Informacija in kodi

UN2-1-AV 2024/2025

Komunikacijski kanali I

Simon Dobrišek

november 2024

Teme predavanja

- Model komunikacijskega kanala
- Zvezni komunikacijski kanal
- Diskretni komunikacijski kanali
- Kapaciteta diskretnega kanala brez spomina
- Kapaciteta diskretnega kanala brez motenj
- Kapaciteta neuporabnega diskretnega kanala
- Kapaciteta simetričnega diskretnega kanala

Model komunikacijskega kanala

V tehničnem komunikacijskem sistemu komunikacijski kanal sestavljajo:

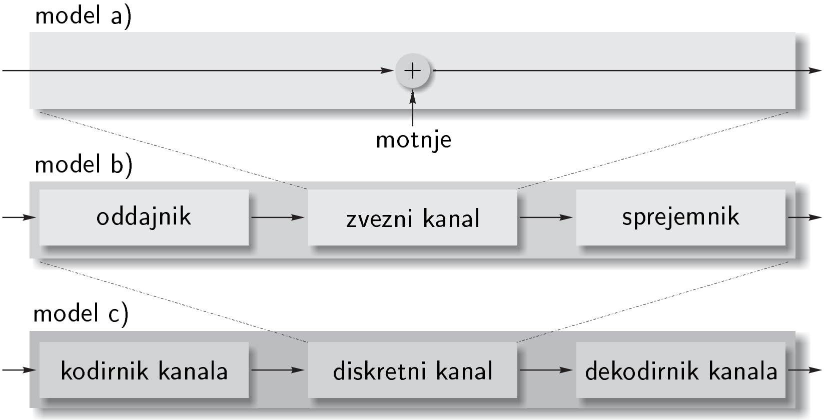
- kodirnik kanala in oddajnik,
- linija (zvezni kanal),
- sprejemnik in dekodirnik kanala.

Ko abstraktno opisujemo komunikacijski kanal, ga navadno opišemo z naslednjimi matematičnimi modeli:

a) z modelom zveznega kanala,
b) z modelom sestava: oddajnik – zvezni kanal – sprejemnik, ki mu pravimo tudi *diskretni kanal* in
c) z modelom sestava: kodirnik kanala[1] – diskretni kanal – dekodirnik kanala.

[1] Kodirnik, ki kod prilagodi kanalu z motnjami.

Komunikacijski kanal



Slika: Komunikacijski kanal kot vgnezdena struktura.

Zvezni komunikacijski kanal

Zvezni komunikacijski kanal prevaja *zvezne signale*, ki jih oddaja oddajnik.

Če predpostavimo, da imamo na vhodu v kanal signal, ki traja T sekund (s) in vsebuje le frekvence med 0 in F hertzov (Hz), sta signala na vhodu in izhodu iz zveznega kanala popolnoma določena z $n = 2FT$ enakomerno razporejenimi vrednostmi signala[2].

Predpostavimo tudi, da ima signal na vhodu v kanal moč, ki ne presega S wattov (W), ter da se šum seštevalno primeša signalu, ki se prevaja po kanalu.

[2] Shannonov izrek o vzorčenju signalov.

Kapaciteta zveznega kanala

Kapaciteta kanala je parameter modela zveznega kanala, ki govori o količini informacije, ki jo je zvezni kanal zmožen prevajati (sprejeti vase) v enoti časa.

DEFINICIJA 7.1 *Kapaciteta zveznega kanala je največja možna vrednost povprečne vzajemne informacije* $I(X, Y)$ *glede na vse možne funkcije verjetnostne gostote vhodnih signalov, to je*

$$C = \max_{f_X(x)} \big\{ I(X, Y) \big\}. \tag{1}$$

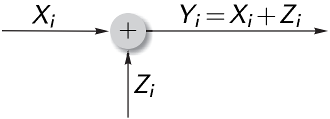
Oglejmo si, kako jo določimo.

Kapaciteta zveznega kanala

Opazujmo najprej kanal v določenem trenutku $t = i$.

V i-tem trenutku, razmere na vhodu v kanal opišemo z zvezno naključno spremenljivko X_i, razmere na izhodu iz kanala pa s spremenljivko $Y_i = X_i + Z_i$, kjer je Z_i spremenljivka, s katero opišemo motnje (šum).

Naključni spremenljivki X_i in Z_i sta statistično neodvisni.



Slika: Model zveznega (Gaussovega) kanala v trenutku $t = i$.

Povprečna vzajemna informacija zveznega kanala

Povprečno vzajemno informacijo lahko zapišemo kot[3]

$$
\begin{aligned}
I(X,Y) &= h(Y) - h(Y \mid X) \\
&= h(Y) - h\big((X+Z) \mid X\big) \\
&= h(Y) - h(Z \mid X) \\
&= h(Y) - h(Z). \qquad (2)
\end{aligned}
$$

Pri tem smo upoštevali, da je $h(X \mid X) = 0$ ter da sta Z in X neodvisna.

[3] Zaradi enostavnejšega zapisa pišemo naključne spremenljivke brez indeksa i.

Kapaciteta zveznega kanala

Na vhodu v kanal imajo signali omejeno moč, zato lahko pišemo

$$E\{X^2\} \leq S,$$

kjer je S konstanta.

Motnje v zveznem kanalu navadno modeliramo z normalno (Gaussovo) funkcijo verjetnostne gostote, zato kot sopomenko za zvezni kanal pogosto uporabljamo izraz *Gaussov kanal*. Predpostavimo, da imajo motnje matematično upanje $E\{Z\} = 0$ in

omejeno moč (varianco)

$$E\{Z^2\} = N,$$

kjer je N konstanta.

Kapaciteta zveznega kanala

Ker je entropija Gaussovega šuma $h(Z) = \ln \sqrt{2\pi e N}$, lahko kapaciteto zapišemo kot

$$\begin{aligned} C &= \max_{f_X(x)} \Big\{ I(X,Y) \Big\} \\ &= \max_{f_X(x)} \Big\{ h(Y) - h(Z) \Big\} \\ &= \max_{f_X(x): E\{X^2\} \leq S} \Big\{ h(Y) - \ln \sqrt{2\pi e N} \Big\} \\ &= \max_{f_X(x): E\{X^2\} \leq S} \Big\{ h(Y) \Big\} - \ln \sqrt{2\pi e N}. \end{aligned} \tag{3}$$

Kapaciteta zveznega kanala

Glede na to, da ima entropija zvezne naključne spremenljivke največjo vrednost, če je funkcija gostote verjetnosti te spremenljivke normalna, in je moč (varianca) spremenljivke Y enaka

$$E\{Y^2\} = E\{(X+Z)^2\} = E\{X^2\}+2E\{X\}E\{Z\}+E\{Z^2\} = S+N,$$

sledi, da je kapaciteta časovno diskretnega zveznega kanala enaka

$$\begin{aligned} C &= \ln\sqrt{2\pi e(S+N)} - \ln\sqrt{2\pi e N} \\ &= \frac{1}{2}\ln\big(2\pi e(S+N)\big) - \frac{1}{2}\ln\left(2\pi e N\right) \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{S}{N}\right) \end{aligned}$$

oziroma splošno

$$C = \frac{1}{2} K \log_d \left(1+\frac{S}{N}\right). \tag{4}$$

Kapaciteta zveznega kanala z omejenim frekvenčnim pasom

Izraz za kapaciteto časovno diskretnega zveznega kanala lahko razširimo na *časovno in amplitudno zvezne kanale z omejenim frekvenčnim pasom* širine F hertzov.

Če vzamemo, da v vhodnih signalih ni frekvence izven frekvenčnega pasu širine F, in če upoštevamo, da pri prevajanju signala, ki smo ga lahko zapisali z $2F$ vzorci na sekundo, uporabimo časovno diskretni Gaussov kanal natanko $2F$ krat, iz (4) dobimo kapaciteto zveznega Gaussovega kanala z omejeno pasovno širino

$$\begin{aligned} C &= 2F \cdot \frac{1}{2} K \log_d \left(1 + \frac{S}{N}\right) \\ &= F \cdot K \log_d \left(1 + \frac{S}{N}\right). \end{aligned} \tag{5}$$

Enačba (5) nosi ime po Shannonu in Hartleyu.

Kapaciteta zveznega kanala z omejenim frekvenčnim pasom

Če vzamemo, da sta $K = 1$ in $d = 2$, je enota kapacitete kanala C bit/s, če pa vzamemo $K = 1$ in $d = e$, je enota nat/s, itn.

Primer 7.1 Telefonska linija je zvezni kanal s frekvenčnim pasom med 300 in 3400 Hz.

Če vzamemo, da je razmerje signal šum enako $S/N = 100$ (to je 20 dB), iz (5) sledi, da je kapaciteta telefonskega kanala enaka

$$3100 \log_2 101 \approx 20.640 \text{ bitov/s}.$$

(Dejanska hitrost prenosa po telefonski liniji pri razmerju signal šum 20 dB je nekoliko nižja od izračunane vrednosti zaradi pomanjkljivosti telefonskih kanalov, kot so presluh, odboj ipd.). $\square$

Kapaciteta zveznega kanala z omejenim frekvenčnim pasom

Iz enačbe

$$C = F \cdot K \log_d \left(1 + \frac{S}{N}\right)$$

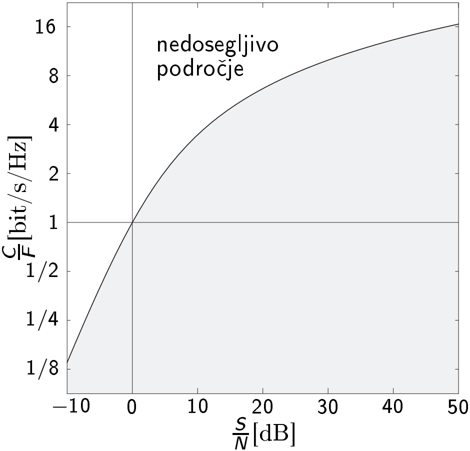
sledi, da je največja količina informacije, ki jo lahko prevaja zvezni Gaussov kanal v enoti časa, premo sorazmerna pasovni širini kanala in razmerju signal šum.

Če delimo C z F, dobimo največjo količino prevajane informacije na enoto pasovne širine kanala - pravimo ji *zgornja meja prepusnosti* zveznega Gaussovega kanala:

$$\frac{C}{F} = K \log_d \left(1 + \frac{S}{N}\right), \tag{6}$$

ki kaže na odvisnost količine prevajane informacije od razmerja moči signala in šuma.

Kapaciteta zveznega kanala



Slika: Graf funkcije C/F bitov na sekundo na hertz v odvisnosti od razmerja S/N decibelov. Po kanalu je možno prevajati informacijo za vsak par $(C/F\,, S/N)$, ki se nahaja desno od grafa funkcije.

Kapaciteta zveznega kanala z belim Gaussovim šumom

Vzemimo zvezni Gaussovi kanal z omejeno pasovno širino, ki je moten z belim Gaussovim šumom in ga krajše imenujemo tudi kanal AWGN[4].

Nad celotnim frekvenčnim pasom kanala je moč belega Gaussovega šuma stalna, njegov spekter pa je zvezen in enakomeren.

Beli Gaussov šum ima dvostransko močnostno spektralno gostoto $N_0/2$ wattov na hertz.

Kapaciteta kanala, ki je moten z belim Gaussovim šumom, je tako enaka

$$C = F \cdot K \log_d \left(1 + \frac{S}{N_0 F}\right). \tag{7}$$

[4] Angleški izraz: *Additive White Gaussian Noise (AWGN).*

Kapaciteta zveznega kanala

Za kapaciteto zveznega Gaussovega kanala z omejeno pasovno širino, ki je moten z belim Gaussovim šumom, lahko dokažemo naslednji izrek:

IZREK 7.1 *Če širimo pasovno širino kanala F proti neskončnosti pri konstantnem razmerju S/N_0, teži kapaciteta kanala (7) h končni vrednosti*

$$K \log_d \left(e \cdot \frac{S}{N_0} \right) .$$

Dokaz: Glej učbenik *Informacija in kodi* str. 150.

Kapaciteta zveznega kanala AWGN

S širjenjem pasovne širine kanala F proti neskončnosti pri konstantnem razmerju S/N_0 kapaciteta zveznega kanala AWGN torej ne narašča čez vse meje, temveč teži h končni vrednosti

$$K \log_d(e \cdot S \,/\, N_0).$$

Če pa moč signala S narašča čez vse meje pri stalni pasovni širini kanala in stalni močnostni spektralni gostoti šuma, kapaciteta zveznega kanala AWGN monotono narašča proti neskončnosti.

Zato kanal AWGN bolje izkoristimo, če večamo moč signalov, ki nosijo informacijo, pri stalni pasovni širini kanala in stalni močnostni spektralni gostoti šuma, kakor če širimo pasovno širino kanala pri stalnem razmerju S/N_0.

Kapaciteta zveznega kanala AWGN

Ker traja prevajanje enega bita informacije po kanalu AWGN s kapaciteto C natanko $1/C$ sekunde, je povprečna energija signala, ki nosi 1 bit informacije, enaka

$$E_b = \frac{S}{C} \quad \mathrm{J/bit}.$$

Iz

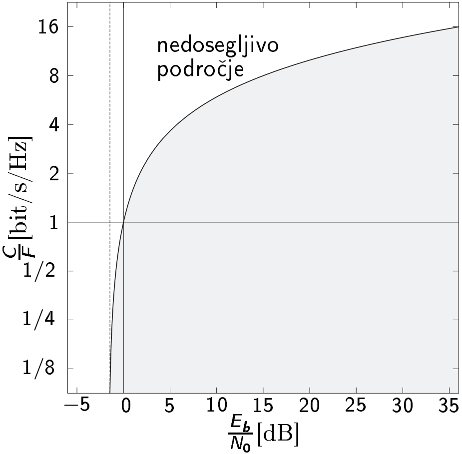
$$C = F \cdot K \log_d \left(1 + \frac{S}{N_0 F}\right)$$

sledi:

$$\frac{C}{F} = \log_2 \left(1 + \frac{E_b}{N_0} \cdot \frac{C}{F}\right) \quad \mathrm{bit/s/Hz}. \tag{8}$$

Zveza (8) predstavlja *zgornjo mejo prepustnosti* kanala AWGN.

Kapaciteta zveznega kanala AWGN



Slika: Graf funkcije C/F v odvisnosti od razmerja E_b/N_0. Premica v točki $E_b/N_0 = -1,59$ dB je asimptota največje prepustnosti C/F, ko ta teži k 0.

Kapaciteta zveznega kanala AWGN

Najmanjšo povprečno energijo signalov, ki še omogoča prevajanje informacije po kanalu AWGN s kapaciteto C, dobimo tako, da v izrazu

$$\frac{C}{F} = \log_2\left(1 + \frac{E_b}{N_0} \cdot \frac{C}{F}\right) \quad \mathrm{bit/s/Hz}$$

prepustnost kanala pošljemo proti nič ($C/F \to 0$).

Naj bo

$$x = \frac{E_b}{N_0} \cdot \frac{C}{F}.$$

Zapišimo izraz (8) najprej kot

$$\frac{C}{F} = x \log_2(1 + x)^{\frac{1}{x}},$$

potem pa še kot

$$1 = \frac{E_b}{N_0} \log_2(1 + x)^{\frac{1}{x}}. \tag{9}$$

Kapaciteta zveznega kanala AWGN

Ko gre $C/F \to 0$, potem gre $x \to 0$. Iz enakosti

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e,$$

sedaj sledi

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{1}{\log_2 e} \approx 0,693$$

oziroma v decibelih

$$\frac{E_b}{N_0} = 10 \log_{10} \left(\frac{1}{\log_2 e} \right) \approx -1,59 \quad \text{dB}.$$

Vrednosti $E_b/N_0 \approx 0,693$ oziroma $E_b/N_0 \approx -1,59$ dB pravimo *Shannonova mejna vrednost* razmerja E_b/N_0, pod katero postane največja prepustnost kanala AWGN enaka nič.

Diskretni komunikacijski kanali

Abstraktno opisovanje diskretnih komunikacijskih kanalov temelji na predpostavki, da poznamo množico znakov na vhodu v diskretni kanal

$$U = \{x_1, x_2, \ldots, x_u\},$$

množico znakov na izhodu iz kanala

$$V = \{y_1, y_2, \ldots, y_v\}$$

in pogojne verjetnosti

$$P(\mathrm{y}|\mathrm{x}),$$

to je verjetnosti, da dobimo na izhodu iz kanala niz

$$\mathrm{y} \in V^n,$$

če je na vhodu niz

$$\mathrm{x} \in U^n.$$

Diskretni komunikacijski kanali

DEFINICIJA 7.2 *Diskretni komunikacijski kanal je sistem, ki ga opišemo s trojico* $(U, \{P(\mathrm{y}|\mathrm{x})\}, V)$, *kjer so:*

- $U = \{x_1, x_2, ..., x_u\}$ *množica vhodnih znakov,*
- $V = \{y_1, y_2, ..., y_v\}$ *množica izhodnih znakov in*
- $\{P(\mathrm{y}|\mathrm{x})\}$ *množica verjetnosti, da dobimo na izhodu iz kanala niz* $\mathrm{y} \in V^n$, *če je na vhodu niz* $\mathrm{x} \in U^n$, *za vsak* $n \in \aleph$.

DEFINICIJA 7.3 *Diskretni komunikacijski kanal brez spomina je diskretni kanal, za katerega za vsak* $n \in \aleph$ *velja*

$$P(\mathrm{y}|\mathrm{x}) = P((y_1, ..., y_n)|(x_1, ..., x_n)) = \prod_{i=1}^{n} P(y_i|x_i). \qquad (10)$$

Pri tem so $P(y_j|x_i)$ *pogojne verjetnosti, da pri oddanih znakih* $x_i \in U$ *sprejmemo znake* $y_j \in V$.

Diskretni komunikacijski kanali

Diskretne komunikacijske kanale brez spomina tako opišemo s trojico (U, P_K, V), kjer so:

- $U = \{x_1, x_2, ..., x_u\}$ množica vhodnih znakov,
- $V = \{y_1, y_2, ..., y_v\}$ množica izhodnih znakov in
- $\mathrm{P}_K = [a_{ij} \geq 0]$ (verjetnostna) matrika kanala

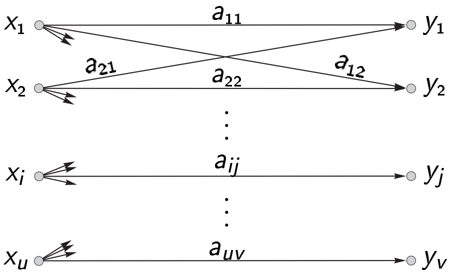
z elementi

$$
\begin{aligned}
a_{ij} &= P(y_j|x_i) \qquad & i = 1, 2, ..., u \qquad & j = 1, 2, ..., v \\
& & \sum_{j=1}^{v} a_{ij} = 1 \qquad & i = 1, 2, ..., u. \qquad (11)
\end{aligned}
$$

Torej

$$
\mathrm{P}_K = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1v} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2v} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{u1} & a_{u2} & \dots & a_{uv} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P(y_1 \mid x_1) & P(y_2 \mid x_1) & \dots & P(y_v \mid x_1) \\ P(y_1 \mid x_2) & P(y_2 \mid x_2) & \dots & P(y_v \mid x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P(y_1 \mid x_u) & P(y_2 \mid x_u) & \dots & P(y_v \mid x_u) \end{bmatrix}.
$$

Diskretni komunikacijski kanali



Slika: Grafični model diskretnega kanala brez spomina.

Prehodi znakov iz vhodne abecede v znake iz izhodne abecede so ponazorjeni z usmerjenimi daljicami, ki so obtežene s pogojnimi verjetnostmi prehodov.

Diskretni komunikacijski kanali

Ker so diskretni komunikacijski kanali brez spomina popolnoma določeni z matriko kanala P_K, bomo nadaljnjo obravnavo diskretnih komunikacijskih kanalov omejili le na takšne kanale.

Ustvarjanje informacije v viru informacije naključen proces, zato se na vhodu v kanal pojavljajo znaki, v skladu z določeno porazdelitvijo verjetnosti

$$P(x_i) = p_i \geq 0 \qquad i = 1, ..., u \qquad \sum_{i=1}^{u} p_i = 1, \tag{12}$$

kjer smo s $P(x_i)$ označili verjetnost, da se pojavi znak x_i.

Znak na izhodu iz kanala y_j je lahko posledica kateregakoli znaka, ki se lahko pojavi na vhodu v kanal: $x_1, ..., x_u$.

Diskretni komunikacijski kanali

Vzemimo, da je oddan znak x_i, ko je sprejet znak y_j. S

$$P(y_j) = p'_j; \;\; j = 1, ..., v$$

označimo verjetnost, da je izhodni znak prav y_j.
Iz izraza o robnih verjetnostih sledi

$$P(y_j) = \sum_{i=1}^{u} P(x_i)P(y_j|x_i) = \sum_{i=1}^{u} p_i a_{ij} \qquad j = 1, ..., v \;, \qquad (13)$$

iz

$$a_{ij} = P(y_j|x_i) \qquad i = 1, 2, ..., u \qquad j = 1, 2, ..., v$$

$$\sum_{j=1}^{v} a_{ij} = 1 \qquad i = 1, 2, ..., u.$$

Diskretni komunikacijski kanali

in

$$P(x_i) = p_i \geq 0 \qquad i = 1, ..., u \qquad \sum_{i=1}^{u} p_i = 1,$$

pa še

$$\sum_{j=1}^{v} P(y_j) = \sum_{i=1}^{u} P(x_i) \sum_{j=1}^{v} P(y_j|x_i) = 1. \tag{14}$$

Torej $(p'_1, ..., p'_v)$ predstavlja porazdelitev verjetnosti nad množico izhodnih znakov.

Vhod v kanal lahko zato obravnavamo kot naključno spremenljivko X z zalogo vrednosti $\mathcal{Z}(X) = U$ in porazdelitvijo verjetnosti $P_X = (p_1, ..., p_u)$,
izhod iz kanala pa kot naključno spremenljivko Y z zalogo vrednosti $\mathcal{Z}(Y) = V$ in porazdelitvijo verjetnosti $P_Y = (p'_1, ..., p'_v)$.

Diskretni komunikacijski kanali

Za kanal (U, P_K, V) lahko definiramo pet entropij:

1. entropijo vhodnih znakov, $H(X)$,
2. entropijo izhodnih znakov, $H(Y)$,
3. vezano entropijo vhodnih in izhodnih znakov, $H(X, Y)$,
4. pogojno entropijo izhodnih znakov glede na vhodne znake, $H(Y|X)$, ter
5. pogojno entropijo vhodnih znakov glede na izhodne znake, $H(X|Y)$.

Diskretni komunikacijski kanali

Če s $c_{ij} = P(x_i|y_j)$ označimo pogojno verjetnost, da je oddan znak x_i, ko je sprejet izhodni znak y_j, potem je po Bayesovi formuli

$$c_{ij} = \frac{p_i a_{ij}}{p'_j} \tag{15}$$

za vsak $i = 1, 2, ..., u$ in za vsak $j = 1, 2, ..., v$, za katerega je $p'_j > 0$, kjer je

$$\sum_{i=1}^{u} c_{ij} = \frac{\sum_{i=1}^{u} p_i a_{ij}}{p'_j} = \frac{p'_j}{p'_j} = 1.$$

Očitno je, da za vsak urejen par (x_i, y_j); $i = 1, ..., u; j = 1, ..., v$ lahko govorimo o njegovi verjetnosti $P(x_i, y_j)$, kjer je

$$P(x_i, y_j) = p_i a_{ij} = p'_j c_{ij} \qquad \sum_{i=1}^{u}\sum_{j=1}^{v} P(x_i, y_j) = 1. \tag{16}$$

Diskretni komunikacijski kanali

Izhajajoč iz robnih in vezanih porazdelitev verjetnosti

$$P(x_i) = p_i \geq 0 \qquad i = 1, \dots, u \qquad \sum_{i=1}^{u} p_i = 1,$$

$$P(y_j) = \sum_{i=1}^{u} P(x_i) P(y_j|x_i) = \sum_{i=1}^{u} p_i a_{ij} \qquad j = 1, \dots, v,$$

$$a_{ij} = P(y_j|x_i) \qquad i = 1, 2, \dots, u \qquad j = 1, 2, \dots, v$$

$$\sum_{j=1}^{v} a_{ij} = 1 \qquad i = 1, 2, \dots, u.$$

$$\sum_{j=1}^{v} P(y_j) = \sum_{i=1}^{u} P(x_i) \sum_{j=1}^{v} P(y_j|x_i) = 1$$

$$c_{ij} = \frac{p_i a_{ij}}{p'_j}$$

Diskretni komunikacijski kanali

... lahko tako obravnavamo:

- entropijo oziroma povprečno informacijo vhodnih znakov

$$H(X) = -K \sum_{i=1}^{u} p_i \log_d p_i ,$$

- entropijo oziroma povprečno informacijo izhodnih znakov

$$H(Y) = -K \sum_{j=1}^{v} p'_j \log_d p'_j ,$$

- vezano entropijo vhodnih in izhodnih znakov oziroma povprečno nedoločenost komunikacijskega kanala

$$H(X, Y) = -K \sum_{i} \sum_{j} p_i a_{ij} \log_d p_i a_{ij} ,$$

Diskretni komunikacijski kanali

- pogojno entropijo izhodnih znakov glede na vhodne znake oziroma povprečno informacijo, ki jo potrebujemo za določitev izhodnega znaka, ko poznamo vhodni znak,

$$H(Y|X) = -K \sum_i \sum_j p_i a_{ij} \log_d a_{ij}$$

ter

- pogojno entropijo vhodnih znakov glede na izhodne znake (imenujemo jo tudi *dvoumnost ali ekvivokacija kanala*) oziroma povprečno informacijo, ki se izgubi v kanalu pri prenosu enega znaka,

$$H(X|Y) = -K \sum_i \sum_j p_i a_{ij} \log_d c_{ij}. \tag{17}$$

Pri tem sta $K > 0$ poljubna konstanta in $d > 1$ osnova logaritma.

Diskretni komunikacijski kanali - primer

Primer 7.2

Dan je diskretni kanal brez spomina (U, P_K, V), kjer je $U = \{0, 1\}$ množica vhodnih znakov, $V = \{0, 1\}$ množica izhodnih znakov[5] in

$$\mathrm{P}_K = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} 1-\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1-\varepsilon \end{bmatrix}$$

matrika kanala.

Na vhodu v kanal imata znaka 0 in 1 verjetnosti p in $r = 1 - p$.

[5] Kanalu, za katerega velja $u = v = 2$, pravimo *dvojiški*.

Diskretni komunikacijski kanali - primer

Podani sta torej:

- porazdelitev verjetnosti znakov na vhodu v kanal

$$P_X = \big(\, p_1 = P(0) = p\,,\; p_2 = P(1) = r = 1 - p \,\big) \quad \text{ter}$$

- pogojna porazdelitev verjetnosti, da smo sprejeli izhodni znak y_j, ko je vir oddal vhodni znak x_i:

$$\begin{array}{ll} a_{11} = P(Y=0 \mid X=0) = 1-\varepsilon, & a_{12} = P(Y=1 \mid X=0) = \varepsilon, \\ a_{21} = P(Y=0 \mid X=1) = \varepsilon, & a_{22} = P(Y=1 \mid X=1) = 1-\varepsilon. \end{array}$$

Verjetnosti ε, da sprejmemo oddani znak 0 kot 1 oziroma oddani znak 1 kot 0, pravimo *verjetnost napačno sprejetega znaka* ali krajše *verjetnost napake*.

Diskretni komunikacijski kanali - primer

Iz danih podatkov lahko določimo še:

- porazdelitev verjetnosti izhodnih znakov P_Y

$$p'_1 = P(Y=0) = \sum_{i=1}^{2} p_i a_{i1} = p\,(1-\varepsilon) + r\varepsilon = p + \varepsilon(r-p),$$
$$p'_2 = P(Y=1) = \sum_{i=1}^{2} p_i a_{i2} = p\,\varepsilon + r(1-\varepsilon) = r + \varepsilon(p-r),$$

- pogojno porazdelitev verjetnosti, da je vir oddal vhodni znak x_i, ko smo sprejeli izhodni znak y_j:

$$c_{11} = P(X=0 \mid Y=0) = p_1 a_{11} \,/\, p'_1 = p\,(1-\varepsilon) \,/\, [p + \varepsilon(r-p)],$$
$$c_{12} = P(X=0 \mid Y=1) = p_1 a_{12} \,/\, p'_2 = p\,\varepsilon \,/\, [r + \varepsilon(p-r)],$$
$$c_{21} = P(X=1 \mid Y=0) = p_2 a_{21} \,/\, p'_1 = r\varepsilon \,/\, [p + \varepsilon(r-p)],$$
$$c_{22} = P(X=1 \mid Y=1) = p_2 a_{22} \,/\, p'_2 = r(1-\varepsilon) \,/\, [r + \varepsilon(p-r)],$$

Diskretni komunikacijski kanali - primer

- ter porazdelitev verjetnosti vhodnih in izhodnih znakov

$$
\begin{aligned}
p_{11} &= P(X = 0, Y = 0) = p_1 a_{11} = p\,(1-\varepsilon),\\
p_{12} &= P(X = 0, Y = 1) = p_1 a_{12} = p\,\varepsilon,\\
p_{21} &= P(X = 1, Y = 0) = p_2 a_{21} = r\varepsilon,\\
p_{22} &= P(X = 1, Y = 1) = p_2 a_{22} = r(1-\varepsilon).
\end{aligned}
$$

Sedaj lahko izračunamo:

- entropijo znakov na vhodu v kanal

$$
H(X) = -K\sum_{i=1}^{2} p_i \log_d p_i = -Kp\log_d p - Kr\log_d r,
$$

Diskretni komunikacijski kanali - primer

- entropijo znakov na izhodu iz kanala

$$
\begin{aligned}
H(Y) &= -K\sum_{j=1}^{2} p'_j \log_d p'_j \\
&= -K[p+\varepsilon(r-p)]\log_d[p+\varepsilon(r-p)] \\
&\quad -K[r+\varepsilon(p-r)]\log_d[r+\varepsilon(p-r)],
\end{aligned}
$$

- vezano entropijo znakov na vhodu in na izhodu iz kanala

$$
\begin{aligned}
H(X,Y) &= -K\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} p_i a_{ij}\log_d(p_i a_{ij}) \\
&= -Kp\log_d p - Kr\log_d r \\
&\quad -K\varepsilon\log_d \varepsilon - K(1-\varepsilon)\log_d(1-\varepsilon),
\end{aligned}
$$

Diskretni komunikacijski kanali - primer

- pogojno entropijo izhodnih znakov glede na vhodne znake (entropija šuma)

$$
\begin{aligned}
H(Y \mid X) &= -K \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} p_i a_{ij} \log_d a_{ij} \\
&= -K\varepsilon \log_d \varepsilon - K(1-\varepsilon)\log_d(1-\varepsilon),
\end{aligned}
$$

- pogojno entropijo vhodnih znakov glede na izhodne znake (dvoumnost)

$$
\begin{aligned}
H(X \mid Y) &= -K \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} p_i a_{ij} \log_d c_{ij} \\
&= K[p+\varepsilon(r-p)] \log_d [p+\varepsilon(r-p)] \\
&\quad +K[r+\varepsilon(p-r)] \log_d [r+\varepsilon(p-r)] \\
&\quad -Kp \log_d p - Kr \log_d r \\
&\quad -K\varepsilon \log_d \varepsilon - K(1-\varepsilon)\log_d(1-\varepsilon)
\end{aligned}
$$

Diskretni komunikacijski kanali - primer

- ter povprečno vzajemno informacijo (informacija, ki jo po kanalu v povprečju prenese en znak)

$$
\begin{aligned}
I(X,Y) &= H(X)+H(Y)-H(X,Y) \\
&= K\varepsilon\log_d\varepsilon + K(1-\varepsilon)\log_d(1-\varepsilon) \\
&\quad -K[p+\varepsilon(r-p)]\log_d[p+\varepsilon(r-p)] \\
&\quad -K[r+\varepsilon(p-r)]\log_d[r+\varepsilon(p-r)].
\end{aligned}
$$

Vidimo, da v primeru, ko je verjetnost napake $\varepsilon = 0$, velja $I(X,Y) = H(X)$. To pomeni, da se po takšnem kanalu lahko prenese celotna informacija, ki jo je vir oddal.

Če pa je $\varepsilon = 1/2$ (največja možna verjetnost napake), je $I(X,Y) = 0$, kar pomeni, da se po takšnem kanalu informacija ne more prenašati. $\square$

Kapaciteta diskretnega kanala brez spomina

V matematičnem modelu diskretnega komunikacijskega kanala je vpliv motenj zajet z matriko kanala P_K.

Da bi lahko ugotovili, po katerem kanalu bo informacija pri prenosu najmanj motena, definiramo parameter modela kanala, ki ga imenujemo *kapaciteta kanala*.

DEFINICIJA 7.4 *Kapaciteta kanala diskretnega kanala je*

$$C = \max_{P_X \in \Delta_u} \{I(X,Y)\}, \tag{18}$$

kjer iščemo največjo vrednost povprečne vzajemne informacije $I(X,Y)$ *preko vseh možnih porazdelitev vhodne množice znakov* $P_X \in \Delta_u$.

Opomba: V odvisnosti od osnove logaritma d v funkciji $I(X,Y)$ je enota kapacitete kanala C bit (nat,...)/znak.

Kapaciteta diskretnega kanala brez spomina

Če delimo C s τ, kjer je τ čas trajanja enega znaka v sekundah, dobimo kapaciteto kanala, izraženo v bitih (natih,...)/s.

Znak, ki vstopa v kanal, vsebuje v povrečju $H(X)$ lastne informacije. Zaradi motenj se v kanalu izgubi povprečno $H(X|Y)$ informacije po znaku.

Povprečno vzajemno informacijo

$$\begin{aligned} I(X,Y) &= H(X) - H(X|Y) \\ &= K \sum_{i=1}^{u} \sum_{j=1}^{v} p_i a_{ij} \log_d \frac{a_{ij}}{\sum_{k=1}^{u} p_k a_{kj}} \end{aligned} \tag{19}$$

zato lahko tolmačimo kot povprečno informacijo, ki jo je "uspel" po kanalu brez spomina prenesti en znak.

Kapaciteta diskretnega kanala brez spomina

Povprečna vzajemna informacija je tudi funkcija porazdelitve znakov na vhodu v kanal P_X in ne le matrike kanala P_K, v kateri so statistično zajete motnje.

Povprečno vzajemno informacijo naredimo neodvisno od vhodne porazdelitve tako, da poiščemo njeno največjo vrednost preko vseh možnih porazdelitev vhodne množice znakov.

Rezultat je količina C, ki za dani kanal pove največje povprečno število bitov (natov,...), ki ga lahko prenese en znak po danem kanalu.

Kapaciteta diskretnega kanala brez spomina

Ker je množica vseh porazdelitev verjetnosti Δ_u nad množico U zaprta in omejena množica v prostoru $\Re^u$ in je informacija $I : \Delta_u \to \Re$ zvezna funkcija, največja vrednost

$$C = \max_{P_X \in \Delta_u} \{I(X, Y)\}$$

vedno obstaja.

Iz izraza $C = \max_{P_X \in \Delta_u} \{I(X, Y)\}$ je očitno, da je

$$C \geq 0,$$

kjer znak enakosti velja tedaj in le tedaj, če je $a_{ij} = p'_j;\ i = 1, 2, ..., u$.

V tem primeru sta vhod in izhod komunikacijskega kanala, to je naključni spremenljivki X in Y, neodvisni.

To pomeni, da se po takšnem kanalu ni možno sporazumevati.

Kapaciteta diskretnega kanala brez motenj

DEFINICIJA 7.5 *Diskretni kanal je brez motenj, če prehajajo znaki iz vhodne množice U v znake iz izhodne množice V z verjetnostjo 1 tako, da je vsak znak iz V posledica natanko enega znaka iz U.*

Kanal brez motenj ima torej enako močni množici U in V ter kvadratno matriko kanala P_K, ki ima v vsaki vrstici in v vsakem stolpcu le en element z vrednostjo ena, vsi ostali elementi pa imajo vrednost nič.

Kapaciteta diskretnega kanala brez motenj

Ker lahko vsakemu izhodnemu znaku y_j določimo njemu pripadajoči vhodni znak z verjetnostjo 1, je

$$H(X \mid y_j) = 0, \qquad j = 1, ..., v$$

oziroma

$$H(X \mid Y) = 0.$$

Iz

$$I(X,Y) = H(X) - H(X|Y)$$

in

$$C = \max_{P_X \in \Delta_u} \{I(X,Y)\}$$

lahko takoj ugotovimo, da je kapaciteta kanala brez motenj enaka

$$C = \max_{P_X \in \Delta_u} \Big\{H(X)\Big\} = H\left(\frac{1}{u}, ..., \frac{1}{u}\right) = K \log_d u.$$

To je hkrati *zgornja meja kapacitete* diskretnega kanala brez spomina.

Kapaciteta diskretnega kanala brez motenj - primer

Primer 7.3

Dvojiški diskretni kanal brez motenj z matriko kanala

$$\mathrm{P}_K = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ima kapaciteto

$$C = \log_2 2 = 1 \quad \text{bit/znak.}$$

$\square$

Kapaciteta neuporabnega diskretnega kanala

DEFINICIJA 7.6 *Kanal je neuporaben, če izhodni znaki niso odvisni od vhodnih znakov.*

Ker je sedaj izhod iz kanala neodvisen od vhoda v kanal, iz izreka 2.4 sledi, da je $H(X \mid Y) = H(X)$, iz enačbe $I(X, Y) = H(X) - H(X|Y)$ pa $I(X, Y) = 0$ oziroma

$$C = 0.$$

To je hkrati tudi *spodnja meja kapacitete* diskretnega kanala brez spomina.

Kapaciteta neuporabnega diskretnega kanala - primer

Primer 7.4

Vzemimo, da je dan dvojiški diskretni kanal z matriko kanala

$$\mathrm{P}_K = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,9 & 0,1 \end{bmatrix}.$$

Ko iz kanala sprejmemo znak 0, je verjetnost, da smo odposlali znak 0 enaka verjetnosti, da smo odposlali znak 1. Enako velja tudi, ko sprejmemo iz kanala znak 1, zato je dan kanal neuporaben.

Kapaciteta neuporabnega diskretnega kanala - primer

Iz

$$p'_j = P(y_j) = \sum_{i=1}^{u} P(x_i)P(y_j \mid x_i) = \sum_{i=1}^{u} p_i a_{ij}, \qquad j = 1, ..., v$$

dobimo $\quad p'_1 = 0,9 \cdot (p_1 + p_2) = 0,9$ in
$p'_2 = 0,1 \cdot (p_1 + p_2) = 0,1$, iz

$$c_{ij} = \frac{p_i a_{ij}}{p'_j}, \qquad i = 1, ..., u; \quad j = 1, ..., v$$

pa še $\quad c_{11} = p_1,\ c_{12} = p_1,\ c_{21} = p_2$ in $c_{22} = p_2$.

Kapaciteta neuporabnega diskretnega kanala - primer

Iz

$$H(X \mid Y) = -K \sum_i \sum_j p_i a_{ij} \log_d c_{ij}$$

sledi, da je

$$\begin{aligned} H(X \mid Y) &= -K\Big[p_1(0,9+0,1)\log_d p_1 \; + \; p_2(0,9+0,1)\log_d p_2\Big] \\ &= -K(p_1 \log_d p_1 + p_2 \log_d p_2) \\ &= H(X). \end{aligned}$$

Torej $I(X, Y) = 0$ in zato $C = 0$. $\square$

Kapaciteta simetričnega diskretnega kanala

DEFINICIJA 7.7 *Diskretni kanal je simetričen, če so vrstice matrike kanala* P_K *različne permutacije v števil, stolpci pa različne permutacije u števil.*

Primer 7.5

Na primer, za $u = v = 3$ je matrika simetričnega kanala

$$\mathrm{P}_K = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,1 & 0,5 \\ 0,5 & 0,4 & 0,1 \\ 0,1 & 0,5 & 0,4 \end{bmatrix}.$$

Vrstice in stolpci matrike so različne razporedbe števil: $0,1$, $0,4$ in $0,5$. □

Kapaciteta simetričnega diskretnega kanala

Da bi izračunali kapaciteto simetričnega kanala, vzemimo, da so vrstice sestavljene iz števil $r_1, r_2, ..., r_v (r_j \geq 0; \sum_{j=1}^{v} r_j = 1)$, stolpci pa iz števil $s_1, s_2, ..., s_u (s_i \geq 0; \sum_{i=1}^{u} s_i = u/v)$, ter izračunajmo $I(X, Y)$ po enačbi

$$
\begin{aligned}
I(X, Y) &= H(X) - H(X|Y) \\
&= K \sum_{i=1}^{u} \sum_{j=1}^{v} p_i a_{ij} \log_d \frac{a_{ij}}{\sum_{k=1}^{u} p_k a_{kj}},
\end{aligned}
$$

tako da upoštevamo

$$
P(y_j) = \sum_{i=1}^{u} P(x_i) P(y_j|x_i) = \sum_{i=1}^{u} p_i a_{ij} \qquad j = 1, ..., v.
$$

Kapaciteta simetričnega diskretnega kanala

Imamo

$$I(X, Y) = \sum_{i=1}^{u} p_i \, K \sum_{j=1}^{v} r_j \log_d r_j - K \sum_{j=1}^{v} p'_j \log_d p'_j$$

oziroma

$$I(X, Y) = H(p'_1, ..., p'_v) - H(r_1, ..., r_v). \tag{20}$$

Drugi člen na desni strani enačbe (20) ni odvisen od vhodne porazdelitve verjetnosti P_X, zato lahko zapišemo

$$C = \max_{P_X \in \Delta_u} \{H(p'_1, ..., p'_v)\} - H(r_1, ..., r_v).$$

Kapaciteta simetričnega diskretnega kanala

Za entropijo pa vemo, da je

$$\max_{P_X \in \Delta_u} \{H(p'_1, ..., p'_v)\} = H\left(\frac{1}{v}, ..., \frac{1}{v}\right) = K \log_d v,$$

ki ga dosežemo za $P_X = (1/u, ..., 1/u)$, ker: če
$p_i = 1/u, \;\; i = 1, ..., u$, potem
$p'_j = \sum_{i=1}^{u} p_i a_{ij} = (1/u) \sum_{i=1}^{u} s_i = 1/v, \;\; j = 1, ..., v$.

Kapaciteta simetričnega kanala je torej enaka

$$C = H\left(\frac{1}{v}, ..., \frac{1}{v}\right) - H(r_1, ..., r_v)$$

oziroma

$$C = K \log_d v + K \sum_{i=1}^{v} r_i \log_d r_i,$$

kjer sta $K > 0$ poljubna konstanta in $d > 1$ osnova logaritma.

Kapaciteta simetričnega diskretnega kanala - primer

Primer 7.6

Oglejmo si dvojiški simetrični kanal (DSK) z matriko kanala

$$\mathrm{P}_K = \begin{bmatrix} 1-\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1-\varepsilon \end{bmatrix},$$

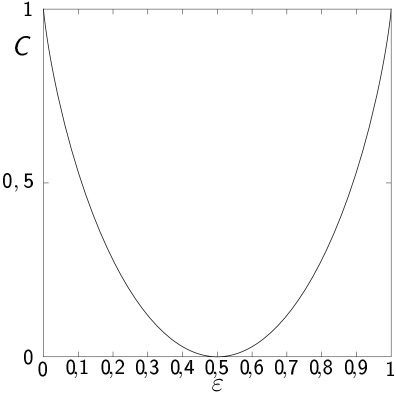
kjer je ε verjetnost napake.

Kapaciteta DSK-ja

$$\begin{aligned} C &= H\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) - H(1-\varepsilon, \varepsilon) \\ &= 1 + (1-\varepsilon)\log_2(1-\varepsilon) + \varepsilon \log_2 \varepsilon \quad \text{bitov/znak} \qquad (21) \end{aligned}$$

je očitno funkcija verjetnosti napačno prenesenega znaka ε.

Kapaciteta simetričnega diskretnega kanala - primer



Slika: Graf funkcije C v odvisnosti od verjetnosti napake ε.

Vidimo, da postane za $\varepsilon = 0$ ali $\varepsilon = 1$ dani DSK brezizguben kanal. Za $\varepsilon = 1/2$ pa je DSK neuporaben za komunikacijo, saj je $C = 0$.

Vprašanja

- Kako navadno modeliramo komunikacijski kanal?
- Kako je definirana kapaciteta zveznega kanala?
- Kako izračunamo kapaciteto Gaussovega kanala z omejeno pasovno širino?
- Kako izračunamo kapaciteto Gaussovega kanala z omejeno pasovno širino, ki je moten z belim Gaussovim šumom?
- Kako (matematično) opišemo stacionarni diskretni komunikacijski kanal brez spomina?
- Naštej lastnosti matrike kanala brez motenj!
- Naštej lastnosti matrike neuporabnega kanala!
- Naštej lastnosti matrike simetričnega kanala!
- Kako je definirana kapaciteta diskretnega kanala?
- Kako izračunamo kapaciteto binarnega simetričnega kanala?