ser necessário limpá-las da memória. Suponha que queremos usar a função ss_movavg2(..) com outro fluxo de dados e precisamos limpar quaisquer variáveis persistentes que sobraram de uma simulação anterior. O seguinte comando realiza isso:

```
>> limpar ss_movavg2
```

Recursos de software:

ss_movevg2.m
ss_movevg4.m

MATLAB Exercício 3.2: Testando as funções escritas no MATLAB Exercício 3.1 Neste

exercício desenvolveremos o código para testar as funções de filtragem de média móvel desenvolvidas no Exercício 3.1. Os valores diários dos dados do Dow Jones Industrial Average para os anos de 2001 a 2003 estão disponíveis no arquivo de dados MATLAB "djia.mat" nas variáveis MATLAB "x2001", "x2002" e "x2003". O script a seguir calcula a média móvel de comprimento 4 para os dados de 2003 e representa graficamente os sinais de entrada e saída.

```
1 % Script matex_3_2a.m % 3 load
2
'djia.mat'; 4 saída = [] ; 5 limpar % Carrega o fluxo de dados de entrada.
ss_movevg4 ; 6 nsamp % Crie um fluxo de saída vazio.
= comprimento(x2003); % Limpar variáveis persistentes.
Número de amostras no fluxo de entrada. 7 para n=1: nsamp x = x2003(n); % "x" é a amostra de entrada
atual. y = ss_movevg4
8 (x); % "y" é a amostra de saída atual. saída = [saída ,y]; % Acrescente "y" ao fluxo de
9 saída. fim; % Sinais de entrada e saída do gráfico. clf;
10
11
12
13
14 plot([1:nsamp],x2003 ,[1:nsamp],saída); 15 eixos([1,252,7500,10500]);
```

Observe que a função ss_movevg4(..) começa com suas variáveis persistentes "xnm1", "xnm2", "xnm3" cada uma igual a 0. Como resultado, as três primeiras amostras da saída serão imprecisas.

Esse problema pode ser atenuado adicionando as últimas três amostras dos dados do ano de 2002 aos dados do ano de 2003 antes de iniciarmos o processamento.

O script MATLAB acima pode ser facilmente modificado para simular uma média móvel de comprimento 2 filtre substituindo a função ss_movevg2(..) no lugar da função ss_movevg4(..).

Recursos de software:

matex_3_2a.m
matex_3_2b.m
djia.mat

MATLAB Exercise 3.3: Escrevendo e testando uma função para o suavizador exponencial

Considere o suavizador exponencial introduzido no Exemplo 3.6 com a equação de diferenças

$$y[n] = (1 - \alpha) y[n - 1] + \alpha x[n]$$

Vamos implementar o suavizador exponencial no MATLAB e testá-lo com o Dow Jones

Dados da média industrial usando a mesma abordagem algorítmica dos exercícios anteriores:

1. Escolha a amostra de entrada atual do fluxo de entrada.
2. Processe a amostra de entrada atual por meio do filtro de média móvel para calcular a amostra de saída atual.
3. Coloque a amostra de saída atual no fluxo de saída.
4. Repita as etapas 1 a 3.

Uma função chamada "ss_expsmoo" será desenvolvida para implementar o passo 2 do algoritmo. A sintaxe da função é

```
y = ss_expsmoo (x,alfa)
```

onde "x" representa a amostra de entrada atual e "y" é a amostra de saída atual. O parâmetro "alfa" pertence ao suavizador exponencial. Uma variável persistente denominada "ynm1" é utilizada para acompanhar a amostra de saída anterior $y[n - 1]$. O código da função ss_expsmoo(..) está listado abaixo:

```
1 função y = ss_expsmoo (x,alpha) persistente
2     ynm1; se isempty
3         (ynm1) ynm1 = 0; fim;
4         y = (1-
5
6         alfa)*ynm1+alfa*x; ynm1 = y;
7
```

O script a seguir calcula a saída do suavizador exponencial para os dados Dow Jones de 2003 como entrada e representa graficamente os sinais de entrada e saída.

```
1 % Roteiro: matex_3_3.m
2
3 load 'djia.mat'; 4 saída          % Carrega o fluxo de dados de entrada.
= []; 5 limpar                   % Crie um fluxo de saída vazio.
ss_expsmoo ; 6 nsamp =           % Limpar variáveis persistentes.
comprimento(x2003); % Número de amostras no fluxo de entrada. 7 alfa = 0,1; 8 para n=1:nsamp x
= x2003(n); % "x" é a           % Parâmetro para suavização exponencial.
amostra de entrada
9     atual. y = ss_expsmoo (x,alfa); % "y" é a amostra de saída atual. saída = [saída ,y];
10    % Acrescente "y" ao fluxo de saída. 12 fim; % Sinais de entrada e saída do gráfico. 14 clf;
11    15 plot([1:nsamp],x2003 ,[1:nsamp],output ); 16 eixos([1,252,7500,10500]);
13
```

Recursos de software:

matex_3_3.m

ss_expsmoo.m

MATLAB Exercício 3.4: Resolvendo iterativamente uma equação de

diferenças Foi mostrado na Seção 3.5 que uma maneira de resolver uma equação de diferenças é iterar por ela um índice de amostra por vez. Neste exercício, exploraremos esse conceito no MATLAB, usando a equação de diferenças para o problema de saldo do empréstimo apresentado no Exemplo 3.7.

Embora o problema específico em questão seja bastante simplista, ele nos ajudará a destacar alguns dos desafios encontrados na adaptação de um problema de interação sinal-sistema para codificação MATLAB, em particular com o esquema de indexação vetorial do MATLAB.

O sistema considerado aceita os dados de pagamento mensal $x[n]$ como entrada e produz um sinal de saída $y[n]$ que representa o saldo no final de cada mês. A equação de diferenças para o sistema foi dada pela Eqn. (3.15) e será repetido aqui:

$$\text{Eq. (3.15): } y[n] = (1 + c) y[n - 1] + x[n]$$

Deixe o valor emprestado ser \$ 10.000, que colocaremos em $y[0]$ como o valor inicial do sinal de saída. Suponhamos também que \$ 100 serão pagos a cada mês, começando no mês 1. Assim, o sinal de entrada seria

$$x[n] = 100 u[n \geq 1]$$

Usando uma taxa de juros mensal de 0,5%, significando $c = 0,5/100 = 0,005$, gostaríamos de calcular o sinal de saída para $n = 1, \dots, 18$. As declarações a seguir criam dois vetores "xvec" e "yvec":

```
>> xvec = [0, 100 * unidades(1,18)]; >> yvec =
[10000, zeros(1,18)];
```

O vetor de comprimento 19 "xvec" contém dados de pagamento. Seu primeiro elemento é zero e todos os outros elementos são iguais a 100. O vetor "yvec" contém amostras do sinal de saída. Seu primeiro elemento é inicializado em 10000, o valor do empréstimo, e os demais elementos são definidos como zero como espaços reservados a serem modificados posteriormente.

Uma das dificuldades encontradas na representação de sinais de tempo discreto com vetores é que os vetores MATLAB não possuem um elemento com índice 0; o primeiro elemento de um vetor sempre tem um índice de 1. Quando traduzimos a equação de diferenças do sistema em código, precisamos lembrar que

```
"xvec(1)" corresponde a x[0], "xvec(2)"  
corresponde a x[1],  
:  
"yvec(1)" corresponde a y[0], "yvec(2)"  
corresponde a y[1],  
:
```

e assim por diante. Felizmente, este não é um problema difícil de superar. O método que usaremos neste exercício não é o mais elegante, mas é aquele que nos manterá continuamente cientes das diferenças de indexação entre os vetores do MATLAB e nossos sinais. O script listado abaixo itera através da equação de diferença. Observe como a variável "offset" do MATLAB é usada na linha 9 para lidar com o problema de indexação.

```
1 % Script: matex_3_4a.m %
2
3 xvec = [0, 100 * unidades(1,18)]; % Vetor para manter o sinal de entrada. 4 yvec = [10000, zeros(1,18)];
% Vetor para manter o sinal de saída .
5 c = 0,005; 6 % Taxa de juro.
deslocamento = 1; % % Deslocamento para corrigir problemas de índice.
7 Inicie o loop para calcular o sinal de saída.
8 para n=1:18
9 yvec(offset+n)=(1+c)*yvec(offset+n-1)-xvec(offset+n); fim; % Exibe o sinal de saída. 12
10 tmp
11 = [[0:18]', yvec ']; 13 disp(tmp);
```

As duas últimas linhas

```
12 tmp = [[0:18]', yvec ']; 13 disp(tmp);
```

crie uma matriz “tmp” de 19 por 2 na qual a primeira coluna contém os índices de 0 a 19 e a segunda coluna contém as amplitudes de amostra correspondentes do sinal de saída. Uma exibição tabulada de melhor aparência dos resultados pode ser produzida com o uso da função `fprintf(..)`. O script modificado mostrado abaixo tabula os resultados de forma um pouco mais clara e também representa graficamente o sinal de saída $y[n]$.

```

1      % Script: matex_3_4b.m %
2
3 xvec = [0 ,100* unidades(1,18)]; % Vetor para manter o sinal de entrada. 4 yvec = [10000, zeros (1,18)]; %
Vetor para manter o sinal de saída.
5      c = 0,005; 6                                     % Taxa de juro.
deslocamento = 1; 7                                 % Offset para corrigir problemas de índice.
fprintf (1,'Índice Entrada Saída\n'); % Cabeçalho de impressão.
8      % Inicie o loop para calcular e imprimir o sinal de saída. 9 para n=1:18
10
11      yvec(offset+n)=(1+c)*yvec(offset+n-1)-xvec(offset+n); fprintf (1,'%5d %5.2f %5.2f\n',n,
xvec(offset+n),yvec(offset+n)); 12 fim; 13 % Faça um gráfico do sinal de saída. 14 haste([0:18],yvec);

```

Recursos de software:

matex 3 4a.m

matex 3 4b.m

MATLAB Exercício 3.5: Implementando um sistema de tempo discreto a partir de seu diagrama de blocos Neste exercício iremos implementar o sistema de tempo discreto para o qual um diagrama de blocos foi obtido no Exemplo 3.16, Fig. 3.24. Uma função MATLAB chamada “sys1” será desenvolvida com a sintaxe

`y = sys1(x)`

onde “ x ” representa a amostra de entrada atual e “ y ” é a amostra de saída atual. A função `sys1(..)` é usada em uma estrutura de loop para processar amostras de um fluxo de dados de entrada, uma amostra por vez.

Deixe as saídas $w[n \geq 1]$, $w[n \geq 2]$ e $w[n \geq 3]$ dos três elementos de atraso da esquerda para a direita serem representadas pelas variáveis MATLAB “wnm1”, “wnm2” e “wnm3” respectivamente.

Estas são as variáveis persistentes em `sys1(..)`. Quando a função é chamada pela primeira vez, os valores iniciais obtidos no Exemplo 3.16 são colocados nas variáveis persistentes. Uma listagem da função concluída `sys1(..)` é fornecida abaixo:

```

1 função y = sys1(x) persistente wnm1
2     wnm2 wnm3; se estiver vazio (wmn1) wnm1
3     = 1,0682; fim; se estiver
4         vazio (wmn2) wnm2 =           % Valor inicial w[-1]
5
6     1,7149; fim; se estiver vazio
7         (wmn3) wnm3 = 0,1674;       % Valor inicial w[-2]
8     fim;
9     wn = x+0,7* wnm1+0,8*wmn2
10    -0,84* wnm3; % Eq.           % Valor inicial w[-3]
11    (3.101)
12
13    0,1*wn+0,2*wmn1+0,3*wmn2; % Prepare-se para           % Eqn.(3.102) y =
14    a próxima chamada da função. wnm3 = wnm2; wnm2 = wnm1; wnm1 = wn;
15
16
17

```

O script listado abaixo pode ser usado para testar a função sys1(..) com um sinal de entrada de passo unitário e representar graficamente o sinal de saída resultante.

```

1 % Script: matex_3_5.m %
2
3 entrada = uns(1 ,50); 4 saída = []; 5 % Fluxo de dados de entrada.
4 sys1 claro; 6 nsamp = % Crie um fluxo de saída vazio.
5 comprimento(entrada); % Limpar variáveis persistentes.
6 Número de amostras no fluxo de entrada. 7 para n=1: nsamp x = input(n); % "x" é a amostra de entrada atual. y = sys1(x);
7 % "y" é a amostra de saída
8     atual. saída = [saída ,y]; % Acrescente "y" ao fluxo de saída. fim; % Faça um gráfico do sinal de
9     saída. clf; 14 haste([0:nsamp -1],saída); 15 title('O sinal de saída '); 16 xlabel('Índice n'); 17 ylabel('y[n]');
10
11
12
13

```

O gráfico produzido por este script é mostrado na Fig. 3.32. Compare-o com o resultado exibido no programa de demonstração interativo dgm demo1.m. –

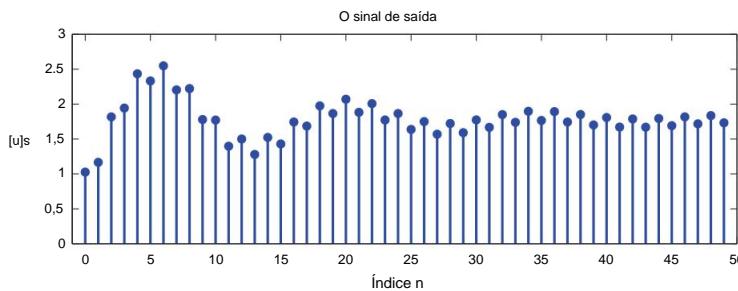


Figura 3.32 – Resposta degrau unitário do sistema em MATLAB Exercício 3.5.

Recursos de software:

matex 3.5.m

sys1.m

MATLAB Exercício 3.6: Sistema de tempo discreto do MATLAB Exercício 3.5 revisitado

Considere novamente o sistema que foi implementado no MATLAB Exercício 3.5. Neste exercício iremos implementar o mesmo sistema utilizando a função filter(..) que faz parte do MATLAB.

Lembre-se de que o sistema em questão foi introduzido no Exemplo 3.16. Sua equação de diferença é

$$y[n] = 0,7 y[n - 1] + 0,8 y[n - 2] + 0,84 y[n - 3] = 0,1 x[n] + 0,2 x[n - 1] + 0,3 x[n - 2]$$

A resposta em degrau unitário do sistema deve ser determinada sujeita às condições iniciais

$$y[0] = 0,5, \quad y[1] = 0,3, \quad y[2] = 0,4$$

A função filter(..) implementa a equação de diferenças

$$a0 y[n] + a1 y[n - 1] + \dots + aN y[n - N] + b0 x[n] + b1 x[n - 1] + \dots + bM x[n - M] =$$

$$(3.164)$$

usando uma implementação de forma direta II transposta que é diferente do diagrama de blocos usado no Exercício 3.5 do MATLAB. Tanto no Exemplo 3.16 quanto no Exercício 3.5 do MATLAB, convertemos os valores iniciais de saída $y[\ddot{y}1]$, $y[\ddot{y}2]$ e $y[\ddot{y}3]$ em valores $w[\ddot{y}1]$, $w[\ddot{y}2]$ e $w[\ddot{y}3]$ para o diagrama de blocos da Fig. 3.24. Esta etapa precisará ser revisada ao usar a função filter(...).

A sintaxe da função filter(..) é

$y = \text{filtro}(b, a, x, zi)$

Os significados dos parâmetros são explicados abaixo:

- “b”: Vetor de coeficientes feed-forward b0, b1,...,bM
 - “a”: Vetor de coeficientes de realimentação a0,
 - “x”: a1,...,aN Vetor contendo amostras do sinal de
 - “y”: entrada Vetor contendo amostras do sinal de saída
 - “zi”: Vetor contendo valores iniciais dos elementos de atraso para o diagrama de blocos transposto de forma direta II

O vetor "zi" é obtido a partir dos valores iniciais das amostras de entrada e saída através de uma chamada à função `filtic(..)`. O script listado abaixo calcula e representa graficamente o sinal de saída do sistema usando as duas funções do MATLAB mencionadas. Pode-se facilmente verificar que o sinal de saída obtido é idêntico ao do MATLAB Exercício 3.5.

```

1 % Roteiro: matex_3_6.m
2 %
3a = [1,-0.7,-0.8,0.84]; b = [0,1,0,2,0,3]; % Coeficientes de feedback.
4 % Coeficientes feed-forward, % y[-1], y[-2]
5 y_init = [0,5,0.3,-0.4]; x_init = [0,0,0,0]; % y[-3]. % x[-1], x[-2] e x[-3].
uns(1,50); 8 zi = filtic(b,a,y_init,x_init );
9 out = filtro(b,a,inp ,zi); 10 % Faça % Sinal de entrada de passo unitário.
um gráfico do sinal de saída. 11 clf; 12 haste([0:49],fora); 13
title('O sinal de saída'); 14 xlabel('Índice n'); 15
ylabel('y[n]');

```

Recursos de software:

matex 3 6.m

MATLAB Exercício 3.7: Convolução usando MATLAB

No Exemplo 3.19 discutimos a operação de convolução aplicada a dois sinais de comprimento finito, a saber

$$h[n] = \{ 4, 3, 2, 1 \}$$

y n=0

e

$$x[n] = \{ \dots, 3, 7, 4, \dots \}$$

O MATLAB tem uma função `conv(..)` muito conveniente para executar a operação de convolução em dois vetores que contêm amostras dos sinais $h[n]$ e $x[n]$. O seguinte conjunto de declarações

crie dois vetores "h" e "x" correspondentes aos sinais que estamos considerando e calcule sua convolução:

```
>> h = [4,3,2,1]; >> x =
[-3,7,4]; >> y = conv(h,x)
```

$y =$	-12	19	31	23	15	4
-------	-----	----	----	----	----	---

O operador de convolução é comutativo, ou seja, os papéis de $h[n]$ e $x[n]$ podem ser invertidos sem nenhum efeito no resultado. Portanto, a declaração

```
>> y = conv(x,h)
```

produz exatamente o mesmo resultado.

O vetor MATLAB "y" produzido pela função `conv(..)` começa com o índice 1, uma característica de todos os vetores MATLAB. Consequentemente, uma tentativa de representá-lo graficamente com uma declaração como

```
>> haste(y);
```

resulta no gráfico de haste mostrado na Fig. 3.33.

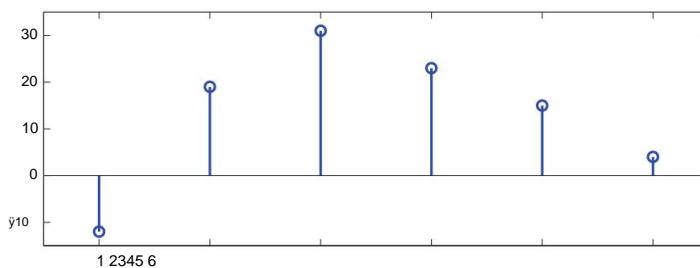


Figura 3.33 – Gráfico do resultado da convolução com índices errados.

Um gráfico de haste corretamente indexado pode ser obtido pelas declarações

```
>> n = [0:5]; >>
haste(n,y);
```

e é mostrado na Fig. 3.34.

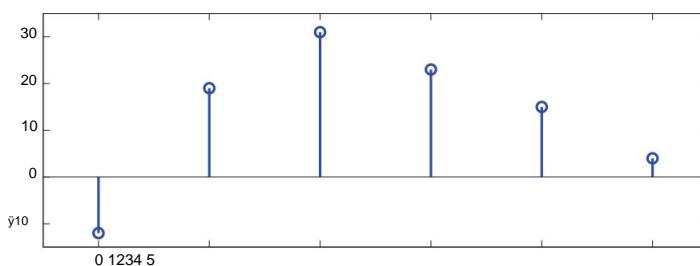


Figura 3.34 – O gráfico com os índices corrigidos.

E se os índices iniciais dos dois sinais $h[n]$ e $x[n]$ não estiverem em $n = 0$, mas forem especificados como valores arbitrários Nh e Nx , respectivamente? (Veja o Exemplo 3.20.) Poderíamos simplesmente ajustar o vetor “n” para acomodar a mudança. Em vez disso, usaremos isso como uma oportunidade para desenvolver uma função wrapper que utiliza a função interna `conv(..)` do MATLAB, mas também automatiza o processo de geração do vetor de índice “n” apropriado para acompanhá-la. A listagem para a função `ss_conv(..)` é dada abaixo:

```

1 função [y,n] = ss_conv (h,x,Nh,Nx) y = conv(h,x);
2
3 Ny = comprimento(y); % Número de amostras em y[n].
4 nprimeiro = Nh+Nx; % Índice correto para a primeira amostra % no vetor "y". último
5 = nprimeiro +Ny -1; % Índice
6 correto para a última amostra % no vetor "y".
7 % no vetor "y".
8 n = [nprimeiro:núltimo];

```

Os parâmetros “Nh” e “Nx” são os índices corretos que devem ser associados às primeiras amostras dos vetores “h” e “x” respectivamente. Exemplo de uso da função `ss_conv(..)` é dado abaixo:

```
>> [y,n] = ss_conv (h,x,5,7) >> haste(n,y);
```

Recursos de software:

`matex 3_7.m`

`ss_conv.m`

Exercício 3.8 do MATLAB: Implementando um filtro de média móvel por convolução

Considere novamente o problema de aplicar um filtro de média móvel a um sinal com o objetivo de produzir uma versão mais suave dele na saída do filtro. Suponha que o sinal $x[n]$ contenha amostras dos dados da média industrial Dow Jones para o ano civil de 2003 e gostaríamos de aplicar um filtro de média móvel de comprimento 50 a ele. Embora seja possível escrever uma função para implementar um filtro de média móvel de comprimento 50 de maneira semelhante ao desenvolvimento das funções `ss_movavg2(..)` e `ss_movavg4(..)` no Exercício 3.1 do MATLAB, isso seria muito impraticável devido ao fato de que precisamos realizar a contabilidade em 49 amostras de entrada anteriores a qualquer momento. Em vez disso, resolveremos o problema usando convolução.

A resposta ao impulso do filtro de média móvel de comprimento 50 é

$$\begin{aligned} h[n] &= \frac{1}{50} (u[n] - u[n - 50]) \\ &= \begin{cases} 1/50, & 0 \leq n \leq 49 \\ , & \text{caso contrário} \end{cases} \end{aligned}$$

que pode ser representado com um vetor MATLAB obtido com a instrução

```
>> h = 1/50* uns(1,50);
```

O conjunto de instruções a seguir carrega o arquivo de dados MATLAB “djia.mat” na memória e lista o conteúdo do espaço de trabalho MATLAB até o momento.

```
>> carregar 'djia.mat';
>> quem é
```

Nome	Tamanho	Classe de bytes	Atributos
h	1x50	400 duplo	
x2001	1x248	1984 duplo	2016 duplo
x2002	1x252		
x2003	1x252	2016 duplo	

Estamos assumindo que iniciamos uma nova sessão para este exercício; caso contrário, pode haver variáveis adicionais listadas acima. Os dados do ano civil estão no vetor “x2003” e possuem 252 amostras. Assim, temos um sinal de entrada $x[n]$ para $n = 0, \dots, 251$. Sua convolução com a resposta ao impulso no vetor “h” pode ser obtida com as declarações

```
>> x = x2003; >> y2003 =
conv(h,x);
```

Há um problema prático com esse resultado. Lembre-se da discussão no Exemplo 3.3 sobre observar o sinal de entrada através de uma janela que contém tantas amostras quanto o comprimento do filtro e calcular a média do conteúdo da janela para obter o sinal de saída. Para as primeiras 49 amostras do sinal de saída, a janela está apenas parcialmente cheia. (Consulte a Fig. 3.6.) No cálculo de $y[0]$, a única amostra significativa na janela é $x[0]$, e todas as amostras à esquerda dela têm valor zero. A próxima amostra de saída $y[1]$ será baseada na média de duas amostras significativas $x[1]$ e $x[0]$ juntamente com 48 amostras de amplitude zero e assim por diante. Como resultado, a primeira amostra significativa do sinal de saída (significativa no sentido de uma média móvel) ocorrerá no índice $n = 49$ quando, pela primeira vez, a janela estiver cheia.

Para contornar esse problema e obter valores significativos de média móvel para todos os dados de 2003, precederemos o sinal $x[n]$ com um conjunto adicional de 49 amostras emprestadas da última parte dos dados para o ano civil de 2002. A instrução MATLAB a seguir realiza que:

```
>> x = [x2002 (204:252) ,x2003];
```

O vetor resultante “x” representa o sinal $x[n]$ que começa com o índice $n = \hat{y}49$. Agora podemos convoluir esse sinal com a resposta ao impulso do filtro de média móvel de comprimento 50 para obter o sinal de saída $y[n]$, que também começará no índice $n = \hat{y}49$. A declaração

```
>> y = conv(h,x);
```

produz um vetor “y” com 350 elementos. Seus primeiros 49 elementos correspondem às amostras de sinal $y[\hat{y}49]$ a $y[\hat{y}1]$ e representam médias calculadas com dados incompletos devido a slots vazios no lado esquerdo da janela. Além disso, os últimos 49 elementos do vetor “y” correspondentes às amostras de sinal $y[252]$ a $y[300]$ também representam médias calculadas com dados incompletos, neste caso com slots vazios aparecendo no lado direito da janela. Obteremos os dados suavizados para o intervalo de índice $n = 0, \dots, 251$ descartando a primeira e as últimas 49 amostras do vetor “y”.

```
>> y = y(50:301); >>
plot([0:251],x2003,:,[0:251],y,:');
```

O gráfico resultante é mostrado na Fig. 3.35.

Recursos de software:
matex 3.8.m

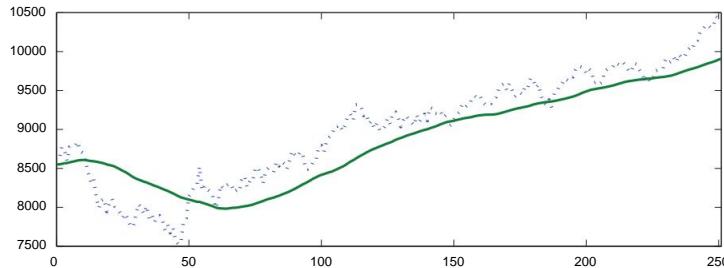


Figura 3.35 – Sinais de entrada e saída do filtro de média móvel de comprimento 50.

problemas

3.1. Vários sistemas de tempo discreto são especificados abaixo em termos de suas relações de entrada-saída. Para cada caso determine se o sistema é linear e/ou invariante no tempo.

a. $y[n] = x[n] u[n]$

b. $y[n] = 3x[n] + 5$

c. $y[n] = 3x[n] + 5u[n]$

d. $y[n] = nx[n]$

e. $y[n] = \cos(0.2\pi n)x[n]$

f. $y[n] = x[n] + 3x[n - 1]$

g. $y[n] = x[n] + 3x[n - 1]x[n - 2]$

g.

3.2. Vários sistemas de tempo discreto são descritos abaixo. Para cada caso determine se o sistema é linear e/ou invariante no tempo.

a. $s[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$

$k=\bar{y}$

n

b. $s[n] = \sum_{k=0}^n x[k]$

$k=0$

n

c. $s[n] = \sum_{k=n-2}^{n+2} x[k]$

$k=n-2$

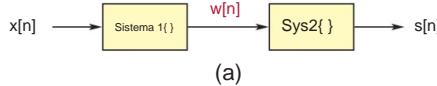
n

d. $s[n] = \sum_{k=n-2}^{n+2} x[k]$

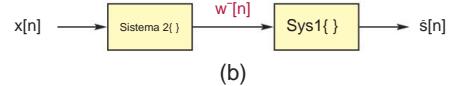
$k=n-2$

n

3.3. Considere a combinação em cascata de dois sistemas mostrada na Fig. P.3.3(a).



(a)



(b)

Figura P. 3.3

a. Sejam as relações de entrada-saída dos dois subsistemas dadas como

$$\text{Sys1 } \{x[n]\} = 3x[n] \text{ e } \text{Sys2 } \{w[n]\} = w[n - 2]$$

Escreva a relação entre $x[n]$ e $y[n]$.

b. Deixe a ordem dos dois subsistemas ser alterada conforme mostrado na Fig. P.3.3(b). Escreva a relação entre $x[n]$ e $\tilde{y}[n]$. Alterar a ordem de dois subsistemas altera a relação geral de entrada-saída do sistema?

3.4. Repita o Problema 3.3 com os seguintes conjuntos de subsistemas:

- a. Sys1 $\{x[n]\} = \{3[n]\}$ e Sys2 $\{w[n]\} = \{nw[n]\}$ b. Sys1 $\{x[n]\} = \{x[n]\}$
 $x[n]$ e Sys2 $\{w[n]\} = \{w[n] + 5\}$

3.5. A resposta de um sistema linear e invariante no tempo ao sinal de entrada $x[n] = \tilde{y}[n]$ é dada por

$$\text{Sys } \{\tilde{y}[n]\} = \{ 2, 1, \tilde{y}_1 \}_{\tilde{y} n=0}$$

Determine a resposta do sistema aos seguintes sinais de entrada:

- a. $x[n] = \tilde{y}[n] + \tilde{y}[n-1]$ b.
 $x[n] = \tilde{y}[n] - 2\tilde{y}[n-1] + \tilde{y}[n-2]$
c. $x[n] = u[n] - u[n-5]$ d.
 $x[n] = n(u[n] - u[n-5])$

3.6. Considere um sistema conhecido por ser linear, mas não necessariamente invariante no tempo. Suas respostas a três sinais de impulso são dadas abaixo:

$$\begin{aligned} \text{Sis } \{\tilde{y}[n]\} &= \{ 1, 2, 3 \}_{\tilde{y} n=0} \\ \text{Sys } \{\tilde{y}[n-1]\} &= \{ 3, 2, 1 \}_{\tilde{y} n=1} \\ \text{Sys } \{\tilde{y}[n-2]\} &= \{ 3, 1, 2 \}_{\tilde{y} n=2} \end{aligned}$$

Para cada um dos sinais de entrada listados abaixo, indique se a resposta do sistema pode ser determinada a partir das informações fornecidas. Se a resposta puder ser determinada, encontre-a. Se não, explique por que isso não pode ser feito.

- a. $x[n]=5$ b. $x[n]=3$
 $\tilde{y}[n]+2\tilde{y}[n-1]x[n]=\tilde{y}[n]-2\tilde{y}[n]$
c. $-1+4\tilde{y}[n-2]$ d. $x[n]=u[n]-u[n-3]x[n]$
 $=u[n]-u[n-4]$
e.

3.7. O sinal de tempo discreto

$$x[n] = \{ 1, 7, 2, 3, 3, 1, 3, 3, 3, 7, 2, 9, 2, 2, 1, 4, 0, 6, \dots, 0, 2, 0, 4 \}_{n=0}$$

é usado como entrada para um filtro de média móvel de comprimento 2. Determine a resposta $y[n]$ para $n = 0, \dots, 9$. Use $x[\tilde{y}1] = 0$.

3.8. Considere novamente o sinal $x[n]$ especificado no Problema 3.7. Se for aplicado a um filtro de média móvel de comprimento 4, determine o sinal de saída $y[n]$ para $n = 0, \dots, 9$. Use $x[\tilde{y}1] = x[\tilde{y}2] = x[\tilde{y}3] = 0$.

3.9. O sinal $x[n]$ especificado no Problema 3.7 é usado como entrada para um suavizador exponencial com $\gamma = 0,2$. O valor inicial do sinal de saída é $y[\tilde{y}1] = 1$. Determine $y[n]$ para $n = 0, \dots, 9$.

3.10. Considere o modelo de equação de diferença para o sistema de pagamento de empréstimo explorado no Exemplo 3.7. O saldo no final do mês-n é dado por

$$y[n] = (1 + c) y[n - 1] + x[n]$$

onde c é a taxa de juros mensal e $x[n]$ representa o pagamento feito no mês-n. Suponha que o valor emprestado seja \$ 10.000 a ser pago à taxa de \$ 250 por mês e com uma taxa de juros mensal de 0,5%, ou seja, $c = 0,005$. Determine o saldo mensal para $n = 1, \dots, 12$ resolvendo iterativamente a equação de diferenças.

Dica: Comece com o saldo inicial de $y[0] = 10000$ e modele os pagamentos com o sinal de entrada

$$x[n] = 250 u[n - 1]$$

3.11. Consulte o Exemplo 3.9, no qual uma equação de diferença não linear foi encontrada para calcular a raiz de uma função. A ideia foi adaptada ao cálculo da raiz quadrada de um número positivo A , procurando a raiz da função

$$f(w) = w^2 - A$$

Resolvendo iterativamente a equação de diferenças dada pela Eqn. (3.25), aproxime a raiz quadrada de

- a. $A = 5$ b. $A = 17$
c. $A = 132$

Em cada caso, execute as iterações até que o resultado seja preciso até o quarto dígito após o ponto decimal.

3.12. Para cada equação de diferença homogênea dada abaixo, encontre a equação característica e mostre que ela só tem raízes reais simples. Encontre a solução homogênea para $n \geq 0$ em cada caso sujeito às condições iniciais especificadas.

Dica: Para a parte (e), use a função roots(..) do MATLAB para encontrar as raízes do polinômio característico.

- a. $y[n] + 0,2 y[n - 1] - 0,63 y[n - 2] = 0$, $y[y_1] = 5$, $y[y_2] = -3$ b. $y[n] + 1,3 y[n - 1] + 0,4 y[n - 2] = 0$, $y[y_1] = 0$, $y[y_2] = 5 y[n] - 1,7 y[n - 1] + 0,72 y[n - 2] = 0$, $y[y_1] = 1$,
c. $y[y_2] = 2 y[n] - 0,49 y[n - 2] = 0$, $y[y_1] = -3$, $y[y_2] = -1$ de $y[n] + 0,6 y[n - 1] - 0,51 y[n - 2] - 0,28 y[n - 3] = 0$ $y[y_1] = 3$, $y[y_2] = 2$, $y[y_3] = 1$

3.13. Para cada equação de diferença homogênea dada abaixo, encontre a equação característica e mostre que pelo menos algumas de suas raízes são complexas. Encontre a solução homogênea para $n \geq 0$ em cada caso sujeito às condições iniciais especificadas.

Dica: Para a parte (d), use a função Roots(..) do MATLAB para encontrar as raízes do polinômio característico.

- a. $y[n] - 1,4 y[n - 1] + 0,85 y[n - 2] = 0$, $y[y_1] = 2$, $y[y_2] = -2 y[n] + 1,6 y[n - 1]$
b. $+ y[n - 2] = 0$, $y[y_1] = 0$, $y[y_2] = 3 y[n] + y[n - 2] = 0$, $y[y_1] = 3$, $y[y_2] = 2$
c. $= 2 d. y[n] - 2,5 y[n - 1] + 2,44 y[n - 2] - 0,9 y[n - 3] = 0$ $y[y_1] = 1$, $y[y_2] = 2$, $y[y_3] = 3$

3.14. Para cada equação de diferença homogênea dada abaixo, encontre a equação característica e mostre que ela tem raízes de ordem múltipla. Encontre a solução homogênea para $n \geq 0$ em cada caso sujeito às condições iniciais especificadas.

Dica: Para as partes (c) e (d) use a função Roots(..) do MATLAB para encontrar as raízes do polinômio característico.

- $y[n] - 1,4y[n-1] + 0,49y[n-2] = 0, y[y_1] = 1, y[y_2] = 1$ b. $y[n]+1,8y[n-1] + 0,81y[n-2] = 0, y[y_1] = 0, y[y_2] = 2$
- $y[n-1] = 0, y[y_1] = 1, y[y_2] = 2$ c. $y[n-3] = 0, y[y_1] = 1, y[y_2] = 1, y[y_3] = 2$ d. $y[n]+1,7y[n-1]+0,4y[n-2]+0,3y[n-3] = 0, y[y_1] = 1, y[y_2] = 2, y[y_3] = 1$

3.15. Resolva cada equação de diferença fornecida abaixo para o sinal de entrada especificado e as condições iniciais. Use a técnica de solução geral descrita na Seção 3.5.2.

- $y[n]=0,6y[n-1]+x[n], x[n]=u[n], y[y_1]=2$ b. $y[n]=0,8y[n-1]+x[n], x[n]=2\sin(0,2n), y[y_1]=1$
- $y[n-1]=0,2y[n-1]+0,63y[n-2]=x[n], x[n]=u[n], y[y_1]=0,63y[n-2]$
- $e^{j0,2n}, y[y_1]=0, y[y_2]=3$ d. $y[n]+1,4y[n-1]+0,85y[n-2]=x[n], x[n]=u[n], y[y_1]=y_2, y[y_2]=0$
- $y[n]+1,6y[n-1]+0,64y[n-2]=x[n], x[n]=u[n], y[y_1]=0, y[y_2]=1$

3.16. Considere o suavizador exponencial explorado nos Exemplos 3.6 e 3.14. É modelado com a equação de diferença

$$y[n] = (1 - \alpha) y[n-1] + \alpha x[n]$$

Seja $y[y_1] = 0$ de modo que o sistema seja linear.

- Seja o sinal de entrada um degrau unitário, ou seja, $x[n] = u[n]$. Determine a resposta de α exponencial linear mais suave em função de α .
- Seja o sinal de entrada uma rampa unitária, ou seja, $x[n] = nu[n]$. Determine a resposta de α exponencial linear mais suave em função de α .

3.17. Considere uma equação diferencial de primeira ordem na forma

$$\frac{dia(t)}{dt} + A ya(t) = A xa(t) dt$$

A derivada pode ser aproximada usando a diferença inversa

$$\frac{dia(t)}{dt} \approx \frac{sim(t) - sim(t - T)}{T}$$

onde T é o tamanho do passo.

- Usando a aproximação para a derivada na equação diferencial, expresse $ya(t)$ em termos de $ya(t - T)$ e $xa(t)$.
- Converta a equação diferencial em uma equação de diferenças definindo tempo discreto sinais

$$\begin{aligned} x[n] &= xa(nT) \\ y[n] &= ya(nT) \\ y[n-1] &= ya(nT - T) \end{aligned}$$

Mostre que a equação de diferenças resultante corresponde a um suavizador exponencial. Determine seu parâmetro α em termos de A e T .

3.18. Construa um diagrama de blocos para cada equação de diferença dada abaixo.

- $y[n] + 0,2 y[n - 1] - 0,63 y[n - 2] = x[n] + x[n - 2]$
- $y[n] - 2,5 y[n - 1] + 2,44 y[n - 2] - 0,9 y[n - 3] = x[n] - 3 x[n - 1] + 2 x[n - 2] \quad y[n] - 0,49 y[n - 2] = x[n] -$
- $x[n - 1]$
- $y[n] + 0,6 y[n - 1] - 0,51 y[n - 2] + 0,28 y[n - 3] = x[n] - 2 x[n - 2]$

3.19. Dois sistemas DTLTI com respostas de impulso $h_1[n]$ e $h_2[n]$ são conectados em cascata, conforme mostrado na Fig. P.3.19(a).

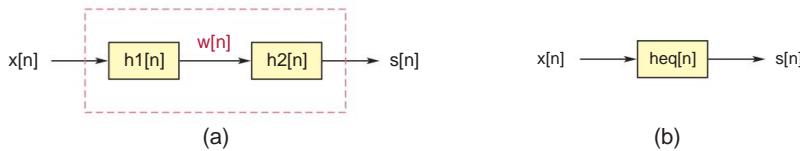


Figura P. 3.19

- a. Determine a resposta ao impulso $heq[n]$ do sistema equivalente, conforme mostrado na Fig. P.3.19(b) em termos de $h_1[n]$ e $h_2[n]$.

Dica: use a convolução para expressar $w[n]$ em termos de $x[n]$. Depois, use a convolução novamente para expressar $y[n]$ em termos

- de $w[n]$.
- Seja $h_1[n] = h_2[n] = u[n] - u[n - 5]$. Determine e esboce $heq[n]$ para o equivalente sistema.
- Com $h_1[n]$ e $h_2[n]$ conforme especificado na parte (b), considere o sinal de entrada um degrau unitário, ou seja, $x[n] = u[n]$. Determine e esboce os sinais $w[n]$ e $y[n]$.

3.20. Dois sistemas DTLTI com respostas de impulso $h_1[n]$ e $h_2[n]$ são conectados em paralelo, conforme mostrado na Fig. P.3.20(a).

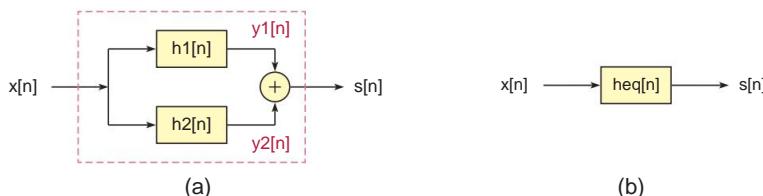


Figura P. 3.20

- a. Determine a resposta ao impulso $heq[n]$ do sistema equivalente, conforme mostrado na Fig. P.3.20(b) em termos de $h_1[n]$ e $h_2[n]$.

Dica: use a convolução para expressar os sinais $y_1[n]$ e $y_2[n]$ em termos de $x[n]$. Em seguida, expresse $y[n]$ em termos de $y_1[n]$ e $y_2[n]$.

- Seja $h_1[n] = (0,9)n u[n]$ e $h_2[n] = (-0,7)n u[n]$. Determine e esboce $heq[n]$ para o sistema equivalente.
- Com $h_1[n]$ e $h_2[n]$ conforme especificado na parte (b), considere o sinal de entrada um degrau unitário, ou seja, $x[n] = u[n]$. Determine e esboce os sinais $y_1[n]$, $y_2[n]$ e $y[n]$.

3.21. Três sistemas DTLTI com respostas de impulso $h_1[n]$, $h_2[n]$ e $h_3[n]$ são conectados como mostrado na Fig. P.3.21(a).

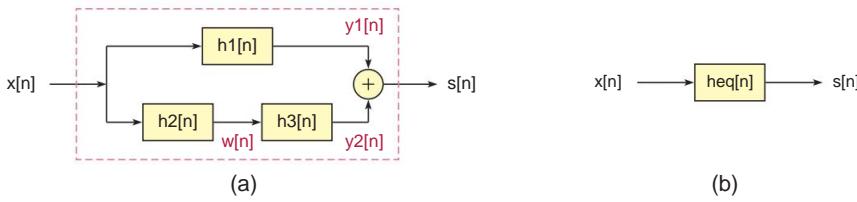


Figura P. 3.21

- a. Determine a resposta ao impulso $h_{eq}[n]$ do sistema equivalente, conforme mostrado na Fig. P.3.21(b) em termos de $h1[n]$, $h2[n]$ e $h3[n]$.

b. Seja $h1[n] = e^{-0.1n} u[n]$, $h2[n] = \delta[n - 2]$ e $h3[n] = e^{-0.2n} u[n]$. Determine e esboce $h_{eq}[n]$ para o sistema equivalente.

c. Com $h1[n]$, $h2[n]$ e $h3[n]$ conforme especificado na parte (b), considere o sinal de entrada um degrau unitário, ou seja, $x[n] = u[n]$. Determine e esboce os sinais $w[n]$, $y1[n]$, $y2[n]$ e $y[n]$.

3.22. Considere o sistema DTLTI mostrado na Fig. P.3.22(a).

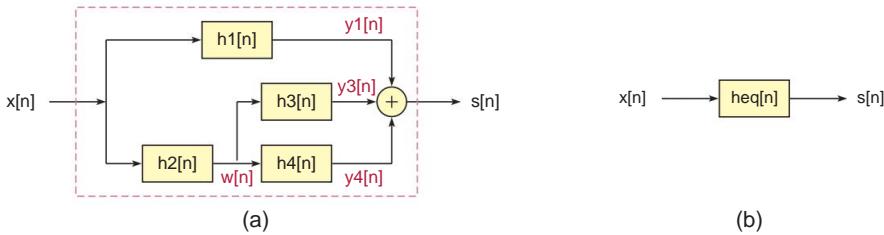


Figura P. 3.22

- a. Expresse a resposta ao impulso do sistema como uma função das respostas ao impulso de os subsistemas.
 - b. Deixar

$$h_1[n] = e^{-0.1n} u[n]$$

$$h_2[n] = h_3[n] = u[n] - u[n-3]$$

e

$$h_4[n] = y[n - 2]$$

Determine a resposta ao impulso $heq[n]$ do sistema equivalente. c.

Seja o sinal de entrada um degrau unitário, ou seja, $x[n] = u[n]$. Determine e esboce os sinais $w[n]$, $y_1[n]$, $y_3[n]$ e $y_4[n]$.

3.23. Considere dois sinais de comprimento finito $x[n]$ e $h[n]$ que são iguais a zero fora dos intervalos indicados abaixo:

$$x[n] = 0 \text{ se } n < Nx1 \text{ ou } n > Nx2$$

$$h[n] = 0 \text{ se } n < Nh1 \text{ ou } n > Nh2$$

Em outras palavras, amostras significativas de $x[n]$ estão na faixa de índice $Nx1, \dots, Nx2$, e as amostras significativas de $h[n]$ estão na faixa de índice $Nh1, \dots, Nh2$.

Seja $y[n]$ a convolução de $x[n]$ e $h[n]$. Começando com a soma da convolução dada pela Eqn. (3.128), determine a faixa de índice de amostras significativas Ny_1, \dots, Ny_2 para $y[n]$.

3.24. Seja $y[n]$ a convolução de dois sinais de tempo discreto $x[n]$ e $h[n]$, ou seja

$$y[n] = x[n] \circledast h[n]$$

Mostre que o deslocamento temporal de $x[n]$ ou $h[n]$ por m amostras faz com que $y[n]$ também seja deslocado no tempo por m amostras. Prove matematicamente que

$$x[n \pm m] \circledast h[n] = y[n \pm m]$$

e

$$x[n] \circledast h[n \pm m] = y[n \pm m]$$

3.25. Determine a resposta ao impulso de cada sistema descrito abaixo. Em seguida, determine se o sistema é causal e/ou estável.

a. $y[n] = \text{Sistema } \{x[n]\} = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$

b. $y[n] = \text{Sistema } \{x[n]\} = \sum_{k=-\infty}^n e^{j0.1(n-k)} x[k]$

c. $y[n] = \text{Sistema } \{x[n]\} = \sum_{k=0}^n x[k] \quad \text{para } n \geq 0$

d. $y[n] = \text{Sistema } \{x[n]\} = \sum_{k=n-10}^{n+10} x[k]$

e. $y[n] = \text{Sistema } \{x[n]\} = \sum_{k=n-10}^n x[k]$

Problemas MATLAB

3.26. Consulte as equações de diferenças homogêneas no Problema 3.12. Para cada um, desenvolva um script MATLAB para resolvê-lo iterativamente para $n = 0, \dots, 19$ usando as condições iniciais especificadas. Compare os resultados das soluções iterativas com os resultados obtidos analiticamente no Problema 3.12.

3.27. Consulte o Problema 3.3. A combinação em cascata dos dois subsistemas será testada usando o sinal de entrada

$$x[n] = (0.95)^n \cos(0.1jn) u[n]$$

Escreva um script para fazer o seguinte:

- a. Crie uma função anônima anônima "x" para calcular o sinal de entrada em todos os valores de índice especificados em um vetor "n". b. Implemente o sistema em cascata conforme mostrado na Fig. P.3.3(a). Calcule os sinais $w[n]$ e $y[n]$ para $n = 0, \dots, 29$.
- c. Implemente o sistema em cascata na forma alternativa mostrada na Fig. P.3.3(b). Calcule os sinais $\bar{w}[n]$ e $\bar{y}[n]$ para $n = 0, \dots, 29$.
- Compare $y[n]$ e $\bar{y}[n]$.

3.28. Repita as etapas do Problema 3.27 usando os subsistemas descritos no Problema 3.4.

3.29. Consulte o Problema 3.1. A linearidade e a invariância temporal dos sistemas listados serão testadas usando os dois sinais de entrada

$$x1[n] = n e^{0.2n} (u[n] \leq u[n \leq 20]);$$

e

$$x2[n] = \cos(0.05\pi n) (u[n] \leq u[n \leq 20]);$$

Desenvolva um script para fazer o seguinte:

a. Expresse os dois sinais de entrada por meio de duas funções anônimas “x1” e “x2”.

Cada função anônima deve receber um único argumento “n” que pode ser um escalar ou um vetor de valores de índice.

b. Expresse cada um dos sistemas descritos no Problema 3.1 como uma função anônima. Nomeie as funções anônimas de “sys1” a “sys5”. Cada um deve receber dois argumentos “n” e “x”.

c. Calcule a resposta de cada sistema a

$$\begin{aligned} x[n] &= x1[n] \\ x[n] &= x2[n] \\ x[n] &= x1[n] + x2[n] \\ x[n] &= 5x1[n] + 3x2[n] \end{aligned}$$

Identifique quais sistemas falham no teste de linearidade.

d. Calcule a resposta de cada sistema a

$$\begin{aligned} x[n] &= x1[n - 1] \\ x[n] &= x2[n - 3] \end{aligned}$$

Identifique quais sistemas falham no teste de invariância de tempo.

3.30.

a. Desenvolva uma função ss_lbal(..) para resolver iterativamente a equação da diferença do saldo do empréstimo explorado no Problema 3.10. Deverá ter a seguinte interface:

$$bal = ss_lbal(A, B, c, n)$$

Os argumentos são:

A : Valor do empréstimo; este também é o saldo em $n = 0$

B : Valor do pagamento mensal c :

Taxa de juros mensal n : Índice

do mês em que o saldo é solicitado

bal : Saldo calculado após n meses

b. Escreva um script para testar a função com os valores especificados no Problema 3.10.

3.31. Consulte o Problema 3.11.

a. Desenvolva uma função MATLAB ss_sqrt(..) que resolva iterativamente a equação de diferenças não linear dada por Eqn. (3.25) para aproximar a raiz quadrada de um positivo

número A. A sintaxe da função deve ser

$$y = ss_sqrt(A, y_{init}, tol)$$

O argumento “A” representa o número positivo cuja raiz quadrada está sendo procurada, “y init” é o valor inicial $y[n]$ e “tol” é o limite de tolerância \hat{y} . A função deve retornar quando a diferença entre duas amostras de saída consecutivas for menor que o limite de tolerância, ou seja,

$$|y[n] - y[n - 1]| \leq \hat{y}$$

- b. Escreva um script para testar a função `ss_sqrt(..)` com os valores $A = 5$, $A = 17$ e $A = 132$.

3.32. Consulte o Problema 3.16, no qual a resposta do suavizador exponencial linear aos sinais de degrau unitário e rampa unitária foi encontrada como funções do parâmetro \hat{y} . Considere o sinal de entrada mostrado na Fig. P.3.32.

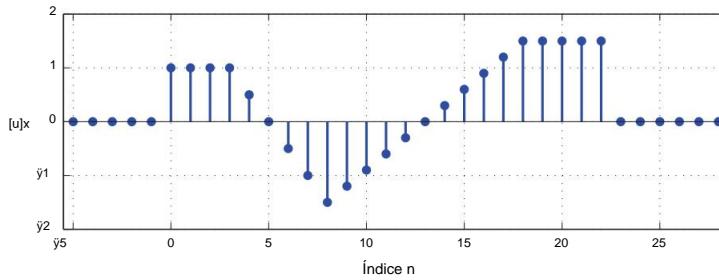


Figura P. 3.32

Desenvolva um script para fazer o seguinte:

- a. Crie uma função anônima $yu(..)$ para calcular a resposta em degrau unitário do suavizador exponencial linear. Ele deve receber dois argumentos, “alfa” e “n”, e deve retornar a resposta de degrau unitário avaliada em cada índice no vetor “n”. b. Crie uma função anônima $yr(..)$ para calcular a resposta de rampa unitária do suavizador exponencial linear. Assim como a função $yu(..)$, a função $yr(..)$ também deve receber dois argumentos, “alpha” e “n”, e deve retornar a resposta de rampa unitária avaliada em cada índice no vetor “n”.
- c. Expressa o sinal de entrada $x[n]$ usando uma combinação de funções de passo unitário e rampa unitária escalonadas e deslocadas no tempo. d. Use as funções anônimas $yu(..)$ e $yr(..)$ para calcular e representar graficamente a saída sinal $s[n]$. Tente com $\hat{y} = 0,1, 0,2, 0,3$ e compare.

Projetos MATLAB

3.33. Considere o modelo de crescimento logístico explorado no Exemplo 3.8. O valor normalizado da população no índice n é modelado usando a equação de diferença não linear

$$y[n] = r(1 - y[n - 1])y[n - 1]$$

onde r é a taxa de crescimento. Este é um exemplo de um sistema caótico. Nossa objetivo neste projeto é simular o comportamento de um sistema modelado pela equação de diferenças não linear dada, e determinar a dependência do crescimento populacional do valor inicial $y[0]$ e da taxa de crescimento r .

- a. Desenvolva uma função chamada `ss_lgrowth(..)` com a sintaxe

$$y = ss_lgrowth(y_init, r, N)$$

onde “ y init” é o valor inicial da população em $n = 0$, “ r ” é a taxa de crescimento e “ N ” é o número de iterações a serem realizadas. O vetor retornado pela função deve ter os valores

$$[y[0], y[1], y[2], \dots, y[N]]$$

1. Escreva um script para calcular $y[n]$ para $n = 1, \dots, 30$ com valores especificados $y[0]$ e r .
2. Com a taxa de crescimento definida em $r = 1,5$, calcule e faça o gráfico $y[n]$ para os casos de $y[0] = 0,1$, $y[0] = 0,3$, $y[0] = 0,5$, $y[0] = 0,7$. A população atinge o equilíbrio? Comente a dependência da população em equilíbrio com o valor inicial $y[0]$.
3. Repita o experimento com $r = 2, 2,5, 2,75, 3$. Para cada valor de r , calcule e faça o gráfico $y[n]$ para os casos de $y[0] = 0,1$, $y[0] = 0,3$, $y[0] = 0,5$, $y[0] = 0,7$. A população ainda atinge o equilíbrio? Você deve descobrir que, além de um certo valor de r , o comportamento da população deve se tornar oscilatório. Qual é o valor crítico de r ?

- 3.34.** Considere a equação de diferenças homogêneas de segunda ordem

$$y[n] + a1 y[n - 1] + a2 y[n - 2] = 0$$

com condições iniciais $y[y1] = p1$ e $y[y2] = p2$. Os coeficientes $a1$ e $a2$ da equação de diferenças e os valores iniciais $p1$ e $p2$ são todos reais e serão deixados como parâmetros.

- a. Sejam $z1$ e $z2$ as raízes do polinômio característico. No papel, resolva a equação de diferenças homogêneas para as três possibilidades para as raízes:
1. As raízes são reais e distintas.
 2. As raízes são um par conjugado complexo.
 3. As duas raízes são reais e iguais.

Encontre a solução $y[n]$ em função das raízes $z1$ e $z2$, bem como dos valores iniciais $p1$ e $p2$.

- b. Desenvolva uma função MATLAB `ss_de2solve(..)` com a sintaxe

$$y = ss_de2solve(a1, a2, p1, p2, n)$$

O vetor “ n ” contém os valores de índice para os quais a solução deve ser calculada.

O vetor retornado “ y ” contém a solução nos valores de índice no vetor “ n ” para que a solução possa ser representada graficamente com

$$haste(n, y)$$

Sua função deve executar as seguintes etapas:

1. Forme o polinômio característico e encontre suas raízes.
2. Determine em qual das três categorias as raízes se encaixam (raízes reais simples, par complexo conjugado ou raízes múltiplas).
3. Calcule a solução de acordo.

- c. Teste a função `ss_de2solve(..)` com as equações de diferenças homogêneas em Prob Temas 3.12a, b, c, d, Problemas 3.13a, b, c e Problema 3.14a e b.

3.35. Um método de aproximar numericamente a integral de uma função é o método de integração trapezoidal. Considere a função $xa(t)$ conforme mostrado na Fig. P.3.35.

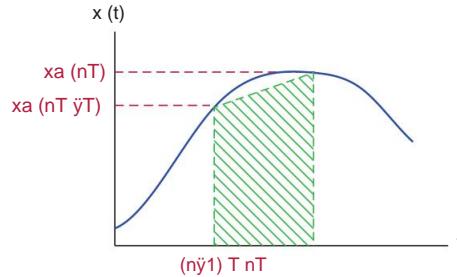


Figura P. 3.35

A área sob a função de $t = (n - 1)T$ até $t = nT$ pode ser aproximada com a área do trapézio sombreado:

$$\int_{(n-1)T}^{nT} xa(t) dt \approx \frac{T}{2} [xa(nT) + xa((n-1)T)]$$

Deixar

\text{sim}(t) = \int_{y}^t xa(\ddot{y}) dy

Segue que

$$T ya(nT) \approx ya(nT) + \frac{T}{2} [xa(nT) + xa((n-1)T)]$$

Se definirmos sinais de tempo discreto $x[n]$ e $y[n]$ como

$$x[n] = x(nT), \quad e \quad y[n] = ya(nT)$$

então $y[n - 1] = ya((n-1)T)$, e obtemos a equação de diferenças

$$Ty[n] = y[n - 1] + \frac{T}{2} (x[n] + x[n - 1])$$

que é a base de um integrador trapezoidal.

- a. Desenvolva uma função `ss_integ(..)` com a seguinte interface:

```
val = ss_integ (xa,lim1,lim2,y_init,k)
```

Os argumentos são:

`xa` : Identifica uma função anônima para $xa(t)$

`lim1` : Limite inferior da integral

`lim2` : Limite superior da integral

`init` : Valor inicial da integral `k` :

Número de passos de tempo de `lim1` a `lim2`

`val` : Aproximação trapezoidal da integral

b. Escreva um script para testar a função com o integrando

$$x_a(t) = e^{-t} \sin(t)$$

e compare sua integral aproximada com o resultado correto dado por

$$\int x_a(t) dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-t} \cos(t) + \frac{1}{2} e^{-t} \sin(t)$$

Dica: defina o limite inferior da integral como $t = 0$.

Capítulo 4

Análise de Fourier para Sinais de Tempo Contínuo e Sistemas

Objetivos do Capítulo

- Aprenda técnicas para representar sinais periódicos de tempo contínuo usando conjuntos ortogonais de funções de base periódica.
- Estudar as propriedades das séries de Fourier exponenciais, trigonométricas e compactas e as condições de sua existência.
- Aprenda a transformada de Fourier para sinais não periódicos como uma extensão da série de Fourier para sinais periódicos.
- Estudar propriedades da transformada de Fourier. Entenda a energia e a potência espectral conceitos de densidade.
- Explorar as características do domínio da frequência dos sistemas CTLTI. Entenda o sistema conceito de função.
- Aprender o uso de métodos de análise no domínio da frequência para resolver problemas de interação do sistema de sinal com sinais de entrada periódicos e não periódicos.

4.1 Introdução

Nos Capítulos 1 e 2, desenvolvemos técnicas para analisar sinais e sistemas de tempo contínuo a partir de uma perspectiva no domínio do tempo. Um sinal de tempo contínuo pode ser modelado como uma função do tempo. Um sistema CTLTI pode ser representado por meio de um coeficiente constante

equação diferencial linear, ou alternativamente por meio de uma resposta ao impulso. O sinal de saída de um sistema CTLTI pode ser determinado resolvendo a equação diferencial correspondente ou usando a operação de convolução.

No Capítulo 1 também discutimos a ideia de visualizar um sinal como uma combinação de sinais simples atuando como “blocos de construção”. Exemplos disso foram o uso das funções de passo unitário, rampa unitária, pulso unitário e triângulo unitário para a construção de sinais (consulte a Seção 1.3.2) e o uso da função impulso unitário para decomposição de impulso de um sinal (consulte a Seção 1.3.3).

Outro conjunto especialmente útil de blocos de construção é um conjunto no qual cada função de membro tem uma frequência única. Representar um sinal como uma combinação linear de blocos de construção de frequência única nos permite desenvolver uma visão de domínio de frequência de um sinal que é particularmente útil para entender o comportamento do sinal e os problemas de interação do sistema de sinal. Se um sinal pode ser expresso como uma superposição de componentes de frequência única, saber como um sistema linear e invariante no tempo responde a cada componente individual nos ajuda a entender o comportamento geral do sistema em resposta ao sinal. Essa é a essência da análise no domínio da frequência.

Na Seção 4.2, discutimos métodos de análise de sinais periódicos de tempo contínuo em termos de seu conteúdo de frequência. Métodos de análise no domínio da frequência para sinais não periódicos são apresentados na Seção 4.3. Na Seção 4.4, a representação da energia e potência do sinal no domínio da frequência é discutida. O conceito de função do sistema é apresentado na Seção 4.5. A aplicação de métodos de análise no domínio da frequência à análise de sistemas CTLTI é discutida nas Seções 4.6 e 4.7.

4.2 Análise de Sinais Periódicos de Tempo Contínuo

A maioria dos sinais periódicos de tempo contínuo encontrados em problemas de engenharia podem ser expressos como combinações lineares de funções de base senoidal, o nome mais técnico para os chamados “blocos de construção” aos quais nos referimos na seção introdutória. A ideia de representar funções periódicas do tempo em termos de funções de base trigonométricas foi realizada pela primeira vez pelo matemático e físico francês Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), enquanto trabalhava em problemas relacionados à transferência e propagação de calor. As funções de base em questão podem ser funções individuais de seno e cosseno ou podem estar na forma de funções exponenciais complexas que combinam as funções de seno e cosseno.

Mais adiante nesta seção, estudaremos métodos para expressar sinais periódicos de tempo contínuo em três formatos diferentes, mas equivalentes, a saber, a série trigonométrica de Fourier (TFS), a série exponencial de Fourier (EFS) e a série compacta de Fourier (CFS). Antes de iniciarmos um estudo detalhado da teoria matemática da série de Fourier, entretanto, acharemos útil considerar o problema de aproximar um sinal periódico usando algumas funções trigonométricas. Isso nos ajudará a construir uma compreensão intuitiva dos métodos de domínio da frequência para analisar sinais periódicos.

4.2.1 Aproximando um sinal periódico com funções trigonométricas Foi estabelecido na Seção 1.3.4 do Capítulo 1 que um sinal $\tilde{x}(t)$ que é periódico com período T_0 tem a propriedade

$$\tilde{x}(t + T_0) = \tilde{x}(t) \quad (4.1) \text{ para todo } t. \text{ Além disso, foi demonstrado}$$

através do uso repetido da Eqn. (4.1) que um sinal que é periódico com período T_0 também é periódico com kT_0 para qualquer inteiro k .

Ao trabalhar com sinais periódicos neste capítulo, adotaremos a convenção de usar o caractere til ($\tilde{\cdot}$) sobre o nome do sinal como um lembrete de sua periodicidade. Para o

Para fins de discussão, vamos considerar o sinal de onda quadrada $\tilde{x}(t)$ com um período de T_0 como mostrado na Fig. 4.1.

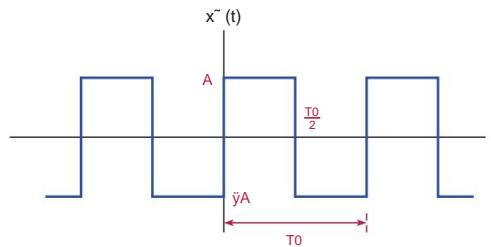


Figura 4.1 – Sinal periódico de onda quadrada.

Suponha que desejamos aproximar esse sinal usando apenas uma função trigonométrica. As duas primeiras perguntas que precisam ser respondidas são:

1. Devemos usar seno ou cosseno?
2. Como devemos ajustar os parâmetros da função trigonométrica?

A primeira pergunta é a mais fácil de responder. O sinal de onda quadrada $\tilde{x}(t)$ mostrado na Fig. 4.1 tem simetria ímpar representada por $\tilde{x}(\tilde{y}t) = \tilde{y}\tilde{x}(t)$ (ver Seção 1.3.6 do Capítulo 1). Entre as duas opções para uma função trigonométrica, a função seno também possui simetria ímpar, ou seja, $\sin(\tilde{y}a) = \tilde{y}\sin(a)$ para qualquer parâmetro de valor real a . Por outro lado, a função cosseno tem simetria par, pois $\cos(\tilde{y}a) = \cos(a)$. Portanto, intuitivamente faria sentido escolher a função seno em vez da função cosseno. Nossa aproximação seria da forma

$$\tilde{x}(t) \approx b_1 \sin(\tilde{y}t) \quad (4.2)$$

Uma vez que $\tilde{x}(t)$ tem um período fundamental de T_0 , faria sentido escolher uma função seno com o mesmo período fundamental, de modo que

$$\sin(\tilde{y}(t + T_0)) = \sin(\tilde{y}t) \quad (4.3)$$

Para a Eq. (4.3) para funcionar precisamos de $\tilde{y}T_0 = 2\tilde{y}$ e consequentemente

$$\tilde{y} = \frac{2\tilde{y}}{T_0} = \tilde{y}_0 = 2\tilde{y}f_0 \quad (4.4)$$

onde definimos a frequência f_0 como o recíproco do período, ou seja, $f_0 = 1/T_0$.

Seja $\tilde{x}(1)(t)$ uma versão aproximada do sinal $\tilde{x}(t)$, de modo que $\tilde{x}(1)(t) = b_1 \sin(\tilde{y}_0 t)$

(4.5)

Na Eq. (4.5) usamos o nome do sinal sobrescrito $\tilde{x}(1)$ para indicar o fato de que estamos usando apenas uma função trigonométrica nessa aproximação. Nossa próxima tarefa é determinar o valor do coeficiente b_1 . Como b_1 deve ser escolhido para que a Eqn. (4.5) represente a melhor aproximação possível do tipo dado para o sinal real $\tilde{x}(t)$? Há um pouco de subjetividade nessa questão, pois ainda não definimos o que significa “melhor aproximação” para nossos propósitos.

Vamos definir o erro de aproximação como a diferença entre o sinal de onda quadrada e sua aproximação:

$$\tilde{y}^1(t) = \tilde{x}(t) - \tilde{x}(1)(t) = \tilde{x}(t) - b_1 \sin(\tilde{y}_0 t) \quad (4.6)$$

O subscrito usado no sinal de erro $\tilde{y}_1(t)$ significa o fato de que é o erro de aproximação que resulta quando apenas uma função trigonométrica é usada. $\tilde{y}_1(t)$ também é periódico com período T_0 . Um método possível para escolher o melhor valor para o coeficiente b_1 seria escolher o valor que torna a potência média normalizada de $\tilde{y}_1(t)$ a menor possível.

Lembre-se de que a potência média normalizada em um sinal periódico foi definida no Capítulo 1 Eqn. (1,88). Adaptando ao sinal de erro $\tilde{y}_1(t)$ temos

$$P = \frac{1}{T_0} \overline{\int_0^{T_0}} [\tilde{y}_1(t)]^2 dt \quad (4.7)$$

Isso também é conhecido como erro quadrático médio (MSE). Para simplificar, descartaremos o fator de escala constante $1/T_0$ na frente da integral na Eqn. (4.7) e minimize a função de custo

$$J = \overline{\int_0^{T_0}} [\tilde{y}_1(t)]^2 dt = \overline{\int_0^{T_0}} [x(t) - b_1 \sin(\tilde{y}_0 t)]^2 dt \quad (4.8)$$

em vez de. Minimizar J é equivalente a minimizar P , pois os dois estão relacionados por um fator de escala constante. O valor do coeficiente b_1 que é ótimo no sentido de produzir o menor valor possível para MSE é encontrado diferenciando a função de custo em relação a b_1 e igualando o resultado a zero.

$$\frac{dJ}{db_1} = \frac{d}{db_1} \overline{\int_0^{T_0}} [x(t) - b_1 \sin(\tilde{y}_0 t)]^2 dt = 0$$

Mudar a ordem de integração e diferenciação leva a

$$\frac{dJ}{db_1} = \overline{\int_0^{T_0}} \frac{d}{dt} [x(t) - b_1 \sin(\tilde{y}_0 t)]^2 dt = 0$$

Fazendo a diferenciação obtemos

$$\overline{\int_0^{T_0}} 2x(t) - 2b_1 \sin(\tilde{y}_0 t) \cos(\tilde{y}_0 t) dt = 0$$

ou equivalente

$$\overline{\int_0^{T_0}} x(t) \sin(\tilde{y}_0 t) dt + b_1 \overline{\int_0^{T_0}} \sin^2(\tilde{y}_0 t) dt = 0 \quad (4.9)$$

Pode ser mostrado que a segunda integral na Eqn. (4.9) rende

$$\overline{\int_0^{T_0}} \sin^2(\tilde{y}_0 t) dt = \frac{T_0}{2}$$

Substituindo esse resultado na Eqn. (4.9) fornece a escolha ótima para o coeficiente b_1 como

$$b_1 = \frac{2}{T_0} \overline{\int_0^{T_0}} x(t) \sin(\tilde{y}_0 t) dt \quad (4.10)$$

Para o sinal de onda quadrada $x(t)$ na Fig. 4.1 temos

$$b_1 = \frac{2}{T_0} \overline{\int_0^{T_0/2}} (A) \sin(\tilde{y}_0 t) dt + \frac{2}{T_0} \overline{\int_{T_0/2}^{T_0}} (\bar{y}A) \sin(\tilde{y}_0 t) dt = \frac{4A}{\tilde{y}} \quad (4.11)$$

A melhor aproximação para $\tilde{x}(t)$ usando apenas uma função trigonométrica é

$$\tilde{x}(1)(t) = \frac{4A}{\tilde{\gamma}} \sin(\tilde{\gamma}ot) \quad (4.12)$$

e o erro de aproximação é

$$\tilde{y}^1(t) = \tilde{x}(t) - \tilde{x}(1)(t) \quad (4.13)$$

O sinal $\tilde{x}(t)$, sua aproximação de frequência única $\tilde{x}(1)(t)$ e o erro de aproximação $\tilde{y}^1(t)$ são mostrados na Fig. 4.2.

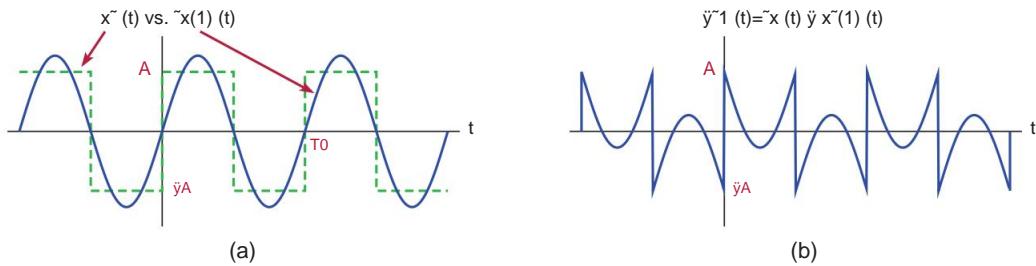


Figura 4.2 – (a) O sinal de onda quadrada $\tilde{x}(t)$ e sua aproximação de frequência única $\tilde{x}(1)(t)$, (b) o erro de aproximação $\tilde{y}^1(t)$.

Na próxima etapa, tentaremos uma aproximação de duas frequências para $\tilde{x}(t)$ e veremos se o erro de aproximação ap pode ser reduzido. Sabemos que a função de base $\sin(2\tilde{\gamma}ot) = \sin(4\tilde{\gamma}f_0t)$ também é periódica com o mesmo período T_0 ; ele tem apenas dois ciclos completos no intervalo $(0, T_0)$ conforme mostrado na Fig. 4.3.

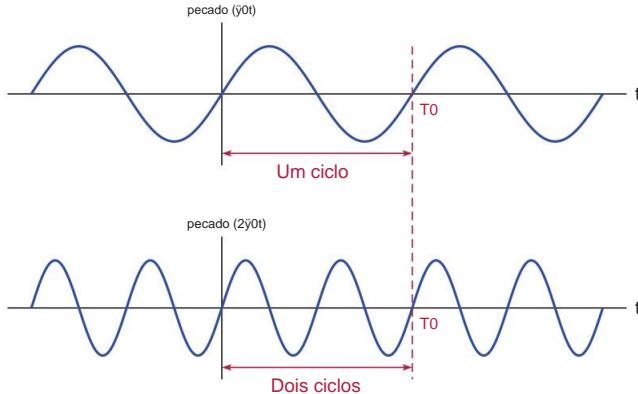


Figura 4.3 – Sinais $\sin(\tilde{\gamma}ot)$ e $\sin(2\tilde{\gamma}ot)$.

Deixe a aproximação usando duas frequências ser definida como

$$\tilde{x}(2)(t) = b_1 \sin(\tilde{\gamma}ot) + b_2 \sin(2\tilde{\gamma}ot) \quad (4.14)$$

O erro de aproximação correspondente é

$$\begin{aligned} \tilde{y}^2(t) &= \tilde{x}(t) - \tilde{x}(2)(t) \\ &= \tilde{x}(t) - b_1 \sin(\tilde{\gamma}ot) - b_2 \sin(2\tilde{\gamma}ot) \end{aligned} \quad (4.15)$$

A função de custo será configurada de maneira semelhante:

$$J = \int_0^{T_0} [\tilde{x}(t) \ddot{y} b_1 \sin(\ddot{\omega}_0 t) \ddot{y} b_2 \sin(2\ddot{\omega}_0 t)]^2 dt \quad (4.16)$$

Diferenciando J em relação ao primeiro b_1 e depois ao b_2 , obtemos

$$\frac{\partial J}{\partial b_1} = \int_0^{T_0} 2 [\tilde{x}(t) \ddot{y} b_1 \sin(\ddot{\omega}_0 t) \ddot{y} b_2 \sin(2\ddot{\omega}_0 t)] [\ddot{y} \sin(\ddot{\omega}_0 t)] dt$$

e

$$\frac{\partial J}{\partial b_2} = \int_0^{T_0} 2 [\tilde{x}(t) \ddot{y} b_1 \sin(\ddot{\omega}_0 t) \ddot{y} b_2 \sin(2\ddot{\omega}_0 t)] [\ddot{y} \sin(2\ddot{\omega}_0 t)] dt$$

Definir as derivadas parciais iguais a zero leva às duas equações a seguir:

$$\int_0^{T_0} \tilde{x}(t) \sin(\ddot{\omega}_0 t) dt = b_1 \int_0^{T_0} \sin^2(\ddot{\omega}_0 t) dt + b_2 \int_0^{T_0} \sin(2\ddot{\omega}_0 t) \sin(\ddot{\omega}_0 t) dt = 0 \quad (4.17)$$

$$\int_0^{T_0} \tilde{x}(t) \sin(2\ddot{\omega}_0 t) dt = b_1 \int_0^{T_0} \sin(\ddot{\omega}_0 t) \sin(2\ddot{\omega}_0 t) dt + b_2 \int_0^{T_0} \sin^2(2\ddot{\omega}_0 t) dt = 0 \quad (4.18)$$

Já estabelecemos que

$$\int_0^{T_0} \sin^2(\ddot{\omega}_0 t) dt = \frac{T_0}{2}$$

Da mesma forma, pode-se mostrar que

$$\int_0^{T_0} \sin(2\ddot{\omega}_0 t) \sin(\ddot{\omega}_0 t) dt = 0$$

e Eq. (4.17) e (4.18) podem agora ser resolvidos para os valores ótimos dos coeficientes b_1 e b_2 , resultando em

$$b_1 = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} \tilde{x}(t) \sin(\ddot{\omega}_0 t) dt \quad (4.19)$$

e

$$b_2 = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} \tilde{x}(t) \sin(2\ddot{\omega}_0 t) dt \quad (4.20)$$

É interessante notar que a expressão para b_1 dada na Eqn. (4.19) para o problema de aproximação de duas frequências é o mesmo encontrado na Eqn. (4.10) para o problema de aproximação de frequência única. Isso é resultado da ortogonalidade das duas funções seno $\sin(\ddot{\omega}_0 t)$ e $\sin(2\ddot{\omega}_0 t)$, e será discutido com mais detalhes na próxima seção.

Usando o sinal de onda quadrada $\tilde{x}(t)$ nas Eqns. (4.19) e (4.20) chegamos ao seguinte valores ótimos para os dois coeficientes:

$$b_1 = \frac{4A}{\ddot{\omega}} \quad e \quad b_2 = 0 \quad (4.21)$$

Curiosamente, a contribuição ótima do termo senoidal na frequência radiana $2\ddot{\omega}$

acabou por ser zero, resultando em

$$\tilde{x}(2)(t) = \frac{4A}{\tilde{\gamma}} \sin(\tilde{\gamma}0t) + (0) \sin(2\tilde{\gamma}0t) = \tilde{x}(1)(t) \quad (4.22)$$

para este sinal particular $\tilde{x}(t)$.

Pode ser mostrado (veja o Problema 4.1 no final deste capítulo) que uma aproximação de três frequências

$$\tilde{x}(3)(t) = b_1 \sin(\tilde{\gamma}0t) + b_2 \sin(2\tilde{\gamma}0t) + b_3 \sin(3\tilde{\gamma}0t) \quad (4.23)$$

tem os valores de coeficiente ótimos

$$b_1 = \frac{4A}{\tilde{\gamma}}, \quad b_2 = 0, \quad \text{e } b_3 = 3\tilde{\gamma} \quad (4.24)$$

O sinal $\tilde{x}(t)$, sua aproximação de três frequências $\tilde{x}(3)(t)$ e o erro de aproximação $\tilde{y}^3(t)$ são mostrados na Fig. 4.4.

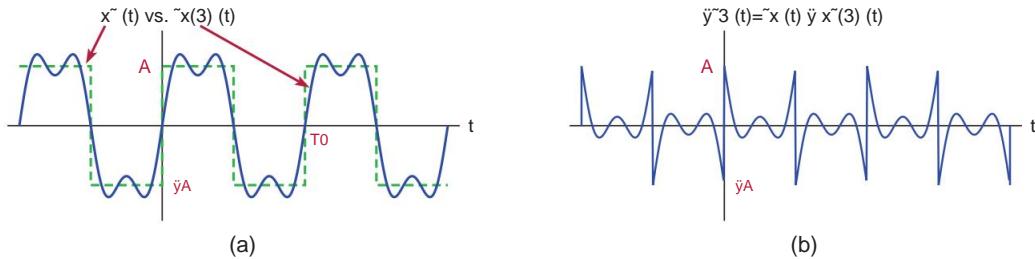


Figura 4.4 – (a) O sinal de onda quadrada $\tilde{x}(t)$ e sua aproximação de três frequências $\tilde{x}(3)(t)$, (b) o erro de aproximação $\tilde{y}^3(t)$.

Algumas observações estão em ordem:

1. Com base em uma comparação casual das Figs. 4.2(b) e 4.4(b), a potência média normalizada do sinal de erro $\tilde{y}^3(t)$ parece ser menor que a do sinal de erro $\tilde{y}^1(t)$. Conseqüentemente, $\tilde{x}(3)(t)$ é uma aproximação melhor para o sinal do que $\tilde{x}(1)(t)$.
2. Por outro lado, o valor máximo do erro de aproximação parece ser $\pm A$ tanto para $\tilde{y}^1(t)$ quanto para $\tilde{y}^3(t)$. Se tentássemos aproximações de ordem superior usando mais funções de base trigonométrica, o erro de aproximação de pico ainda seria $\pm A$ (consulte o Problema 4.4 no final deste capítulo). Isso se deve ao fato de que, a cada descontinuidade de $x(t)$, o valor da aproximação é igual a zero independente do número de funções de base trigonométricas utilizadas. Em geral, a aproximação em uma descontinuidade produzirá a média das amplitudes do sinal logo antes e logo após a descontinuidade. Isso leva ao conhecido fenômeno de Gibbs, que será explorado mais adiante na Seção 4.2.6.

Demonstração interativa: appr

demo1 O programa de demonstração em “appr demo1.m” fornece uma interface gráfica do usuário para experimentar aproximações do sinal de onda quadrada da Fig. 4.1 usando um número especificado de funções trigonométricas. Os valores de parâmetro $A = 1$ e $T_0 = 1$ s são usados. No lado esquerdo, os controles deslizantes permitem que os parâmetros b_i sejam ajustados livremente para $i = 1, \dots, 7$. A aproximação

$$\tilde{x}(m)(t) = \sum_{k=1}^m b_k \sin(k\tilde{\gamma}0t)$$

e o erro de aproximação correspondente

$$\tilde{y}^m(t) = \tilde{x}(t) - \tilde{x}(m)(t)$$

são calculados e representados graficamente. O valor de m pode ser controlado definindo coeficientes desnecessários iguais a zero. Por exemplo, $\tilde{x}(5)(t)$, a aproximação com 5 termos trigonométricos, pode ser explorada simplesmente definindo $b6 = b7 = 0$ e ajustando os coeficientes restantes. Além de representar graficamente os sinais, o programa também calcula o valor da função de custo

$$J = \int_0^{T_0} [\tilde{y}^m(t)]^2 dt$$

1. Com todos os outros coeficientes zerados, ajuste o valor de $b1$ até que J se torne o menor possível. Como o melhor valor de $b1$ corresponde ao resultado encontrado na Eqn. (4.12)? Anote o menor valor de J obtido.
2. Mantendo $b1$ no melhor valor obtido, comece a ajustar $b2$. J pode ser ainda mais reduzido através do uso de $b2$?
3. Continue dessa maneira ajustando os coeficientes restantes, um de cada vez. Observe a forma do sinal de erro de aproximação e o valor de J após cada ajuste.

Recursos de software:

appr demo1.m

4.2.2 Série trigonométrica de Fourier (TFS)

Agora estamos prontos para generalizar os resultados obtidos na discussão anterior sobre a aproximação de um sinal usando funções trigonométricas. Considere um sinal $\tilde{x}(t)$ que é periódico com período fundamental T_0 e frequência fundamental associada $f_0 = 1/T_0$. Podemos querer representar este sinal usando uma combinação linear de funções senoidais na forma

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) = & a_0 + a_1 \cos(\tilde{\omega}_0 t) + a_2 \cos(2\tilde{\omega}_0 t) + \dots + a_k \cos(k\tilde{\omega}_0 t) + \dots + b_1 \\ & \sin(\tilde{\omega}_0 t) + b_2 \sin(2\tilde{\omega}_0 t) + \dots + b_k \sin(k\tilde{\omega}_0 t) + \dots \end{aligned} \quad (4.25)$$

ou, usando uma notação mais compacta

$$\tilde{x}(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\tilde{\omega}_0 t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\tilde{\omega}_0 t) \quad (4.26)$$

onde $\tilde{\omega}_0 = 2\pi f_0$ é a frequência fundamental em rad/s. Eq. (4.26) é chamada de representação trigonométrica da série de Fourier (TFS) do sinal periódico $\tilde{x}(t)$, e as funções senoidais com frequências radianas de $\tilde{\omega}_0, 2\tilde{\omega}_0, \dots, k\tilde{\omega}_0$ são chamadas de funções básicas. Assim, o conjunto de funções de base inclui

$$\tilde{y}_k(t) = \cos(k\tilde{\omega}_0 t), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \tilde{\omega}_0 \quad (4.27)$$

e

$$\tilde{y}_k(t) = \sin(k\tilde{\omega}_0 t), \quad k = 1, 2, \dots, \tilde{\omega}_0 \quad (4.28)$$

Usando a notação estabelecida nas Eqns. (4.27) e (4.28), a representação em série do sinal $\tilde{x}(t)$ dada pela Eqn. (4.25) pode ser escrita de forma mais generalizada como

$$\tilde{x}(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \tilde{y}_k(t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \tilde{y}_k(t) \quad (4.29)$$

Chamaremos as frequências que são múltiplos inteiros da frequência fundamental de harmônicos. As frequências $2\omega_0, 3\omega_0, \dots, k\omega_0$ são o segundo, o terceiro e o k -ésimo harmônico da frequência fundamental, respectivamente. As funções de base em frequências harmônicas são todas periódicas com um período de T_0 . Portanto, considerando nossa analogia de “blocos de construção”, o sinal $\tilde{x}(t)$ que é periódico com período T_0 é representado em termos de blocos de construção (funções de base) que também são periódicos com o mesmo período. Intuitivamente isso faz sentido.

Antes de abordarmos o problema de determinar os coeficientes da representação da série de Fourier, é útil observar algumas propriedades de senoides harmonicamente relacionadas. Usando identidades trigonométricas, pode-se mostrar que

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} \cos(m\omega_0 t) \cos(k\omega_0 t) dt = \begin{cases} T_0/2, & m = k \\ 0, & m \neq k \end{cases} \quad (4.30)$$

Este é um resultado muito significativo. Duas funções de base cosseno em frequências harmônicas $m\omega_0$ e $k\omega_0$ são multiplicadas e seu produto é integrado em um período completo ($t_0, t_0 + T_0$). Quando os multiplicadores inteiros m e k representam dois harmônicos diferentes da frequência fundamental, o resultado da integral é zero. Um resultado diferente de zero é obtido apenas quando $m = k$, ou seja, quando as duas funções cosseno na integral são iguais. Um conjunto de funções de base $\{\cos(k\omega_0 t), k = 0, \dots, \bar{y}\}$ que satisfaz a Eqn. (4.30) é dito ser um conjunto ortogonal. Da mesma forma é fácil mostrar que

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} \sin(m\omega_0 t) \sin(k\omega_0 t) dt = \begin{cases} T_0/2, & m = k \\ 0, & m \neq k \end{cases} \quad (4.31)$$

significando que o conjunto de funções de base $\{\sin(k\omega_0 t), k = 1, \dots, \bar{y}\}$ também é ortogonal. Além disso, pode-se mostrar que os dois conjuntos também são ortogonais entre si, isto é,

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} \cos(m\omega_0 t) \sin(k\omega_0 t) dt = 0 \quad (4.32)$$

para qualquer combinação dos dois inteiros m e k (mesmo quando $m = k$). Em Eq. (4.30) a (4.32) a integral no lado esquerdo do sinal de igual pode ser iniciada em qualquer instante de tempo arbitrário t_0 sem afetar o resultado. O único requisito é que a integração seja realizada durante um período completo do sinal.

Provas detalhadas das condições de ortogonalidade sob uma variedade de circunstâncias são dadas no Apêndice D.

Agora estamos prontos para determinar os coeficientes desconhecidos $\{a_k; k = 0, 1, \dots, \bar{y}\}$ e $\{b_k; k = 1, \dots, \bar{y}\}$ das Eqns. (4.25) e (4.26). Vamos primeiro mudar os índices de somatório na Eqn. (4.26) de k para m , então multiplique ambos os lados por $\cos(k\omega_0 t)$ e integre em um período completo:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_0+T_0} \tilde{x}(t) \cos(k\omega_0 t) dt &= \int_{t_0}^{t_0+T_0} a_0 \cos(k\omega_0 t) dt \\ &+ \int_{t_0}^{t_0+T_0} a_1 \cos(m\omega_0 t) \cos(k\omega_0 t) dt \\ &+ \int_{t_0}^{t_0+T_0} a_2 \cos(2m\omega_0 t) \cos(k\omega_0 t) dt \\ &\vdots \\ &+ \int_{t_0}^{t_0+T_0} a_m \cos(m\omega_0 t) \cos(k\omega_0 t) dt \\ &+ \int_{t_0}^{t_0+T_0} a_{m+1} \cos((m+1)\omega_0 t) \cos(k\omega_0 t) dt \\ &\vdots \\ &+ \int_{t_0}^{t_0+T_0} a_{\bar{y}} \cos(\bar{y}\omega_0 t) \cos(k\omega_0 t) dt \end{aligned} \quad (4.33)$$

Trocando a ordem de integração e soma na Eqn. (4.33) leva a

$$\begin{aligned}
 & \int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t) \cos(k\omega_0 t) dt = a_0 \int_{t_0}^{t_0+T_0} \cos(k\omega_0 t) dt \\
 & + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \int_{t_0}^{t_0+T_0} \cos(m\omega_0 t) \cos(k\omega_0 t) dt \\
 & + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \int_{t_0}^{t_0+T_0} \sin(m\omega_0 t) \cos(k\omega_0 t) dt
 \end{aligned} \quad (4.34)$$

Consideremos os três termos do lado direito da Eq. (4.34) individualmente:

1. Seja $k > 0$ (trataremos o caso de $k = 0$ separadamente). O primeiro termo do lado direito da Eqn. (4.34) resulta em zero, pois inclui, como fator, a integral de uma função cosseno durante um período completo.
2. No segundo termo temos um somatório. Cada termo dentro da soma tem um fator que é a integral do produto de dois cossenos em um intervalo de T_0 . Usando a propriedade de ortogonalidade observada na Eqn. (4.30), é fácil ver que todos os termos da soma desaparecem com exceção de um termo para o qual $m = k$.
3. No terceiro termo temos outro somatório. Nesse caso, cada termo dentro da soma tem um fator que é a integral do produto de uma função seno e uma função cosseno em um intervalo de T_0 . Usando a Eq. (4.32) concluímos que todos os termos deste somatório desaparecem.

Portanto, a Eq. (4.34) simplifica para

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t) \cos(k\omega_0 t) dt = a_k \int_{t_0}^{t_0+T_0} T_0 \cos^2(k\omega_0 t) dt = a_k T_0$$

que pode ser resolvido para o único coeficiente restante a_k para produzir

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t) \cos(k\omega_0 t) dt, \quad \text{para } k = 1, \dots, \hat{y} \quad (4.35)$$

Da mesma forma, multiplicando ambos os lados da Eqn. (4.26) com $\sin(k\omega_0 t)$ e repetindo o procedimento usado acima, pode-se mostrar que os coeficientes b_k podem ser calculados como (veja o Problema 4.6 no final deste capítulo)

$$b_k = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t) \sin(k\omega_0 t) dt, \quad \text{para } k = 1, \dots, \hat{y} \quad (4.36)$$

Finalmente, precisamos calcular o valor do coeficiente constante a_0 . Integrando ambos os lados da Eqn. (4.26) para um período completo, obtemos

$$\begin{aligned}
 \int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t) dt &= \int_{t_0}^{t_0+T_0} a_0 dt \\
 &+ \sum_{k=1}^{\infty} \int_{t_0}^{t_0+T_0} a_k \cos(k\omega_0 t) dt + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{t_0}^{t_0+T_0} b_k \sin(k\omega_0 t) dt
 \end{aligned} \quad (4.37)$$

Mudando novamente a ordem dos operadores de integração e soma, a Eqn. (4.36) torna-se

$$\begin{aligned} \hat{\int}_{t_0}^{t_0+T_0} x^*(t) dt &= \hat{\int}_{t_0}^{t_0+T_0} a_0 dt \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{\int}_{t_0}^{t_0+T_0} \cos(k\omega_0 t) dt + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \hat{\int}_{t_0}^{t_0+T_0} \sin(k\omega_0 t) dt \end{aligned} \quad (4.38)$$

Cada termo único dentro de cada uma das duas somas será igual a zero devido à periodicidade das funções senoidais que estão sendo integradas. Isso nos permite simplificar a Eqn. (4.38) a

$$\hat{\int}_{t_0}^{t_0+T_0} x^*(t) dt = \hat{\int}_{t_0}^{t_0+T_0} a_0 dt = a_0 T_0$$

que pode ser resolvido para a_0 para produzir

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \hat{\int}_{t_0}^{t_0+T_0} x^*(t) dt \quad (4.39)$$

Um exame minucioso da Eqn. (4.39) revela que o coeficiente a_0 representa a média temporal do sinal $\tilde{x}(t)$ conforme definido na Eqn. (1.83) do Capítulo 1. Por causa disso, a_0 também é chamado de valor médio ou componente dc do sinal.

Combinando os resultados obtidos até aqui, a expansão TFS de um sinal pode ser resumido a seguir:

Série trigonométrica de Fourier (TFS):

1. Equação de síntese:

$$x^*(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_0 t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega_0 t) \quad (4.40)$$

2. Equações de análise:

$$a_k = \frac{1}{T_0} \hat{\int}_{t_0}^{t_0+T_0} x^*(t) \cos(k\omega_0 t) dt, \quad \text{para } k = 1, \dots, \infty \quad (4.41)$$

$$b_k = \frac{1}{T_0} \hat{\int}_{t_0}^{t_0+T_0} x^*(t) \sin(k\omega_0 t) dt, \quad \text{para } k = 1, \dots, \infty \quad (4.42)$$

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \hat{\int}_{t_0}^{t_0+T_0} x^*(t) dt \quad (\text{componente CC}) \quad (4.43)$$

Exemplo 4.1: Série trigonométrica de Fourier de um trem de pulso

periódico Um sinal de trem de pulso $\tilde{x}(t)$ com um período de $T_0 = 3$ segundos é mostrado na Fig. 4.5. Determine os coeficientes da representação TFS desse sinal.

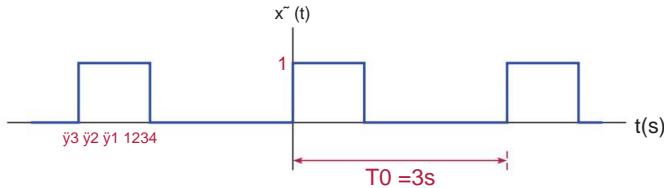


Figura 4.5 – Trem de pulsos periódicos utilizado no Exemplo 4.1.

Solução: Usando as integrais dadas pelas Eqns. (4.41), (4.42) e (4.43), podemos começar em qualquer instante de tempo arbitrário t_0 e integrar em um período de 3 segundos. Aplicando a Eq. (4.43) com $t_0 = 0$ e $T_0 = 3$ segundos, temos

$$a_0 = \frac{1}{3} \int_0^1 (1) dt + \int_1^3 (0) dt = \frac{1}{3}$$

A frequência fundamental é $f_0 = 1/T_0 = 1/3$ Hz, e o valor correspondente de $\tilde{\omega}_0$ é

$$\tilde{\omega}_0 = 2\tilde{\omega}f_0 = \frac{2\tilde{\omega}}{3} \text{ rad/s.}$$

Usando a Eq. (4.41), temos

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{3} \int_0^1 (1) \cos(2\tilde{\omega}kt/3) dt + \int_1^3 (0) \cos(2\tilde{\omega}kt/3) dt \\ &= \frac{\sin(2\tilde{\omega}k/3)}{\tilde{\omega}k}, \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

Finalmente, usando a Eq. (4.42), obtemos

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{3} \int_0^1 (1) \sin(2\tilde{\omega}kt/3) dt + \int_1^3 (0) \sin(2\tilde{\omega}kt/3) dt \\ &= \frac{1}{\tilde{\omega}k} \cos(2\tilde{\omega}k/3), \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

Usando esses coeficientes na equação de síntese dada pela Eqn. (4.40), o sinal $x(t)$ pode agora ser expresso em termos das funções de base como

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\sin(2\tilde{\omega}k/3)}{\tilde{\omega}k} \cos(2\tilde{\omega}kt/3) + \frac{1}{\tilde{\omega}k} \cos(2\tilde{\omega}k/3) \right] \quad \text{pecado}(2\tilde{\omega}kt/3) \quad (4.44)$$

Exemplo 4.2: Aproximação com um número finito de harmônicos

Considere novamente o sinal $\tilde{x}(t)$ do Exemplo 4.1. Com base nas Eqs. (4.25) e (4.26), teoricamente, seria necessário um número infinito de termos de cosseno e seno para obter uma representação precisa dele. Por outro lado, os valores dos coeficientes a_k e b_k são inversamente proporcionais a k , indicando que as contribuições dos termos de ordem superior na Eqn. (4.44) diminuirá em significância. Como resultado, podemos negligenciar os termos de alta ordem e ainda assim obter uma aproximação razoável para o trem de pulso. Aproxime o trem de pulso periódico do Exemplo 4.1 usando (a) os primeiros 4 harmônicos e (b) os primeiros 10 harmônicos.

Solução: Lembre-se de que obtivemos o seguinte no Exemplo 4.1: $\sin(2\pi k t)$

$$a_0 = \frac{1}{3}, \quad a_k = \frac{3}{k} \sin(2\pi k/3) \quad b_k = \frac{\pi k}{3}$$

Esses coeficientes foram avaliados numericamente até $k = 10$ e são apresentados na Tabela 4.1.

k	ak	bk
0	0,3333	
1	0,2757	0,4775
2	0,1378	0,2387
3	0,0	0,0
4	0,0689	0,1194
5	0,0551	0,0955
6	0,0	0,0
7	0,0394	0,0682
8	0,0345	0,0597
9	0,0	0,0
10	0,0276	0,0477

Tabela 4.1 – Coeficientes TFS para o trem de pulso do Exemplo 4.2.

Seja $\tilde{x}(m)(t)$ uma aproximação do sinal $\tilde{x}(t)$ utilizando os primeiros m harmônicos de a frequência fundamental:

$$\tilde{x}(m)(t) = a_0 + \sum_{k=1}^m a_k \cos(k\pi t) + \sum_{k=1}^m b_k \sin(k\pi t) \quad (4.45)$$

Usando $m = 4$, temos

$$\begin{aligned} \tilde{x}(4)(t) = & 0,3333 + 0,2757 \cos(2\pi t/3) + 0,1378 \cos(4\pi t/3) + 0,0689 \cos(8\pi t/3) \\ & + 0,4775 \sin(2\pi t/3) + 0,2387 \sin(4\pi t/3) + 0,1194 \sin(8\pi t/3) \end{aligned}$$

Uma expressão semelhante, mas mais longa, pode ser escrita para o caso $m = 10$, que vamos pular para economizar espaço. A Fig. 4.6 mostra duas aproximações para o trem de pulso original usando os primeiros 4 e 10 harmônicos, respectivamente.

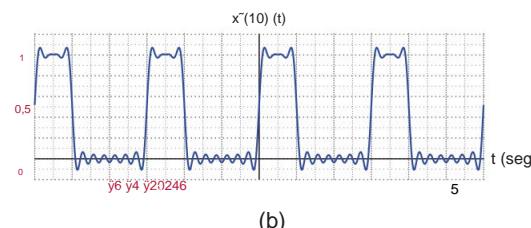
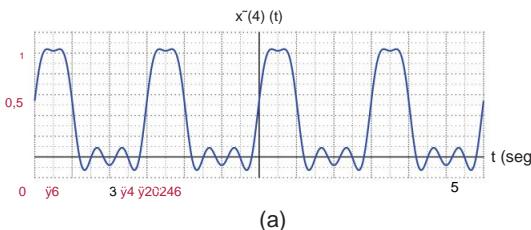


Figura 4.6 – Aproximação ao trem de pulsos do Exemplo 4.1 usando (a) 4 harmônicos, (b) 10 harmônicos.

Demonstração interativa: tfs demo1

O programa de demonstração em "tfs demo1.m" fornece uma interface gráfica do usuário para calcular aproximações de harmônicos finitos para o trem de pulso dos Exemplos 4.1 e 4.2. Os valores dos coeficientes TFS ak e bk para o trem de pulso são exibidos na tabela estilo planilha à esquerda.

A seleção de um valor inteiro m da lista suspensa denominada "Maior harmônico a ser incluído na aproximação" faz com que a aproximação de harmônico finito $\tilde{x}(m)(t)$ seja calculada e representada graficamente. Ao mesmo tempo, as caixas de seleção ao lado dos pares de coeficientes { ak, bk } incluídos na aproximação são marcadas automaticamente.

Alternativamente, os conjuntos de coeficientes { ak, bk } podem ser incluídos ou excluídos arbitrariamente marcando a caixa para cada conjunto de coeficientes ativado ou desativado. Quando isso é feito, o gráfico exibe a frase "formato livre", bem como uma lista dos índices de coeficientes incluídos.

1. Use a lista suspensa para calcular e representar graficamente várias aproximações de harmônicos finitos. Observe a semelhança do sinal aproximado com o trem de pulso original quando valores maiores de m são usados.
2. Use a abordagem de formato livre para observar as contribuições individuais de pares { ak, bk } individuais. (Isso requer marcar uma caixa na tabela com todas as outras desmarcadas.)

Recursos de software:

tfs demo1.m

Recursos de software: Consulte os Exercícios 4.1 e 4.2 do MATLAB.

Exemplo 4.3: Trem de pulso periódico revisitado

Determine os coeficientes TFS para o trem de pulso periódico mostrado na Fig. 4.7.

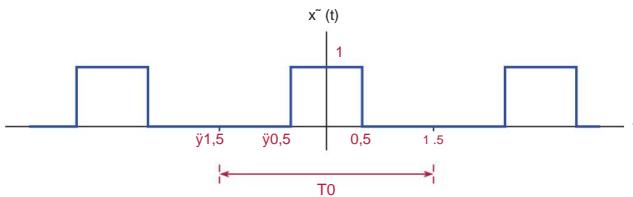


Figura 4.7 – Trem de pulsos periódicos utilizado no Exemplo 4.3.

Solução: Este é essencialmente o mesmo trem de pulso que usamos no Exemplo 4.1 com uma pequena diferença: o sinal é deslocado no domínio do tempo de modo que o pulso principal seja centrado em torno da origem do tempo t = 0. Como consequência, o sinal resultante é uma função par do tempo, ou seja, tem a propriedade $\tilde{x}(\tilde{y}t) = \tilde{x}(t)$ para $\tilde{y} < t < \tilde{y}$.

Tomemos um período do sinal para se estender de $t_0 = \tilde{y}1,5$ a $t_0 + T_0 = 1,5$ segundos. Aplicando a Eq. (4.43) com $t_0 = \tilde{y}0,5$ e $T_0 = 3$ segundos, temos

$$a_0 = \frac{1}{3} \int_{\tilde{y}0,5}^{0,5} (1) dt = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$$

Usando a Eq. (4.41) rende

$$a_k = \frac{2}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1) \cos(2\pi kt/3) dt = \frac{2 \sin(2\pi k/3)}{k\pi}$$

e usando a Eq. (4.42)

$$b_k = \frac{2}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1) \sin(2\pi kt/3) dt = 0$$

Assim, $\tilde{x}(t)$ pode ser escrito como

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \sin(\pi k/3)}{k\pi} \cos(k\pi t) \quad (4.46)$$

onde a frequência fundamental é $f_0 = 1/3$ Hz. Neste caso, o sinal é expresso usando apenas os termos $\cos(k\pi t)$ da expansão TFS. Esse resultado é intuitivamente satisfatório, pois já reconhecemos que $\tilde{x}(t)$ apresenta simetria par e, portanto, pode ser representado usando apenas as funções de base par $\{\cos(k\pi t), k = 0, 1, \dots, \infty\}$, omitindo as funções de base ímpar $\{\sin(k\pi t), k = 1, 2, \dots, \infty\}$.

Recursos de software:

[ex_4_3.m](#)

Demonstração interativa: [tfs demo2](#)

O programa de demonstração em “[tfs demo2.m](#)” é baseado no Exemplo 4.3 e calcula aproximações harmônicas finitas para o trem de pulso periódico com simetria uniforme, conforme mostrado na Fig. 4.7. Ele compartilha a mesma interface gráfica do usuário do programa “[tfs demo1.m](#)” com a única diferença sendo a simetria uniforme do trem de pulso usado. Os valores dos coeficientes TFS a_k e b_k são exibidos na tabela estilo planilha à esquerda. Observe que $b_k = 0$ para todo k como determinamos no Exemplo 4.3.

Recursos de software:

[tfs demo2.m](#)

Exemplo 4.4: Série trigonométrica de Fourier para uma onda

quadrada Determine os coeficientes TFS para a onda quadrada periódica mostrada na Fig. 4.8.

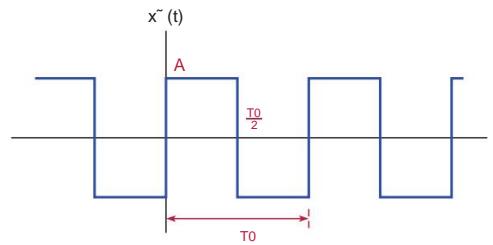


Figura 4.8 – O sinal de onda quadrada usado no Exemplo 4.4.

Solução: Este é um sinal com simetria ímpar, ou seja, $\tilde{x}(-t) = -\tilde{x}(t)$ para $-\pi < t < \pi$. Intuitivamente podemos prever que o termo constante a_0 e os coeficientes a_k da base par

funções $\{ \cos(k\pi t), k = 1, \dots, \bar{\gamma} \}$ na representação TFS de $\tilde{x}(t)$ devem ser todas iguais a zero, e apenas os termos ímpares da série devem ter significado. Aplicando a Eq. (4.41) com limites de integração $t_0 = \bar{\gamma}T_0/2$ e $t_0 + T_0 = T_0/2$ segundos, temos

$$a_k = \frac{2}{T_0} \int_{-\bar{\gamma}T_0/2}^0 (\bar{\gamma}A) \cos(2\bar{\gamma}kt/T_0) dt + \int_{0}^{T_0/2} (\bar{\gamma}A) \cos(2\bar{\gamma}kt/T_0) dt = 0$$

conforme previmos. Em seguida, usaremos a Eqn. (4.43) para determinar a_0 :

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-\bar{\gamma}T_0/2}^0 (\bar{\gamma}A) dt + \int_0^{T_0/2} (\bar{\gamma}A) dt = 0$$

Finalmente, usando a Eq. (4.42), obtemos os coeficientes dos termos seno:

$$b_k = \frac{2}{T_0} \int_{-\bar{\gamma}T_0/2}^0 (\bar{\gamma}A) \sin(2\bar{\gamma}kt/T_0) dt + \int_0^{T_0/2} (\bar{\gamma}A) \sin(2\bar{\gamma}kt/T_0) dt \\ = \frac{2A}{\bar{\gamma}k} [1 - \bar{\gamma} \cos(\bar{\gamma}k)]$$

Usando a identidade

$$\cos(\bar{\gamma}k) = (\bar{\gamma}1)k$$

o resultado encontrado para b_k pode ser escrito como

$$b_k = \begin{cases} \frac{4A}{\bar{\gamma}k}, & k \text{ estranho} \\ 0, & k \text{ mesmo} \end{cases} \quad (4.47)$$

Compare o resultado na Eqn. (4.47) aos coeficientes b_1 a b_3 que calculamos na Eqn. (4.24) no processo de encontrar a aproximação ótima para o sinal de onda quadrada $x(t)$ usando três termos senoidais. A Tabela 4.2 lista os coeficientes TFS até o 10º harmônico.

k	a_k	b_k
0,0	1	
0,0	1,2732	2 0,0
0,0	3 0,0	
0,4244	4 0,0	0,0
5 0,0	0,2546	
6 0,0	0,0	
7 0,0	0,1819	
8 0,0	0,0	
9 0,0	0,1415	
10 0,0	0,0	

Tabela 4.2 – Coeficientes TFS para o sinal de onda quadrada do Exemplo 4.4.

As aproximações harmônicas finitas $\tilde{x}(m)(t)$ do sinal $\tilde{x}(t)$ para $m = 3$ e $m = 9$ são mostrado na Fig. 4.9(a) e (b).

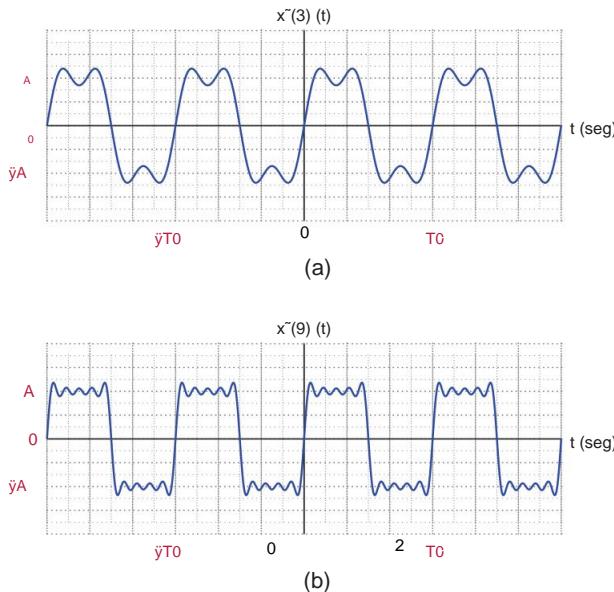


Figura 4.9 – Aproximação do sinal de onda quadrada do Exemplo 4.4 usando (a) $m = 3$ e (b) $m = 9$.

Recursos de software:

[ex_4_4a.m](#)

[ex_4_4b.m](#)

Demonstração interativa: [tfs demo3](#)

O programa de demonstração em “tfs demo3.m” é baseado na representação TFS de um sinal de onda quadrada conforme discutido no Exemplo 4.4. Ele calcula aproximações de harmônicos finitos para o sinal de onda quadrada com simetria ímpar, conforme mostrado na Fig. 4.9. Estende a interface do usuário dos programas “tfs demo1.m” e “tfs demo2.m” permitindo que a amplitude A e o período T_0 sejam variados através do uso de controles deslizantes. Observe o seguinte:

1. Quando a amplitude A é variada, os coeficientes b_k mudam proporcionalmente, como determinamos na Eqn. (4.47).
2. Variar o período T_0 faz com que a frequência fundamental f_0 também mude. Os coeficientes b_k não são afetados por uma mudança no período. A aproximação harmônica finita do sinal muda como resultado do uso de uma nova frequência fundamental com os mesmos coeficientes.

Recursos de software:

[tfs demo3.m](#)

4.2.3 Série de Fourier Exponencial (EFS)

Representação em série de Fourier do sinal periódico $\tilde{x}(t)$ na Eqn. (4.26) também pode ser escrita em formas alternativas. Considere o uso de exponenciais complexas $e^{jk\omega_0 t}$, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$ como funções de base de modo que o sinal $\tilde{x}(t)$ seja expresso como uma combinação linear delas na forma