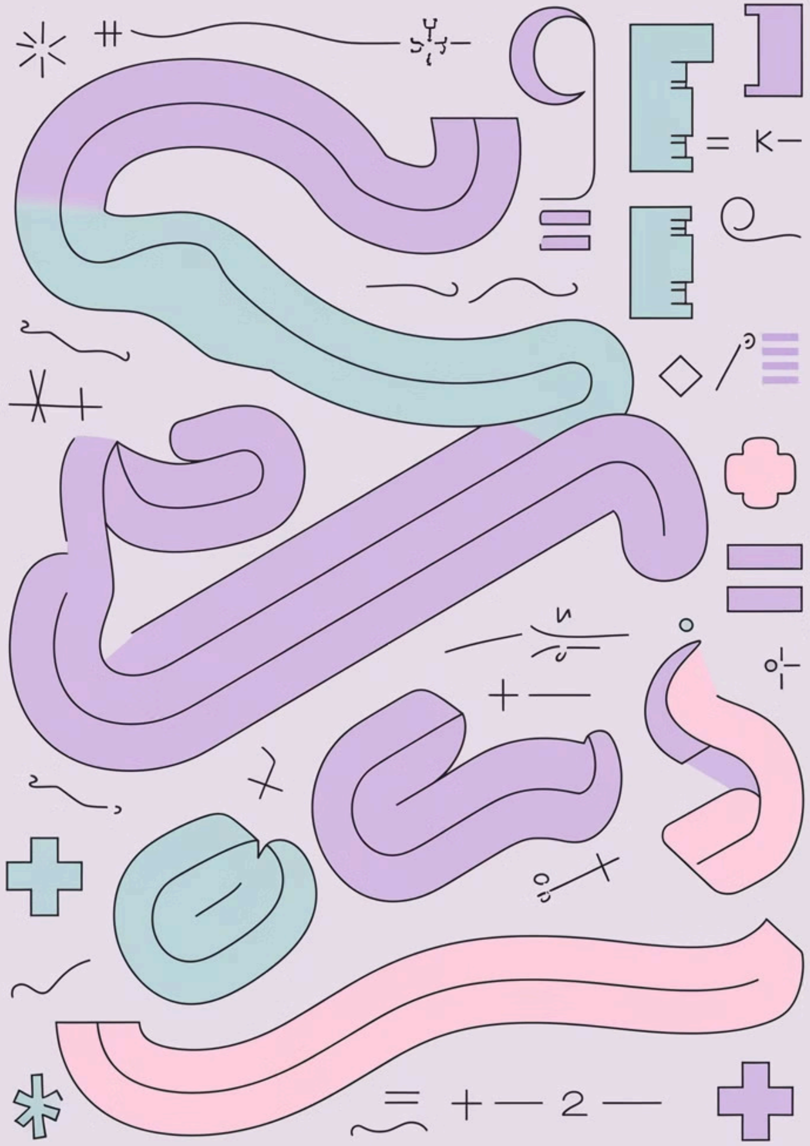
Revisão de Números Complexos

Bem-vindo à nossa revisão completa sobre números complexos. Iremos explorar desde conceitos básicos até aplicações avançadas.

Esta apresentação destina-se a estudantes de matemática, engenharia e ciências que desejam aprofundar o seu conhecimento neste fascinante tema.

Prof. Moacy Pereira
IFPB - Campus Campina Grande



Introdução aos Números Complexos

1. O que são?

Números complexos são extensões dos números reais que incluem a unidade imaginária i, onde $i^2 = -1$.

2. Origem

Surgiram no século XVI durante as tentativas de resolver equações cúbicas.

3. Importância

Permitiram resolver equações como $x^2 = -1$, expandindo o horizonte matemático.

4. Aceitação

Apenas no século XIX foram completamente aceites pela comunidade matemática.

Forma Algébrica

Definição

Um número complexo z é escrito como $z = a + bi$.

O valor a é chamado parte real, denotado por $Re(z)$.

O valor b é chamado parte imaginária, denotado por $Im(z)$.

Exemplos

- $z_1 = 3 + 2i$
- $z_2 = -1 + 4i$
- $z_3 = 5 - 3i$
- $z_4 = 0 + 7i = 7i$
- $z_5 = 8 + 0i = 8$

O Plano Complexo

Representação Geométrica

Cada número complexo $z = a + bi$ corresponde a um ponto (a,b) no plano complexo.

A representação visual facilita a compreensão das operações e propriedades.

Eixo Real

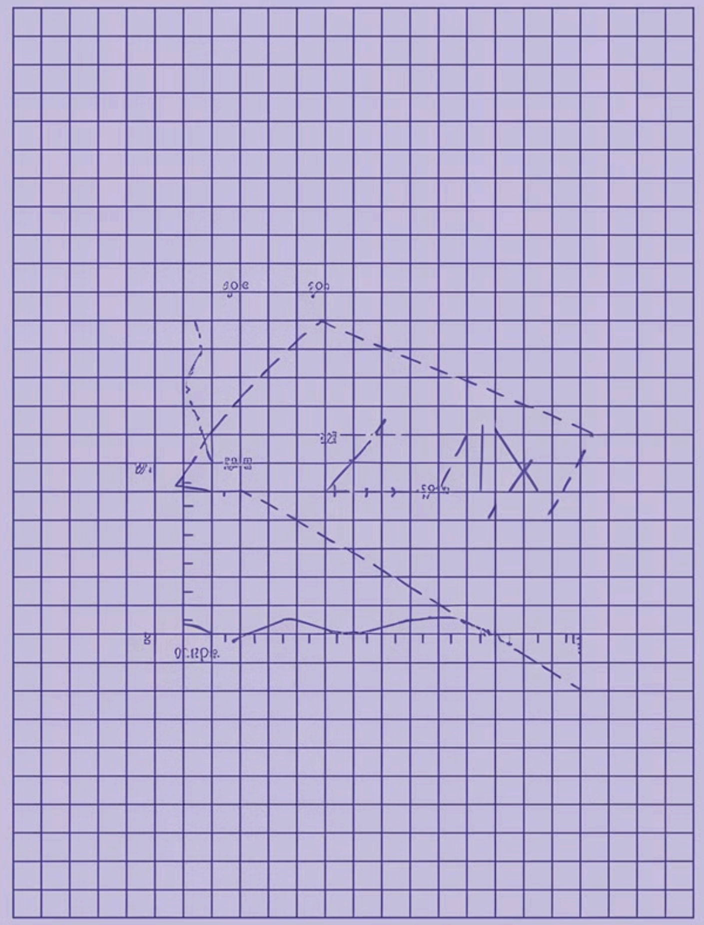
O eixo horizontal representa a parte real do número complexo.

Números reais são pontos situados sobre este eixo.

Eixo Imaginário

O eixo vertical representa a parte imaginária do número complexo.

Números puramente imaginários situam-se neste eixo.



Operações Básicas

Adição

$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

Exemplo: $(3 + 2i) + (1 + 4i) = 4 + 6i$

Subtração

$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$

Exemplo: $(3 + 2i) - (1 + 4i) = 2 - 2i$

Multiplicação

$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

Exemplo: $(3 + 2i)(1 + 4i) = 3 + 12i + 2i + 8i^2 = 3 + 14i - 8 = -5 + 14i$

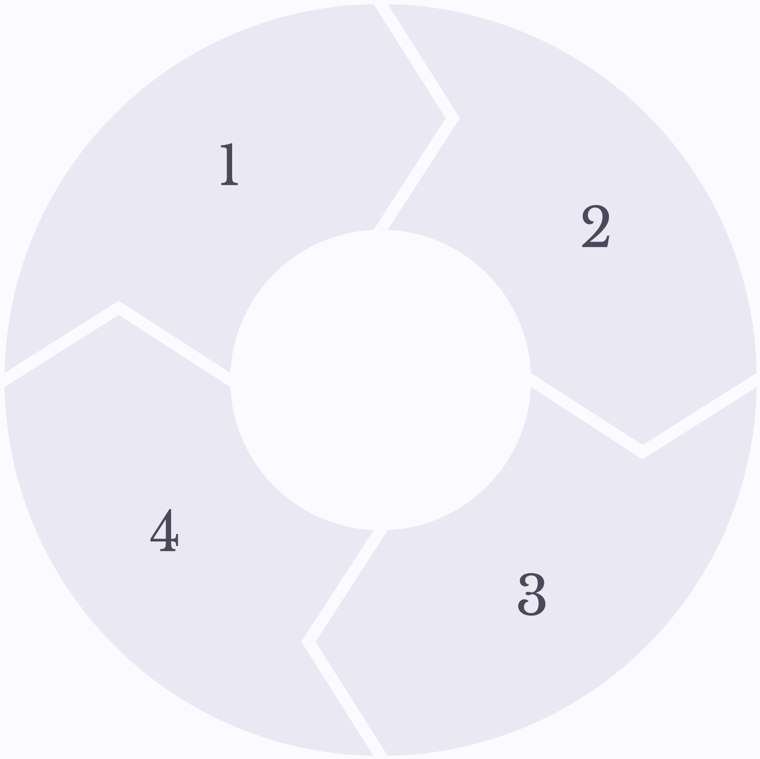
Conjugado de um Número Complexo

Definição

O conjugado de $z = a + bi$ é $\bar{z} = a - bi$.

Propriedades

$z \cdot \bar{z} = |z|^2 = a^2 + b^2$



Geometria

Reflexão em relação ao eixo real.

Aplicação

Usado na divisão de números complexos.

O conjugado é uma ferramenta fundamental para simplificar expressões complexas e encontrar o módulo de um número complexo.

Divisão de Números Complexos

Multiplicar por conjugado

Para dividir z_1/z_2, multiplique numerador e denominador pelo conjugado de z_2.

Simplificar denominador

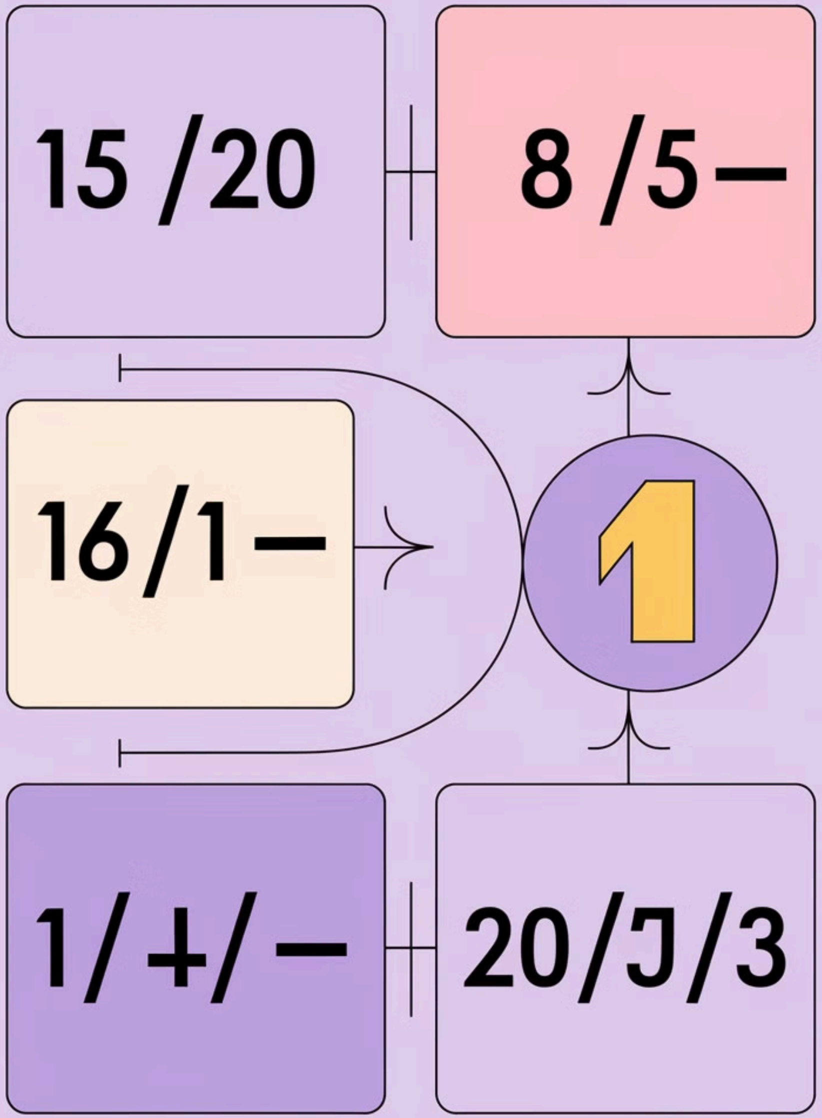
O denominador torna-se $z_2 \cdot \bar{z}_2 = |z_2|^2 = c^2 + d^2$

Calcular o numerador

$z_1 \cdot \bar{z}_2 = (a+bi)(c-di) = ac+bdi^2+bci-adi = ac+bd+(bc-ad)i$

Expressar resultado

$z_1/z_2 = (ac+bd)/(c^2+d^2) + (bc-ad)/(c^2+d^2)i$



Módulo de um Número Complexo

Definição

O módulo de z = a + bi é $|z| = \sqrt{(a^2 + b^2)}$

Interpretação Geométrica

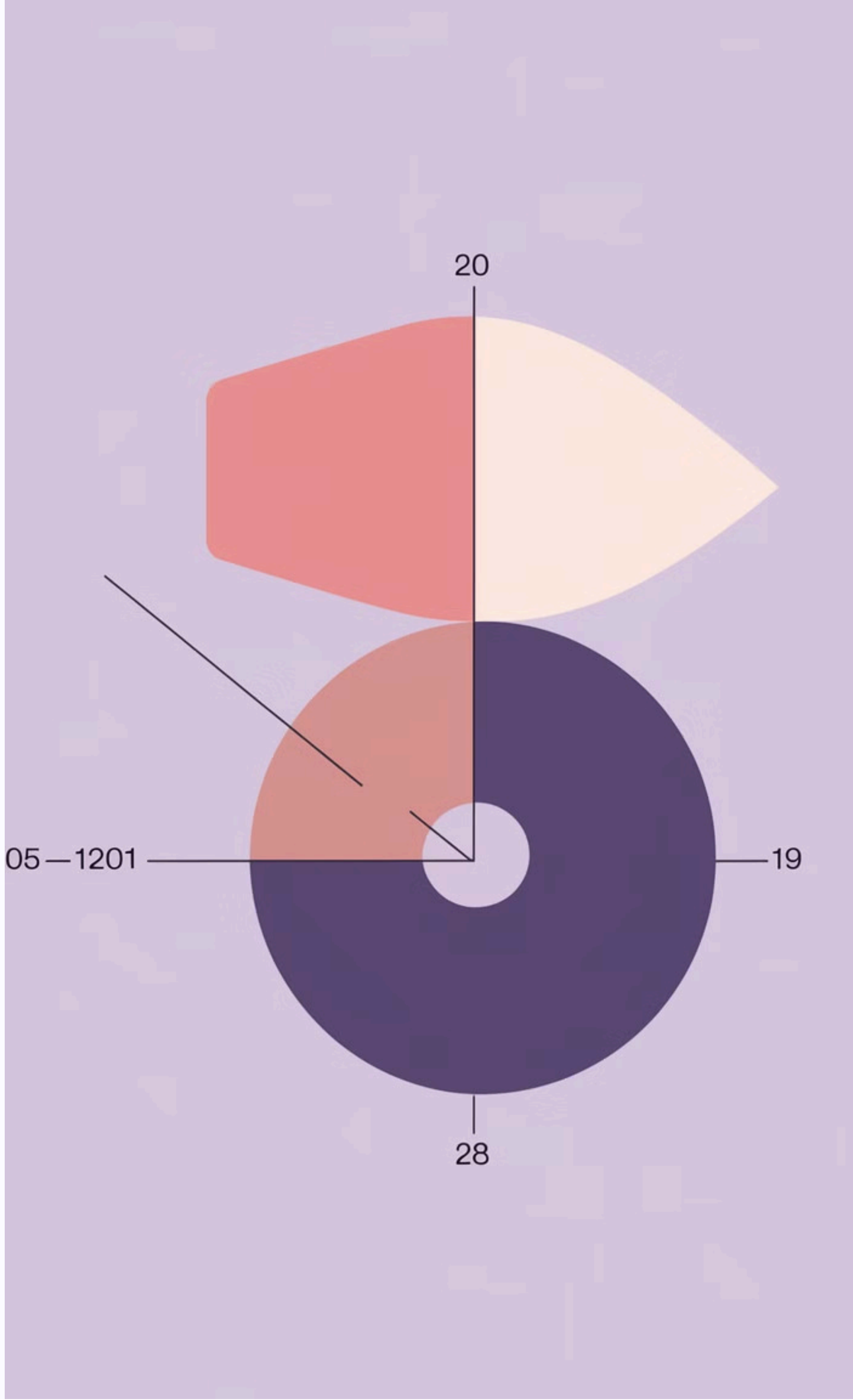
Representa a distância do ponto z à origem no plano complexo.

Relação com o Teorema de Pitágoras

O módulo é a hipotenusa do triângulo retângulo formado com os eixos.

Propriedades

$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ e $|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|$



Forma Trigonométrica

1

Representação

$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

2

Módulo e Argumento

$r = |z|$ e $\theta = \arg(z)$

3

Conversão da Forma Algébrica

$r = \sqrt{(a^2 + b^2)}$ e $\theta = \arctan(b/a)$*

4

Exemplo

$3 + 3i = 3\sqrt{2}(\cos 45° + i \sin 45°)$

*O valor de θ depende do quadrante onde o número complexo se encontra. É necessário ajustar o valor obtido com arctan(b/a).

Operações na Forma Trigonométrica

Multiplicação

$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i \sin(\theta_1+\theta_2)]$

Multiplicar módulos, somar argumentos.

Divisão

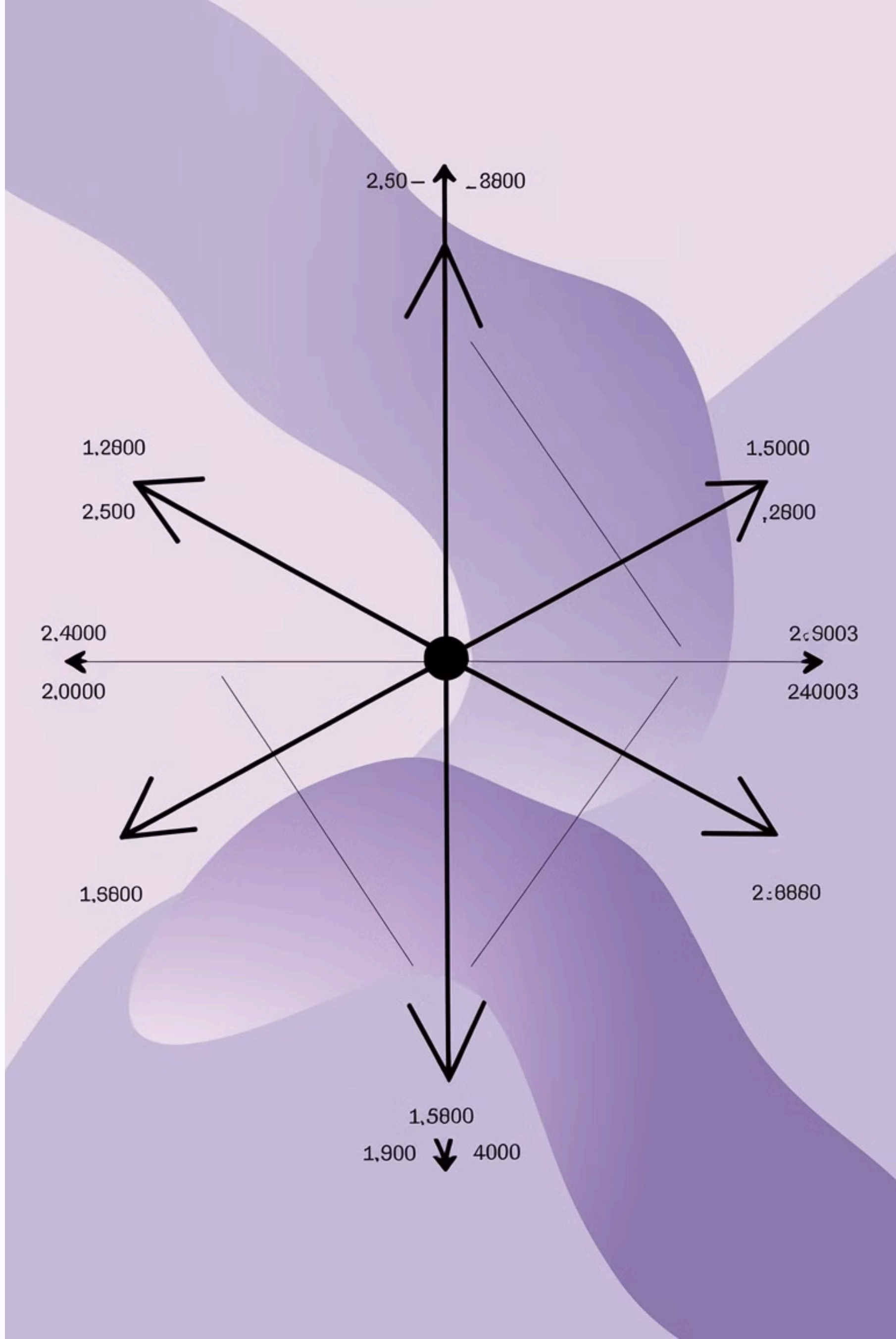
$z_1/z_2 = (r_1/r_2)[\cos(\theta_1-\theta_2) + i \sin(\theta_1-\theta_2)]$

Dividir módulos, subtrair argumentos.

Potenciação (De Moivre)

z^n = r^n[cos(nθ) + i sin(nθ)]

Elevar o módulo a n, multiplicar o argumento por n.



Raízes de Números Complexos

Representação Geométrica

As raízes estão igualmente espaçadas numa circunferência.

Formam um polígono regular de n lados.

Raízes n-ésimas

As n raízes n-ésimas de z são dadas por:

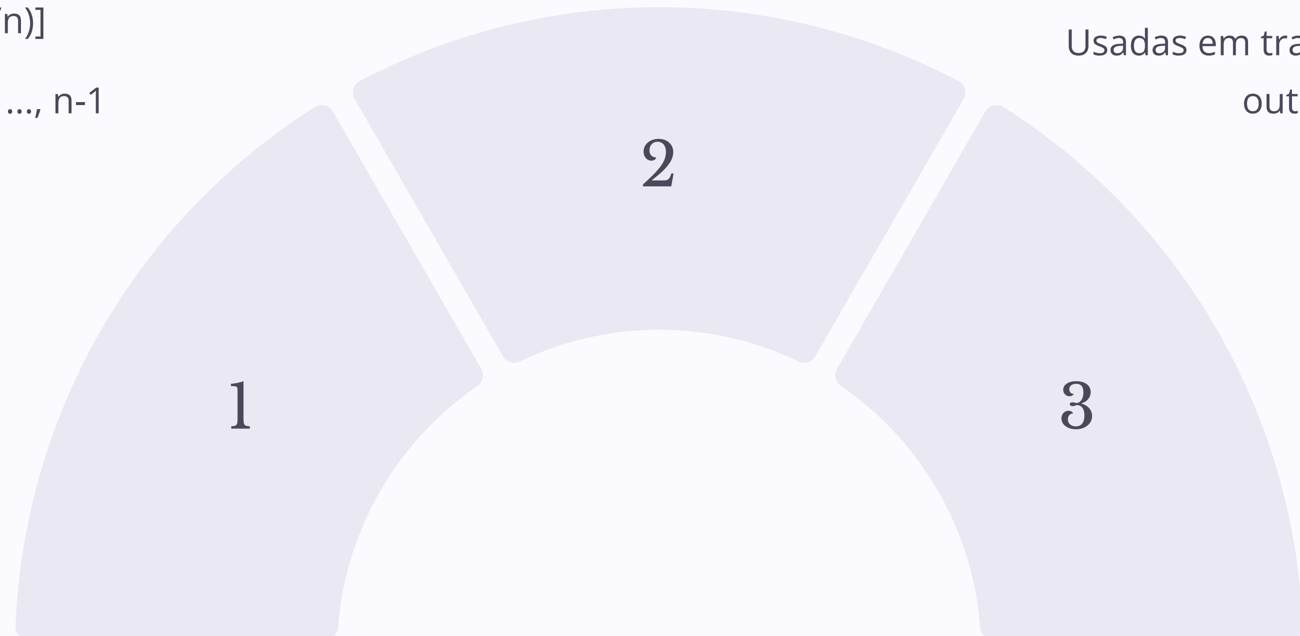
$w_k = \sqrt[n]{r}\ [\cos((\theta+2\pi k)/n) + i \sin((\theta+2\pi k)/n)]$

Para k = 0, 1, 2, ..., n-1

Raízes da Unidade

As raízes n-ésimas de 1 são muito importantes na matemática.

Usadas em transformadas de Fourier e outras aplicações.



Forma Exponencial

Fórmula de Euler

$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$

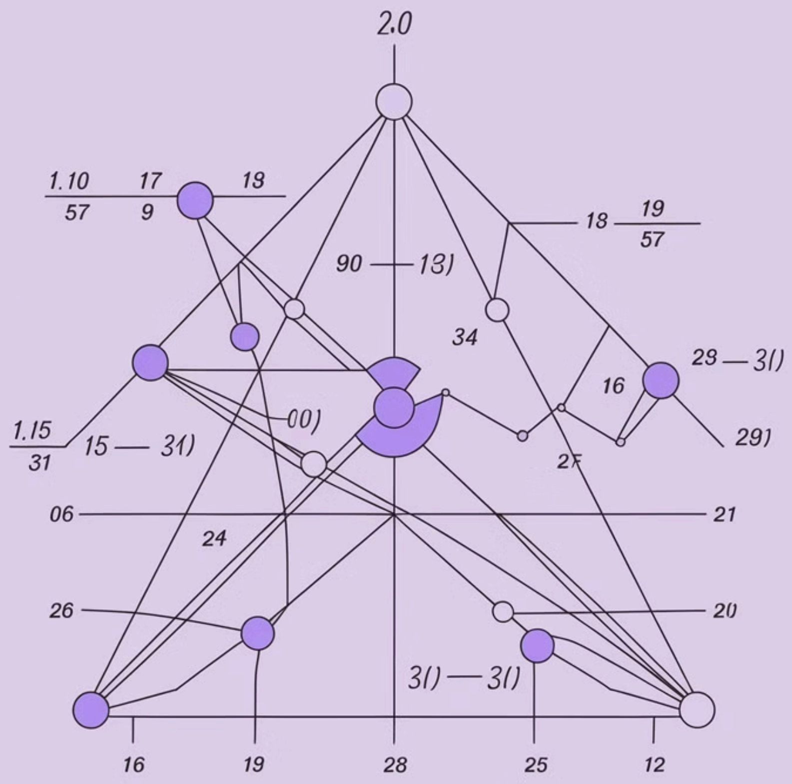
Representação Exponencial

$z = re^{i\theta}$

Equivalência

$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}$

A forma exponencial simplifica muitas operações com números complexos, especialmente potenciação e raízes. É particularmente útil em análise complexa e equações diferenciais.



Equações no Campo Complexo

Equação	Soluções
$x^2 + 1 = 0$	$x = \pm i$
$x^2 - 2x + 5 = 0$	$x = 1 \pm 2i$
$x^2 + 4 = 0$	$x = \pm 2i$
$x^3 - 1 = 0$	$x = 1, -1/2 \pm (\sqrt{3}/2)i$
$x^4 - 16 = 0$	$x = \pm 2, \pm 2i$

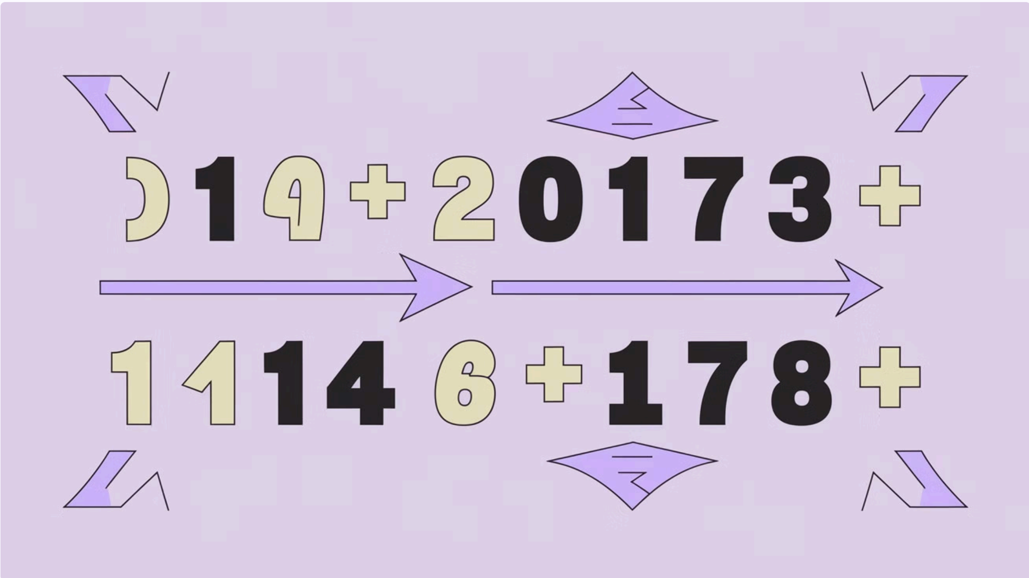
O Teorema Fundamental da Álgebra garante que qualquer equação polinomial de grau n tem exatamente n raízes no campo complexo, contando multiplicidades.

Interpretação Geométrica das Operações

Adição e Subtração

Somam-se vetores no plano complexo, utilizando a regra do paralelogramo.

$z_1 + z_2$ é o vetor diagonal do paralelogramo formado por z_1 e z_2.

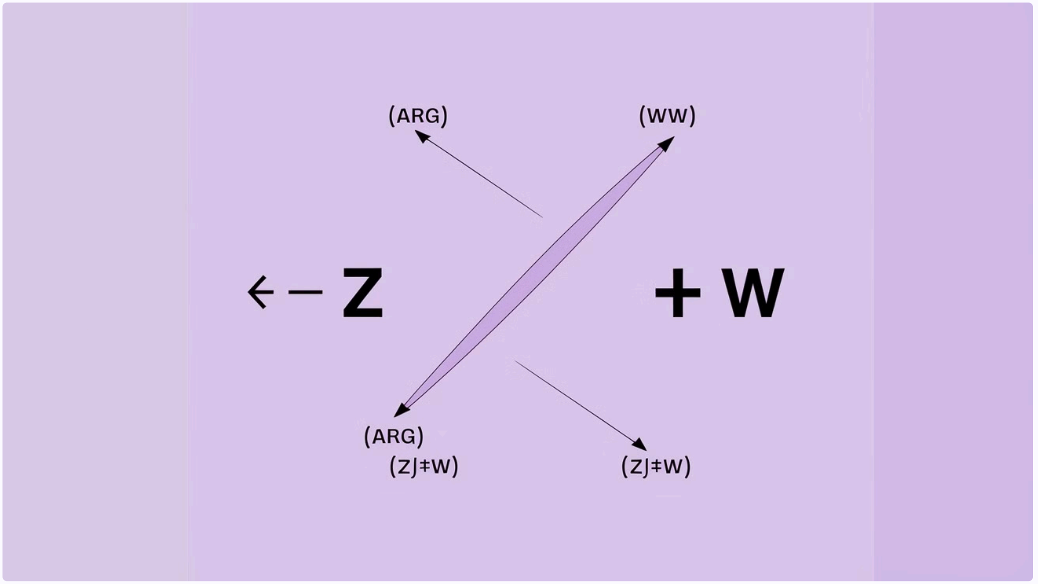


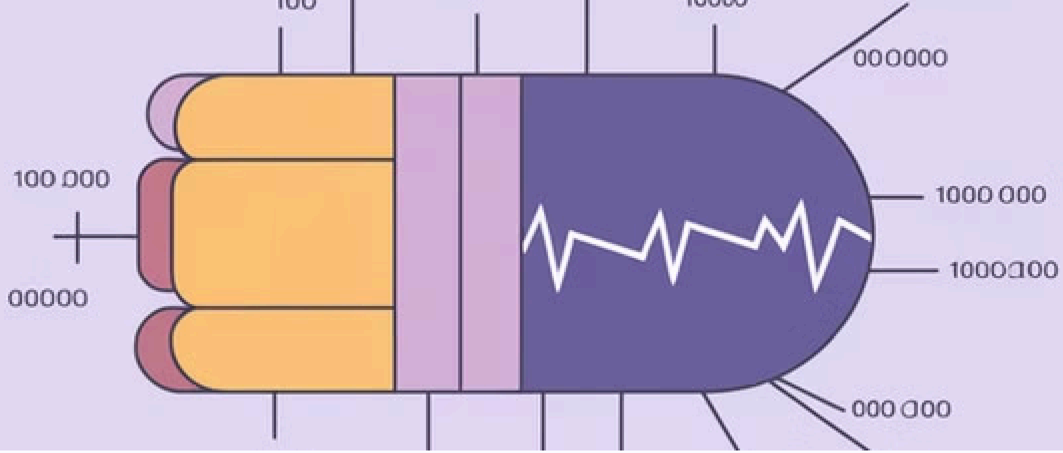
Multiplicação

Corresponde a uma rotação e dilatação no plano.

$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ - multiplicação dos módulos (dilatação)

$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$ - soma dos argumentos (rotação)





Aplicações na Física

Circuitos Elétricos

- Impedância: $Z = R + iX$
- Corrente alternada
- Análise de circuitos RLC

Movimentos Oscilatórios

- Osciladores harmónicos
- Ondas eletromagnéticas
- Movimentos periódicos

Mecânica Quântica

- Função de onda
- Operadores hermitianos
- Transformações unitárias

Aplicações na Engenharia

80%

Processamento Digital

Dos algoritmos de processamento de sinais utilizam números complexos.

1822

História

Ano em que Fourier desenvolveu a sua transformada, crucial para processamento de sinais.

2D

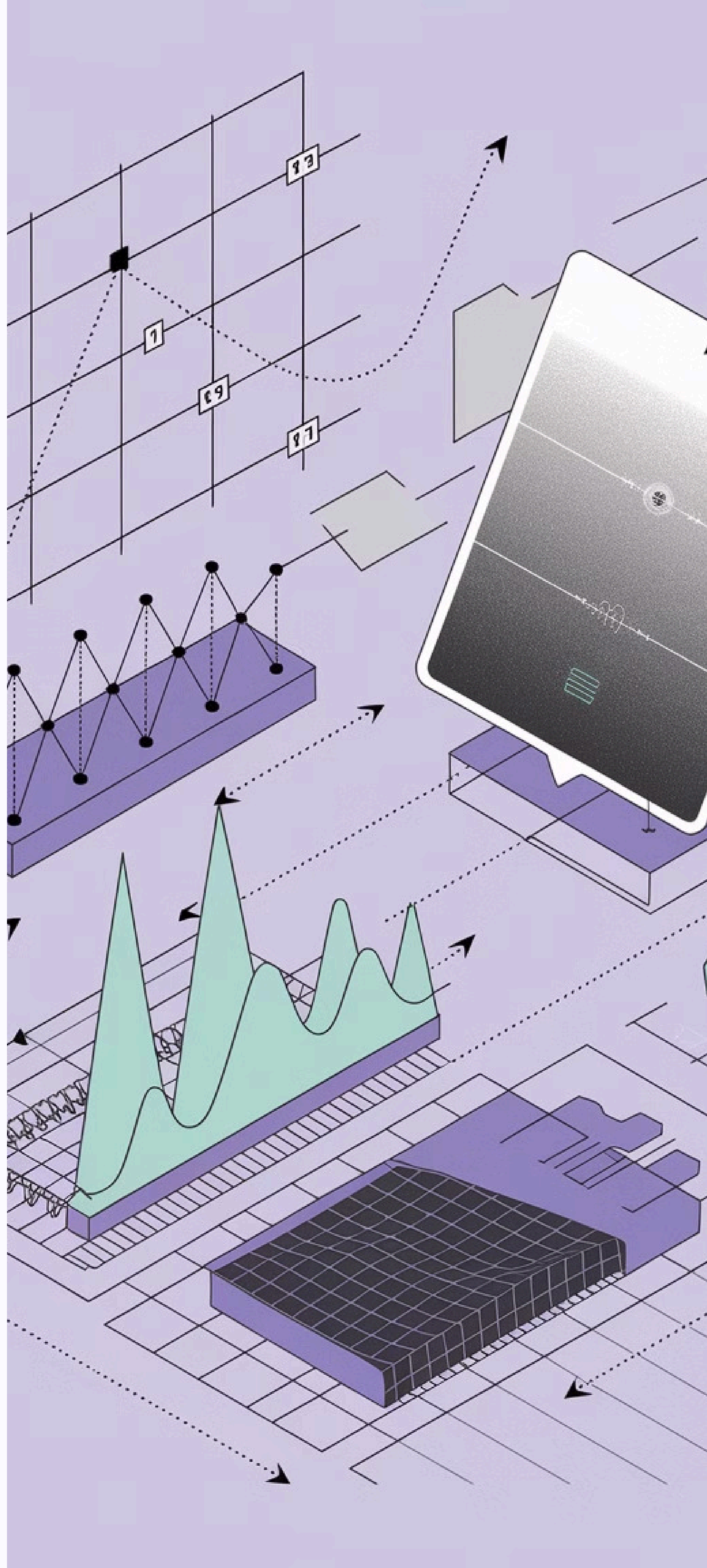
Imagens

Imagens digitais são processadas como matrizes de números complexos.

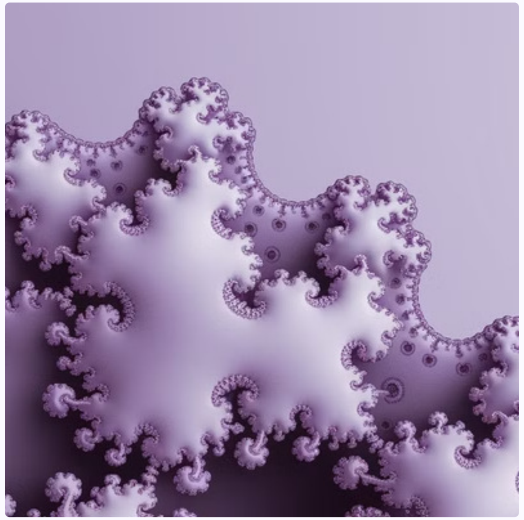
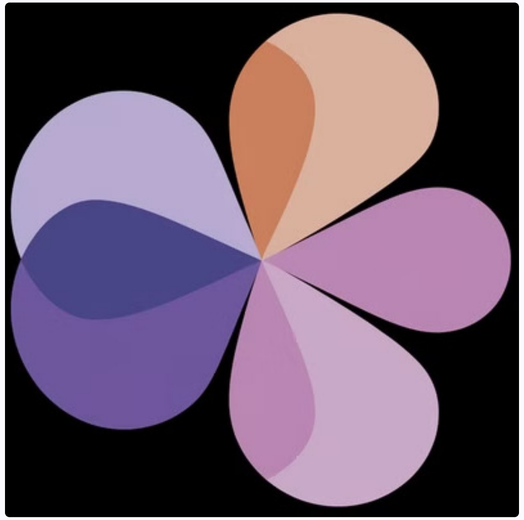
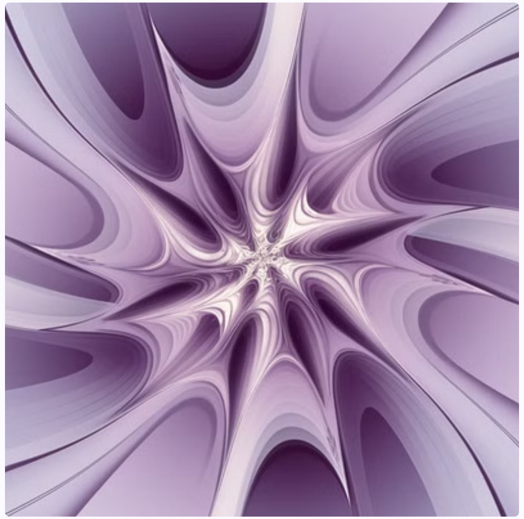
360°

Rotações

Rotações e transformações são simplificadas usando números complexos.



Números Complexos e Fractais

Fractais como o conjunto de Mandelbrot são definidos pela iteração da função $z \to z^2 + c$ no plano complexo, revelando estruturas infinitamente complexas e auto-similares.

Exercícios Resolvidos

1

Problema 1: Encontre todas as raízes cúbicas de 8.

$8 = 8(\cos 0° + i \sin 0°)$

$\sqrt[3]{8} = 2(\cos(0°+360°k)/3 + i \sin(0°+360°k)/3), k=0,1,2$

Soluções: $2, -1+i\sqrt{3}, -1-i\sqrt{3}$

2

Problema 2: Calcule $(1+i)^8$.

$|1+i| = \sqrt{2}$

$\arg(1+i) = 45°$

$(1+i)^8 = (\sqrt{2})^8[\cos(8 \cdot 45°) + i \sin(8 \cdot 45°)] = 16[\cos 360° + i \sin 360°] = 16$

3

Problema 3: Resolva $z^2 + z + 1 = 0$.

Usando a fórmula quadrática: $z = (-1\pm\sqrt{(1-4)})/2 = (-1\pm\sqrt{(-3)})/2 = -1/2\pm(\sqrt{3}/2)i$

Curiosidades Históricas

1 — Século XVI

Cardano usa números "impossíveis" para resolver equações cúbicas.

2 — 1777

Euler introduz o símbolo i para a unidade imaginária.

3 — 1799

Gauss apresenta o Teorema Fundamental da Álgebra usando complexos.

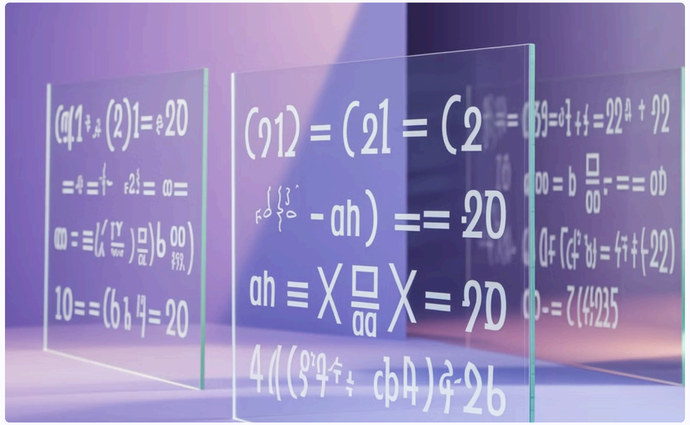
4 — 1843

Hamilton desenvolve os quaterniões, uma extensão dos complexos.

5 — 1897

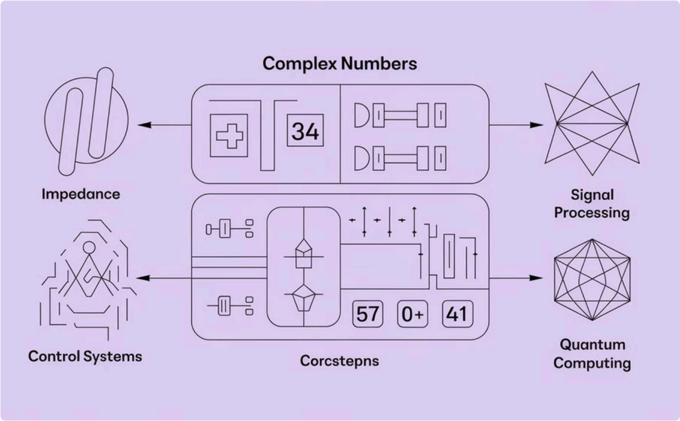
Steinmetz aplica números complexos a circuitos elétricos.

Recapitulação e Conclusão



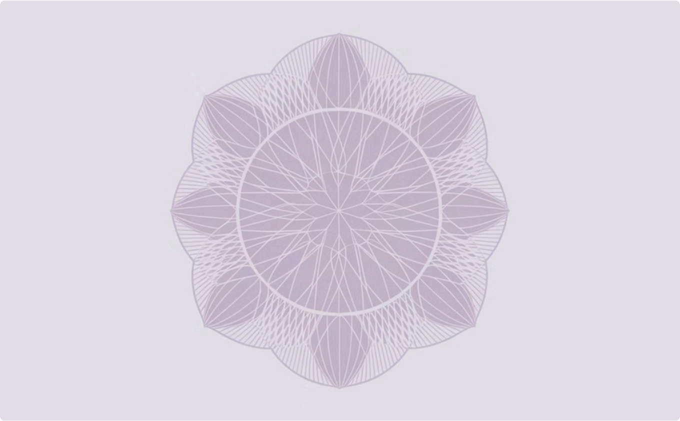
Fundamentos

Revisámos as representações algébrica, trigonométrica e exponencial, bem como as operações básicas.



Aplicações

Explorámos aplicações em física, engenharia e matemática pura.



Beleza Matemática

Descobrimos como os números complexos revelam padrões surpreendentes em fractais e fenómenos naturais.

Os números complexos são ferramentas essenciais na matemática moderna, construindo uma ponte entre teoria abstrata e aplicações práticas.