UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 2. stopnja

Gašper Domen Romih

1-2-3 DOMNEVA

Magistrsko delo

Mentor: prof. dr. Nino Bašić

Ljubljana, 2020

Zahvala

Neobvezno. Zahvaljujem se . . .

Kazalo

Program dela

Tu naj bi mentor napisal program dela, skupaj z osnovno literaturo spodaj. To je v template-u, ki ga iamo na spletni učilnici za seminar. Verjetno tega ni v končno verziji. Okviren osnutek z povezavami na določene reference bom napisal kar v glavnem delu dokumenta.

Osnovna literatura

Literatura mora biti tukaj posebej samostojno navedena (po pomembnosti) in ne le citirana. V tem razdelku literature ne oštevilčimo po svoje, ampak uporabljamo okolje itemize in ukaz plancite, saj je celotna literatura oštevilčena na koncu.

[2] R. Diestel, *Graph Theory*, Springer; 5th ed, 2016

[4] M. Karonski, T. Łuczak in A. Thomasonb, *Edge weights and vertex colours*, Journal of Combinatorial Theory (2004)

[5] J. Przybylo, *The 1–2–3 Conjecture almost holds for regular graphs*, 2018, že objavljen

[1] G. J. Chang in dr., *Vertex-Coloring edge-weightings of graphs*, TAIWANESE JOURNAL OF MATHEMATICSVol. 15, No. 4, pp. 1807-1813, August 2011 (2011)

[3] M. Kalkowski, M. Karoński in F. Pfender, *Vertex-coloring edge-weightings:Towards the 1-2-3-conjecture*, Journal of Combinatorial Theory, Series B 100 (2010) 347–349 (2010)

Podpis mentorja:

1-2-3 Domneva

Povzetek

Povezavam grafa G prireedimo uteži z vrednostmi $1, 2, \ldots, k$. Uteži na povezavah porodijo pravilno barvanje grafa G, če se vsote uteži incedenčnih povezav razlikujejo za vsaki sosednji vozlišči. V nalogi se osredotočimo na zgornjo mejo za k za splošne grafe. Obravnavamo tudi polne ter d-regularne grafe.

English translation of the title

Abstract

An abstract of the work is written here. This includes a short description of the content and not the structure of your work.

Math. Subj. Class. (2010): oznake kot 74B05, 65N99, na voljo so na naslovu `http://www.ams.org/msc/msc2010.html?t=65Mxx`

Ključne besede: teorija grafov, kombinatorika

Keywords: integration, complex

1 Uvod

Motivacija za 1-2-3 domnevo izhaja iz t.i. iregularnostne moči grafa, ki si jo intuitivno lahko predstavljamo kot neko mero oddaljenosti od regularnih grafov. Regularni grafi so grafi kjer imajo vsa vozlišča enako število sosedov oz. imajo enako stopnjo. Na preprost način lahko ugotovimo, da obstajajo regularni grafi vseh velikosti. Zanima nas. če lahko karakteriziramo grafe, ki se od regularnih najbolj razlikujejo in sicer tako, da zahtevamo različne stopnje za vsa vozlišča v grafu. Vendar preprosto dejstvo o grafih nam pove, da imata vsaj dve vozlišči v grafu isto stopnjo. To seveda drži v primeru ko je graf preprost. Isto ne velja za multigrafe, kjer dovoljujemo več vzporednih povezav med vozlišči. Iregularnostna moč grafa je tako definirana kot najmanjše število vzporednih povezav med dvema vozliščema, tako da so stopnje vseh vozlišč v grafu različne. Namesto dodajanja vzporednih povezav lahko problem formuliramo kot dodelitev celo številskih (pozitivnih) uteži na povezave, tako da je vsota uteži na incidenčnih povezavah različna za vsa vozlišča. Za mnoge znane grafe obstaja več spodnjih in zgornjih mej poleg tega je problem porodil ogromno podobnih in izpeljanih problemov ter domnev. V nalogi se bomo osredotočili na izpeljanko, kjer bomo zahtevali, da imajo različno stopnjo le sosednja vozlišča. Leta 2004 je bila formulirana 1-2-3 domneva [4], ki pravi, da zadoščajo le uteži iz množice $\{1, 2, 3\}$. V primerjavi z iregularnostno močjo grafa je zastavljena meja izredno stroga saj je iregularnostna moč grafa ponavadi odvisna od njegove velikosti. Kljub temu, da je bila zastavljena meja zelo nizka v tistem času ni obstajala nobena konstantna zgornja meja za zastavljen problem. Kmalu za tem je bila postavljena prva zgornja meja v [], kjer je bilo pokazano, da zadošča 30 uteži. To mejo so kmalu za tem izboljšali na 16 v [] ter nato na 13 v [] in na 6 v []. Leta 2010 je bila postavljena do sedaj najnižja zgornja meja, kjer je bilo pokazano, da lahko z preprostim algoritmom utežimo graf z utežmi iz množice $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Poleg rezultatov, ki so se domnevi le približali obstaja ogromno rezultatov, ki domnevo potrdijo za grafe z nekaj dodatnimi lastnostmi. Metode, ki se uporabljajo za soočanje z zgornjim problemov izhajajo iz različnih vej matematike. Med te sodijo kombinatorični, algoritemski, algebrajski in verjetnostni pristopi.

V nalogi bomo obravnavali zgornji problem, kjer se bomo najprej osredotočili na posebne družine grafov ter na grafe z nekaj dodatnimi lastnostmi. Pokazali bomo tudi različne pristope in metode. Iregularni grafi so nekakšno nasprotje regularnih grafov zato so regularni grafi še posebaj zanimivi saj je problem na njih nekako najtežji saj moramo intuitivno "popravitištopnje vseh vozlišč v grafu. Regularnim grafom bomo v nalogi namenili celoten razdelek, saj za njih obstajajo boljši rezultati kot za splošne grafe. Poleg teoretičnih pristopov bomo tekom naloge razvili algoritem, ki bo poiskal primerno utežitev za vsak graf. Poleg tega si bomo izbrali neko posebno družino grafov ter analizirali vse take grafe do n vozlišč s pomočjo super računalnika Primorske univerze. Pokazali bomo tudi, da je tak algoritem za splošne grafe NP-težak (če bo šlo).

2 Osnovne definicije in pojmi

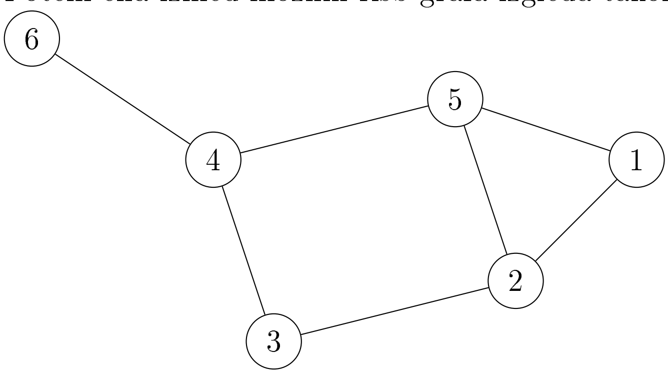
V tem razdelku bomo spoznali nekaj osnovnih definicij in pojmov, ki jih bomo uporabljali tekom naloge. Dokazali bomo tudi kakšen lažji izrek v kolikor bomo rezultate uporabljali kasneje. Večina definicij in izrekov bo povzetih po [2].

Graf bomo označili kot urejen par $G = (V, E)$. Pri tem množico V imenujemo množica vozlišč grafa in njene elemente ponavadi označimo z u, v, w. Množica $E \subset V \times V$ je množica povezav grafa G. Njene elemente ponavadi označujemo z e, f, g kadar nas ne zanima kateri dve vozlišči povezava vsebuje. V nasprotnem primeru povezavo označimo z $uv \in E$ in s tem eksplicitno povemo, da je to potem povezava med vozliščem v in u. Množico vozlišč in povezav grafa, lahko zaporedoma označimo tudi kot $V(G)$ in $E(G)$. V izogib težavam z notacijo bomo vedno predpostavili, da $V \cap E = \emptyset$.

Primer 2.1. Vzemimo graf

$$G = (\{1,2,3,4,5,6\}, \{\{1,2\},\{1,5\},\{2,5\},\{5,4\},\{2,3\},\{4,3\},\{4,5\},\{4,6\}\}).$$

Potem ena izmed možnih risb grafa izgleda takole:



Za $v \in V(G)$ lahko definiramo t.i. odprto soseščino vozlišča $N(v)$. To je množica vseh sosedov vozlišča u, torej $N(v) = \{u \in V(G) \mid uv \in E(G), u \neq v\}$. Na enak način definiramo zaprto soseščino vozlišča $N[u] = N(v) \cup \{v\}$. Poleg množice sosedov je pomembna tudi njena moč, kar označimo z $d(v)$ in imenujemo stopnja vozlišča v. Stopnjo vozlišč lahko posplošimo ter z $\delta(G)$ oziroma samo δ označimo najmanjšo stopnjo vozlišča v grafu. Na podoben način z Δ označimo maksimalno stopnjo vozlišča v grafu G.

Največja in najmanjša stopnja vozlišč sta ene izmed osnovnih lastnosti grafa. Obstaja ogromno drugih lastnosti in različne veje teorije grafov se ukvarjajo z njihovim iskanjem. Ko opazujemo neko lastnost grafa si ponavadi želimo, da se ta lastnost ne spreminja pri različnih risbah grafa. Takim lastnostim rečemo **invariante grafa**. Formalno invarianto grafa $G = (V, E)$ definiramo kot lastnost, ki se ohranja pod **izomorfizmi grafov**. Izomorfizem grafa je bijektivna preslikava $f : V(G) \to V(G)$, ki sosednja vozlišča slika v sosednja vozlišča. Grafi, ki so izomorfni imajo tako enake lastnostni in jih obravnavamo kot enake. Definirajmo sedaj še pojem podgrafa. Graf $G' = (V', E')$ je **podgraf** grafa $G = (V, E)$, če velja $V' \subseteq V$ in $E' \subseteq E$. Pogosto obravnavamo dva posebna primera podgrafov. Naprimer izberemo lahko neko podmnožico vozlišč $V' \subset V$ ter vse povezave med izbranimi vozlišči. Tak podgraf imenujemo **induciran** podgraf in z oznako $G[S]$ mislimo induciran podgraf kjer za množico vozlišč vzamemo S. Na podoben način definiramo $G - U$ kot$G[V(G) \setminus U]$. Po drugi strani pa lahko za podgraf izberemo vsa vozlišča originalnega grafa med tem ko odstranimo kakšno povezavo. Takemo podgrafu rečemo **vpet** podgraf. Velikokrat se izkaže, da nam posebni primeri induciranih oziroma vpetih podgrafov omogočajo izpeljavo nekaterih lastnostih za celoten graf. V nadaljevanju tega razdelka bomo spoznali nekaj različnih grafovskih invariant.

2.1 Osnovne družine grafov

Na podlagi določenih lastnosti ločimo različne družine grafov. Te lastnosti nam omogočaja, da probleme, ki so težki za splošne grafe, rešimo za neke specifične družine.

Pot je najbolj preprost graf. **Pot** z n vozlišči označimo z P_n pri čemer vozlišča uredimo v vrsto $v_1, v_2, \dots v_n$ ter medseboj povežemo zaporedna vozlišča. Vsa vozlišča razen v_1 in v_n so stopnje 2. V kolikor dodamo še povezavo med v_1 in v_n dobimo **cikel** z n vozlišči in ga označimo kot C_n. Za cikle tako velja, da imajo vsa vozlišča stopnjo 2. To idejo lahko posplošimo in definiramo **regularni graf** kot graf, kjer imajo vsa vozlišča enako stopnjo. Z oznako d-regularni grafi mislimo grafe, kjer imajo vsa vozlišča stopnjo d. Parameter d imenujemo tudi stopnja oziroma red regularnega grafa. S tem lahko cilke definiramo kot 2-regularne grafe. Preprosto lahko ugotovimo, da regularni grafi poljubnih stopenj in velikosti ne morejo obstajat. Potreben in zadosten pogoj za obstoj d-regularnega grafa na n vozliščih je $n \geq d+1$ in nd sodo. Navedimo še en poseben primer regularnega grafa. **Polni graf** z n vozlišči označimo z K_n kar predstavlja $n-1$-regularni graf. To je graf, kjer je vsako vozlišče povezano z vsemi drugimi vozlišči. Ime polni graf izhaja iz dejstva, da imajo polni grafi maksimalno število povezav in sicer $\binom{n}{2}$. Naslednja pomembna družina grafov so drevesa. **Drevo** T_n je povezan graf na n vozliščih z $n-1$ povezavami. Obstaja več ekvivalentnih definicij oziroma karakterizacij dreves. Velikokrat se drevesa definira kot povezane grafe brez ciklov. V kolikor graf ni povezan in nima ciklov ga imenujemo gozd.

2.2 Barvanje grafa

Barvanje grafa je zagotovo eden izmed najbolj popularnih grafovskih problemov. Poleg tega, da je bil ta problem eden izmed prvih grafovskih problemov dokazano NP-poln je povezan še z mnogo drugimi podobnimi problemi. Tako se je oblikovalo več različnih in izpeljanih načinov barvanja grafov. Vsem oblikam barvanja je skupno to, da je za splošne oziroma poljubne grafe to težak problem. **Vozliščno barvanje** grafa $G = (V, E)$ je preslikava $c : V \to S$, za katero velja $c(v) \neq c(u)$, če $vu \in E$. Množica S je množica razpoložljivih barv. Poleg vozliščnega barvanja poznamo tudi povezavno barvanje, vendar nas to tekom magisterske naloge nebo zanimalo. Zato bomo od sedaj dalje z barvanjem grafa vedno mislili vozliščno barvanje. Pri barvanju nas ponavadi predvsem zanima velikost množice S. Drugače povedano, zanima nas najmanjši $k \in \mathbb{N}$, tako da G premore k-barvanje $c : V \to \{1, 2, \dots, k\}$.

Tak najmanjši k označimo z $\chi(G)$ in ga imenujemo **kromatično število** grafa

G. Z lahkoto preverimo, da je to invarianta grafa. V kolikor je $\chi(G) \leq k$ rečemo, da je graf k-obarljiv. Za podan graf G nas ponavadi zanima zgornja meja za $\chi(G)$. Konstantna zgornja meja za splošne grafe ne obstaja. Preprost primer, ki podpre to dejstvo so polni grafi K_n saj za njih potrebujemo n barv. Obstaja pa preprosta meja, ki vključuje maksimalno stopnjo Δ in sicer velja $\chi(G) \leq \Delta + 1$. To lahko preprosto vidimo, če analiziramo vozlišča grafa v poljubnem vrstnem redu, recimo $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ter jih požrešno barvamo. V najslabšem primeru, bodo vsi sosedi trenutnega vozlišča pobarvani z različnimi barvami, kar pomeni, da moramo trenutno vozlišče pobartvati z dodatno barvo. Na tak način nikoli ne porabimo več kot $\Delta + 1$ barv. Izkaže se, da je ta zgornja meja v večini primerov slaba ter se jo da izboljšati. Ideja leži v tem, da ko analiziramo vozlišče v_i zadošča opazovati le število sosedov v_j z $j < i$. S pomočjo te opazke lahko konstruiramo posebno razvrstitev vozlišč za katero bo veljalo, da ima v_i minimalno stopnjo v grafu induciranem z $v_1, v_2, \ldots, v_i$. Tako razvrstitev lahko dosežemo, tako da najprej vzamemo v_n z $d(v_n) = \delta(G)$. Postopek nadaljujemo, tako da izberemo v_{n-1} kot vozlišče z najmanjšo stopnjo v $G - v_n$ ter tako naprej.

Najmanjši tak k za katerega ima graf G tako ureditev vozlišč za katerega velja, da ima vsako vološče manj kot k sosedov v množici prejšnjih vozlič imenujemo **barvno število** ter jo označimo kot $col(G)$. Očitno velja $\chi(G) \leq col(G)$. S pomočjo zgornje ureditve vozlišč lahko dodatno omejimo $col(G) \leq max_{H \subseteq G}\delta(H) + 1$. Ampak očitno velja tudi obratno ter velja $col(G) \geq col(H)$. Dokazali smo torej

$$\chi(G) \leq col(G) = max\{\delta(H) | H \subseteq G\} + 1.$$

Zgornja meja lahko v veliko primerih močno izboljša naivno požrešno metodo vendar moramo za natančen izračun $col(G)$ pregledati vse možne inducirane podgrafe kar ni preprosto.

Zgornjo mejo požrešne metode se lahko v večini primerov izboljša, kar pravi naslednji izrek:

Izrek 2.2 (Brooks (1941))**.** *Naj bo G povezan graf. V kolikor G ni poln graf ali lih cikel potem*

$$\chi(G) \leq \Delta(G)$$

Dokaz zgornjega izreka bralec lahko najde v [2]. Posledica zgornjega izreka je, da lahko d-regularne grafe pobarvamo z d barvami v kolikor je $d > 2$ (cikel) in $d < n$ (poln graf).

2.3 Seznamsko barvanje grafa

Sedaj bomo definirali generalizacijo barvanja grafa. Na zelo podoben način se generalizira tudi druge grafovske probleme, kar bomo videli v naslednjih razdelkih. Naj bo $G = (V, E)$ graf in naj bo $(S_v)_{v \in V}$ družina množic. Vozliščno barvanje c grafa G kjer dodatno velja $c(v) \in S_v$ za vse v imenujemo **seznamsko barvanje** s seznami S_v. Graf G je k-seznamsko obarljiv, če za vsako družino $(S_v)_{v \in V}$ z $|S_v| = k$ za vse v obstaja vozliščno barvanje s seznami S_v. Najmanjši tak k imenujemo seznamsko kromatično število oziroma izbirno število (eng. choice number) in jo označimo kot $ch(G)$. Definicija je bolj zapletena kot definicija navadnega barvanja zato si oglejmo kakšna je povezava med njima. Da je seznamsko barvanje res generalizacija preprosto ugotovimo, tako da za družino $(S_v)_{v\in V}$ vzamemo kar enake množice, naprimer $S_v = \{1, 2, \ldots, k\}$. S tem ugotovimo, da v kolikor je graf k-seznamsko obarljiv je tudi k-obarljiv. Bolj natančno,

$$ch(G) \geq \chi(G)$$

.

Dodatno se izkaže, da veliko zgornjih mej za kromatično število velja tudi za seznamsko verzijo. Konkretno reformulacija Brooks-ovega izreka velja tudi za seznamsko barvanje. To pomeni, da v kolikor G ni poln graf ali lih cikler velja $ch(G) \leq \Delta(G)$. Prav tako velja ista zgornja meja s pomočjo barvnega števila $col(G)$. Vendar to še ne pomeni, da sta si $\chi(G)$ in $ch(G)$ blizu. Obstajajo preprosti grafi, kjer je razlika med parametroma lahko poljubna. Klasični primeri tega so polni dvodelni grafi $K_{m,n}$.

V tem razdelku bi morda dejansko prikazal modifikacijo ali Brooksovega izreka ali optimizirane požrešne metode s čimer bi nekako pokazal, da sta si problema na nek način podobna. zagotovo pa bi dodal tudi primer kjer se moćno razlikujeta. Seznamsko barvanje obravnavam smao iz tega razloga, ker bi v nalogi omenil tudi seznamsko verzijo 123 domneve oziroma ene izmed njenih izpeljank. V teh primerih se dejansko izkaže podobna situacija kot tukaj, kjer so si meje zelo podobne.

2.4 Barvanje grafa z utežmi

Povezavam grafa mnogokrat dodelimo t.i. uteži, ponavadi iz množice pozitivnih realnih števil. Povezavno utežitev grafa $G = (V, E)$ definiramo kot preslikavo $\omega : V(G) \to S$. V našem primeru bo množica uteži S vedno končna množica prvih k naravnih števil, kar lahko označimo kot $S = \{1, 2, \ldots, k\} = [k]$. S pomočjo zgornjih dejstev lahko definiramo naslednjo definicijo.

Definicija 2.3. Definiramo ***k*-utežitev** grafa G kot preslikavo

$$\omega : E(G) \to [k] \, .$$

Naj bo ω k-utežitev grafa G. Označimo

$$c_\omega(v) = \sum_{u\in N(v)} \omega(vu).$$

Na tak način utežitev grafa dodeli vrednosti na vsa vozlišča. Preslikav c_ω slika iz množice v množico $\{\delta(G), \delta(G) + 1, \ldots, k\delta(G)\}$ in je torej neko barvanje grafa G. Različne utežitve povezav nam tako določajo različna barvanja grafa. Zanimive so predvsem take utežitve, ki določajo pravilno barvanje. Vprašamo se lahko, ali take utežitve sploh obstajajo za poljuben graf? Hitro ugotovimo, da to ni možno za graf K_2, zato bomo v nadaljevanju predpostavljali, da je G povezan graf, ki ni K_2. Prepričajmo se sedaj, da za vsak graf G obstaja tak $k \in \mathbb{N}$, tako da obstaja k-utežitev grafa G, ki porodi pravilno barvanje. Še več pokazali bomo, da je vsako vozlišče različne barve. S tem bo k tudi zgornja meja za iregularnostno moč grafa

G. V ta namen oštevilčimo povezave grafa G kot $e_1, e_2, \ldots, e_m$, kjer je $m = |E(G)|$. Sedaj definiramo utežitev kot

$$\omega(e_i) = 2^i.$$

Očitno ta utežitev porodi pravilno barvanje grafa G. Vendar je zgornja ocena precej slaba ter predvsem različna za vsak graf.

Definicija 2.4. Rečemo, da je k-utežitev ω grafa G **pravilno barvanje z utežmi**, če za vsak $uv \in E(G)$ velja

$$c_\omega(u) \neq c_\omega(v).$$

Označimo z $\chi^e_\Sigma(G)$ najmanjši tak k, da za graf G obstaja k-utežitev, ki je pravilno barvanje z utežmi. Literatura glede oznake ni enotna vendar nam ta oznaka omogoča konsistentnost pri raziskovanju podobnih problemov. Tako kot kromatično število je tudi $\chi^e_\Sigma(G)$ invarianta grafa G. V nalogi se bomo osredotočili na analiziranje te grafovske invariante ter nekaj izpeljank. Naprimer namesto vsote uteži bi lahko primerjali produkte ter dovoljevali tudi vozliščem, da vsebujejo uteži. Po zgornjem primeru lahko grobo ocenimo $\chi^e_\Sigma(G) \leq 2^{|E(G)|}$. Kot bomo videli v nadaljevanju ja ta ocena zelo slaba. Ugotovili bomo, da obstaja celo konstantna zgornja meja za vse grafe. Malo lažje ocenimo spodnjo mejo. Na primeru cikla C_3 opazimo, da $\chi^e_\Sigma(G) \geq 3$ saj potrebujemo vsaj 3 različne uteži na povezavah. Glede na to, da je cikel C_3 zelo preprost graf nam intuicija govori, da bo spodnja meja za bolj kompleksne grafe višja. Vendar temu ni tako. V naslednjem razdelku bomo predstavili 1-2-3 domnevo, kjer je domnevna zgornja meja za $\chi^e_\Sigma(G)$ kar enaka preprosti spodnji meji, ki smo jo ugotovili v primeru cikla C_3.

2.5 Iregularnostna moč grafa oziroma multigrafa

V tem razdelku bomo predstavili glavno motivacijo za 1-2-3 domnevo in je v nekem smislu generalizacija prejšnjega razdelka. Glavna ideja leži v tem, kako definirati t.i. **iregularni graf**. V nasprotju z regularnimi grafi bi naivno tak graf definirali kot graf, kjer imajo vsa vozlišča enako stopnjo. Vendar to seveda ni mogoče. Preprosto dejstvo je, da ima vsak graf z vsaj dvema vozliščema dva vozlišča z isto stopnjo. To lahko pokažemo z preprosto uporabo Dirichletovega principa. Možne stopnje vozlišč so $0, 1, 2, \ldots n-1$ vendar v grafu ne more istočasno obstajati vozlišče s stopnjo 0 in s stopnjo $n-1$. Iz tega sledi, da imamo na razpolago $n-1$ različnih stopenj, ki jih moramo dodeliti n vozliščem iz česar sledi, da imata vsaj 2 enako stopnjo. Torej naivna definicija iregularnega grafa ne deluje. Seveda to ne velja za multigrafe. Zato se lahko vprašamo, kako daleč je nek preprost graf do tega, da postane iregularen multi graf. Torej koliko vzporadnih povezav je potrebno dodati grafu, da bodo stopnje njegovih vozlišč različne. Namesto dodajanja vzporednih povezav lahko povezave utežimo z celoštevilskimi utežmi in opazujemo dobljene uteži vozlišč (v tem primeru želimo, da so vse uteži na vozliščih različne). Definirajmo sedaj zgornji razmislek bolj natančno. Naj bo $\omega : E(G) \to \{1, 2, \ldots, k\}$ neka utežitev povezav grafa G. Utežitvi ω rečemo iregularna, če so uteži na vozliščih $d_\omega(v) = \sum_{u \in N(v)} \omega(vu)$ vse različne. Najmanjši tak k za katerega obstaja iregularna utežitev grafa G imenujemo iregularnostna moč ter jo označimo kot $s(G)$. Podobno kot za kromatično število tudi za iregularnostno moč grafa obstajajo različne zgornje in spodnje meje. Za razliko od barvanja grafa je to relativno nov problem in ne obstajajo zgornje meje, ki so preproste. Kljub temu navedimo enega izmed zadnjih rezlutatov, ki pravi

$$s(G) \leq 6\lceil \frac{n}{\delta(G)} \rceil.$$

Še razmišljam o tem ali vključit dokaz ali ne. Dokaz sam po sebi ni najbolj preprost ampak uporablja podobne ideje, kot se uporabljajo kasneje pri 123 domnevi.

Tukaj se dodaja osnovne definicije o grafih, ki jih bom potreboval. Trenutno še ne vem kaj vse bo potrebno.

3 1-2-3 Domneva

Z definicijo $\chi^e_\Sigma(G)$ lahko formuliramo 1-2-3 domnevo na naslednji način

Domneva 3.1. (1-2-3 Domneva; Karonski– Luczak–Thomason [4]) Naj bo G povezan graf, ki ni K_2. Tedaj je $\chi^e_\Sigma(G) \leq 3$.

Zastavljena zgornja meja je presenetljiva iz več razlogov. Prvi razlog je to, da je meja konstantna, za razliko od kromatičnega števila kjer za splošne grafe ne obstajajo konstantne meje. Po drugi strani do sedaj še nismo predstavili nobene "dobrežgornje meje za $\chi^e_\Sigma(G)$. V članku [4], kjer je bila zastavljena zgornja domneva so pokazali, da obstaja končna množica realnih števil, tako da utežitev z temi števili inducira pravilno barvanje vsakega grafa. Vendar je ta rezultat še vedno precej odmaknjen od željene domneve. Poleg tega so v članku dokazali domnevo za grafe G, kjer $\chi(G) \leq 3$. Kasneje je bil v [3] predstavljen eleganten algoritem, ki doseže zahtevano utežitev z utežmi v $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. To je do sedaj tudi najboljši razultat za splošne grafe. Tekom naloge bomo spoznali nekaj metod s katerimi se lahko lotimo zgornjega problema za neke specifične družine grafov ter se probamo čim bolj približati željenemu rezultatu. Za začetek pa si oglejmo nekaj preprostih družin, za katere pokaže, da zgornja meja velja.

3.1 Izračun $\chi^e_\Sigma(G)$ za nekatere družine grafov

Za začetek si bomo ogledali nekaj osnovnih primerov grafov ter na njih izračunali parameter χ^e_Σ. Zraven bomo izračunali tudi iregularnostno moč posameznih grafov ter rezultate med seboj primerjali. Večina tega razdelka je povzeta po [1].

3.1.1 Pot P_n

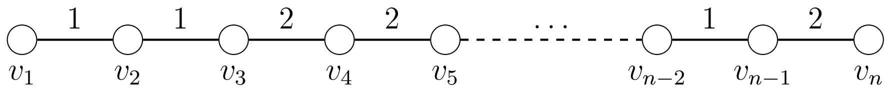
Ker je graf $P_2 = K_2$ bomo obravnavali le primer, ko je $n \geq 3$. Najprej oštevilčimo povezave P_n na naraven način kot $e_i = v_i v_{i+1}$ za $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Po kratkem premisleku ugotovimo, da je potreben pogoj za željeno utežitev

$$\omega(e_i) \neq \omega(e_j) \text{ v kolikor } |j - i| = 2.$$

Torej povezavi, ki sta na razdalji 2 morata imeti različne uteži. To drži, saj imata v primeru ko $\omega(e_i) = \omega(e_{i+2})$ vozlišči v_{i+1} in v_{i+2} enako barvo neglede na vrednost

$\omega(e_{i+1})$. Polega tega, da je zgornji pogoj potreben, je tudi zadosten. To preprosto vidimo saj smo ugotovili, da povezava e_i ne vpliva na barvo vozlišč v_i in v_{i+1} saj obema "pripomore"enako vrednost. Na podlagi zgornjega razmisleka ugotovimo, da $\chi^e_\Sigma(P_3) = 1$, saj P_3 ne vsebuje povezav na razdalji 2. Po drugi strani za P_n definiramo:

$$\omega(e_i) = \begin{cases} 1 & i \equiv 1, 2 \pmod 4 \\ 2 & i \equiv 3, 4 \pmod 4 \end{cases}$$



Slika 1: Primer utežitve grafa P_n.

Res, zgornja utežitev zadošča zgornjemu pogoju. Na sliki **??** vidimo primer neke take utežitvne na grafu P_n. Glede na to, da sta zadnji uteži na povezavah 1 in 2 lahko sklepamo, da gre na sliki za P_n z $n \equiv 3 \pmod 4$. Prav tako opazimo, da je pravzaprav pomembno zaporednje uteži $11221\ldots112$. V tem zaporedju se torej nujno razlikujeta elementa na razdalji 2. Tako lahko zaključimo, da je $\chi^e_\Sigma(P_n) = 2$ za $n \geq 4$.

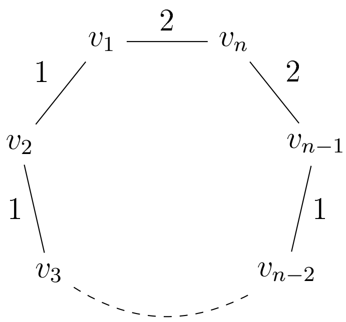
Premislimo sedaj še to kako bi izračunali iregularnostno moč P_n. Zgornja utežitev seveda ne deluje saj nam inducira le štiri različne barve kar pomeni, da ima veliko vozlišč enako barvo. Zato bomo tukaj postopali malenkost drugače. Utežitev bomo poizkušali konstruirati na tak način, da bodo barve vozlišč zavzele vse vrednosti od 1 do n. Recimo, da je n liho. Dodelimo vozlišču, ki se nahaja na sredini (torej z indeksom $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$) barvo z vrednostjo n.

3.1.2 Cikel C_n

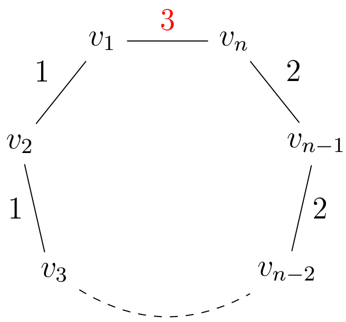
V prejšnjem primeru smo izračunali število μ za grafe, ki so poti. Hitro opazimo, da med potjo in ciklom ni veliko razlike. Dodana je le ena povezava med prvim in zadnjim vozliščem. Enako kot v prejšnjem primeru bomo oštevilčili povezave cikla C_n kot $e_1, e_2, \ldots, e_n$, kjer vzamemo $e_n = v_n v_1$. Poizkusimo z enako utežitvijo kot smo jo imeli za poti, torej

$$\omega(e_i) = \begin{cases} 1 & i \equiv 1, 2 \pmod 4 \\ 2 & i \equiv 3, 4 \pmod 4 \end{cases}$$

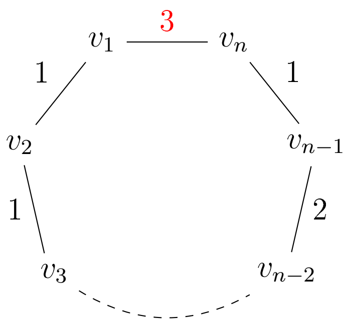
Potreben in zadosten pogoj, ki smo ga uporabili že za primer poti velja tudi za cikle. Pri ciklu moramo opazovati dodatno povezavo med v_1 in v_n. Kot je razvidno iz slike 2 moramo ločit primere glede na vrednost $n \pmod 4$. Ugotovimo, da za pravilno utežitev cikla C_n potrebujemo največ 3 uteži, torej $\chi^e_\Sigma(C_n) \leq 3$. Pokažimo sedaj, da je ta meja tudi natančna za $n \neq 4k$. Recimo torej nasprotno, da je $\mu(C_n) = 2$ in naj bo ω utežitev, ki zadošča temu pogoju. Potem iz $c_\omega(v_i) \neq c_\omega(v_{i+1})$ sledi $\omega(v_i v_{i+1}) \neq \omega(v_{i+2} v_{i+3})$. To je pogoj, da se uteži na razdalji 2 razlikujejo. Ampak to pomeni, ker imamo na voljo samo uteži 1 in 2, da mora veljati $\omega(v_i v_{i+1}) = \omega(v_{i+4} v_{i+5})$. To pa je protislovje v primeru ko $n \neq 4k$.



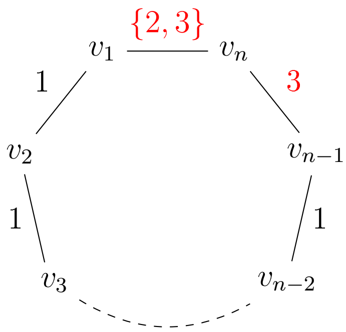
(a) Primer $n = 4k$. Zadoščata 2 uteži



(b) Primer $n = 4k + 1$. Potrebno je dodati utež 3 na zadnjo povezavo.



(c) Primer $n = 4k + 2$.



(d) Primer $n = 4k + 3$. Poleg zadnje povezave moramo popraviti še predzadnjo.

Slika 2: Primer utežitve cikla C_n glede na različne vrednosti n. Uteži, obarvano rdeče so potrebni popravki popravki utežitve ω, da dobimo pravilno barvanje cikla.

3.1.3 Polni graf K_n

Poglejmo najprej zakaj $\chi^e_\Sigma(K_n) \geq 3$. Recimo, da to ne drži. Torej imamo neko 2-utežitev ω za K_n iz česar sledi $c_\omega(v_i) \neq c_\omega v_j$ za vsak $i \neq j$. To pomeni, da mora vsak $c_\omega(v_i)$ za $i = 1, 2, \ldots, n$ pripadati eni izmed n različnih vrednosti v $\{n-1, n, \ldots, 2(n-1)\}$. Tako lahko najdemo vozlišče v' za katerega $c_\omega(v') = n - 1$ in vozlišče u' za katerega $c_\omega(u') = 2(n-1)$, to pa je protislovje saj $\omega(v'u') = 1$ zaradi vozlišča v' in $\omega(v'u') = 2$ zaradi u'.

Pozkusimo sedaj najti 3-utežitev ω, ki je pravilno barvanje z utežmi. Sedaj imamo za $c_\omega(v_i)$ na voljo eno izmed $3n$ vrednosti izmed $\{n-1, n, \ldots, 3(n-1)\}$. Skonstruirali bomo utežitev ω na naslednji način. Najprej oštevilčimo vozlišča kot $v_1, v_2, \ldots, v_n$. V prvem koraku nastavimo vse uteži na 1. Uteži z vrednostjo 2 in 3 dodelimo povezavam, tako da dobimo strogo naraščajoče zaporedje $(c_\omega(v_i))_{i\in[n]}$. Označimo še $N_j = \{n, n-1, \ldots, n-j+1\} \setminus \{v_j\}$ in nastavimo

$$\begin{aligned}
\omega(v_1 v_n) &= 2 \text{ za } i \in N_1 \\
\omega(v_2 v_i) &= 2 \text{ za } i \in N_2 \\
&\vdots \\
\omega(v_j v_i) &= 2 \text{ za } i \in N_j
\end{aligned}$$

Sedaj velja

$$c_\omega(v_i) = \underbrace{n-1}_{\text{Uteži z vr. 1}} + \underbrace{|N_i|}_{\text{Uteži z vr. 2}} = n - 1 + \begin{cases} i;\ i \notin N_i \iff i < n - i + 1 \\ i - 1;\ i \in N_i \iff i \geq n - i + 1 \end{cases}$$

Iz zgornje enačbe vidimo, da zaporedje strogo narašča do največjega i, za katerega $i < n - i + 1$ to pa je natanko tedaj ko $i = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Takrat velja

$$|N_i| = |N_i| \implies c_\omega(v_i) = c_\omega(v_{i+1}).$$

Te enakosti se znebimo, tako da dodamo uteži $\omega(v_i v_n) = 3$ za $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor < i < n$ in dobimo

$$c_\omega(v_i) = \begin{cases} n + 1 + i;\ i < n \\ \lfloor \frac{5n-5}{2} \rfloor;\ i = n \end{cases}.$$

To ja pravilno barvanje K_n in zato $\mu(K_n) = 3$.

Ker je graf poln mora seveda vsako vozlišče imeti svojo barvo. To pomeni, da v primeru polnih grafov velja $s(K_n) = \chi^e_\Sigma(K_n) = 3$.

3.2 $\chi^e_\Sigma(G)$ za grafe z posebnimi pogoji

V tem razdelku bomo obravnavali nekaj rezultatov za grafe, ki imajo neke dodatne pogoje.

3.2.1 3-obarljivi grafi

V [4] sta ... zastavila vprašanje, ki je nato pripeljalo do 1-2-3 domneve in ga v njem tudi dokazala za primer 3-obarljivih grafov. Glavna ideja, zakaj domneva velja za 3-obarljive grafe je v tem, da v tem primeru uteži lahko gledamo po modulu 3. To je res saj v primeru ko imamo neko utežitev z poljubnimi utežmi, ki inducira pravilno 3-barvanje lahko vse uteži reduciramo po modulu 3 in še vedno ohranimo pravilno 3-barvanje. Izrek, ki ga bomo dokazali v tem razdelku bo močnejši kot le dokaz, da $\chi^e_\Sigma(G) = 3$ v kolikor je G 3-obarljiv. Za množico uteži bomo dovolili poljubno Abelovo grupo Γ. V ta namen bomo dokazali nekaj lastnosti Abelovih grup, ki jih bomo kasneje uporabili v dokazu glavnega izreka.

Trditev 3.2. *Naj bo Γ Abelova grupa z $|\Gamma| = n$ in naj 0 označuje enoto. Tedaj za vsak $g \in \Gamma$ velja $ng = 0$.*

Dokaz. Vzemimo poljuben $g \in \Gamma$ in definirajmo preslikavo $f_g : \Gamma \to \Gamma$ kot

$$f_g(h) = g + h.$$

Ta preslikava je bijekcija saj je f_{-g} njen inverz. Iz tega sklepamo, da je $g + \Gamma = \Gamma$ za vsak g. Sedaj vidimo, da $\sum_{h\in\Gamma} h = \sum_{h\in\Gamma}(g + h) = ng + \sum_{h\in\Gamma} h$. Iz tega sledi $ng = 0$. □

Trditev 3.3. *Naj bo sedaj Γ Abelova grupa lihe moči in $|\Gamma| = n$. Tedaj za vsak element $g \in \Gamma$ obstaja $h \in \Gamma$, tako da $g = 2h$.*

Dokaz. Ker je Γ Abelova grupa po prejšnji trditvi vemo, da $0 = ng$. Prištejemo g na obeh straneh in dobimo $g = (n + 1)g$. Sedaj označimo $h = \frac{n+1}{2}g$ in očitno velja $g = 2h$. □

Podobno ne velja za Abelove grupe sode moči. To preprosto vidimo na primeru ciklične grupe $\mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$, kjer elementa 3 ne moremo zapisat na tak način.

Izrek 3.4. *Naj bo Γ Abelova grupa lihe moči in G ne-trivialen $|\Gamma|$-barljiv graf. Potem obstaja utežitev ω z elementi iz Γ, tako da je inducirano barvanje c_ω pravilno.*

Dokaz. Označimo $\Gamma = \{g_1, g_2, \ldots, g_k\}$. Naj bo c neko barvanje grafa G z največ k barvami in označimo z $n_i \leq 0$ število vozlišč barve i za $1 \leq i \leq k$. Po zadnji trditvi vemo, da obstaja $h\ in \Gamma$, tako da $n_1g_1 + n_2g_2 + \ldots n_kg_k = 2h$. Sedaj na poljubno povezavo grafa dodamo utež h in 0 na vse ostale. Tako je vsota vseh uteži na vozliščih enaka $2h$. V nadaljevanju bomo spremenili utežitev, tako da ohranjamo skupno utežitev vozlišč ($= 2h$) dokler vsa vozlišča barve i nimajo uteži g_i. Recimo torej, da obstaja vozlišče u barve i, ki ima napačno utež $g \neq g_i$. Ker je vsota uteži na vozliščih ves čas konstantna in $n_1g_1 + n_2g_2 + \ldots n_kg_k = 2h$ obstaja vsaj še eno drugo vozlišče v z napačno utežitvijo. Sedaj najprej obravnavajmo primer, ko G ni dvodelen graf. V tem primeru lahko najdemo sprehod lihe dolžine med u in v. Potujemo po sprehodu od u do v in utežem na povezavah zaporedoma prištevamo $g_i - g, g - g_i, \ldots, g_i - g$. Tak popravem utežitve ohranja skupno utežitev vozlišč ter spremeni le uteži za u in v. Po končanem postopku ima vozlišče u sedaj utež g_i kar je željen rezultat. Ta postopek ponavljamo, dokler nimajo vsa vozlišča pravilne utežitve. Sprehod lihe dolžine je nujno potreben, če želimo ohraniti skupno utežitev vozlišč.

Oglejmo si sedaj še primer, ko je graf G dvodelen. V primeru nedvodelnega grafa smo vsakemu vozlišču barve i dodelili utež g_i. Kljub temu, da je dvodelne grafe lahko pobarvamo z dvema barvama le tega ne moremo vedno storiti z utežitvijo povezav z elementi Γ. To bi pomenilo $n_1g_1 = n_2g_2$, kjer n_1g_1 predstavlja skupno utež vozlišč ene barve in n_2g_2 skupno utež druge barve. Seveda mora enakost držati, saj vsaka povezava pripomore isti delež tako prvi kot drugi vsoti. Ta enačba pa ni vedno rešljiva za $g_1 \neq g_2$ (???). Zato v tem primeru postopamo malo drugače. ker je graf dvodelen, lahko zapišemo njegovo biparticijo kot $V(G) = A \cup B$. Sedaj si izberemo vozlišče $x \in A$, ki ima stopnjo vsaj 2. Zaradi predpostavke lahko to vedno naredimo. Sedaj izberemo $g_1 = 2h$ in $g_1 \neq g_2 = 0$. Sedaj na vse povezave damo utež 0 oziroma g_2. Sedaj na enak način popravljamo utežitev, tako da ohranjamo skupno utež 0 (oz. $g2$). V tem primeru smo že dosegli, da imajo vsa vozlišča iz B utež 0. Popraviti moramo torej le uteži za vozlišča v množici A. To storimo, tako da za vsako vozlišče $u \neq x \in A$, ki ima utež 0 najdemo pot sode dolžine od u do x. Na poti popravljamo povezave, tako da jim priševamo uteži $g_1 - g_2, g_2 - g_1, \ldots, g_2 - g_1$. S tem poskrbimo, da je vozlišče u pravilno uteženo. Ko končamo postopek imajo vsa vozlišča v A utež g_1 razen vozlišče x, ki ima utež $g = -(n_1-1)g_1 = (1-n_1)g_1$. V kolikor $(1-n_1)g_1 \neq 0$ smo končali saj smo konstruirali pravilno barvanje. V nasprotnem primeru pa na poljubni 2 povezavi iz x dodamo utež h. S tem poskrbimo, da imajo vsa vozlišča v A utež g_1, vozlišča v B pa uteži $g_2 = 0$ in h. □

Iz zgornjega izreka torej sledi, da domneva velja za 3-obraljive grafe. Iz utežitve povezav smo na naraven način prišli do barvanja na grafu. Vprašanje je bilo potem ali je to barvanje pravilno. Zgornji izrek pove nekako obratno. Torej če imamo neko k-barvanje in je k liho število potem lahko eksplicitno konstruiramo utežitev z k elementi, ki porodi tako barvanje.

(V članku [4] je omenjeno, da se izrek da prilagoditi, tako da grafe lahko utežimo z Γ, če je graf $|\Gamma| - 3$-obarljiv. Zanmivo bi bilo dodati še ta dodatek ampak moram še premislit, kako spremeniti dokaz. V tem primeru bi lahko našli tudi za grafe, ki so šodo"obarljivi neko utežitev s sicer malo več utežmi).

3.2.2 Dvodelni grafi in drevesa

Izrek v prejšnjem razdelku pokaže $\chi^e_\Sigma(G) \leq 3$ za vse 3 obarljive grafe. V ta razred grafov spada več dobro poznanih družin grafov. Očitno enako drži tudi za dvodelne grafe, saj jih lahko pobarvamo z tremi bavami. Sem spadajo tudi drevesa. Kljub temu, da zgornji izrek dokaže 1-2-3 domnevo za primer takih grafov si bomo ogledali, ali lahko na primeru dreves oziroma bolj natančno dvodelnih grafov to zgornjo mejo izboljšamo. Ugotovili bomo, da to lahko do neke mere storimo. Dvodelne grafe označimo kot $G = (A, B, E)$, kjer sta A in B biparticija vozlišč.

Obravnavajmo najprej polne dvodelne grafe $K_{m,n}$ z biparticijo (A, B). Enostavni primer je, ko velja $m \neq n$. V tem primeru lahko vse povezave utežimo z 1 in dobimo pravilno barvanje, kar pomeni $\chi^e_\Sigma(K_{m,n}) = 1$. V kolikor $m = n$ oštevilčimo vozlišča v A kot $v_1, v_2, \ldots, v_m$ in vozlišča v B kot $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Sedaj definiramo utežitev kot

$$\omega(v_iu_j) = \begin{cases} 1; & (i,j) \in [m-1] \times [n] \\ 2; & i = m; j \in [n] \end{cases} .$$

Zgornja utežitev poskrbi, da imajo vozlišča u_i vrednost $c_\omega(u_i) = m+1$ vozlišča v_i pa $c_\omega(v_i) = m$ z izjemo $c_\omega(v_m) = 2n$. To je torej pravilno barvanje in $\chi^e_\Sigma(K_{m,n}) = 2$. Sedaj bomo obravnavali še nekaj bolj splošnih dvodelnih grafov.

Trditev 3.5. *Naj bo $G = (A, B, E)$ dvodelen graf. V kolikor je $|A|$ ali $|B|$ sodo, potem $\chi^e_\Sigma(G) \leq 2$.*

Dokaz. Brez škode za splošnost bomo predpostavili $|A|$ sodo. Trditev bomo dokazali, tako da bomo skonstruirali 2-utežitev ω za katero bo veljalo, da je $c_\omega(u)$ sodo za $u \in A$ in liho za $u \in B$. S tem bo trditev dokazana. Označimo vozlišča v množici A kot $a_1, a_2, \ldots, a_{2r}$ in naj bo P_i pot od a_i do a_{i+r}. Take poti obstajajo za vsak $i = 1, 2, \ldots, r$ saj je graf povezan. Utežitev ω konstruiramo, tako da začnemo z $\omega(e) = 0$ za vsako povezavo e. Vsakič ko neka pot P_i vsebuje povezavo e utež na tej povezavi povečamo za 1. Barvanje c_ω, ki ga inducira utežitev ω ima naslednjo lastnost:

- $c_\omega(u) = 1 \pmod 2$ za $u \in A$
- $c_\omega(u) = 0 \pmod 2$ za $u \in B$.

To izhaja iz dejstava, da se vsaka pot P_i začne in konča v množici A in s tem za vsako vozlišče $u \in B$, ki se nahaja na poti, poveča vrednost $c_\omega(u)$ za 2. Seveda enako velja za vmesna vozlišča $u \in A$ medtem ko začetnemu in končnemu vozlišču poveča vrednost barvanja le za 1. Ker smo poti P_i definirali na tak način, da je vsako vozlišče v A natanko enkrat začetek ali konec neke poti sledi zgornja lastnost. Sedaj uteži na povezavah zreduciramo $\pmod 2$ kar še vedno ohranja zgornjo lastnost. Tako dobljena utežitev še vedno inducira pravilno barvanje in uporablja uteži z vrednostmi v $\{0, 1\}$. Preprosto spremenimo uteži z vrednostjo 0 v 2 in dobimo ustrezno 2-utežitev grafa G. $\square$

Posledica 3.6. *Za dvodelen graf $G = (A, B, E)$ z $\delta(G) = 1$ velja $\chi^e_\Sigma(G) \leq 2$.*

Dokaz. Po zgornji trditvi lahko predpostavimo, da sta tako $|A|$ in $|B|$ lihi. Brez škode za splošnost predpostavimo, da $d(x) = 1$ za nek $x \in A$ in, ker je graf povezan obstaja povezava do nekega vozlišča $y \in B$. Dodatno velja, da $d(y) > 1$, saj je graf povezan. Potem za graf $G - x$ velja, da je povezan dvodelen graf z $|A - \{x\}|$ sodo. Po prejšnji trditvi za ta graf obstaja 2-utežitev ω', ki inducira pravilno barvanje. Sedaj utežimo povezavo xy z 2 in dobimo ustrezno utežitev ω, saj velja, $c_\omega(x) = 2$ in $c_\omega(y) > 2$ ter še vedno sodo. $\square$

Kot smo že omenili so vsa drevesa dvodelni grafi, kjer imajo vsi listi stopnjo ena. Na podlagi tega dejstva sledi naslednja posledica.

Posledica 3.7. *Za drevo T z vsaj tremi vozlišči velja $\chi^e_\Sigma(T) \leq 2$.*

Zgornja posledica izhaja iz dejstva, da ima vsako drevo vsaj 1 list ter posledično vozlišče s stopnjo 1. Sedaj si bomo ogledali še eno trditev, ki nam bo omogočala izračuna $\chi^e_\Sigma(G)$ za dvodelne in regularne grafe.

Izrek 3.8. *Naj bo $G = (A, B, E)$ dvodelen graf. V kolikor za vsako povezavo $uv \in E$ velja $\lfloor \frac{d(u)}{2} \rfloor + 1 \neq d(v)$ potem $\chi^e_\Sigma(G) \leq 2$.*

Preden se lotimo dokaza zgornjega izreka bomo neko pomožno trditev, ki velja za splošne dvodelne povezane grafe.

Trditev 3.9. *V grafu $G = (A, B, E)$ obstaja vozlišče x, tako da so vozlišča $G - N[x]$ v množici A vsa v isti povezani komponenti grafa $G - N[x]$.*

Dokaz trditve 3.9. brez škode za splošnst predpostavimo $x \in B$. Izberimo vozlišče $x \in B$, tako da maksimalna komponenta v $G - N[x]$ postane čim večja ter jo označimo kot $G_1 = (A_1, B_1, E_1)$. Sedaj za protislovje predpostavimo, da ima graf $G - N[x]$ še eno povezano komponento $G_2 = (A_2, B_2, E_2)$, kjer je množica A_2 neprazna. Ker je začeten graf G povezan obstaja povezava med $N(x)$ in B_1. Izberimo si sedaj poljuben $x' \in A_2$ in opazujmo graf $G - N[x']$. Opazimo, da sta G_1 in $N[x]$ v isti povezani komponenti katere velikost je strogo večja od velikosti G_1, kar pa je v protislovju z izbiro vozlišča x. □

Dokaz izreka 3.8. Po trditvi 3.5 predpostavimo, da sta tako $|A|$ kot $|B|$ lihi. Po trditvi 3.9 lahko sklepamo, da ima graf $G - N[x]$ komponento $G_1 = (A_1, B_1, E_1)$, kjer je $A_1 = A \setminus N(x)$, vse ostale komponente pa so izolirana vozlišča v B. Sedaj obravnavajmo dva primera.

V kolikor je $d(x)$ liho je potem $|A_1|$ sodo. Po trditvi 3.5 ima graf G_1 2-utežitev ω' z lastnostjo $f_{\omega'}(u)$ je liho za $u \in A_1$ in $f_{\omega'}(u)$ je sodo za $v \in B_1$. Sedaj ω' razširimo do ω, tako da utežimo povezave incidenčne x z 1 ter z 2 vse ostale povezave. Za ω velja $c_\omega(u)$ je liho za $u \in A$ in $c_\omega(v)$ je sodo za $B \setminus \{x\}$. Prav tako velja $c_\omega(x) = d(x)$ in $c_\omega(u) = 2d(u) - 1$ za $u \in N(x)$. Po predpostavki izreka tako velja tudi $c_\omega(x) \neq c_\omega(u)$ za $u \in N(x)$. Tako je ω 2-utežitev, ki je pravilno barvanje z utežmi.

V koliko je $d(x)$ sodo je $|A_1|$ liho. Ker je graf G povezan obstaja vozlišče $u^* \in N(x)$, ki je soseden $v^* \in B_1$. Označimo sedaj graf G', kot graf, ki ga dobimo iz G_1, tako da dodamo povezavo u^*v^*. V tem primeru lahko za $G' = (A_1 \cup \{u^*\}, B_1, E_1 \cup \{u^*v^*\})$ uporabimo trditev 3.5, da dobimo 2-utežitev ω' z že znano lastnostjo. Sedaj ω' razširimo v ω, tako da utežimo povezave incidenčne x razen $xu*$ z 1 ter vse ostale z 2. Sedaj velja $c_\omega(x) = d(x) + 1$ in $c_\omega(u) = 2d(u) - 1$ za vse $uqinN(x) \setminus \{u*\}$. Po predpostavki izreka tako zopet velja $c_\omega(x) \neq c_\omega(u)$ ter ω 2-utežitev, ki je pravilno barvanje z utežmi. S tem je izrek dokazan. □

Oglejmo si sedaj takojšnjo posledico zgornjega izreka.

Posledica 3.10. *Za vsak dvodelen d-regularen graf G z $d \geq 3$ velja $\chi^e_\Sigma(G) = 2$.*

Za regularne grafe predpostavka izreka 3.8 avtomatsko velja, izjema so le 2-regularni grafi oziroma cikli. Preprost proti primer je C_6, ki je dvodelen ter 2-regularen graf vendar velja $\chi^e_\Sigma(C_6) = 3$. Zato je pogoj $d \geq 3$ v posledici nujno potreben.

V tem razdelku smo izračunali parameter $\chi^e_\Sigma(G)$ za nekaj posebnih družin grafov ter za grafe z nekaj dodatnimi pogoji. V vseh primerih smo 1-2-3 domnevo potrdili v posebnih primerih smo lahko zgornjo mejo še celo malo izboljšali. Rezultate tega razdelka lahko predstavimo s spodnjo tabelo.

Tabela 1: Izračun $\chi^e_\Sigma(G)$ za znane grafe.

Graf G	$\chi^e_\Sigma(G)$
P_n	2
C_n	$\begin{cases} 2 & n = 4k; \\ 3 & sicer; \end{cases}$
K_n	3
$K_{m,n}$	$\begin{cases} 1 & m \neq n \\ 2 & sicer; \end{cases}$
3 obarljivi	3
T_n	2
dvodelni in d -regularni z $d \geq 3$	2

4 1-2-3-4-5 Izrek

Do sedaj smo 1-2-3 domnevo potrdili za grafe z posebnimi lastnostmi. Pri iskanju oziroma konstrukciji ustrezne utežitve grafa so ključno vlogo igrale prav te posebne lastnostni. Kot smo že omenili je bilo od leta 2004 ko je bila zastavljena domneva veliko poizkusov iskanja zgornje meje za parameter $\chi^e_\Sigma(G)$, kjer je bilo do sedaj kar precej napredka. Različni avtorji so predstavili različne metode in pristope k temu problemu. Do danes je bila najboljša zgornja meja predstavljena v članku [3]. Presenetljivo je dokaz sorazmerno preprost in algoritmične narave. V tem razdelku bomo to zgornjo mejo dokazali in analizirali časovno zahtevnost algoritma, ki najde ustrezno utežitev. Dobljen rezultat lahko formuliramo kot naslednji izrek.

Izrek 4.1. *Za vsak preprost graf G velja $\chi^e_\Sigma(G) \leq 5$.*

Dokaz. Ker je graf povezan in ima vsaj 3 vozlišča vsebuje vsaj eno vozlišče s stopnjo ≥ 2. Sedaj uredimo vozlišča kot $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, tako da $d(v_n) \geq 2$ in ima za vsak $i \leq n-1$ vozlišče v_i soseda v množici $\{v_{i+1}, v_{i+2}, \ldots, v_n\}$. Tako ureditev vozlišč lahko najdemo na preprost način. V vozlišču v_n začnemo BFS algoritem ter v seznam zaporedoma dodajano obiskana vozlišča. Tako dobimo vozlišča urejena kot $\{v_n, v_{n-1}, \ldots, v_1\}$. Za vsak $i \leq n-1$ sedaj res velja, da ima soseda v množici $\{v_{i+1}, v_{i+2}, \ldots, v_n\}$ saj se v tej množici nahaja njegov starš v BFS drevesu.

V nadaljevanju dokaza bomo konstruirali 5-utežitev ω, ki bo pravilno obarvala graf G. Začnemo z začetno utežitvijo $\omega(e) = 3$ za vsako povezavo e. Vozlišča bomo procesirali v zgornjem vrstnem redu in pri tem vsako utež modificirali največ dvakrat. Za vsako vozlišče v_i z $i < n$ bomo dodeli množico dveh barv $C(v_i) = \{c(v_i), c(v_i) + 2\}$, kjer je $c(v_i) \in \{0, 1\} \mod 4$, tako da za vsako povezavo *nazaj* $v_j v_i$ z $j < i$ velja $C(v_j) \cap C(v_i) = \emptyset$. Poleg tega bomo utežitev ω konstruirali, tako da $c_\omega(v_i) \in C(v_i)$. V zadnjem koraku bomo popravili uteži na povezavah, ki so incidenčne v_n, tako da bo $c_\omega(v_n)$ različen od njegovih sosedov.

Začnimo z dodeljevanjem množic barv za vozlišča $C(v_i)$. Začnemo z vozliščem v_1, kjer trenutno velja $c_\omega(v_1) = 3d(v_1)$ in izberemo $C(v_1)$, tako da $c_\omega(v_1) \in C(v_1)$. To lahko naredimo, ker trenutno še nimamo nobenih posebnih omejitev. Sedaj nadaljujemo induktivno. Naj bo $2 \le k \le n-1$ in predpostavimo, da smo izbrali $C(v_i)$ za vse $i < k$ ter velja:

- $c_\omega(v_i) \in C(v_i)$ za vse $i < k$,
- $\omega(v_k v_j) = 3$ za vse povezave z $j > k$,
- če $\omega(v_i v_k) \neq 3$ za neko povezavo z $i < k$ potem $\omega(v_i v_k) = 2$ in $c_\omega(v_i) = c(v_i)$ ali $\omega(v_i v_k) = 4$ in $c_\omega(v_i) = c(v_i) + 2$.

Sedaj moramo določiti uteži, tako da bo enako veljalo tudi za volzišče v_k. Oglejmo si neko povezavo *nazaj* $v_i v_k$ za nek $i < k$. Na podlagi zgornjih pogojev lahko uteži na tej povezavi bodisi prištejemo bodisi odštejemo 2 ter še vedno ohranjamo pogoj $c_\omega(v_i) \in C(v_i)$. Recimo, da ima v_k d takšnih sosedov, potem imamo $d+1$ možnosti za $c_\omega(v_k)$ vse iste parnosti (odvisno od parnosti d). Po eno možnost imamo za spremembo uteži na vsaki povezavi nazaj ter še eno dodatno možnost, če ničesar ne spreminjamo. Dodatno bomo dovoljevali spremembo za 1 na prvi povezavi *naprej*, t.j. $v_k v_j$, kjer je j najmanjši tak indeks, da obstaja povezava $v_k v_j$. Na tak način bo izpolnjen zadnji pogoj, ko bomo procesirali naslednja vozlišča. S tem lahko $c_\omega(v_k)$ zavzame vse vrednosti na itervalu $[a, a+2d+2]$. Uteži sedaj modificiramo, tako da

1. $c_\omega(v_i) \in C(v_i)$ za vse $i \le k$,
2. $c(v_i) \neq c(v_k)$ za $v_i v_k \in E$, kjer $i < k$,
3. bodisi $c_\omega(v_k) = c(v_k)$ in $\omega(v_k v_j) \in \{2, 3\}$ ali $c_\omega(v_k) = c(v_k) + 2$ in $\omega(v_k v_j) \in \{3, 4\}$.

Pri tem je pogoj (1) vedno izpolnjen. V primeru, ko $c_\omega(v_i) = c(v_i)$ lahko uteži na povezavi $v_i v_k$ prištejemo 2, v nasprotnem primeru ko je $c_\omega(v_i) = c(v_i) + 2$ lahko uteži na zgornji povezavi odštejemo 2. Drugi pogoj nam lahko blokira največ $2d$ vrednosti v intervalu $[a, a+2d+2]$ in tretji pogoj kvačjemu blokira krajišči intervala. Tako ostane vsaj ena vrednost za $c_\omega(v_k)$. Na tak način lahko konstruiramo množice $W(v_k)$ z želenimi lastnostmi za vse $k < n$.

V zadnjem koraku moramo najti primerno vrednost za $c_\omega(v_n)$. V tem primeru nimamo na voljo povezave naprej, ki nam je v prejšnjem primeru pomagala pri določitvi uteži, vendar nam v tem primeru ni potrebno skrbeti za kasnejša vozlišča. Na povezavah $v_i v_n$ za $i < n$ lahko ponovno utež bodisi povečamo bodisi zmanjšamo za 2 in ohranimo $c_\omega(v_i) \in C(v_i)$. To nam ponovno da $d(v_n) + 1 \ge 3$ možnosti za $c_\omega(v_n)$. V kolikor za najmanjšo izmed teh možnosti a velja $a \in \{2, 3\} \mod 4$ potem na vseh povezavah incidenčnih v_n izberemo najnižjo možno utež. S tem bomo poskrbeli, da $c_\omega(v_i) = c(v_i) \in \{0, 1\} \mod 4$ za $v_i \in N(v_n)$ in tako različna od a. V kolikor $a \in \{0, 1\} \mod 4$ in obstaja $v_i \in N(v_n)$ z $c(v_i) \neq a$ potem izberemo višjo utež na povezavi $v_i v_n$ in nižjo utež na vseh ostalih povezavah s čimer dobimo $c_\omega(v_n) = a + 2$ kar je tudi pravilno barvanje. Nazadnje v kolikor $a \in \{0, 1\} \mod 4$ in $c(v_i) = a$ za vse $v_i \in N(v_n)$ izberemo višjo utež na vsaj dveh povezavah (kar lahko sotrimo, saj je $d(v_n) \ge 2$) in dobimo pravilno barvanje. $\square$

Na podlagi zgornjega dokaza lahko napišemo algoritem za iskanje takih utežitev za poljuben graf. V algoritmu spodaj vidimo postopek. Poleg tega, da nam dokaz zagotavlja rešitev za vsak graf je algoritem, ki tako rešitev lahko poišče polinomske časovne zahtevnosti. To res drži, saj lahko notranji del for zanke omejimo z $O(n)$ z uporabo $d(v) \leq n-1$. Torej celoten algoritem potem deluje v $O(n^2)$.

```
Data: graf G
Result: utežitev ω
V = BFS(G);
C = dict() ;
ω = {} ;
for v in V do
    used={} ;
    for u do
        c_i = C[u] ;
        used.Add(c_i) ;
        used.Add(c_i + 2) ;
    end
    m = min(used) ;
    M = max(used) ;
    if m − 1 = 2, 3  mod (4) then
        used.Add(m − 1)
    else
    end
    if M + 1 = 0, 1  mod (4) then
        used.Add(M + 1)
    else
    end
    c = 0 ;
    for i = m - 1 to M + 1 do
        if i not in used then
            c = i ;
            break ;
        else
        end
    end
end
```

Algorithm 1: Algoritem za izračun 5-utežitve (še ni končan)

V nadaljevanju tega razdelka bi podal kakšen primer 5 utežitve nekega grafa.

4.1 1-2-3-4 rezultat za d-regularne grafe

V prejšnjem razdelku smo analizirali rezultat za splošne grafe. Kot smo že omenili je to tudi najboljši rezultat do danes, ki ga poznamo za splošne grafe. Prav tako smo opazili, da za nekatere posebne grafe lahko rezultat izboljšamo. Ta razdelek bo namenjen d-regularnih grafom. Ugotovili smo že, da za regularne grafe G, ki so tudi dvodelni velja $\chi^e_\Sigma(G) \leq 2$. Na podlagi motivacije za 1-2-3 domnevo smo po drugi strani ugotovili, da so morda regularni grafi težki za ta problem saj so zelo "oddaljeni"od pojma iregularni graf. Kljub temu vseeno lahko izkoristimo nekatere lastnosti regularnih grafov in izboljšamo rezultat iz prejšnjega razdelka. Ta razdelek v veliki meri sledi članku [5].

Izrek 4.2. *Za vsak d-regularen graf G velja* $\chi^e_\Sigma(G) \leq 4$

Dokaz. V dokazu bomo uporabili podobno metodo kot pri dokazu izreka 4.1. Izberimo si sedaj neko poljubno maksimalno neodvisno množico $I \subset V(G)$. To je taka množica vozlišč kjer ne obstaja niti ena povezava med njenimi elementi ter je izmed vseh možnih takih množic največja po kardinalnosti. Na podlagi množice I definiramo še:

- $R = V \setminus I$,
- $R_1 \subseteq R$ množica izoliranih vozlišč v $G[R]$,
- $R_2 = R \setminus R_1$,
- $G_1, G_2, \ldots G_p$ označujejo povezane komponente v $G[R_2]$.

Konstruirali bomo utežitev ω za katero bo na koncu veljalo:

1. $c_\omega(v) < 3d$ za vsak $v \in R_2$
2. $c_\omega(v) \geq 3d$ za vsak $v \in I$
3. $c_\omega(v) < 4d$ za vsak $v \in I$, ki ima soseda v R_1
4. $c_\omega(v) \in \{3d-1, 4d\}$ za vsak $v \in R_1$

Glede na to, da je I neodvisna množica, R_1 neodvisna množica v $G[R]$ in ni povezav med R_1 in R_2 v G na podlagi zgornjih omejitev možni konflikti obstajajo med sosednjimi vozlišči v R_2. Zato bomo na to posebno pazili pri konstrukciji utežitve. Za utežitev bomo dodatno zahtevali še:

- $\omega(e) \in \{1, 2, 3\}$ za $e \in E(R_2)$
- $\omega(e) \in \{3, 4\}$ za $e \in E(I, R_2)$
- $\omega(e) \in \{2, 3, 4\}$ za $e \in E(I, R_1)$

Preden določimo začetne uteži si bolj podrobno oglejmo strukturo komponent v R_2. V vsaki izmed komponent G_i bomo uredili vozlišča $v_1, v_2, \ldots, v_n$ na enak način kot pri izreku 4.1. Torej veljati mora, da ima vsko vozlišče v_i z $i < n$ *soseda naprej*, kar pomeni, da ima soseda v_k z $k > i$. To lahko storimo na enak način s pomočjo BFS algoritma. Dodatno mora vsako vozlišče $v \in R_2$ imeti vsaj enega soseda v I. V nasprotnem primeru bi sicer v lahko premaknili v I in tkao dobili večjo neodvisno množico, kar je v protislovju z našo predpostavko. To povezavo bomo imenovali *oporna povezava*.

Začetno utežitev definiramo kot

$$\omega(e) = \begin{cases} 1 & e \text{ je prva povezava naprej za neko vozlišče v } R_2 \\ 2 & e \text{ povezava v } G[R_2]\text{, ki ni prva povezava naprej za nobeno vozlišče} \\ 3 & e \text{ incidenčna povezava vozlišču v } I \text{ in ni oporna povezava} \\ 4 & e \text{ je oporna povezava} \end{cases}$$

in s tem zadoščamo zgornjemu pogoju. Sedaj bomo modificirali uteži na povezavah, tako da odstranimo možne konflikte v R_2. Podobno kot v izreku 4.1 predpostavimo, da trenutno analiziramo komponento G_i ter vozlišče v_j. Pri tem smo že analizirali vse prejšnje komponente in vozlišča. Sedaj želimo določiti uteži, tako da bo utež na v_j različna od uteži za $v_1, v_2, \ldots v_{j-1}$. To želimo storiti na tak način, da ne spreminjamo uteži na že analiziranih vozliščih. To bomo izvedli, tako da bomo po potrebi za 1 spremenili utež na povezavi, ki povezuje v_j z njegovim sosedom nazaj v_k z $k < j$ ter njunima opornima povezavama. Bolj natančno recimo, da je $e = v_k v_j$ povezava nazaj in pokažimo, da lahko utež na njej spremenimo za 1. Označimo še z e_{v_k} oporno povezavo vozlišča v_k. Oglejmo si najprej primer, ko e ni prva povezava naprej. Potem velja $\omega(e) = 2$ in $\omega(e_{v_k}) \in \{3, 4\}$. V kolikor je $\omega(e_{v_k}) = 3$ utež na povezavi e zmanjšamo za 1 na oporni povezavi pa povečamo za 1. V drugem primeru ko je $\omega(e_{v_k}) = 3$ storimo ravno obratno. Če je e prva povezava naprej za v_k potem uteži na e in e_{v_k} še nista bili spremenjeni in imata začetno vrednost 1 in 4. Zaporedomaa jih lahko spremenimo v 2 in 3. Sedaj uporabiku enak razmislek kot pri prejšnjem izreku. Recimo, da ima vozlišče v_j b povezav nazaj in vsako izmed teh povezav lahko spremenimo za 1. To nam da $b + 1$ možnih vrednosti za $c_\omega(v_j)$ in torej lahko izberemo še nezasedeno vrednost, glede na predhodnja vozlišča.

Z zgornjim postopkom smo zagotovili, da ni konfliktov med vozlišči znotraj R_2. Sedaj moramo pokazati, da je postopek spreminjanja uteži v skladen z 1. - 3. Opazujmo neko vozlišče $v \in I$. Povezave incidenčne vozlišču v imajo začetno utežitev v množici $\{3, 4\}$. Po zgornjem postopku lahko utež na povezavi incidenčni v spremenimo samo v primeru ko je oprona povezava. Ampak vse oporne povezave smo na začetku utežili z 4 in jih v postopku kvečjemu zmanjšamo za 1. To pomeni, da so uteži na povezavah incidenčnih v še vedno v množici $\{3, 4\}$. Iz tega sledi zahteva 2). V kolikor ima v nekega soseda v R_1 je bila začetka utežitev na tej povezavi enaka 3 in ni bila spremenjena v zgornjem postopku zatorej velja tudi 3). Pokažimo, da velja tudi 1). Opazimo najprej, da utež na vsaki povezavi e grafa $G[R_2]$ spremenimo največ enkrat in sicer takrat ko združi trenutno analizirano vozlišče z njegovim sosedom nazaj. Za vsako vozlišče $v \in R_2$, ki ni zadnjo vozlišče neke komponente velja, da ima njegova prva povezava naprej utež 1 ter skladno z algoritmom in začetno utežitvijo imajo vse ostale povezave incidenčne v utež največ 3 razen oporne povezave e_v, ki ima utež 4. Iz tega sledi, da $c_\omega(v) \leq 3d - 1$ ter se ne spreminja ko analiziramo kasnejša vozlišča. Sedaj pokažimo, da enako velja tudi v primeru ko je v zadnje vozlišče neke komponente v $G[R_2]$. To preprosto sledi iz dejstva, da zadnja vozlišča nimajo opornih povezav, kar pomeni da imajo vse povezave incidenčne v utež manjšo ali enako 3. Poleg tega je povezava uv, kjer je u predzadnje vozlišče v zgornji ureditvi prva povezava naprej vozlišča u in je po že uporabljenem premisleku utežena z največ 2. Iz tega sledi tudi 1). Sedaj smo odpravili konflikte v R_2 in poskrbeli, da so uteži še vedno konsistentne z začetnimi zahtevami. To nam zagotavlja, da $c_\omega(v) \neq c_\omega(u)$ za vsako povezavo $uv \in E(I \cap R_2)$. Poskrbimo sedaj še za možne konflikte med I in R_1, tako da bo veljal pogoj 4). Ker je vozlišče $v \in R_1$ indidenčno le z vozlišči v I so vse povezave incidenčne v utežene z 3. Sedaj za vsako vozlišče $v \in R_1$ postopamo na naslednji način. V koliko je $c_\omega(u') \geq 3d + 1$ za nekega soseda u' vozlišča v, potem spremenimo utež na natanko eni povezavi, recimo $u'v$ iz 3 na 2. V nasprotnem primeru, ko je $c_\omega(u) = 3d$ za vsako vozlišče $u \in N(v)$ spremenimo utež na vsaki povezavi uv iz 3 na 4 za vsak $u \in N(v)$. Na tak način ohranimo vse pogoje 1) - 3) ter ko obdelamo vsa vozlišča v R_1 velja tudi 4). S tem smo našli ustrezno 4-utežitev.

□

5 Verjetnostne metode

Rezultati, ki smo jih obravnavali do sedaj so nam eksplicitno podali neko utežitev, ki je zadoščla zahtevanim pogojem. Najboljši rezultat za splošne grafe je izrek 4.1, ki konstruira 5-utežitev. Ugotovili smo tudi, da lahko v primeru regularnih grafov rezultat v splošnem še malo izboljšamo. V tem razdelku bomo na problem pogledali malenkost drugače. Prav tako bomo poizkušali konstruirati primerno utežitev vendar tokrat ta utežitev morda nebo delovala za vse grafe, vendar bo za nas dovolj, da je utežitev primerna za večino grafov. To zahtevo si lahko intuitivno predstavljamo na naslednji način. Izberimo si nek n in opazujmo grafe na množici vozlišč $V = \{1, 2, \ldots, n\}$. Sedaj nas zanima, ali lahko za poljuben graf na n vozliščih najdemo "dobro"utežitev? Na to vprašanje v splošnem še ne moremo odgovoriti, saj se po tem sprašuje tudi 1-2-3 domneva. Lahko pa se vprašamo kakšna je verjetnost, da za naključen graf na n vozliščih najdemo ustrezno utežitev. Kot bomo videli tekom razdelka bo odgovor na to vprašanje pozitiven, kar bomo tudi dokazali. Preden se lotimo formulacije samega izreka ter dokazovanja moramo definirati pojem "naključen"graf. Pri tem bomo v veliki meri sledili knjigi [2].

5.1 Naključni grafi

Vzemimo ponovno fiksno število n in naj bo $V = 1, 2, \ldots, n$ množica n vozlišč. Z oznako $\mathcal{G}$ označimo množico vseh grafov na množici vozlišč V. Ideja je, da množico $\mathcal{G}$ spremenimo v verjetnostni prostor ter se nato sprašujemo vprašanja oblike kakšna je verjetnost, da ima nek $G \in \mathcal{G}$ določeno lastnost. Oziroma kolikšna je pričakovana vrednost neke invariante, recimo kromatično število na grafu G.

Intiutivno bomo naključen graf G generirali na naslednji način. Izberemo si $p \in [0, 1]$ in za vsako povezavo $e \in V^2$ izvedemo naključen poizkus, ali povezavo vključimo v graf G ali ne. Poizkuse izvajamo neodvisno ter verjetnost uspeha vsakega poizkusa je enaka p. Recimo sedaj, da imamo nek fiksen graf G_0 na n vozliščih z m povezavami. Kakšna je verjetnost, da naključno generiramo prav ta graf na zgornji način? To je seveda preprost izračun, saj mora poizkus uspeti za vsako izmed m povezav ter spodleteti za mankajoče povezave. Torej verjetnost, da je naključen $G \in \mathcal{G}$ enak grafu G_0 je $p^m(1-p)^{\binom{n}{2}-m}$. To je torej verjetnost nekega elementarnega dogodka vendar iz terorije mere oziroma verjetnosti vemo, da v kolikor so določene verjetnosti elementarnih dogodkov lahko konstruiramo verjetnostno mero na celotnem prostoru. Pokazati bi bilo še potrebno, da taka verjetnostna mera sploh obstaja, vendar dokaz za naše namene ni zanimiv, bralec ga lahko najde v poglavju 11 v [2]. Označimo še naš verjetnosti prostor kot $\mathcal{G} = \mathcal{G}(n, p)$. Sedaj si bomo ogledali nekaj preprostih izračunov povezanih z naključno generiranimi grafi.

Trditev 5.1. *Za vsa naravna števila n, k z $n \geq k \geq 2$ je verjetnost, da ima $G \in \mathcal{G}(n, p)$ neodvisno množico z k elementi največ*

$$P[\alpha(G) \geq k] \leq \binom{n}{k} q^{\binom{k}{2}}$$

.

Dokaz. Verjetnost, da je neka k množica $U \subseteq V$ neodvisna v G je $q^{\binom{k}{2}}$. Ampak takih množic U je natanko $\binom{n}{k}$ in trditev sledi. □

Na podoben način lahko dokažemo ogromno zanimivih lastnosti grafov, vendar jih za naš primer nebomo potrebovali. Kot zanimivost mogoče navedimo dejstvo, da so naključni grafi $G \in \mathcal{G}(n, p)$ močno povezani tudi za majhne vrednosti p.

Sedaj lahko definiramo to, kar smo se spraševali na začetku razdelka. Naj $\mathcal{P}$ označuje neko invariano oziroma lastnost grafa. Na podlagi tega se lahko vprašamo kako se obnaša verjetnost $P[G$ ima lastnost $\mathcal{P}]$ za $G \in \mathcal{G}(n, p)$ ko $n \to \infty$. V kolikor gre ta verjetnost proti 1 rečemo, da ima graf G lastnost $\mathcal{P}$ skoraj zagotovo. Oziroma skoraj vsi grafi imajo lastnost $\mathcal{P}$. Naslednja trditev nam bo podajala spodnjo (ter tudi zgornjo) mejo za kromatično število za skoraj vse grafe.

Trditev 5.2. *Za vsako konstanto $p \in (0, 1)$ in vsak $\epsilon > 0$ ima skoraj vsak graf $G \in \mathcal{G}(n, p)$ kromatično število*

$$\chi(G) > \frac{\log(1/q)}{2 + \epsilon} \cdot \frac{n}{\log n}$$

Dokaz. Po trditvi 5.1 za vsak fiksen $n \geq k \geq 2$ sledi:

$$\begin{aligned} P[\alpha(G) \geq k] &\leq \binom{n}{k} q^{\binom{k}{2}} \\ &\leq n^k q^{\binom{k}{2}} \\ &= q^{k \frac{\log n}{\log q} + \frac{1}{2} k(k-1)} \\ &= q^{\frac{k}{2}\left(-\frac{2 \log n}{\log(1/q)} + k - 1\right)}. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Kjer vzamemo $k = (2+\epsilon) \frac{\log n}{\log(1/q)}$. Za tako izbiro gre eksponent proti neskončnosti ko povečujemo n, ter celoten izraz gre torej proti 0. Iz tega sklepamo, da je skoraj vsak $G \in \mathcal{G}(n, p)$ tak, da v kateremkoli barvanjo G nima nobenih k vozlišč iste barve, saj bi to pomenilo neodvisno množico velikosti k. Iz tega sledi, da vsako barvanje vsebuje več kot

$$\frac{n}{k} = \frac{\log(1/q)}{2 + \epsilon} \cdot \frac{n}{\log n}$$

barv. □

Zgornjo trditev bomo kasneje uporabili ko bomo analizirali utežitve na naključnih grafih. V zgornji trditvi bomo ϵ zamenjali z $-\epsilon$ in bomo tako dobili zgornjo mejo za kromatično število. Poleg bomo potrebovali še neko asimptotsko oceno in sicer za minimalno stopnjo vozlišč. Naj bo $p \in (0,1)$ in vzemimo graf $G \in \mathcal{G}(n,p)$ ter opazujmo poljubno vozlišče $v \in V(G)$. Kaj lahko povemo o $d(v)$? Mislimo si lahko, da izvedemo eksperiment za vsakega izmed preostalih $n-1$ vozlišč ter povečamo stopno vozlišča v v kolikor je bil eksperiment uspešen. Na podlagi tega lahko ocenimo pričakovano stopnjo vozlišča kot $(n-1)p$. Na tem mestu lahko uporabimo Chernoffovo mejo ter ugotovimo, da velja $P[d(v) \leq (p-\epsilon)n] \to 0$ ko pošljemo n v neskončnost. Tako lahko sklepamo, da ima skoraj vsak graf $G \in \mathcal{G}(n,p)$ naslednjo lastnost

$$d(G) \geq (p-\epsilon)n$$

.

Glavni namen tega razdelka je podati neko asimptotsko oceno za parameter $\chi^e_\Sigma(G)$ oziroma bolj natančno podali bomo trditev, ki bo pokazala, da skoraj za vse grafe velja $\chi^e_\Sigma(G) = 2$ kar je zelo preseneltjiv rezultat saj je še boljši kot sama domneva. Da nam bo uspelo pokazati zgornje si moramo ogledati še nek rezultat, ki nima nič opravit z verjetnostnimi metodami ampak z iskanjem posebnih faktorjev v grafu. Nato bomo uporabili vse rezultate iz tega razdelka in formulirali ter dokazali končno trditev.

5.2 $[a,b]$ faktorji v grafu

Naj bo $G = (V,E)$ graf in naj bo H njegov vpet podgraf. V kolikor je graf H k-regularen rečemo tudi, da je H ***k*-faktor** grafa G. Iskanje določenih faktorjev v grafu je ekvivalentno nekaterim drugim problemov na grafih. Naprimer 1-faktor v grafu predstavlja popolno ujemanje. Nas bo v tem razdelku zanimala bolj splošna definicja faktorja. Recimo, da sta f in g celoštevilski funkciji na množici vozlišč in velja $0 \leq g(v) \leq f(v) \leq d(v)$ za vsako vozlišče $v \in V(G)$. Tako definiramo **(g,f)-faktor** grafa G kot vpet podgraf H z lastnostjo $g(v) \leq d_H(v) \leq f(v)$ za vsako vozlišče v. Želimo si torej, da ima naš vpet podgraf stopnjo vozlišč med vnaprej podanima funkcijama. Naslednja trditev nam podaja potreben in zadosten pogoj, ki nam pove kdaj nek graf vsebuje določen (g,f)- faktor.

Trditev 5.3. *Naj bo $G = (V,E)$ graf ter f in g celoštevilski funkciji na množici vozlišč V, tako da velja $0 \leq g(v) \leq f(v) \leq d(v)$ za vsako vozlišče $v \in V(G)$. Če je G dvodelen ali $g(v) \neq f(v)$ za vse v, potem obstaja vpet podgraf H grafa G, ki je (g,f)-fakotr natanko tedaj ko za vsako množico $S \subseteq V(G)$ velja:*

$$\sum_{v \notin S} (g(v) - d_{G-S}(v)) \leq f(S)$$

Dokaz zgornje trditve je posledica bolj splošnega izreka, lahko pa se jo dokaže tudi neodvisno na malo bolj preprost način. Ker je dokaz sorazmerno zahteven in rahlo nepovazan z temo magisterske naloge ga izpuščamo. Raje bomo s pomočjo zgornje trditve dokazali trditev, ki jo bomo direktno uporabili pri dokazovanju asipmtostkih rezultatov 1-2-3 domneve.

Izrek 5.4. *Naj bo $G = (V, E)$ graf in za vse $v \in V$ cela števila a_v^-, a_v^+, tako da $a_v^- \leq \lfloor d(v)/2 \rfloor \leq a_v^+ < d(v)$ in $a_v^+ \leq min\left(\frac{d(v)+a_v^-}{2} + 1, 2a_v^- + 3\right)$, potem obstaja vpet podgraf H grafa G, tako da $d_H(v) \in \{a_v^-, a_v^- + 1, a_v^+, a_v^+ + 1\}$ za vse $v \in V$.*

Dokaz. Dokaza se bomo lotili z protislovjem zato predpostavimo, da tak podgraf H ne obstaja. Naj bo dana množica celih števil $\{a_v || v \in V\}$ in nek podgraf H grafa G ter definiramo *pomankanje* kot vrednost

$$D = \sum_v max(0, a_v - d_H(v)).$$

Izberemo $a_v \in \{a_v^-, a_v^+\}$ in $b_v = a_v + 1$, kjer sta a_v^- in a_v^+ kot v formulaciji trditve. Sedaj izberemo še vpet podgraf $H \subset G$, tako da za vsak $v \in V$ velja $d_H(v) \leq b_v$. Izmed vse takih možnosti izberemo tisto, ki minimizira primankljaj D. Sedaj trdimo, da obstaja vsaj eno vozlišče $v \in V$ za katerega $d_H(v) < a_v$ ter posledično $D > 0$. To je res, saj v nasprotnem primeru velja $d_H(v) = a_v$ ali $d_H(v) = b_v = a_v + 1$, kar pa pomeni, da je H iskan podgraf.

Dokaz bomo sedaj nadaljevali, tako da bomo na podlagi podgrafa H definirali množici A in B, ki bosta v protislovju z prejšnjo trditvijo in iz česar bomo lahko sklepali, da je bila naša predpostvka napačna ter mora obstajati iskan podgraf H. Definirajmo množico $A_0 = \{v : d_H(v) < a_v\}$ in *H-alternirajoč sprehod* kot sprehod $P = v_0 v_1 \ldots v_k$, ki se začne v vozlišču $v_0 \in A_0$ in dodatno velja $v_i v_{i+1} \in G - H$ za sod i ter $v_i v_{i+1} \in H$ za lih i. Tak sprehod se torej začne v nekem vozlišču iz A_0 nato nadaljuje do nekega vozlišča preko povezave, ki je ni v H, nato po povezavi v H in tako dalje. Sedaj označimo množici

- $A = \{v :$ obstaja H-alternirajoč sprehod sode dolžine, ki se konča z $v\}$ in
- $B = \{v :$ obstaja H-alternirajoč sprehod lihe dolžine, ki se konča z $v\}$.

Ker število 0 štejemo kot sodo število velja $A_0 \subseteq A$. Poleg tega za vsak $v \in A$ velja tudi $d_H(v) \leq a_v$, saj v nasprotnem primeru obrnemo katere povezave so v H ter $G - H$ tekom sodega alternirajočega sprehoda, ki se konča z v saj s tem povečamo stopnjo $d_H(v_0)$ za ena in s tem zmanjšamo primankljal kar pa je v protislovju saj smo graf H izbrali, tako da je primankljal minimalen. Na podoben način ugotovimo, da za vsak $v \in B$ velja $d_H(v) = b_v$. V nasprotnem primeru zopet zamenjamo povezave tekom lihega alternirajočega sprehoda, ki se konča z v. Ker velja $a_v < b_v$ pomeni, da sta množici A in B disjunktni. Naj bo sedaj $v \in A$ in recimo, da obstaja neka povezava $vw \in E$. V kolikor $w \notin B$ potem mora veljati $vw \in H$ saj bi v nasprotnem primeru lahko sprehod, ki se konča z v podaljšali do w in tkao dobili lih alternirajoč sprehod kar bi postavilo vozlišče w v množico B. Velja tudi obratno, torej če je $v \in B$ ter povezava $vw \in E$ ter $w \notin A$ potem $vw \notin H$. S pomočjo teh ugotovitev bomo vsoto $\sum_{v \in A} d_H(v)$ prešteli na drugačen način in sicer, tako da bomo posamezno stopnjo vozlišča $d_H(v)$ z $v \in A$ razdelili na 2 dela. Prvi del bo sestavljen iz sosedov od v, ki niso v B. Do vseh teh sosedov lahko po ugotovitvi pridemo le po povezavi, ki se nahaja v H. Zato velja $d_H(v) > d_{G-B}(v)$ za vsak $v \in A$. Mankajo torej še vsi sosedje v, ki se nahajajo v B. V ta namen si podrobno oglejmo neko vozlišče $u \in B$. Po ugotovitvi od prej vemo, da so vsi sosedje od u, do katerih pridemo po neki povezavi iz H v množici A in to so natanko tiste povezave, ki jih v prvem primeru nismo prešteli. Vse skupaj lahko torej zapišemo kot

$$\sum_{v\in A} d_H(v) = \sum_{v\in A} d_{G-B}(v) + \sum_{v\in B} d_H(v).$$

Levo in desno stran še malo dodelamo in dobimo

$$\sum_{v\in A} a_v > \sum_{v\in A} d_H(v) = \sum_{v\in A} d_{G-B}(v) + \sum_{v\in B} d_H(v) = \sum_{v\in A} d_{G-B}(v) + \sum_{v\in B} b_v.$$

Ko sedaj levo in desno stran spravimo skupaj dobimo

$$S_A = \sum_{v\in A} a_v - d_{G-B}(v) > \sum_{v\in B} b_v = S_B.$$

Dokaz s protislovjem bomo zaključili, tako da pokažemo še obratno in sicer $S_A \leq S_B$. V ta namen bomo uporabili še neuporabljene predpostavke trditve in pokazali, da velja naslednje:

1. $\sum_{v\in A} d_B(v) = \sum_{v\in B} d_A(v)$,
2. $\forall v \in A$, $a_v - d_{G_B}(v) \leq d_B(v)/2$ in
3. $\forall v \in B$, $b_v \geq d_A(v)/2$.

Prvo stvar je enostavno videti z dvojnim štetjem. Za vsako vozlišče $v \in A$ preštejemo njegove sosede, ki so v B. Pri tem lahko nekatera vozlišča sicer štejemo večkrat vendar to ni težava, saj v tem štetju vsako povezavo med A in B štejemo natanko enkrat. Prav tako vse povezave med A in B dobimo, če za vsako vozlišče $v \in B$ preštejemo vse njegove sosede v A. Za dokaz druge trditve vzemimo poljuben $v \in A$ in predpostavimo $d_H(v) < a_v$. To lahko storimo za vsako posamezno vozlišče v A, saj v nasprotnem primeru, ko velja $d_H(v) = a_v$ zamenjamo povezave, ki so v H tekom alternirajočega sprehoda in s tem ne spremenimo primankljaja H (povečamo za 1 v vozlišču v in zmanjšamo za 1 v začetnem vozlišču sprehoda) prav tako se ne spremenita množici A in B. To preprosto vidimo, ker za vozlišče v sedaj velja $v \in A_0$ in je začetno vozlišče sprehodov, tako lihih kot sodih. Sedaj moramo obravnavati dva primera in sicer prvič ko je $a_v = a_v^-$ in drugič ko je $a_v = a_v^+$. V prvem primeru je zadeva preprosta saj $a_v^- \leq d(v)/2$ po drugi strani pa velja $d_{G-H}(v)/2 + d_B(v) \geq d(v)/2$ in trditev velja. Oglejmo si še primer ko $a_v = a_v^+ > d(v)/2$. Predpostavljamo lahko dodatno še $d_{G-B}(v) > a_v^- + 1$ saj v nasprotnem primeru ko nastavimo $a_v = a_v^-$ in odstranimo nekaj povezav med v in B zmanjšamo primankljaj. Sedaj na podlagi predpostavke o a_v^+ velja

$$a_v \leq \frac{d(v)}{2} + \frac{a_v^-}{2} + 1 < \frac{d(v)}{2} + \frac{d_{G-B}(v)}{2} + \frac{1}{2} = d_{G-B}(v) + \frac{d_B(v)}{2} + \frac{1}{2},$$

ter ker je a_v celo število in je bil $v \in A$ poljuben druga trditev drži. Pokazati torej moramo še tretjo trditev. Vzemimo poljuben $v \in B$ in predpostavimo, da $a_v = a_v^- < \lfloor d(v)/2 \rfloor$ saj v drugem primeru avtomatsko velja $b_v \geq d(v)/2 \geq d_A(v)/2$.

Predpostavimo sedaj, da trditev ne drži torej $2b_v < d_A(v)$ oziroma $d_A(v) \geq 2a_v+2+1$ in s tem tudi $d_A(v) \geq a_v^+$ zaradi predpostavke izreka. Ker velja $b_v = d_H(v)$ in, ker smo ugotovili če gre neka povezava, ki je v H iz vozlišča $v \in B$ potem mora drugo vozlišče nujno biti v množici A, je natanko $d_A(v) - b_v$ povezav med v in množico A, ki niso v H. Bolj natančno obstaja neko vozlišče $w \in N(v) \cap A$, tako da $uw \notin H$. Kot smo pokazali zgoraj, lahko zagotovimo, da $d_H(w) < a_w$ ter s tem ne spremenimo dejstva, da je $vw \in H$. Ko nastavimo $a_v = a_v^+$ in dodamo $a_v^+ - d_H(v)$ povezav od v do A v H ter s tem tudi povezavo vw znižamo primankljaj in s tem dokažemo trditev ter izrek. □

Zgornji izrek oziroma dokaz je bil kar težak ter ne ravno najbolj povezan z temo magisterske naloge ampak nam bo omogočal dokazati zanimivo asimptotsko lastnost 1-2-3 domneve, ki smo jo omeneli že malo prej. Poleg tega so avtorji članka () uporabili zgornji izrek, da so dokzali $\chi^e_\Sigma(G) \leq 16$ za poljuben graf. Takrat je to bil tudi najboljši rezultat za splošne grafe. Poleg uporabe zgornjega izreka so konstruirali želeno utežitev na precej zahteven način, medtem ko opazimo, da je izrek () zares preprost v primerjavi z prejšnjimi poizkusu kljub temu, da podaja precej boljši rezultat.

Podajmo še hiter premislek zakaj nas bi zanimalo iskanje posebnih vpetih podgrafov oziroma kako nam lahko pomagajo pri reševanju 1-2-3 domneve. Predstavljajmo si, da lahko najdemo vpet podgraf $H \subset G$ za katerega velja $d_H(v) \neq d_H(w)$ za vsako povezavo $vw \in E(G)$. Potem lahko utežimo povezave v H z 1 vse ostale z 0 in dobimo vozliščno barvanje z uteženimi povezavami z utežmi v $\{0, 1\}$. Vendar tak podgraf H v splošnem ne obstaja in seveda smo tak primer že videli saj preprost graf $C_3 = K_3$ ne premore takega podgrafa. Vendar vseeno lahko s pomočjo te ideje dokažemo naslednji izrek.

Izrek 5.5. *Naj bo G naključen graf izbran iz $\mathcal{G}(n,p)$ za konstanten $p \in (0,1)$. Potem asimptotično skoraj zagotovo velja $\chi^e_\Sigma(G) = 2$. Natančneje obstaja 2-povezavna utežitev, tako da so uteži/barve sosednjih vozlišč različne* $\mod 2\chi(G)$.

Dokaz. Naj bo $G \in \mathcal{G}(n,p)$. Fiksiramo $\epsilon > 0$. Tekom razdelka smo pokazali, da asimptotično skoraj zagotovo veljata naslednji dve dejstvi:

- $\min_v d(v) > (p - \epsilon)n$,
- $\chi(G) < \frac{\log(1/(1-p))}{2-\epsilon} \cdot \frac{n}{\log n}$.

Ker sta števili p in ϵ fiksirani lahko preprosto izpeljemo, da velja asimptotično skoraj zagotovo velja $w\chi(G) < \min_v d(v)/6$ za dovolj velik n. Predpostavili bomo, da ta neenakost velja in konstruirali 2-utežitev, ki bo tudi pravilno barvanje grafa G.

Naj bo $\{V_1, V_2, \ldots, V_{\chi(G)}\}$ particija množice vozlišč v neodvisne množice. Sedaj za vsak $v \in V_i$ izberemo $a_v^- \in [\lfloor d(v)/3 \rfloor, \lfloor d(v)/2 \rfloor]$ in $a_v^+ \in [\lfloor d(v)/2 \rfloor, \lfloor 2d(v)/3 \rfloor]$, tako da $a_v^- + d(v) \equiv a_v^+ d(v) \equiv 2i \mod 2\chi(G)$. Take izbire obstajajo saj intervala $[\lfloor d(v)/3 \rfloor, \lfloor d(v)/2 \rfloor]$ in $[\lfloor d(v)/2 \rfloor, \lfloor 2d(v)/3 \rfloor]$ vsebujeta vsaj $2\chi(G)$ zaporednih celih števil. Pri tem je seveda pomembno tudi, da $i \leq \chi(G)$. Poleg tega taka izbira za a_v^- in a_v^+ zadoščata predpostavkam izreka 5.4, tako da obstaja vpet podgraf $H \subseteq G$ kjer za vsak v velja $d_H(v) \in \{a_v^-, a_v^+, a_v^- + 1, a_v^+ + 1\}$.Sedaj konstuiramo utežitev ω kot

$$\omega(e) = \begin{cases} 1 & e \in E(G) - E(H) \\ 2 & e \in E(H) \end{cases}.$$

Izračunajmo sedaj utež na nekek vozlišču $v \in V_i$

$$\sum_{e \ni v} \omega(e) = 2d_H(v) + d_{G-H}(v) = d_G(v) + d_H(v) \in \{2i, 2i+1\} \pmod{2\chi(G)}.$$

S tem smo pokazali, da imajo sosednja vozlišča v različnih barvnih razredih V_i različne parnosti in tako konstruirana utežitev porodi pravilno barvanje. □

Za konec tega razdelka bomo komentirali dobljene rezultate. Definirali smo verjetnostni prostor naključnih grafov, kjer smo naključne grafe generirali, tako da smo za vsako povezavo izvedli *enak poizkus* neodvisno od prejšnjih in z enako verjetnostjo uspeha. S pomočjo tega smo za nekaj grafovskih invariant ocenili kako se obnašajo pri naključnih grafih ter si ogledali njihovo asimptotsko obnašanje. Poleg verjetnostnih metod smo dokazali izrek, ki nam pod določenimi pogoji garantira obstoj posebnega vpetega podgrafa, ki ima omejene stopnje vozlišč. Ta izrek sicer nima nič skupnega z verjetnostnimi metodami, ampak nam je omogočal določiti asimptotsko oceno za parameter $\chi^e_\Sigma(G)$. Presenetljivo smo pokazali, da velja $\chi^e_\Sigma(G) = 2$ za skoraj vse grafe kar je še boljše kot pravi 1-2-3 domneva. Presenetljivo je tudi zato, ker smo v začetnem delu dokazali, da za nekatere grafe velja $\chi^e_\Sigma(G) = 3$. Taki so naprimer že nekateri cikli, polni grafi ter nekateri izmed dvodelnih grafov. Iz vidika našega zadnjega rezultata si to lahko predstavljamo tako, da so zgoraj našteti grafi za katere velja $\chi^e_\Sigma(G) = 3$ redki v verjetnostnem prostoru naključnih grafov. To torej pomeni, da če naključno izberemo nek graf potem skoraj zagotovo to nebo polni graf, cikel ali dvodelni graf z $\chi^e_\Sigma(G) = 3$. Kljub temu, da je asimptotski rezultat pozitiven iz vidika 1-2-3 domneve nam pri dokazovanju domneve ne koristi prav preveč. Problem je v tem, da še vedno obstaja neskončno število grafov za katere lahko velja $\chi^e_\Sigma(G) > 2$ in z naivnim pristopom ne moremo poiskati vseh takih grafov.

Zgornji rezultat ni edini rezultat v okviru 1-2-3 domneve, ki uporablja verjetnostne metode. Vendar se v magisterski nalogi nebo neposredno okvarjali z tem pristopom ampak vseeno bomo uporabili močno orodje, ki izhaja iz verjetnostnih metod.

6 Polna verzija in druge izpeljanke

Do sedaj smo povezavam grafa dodelili uteži ter nato opazovali dobljene uteži na vozliščih kot vsoto uteži na incidenčnih povezavah. Na enak način bomo definirali polno utežitev grafa, kjer bomo poleg povezavam uteži dodelili tudi vsakemu vozlišču. Dobljena polna utež na vozlišč bo tako vsota uteži na incidinčnih povezavah ter uteži na samem vozlišču.

Definicija 6.1. Polna k-utežitev grafa $G = (V, E)$ je preslikava

$$\omega : E(G) \cup V(G) \to [k].$$

Na podlagi zgornje utežitve lahko definiramo še **polno utež** vozlišča $v \in V(G)$ kot

$$c^t_\omega(v) = \omega(v) + \sum_{u \in N(v)} \omega(vu).$$

Sedaj se seveda lahko sprašujemo enaka oziroma podobna vprašanja kot pri povezavni utežitvi grafa. Za nas najbolj zanimivo vprašanje je ali obstaja kakšna zgornja meja za k, tako da je inducirano barvanje grafa tudi pravilno. Označimo z $\chi^t_\Sigma(G)$ najmanjši tak k za katerega obstaja polna k-utežitev grafa, ki inducira pravilno barvanje. Hitro ugotovimo, da je ta problem malo lažji kot pri le povezavni utežitvi gledano iz tega ker velja

$$\chi^e_\Sigma \leq \chi^t_\Sigma.$$

To preprosto dejstvo opazimo, da če imamo neko povezavno utežitev, ki je tudi pravilno barvanje potem vozlišča utežimo z konstantno utežjo 1 in dobimo polno utežitev, ki je tudi pravilno barvanje. Zato nas zanima, ali lahko rezultate, ki smo jih dosegli za parameter χ^e_Σ izboljšamo in poiščemo nižjo mejo za parameter χ^t_Σ.

Za začetek si bomo ogledali nekaj preprostih primerov na podoben način kot smo to storili pri parameteru χ^e_Σ. Pred tem pa formulirajmo še domnevo, ki se nanaša na parameter χ^t_Σ.

Domneva 6.2. Naj bo G povezan graf, ki ni K_2. Tedaj je $\chi^t_\Sigma(G) \leq 2$.

Domneva torej pove, da v kolikor dovoljujemo še uteži na vozliščih potem v glavnem potrebujemo eno utež manj, da dobimo pravilno barvanje. Hitro najdemo primer, zakaj v splošnem velja $\chi^t_\Sigma(G) > 1$. Tak primer je recimo C_3 oziroma K_3.

Trditev 6.3. *$\chi^t_\Sigma \leq 2$ za dvodelne grafe.*

Dokaz. Dokaz trditve je precej preprost in lažji kot v primeru povezavne utežitvije. Naj bo $G = (A, B, E)$ dvodelni graf. Povezavam poljubno dodelimo uteži 1 in 2 medtem ko vozliščem dodelimo uteži, tako da bodo polne utežive vozlišč v množici A sode in lihe v množici B. Preprosto, če ima vozlišče $v \in A$ že sodo utež mu dodelimo 2 in se mu parnost ne spremeni. V nasprotnem primeru mu dodleimo utež 1 in mu s tem spremenimo parnost. Enako naredimo za vozlišča v množici B. □

Zgornja trditev torej dokaže 1-2 domnevo za poti P_n ter drevesa T_n. Oglejmo si še naslednjo trditev.

Trditev 6.4. *$\chi^t_\Sigma \leq 2$ za cikle C_n.*

Dokaz. Postopamo zelo podobno kot smo na začetku dokazali $\chi^e_\Sigma(C_n) \leq 3$. Oštevilčimo vozlišča kot $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ter povezave kot $e_i = v_i v_{i+1}$. Sedaj utežitev ω definiramo na enak način kot v prvem primeru in sicer kot

$$\omega(e_i) = \begin{cases} 1 & i \equiv 1, 2 \pmod 4 \\ 2 & i \equiv 3, 4 \pmod 4 \end{cases}$$

V primeru parametra χ_Σ^e smo potem obravnavali 4 različne možnosti in sicer glede na $n \pmod 4$. Zelo podobno bomo naredili tudi sedaj, vendar potencialnih konflikotv nebomo reševali z tem, da neko povezavo utežimo z 3 ampak bomo z 2 utežili nekaj vozlišč. Ta postopek je bolj preprost zato ga bomo samo skicirali. Vsa vozlišča začetno utežmo z 1. Recimo, da pride do nekega konflikta med dvema vozliščema v ciklu. Izberemo si enega izmed teh vozlišč ter mu dodelimo utež 2 s čimer smo rešili originalen konflikt, vendar smo pri tem lahko ustvarili novega. Nadaljujemo z istim postopkom, kjer pazimo, da se ne zaciklamo, tako da vozliščem dodeluje utež 2 vedno v isti smeri. Naprimer izberemo si smer urinega kazalca. Na tak način, bomo morali utež vozlišču popraviti največ trikrat, saj bomo slej ko prej prišli do vozlišča, ki bo imel na obeh povezavah utež 2 prav tako pa bo tudi sam nosil utež 2 in bo s tem imel skupno utež 6. Vendar take uteži nima nobeno ostalo vozlišče zato se zgornji postopek konča po največ treh korakih. □

Trditev 6.5. $\chi_\Sigma^t(K_n) = 2$.

Dokaz. Z indukcijo bomo pokazali, da obstaja polna utežitev z utežmi iz 1 in 2, tako da bodo dobljene barve vozlišč zaporedna cela števila od n do $2n - 1$ ali od $n + 1 do 2n$.

Za $n = 2$ preprosto najdemo ustrezno utežitev. Predpostavimo, da je $n \geq 3$ in smo že našli ustrezno polno utežitev za K_{n-1}. Sedaj dodamo novo vozlišče v in ga povežemo z vsemi ostalimi vozlišči K_{n-1}. Za K_{n-1} velja, da so barve vozlišč zaporedna števila iz intervala $[n - 1, 2n - 2]$, seveda je pri tem ali levo ali desno krajišče intervala še nezasedeno. V kolikor je nezasedena barva $2n - 2$ na vse nove povezave in vozlišče v damo utež 2. V nasprotnem primeru, ko je nezasedeno levo krajišče zgornjega intervala damo na vse nove povezave in na vozlišče v utež 1. □

Kot smo opazli se za osnovne družine grafov brez večjih težav pokaže veljavnost 1-2 domneve na tem mestu bi se lahko vprašali smiselno vprašanje, kako je s splošnimi grafi? Izkaže se, da tudi za splošne grafa obstaja precej dober rezultat, ki je v neki meri bližje domnevi kot v primeru 1-2-3 domneve, ko smo dokazali tako imenovan 1-2-3-4-5 izrek.

Izrek 6.6. *Naj bo G povezan graf. Tedaj velja $\chi_\Sigma^t(G) \leq 3$.*

Dokaz. Dokaz izreka je modifikacija izreka 4.1. □

6.1 Seznamska verzija

S seznamsko verzijo problema smo se že srečali na začetku naloge, kjer smo predstavili seznamsko verzijo barvanja grafa. Ugotovili smo, da so rezultati seznamskih verziji močnejši v smislu, da so veljavni tudi za ne seznamski problem. V tem razdelku si bomo ogledali seznamsko verzijo 1-2-3 domneve ter nekaj orodij s katerimi se lahko lotimo takega problema. Naj bo $G = (V, E)$ povezan graf in dodelimo vsakemu vozlišču $v \in V$ in vsaki povezavi $e \in E$ seznam k realnih uteži L_v in L_e in naj bo L množica vse teh seznamov. Rečemo, da je G **polno seznamsko utežljiv** iz L, če obstaja polna utežitev $\omega : V \cup E \to \cup_{L_a} L_a$, tako da $\omega(e) \in L_e$ in $\omega(v) \in L_v$ za vsako vozlišče v in vsako povezavo e. Graf G je ***k*-polno seznamsko utežljiv**, če je polno seznamsko utežljiv iz vsake družine seznamov velikosti k. Na enak način seveda definiramo **seznamsko utežljivost** grafa. Pri tem opazujemo utežitve, ki slikajo le iz množice povezav. Najmanjši tak k za katerega je graf G k-seznamsko utežljiv oziroma k-polno seznamsko utežljiv označimo z ch^e_Σ in ch^t_Σ zaporedoma.

Povezavo do ne seznamske verzije dobimo, v primeru ko imamo vse sezname enake. Za analiziranje seznamske verzije 1-2-3 domneve bomo uporabili algebraična orodja, čeprav podobne rezultate lahko dobimo tudi brez uporabe teh orodij. Vendar smo do sedaj videli že nekaj različnih pristopov k 1-2-3 domnevi zato si bomo bolj podrobneje ogledali tudi algebraične metode. Najbolj pomembno orodje bo kombinatorični izrek o ničlah. Pri tem bomo grafu priredili nek polinom ter v njem poizkušali poiskati monome posebne oblike. Oglejmo si najprej kombinatorični izrek o ničlah.

Izrek 6.7. *Naj bo $\mathbb{F}$ poljubno polje in naj bo $P = P(x_1, x_2, \ldots, x_l)$ polinom v $\mathbb{F}[x_1, \ldots, x_l]$. Predpostavimo, da je stopnja deg(P) polinoma P enaka $\sum_{i=1}^{l} k_i$, kjer vsak k_i nenegativno celo število in predpostavimo, da je koeficient pred $x_1^{k_1} \ldots x_l^{k_l}$ neničelen. Potem, če so $S_1, \ldots S_l$ podmnožice $\mathbb{F}$ z $|S_i| > k_i$ potem obstajajo $s_1 \in S_1, \ldots s_l \in S_l$, tako da $P(s_1, \ldots, s_l) \neq 0$.*

Zgornji izrek ima ogromno različnih uporab, ki v splošnem niso povezane z 1-2-3 domnevo. Čeprav dokaz zgornjega izreka ni zelo zahteven ga v nalogi nebomo dokazali. Bralec lahko dokaz najde naprimer v [].

Oglejmo si raje kako bi tak izrek lahko uporabili za naš primer. Prvi korak pri tem bo, da iz grafa sestavimo nek polinom na pameten način. Naj bo $G = (V, E)$ graf in oštevilčimo povezave kot $E = \{e_1, e_2, \ldots e_m\}$ ter vozlišča kot $V = \{v_1, v_2, \ldots v_n\}$. Sedaj vsaki povezavi e_i dodelimo spremenljivko x_i in v sakemu vozlišču v_j dodelimo spremenljivko x_{m+j}. Definirajmo izraz $X_{v_j} = \sum_{e_i \ni v_j} x_i$ in $Y_{v_j} = x_{m+j} + X_{v_j}$. Predstavljajmo si, da vsaki spremenljivki x_i določimo neko celoštevilsko vrednost. Na podlagi zgornjih definicij ugotovimo, da izraz X_{v_j} tako predstavlja barvo oziroma utež na vozlišču v_j dobljeno kot vsoto uteži na incidenčnih povezavah. Po drugi strani izraz Y_{v_j} predstavlja polno verzijo, saj pri tem prištejemo še utež posameznega vozlišča. S pomočjo zgornjih izrazov bomo definirali dva polinoma, enega za navadno verzijo in drugega za polno verzijo problema. Ker smo pametno izbrali spremenljivke in izraza X_{v_j} in Y_{v_j} pripadajoče polinome definiramo na preprost način

$$P_G(x_1, \ldots, x_l) = \prod_{(u,v) \in E(G)} (X_v - X_u)$$
$$T_G(x_1, \ldots, x_l) = \prod_{(u,v) \in E(G)} (Y_v - Y_u) .$$

Polinom P_G seveda pripada navadni verziji medtem ko polinom T_G pripada polni verziji problema. Kot smo že ugotovili nam posamezne vrednosti izrazov X_v in Y_v predstavljajo dobljene uteži na vozlišču v in zato za neko povezavo $(u, v) \in E(G)$ izraz $X_v - X_u$ predstavlja razliko med utežmi na sosednjih vozliščih. V kolikor imata tako sosednji vozlišči isto utež je vrednost zgoraj definiranih polinomov enaka 0. V tem trenutno se nam izrek 6.7 zdi uporaben iz tega vidika, ker nam garantira obstoj uteži, ki inducirajo pravilno barvanje saj zagotavlja, da obstajajo neke vrednosti za katere polinom ni enak 0. Seveda moramo pri tem upoštevati vse predpostavke izreka. Če bomo želeli uporabiti zgornji izrek, da dobimo kakšen uporaben rezultat bomo morali v polinomih, ki pripadajo grafu poiskati njegovo stopnjo oziroma natančneje stopnje posameznih spremenljiv v monomih. Pri tem si želimo, da so te stopnje čim manjše, saj potem potrebujemo manje podmnožice iz izbranega obsega, ki nam še vedno garantirajo izbor vrednosti za katere je polinom neničelen.

Recimo sedaj, da imamo nek polinom $P \in [x_1, \ldots, x_l]$ in naj bo $M = cx_1^{k_1} \ldots x_l^{k_l}$ nek neničelen monom v tem polinomu. Z $h(M)$ označimo največji eksponent spremenljivke v M. Torej bolj natančno $h(M) = \max_{i=1,\ldots,l} k_i$. Definirajmo še **monomični indeks** polinoma P kot najmanjši $h(M)$ čez vse ne ničelne monome M v P in ga označimo z $\mathbf{mind(P)}$. Različne orientacije grafa G porodijo do predznaka enake polinome P_G in T_G, kar ne vpliva na monomični indeks dobljenih polinomov. Označimo $mind(P_G) = mind(G)$ in $mind(T_G) = tmind(G)$. Ker sta ta parametra neodvisna od orientacije jih lahko štejemo kot invarianti grafa G in jima bomo rekli monomični indeks grafa ter polni monomični indeks grafa v tem vrstem redu.

Kot je že v navadi grafov, ki imajo izolirano povezavo ne opazujemo. V tem primeru nam izolirana povezava porodi ničelni polinom in iz tega vidika ni zanimivo. Predpostavimo torej, da graf G nima izolirane povezave. Kako izgledajo polinomi P_G in T_G ko jih zapišemo z vsoto namesto z produktom? Ima $m = |E(G)|$ faktorjev kar pomeni, da je stopnja vseh monov enaka m, saj ko želimo polinom razširiti v vsoto moramo v vsakem faktorju izbrati natanko eno spremenljivko. To pomeni, da je stopnja obeh polinomov enaka m in oba polinoma sta homogena. Sedaj opazimo povezavo med monomičnem indeksom grafa G ter izrekom 6.7. Zapišimo to v obliki naslednje trditve.

Trditev 6.8. *V kolikor velja $mind(G) \leq k$ potem je G $(k+1)$-seznamsko utežljiv. Prav tako, če $tmind(G) \leq k$ potem je G $(k+1)$-polno seznamsko utežljiv.*

Dokaz. To je pravzaprav preprosta posledica izreka 6.7. Ker sta oba polinoma P_G in T_G homogena nam njuna monomična indeksa predstavljata najmanjši eksponent izmed največjih eksponentov v vseh monomih. Potem lahko za podmnožice S_i iz izreka vzamemo poljubne podmnožice, ki so večje od monomičnega indeksa. Zadošča že, da so podmnožice za 1 večje od monomičnega indeksa. In ker so izbire podmnožic popolnoma poljubne ter nam izrek zagotavlja da najdemo ustrezno utežitev je potem graf tudi seznamsko utežljiv ter polno seznamsko utežljiv iz tem množic oziroma seznamov. □

Na podlagi zgornje trditve velja $ch^e_\Sigma(G) \leq mind(G)+1$ in $ch^t_\Sigma(G) \leq tmind(G)+1$. Tudi za seznamsko verzijo obstaja domneva in sicer v obliki navande in polne verzije.

Domneva 6.9. Za vsak povezan graf G, ki ni K_2 velja $ch^e_\Sigma(G) \leq 3$.

Domneva 6.10. Za vsak graf G velja $ch^t_\Sigma(G) \leq 2$.

Zgornji domnevi sta presenetljivi v kolikor jih primerjamo s seznamsko verzijio kromatičnega števila. Tam smo ugotovili, da sicer veljajo podobne zgornje meje vendar se parametra lahko poljubno razlikujeta. V našem primeru je zastavljena zgornja meja enaka v seznamski in ne seznamski obliki. Pri tem velja izpostavit, da je seznamska verzija problema precej težja in že pri preprostih in majhnih grafih imamo lahko veliko težav pri računanju točnih vrednosti parametrov $ch^e_\Sigma(G)$ in $ch^t_\Sigma(G)$. Vendar s pomočjo orodja, ki smo ga razvili zgoraj to postane precej lažje. Iz vidika zgornjih domnev bi morali pokazati, da velja $mind(G) \leq 2$ in $tmind(G) \leq 1$ za vsak graf G. Vendar to je v splošnem zelo težko pokazati saj je zelo težko ugotoviti kateri monomi preostanejo v razširitvi polinoma. Preden si ogledamo nekaj primerov moramo razviti še orodje s katerim bomo lažje ocenili kateri monomi ostanejo v polinomih, ki pripadajo grafom. V ta namen bomo vsakemu grafu priredili posebno matriko $A_G = (a_{ij})$. Fiksirajmo poljubno orientacijo grafa in definiramo elemente matrike kot

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{če je } e_j \text{ incidenčna z koncem } e_i \\ -1, & \text{če je } e_j \text{ incidenčna z začetkom } e_i \\ 0, & \text{če } e_i \text{ in } e_j \text{ nista incidenčni} \end{cases}$$

S pomočjo zgornje matrike lahko zapišemo polinom

$$P_G = \prod_{i=1}^{m} (a_{i1}x_1 + \dots a_{im}x_m).$$

Sedaj bomo nadaljevali, tako da bomo problem računanja $mind(G)$ prevedli na problem iz linearne algebre povezan z matriko A_G. Prav tako ima tudi polinom T_G pripadajočo matriko s katero ga lahko zapišemo in vse ugotovitve v zvezi z matriko bodo veljale tudi za polno verzijo vendar se bomo najprej osredotočili na navadno seznamsko verzijo problema in polinom P_G.

Definicija 6.11. Naj bo A poljubna kvadratna matrika velikosti m in definirajmo permanent matrike A kot

$$perA = \sum_{\sigma \in S_m} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{m\sigma(m)},$$

kjer je S_m simetrična grupa velikosti m.

Definicija močno spominja na definicijo determinante vendar tukaj za razliko od determinante člene vedno seštevamo. Kljub temu, da definicija izgleda močno podobna deterninanti je računanje permanenta precej težji problem, saj za računanje determinante poznamo polinomski algoritem (naprimer s pomočjo Gaussovih eliminacij) medtem ko za računanje permanenta polinomski algoritem še ne obstaja. Kljub temu bo za nas še vedno dovolj dobro orodje. Na podoben način definiramo **permanentni rank** ne nujno kvadratne matrike A kot velikost največje kvadratne podmatrike z neničelnim permanentom. Označimo z $A^{(k)} = [A, A, \dots, A]$ matriko dobljeno z k zaporednimi kopijami matrike A. Sedaj definiramo še **permanentni indeks** matrike A kot najmanjši k za katerega je permanentni rank matrike $A^{(k)}$ enak m, kjer je m velikost matrike A ter ga označimo z $pind(A)$. V kolikor tak k ne obstaja določimo $pind(A) = \infty$. Oglejmo si še ekvivalentno definicija permanentnega indeksa. Naj bo $K = (k_1, \dots, k_m)$ poljubno zaporednje nenegativnih celih števil in označimo stolpce matrike A kot $A_1, \dots, A_m$. Matriko $A(K)$ dobimo, tako da vsak stolpec A_i ponovimo k_i krat. Permanentni indeks $pind(A)$ je sedaj najmanjši k, za katerega velja $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = m$ in $k_i \leq k$ za vsak $i = 1, \dots, m$ ter je $perA(K) \neq 0$. Definiciji sta res ekvivalentni saj lahko izbrano podmatriko $A^{(k)}$ dobimo z primerno izbranim zaporedjem K. Navidez komplicirane in neuporabne definicije iz linearne algebre imajo vrednost ko opazujemo naslednjo trditev.

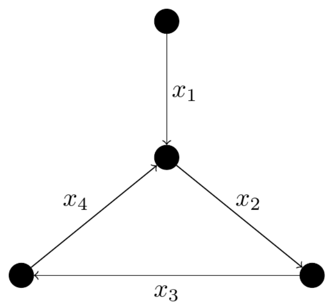
Trditev 6.12. *Naj bo $A = (a_{ij})$ kvadratna matrika velikosti m in končnim permanentnim indeksom. Naj bo $P(x_1, \dots, x_m) = \prod_{i=1}^{m}(a_{i1}x_1 + \ldots a_{im}x_m)$. Takrat velja $mind(P) = pind(A)$.*

Dokaz. Spomnimo se alternativne definicije permanentnega indeksa. Naj bo torej zaporedje $K = (k_1, \dots, k_m)$ tako, da $perA(K) \neq 0$ in sicer za najmanjši možen k. Sedaj želimo pokazati, da je koeficient pri členu $x_1^{k_1} \ldots x_m^{k_m}$ neničelen, kar pomeni, da se v razširejenem polinomu taki členi ne seštejejo v 0. Da dobimo zgornji člen moramo torej spremenljivko x_i izbrati iz natanko k_i faktorjev. Vseh takih možnih izbir pa je natanko $perA(K)$. Ker vrsti red izbiranja ni pomemben je končni koeficient pred členom $x_1^{k_1} \ldots x_m^{k_m}$ enak $\frac{perA(K)}{k_1! \ldots k_m!}$. V kolikor bi matrika A bila matrika samih enic bi to bil ravno multinomski izrek. Sedaj smo pokazali $mind(p) \leq pind(A)$. Da pokažemo obratno neenakost vzemimo nek člen v razširnejem polinomu in iz stopenj posameznih spremenljivk generirajmo zaporedje K. Ker smo štartali z neničelnim členom po podobnem premisleku velja $pind(A) \leq mind(P)$. $\square$

Na podlagi zgornje trditve smo problem iskanja ustrezne seznamske utežitve pretvorili na problem iz linearne algebre, ki je dobro poznan in sicer računanje permanentov posebnih matrik. Oglejmo si sedaj primer uporabe zgornje trditve.

Primer 6.13. Oglejmo si graf na sliki 3. Za orientacijo kot je na sliki je polinom pripadajoč grafu oblike $P_G(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2+x_4)(x_3-x_1-x_4)(x_4-x_2)(x_1+x_2-x_3)$. Zapišimo sedaj še matriko pripadajočo temu polinomu. Ko imamo enkrat zapisan

Slika 3: Primer orientacije grafa.



celoten polinom dobimo matriko na zelo preprost način. Za i-to vrstico pogledamo i-ti faktor v polinomu in v to vrstico zapišemo koeficiente pred spremenljivkami, ki se v njem pojavljajo. Tako dobimo naslednjo matriko

$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Najprej ugotovimo, da $per(A_G) = 0$. Sedaj moramo izbrati zaporedje K, tako da bo imela matrika $A_G(K)$ neničelen permament. Vzemimo $K = (2,2,0,0)$. Sedaj računamo

$$\begin{aligned}
per(A_G(K)) &= per\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= per\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} + per\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= 2per\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= -2per\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= -4 \neq 0
\end{aligned}$$

Pri tem smo permament računali tako kot računamo determinanto in sicer z razvojem po vrstici ali stolpcu. Pri nam niti ni treba paziti na predznak ker tukaj ni pomemben. Ugotovili smo torej, da $pind(A_G) = 2$ iz česar sledi $mind(G) \leq 3$ in graf G je torej utežljiv iz seznamov velikosti 3. Na enak način se lahko problema lotimo za poljuben podan graf.

V zgornjem primeru smo videli uporabo metode, ki smo jo razvili do sedaj. Direkten izračun, brez uporabne kombinatoričnega izreka o ničlah bi bil lahko že za zelo preproste grafe zahteven problem. Navidezno se nam sicer zdi, da smo problem že dobro rešili vendar izkaže se, da je računanje permamentov poljubnih grafov lahko zahtevno. Prak tako ni enostavno računati permanenta matrik za kakšne posebne družine grafov kot so naprimer cikli ali polni grafi. V ta namen si bomo ogledali preprosto trditev s pomočjo katere bomo malo lažje računali permanente kakšnih posebnih matrik.

Trditev 6.14. *Naj bosta A in L kvadratni matriki velikosti m, tako da so stolpci matrike L linearna kombinacija stolpcev matrike A. Naj bo m_j število tistih stolpcev v L v katerih j-ti stolpec A_j nastopa z neničelnim koeficientom. Če je $n_j \leq r$ in $perL \neq 0$ potem $pind(A) \leq r$.*

Dokaz. Naj bo L_k k-ti stolpec matrike L in ga zapišimo kot $L_k = \sum_{j=1}^{m} a_{kj} A_j$. Sedaj bomo uporabili dejstvo iz linearne algebre, ki ga nebomo dokazovali. Tako kot determinanta je tudi permanent multilinearna funkcija stolpcev. To pravzaprav ni težko preverit vendar dokaz tega ni zanimiv. Oglejmo si raje kaj to pomeni. Zapišimo matriko A kot $A = [A_1, \ldots, A_m]$. Multilinearnost permanenta pomeni naslednje

$$per([a_1 A_1 + a_2 A_2, A_2]) = a_1 a_2 \left(per([A_1, A_2]) + per([A_2, A_2])\right).$$

Seveda enak razvoj velja za katerikoli stolpec. V zgornjem primeru smo zaradi lažje razumljivosti vzeli le 2 stolpca. Glavna ideja leži v tem, da lahko $perL$ zapišemo kot vsoto členov oblike $c \cdot per([A_{j_1}, \ldots, A_{j_m}])$. Pri tem se seveda lahko zgodi, da se sta kakšna indeksa stolpcev enaka vendar zaradi predpostavke $m_j \leq r$ imamo lahko v vsakem členu največ r enakih stolpcev matrike A. Ker po predpostaki $perL \neq 0$ je vsaj eden izmed zgornjih členov neničelen. Ampak ker se v tem členu katerikoli stolpec matrike A ponovi največ r-krat trditev sledi na podlagi alternativne definicije permanentnega indeksa. □

Kot smo že omenili je računanje permanentov zahtevno predvsem zato ker ne moremo uporabiti Gausovih eliminacij kot pri determinantah. Seveda je zaradi tega računaje permanentenga indeksa matrike še toliko težji problem saj niti ne vemo ali je permanentni indeks končen. S pomočjo zgornje trditve lahko permanentni indeks računamo na podoben način kot računamo determinanto s pomočjo eliminacij. Oglejmo preprosto uporabno zgornje matrike.

Trditev 6.15. *Za vsak $n \geq 3$ velja $mind(C_n) \leq 2$. Torej vsak cikel je utežljiv iz seznamov velikosti 3.*

Dokaz. Vzemimo cikel C_n in ga orientirajmo v smeri urinega kazalca ter prav tako oštevilčimo povezave. Ker ima v ciklu vsaka povezava dve incidenčni povezavi je polinom pripadajoč ciklu naslednje oblike

$$P_{C_n}(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n}(x_i - x_{i+2}),$$

kjer indekse spremenljivk gledamo modulo n. Na podlagi polinoma matrika, ki pripada ciklu C_n izgleda kot

$$A_{C_n} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & & 0 & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sedaj moramo pokazati, da velja $pind(A_{C_n}) \leq 2$. Tega problema bi se lahko lotili direktno po definiciji kot v prvem primeru vendar je sedaj problem precej težji. Ideja je, da uporabimo zgornji trditev. Označimo stolpce matrike A_{C_n} kot $A_1, A_2, \ldots, A_n$ in definirajmo matriko L, tako da določimo njene stolpce. V prvem koraku stolpce matrike A_{C_n} le razvrstimo drugače in sicer, tako da jih prestavimo za eno mesto v levo. Na tak način dobimo matriko oblike

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & -1 \\ -1 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dokaz bomo nadaljevali, tako da se bomo probali vrednosti -1, ki se nahajajo nad diagonalo potisniti čim bolj navzdol. Nakoncu bomo lahko izračunali permanent nastale matrike in pokazali, da je različen od nič. Predpostavimo najprej, da je $n = 2k + 1$ lih. V tem primeru definiramo stolpce matrike L kot $L_i = A_{i+1}$ posebaj pa definiramo zadnja dva stolpca in sicer $L_{n-1} = A_n + A_2 + A_4 + \dots A_{2k}$ ter $L_n = A_1 + A_3 + \dots A_{2k-1}$. Na tak način vrednost -1 v predzadnjem stolpcu prestavili pod diagonalo v zadnjem stolpcu pa se nahaja ravno nad diagonalo. Tako je permanent matrike L enak produktu diagonalnih elementov, ki so vsi enaki 1 ter permanentu spodnjega 2×2 bloka

$$perL = per \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \neq 0.$$

Oglejmo si še primer ko je $n = 2k$ sod. Ideja ostane enaka, vrednosti -1 nad diagonalo si želimo spravit čim bližje diagonali in zopet bomo v tam namen seštevali stolpce iste parnosti. V tem primeru moramo biti malo bolj pazljivi, saj lahko ustvarimo stolpec, ki vsebuje same ničle in bo s tem permanent celotne matrike enak 0. Temu se bomo izognili, da bomo pri seštevanju stoplcev enega izpustili. Enako definiramo $L_i = A_{i+1}$ ter $L_{n-1} = A_n + A_2 + A_4 + \dots A_{2k-2}$ in $L_n = A_1 + A_3 + \dots A_{2k-3}$. Na enak način kot v prejšnjem primeru sedaj dobimo na diagonali enice, nad diagonalo pa ničle razen v spodnjem desnem 4×4 bloku. Tako je permanent celotne matrike L enak permanentu spodnjega bloka oblike

$$perL = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \neq 0.$$

V obeh primerih smo torej dobili neničelen permanent matrike L. Prav tako v obeh primerih velja, da se posamezen stolpec matrike A_{C_n} pojavlja v največ dveh stolpcih matrike L. Res, stolpec A_i se pojavi v $i - 1$ stolpcu L ter ali v n-tem ali $n - 1$-tem stolpcu vendar ne obeh. S tem je trditev dokazana. □

Zgornja trditev torej dokaže seznamsko verzijo domneve v primeru ciklov. Ali lahko na podoben način dokažemo domnevo še za kakšno drugo družino grafov? Morda je to možno na podoben način vendar bolj kot so zakomplicirani grafi težje je določiti permanentni indeks pripadajoče matrike. V nadaljevanju si bomo ogledali glavni in najpomembnejši rezultat tega razdelka. Omogočal nam bo konstrukcijo grafov z nizkim monomičnim indeksom. Ideja se skriva v tem, da začnemo z nekim grafom, ki ima nizek monomičen indeks ter nato dodajamo vozlišča in povezave na poseben način, tako da pri tem ne zvišamo monomičnega indeksa. Na tak način bomo lahko seznamsko verzijo domneve dokazali še za nekaj družin grafov.

Izrek 6.16. *Naj bo $G = (V, E)$ graf z $mind(G) \leq 2$ in naj bo U neprazna podmnožica vozlišč V. Z F označimo graf dobljen, tako da grafu G dodamo nova vozlišča u in v ter ju povežemo z vsemi vozlišči v U. Graf H naj označuje graf, kjer vozlišči u in v še povežemo. Tedaj velja $mind(F) \leq 2$ in $mind(H) \leq 2$.*

Dokaz. Glavno orodje dokaza bo trditev 6.14. Najprej se bomo lotili dokazovanja $mind(F) \leq 2$ zato v ta namen označimo $U = \{u_1, \ldots, u_k\}$, množico povezav incidenčnih u kot $E_u = \{e_1, e_3, \ldots, e_{2k-1}\}$ ter množico povezav incidenčnih v kot $E_v = \{e_2, e_4, \ldots, e_{2k}\}$. Skupno imamo torej $2k$ novih povezav v grafu F ter jih vse orientiramo proti množici U in opazujemo matriko A_F, ki pripada novemu grafu. Kot smo že omenili vrstni red stolpcev nima nobenega vpliva, zato naj $A_1, A_2, \ldots, A_{2k}$ označuje prvih $2k$ stolpcev matrike A_F, ki pripadajo novim povezavam in označimo matriko $A = [A_1, \ldots, A_{2k}]$. Tako celotna matrika izgleda kot $A_F = [A, B]$, kjer je $B = \begin{bmatrix} X \\ A_G \end{bmatrix}$. Sedaj definirajmo novo matriko M na sledeč način

$$M = [M_1, M_1, M_2, M_2, \ldots, M_k, M_k, B(K)],$$

kjer je $M_j = A_{2j-1} - A_{2j}$ za $j = 1, \ldots, 2k$ in K je zaporedje števil, ki zadošča predpostavki $mind(G) \leq 2$ oziroma bolj natančno $pind(G) \leq 2$. Naslednji del dokaza bomo porabili dokazovanje $perM \neq 0$ kar bo s pomočjo trditve 6.14 dokazalo izrek za graf F. V ta namen si bolj natančno oglejmo strukturo matrike A zato jo zapišimo v bločni obliki kot $A = \begin{bmatrix} Y \\ Z \end{bmatrix}$, kjer je Y kvadratna $2k \times 2k$ podmatrika. Sedaj se spomnimo definicije stolpca $M_j = A_{2j-1} - A_{2j}$. Pri tem velja, da se stolpca A_{2j-1} in A_{2j} ujemata na podmatriki Z, saj sta povezavi e_{2j-1} in e_{2j} incidenčni istemu vozlišču u_j njuna repa pa pripadata vozlišču u in v, ki se ne nahajata v $V(G)$. Na podlagi tega sledi, da je stolpec M_j ničelen razen na prvih $2k$ vrsticah. Bolj natančno si sedaj oglejmo še matriko Y. Opazujmo neko novo povezavo e_i in najprej predpostavimo, da je i liho. V tem primeru se e_i začne v vozlišču u in je incidenčna samo z koncem ene povezave in sicer z e_{i+1}, ki se začne v vozlišču v. Zato je v i-ti vrstici matrike Y samo en element z pozitivnim predznakom in sicer v stolpcu $i + 1$. Vsi ostali stolpci z lihim indeksom pripadajo povezavam, ki izhajajo iz u in je njihov začetek incidenčen povezavi e_i in zato imajo te stolpci vrednost -1, razen seveda stolpca z indeksom i, ki ima ničelno vrednost. Vsi ostali sodi stolpci imajo prav tako vrednost 0. Zelo podobna situacija je v primeru ko je i sodo. V tem primeru se e_i začne v vozlišču v in je incidenčna samo z koncem ene povezave in sicer e_{i-1}. Vsi ostali lihi stolpci imajo ničelne vrednosti medtem ko imajo vsi sodi stolpci vrednost -1 razen seveda stolpca i. Na podlagi zgornjih ugotovitev ima matrika Y naslednjo obliko

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & \ldots & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & & 0 & -1 \\ & \vdots & & & \ddots & & \\ -1 & 0 & -1 & 0 & & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

S pomočjo te ugotovitve lahko zapišemo matriko M kot

$$M = \begin{bmatrix} R & X(K) \\ 0 & A_G(K) \end{bmatrix},$$

kjer so vse vrstice matrike R neničelne ter enakega predznaka

$$R = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & -1 & -1 & & -1 \\ & \vdots & & \ddots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & & 1 \end{bmatrix}.$$

Na podlagi bločnega zapisa matrike M velja $perM = perR \times perA_G(K)$. V permanentu matrike R imajo vsi členi enak predznak prav tako pa noben člen ni ničelen zaradi tega sledi $perR \neq 0$. In tako na podlagi predpostavke $perA_G(K) \neq 0$ sledi $perM \neq 0$ in je s tem izrek dokazan v primeru grafa F.

V primeru grafa H imamo dodatno povezavo e_0 med u in v ter jo orientirajmo od v do u. Dobljena mtrika A_H izgleda enako kot prej razen nove prve vrstice in prvega stolpca. Zapišimo jo v bločni obliki kot

$$A_H = \begin{bmatrix} Y' & X' \\ Z' & A_G \end{bmatrix}.$$

Oglejmo si podrobneje matriko Y'. Vsaka povezava, ki se začne v u je incidenča z koncem povezave e_0 in te imajo v našem primeru lihe indekse. Medtem ko je vsaka povezava z začetkom iz v incidenčna z začetkom povezave e_0 in te imajo sode indekse. Tako ima matrika Y' v prvi vrstici na sodih indeksih vrednosti 1 in vrednost -1 na lihih indeksih. Po drugi strani je povezava e_0 incidenčna z začetkom vseh povezav med $\{u, v\}$ in U. Zato je prvi stolpec matrike Y' sestavljen iz vrednosti -1 razen na prvem mestu je seveda vrednost 0. Prvi stolpec matrike Z' je sestavljen iz samih ničel medtem ko so vsi preostali stolpci enaki kot v matriki Z. Ostale vrstice in stolpci niso spremenjeni. Tako celotna matrike Y' izgleda kot

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \ 1 \ \dots \ 1 \ -1 \\ -1 & \\ -1 & \\ \vdots & Y \\ -1 & \\ -1 & \end{bmatrix}.$$

Sedaj nadaljujemo podobno kot v prvem primeru in označimo prvih $2k+1$ stolpcev matike A_H kot $A_0, A_1, \dots, A_{2k}$, ki pripadajo novim povezavam $e_0, e_1, \dots, e_{2k}$. Definiramo novo matriko

$$M = [N_0, N_0, N_1, N_1, N_2, N_2, \dots, N_k, N_k, B(K)],$$

kjer je $N_0 = A_0$ in $N_j = A_{2j-1} - A_{2j}$ za $j = 1, 2, \dots, k$. Enako kot v prejšnjem primeru zapišemo matriko N v bločnem zapisu kot

$$N = \begin{bmatrix} R' & X'(K) \\ 0 & A_G(K) \end{bmatrix},$$

kjer je R' kvadratna $2k+1 \times 2k+1$ matrike naslednje oblike

$$R' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \\ -1 & -1 & 1 & 1 & & 1 \end{bmatrix}.$$

Vse kar nam preostane za dokazat je $perR' \neq 0$. Po istem premisleku bo nato veljalo $perN \neq 0$ in $pind(A_H) \leq 2$. Dokažimo torej $perR' \neq 0$. Kot smo že omenili je permanent multilinearna funkcija stolpcev in ker transponiranje ne vpliva na permanent je tudi multilinearna funkcija v vrsticah. Iz tega razloga bomo določene vrstice matrike R' pomnožili z primerno izbranimi konstantami ter tako dobili novo matriko, ki jo bomo označili S. Tako pomnožimo prvo vrstico matrike R' z $1/2$ ter vsako liho vrstico z -1. Dobljena matrike S tako izgleda kot

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \\ -1 & -1 & 1 & 1 & & 1 \end{bmatrix}.$$

Permanent matrike S bomo izračunali, tako da jo bomo razvlili glede na prvi stolpec. Označino s S_i podmatriko, ki jo dobimo, tako da matriki S odstranimo prvi stolpec in vrstico i. Tedaj velja

$$perS = \sum_{i=1}^{2k+1} perS_i = \sum_{i=1}^{k}(perS_{2i} - perS_{2i+1}) = k(perA - perB),$$

kjer je $A = S_{2i}$ in $B = S_{2i+1}$ za vsak i, saj je večina dobljenih podmatrik enakih. Matrika A ima povsod enice razen v prvem stolpcu, kjer ima eno ničlo ter k minus enic. Ko matriko A razvijemo po prvem stolpcu dobimo

$$perA = (n-1-n)(2n-1)! = -(2n-1)!.$$

Zelo podobno ima matrika B povsod enice razen v prvem stolpcu, kjer ima eno ničlo ter $n-1$ minus enic. Zopet jo razvijemo po prvem stolpcu in dobimo

$$perB = (n+1-n)(2n-1)! = (2n-1)!.$$

Sledi torej $perS = -2n(2n-1)! = -(2n)! \neq 0$. Torej potem velja tudi $perR' \neq 0$ in je izrek s tem dokazan.

□

V dokazovanju zgornjega izreka ter nasploh trditev v tem razdelku smo uporabili ogromno linearne algebre ter premetavanja in transformiranja matrik in s tem smo se malo oddaljili od same teorije grafov. Kljub temu je zgornji izrek močno orodje, ki nam omogoča generiranje grafov z nizkim monomičnim indeksom. Ideja je, da začnemo z nekim majhnim grafom G_0 za katerega velja $mind(G_0) \leq 2$ ter nato postopoma dodajamo pare novih vozlišč v skladu z zgornjim izrekom. Tako lahko ustvarimo ogromno grafov za katere velja, da je njihov monomični indeks manjši od 2. Oglejmo si direktno uporabo za nekatere že znane družine grafov.

Trditev 6.17. *Če $G \neq K_2$ je polni graf ali polni dvodelni graf potem $mind(G) \leq 2$.*

Dokaz. Dokaz je takojšnja posledica izreka 6.16 ko preverimo da imajo grafi K_3, K_4, $K_{1,2}$, $K_{1,3}$, $K_{2,2}$ monomične indekse manjše kot 2. Nato z indukcijo dokažemo trditev. Res za vsak polni graf K_n začnemo z K_3 v kolikor je n lih ter nato dodajamo po dva vozlišča in jih povežemo z vsemi obstoječimi vozliči ter tako nadaljujemo. Ko je n sod začnemo z K_4 ter nadaljujemo na enak način. V primeru polnih dvodelnih grafov $K_{n,m}$ postopamo enako. Glede na parnost n in m si izberemo začetni graf dodajamo nova vozlišča, ki jih sedaj povežemo le z eno biparticijo obstoječega polnega dvodelnega grafa. □

Trditev 6.18. *Naj bo T drevo na vsaj treh vozliščih. Potem velja $mind(T) \leq 2$.*

Dokaz. Tudi v tem primeru bomo uporabili indukcijo glede na število povezav. Za bazo preprosto preverimo, da drevesa na 2 in 3 povezavah zadoščajo zgornjemu pogoju. Naj bo torej T drevo z $m \geq 4$ in povezav in predpostavimo, da trditev velja za vsa drevesa z manj kot m povezavami. V tem primeru dokaz nebo tako preprost kot v prejšnji trditvi saj bomo en primer morali obravnavati posebaj. Začnimo najprej z preprostim primerom in sicer takrat, ko ima drevo T dva lista, ki imata istega starša. V tem primeru uporabimo zgornji izrek ter po indukciji trditev velja tudi za T. Oglejmo si še primer, ko ima drevo povezavo $e = uv$, kjer je u list, v je njegov starš za katerega velja, da je njegova stopnja enaka 2. Res, saj bi v nasprotnem primeru moral imeti še vsaj enega soseda, ki je tudi list. Označimo z f še drugo povezavo vozlišča v. Sedaj v bločni obliki zapišimo matriko drevesa T kot

$$A_T = \begin{bmatrix} A_{T-e-f} & X & 0 \\ Y & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

kjer zadnji dve vrstici pripadata povezavam f in e. Po indukcijski predpostavki velja $mind(T-e-f) \leq 2$, zato obstaja zaporedje K za katerega $per A_{T-e-f}(K) \neq 0$. Sedaj preprosto vzamemo $K' = (K, 1, 1)$ in dobimo

$$A_T(K') = \begin{bmatrix} A_{T-e-f}(K) & X & 0 \\ Y(K) & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sedaj razvijemo po zadnji vrstici in dobimo $per A_T(K') = per A_{T-e-f}(K) \neq 0$. □

Literatura

[1] G. J. Chang in dr., *Vertex-Coloring edge-weightings of graphs*, TAIWANESE JOURNAL OF MATHEMATICSVol. 15, No. 4, pp. 1807-1813, August 2011 (2011).

[2] R. Diestel, *Graph Theory*, Springer; 5th ed, 2016.

[3] M. Kalkowski, M. Karoński in F. Pfender, *Vertex-coloring edge-weightings:Towards the 1-2-3-conjecture*, Journal of Combinatorial Theory, Series B 100 (2010) 347–349 (2010).

[4] M. Karonski, T. Łuczak in A. Thomasonb, *Edge weights and vertex colours*, Journal of Combinatorial Theory (2004).

[5] J. Przybylo, *The 1–2–3 Conjecture almost holds for regular graphs*, 2018, že objavljen.