RAČ 2 VAJE (8. 3. 2023)

4. VAJE

NALOGA 0: PROBLEM MATRIČNEGA MNOŽENJA

Vhod: MATRIKE IN DIMENZIJE

$A_1, \dots, A_n$ in $[d_1, \dots, d_{n+1}]$

$\dim A_i = d_i \times d_{i+1}$

Izhod: min. št. množenj realnih števil za izračun produkta danih matrik $A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n$

$N(i,j)$ ... min. št. množenj realnih št. za izračun produkta danih matrik od A_i do A_j

$$\cancel{N(i,j) = \min_{i \le k \le j} \{ N(i,k) + N(k+1,j) \} + \dots}$$

$$N(i,j) = \min_{i \le k \le j} \{ N(i,k) + N(k+1,j) + d_i \cdot d_{k+1} \cdot d_j \}$$

robni pogoji

R.P.: $i = j \Rightarrow N(i,i) = 0$

Konkreten primer

$k=1$: $A_1 \cdot (A_2 \cdot A_3)$
$3 \times 5 \times 2 + 40 = 70$
$k=2$: $(A_1 \cdot A_2) \cdot A_3 = 60 + 0 + 3 \cdot 4 \cdot 2 = 84$

	3×5	5×4	4×2	2×3	3×5	5×4	4×6	6×3
$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	60	70_1					
2		0	40	70_3				
3			0	24	70_3			
4				0	30	70_5		
5					0	60	132_6	
6						0	120	132_6
7							0	72
8								0

12.5

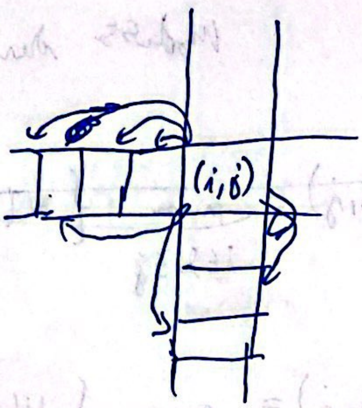
k

$M(2,4) = (70, [3])$ ← pri naslednji nalogi imamo tole podano

lahko bi jih bilo tudi več (indeksov)

$$M(2,4) = \begin{cases} k=2: & 0 + 24 + 5 \cdot 4 \cdot 3 = 84 \\ k=3: & 60 + 0 + 5 \cdot 2 \cdot 3 = 70 \end{cases}$$

3 in 4 zamenjamo



$$M(3,5) = \begin{cases} k=4: & 24 + 0 + 4 \cdot 3 \cdot 5 = 84 \\ k=3: & 30 + 0 + 4 \cdot 2 \cdot 5 = 70 \end{cases}$$

~~M(1,5) = min (...) + ...~~

Zakaj smo rabili okrnili: (ker smo potem samo scenariji 3 in 4)

$$M(4,6) = \begin{cases} k=4: & 0 + 60 + 2 \cdot 3 \cdot 4 = 84 \\ k=5: & 30 + 0 + 2 \cdot 5 \cdot 4 = 70 \end{cases}$$

$$M(6,8) = \begin{cases} k=6: & 0 + 72 + 60 = 132 \\ k=7: & 120 + 0 + 5 \cdot 6 \cdot 3 = 210 \end{cases}$$

$$M(5,7) = \begin{cases} k=5: & 0 + 120 + 3 \cdot 5 \cdot 6 = 210 \\ k=6: & 60 + 0 + 3 \cdot 4 \cdot 6 = 132 \end{cases}$$

NALOGA 1:

$\sigma(i,j)$ = št. opt. produktov matrik $A_i, \dots, A_j$

$\sigma(i,i) = 1$

$\sigma(i,i+1) = 1$

$$\underbrace{(A_1 \cdots A_k)}_{\sigma(1,k)} \cdot \underbrace{(A_{k+1} \cdots A_n)}_{\sigma(k+1,n)} \qquad k = k$$

$$\sigma(i,j) = \sum_{\underbrace{k \in N.(i,j)[1]}_{\text{idx}}} \sigma(i,k) \cdot \sigma(k+1,j)$$

idx

drugi element tega tupla

ČASOVNA ZAHTEVNOST: $O(n^2 \cdot n)$

število stanj

izračun stanja

se je narejeno (ali na mozgih)

NALOGA 2:

ugledamo isto drevo zgoraj

Optimalno št. operacij je $M(1,8) = 1932$

Na kakšne načine lahko zmnožimo matrike:

$(A_1 A_2)(A_3 \cdots A_8)$

$A_1 A_2$

tudi v primeru za $k=6$

$k=6: (A_3 \cdots A_6)(A_7 A_8)$

$A_7 A_8$

$(A_3 A_4 A_5) \cdot A_6$

A_6

$(A_3 A_4)\, A_5$

A_5

$A_3 \cdot A_4$

v primeru za $k=7$

$k=7: (A_3 \cdots A_7) \cdot A_8$

A_8

$(A_3 \cdots A_6)\, A_7$

A_7

$(A_3 A_4 A_5) A_6$

A_6

$(A_3 A_4)\, A_5$

A_5

$A_3 A_4$

$(A_1 A_2)((((A_3 \cdot A_4)(A_5))(A_6)) \cdot (A_7 \cdot A_8))$

$(A_1 A_2)(((((A_3 A_4) A_5) A_6) A_7) A_8)$

(končno) binarno drevo z n listi

$\Updownarrow$

Zaporedje n členov in pravilno postavljeni oklepaji

$\Updownarrow$

Catalanova števila

NALOGA 3:

← pri tej nalogi pazimo da se indeksi od 0 naprej ne ~~[illegible]~~ štejejo matrike od 1 naprej ~~[illegible]~~

ki majhni nalogi sta levo

a) $N(1,8) = 242$

b.) Kako jih moramo množiti: Takoj je samo ena možnost

$$(A_1(A_2 A_3))((((A_4 \cdot A_5) A_6) A_7) A_8)$$

c) $A_3(((A_4 A_5) A_6) A_7)$

d.) 130 operacij: $N(1,5) = 130$

e.) $N(5,8) = 168$

f.) Zadnji stolpec bi posračunali od spodaj navzgor.

$O(n^2)$

NALOGA 4:

$A_1 \dots A_4$

$A_5 \dots A_8$

Andrej ima tako računalnik med strankah

N^3

izračun $L \cdot D$

samo 1 rač.

N^2

2 računalnika "vzporedno" delujeta:

čas → $\tilde{N}(1,8) = \max\{N(1,4), N(5,8)\} + d_1 d_5 d_9 + O(\min\{d_1 d_5, d_5 d_9\})$

Scanned with CamScanner

Kraj za lahko imato različnih dvojen stanu

$$\tilde{N}(1,8) = \min_{1 \le k \le 8} \{ \max(N(1,k), N(k+1,8)) + d_1 \cdot d_{k+1} \cdot d_9 \}$$

neomejen dostop

VAJE Ilona, Dijana v na spletni