UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 2. stopnja

Gašper Domen Romih

1-2-3 DOMNEVA

Magistrsko delo

Mentor: prof. dr. Nino Bašić

Ljubljana, 2020

Zahvala

Neobvezno. Zahvaljujem se ...

Kazalo

Program dela

Tu naj bi mentor napisal program dela, skupaj z osnovno literaturo spodaj. To je v template-u, ki ga iamo na spletni učilnici za seminar. Verjetno tega ni v končno verziji. Okviren osnutek z povezavami na določene reference bom napisal kar v glavnem delu dokumenta.

Osnovna literatura

Literatura mora biti tukaj posebej samostojno navedena (po pomembnosti) in ne le citirana. V tem razdelku literature ne oštevilčimo po svoje, ampak uporabljamo okolje itemize in ukaz plancite, saj je celotna literatura oštevilčena na koncu.

[2] R. Diestel, *Graph Theory*, Springer; 5th ed, 2016

[5] M. Karonski, T. Łuczak in A. Thomasonb, *Edge weights and vertex colours*, Journal of Combinatorial Theory (2004)

[?]

[3] M. hadi Alaeiyan, *The edge-labeling and vertex-colors of Kn*, Mathematical Sciences (2012)

[?]

Podpis mentorja:

1-2-3 Domneva

Povzetek

Povezavam grafa G priredimo uteži z vrednostmi $1, 2, \ldots, k$. Uteži na povezavah porodijo pravilno barvanje grafa G, če se vsote uteži incedenčnih povezav razlikujejo za vsaki sosednji vozlišči. V nalogi se osredotočimo na zgornjo mejo za k za splošne grafe. Obravnavamo tudi polne ter d-regularne grafe.

English translation of the title

Abstract

An abstract of the work is written here. This includes a short description of the content and not the structure of your work.

Math. Subj. Class. (2010): oznake kot 74B05, 65N99, na voljo so na naslovu `http://www.ams.org/msc/msc2010.html?t=65Mxx`

Ključne besede: teorija grafov, kombinatorika

Keywords: integration, complex

1 Uvod

Napišite kratek zgodovinski in matematični uvod. Pojasnite motivacijo za problem, kje nastopa, kje vse je bil obravnavan. Na koncu opišite tudi organizacijo dela – kaj je v kakšnem razdelku.

2 Osnovne definicije in pojmi

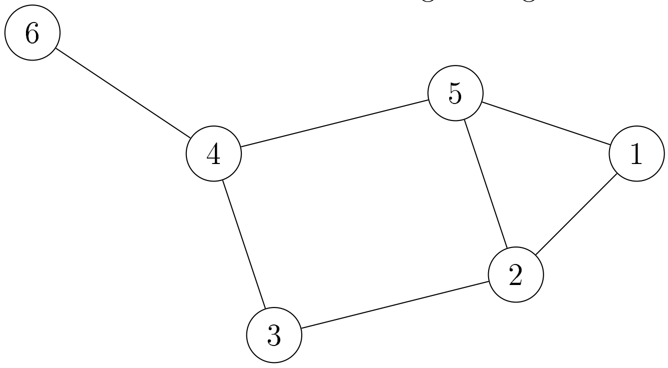
V tem razdelku na kratko predstavim grafe ter naveden definicije, ki bodo potrebne kaseje v nalogi. Pri tem mislim predvsem na barvanje, prirejanje, polni grafi, regularni grafi, itd. Večina definicij bi povzel po [2], kar je bila tudi glavna referenca pri predmetu teorija grafov.

Graf bomo označili kot urejn par $G = (V, E)$. Pri tem množico V imenujemo množica vozlišč grafa in njene elemente ponavadi označimo z u, v, w. Množica $E \subset V \times V$ je množica povezav grafa G. Njene elemente ponavadi označujemo z e, f, g kadar nas ne zanima kateri dve vozlišči povezava vsebuje. V nasprotnem primeru povezavo označimo z $uv \in E$ in s tem eksplicitno povemo, da je to potem povezava med vozliščem v in u. Množico vozlišč in povezav grafa, lahko zaporedoma označimo tudi kot $V(G)$ in $E(G)$. V izogib težavam z notacijo bomo vedno predpostavili, da $V \cap E = \emptyset$.

Primer 2.1. Vzemimo graf

$$G = (\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 5\}, \{5, 4\}, \{2, 3\}, \{4, 3\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}\}).$$

Potem ena izmed možnih risb grafa izgleda takole:



Za $v \in V(G)$ lahko definiramo t.i. odprto soseščino vozlišča $N(v)$. To je množica vseh sosedov vozlišča u, torej $N(v) = \{u \in V(G) \mid uv \in E(G), u \neq v\}$. Na enak način definiramo zaprto soseščino vozlišča $N[u] = N(v) \cup \{v\}$. Poleg množice sosedov je pomembna tudi njena moč, kar označimo z $d(v)$ in imenujemo stopnja vozlišča v.

3 Barvanje grafa in uteži na povezavah

V tem razdelku bi predstavil idejo 1-2-3 domneve. Tore kako pridemo iz uteženega grafa do barvanja ter argumentiram zakaj lahko pridemo do pravilnega barvanja, če nimamo omejitev na množici uteži. Na tem mestu bi tudi predstavil domnevo, povzeto po [5]. Nekako bo tudi treba poimenovati angleški term 'edge weighting graph coloring'. Za sedaj bom temu rekel barvanje grafa z uteženimi povezavami.

3.1 Barvanje grafa

Vozliščno barvanje grafa $G = (V, E)$ je preslikava $c : V \rightarrow$, za katero velja $c(v) \neq c(u)$, če $vu \in E$. Množica S je množica razpoložljivih barv. Poleg vozliščnega barvanja poznamo tudi povezavno barvanje, vendar nas to tekom magisterske naloge nebo zanimalo. Zato bomo od sedaj dalje z barvanjem grafa vedno mislili vozliščno barvanje. Pri barvanju nas ponavadi predvsem zanima velikost množice S. Drugače povedano, zanima nas najmanjši $k \in \mathbb{N}$, tako da G premore k-barvanje $c : V \rightarrow \{1, 2, \ldots, k\}$. Tak najmanjši k označimo z $\chi(G)$ in ga imenujemo kromatično število grafa G. V kolikor je $\chi(G) \leq k$ rečemo, da je graf k-obarljiv.

3.2 Barvanje grafa z utežmi

Povezavam grafa velikokrat priredimo t.i. uteži, ponavadi iz množice pozitivnih realnih števil. Take utežitve grafa imajo v praksi veliko uporabnost. Poleg tega, da uteži priredimo povezavam, lahko uteži priredimo tudi vozliščem. z namenom, da bomo ločili med različnimi utežitvami grafa, definirajmo povezavno utežitev kot preslikavo $\omega : E(G) \rightarrow S$. Na podoben način definiramo vozliščno utežitev kot preslikavo $\omega : V(G) \rightarrow S$. V kolikor graf utežimo tako povezavno kot vozliščno rečemo, da imamo polno utežitev grafa G. V našem primeru bo množica uteži S vedno končna množica prvih k naravnih števil, kar lahko označimo kot $S = [k] = \{1, 2, \ldots, k\}$. S pomočjo zgornjih dejstev lahko definiramo naslednjo definicijo.

Definicija 3.1. Definiramo ***k*-utežitev** grafa G kot preslikavo

$$\omega : D \rightarrow 1, 2, \ldots, k,$$

kjer za množico D vzamemo $E(G)$, $V(G)$ ali $V(G) \cup E(G)$.

Hitro lahko vidimo, da nam k-utežitev ω lahko inducira neko barvanje grafa G, tako da za barvo nekega vozlišča v vzamemo vsoto uteži na povezavah incidenčnih v. Označimo

$$c_\omega(v) = \sum_{u \in N(v)} \omega(vu).$$

V kolikor imamo polno utežitev, prištejemo še utež vozlišča v. Seveda se tu porodi vprašanje, ali je tako barvanje sploh pravilno, torej ali je izpolnjena zahteva, da sta sosednji vozlišči pobarvani različno. Hitro ugotovimo, da to ni možno za graf K_2, zato bomo v nadaljevanju predpostavljali, da je G povezan graf, ki ni K_2. Prepričajmo se sedaj, da za vsak graf G obstaja tak $k \in \mathbb{N}$, tako da obstaja k-utežitev grafa G, ki porodi pravilno barvanje. Še več pokazali bomo, da je vsako vozlišče različne barve. V ta namen oštevilčimo povezave grafa G kot $e_1, e_2, \ldots, e_m$, kjer je $m = |E(G)|$. Sedaj definiramo utežitev kot

$$\omega(e_i) = 2^i.$$

Očitno ta utežitev porodi pravilno barvanje grafa G. Vendar je zgornja ocena precej slaba ter predvsem različna za vsak graf.

Definicija 3.2. Rečemo, da je k-utežitev ω grafa G **pravilno barvanje z utežmi**, če za vsak $uv \in E(G)$ velja
$$c_\omega(u) \neq c_\omega(v).$$

Označimo najmanjši tak k, da za graf G obstaja k-utežitev, ki je pravilno barvanje z utežmi kot $\mu(G)$. Smiselno vprašanje na tem mestu bi bilo, ali obstaja zgornja meja za $\mu(G)$ za vsak povezan graf, ki ni K_2. Kot bomo videli v nadaljevanju je odgovor na to vprašanje pozitiven, zato je smiselno razmišljati o tem kako visoka je ta zgornja meja. Sedaj lahko navedemo domnevo, ki glavna tema te naloge.

Domneva 3.3. (1-2-3 Domneva; Karonski– Luczak–Thomason [5]) Naj bo G povezan graf, ki ni K_2. Tedaj je $\mu(G) \leq 3$.

Za sedaj še niti vemo, ali obstaja fiksna zgornja meja za vsak graf. V članku [5], kjer je bila zastavljena zgornja domneva so pokazali, da obstaja končna množica realnih števil, tako da utežitev z temi števili inducira pravilno barvanje vsakega grafa. Vendar je ta rezultat še vedno precej odmaknjen od željene domneve. Kasneje je bil v [?] predstavljen eleganten algoritem, ki doseže zahtevano utežitev z utežmi v $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. To je do sedaj tudi najboljši razultat za splošne grafe. Tekom naloge bomo spoznali nekaj metod s katerimi se lahko lotimo zgornjega problema za neke specifične družine grafov ter se probamo čim bolj približati željenemu rezultatu. Za začetek pa si oglejmo nekaj preprostih družin, za katere pokaže, da zgornja meja velja.

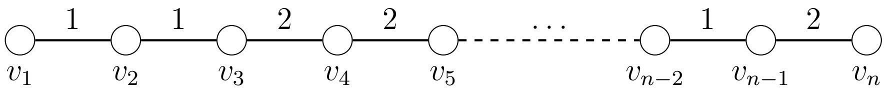
3.3 Izračun μ za nekatere družine grafov

Večina tega razdelka je povzeta po [1]. Primere sem predelal in jih mislim da precej jasno razložil. V članku so rezultati napisani precej

3.3.1 $\mu(P_n)$

Ker je graf $P_2 = K_2$ bomo obravnavali le primer, ko je $n \geq 3$. Najprej oštevilčimo povezave P_n na naraven način kot $e_i = v_i v_{i+1}$ za $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Po kratkem premisleku ugotovimo, da je potreben pogoj za željeno utežitev
$$\omega(e_i) \neq \omega(e_j) \text{ v kolikor } |j-i| = 2.$$

Torej povezavi, ki sta na razdalji 2 morata imeti različne uteži. To drži, saj imata v primeru ko $\omega(e_i) = \omega(e_{i+2})$ vozlišči v_{i+1} in v_{i+2} enako barvo neglede na vrednost $\omega(e_{i+1})$. Polega tega, da je zgornji pogoj potreben, je tudi zadosten. To preprosto vidimo saj smo ugotovili, da povezava e_i ne vpliva na barvo vozlišč v_i in v_{i+1} saj obema "pripomore"enako vrednost. Na podlagi zgornjega razmisleka ugotovimo, da $\mu(P_3) = 1$, saj P_3 ne vsebuje povezav na razdalji 2. Po drugi strani za P_n definiramo:
$$\omega(e_i) = \begin{cases} 1 & i \equiv 1, 2 \pmod 4 \\ 2 & i \equiv 3, 4 \pmod 4 \end{cases}$$



Slika 1: Primer utežitve grafa P_n.

Res, zgornja utežitev zadošča zgornjemu pogoju. Na sliki **??** vidimo primer neke take utežitvne na grafu P_n. Glede na to, da sta zadnji uteži na povezavah 1 in 2 lahko sklepamo, da gre na sliki za P_n z $n \equiv 3 \pmod 4$. Prav tako opazimo, da je pravzaprav pomembno zaporednje uteži $11221\dots112$. V tem zaporedju se torej nujno razlikujeta elementa na razdalji 2. Tako lahko zaključimo, da je $\mu(P_n) = 2$ za $n \geq 4$. Podoben razmislem bomo uporabili v naslednjem primeru.

3.3.2 $\mu(C_n)$

V prejšnjem primeru smo izračunali število μ za grafe, ki so poti. Hitro opazimo, da med potjo in ciklom ni veliko razlike. Dodana je le ena povezava med prvim in zadnjim vozliščem. Enako kot v prejšnjem primeru bomo oštevilčili povezave cikla C_n kot $e_1, e_2, \dots, e_n$, kjer vzamemo $e_n = v_n v_1$. Poizkusimo z enako utežitvijo kot smo jo imeli za poti, torej

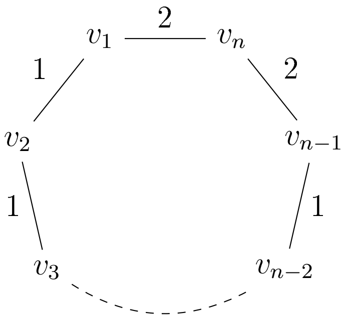
$$\omega(e_i) = \begin{cases} 1 & i \equiv 1,2 \pmod 4 \\ 2 & i \equiv 3,4 \pmod 4 \end{cases}$$

Potreben in zadosten pogoj, ki smo ga uporabili že za primer poti velja tudi za cikle. Pri ciklu moramo opazovati dodatno povezavo med v_1 in v_n. Kot je razvidno iz slike 2 moramo ločit primere glede na vrednost $n \pmod 4$. Ugotovimo, da za pravilno utežitev cikla C_n potrebujemo največ 3 uteži, torej $\mu(C_n) \leq 3$. Pokažimo sedaj, da je ta meja tudi natančna za $n \neq 4k$. Recimo torej nasprotno, da je $\mu(C_n) = 2$ in naj bo ω utežitev, ki zadošča temu pogoju. Potem iz $c_\omega(v_i) \neq c_\omega(v_{i+1})$ sledi $\omega(v_i v_{i+1}) \neq \omega(v_{i+2} v_{i+3})$. To je pogoj, da se uteži na razdalji 2 razlikujejo. Ampak to pomeni, ker imamo na voljo samo uteži 1 in 2, da mora veljati $\omega(v_i v_{i+1}) = \omega(v_{i+4} v_{i+5})$. To pa je protislovje v primeru ko $n \neq 4k$.

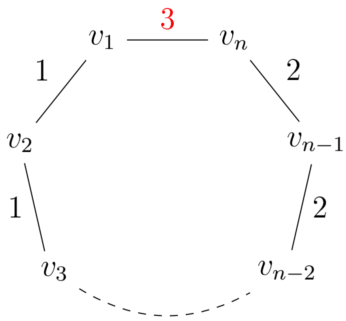
3.3.3 $\mu(K_n)$

Poglejmo najprej zakaj $\mu(K_n) \geq 3$. Recimo, da to ne drži. Torej imamo neko 2-utežitev ω za K_n iz česar sledi $c_\omega(v_i) \neq c_\omega v_j$ za vsak $i \neq j$. To pomeni, da mora vsak $c_\omega(v_i)$ za $i = 1, 2, \dots, n$ pripadati eni izmed n različnih vrednosti v $\{n-1, n, \dots, 2(n-1)\}$. Tako lahko najdemo vozlišče v' za katerega $c_\omega(v') = n-1$ in vozlišče u' za katerega $c_\omega(u') = 2(n-1)$, to pa je protislovje saj $\omega(v'u') = 1$ zaradi vozlišča v' in $\omega(v'u') = 2$ zaradi u'.

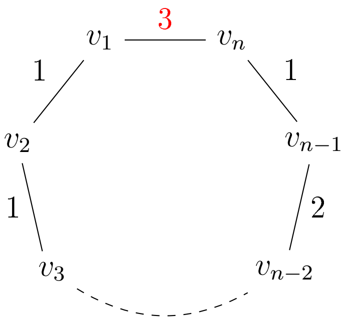
Pozkusimo sedaj najti 3-utežitev ω, ki je pravilno barvanje z utežmi. Sedaj imamo za $c_\omega(v_i)$ na voljo eno izmed $3n$ vrednosti izmed $\{n-1, n, \dots, 3(n-1)\}$. Skonstruirali bomo utežitev ω na naslednji način. Najprej oštevilčimo vozlišča kot $v_1, v_2, \dots, v_n$. V prvem koraku nastavimo vse uteži na 1. Uteži z vrednostjo 2 in 3 dodelimo povezavam, tako da dobimo strogo naraščajoče zaporedje $(c_\omega(v_i))_{i \in [n]}$.



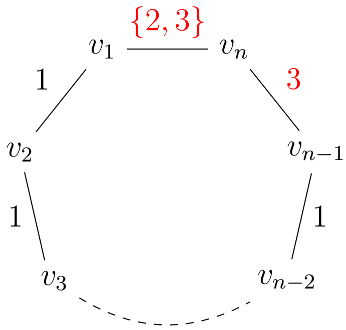
(a) Primer $n = 4k$. Zadoščata 2 uteži



(b) Primer $n = 4k + 1$. Potrebno je dodati utež 3 na zadnjo povezavo.



(c) Primer $n = 4k + 2$.



(d) Primer $n = 4k + 3$. Poleg zadnje povezave moramo popraviti še predzadnjo.

Slika 2: Primer utežitve cikla C_n glede na različne vrednosti n. Uteži, obarvano rdeče so potrebni popravki popravki utežitve ω, da dobimo pravilno barvanje cikla.

Označimo še $N_j = \{n, n-1, \ldots, n-j+1\} \setminus \{v_j\}$ in nastavimo

$$\begin{aligned} \omega(v_1 v_n) &= 2 \text{ za } i \in N_1 \\ \omega(v_2 v_i) &= 2 \text{ za } i \in N_2 \\ &\vdots \\ \omega(v_j v_i) &= 2 \text{ za } i \in N_j \end{aligned}$$

Sedaj velja

$$c_\omega(v_i) = \underbrace{n-1}_{\text{Uteži z vr. 1}} + \underbrace{|N_i|}_{\text{Uteži z vr. 2}} = n-1+\begin{cases} i;\ i \notin N_i \iff i < n-i+1 \\ i-1;\ i \in N_i \iff i \geq n-i+1 \end{cases}$$

Iz zgornje enačbe vidimo, da zaporedje strogo narašča do največjega i, za katerega $i < n-i+1$ to pa je natanko tedaj ko $i = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Takrat velja

$$|N_i| = |N_i| \implies c_\omega(v_i) = c_\omega(v_{i+1}).$$

Te enakosti se znebimo, tako da dodamo uteži $\omega(v_i v_n) = 3$ za $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor < i < n$ in dobimo

$$c_\omega(v_i) = \begin{cases} n+1+i;\ i < n \\ \lfloor \frac{5n-5}{2} \rfloor;\ i = n \end{cases} .$$

To pa ja pravilno barvanje K_n in zato $\mu(K_n) =$.

3.3.4 $\mu(K_{m,n})$

3.4 μ za grafe z posebnimi pogoji

V tem razdelku bomo obravnavali nekaj rezultatov za grafe, ki imajo neke dodatne pogoje.

3.4.1 3-obarljivi grafi

V [5] sta ... zastavila vprašanje, ki je nato pripeljalo do 1-2-3 domneve in ga v njem tudi dokazala za primer 3-obarljivih grafov.

Trditev 3.4. *Naj bo Γ Abelova grupa lihe moči in G ne-trivialen $|\Gamma|$-barljiv graf. Potem obstaja utežitev ω z elementi iz Γ, tako da je inducirano barvanje c_ω pravilno.*

Posledica te trditve je, da za 3-barljive grafe 1-2-3 domneva drži. Dejansko pa pove še to, če za graf obstaja k barvanje, potem obstaja tudi k-utežitev za to barvanje.

Dokaz. content... □

Posledica 3.5. *Če je G 3-barljiv graf, potem je $\mu(G) \leq 3$.*

3.4.2 Dvodelni grafi in drevesa

Tu si bomo ogledali zračun μ za dvodelne grafe. Ugotovili bomo, da za večino dvodelnih grafov $\mu(G) = 2$ vključno z drevesi vendar to ne velja za vse dvodelne grafe.

4 1-2-3-4-5 Izrek

Ta razdelek sledi članku [4]. To je do sedaj tudi najboljša splošna meja μ za poljubne grafe. Dokaz je algoritmične narave in bi morda bilo zanimivo spisati algoritem ki deluje skladno z dokazom

Izrek 4.1. *Za vsak graf G, ki ni K_2 obstaja utežitev $\omega : E(G) \to 1, 2, 3, 4, 5$, tako da je inducirano barvanje c_ω pravilno.*

Dokaz. □

V nadaljevanju tega razdelka bi podal kakšen primer 5 utežitve nekega grafa.

4.0.1 1-2-3-4 rezultat za d-regularne grafe

Ta rzdelek najdemo v članku [6]. V tem članku sta 2 glavna rezultata in sicer 1-2-3-4 utežitev za d-regularne grafe, kar je narejeno na algoritmičen način. Drugi rezultat pa je, dokaz da 1-2-3 domneva velja za grafe, ki imajo dovolj velik "d"in temelji na verjetnostnih metodah. V tem razdelku bi predstavil prvi rezultat z nekaj primeri.

5 Verjetnostne metode

5.1 *d*-regularni grafi

V članku [6] je predstavljena verjetnostna metoda s katero dokažemo 1-2-3 domnevo za regularne grafe z dovolj veliko stopnjo. Sam dokaz uporblja Chernove meje in je precej dolg. Še nisem čisto odločen ali bi vključil to ali kaj drugega

5.2 Mogoče μ za končno mn. realnih števil

V osnovnem članku, kjer je bila zastavljena domneva, so pokazali, da za ustrezno utežitev poljubnega grafa zadošča končna množice realnih števil. Dokaz uporablja verjetnostne metode. Moje mnenje je, da bi ta del sicer sodil bolj na začetek metode saj je bil en izmed prvih rezultatov, ki motivira iskanje meje za μ.

Literatura

[1] G. J. Chang in dr., *Vertex-Coloring edge-weightings of graphs*, TAIWANESE JOURNAL OF MATHEMATICSVol. 15, No. 4, pp. 1807-1813, August 2011 (2011).

[2] R. Diestel, *Graph Theory*, Springer; 5th ed, 2016.

[3] M. hadi Alaeiyan, *The edge-labeling and vertex-colors of Kn*, Mathematical Sciences (2012).

[4] M. Kalkowski, M. Karoński in F. Pfender, *Vertex-coloring edge-weightings:Towards the 1-2-3-conjecture*, Journal of Combinatorial Theory, Series B 100 (2010) 347–349 (2010).

[5] M. Karonski, T. Łuczak in A. Thomasonb, *Edge weights and vertex colours*, Journal of Combinatorial Theory (2004).

[6] J. Przybylo, *The 1–2–3 Conjecture almost holds for regular graphs*, 2018, že objavljen.