

# Verižni ulomki

**Gašper Urh**

**Fakulteta za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani**

17. maj 2018

# Kazalo

- 1 Osnovni pojmi
- 2 Konvergenti
- 3 Evklidov algoritem in verižni ulomki racionalnih števil
- 4 Postopek za iskanje verižnega ulomka realnega števila
- 5 Verižni ulomek za število  $e$
- 6 Kvadratne iracionalne

# Osnovni pojmi

## Definicija

Verižni ulomek je izraz oblike

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\dots}}}}$$

pri čemer privzemimo, da so  $a_n$  realna števila, ki so za  $n \geq 1$  tudi pozitivna. Verižni ulomek je lahko bodisi končen, bodisi neskončen.

Zapišemo ga lahko tudi kot  $[a_0, a_1, a_2, a_3, \dots]$ .

$$[a_0, a_1, \dots, a_n, a_{n+1}] = [a_0, a_1, \dots, a_n + \frac{1}{a_{n+1}}]$$

$$[a_0, a_1, \dots, a_n, a_{n+1}] = [a_0, a_1, \dots, a_n + \frac{1}{a_{n+1}}]$$

## Definicija

$[a_0, a_1, a_2, \dots]$  je *enostaven*, če  $a_0 \in \mathbb{Z}$  ter  $a_1, a_2, \dots \in \mathbb{N}$

$$[a_0, a_1, \dots, a_n, a_{n+1}] = [a_0, a_1, \dots, a_n + \frac{1}{a_{n+1}}]$$

## Definicija

$[a_0, a_1, a_2, \dots]$  je *enostaven*, če  $a_0 \in \mathbb{Z}$  ter  $a_1, a_2, \dots \in \mathbb{N}$

## Definicija

Če so števci v verižnem ulomku različni od 1, ta izraz imenujemo *posplošeni verižni ulomek*.

## Zgled

$$[3, 6, 4] = 3 + \frac{1}{6 + \frac{1}{4}} = \frac{79}{25}$$

## Zgled

$$[3, 6, 4] = 3 + \frac{1}{6 + \frac{1}{4}} = \frac{79}{25}$$

## Zgled

Število  $\pi$  lahko zapišemo:

$$\pi = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{292 + \frac{1}{\dots}}}}}$$



# Konvergenti

## Definicija

Naj bo  $0 \leq n \leq m$ . Število  $c_n$  je  $n$ -ti *konvergent* verižnega ulomka  $[a_0, a_1, \dots, a_m]$ , če je  $c_n = [a_0, a_1, \dots, a_n]$ . Za  $n < m$  je to *delni konvergent*.

Definirajmo dve zaporedji za  $-2 \leq n \leq m$ :

$$p_{-2} = 0, \quad p_{-1} = 1, \quad p_0 = a_0, \quad \dots, \quad p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}, \quad \dots$$

$$q_{-2} = 1, \quad q_{-1} = 0, \quad q_0 = 1, \quad \dots, \quad q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}, \quad \dots$$

# Konvergenti

## Definicija

Naj bo  $0 \leq n \leq m$ . Število  $c_n$  je  $n$ -ti *konvergent* verižnega ulomka  $[a_0, a_1, \dots, a_m]$ , če je  $c_n = [a_0, a_1, \dots, a_n]$ . Za  $n < m$  je to *delni konvergent*.

Definirajmo dve zaporedji za  $-2 \leq n \leq m$ :

$$p_{-2} = 0, \quad p_{-1} = 1, \quad p_0 = a_0, \quad \dots, \quad p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}, \quad \dots$$

$$q_{-2} = 1, \quad q_{-1} = 0, \quad q_0 = 1, \quad \dots, \quad q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}, \quad \dots$$

## Trditev

Naj bo  $0 \leq n \leq m$ . Tedaj:

$$c_n = [a_0, \dots, a_n] = \frac{p_n}{q_n}$$

## Zgled

Konvergenti za  $[2, 2, 3, 4, 2, 6]$ :

Tabela: Konvergenti

$n$	0	1	2	3	4	5
$a_n$	2	2	3	4	2	6
$p_n$	2	5	17	73	163	1051
$q_n$	1	2	7	30	67	432

$$\begin{array}{c}
 2 + \frac{1}{\phantom{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{6}}}}}}} \\
 2 + \frac{1}{\phantom{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{6}}}}} \\
 3 + \frac{1}{\phantom{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{6}}}}} \\
 4 + \frac{1}{\phantom{4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{6}}}} \\
 2 + \frac{1}{6}
 \end{array}$$

## Trditev

$$p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} = (-1)^{n-1},$$

$$p_n q_{n-2} - q_n p_{n-2} = (-1)^n a_n$$

## Trditev

$$p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} = (-1)^{n-1},$$

$$p_n q_{n-2} - q_n p_{n-2} = (-1)^n a_n$$

$\Rightarrow p_n, q_n$  sta si tuji.

## Trditev

$$p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} = (-1)^{n-1},$$

$$p_n q_{n-2} - q_n p_{n-2} = (-1)^n a_n$$

$\Rightarrow p_n, q_n$  sta si tuji.

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = (-1)^{n-1} \frac{1}{q_n q_{n-1}},$$

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} = (-1)^n \frac{a_n}{q_n q_{n-2}}$$

$$\pi = [3, 7, 15, 1, 292, 1, \dots]$$

$$\pi = [3, 7, 15, 1, 292, 1, \dots]$$

Konvergenti so:

- $c_0 = 3$
- $c_1 = \frac{22}{7} = 3,1428571$
- $c_2 = \frac{333}{106} = 3,141509434$
- $c_3 = \frac{355}{113} = 3,14159292$
- $c_4 = \frac{103993}{33102} = 3,141592653$
- $c_5 = \frac{104348}{33215} = 3,141592654$
- ...



$$\pi = [3, 7, 15, 1, 292, 1, \dots]$$

Konvergenti so:

- $c_0 = 3$
- $c_1 = \frac{22}{7} = 3,1428571$
- $c_2 = \frac{333}{106} = 3,141509434$
- $c_3 = \frac{355}{113} = 3,14159292$
- $c_4 = \frac{103993}{33102} = 3,141592653$
- $c_5 = \frac{104348}{33215} = 3,141592654$
- ...

Ali zaporedje delnih konvergentov konvergira za vsako realno število?

## Trditev

Zaporedje sodih konvergentov je strogo naraščajoče, zaporedje lihih pa strogo padajoče. Za vsak  $n, m \in \mathbb{N}$  je  $c_{2n} < c_{2m+1}$ .

## Trditev

Zaporedje sodih konvergentov je strogo naraščajoče, zaporedje lihih pa strogo padajoče. Za vsak  $n, m \in \mathbb{N}$  je  $c_{2n} < c_{2m+1}$ .

## Izrek

Naj bo  $[a_0, a_1, \dots]$  enostaven verižni ulomek in naj bo za vsak  $n$   $c_n = [a_0, a_1, \dots, a_n]$  konvergent. Tedaj obstaja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$$

# Evklidov algoritem in verižni ulomki racionalnih števil

Naj bo  $x = \frac{13}{32}$ . Kako bi poiskali njegov zapis z verižnim ulomkom?

# Evklidov algoritem in verižni ulomki racionalnih števil

Naj bo  $x = \frac{13}{32}$ . Kako bi poiskali njegov zapis z verižnim ulomkom?

## Trditev

Neko število je racionalno  $\Leftrightarrow$  njegov zapis z verižnim ulomkom obstaja in je končen. (Euler, 1737)

# Evklidov algoritem in verižni ulomki racionalnih števil

Naj bo  $x = \frac{13}{32}$ . Kako bi poiskali njegov zapis z verižnim ulomkom?

## Trditev

Neko število je racionalno  $\Leftrightarrow$  njegov zapis z verižnim ulomkom obstaja in je končen. (Euler, 1737)

## Trditev

Če lahko neko število zapišemo s končnim verižnim ulomkom, je ta z zahtevo  $a_m \neq 1$  enolično določen.

## Trditev

Naj bo  $c_n = [a_0, a_1, \dots, a_n]$  eden od konvergentov enostavnega verižnega ulomka  $c_m = [a_0, a_1, \dots, a_m]$ . Veljata oceni:

$$|c_n - c_m| < \frac{1}{n^2}$$

$$|c_n - c_m| < \sqrt{2} \cdot 2^{-n}$$

Vemo tudi, da  $c_m$  vedno leži med  $c_n$  in  $c_{n+1}$  za vsak  $0 \leq n < m - 1$ .

# Postopek za iskanje verižnega ulomka realnega števila

Naj bo  $x \in \mathbb{R}$ .



# Postopek za iskanje verižnega ulomka realnega števila

Naj bo  $x \in \mathbb{R}$ .

$$x = a_0 + t_0,$$

kjer je  $a_0 \in \mathbb{Z}$  ter  $t_0 \in [0, 1)$ .

# Postopek za iskanje verižnega ulomka realnega števila

Naj bo  $x \in \mathbb{R}$ .

$$x = a_0 + t_0,$$

kjer je  $a_0 \in \mathbb{Z}$  ter  $t_0 \in [0, 1)$ . Če  $t_0 \neq 0$ , zapišemo

$$\frac{1}{t_0} = a_1 + t_1$$

# Postopek za iskanje verižnega ulomka realnega števila

Naj bo  $x \in \mathbb{R}$ .

$$x = a_0 + t_0,$$

kjer je  $a_0 \in \mathbb{Z}$  ter  $t_0 \in [0, 1)$ . Če  $t_0 \neq 0$ , zapišemo

$$\frac{1}{t_0} = a_1 + t_1$$

Postopek z  $a_n \in \mathbb{N}$  za  $n \geq 1$  ponavljamo, dokler  $t_n \neq 0$  (zapis je lahko neskončen).

$$\frac{1}{t_n} = a_{n+1} + t_{n+1}$$

# Postopek za iskanje verižnega ulomka realnega števila

Naj bo  $x \in \mathbb{R}$ .

$$x = a_0 + t_0,$$

kjer je  $a_0 \in \mathbb{Z}$  ter  $t_0 \in [0, 1)$ . Če  $t_0 \neq 0$ , zapišemo

$$\frac{1}{t_0} = a_1 + t_1$$

Postopek z  $a_n \in \mathbb{N}$  za  $n \geq 1$  ponavljamo, dokler  $t_n \neq 0$  (zapis je lahko neskončen).

$$\frac{1}{t_n} = a_{n+1} + t_{n+1}$$

## Zgled

Razmerje zlatega reza:

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

## Izrek

Naj bo  $x \in \mathbb{R}$ . Tedaj je  $x$  vrednost verižnega ulomka, ki ga dobimo z opisanim postopkom.

## Izrek

Naj bo  $x \in \mathbb{R}$ . Tedaj je  $x$  vrednost verižnega ulomka, ki ga dobimo z opisanim postopkom.

## Trditev

Naj bo  $a_0, a_1, a_2, \dots$  zaporedje realnih števil, pri čemer je  $a_n > 0$  za  $n \geq 1$ . Naj bo  $c_n = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_n]$ . Tedaj obstaja  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$  divergira.

# Verižni ulomek za število $e$

$$e = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, \dots] = [1, 0, 1, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, \dots]$$

Rekurzija za  $a_n$  v verižnem ulomku nam da rekurzivno formulo za števce in imenovalce konvergentov:

$$p_{3n} = 2(2n - 1)p_{3n-3} + p_{3n-6}$$

$$q_{3n} = 2(2n - 1)q_{3n-3} + q_{3n-6}$$

Uvedemo:

$$x_n = p_{3n}$$

$$y_n = q_{3n}$$

Naj bo

$$T_n = \int_0^1 \frac{t^n (t-1)^n}{n!} e^t dt$$



Naj bo

$$T_n = \int_0^1 \frac{t^n(t-1)^n}{n!} e^t dt$$

Izračunamo:

$$T_0 = \int_0^1 e^t dt = e - 1$$

$$T_1 = \int_0^1 t(t-1)e^t dt = e - 3$$

Naj bo

$$T_n = \int_0^1 \frac{t^n(t-1)^n}{n!} e^t dt$$

Izračunamo:

$$T_0 = \int_0^1 e^t dt = e - 1$$

$$T_1 = \int_0^1 t(t-1)e^t dt = e - 3$$

In ugotovimo:

$$T_n = y_n e - x_n \Rightarrow \frac{T_n}{y_n} = e - \frac{x_n}{y_n}$$

Naj bo

$$T_n = \int_0^1 \frac{t^n(t-1)^n}{n!} e^t dt$$

Izračunamo:

$$T_0 = \int_0^1 e^t dt = e - 1$$

$$T_1 = \int_0^1 t(t-1)e^t dt = e - 3$$

In ugotovimo:

$$T_n = y_n e - x_n \Rightarrow \frac{T_n}{y_n} = e - \frac{x_n}{y_n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} (y_n e - x_n) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( e - \frac{T_n}{y_n} \right) = e$$

# Kvadratne iracionalne

## Definicija

Realno število  $\alpha$  je *kvadratna iracionalna*, če je iracionalno in rešitev neke kvadratne enačbe s koeficienti iz  $\mathbb{Q}$ .

# Kvadratne iracionalne

## Definicija

Realno število  $\alpha$  je *kvadratna iracionalna*, če je iracionalno in rešitev neke kvadratne enačbe s koeficienti iz  $\mathbb{Q}$ .

## Definicija

Verižni ulomek  $[a_0, a_1, a_2, \dots]$  je *periodičen*, če obstaja tak  $h$ , da je

$$a_n = a_{n+h}$$

za vse dovolj velike  $n$ .

## Zgled

Koliko je  $[1, 2, 3, 1, 2, 3, \dots]$ ?

$$\alpha = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\ddots}}}}}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\alpha}}}$$

$$\alpha = \frac{4 + \sqrt{37}}{7}$$

## Izrek

*Karakterizacija periodičnega verižnega ulomka:* Realno število  $\alpha$  je kvadratna iracionala  $\Leftrightarrow$  njegov zapis z verižnim ulomkom je periodičen.

## Zgled

$$[1, \overline{2}]$$

## Izrek

*Karakterizacija periodičnega verižnega ulomka:* Realno število  $\alpha$  je kvadratna iracionala  $\Leftrightarrow$  njegov zapis z verižnim ulomkom je periodičen.

## Zgled

$$[1, \bar{2}] = \sqrt{2}$$