Laboratorijske vaje
Digitalno vodenje

1. sklop

Z-transformacija in inverzna z-transformacija

Z-transformacija $X(z)$ diskretnega signala $x(k)$ je definirana kot:

$$X(z) = \mathcal{Z}\left\{x(k)\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k}$$

Inverzna z-transformacija preslika kompleksno funkcijo $X(z)$ v diskretni signal $x(k)$:

$$x(k) = \mathcal{Z}^{-1}\left\{X(z)\right\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\mathcal{C}} X(z) z^{k-1} dz$$

kjer krivulja $\mathcal{C}$ enkrat obkroži vse singularnosti funkcije $X(z)z^{k-1}$ v nasprotni smeri urnega kazalca. Če ima funkcija $X(z)z^{k-1}$ l singularnih točk $z_1, z_2, \ldots z_l$ v ravnini $\mathbb{Z}$ oz. znotraj zaključene krivulje $\mathcal{C}$, potem lahko inverzno z-transformacijo izračunamo s pomočjo izreka o residuih:

$$x(k) = \mathcal{Z}^{-1}\left\{X(z)\right\} = \sum_{i=1}^{l} \operatorname*{Res}_{z=z_i}\left[X(z)z^{k-1}\right]$$

Če ima funkcija $X(z)z^{k-1}$ enostavni pol v $z = z_i$, izračunamo residuum funkcije v tej točki po naslednji formuli:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_i}\left[X(z)z^{k-1}\right] = \lim_{z\to z_i}\left[X(z)z^{k-1}(z-z_i)\right] = \left[X(z)z^{k-1}(z-z_i)\right]_{z=z_i}$$

Če pa ima funkcija $X(z)z^{k-1}$ m-kratni pol v $z = z_i$, izračunamo residuum po formuli:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_i}\left[X(z)z^{k-1}\right] = \tfrac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to z_i} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[X(z)z^{k-1}(z-z_i)^m\right]$$

Pri izračunu inverzne z-transformacije z uporabo metode parcialnih ulomkov je potrebno na parcialne ulomke razcepiti funkcijo $\frac{X(z)}{z}$. Če imamo realne enojne pole, dobimo parcialne ulomke, katerih red imenovalca je 1. Če imamo konjugirano kompleksne enojne pole, dobimo parcialne ulomke, katerih red imenovalca je 2, red števca pa 1. Kadar pa imamo večkratne pole reda m, dobimo m pripadajočih parcialnih ulomkov brez ničel, medtem ko število polov narašča od 1 do m.

Naloge

1. Poiščite z-transformacijo signala

$$x(k) = \begin{cases} \frac{1}{k!} & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

2. Poiščite z-transformacijo signala

$$y(k) = \begin{cases} \frac{k^2}{3^k k!} & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

3. Izračunajte inverzno z-transformacijo funkcije

$$X_1(z) = \frac{2 + 3z^{-1}}{1 + z^{-2}}$$

4. S pomočjo izreka o residuih izračunajte inverzno z-transformacijo funkcije

$$X_2(z) = \frac{z + 2}{(z - 2)z^2}$$

5. Z uporabo metode parcialnih ulomkov izračunajte inverzno z-transformacijo funkcije

$$X_2(z) = \frac{z + 2}{(z - 2)z^2}$$

6. Izračunajte inverzno z-transformacijo funkcije

$$X_3(z) = \frac{3z^3}{z^3 + 1}$$

7. Izvedite vse prejšnje naloge še v programskem paketu MATLAB in preverite rezultate analitičnih izračunov. Uporabite funkcije knjižnice *Symbolic Toolbox* (`help symbolic`). Pomoč: Z-transformiranko najlaže definiramo, če prej definiramo spremenljivko `z`, ki predstavlja kompleksno spremenljivko z, npr.:

```
clear all
syms z k
X_z = z/(z-1);    % z-transformiranka
```

8. Časovni potek signalov prikažite s funkcijo `stem`, pri čemer pazite na dejstvo, da funkcija `stem` pričakuje signal v obliki vektorja, signal pa je v naših primerih zapisan v simbolični obliki. Zato ga je potrebno pretvoriti v numerično obliko. To najlaže storimo tako, da simbolično spremenljivko `k` »povozimo« z vektorjem `k`, v katerem so vrednosti neodvisne spremenljivke, pri katerih želimo ovrednotiti vrednost signala, nato pa kličemo funkcijo `eval`, ki izračuna vrednosti odvisne spremenljivke pri izbranih vrednostih `k`.

2. sklop

Diferenčne enačbe, prenosna funkcija, frekvenčni odziv

Diferenčna enačba je enačba, ki povezuje različne vzorce iskanega zaporedja $y(k)$ z vzorci danega zaporedja $u(k)$. Linearna diferenčna enačba n-tega reda s konstantnimi koeficienti ima naslednjo obliko:

$$y(k+n)+a_1y(k+n-1)+\ldots+a_ny(k)=b_0u(k+n)+b_1u(k+n-1)+\ldots+b_nu(k)$$

Enačbo rešimo tako, da jo z z-transformacijo pretvorimo v z-prostor, kjer postane algebrajska enačba, katere rešitev je z-transformacija iskanega signala $Y(z)$. Končno rešitev diferenčne enačbe $y(k)$ dobimo z inverzno z-transformacijo izraza $Y(z)$.

Če nad zgornjo diferenčno enačbo izvedemo z-transformacijo in upoštevamo, da so začetni pogoji enaki 0, dobimo naslednjo enačbo

$$z^nY(z)+a_1z^{n-1}Y(z)+\ldots+a_nY(z)=b_0z^nU(z)+b_1z^{n-1}U(z)+\ldots+b_nU(z)$$

iz katere lahko izrazimo prenosno funkcijo $G(z)$:

$$G(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{b_0z^n+b_1z^{n-1}+\ldots+b_n}{z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_n}$$

Frekvenčni odziv $\mathcal{H}(\omega)$ diskretnega sistema $H(z)$ dobimo z naslednjo enačbo:

$$\mathcal{H}(\omega)=H(z)\big|_{z=e^{j\omega T}}=H(e^{j\omega T})=\left|H(e^{j\omega T})\right|e^{j\sphericalangle\left[H(e^{j\omega T})\right]}$$

Po svoji naravi je frekvenčni odziv $\mathcal{H}(\omega)$ kompleksna funkcija realne neodvisne spremenljivke ω. Pogosto namesto ene kompleksne funkcije uporabimo dve realni funkciji: amplitudni odziv in fazni odziv. Amplitudni odziv $\mathcal{A}(\omega)$ je definiran kot absolutna vrednost frekvenčnega odziva

$$\mathcal{A}(\omega)=\left|H(e^{j\omega T})\right|$$

in določa razmerje amplitud izhodnega in vhodnega signala pri vzbujalni frekvenci ω. Fazni odziv $\mathcal{B}(\omega)$ je definiran kot fazni kot funkcije $H(e^{j\omega T})$

$$\mathcal{B}(\omega)=\sphericalangle\left[H(e^{j\omega T})\right]$$

in določa fazno prehitevanje (kadar je $\mathcal{B}(\omega)>0$) oz. fazni zaostanek (kadar je $\mathcal{B}(\omega)<0$) izhodnega signala za vhodnim pri vzbujalni frekvenci ω.

Naloge

1. S pomočjo računalnika rešite diferenčno enačbo

$$y(k) = y(k-1) + y(k-2)$$

   Ker gre za diferenčno enačbo 2. reda, za partikularno rešitev potrebujemo dva začetna pogoja. Izberemo začetna pogoja za Fibonaccijevo zaporedje: $y(0) = 1$ in $y(1) = 1$. Nalogo rešimo z uporabo orodja za simbolično računanje MuPAD, ki je del knjižnice za simbolično računanje znotraj programskega paketa Matlab. Izraz v zapisu MuPAD lahko zaženemo z uporabo ukaza `evalin`, kjer je prvi argument `symengine`.

   Rešitev zgornje diferenčne enačbe dobimo z naslednjim ukazom:

```
y = evalin(symengine, 'solve(rec(y(k)=y(k-1)+y(k-2),y(k),{y(0)=1,y(1)=1}))')
```

   Program vrne simbolično rešitev diferenčne enačbe. V nadaljevanju z ukazom `stem` izrišite potek diskretnega signala `y`. Pri izračunu posameznih vzorcev si pomagajte z ukazom `eval`, kjer namesto spremenljivke `k` vstavite konkretno vrednost signala.

2. Diferenčno enačbo

$$y(k) = y(k-1) + y(k-2)$$

   rešite še enkrat z začetnima pogojema $y(0) = 3$ in $y(4) = 3$. Spet upodobite rešitev z ukazom `stem`.

3. Sedaj obravnavajte diferenčno enačbo

$$y(k) = y(k-1) + y(k-2) + u(k)$$

   Izračunajte prenosno funkcijo sistema $G(z)$. V Matlabu izračunajte impulzni odziv gornjega sistema, za kar uporabite:

   - ukaz `iztrans` iz simbolične knjižnice in
   - ukaz `impulse` iz knjižnice za vodenje.

   Izračunajte še stopnični odziv, za kar uporabite:

   - ukaz `iztrans` (na funkciji $G(z)U(z)$) in
   - ukaz `step` iz knjižnice za vodenje.

   Rezultate vseh pristopov prikažite tudi v grafični obliki.

4. Dan je diskretni sistem s časom vzorčenja $T = 1$, opisan s prenosno funkcijo:

$$G(z) = \frac{z + 0,95}{(z - 0{,}9)(z - a)}$$

   Najprej privzemite, da je $a = 1$ in si oglejte impulzni in stopnični odziv (funkciji `impulse` in `step`), nato pa preizkus ponovite z vrednostjo konstante $a = 0{,}9$. Kako komentirate rezultate?

5. Z ukazom `bode` izrišite Bodejev diagram prenosne funkcije iz prejšnje naloge za $a = 0{,}9$. Oglejte si predvsem potek faznega kota in komentirajte rezultate v primerjavi z Bodejevim diagramom za zvezne sisteme drugega reda.

6. Z ukazom `bode` izrišite Bodejev diagram prenosne funkcije s časom vzorčenja $T = 1$:
$$G(z) = \frac{1 + z^{-2}}{2}$$

7. Poskusite praktično podkrepiti rezultat iz prejšnje točke s tem, da sistem vzbujate s harmoničnim signalom
$$u(k) = \sin \omega k T$$
in določite izhod sistema s simulacijo. To naredite brez uporabe knjižnic z enostavnim iterativnim reševanjem diferenčne enačbe v zanki. Postopek ponovite pri različnih frekvencah ter opazujete amplitudo in fazo izhodnega signala v ustaljenem stanju.

3. sklop

Diskretni ekvivalent zveznega sistema, simulacija diskretnega sistema

Iščemo diskretni ekvivalent zveznega sistema, ki ga opisuje prenosna funkcija $G_z(s)$. Če iščemo diskretni ekvivalent zveznega filtra ali zveznega regulatorja, uporabimo kakšno izmed metod prilagajanja frekvenčnega odziva, pri katerih dobimo diskretni sistem, ki ima podoben frekvenčni odziv kot zvezni sistem $G_z(s)$. Najbolj znana metoda iz te skupine je Tustinovo pravilo, pri katerem diskretno prenosno funkcijo s časom vzorčenja T dobimo po naslednji formuli:

$$H(z) = G_z(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}}$$

Dobljena prenosna funkcija ima zelo podoben frekvenčni odziv kot $G_z(s)$ pri nizkih frekvencah (veliko nižjih od Nyquistove frekvence). Če želimo identičen odziv rezultirajočega diskretnega sistema in originalnega zveznega sistema pri točno določeni frekvenci ω_r, uporabimo metodo predkrivljenja frekvenc, pri kateri $H(z)$ izračunamo po formuli

$$H(z) = G_z(s)\Big|_{s=C\frac{z-1}{z+1}}$$

pri čemer C definira enačba:

$$C = \omega_r \operatorname{ctg} \tfrac{\omega_r T}{2}$$

Pogosto ima digitalni sistem vodenja povratnozančno konfiguracijo, pri kateri je senzor zveznega reguliranega procesa preko A/D-pretvornika priključen na digitalni regulator, slednji pa ima izhod preko D/A-pretvornika pripeljan na zvezni aktuator. V takšnih primerih dobimo diskretni ekvivalent zveznega procesa tako, da uporabimo metodo stopnične invariance:

$$H(z) = \frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{G_z(s)}{s}\right]\Big|_{t=kT}\right\}$$

V celotni laboratorijski vaji bomo obravnavali zvezni sistem s prenosno funkcijo

$$G_z(s) = \frac{0{,}1}{s^3+2s^2+2s+1}$$

Naloge

1. Poiščite diskretna ekvivalenta prenosne funkcije $G_z(s)$ pri času vzorčenja $T_1 = 0{,}1$ po Tustinovem pravilu (funkcija `c2d`, metoda `tustin`) in metodi stopnične invariance (funkcija `c2d`, metoda `zoh`). Primerjate stopnične (funkcija `step`) in impulzne (funkcija `impulse`) odzive vseh treh sistemov (zveznega in obeh diskretnih) in komentirajte podobnosti in razlike. Primerjate tudi Bodejeve diagrame vseh treh sistemov in komentirajte podobnosti in razlike.

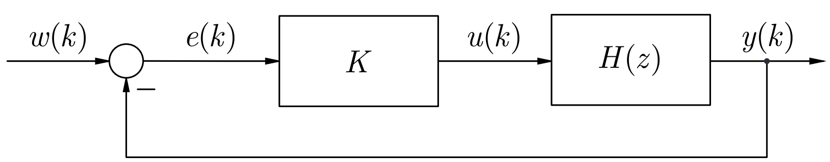
2. Ponovite naloge iz prejšnje točke pri daljši periodi vzorčenja $T_2 = 1$.

3. Izvedite simulacijo diskretnega sistema (čas vzorčenja $T_1 = 0{,}1$, metoda `zoh`) na stopničasto vzbujanje in rezultate primerjate z rezultati funkcije `step`. To naredite tako, da najprej pretvorite diskretni sistem $H(z)$ v prostor stanj

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{b}u(k)\\ y(k) &= \mathbf{c}^T\mathbf{x}(k) + du(k)\end{aligned}$$

   s funkcijo `ss`. Simulacijo izvedite v Matlabovem skriptnem jeziku. V zanki `for`, ki teče po času, uporabite le osnovne matematične operacije, lahko pa uporabite vektorje in matrike. Na začetku zanke iz trenutne vrednosti stanj $\mathbf{x}(k)$ in vhoda $u(k)$ izračunate trenutno vrednost izhoda $y(k)$. Nato pomembne spremenljivke shranite za kasnejši prikaz, na koncu pa z enačbo stanj izračunajte še predikcijo stanj za prihodnji trenutek vzorčenja $\mathbf{x}(k+1)$.

4. Izvedite še simulacijo diskretnega sistema na spodnji sliki:



   Spet uporabite isti diskretni sistem $H(z)$ kot pri prejšnji nalogi, ojačenje P-regulatorja pa naj bo $K = 20$. Referenčni signal $w(k)$ naj bo enotina stopnica. Pri simulaciji povratnozančnega sistema je potrebno paziti na vrstni red izvajanja operacij. Potrebno je ugotoviti, kateri sistem nima hipnega odziva izhoda na vhod. To je seveda $H(z)$, zato najprej izračunamo $y(k)$, ki je odvisen le od $\mathbf{x}(k)$. Nato sledi izračun $e(k)$ in kasneje še $u(k)$, ki pa seveda v trenutku k še ne vpliva na signal $y(k)$. Nato spet shranimo signale, ki jih bomo še potrebovali in izračunamo še predikcijo stanj za prihodnji trenutek vzorčenja $\mathbf{x}(k+1)$, pri čemer pa seveda potrebujemo tudi trenutni $u(k)$.

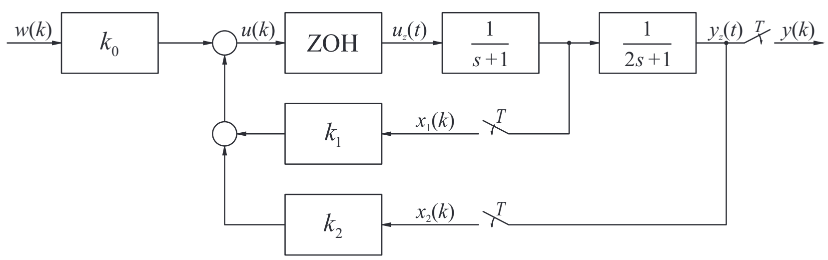
5. Ponovite prejšnjo nalogo pri daljši periodi vzorčenja $T_2 = 1$. Kaj lahko opazimo?

4. sklop

Analiza sistema z zveznimi in diskretnimi podsistemi

V tej vaji bomo analizirali hibridni sistem. Pod pojmom hibridni smatramo sistem, ki vključuje tako časovno diskretne kot časovno zvezne bloke. Po svoji naravi so digitalni sistemi skoraj vedno hibridni, saj je proces običajno zvezen, regulator pa je diskreten.

Obravnavali bomo sistem na sliki 1. Parametri regulatorja so $k_0 = \frac{8}{3}$, $k_1 = -\frac{2}{3}$, $k_2 = -1$. Čas vzorčenja je $T = \ln 4 \doteq 1{,}3863$. Vzbujalni signal $w(k)$ ima obliko enotine stopnice.



Slika 1: Bločni diagrami obravnavanega regulacijskega sistema

Če je podana karakteristična enačba (polinom imenovalca prenosne funkcije) diskretnega linearnega časovno nespremenljivega sistema

$$Q(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0 \quad (a_n > 0) \tag{1}$$

potem Juryjev stabilnostni kriterij podaja potrebne in zadostne pogoje, da vsi koreni enačbe (1) ležijo znotraj kroga enote. Za $n \leq 2$ so pogoji trije:

$$\begin{aligned} &Q(1) > 0 \\ &(-1)^n Q(-1) > 0 \\ &|a_0| < a_n \end{aligned} \tag{2}$$

Če pa je red sistema višji ($n > 2$), moramo zgraditi Juryjevo tabelo. V prvo vrsto napišemo koeficiente karakteristične enačbe, v drugi vrsti pa jih zapišemo v obratnem vrstnem redu. Elemente tretje vrste računamo s pomočjo izračuna determinant koeficientov prvih dveh vrstic. Četrto vrsto zopet zapišemo v obratnem vrstnem redu kot tretjo. Postopek ponavljamo, dokler ne ostanejo le tri elementi.

vrsta	z^0	z^1	z^2	$\cdots$	z^{n-2}	z^{n-1}	z^n
1	a_0	a_1	a_2	$\cdots$	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
2	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_2	a_1	a_0
3	b_0	b_1	b_2	$\cdots$	b_{n-2}	b_{n-1}	
4	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	$\cdots$	b_1	b_0	
5	c_0	c_1	c_2	$\cdots$	c_{n-2}		
6	c_{n-2}	c_{n-3}	c_{n-4}	$\cdots$	c_0		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				
$2n-5$	p_0	p_1	p_2	p_3			
$2n-4$	p_3	p_2	p_1	p_0			
$2n-3$	q_0	q_1	q_2				

$$b_k = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-k} \\ a_n & a_k \end{vmatrix}$$

$$c_k = \begin{vmatrix} b_0 & b_{n-1-k} \\ b_{n-1} & b_k \end{vmatrix}$$

$$q_0 = \begin{vmatrix} p_0 & p_3 \\ p_3 & p_0 \end{vmatrix}, q_1 = \begin{vmatrix} p_0 & p_2 \\ p_3 & p_1 \end{vmatrix}, q_2 = \begin{vmatrix} p_0 & p_1 \\ p_3 & p_2 \end{vmatrix}$$

Vsi koreni enačbe (1) ležijo znotraj kroga enote natanko takrat, ko so poleg pogojev v neenačbah (2) izpolnjeni še naslednji pogoji:

$$\begin{aligned} |b_0| &> |b_{n-1}| \\ |c_0| &> |c_{n-2}| \\ &\vdots \\ |q_0| &> |q_2| \end{aligned} \tag{3}$$

Naloge

1. Sestavite simulacijsko shemo sistema v orodju Simulink. Izvedite simulacijo sistema in si oglejte poteke zveznih signalov $u_z(t)$ in $y_z(t)$ ter diskretnih signalov $u(k)$ in $y(k)$. Oglejte si obliko odziva $y_z(t)$. Ali je dobljeni odziv pomembno drugačen od tistih, ki bi jih dobili z zveznim vodenjem (osredotočite se predvsem na trajanje prehodnega pojava)?

2. Nato s pomočjo simulacije analizirajte stabilnost sistema. Najprej fiksirajte parameter k_1 ter spreminjajte k_2 navzgor in navzdol do točke, kjer povratnozančni sistem postane nestabilen. Nato to ponovite še za konstanten k_2 in spreminjajte k_1. Sproti beležite točke mejne stabilnosti. Postopek ponovite še pri drugih vrednostih ojačenj, s čimer boste prišli do področja v ravnini (k_1, k_2), ki daje parametra regulatorja za stabilen povratnozančni sistem? Ali je področje konveksno? Kaj še lahko poveste o obliki mej tega področja?

3. Stabilnost analizirajte še analitično, pri čemer si pomagajte z Juryjev stabilnostnim kriterijem.

4. Ali je področje stabilnosti v ravnini (k_1, k_2) bolj »raztegnjeno« v smeri osi k_1 ali v smeri osi k_2? Kako to razlagate?

*5. Za obravnavani proces načrtajte in preizkusite še diskretni regulator PID, pri čemer uporabite le eno povratno zanko, in sicer tisto iz izhoda $y(k)$.