Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Escuela de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Algebra y Geometría Analítica II

Año 2023

UNIDAD 1: Análisis Combinatorio. [1]

La Combinatoria (también «Teoría Combinatoria» o «Análisis Combinatorio») es la rama de la Matemática que estudia las distintas formas de ordenar, agrupar, seleccionar o intercambiar los elementos de un conjunto finito, y especialmente de cómo determinar el número de formas distintas de hacerlo evitando enumerar una o por una las posibilidades.

1 Reglas de la suma y del producto.

Suponga que desea ir al cine y averigua que en cartelera solo hay dos películas de terror y tres de acción. ¿Cuántas opciones de películas tiene en total para ver? Son cinco, claramente. Habiendo elegido una, pasa por el kiosko y compra un «combo» de una golosina con una gaseosa. Tiene dos opciones para la golosina (caramelos frutales o maní con chocolate) y tres para la gaseosa (de sabor cola, lima-limón o naranja). ¿Cuántas opciones de combo tiene en total para elegir? En este caso son seis. ¿Qué es diferente del caso anterior?

Podemos notar que en la elección de película, al elegir una, ya no podemos tomar ningua decisión sobre las otras. En el caso de los combos, si optamos por los caramelos todavía resta elegir el sabor de la gaseosa. En el primer caso aplicamos la *regla de la suma*. En el segundo, la *regla del producto*. Las describiremos a continuación.

Regla de la suma: Si una primera tarea puede realizarse de m formas, mientras que una segunda tarea puede realizarse de n formas, y no es posible realizar ambas tareas simultáneamente, entonces la tarea de llevar a cabo cualquiera de ellas puede realizarse de $m + n$ formas.

[1] Notas de Cátedra basadas en ediciones anteriores de las mismas de las docentes Isolda Cardozo y Paola Tolomei. Edición 2023 con modificaciones de Ma. Inés Lopez Pujato y Pablo Fekete.

Nota 1 *Vale destacar que cuando decimos que una tarea puede realizarse de m formas, supondremos que estas m son distintas, salvo que se indique lo contrario.*

Ejemplo 1 *Veamos algunos ejemplos:*

1. *La biblioteca de la facultad tiene 15 libros de Matemática Discreta y 7 de Geometría Analítica. Como $15+7=22$, por la regla de la suma, un estudiante puede elegir entre 22 libros de texto para aprender acerca de alguno de estos temas.*

2. *Es claro que esta regla puede ampliarse a más de dos tareas. En efecto, si suponemos que el estudiante está interesado además en el área del Cálculo, y se sabe que la biblioteca cuenta con 35 libros de este tema, podemos asegurar que el estudiante podrá elegir entre 57 libros ($15+7+35=57$) para aprender acerca de alguno de estos temas.*

¿Cómo se expresa *matemáticamente* la regla de la suma? Recordemos un concepto de la teoría de conjuntos para responder esta pregunta.

Dados $m, n \in \mathbb{N}$, con $m \leq n$, notaremos

$$\llbracket m, n \rrbracket = \{m, m+1, \cdots, n\} = \{k \in \mathbb{N} \colon\ m \leq k \leq n\}.$$

Así, en particular,

$$\llbracket 1, n \rrbracket = \{1, 2, \cdots, n\}.$$

La idea de «cantidad» de elementos de un conjunto se precisa (y generaliza) con el concepto de cardinalidad:

Definición 1 *Un conjunto X tiene* ***cardinalidad*** *n, con $n \in \mathbb{N}$, si existe una función biyectiva $f \colon \llbracket 1, n \rrbracket \to X$ y se denota $|X| = n$. Para $X = \emptyset$ definimos $|X| = 0$. Todo conjunto que tenga cardinalidad n para algún $n \in \mathbb{N}$ se dirá un conjunto finito.*

El siguiente Teorema se conoce como Principio de Adición, y es la formalización de la Regla de la Suma:

Teorema 1 ***(Principio de Adición)*** *Si A y B son dos conjuntos finitos disjuntos entonces*

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

Demostración: Siendo A y B conjuntos finitos, existen $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $|A| = n$ y $|B| = m$, i.e., existen dos funciones biyectivas $f \colon \llbracket 1, n \rrbracket \to A$ y $g \colon \llbracket 1, m \rrbracket \to B$. Para probar que $|A \cup B| = n+m$ bastará mostrar que existe una función biyectiva $h \colon \llbracket 1, n+m \rrbracket \to A \cup B$.

Definamos la función $h \colon \llbracket 1, n+m \rrbracket \to A \cup B$ tal que

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ g(x-n), & \text{si } x \in \llbracket n+1, n+m \rrbracket \end{cases}$$

Probaremos que h es biyectiva. Para ver que es inyectiva, sean $x, x' \in \llbracket 1, n+m \rrbracket$ tales que $x \neq x'$. Queremos probar que $h(x) \neq h(x')$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $x \leq x'$.

- Si $x, x' \in \llbracket 1, n \rrbracket$, entonces $h(x) = f(x) \in A$ y $h(x') = f(x') \in A$. Como f es, en particular, inyectiva, necesariamente $f(x) \neq f(x')$ y por lo tanto $h(x) \neq h(x')$.

- Si $x \in \llbracket 1, n \rrbracket$ y $x' \in \llbracket n+1, n+m \rrbracket$, entonces $h(x) = f(x) \in A$ y $h(x') = g(x'-n) \in B$. Como $A \cap B = \emptyset$, $h(x) \neq h(x')$.

- Si $x, x' \in \llbracket n+1, n+m \rrbracket$, entonces $h(x) = g(x-n) \in B$ y $h(x') = g(x'-n) \in B$. Como g es, en particular, inyectiva, y $x - n \neq x' - n$ entonces $g(x-n) \neq g(x'-n)$. Por lo tanto $h(x) \neq h(x')$.

En cualquier caso, $h(x) \neq h(x')$ y podemos concluir que h es inyectiva. Veamos ahora que también es sobreyectiva. Sea $y \in A \cup B$.

- Si $y \in A$, como f es sobreyectiva, existe $x \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tal que $f(x) = y$. Luego, $h(x) = f(x) = y$.

- Si $y \in B$, como g es sobreyectiva, existe $x \in \llbracket 1, m \rrbracket$ tal que $g(x) = y$. Llamemos $\hat{x} = x + n$. Entonces $\hat{x} \in \llbracket n+1, n+m \rrbracket$, y se tiene $h(\hat{x}) = g(\hat{x} - n) = g((x+n) - n) = g(x) = y$.

Así, cualquier $y \in A \cup B$ tiene al menos un elemento preimagen por h (más aún, por la inyectividad, podemos afirmar que es único, pero no interesa en esta parte), y por lo tanto la función es sobreyectiva.

Luego, h es biyectiva y por lo tanto $|A \cup B| = n + m = |A| + |B|$. ∎

El siguiente Corolario justifica la ampliación de la Regla de la Suma a más tareas. Su demostración se deja como ejercicio.

Corolario 1

1. *Si $A_1, A_2, \cdots, A_n$ son conjuntos disjuntos dos a dos entonces* $|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$.
2. *Si A, B son conjuntos finitos entonces* $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Presentamos ahora la Regla del producto.

Regla del producto: Si un procedimiento se puede descomponer en las etapas primera y segunda, de manera que existen m resultados posibles de la primera etapa, y, para cada uno de estos resultados existen n resultados posibles para la segunda etapa, entonces el procedimiento total se puede realizar, en el orden dado, de mn formas.

Ejemplo 2 *Veamos algunos ejemplos:*

1. *Una cierta compañia de teatro se integra por 6 hombres y 8 mujeres. Para los roles principales de su próxima obra se necesitan un hombre y una mujer. Por la regla del producto, el director puede elegir entre* $6 \cdot 8 = 48$ *parejas posibles.*

2. *Las patentes del Mercosur para la Argentina constan de 2 letras, seguidas de 3 números y otras 2 letras más, (por ejemplo* AA 345 OK*). Argentina descartó la letra Ñ para que no sea confundida con la N. ¿Qué cantidad de autos es posible patentar?*

3. *Si una variable se identifica con solo una letra o bien una letra seguida de un número de un solo dígito, ¿cuántas variables distintas podemos tener si:*

   i) las mayúsculas y minúsculas son indistinguibles?
   ii) se distingue entre mayúsculas y minúsculas?

4. *Las ciudades A, B, y C están conectadas de la siguiente manera: hay seis caminos de A a B y cuatro de B a C, pero ninguno de A a C directamente. ¿De cuántas maneras podemos ir de A a C?*

Recordemos la operación de producto cartesiano entre dos conjuntos A y B:

$$A \times B = \{(a, b) : \ a \in A, \ b \in B\}.$$

El siguiente teorema es la formalización de la regla del producto.

Teorema 2 *Si A y B son conjuntos finitos entonces* $|A \times B| = |A||B|$.

Demos. Sean $A = \{a_1, \cdots, a_m\}$ y $B = \{b_1, \cdots, b_n\}$. Tenemos que probar que $|A \times B| = mn$. Fijaremos n y haremos la prueba por inducción sobre m.

- Sea $m = 1$. Tenemos $A = \{a_1\}$, $B = \{b_1, \cdots, b_n\}$ y por lo tanto $A \times B = \{(a_1, b_1), \ (a_1, b_2), \cdots, (a_1, b_n)\}$. Definiendo la función $f : [\![1, n]\!] \to A \times B$ por $f(i) = (a_1, b_i)$, no es difícil ver que f es biyectiva (¡justifique!) y por lo tanto $|A \times B| = n = 1 \cdot n$, como queríamos ver.

- Supongamos ahora que si A tiene m elementos entonces $|A \times B| = m \cdot n$. Queremos ver que esto es válido también para $m + 1$. Sea entonces $A = \{a_1, a_2 \cdots, a_m, a_{m+1}\}$. Dado que
$$A \times B = (\{a_1, a_2 \cdots, a_m\} \times B) \cup (\{a_{m+1}\} \times B),$$
y dicha unión es una unión de conjuntos disjuntos, por el Principio de la Adición y la hipótesis de inducción, resulta que
$$|A \times B| = mn + m = (m + 1)n.$$

$\blacksquare$

Demuestre el siguiente corolario y dele un enunciado coloquial.

Corolario 2 *Si A_1, $A_2, \cdots, A_n$ son conjuntos finitos, entonces*

$$|A_1 \times A_1 \times \cdots \times A_n| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|.$$

Tanto la regla de la suma como la del producto pueden ser aplicadas reiteradamente. A veces es necesario combinar estas reglas de conteo para la solución de un problema.

Ejemplo 3 *Una persona visita dos tiendas con intención de comprar un pantalón. En la primera tienda hay seis modelos diferentes, exclusivos de esta tienda, y cada uno se presenta en tres colores distintos. En la segunda tienda hay diez modelos exclusivos y cuatro colores para cada modelo. ¿Entre cuántos pantalones tiene que escoger la persona?*

2 Disposiciones lineales. Permutaciones.

Pensemos ahora en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 4 *En un grupo de 10 estudiantes, se desea elegir a 5 representantes y ubicarlos en fila para tomar una foto. ¿Cuántas formaciones distintas hay en total? Aquí importa tanto la selección de los 5 estudiantes como el orden en que se ubican, pues si se intercambian de lugar dos de los elegidos se obtiene una nueva formación. Observemos además que no es posible «repetir» estudiantes en la formación, son 5 distintos. Así, cualquiera de los 10 estudiantes puede ocupar el primer lugar a la izquierda, pero sólo podremos elegir entre los 9 restantes para ocupar el segundo lugar. Una vez que elegimos éste, nos queda elegir entre 8 estudiantes para completar la tercera ubicación, entre 7 para la cuarta y entre 6 para la quinta y última.*

Nota 2 *Insistimos en que en el ejemplo anterior el* ***orden*** *en el proceso de elección es* ***muy importante****. Si entre los 5 estudiantes seleccionados para la foto están Juan y Mariana, no es lo mismo que se siente primero Mariana y luego Juan a que se siente primero Juan y luego Mariana, ya que la foto sería distinta. El orden importa.*

El concepto combinatorio que recoge las características de cada «formación» del ejemplo anterior es el de «permutación».

Definición 2 *Dada una colección de n objetos distintos, cualquier disposición («lineal» u ordenada) de estos objetos se denomina* permutación *de la colección.*

Ejemplo 5 *Consideremos las cinco vocales de nuestro alfabeto. Una permutación de ellas es: a,e,i,o,u. Otra distinta es: u,a,i,o,e. ¿Cuántas permutaciones distintas hay de ellas? Si, en cambio, queremos usar solo dos de estas letras, ¿cuántas permutaciones de dos vocales podemos realizar?*

En general, si existen n objetos distintos a los que podemos denotar con a_1, a_2, ..., a_n y r es un entero $1 \leq r \leq n$, entonces, por la regla del producto, el número de permutaciones de tamaño r para los n objetos es

$$\underset{\text{primera posic.}}{n} \quad \times \quad \underset{\text{segunda posic.}}{(n-1)} \quad \times \quad \underset{\text{tercera posic.}}{(n-2)} \quad \times \quad \cdots \quad \times \quad \underset{\text{r-ésima posic.}}{(n-r+1)}$$

y lo notaremos con $P(n,r)$. Para $r = 0$ es conveniente definir $P(n,0) = 1$. Y, si $r = n$, podemos indicar simplemente $P(n)$ al número de permutaciones de los n elementos.

(En el párrafo anterior hemos usado el símbolo «×» para señalar el producto de números; lo haremos cuando sea más claro que indicarlo con «·»).

La notación de factorial de un número, « ! », resulta conveniente para describir $P(n,r)$ con una expresión más concisa. Recuerde que

$$\begin{aligned} &0! = 1 \\ &n! = n \cdot (n-1)! \quad \text{si } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Es decir, si $n \geq 1$,

$$n! = n \cdot (n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Luego, si $1 \leq r < n$,

$$P(n,r) = n(n-1)\cdots(n-r+1) \cdot \frac{(n-r)(n-(r+1)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1)}{(n-r)(n-(r+1)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1)} = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Y si $r = n$,

$$P(n) = P(n,n) = n(n-1)\cdots 1 = n! = \frac{n!}{(n-n)!}.$$

Es decir que en cualquier caso podemos escribir:

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Ejemplo 6 *El número de permutaciones de las letras de la palabra MURCIELAGO es* $P(10) = 10!$. *Si sólo se utilizan 4 de las letras, el número de permutaciones (de tamaño 4) es* $P(10,4) = \frac{10!}{(10-4)!}$. *Si se permiten repeticiones de las letras, el número de secuencias posibles de 12 letras es* 10^{12}.

Así como con la regla de la suma y la del producto, buscamos ahora una expresión más «matemática», más precisa, del concepto de *permutación o disposición lineal*, que nos permita también demostrar la fórmula vista para el valor de $P(n, r)$.

Sin embargo, esta formalización matemática requerirá de un poco más de esfuerzo. El siguiente ejemplo nos ayudará a captar las ideas fundamentales.

Ejemplo 7 *Llamemos $X = \{a, b, c, d\}$, donde dichos elementos son distintos entre sí, i.e., $|X| = 4$. Nos podemos preguntar (¿quién no lo ha hecho alguna vez?) cuántas funciones $f \colon [\![1, 3]\!] \to X$ existen. Si quisiéramos listarlas a todas deberíamos explicitar para cada una qué elemento de X es $f(1)$, cuál $f(2)$ y cuál $f(3)$. Es decir, podemos asociar biunívocamente cada posible función f con la terna $(f(1), f(2), f(3)) \in X^3$. Por ejemplo, la terna (a, d, a) representa a la función f tal que $f(1) = a$, $f(2) = d$, $f(3) = a$. A su vez, la función g tal que $g(1) = c$, $g(2) = a$ y $g(3) = b$ está identificada por la terna (c, a, b).*

Bajo esta identificación de funciones con ternas (ordenadas), podemos decir que todas las funciones de $f \colon [\![1, 3]\!] \to X$ son:

$$
\begin{array}{cccccccc}
(a,a,a), & (a,a,b), & (a,a,c), & (a,a,d), & (a,b,a), & (a,b,b), & \boldsymbol{(a,\ b,\ c)}, & \boldsymbol{(a,\ b,\ d)}, \\
(a,c,a), & \boldsymbol{(a,\ c,\ b)}, & (a,c,c), & \boldsymbol{(a,\ c,\ d)}, & (a,d,a), & \boldsymbol{(a,\ d,\ b)}, & \boldsymbol{(a,\ d,\ c)}, & (a,d,d), \\
(b,a,a), & (b,a,b), & \boldsymbol{(b,\ a,\ c)}, & \boldsymbol{(b,\ a,\ d)}, & (b,b,a), & (b,b,b), & (b,b,c), & (b,b,d), \\
\boldsymbol{(b,\ c,\ a)}, & (b,c,b), & (b,c,c), & \boldsymbol{(b,\ c,\ d)}, & \boldsymbol{(b,\ d,\ a)}, & (b,d,b), & \boldsymbol{(b,\ d,\ c)}, & (b,d,d), \\
(c,a,a), & \boldsymbol{(c,\ a,\ b)}, & (c,a,c), & \boldsymbol{(c,\ a,\ d)}, & \boldsymbol{(c,\ b,\ a)}, & (c,b,b), & (c,b,c), & \boldsymbol{(c,\ b,\ d)}, \\
(c,c,a), & (c,c,b), & (c,c,c), & (c,c,d), & \boldsymbol{(c,\ d,\ a)}, & \boldsymbol{(c,\ d,\ b)}, & (c,d,c), & (c,d,d), \\
(d,a,a), & \boldsymbol{(d,\ a,\ b)}, & \boldsymbol{(d,\ a,\ c)}, & (d,a,d), & \boldsymbol{(d,\ b,\ a)}, & (d,b,b), & \boldsymbol{(d,\ b,\ c)}, & (d,b,d), \\
\boldsymbol{(d,\ c,\ a)}, & \boldsymbol{(d,\ c,\ b)}, & (d,c,c), & (d,c,d), & (d,d,a), & (d,d,b), & (d,d,c), & (d,d,d).
\end{array}
$$

Vemos que listar todas las funciones $f \colon [\![1, 3]\!] \to X$ equivale a listar todas las «disposiciones lineales» de tres elementos de X, donde se admite la repetición de elementos. Por la regla del producto, hay $4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3 = 64$ funciones distintas.

¿Qué propiedad común tienen las funciones resaltadas del listado anterior? Cada una de esas ternas se compone de tres elementos distintos, por lo que la función asociada es inyectiva. Así, preguntarnos cuántas funciones inyectivas $f \colon [\![1, 3]\!] \to X$ existen es equivalente a preguntarnos cuántas permutaciones de tres elementos de entre los cuatro de X pueden realizarse. Hemos visto que ese número es $P(4, 3) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$.

Dados dos conjuntos A y B, notaremos $\mathcal{F}(A, B)$ al conjunto de todas las funciones de A en B:

$$\mathcal{F}(A, B) = \{f / \ f \colon A \to B\}$$

Teorema 3 *Si A y B son dos conjuntos finitos, con $|A| = n$ y $|B| = m$, entonces $|\mathcal{F}(A, B)| = m^n$.*

Demostración: Llamando $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$, basta observar que cada $f \in \mathcal{F}(A, B)$ está biunívocamente identificada por la n-upla (ordenada)

$$(f(a_1), f(a_2), \cdots, f(a_n)) \in B^n$$

El Corolario del Teorema 2, implica que la cantidad de elementos de B^n es m^n. Luego, $|\mathcal{F}(A, B)| = m^n$. ∎

Ejemplo 8 *Al conjunto de todos los subconjuntos de A (incluyendo al conjunto vacío y al mismo A) se lo conoce como el conjunto de partes de A, y se lo denota por*

$$\mathcal{P}(A) = \{B : \ B \subset A\}$$

Podemos identificar a cada subconjunto $B \subset A$ con su función característica χ_B, definida por

$$\chi_B \colon A \to \{0, 1\} \ / \ \chi_B(x) = \begin{cases} 1, & si\ x \in B, \\ 0, & si\ x \notin B. \end{cases}$$

En particular, $\chi_\emptyset(x) = 0, \forall\, x \in A$ y $\chi_A(x) = 1, \forall\, x \in A$.

La correspondencia $B \longleftrightarrow \chi_B$ es biunívoca. Cada función $\chi \colon A \to \{0, 1\}$ es la función característica de un (único) conjunto, a saber, del conjunto $B_\chi = \{a \in A : \ \chi(a) = 1\}$.

Luego, si $|A| = n$, contar la cantidad de subconjuntos B de A es equivalente a contar la cantidad de funciones características χ_B cuyo dominio es A. Aplicando el teorema anterior resulta que

$$|\mathcal{P}(A)| = |\mathcal{F}(A, \{0, 1\})| = 2^n.$$

Ejemplo 9 *¿Qué número es mayor, 40^{50} o $2^{40 \cdot 50} = 2^{2000}$? ¿Cómo se comparan los números m^n y $2^{m \cdot n}$, en general?*

Recordemos que, dados dos conjuntos A y B, cualquier subconjunto de $A \times B$ define una ***relación*** *de A en B; y que una función $f \colon A \to B$ es una relación de A en B en la que cada elemento de A aparece exactamente una vez como la primer componente de un par ordenado en la relación.*

En particular,

$$\mathcal{F}(A, B) \subset \mathcal{P}(A \times B),$$

y por lo tanto

$$|\mathcal{F}(A, B)| \leq |\mathcal{P}(A \times B)|.$$

Si $|A| = n$ y $|B| = m$, entonces $|\mathcal{F}(A, B)| = m^n$ y $|\mathcal{P}(A \times B)| = 2^{mn}$, por lo que se obtiene que

$$m^n \leq 2^{mn}.$$

Definamos, por fin, qué es formalmente una *permutación.*

Definición 3

Sea A un conjunto de n elementos y sea $r \leq n$. Llamaremos ***permutación*** *o* ***disposición lineal ordenada*** *de r elementos de A a cualquier función inyectiva $f\colon [\![1, r]\!] \to A$.*

Será habitual identificar una permutación f con la r-upla $(f(1), \cdots, f(r)) \in A^r$.

Si $r = n$, decimos que f es una permutación de n elementos.

Definición 4

- *Para $1 \leq r \leq n$, indicamos con $P(n, r)$ al número total de permutaciones distintas de r elementos de un conjunto A (cualquiera) de cardinal n.*
- *El* ***número de permutaciones de n elementos*** *es $P(n) = P(n, n)$.*
- *Definimos $P(n, 0) = 1$.*

Obtendremos el valor de $P(n, r)$ (en función de n y r) como corolario del siguiente teorema. La siguiente notación nos será de utilidad:

$\mathcal{F}_i(A, B) = \{f \in \mathcal{F}(A, B) : f \textit{ inyectiva}\}$ y $\mathcal{F}_b(A, B) = \{f \in \mathcal{F}(A, B) : f \textit{ biyectiva}\}$.

Teorema 4 *Si A y B son dos conjuntos tales que $|A| = n$, $|B| = m$, y $n \leq m$ entonces*

$$|\mathcal{F}_i(A, B)| = \frac{m!}{(m-n)!}.$$

Demostración: Sea $A = \{a_1, \cdots, a_n\}$, y sea $f \in \mathcal{F}_i(A, B)$. Identificando a f con la n-upla $(f(a_1), \cdots, f(a_n)))$, la inyectividad de la función implica que solo hay

- m valores posibles para $f(a_1)$,
- $m - 1$ valores posibles para $f(a_2)$ (una vez fijado $f(a_1)$),
- $\cdots$
- $m - (n - 1)$ valores posibles para $f(a_n)$ (fijados $f(a_1), \cdots, f(a_{n-1})$).

Luego, $|\mathcal{F}_i(A,B)| = m(m-1)(m-2)\cdots(m-(n-1)) = \frac{m!}{(m-n)!}$. ∎

Corolario 3

i) $P(n) = n!$ *y* $P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$.

ii) *Si* $|A| = |B| = m$, *entonces* $|\mathcal{F}_b(A,B)| = m!$.

Ejemplo 10

1. *Queremos saber cuántas banderas se pueden hacer con tres bandas verticales de colores rojo (R), blanco (B), azul (Az), verde (V) o amarillo (Am), si se permiten dos o más franjas del mismo color. Para cada posible disposición:*

$$\underline{1^\circ\ \text{color}}\ \underline{2^\circ\ \text{color}}\ \underline{3^\circ\ \text{color}} \quad \longleftrightarrow \quad f\colon \{1,2,3\} \to \{R, B, Az, V, Am\}$$

   Luego, por teorema 3:

$$\begin{array}{ccc} & & \textit{Cantidad de banderas} \\ \underline{5}\times\underline{5}\times\underline{5} & \longleftrightarrow & |\mathcal{F}(\{1,2,3\},\{R,B,Az,V,Am\})| = 5^3 = 125. \end{array}$$

2. *Queremos saber ahora cuántas banderas se pueden hacer con tres bandas verticales de colores rojo, blanco, azul, verde o amarillo, si NO se permiten dos o más franjas del mismo color.*

$$\underline{1^\circ\ \text{color}}\ \underline{2^\circ\ \text{color}}\ \underline{3^\circ\ \text{color}} \quad \longleftrightarrow \quad f\colon \{1,2,3\} \to \{R, B, Az, V, Am\}$$

   Luego, por teorema 4:

$$\begin{array}{ccc} & & \textit{Cantidad de banderas} \\ \underline{5}\times\underline{4}\times\underline{3} & \longleftrightarrow & |\mathcal{F}_i(\{1,2,3\},\{R,B,Az,V,Am\})| = \frac{5!}{(5-3)!} = 60. \end{array}$$

3. *Si en un colectivo hay* 10 *asientos vacíos, ¿de cuántas maneras distintas pueden sentarse 7 personas?*

$$|\mathcal{F}_i([\![1,7]\!],[\![1,10]\!])| = \frac{10!}{(10-7)!} = 604800.$$

Ejemplo 11 *¿Cuántos números capicúas de cinco dígitos hay?*

Si bien pensar a las disposiciones como funciones formaliza nuestros planteos, no siempre es fácil definirlas. También es válido razonar con un esquema.

$$\textit{número capicúa}: \quad xyzyx, \quad \forall x \in [\![1,9]\!],\ \forall y,z \in [\![0,9]\!].$$

Por lo tanto, hay $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$ *números capicúas de 5 dígitos.*

Ahora que hemos formalizado el concepto, veamos cómo podemos aplicarlo a diversas situaciones, a saber: cuando se repiten los objetos a permutar y cuando la disposición es *circular* en lugar de lineal.

Analicemos qué ocurre si quisiéramos permutar ahora las letras de una palabra donde hay letras repetidas.

Ejemplo 12

1. *Consideremos todos los ordenamientos distintosde las letras de la palabra CASA. Si las letras A fueran distinguibles una de otra, digamos* CA_1SA_2*, claramente tendríamos* $P(4) = 4! = 24$ *ordenamientos (es decir, permutaciones) diferentes. Pero considerando indistinguibles a las dos letras A, dos permutaciones antes distintas se asocian a un único ordenamiento, como indica la siguiente tabla.*

$$\begin{array}{cc|c}
CSA_1A_2 & CSA_2A_1 & CSAA \\
A_1CSA_2 & A_2CSA_1 & ACSA \\
A_1A_2CS & A_2A_1CS & AACS \\
SA_1A_2C & SA_2A_1C & SAAC \\
CA_1SA_2 & CA_2SA_1 & CASA \\
A_1SA_2C & A_2SA_1C & ASAC \\
SA_1CA_2 & SA_2CA_1 & SACA \\
A_1CA_2S & A_2CA_1S & ACAS \\
SCA_1A_2 & SCA_2A_1 & SCAA \\
A_1SCA_2 & A_2SCA_1 & ASCA \\
A_1A_2SC & A_2A_1SC & AASC \\
CA_1A_2S & CA_2A_1S & CAAS
\end{array}$$

   En este caso, tenemos un par de letras repetidas y podemos ver que se pueden realizar 12 ordenamientos distintas. Es decir,

$$\textit{Cant. de disposiciones lineals de 4 elementos, con dos elementos repetidos} = \frac{4!}{2}.$$

2. *Supongamos ahora que queremos reordenar las letras de la palabra BANANA. Si razonamos como en el ejemplo anterior, suponiendo primero que las tres letras son distinguibles,* $BA_1N_1A_2N_2A_3$*, tendríamos* $6!$ *permutaciones. Ahora bien, ¿cuántas de estas disposiciones son en realidad las mismas, si las letras son indistinguibles? Con respecto a la letra A, las* $3!$ *formas de combinar las tres letras A corresponden a*

la misma combinación:

$$\begin{array}{lcl} BA_1N_1A_2N_2A_3 & & \\ BA_1N_1A_3N_2A_2 & & \\ BA_2N_1A_3N_2A_1 & \longrightarrow & BAN_1AN_2A \\ BA_2N_1A_1N_2A_3 & & \\ BA_3N_1A_2N_2A_1 & & \\ BA_3N_1A_1N_2A_2 & & \end{array}$$

Con respecto a la letra N, las $2!$ *formas de combinar las dos letras N corresponden a la misma combinación:*

$$BAN_1AN_2A, BAN_2AN_1A \longrightarrow BANANA.$$

Por lo tanto, la cantidad de permutaciones de letras de la palabra BANANA, donde hay 3 letras A y 2 letras N, es:

$$\textit{número de disposiciones de las letras BANANA} \;=\frac{6!}{3!2!}.$$

En general:

Si existen n objetos con n_1 de un primer tipo, n_2 de un segundo tipo, ..., y n_r de un r-ésimo tipo, donde $n_1+n_2+\cdots+n_r=n$ y los objetos del mismo tipo son indistinguibles, entonces existen $\dfrac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}$ disposiciones lineales distintas de los n objetos.

Ejemplo 13 *Determinar el número de trayectorias escalonadas del plano xy del punto* $(2,1)$ *al* $(7,4)$*, entendiendo por trayectoria escalonada a aquellas formadas por escalones individuales que van una unidad hacia la derecha (D) o una unidad hacia arriba (A).*
Notemos que cada trayectoria consta de 5 movimientos hacia la derecha y 3 hacia arriba (DDADADAD es un camino posible). Luego, la cantidad de trayectoria corresponde a la cantidad de disposiciones lineales con repeticiones de 5 letras D y 3 letras A, y esto se obtiene realizando el cálculo $\frac{8!}{5!3!}=56$.

Un caso especial es el de las **disposiciones circulares**, esto es, en vez de ubicar los elementos en fila, lo hacemos de forma circular.

Ejemplo 14 *Supongamos que queremos designar los lugares de 6 personas A, B, C, D, E y F alrededor de una mesa circular.*

1. *Si las disposiciones fueran lineales, claramente tendríamos* $6!$ *formas diferentes de realizar las disposiciones. Ahora bien, si la disposición es alrededor de una mesa circular las siguientes disposiciones serán indistinguibles:*

$$ABCDEF,\ BCDEFA,\ CDEFAB,\ DEFABC,\ EFABCD,\ \text{ y } FABCDEF.$$

   O sea que 6 disposiciones lineales corresponden a una misma disposición circular, ya que dos disposiciones circulares serán idénticas si podemos obtener una de la otra mediante una rotación. Podemos deducir entonces que existen $\frac{6!}{6} = 5! = 120$ *disposiciones de A, B, C, D, E y F alrededor de una mesa redonda.*

2. *Otra forma de resolver este mismo problema, es plantear que fijamos la letra A en un lugar determinado (que luego será, eventualmente, cualquier lugar alrededor de la mesa). Observemos que podemos ocupar los lugares que faltan ubicando de manera lineal las 5 letras restantes y esto puede hacerse de* $5! = 120$ *maneras diferentes.* ***Haber fijado una letra, transformó el problema de las disposiciones circulares en un problema de disposiciones lineales.***

3. *Supongamos ahora que las 6 personas que deseamos ubicar alrededor de la mesa son 3 mujeres y 3 hombres, y queremos ubicarlas alternando los sexos.*
   Tenemos entonces M_1, M_2, M_3 *y* H_1, H_2 *y* H_3. *Podemos proceder según el método anterior y fijar una letra cualquiera, digamos* M_3. *Pero entonces tenemos 3 opciones (a elegir entre* H_1, H_2 *y* H_3*) para el siguiente lugar, dos opciones (a elegir entre* M_1 *y* M_2*) para el tercero, y así sucesivamente...*
   O sea que una vez bien planteado el problema, lo resolvemos mediante la regla del producto y tenemos por lo tanto

$$3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 12$$

   maneras diferentes de sentar a las seis personas alrededor de la mesa redonda alternando los sexos.

3 Combinaciones. El Binomio de Newton.

La baraja francesa es un conjunto de cartas (o naipes), formado por 52 unidades repartidas en cuatro palos: corazones (C), diamantes (D), tréboles (T) y picas (P). Cada palo tiene 13 cartas: A,$2, 3, \cdots, 9, 10$, J, Q y K.

Si nos piden sacar tres cartas, una tras otra, sin reponerlas ni sustituirlas en el mazo, ¿cuántos resultados distintos podemos obtener?

Si nos importara el orden en que sacamos las cartas, el número de resultados diferentes sería $52 \cdot 51 \cdot 50 = P(52,3)$.

Pero si fuera indistinto el orden en que se eligen las cartas y solo importara *qué* cartas se eligieron, entonces las $P(3) = 3! = 6$ permutaciones posibles de las cartas extraídas corresponderían al mismo resultado. Sacar las cartas AD, $3P$ y $5C$ en ese orden otorga el mismo conjunto de cartas que si las sacamos en cualquier otro orden, como $AD-5C-3P$, $3P-AD-5C$, $3P-5C-AD$, $5C-3P-AD$ o $5C-AD-3P$.

Luego, la cantidad de formas diferentes que tenemos de extraer 3 cartas *sin importar el orden* es de $\frac{P(52,3)}{3!} = \frac{52!}{49!3!}$.

Definición 5 *Dados n objetos distintos, una* ***combinación*** *de r de estos objetos (con $1 \leq r \leq n$) es todo* ***subconjunto (no ordenado)*** *de cardinal r del conjunto formado por los n objetos.*

Al número total de distintas combinaciones de r objetos tomados de entre n objetos distintos lo simbolizamos

$$C(n,r).$$

Como lo hicimos con el ejemplo anterior de las tres cartas, notemos que existen $r!$ formas distintas de permutar los elementos de una combinación de r elementos tomados de un conjunto de n elementos distintos. Se deduce entonces que

$$C(n,r) = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}, \qquad 0 \leq r \leq n.$$

El número $\frac{n!}{(n-r)!r!}$ (para dados n y r) reviste de gran importancia y uso también en otras áreas de la Matemática además de la Combinatoria.

Definición 6 *Dados $n \in \mathbb{N}_0$ y $r \in \mathbb{N}_0$ tal que $0 \leq r \leq n$, se denomina* ***número combinatorio n, r*** *o* ***coeficiente binomial****, y se lo denota $C(n,r)$ o $\binom{n}{r}$, al número definido por*

$$C(n,r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}.$$

Resulta entonces que, si $1 \leq n$, el número combinatorio $\binom{n}{r}$ nos dice la cantidad de formas distintas que tenemos de elegir r elementos tomados de entre n elementos, **sin considerar el orden**.

Nota 3 *En adelante, será* ***fundamental*** *preguntarnos a la hora de plantear un problema, si* ***importa el orden, o no****.*

Ejemplo 15

1. *En una escuela secundaria, la profesora de gimnasia debe elegir a nueve estudiantes de segundo y tercer año para el equipo de voley femenino. Si hay 28 estudiantes en segundo y 25 en tercero, ella puede hacer la elección de* $\binom{53}{9} = 4.431.613.550$ *formas.*

2. *Supongamos ahora que la profesora debe formar cuatro equipos, de 9 integrantes cada uno, con las 36 estudiantes de su curso de primer año. ¿De cuántas formas puede elegir estos equipos?*

   Supongamos que denominamos a los equipos por A, B, C y D. Para armar el equipo A cuenta con $\binom{36}{9}$ *formas de elegir. A la vez, por cada una de esas formas, quedan ahora 27 estudiantes y puede elegir de* $\binom{27}{9}$ *formas para el equipo B. Nuevamente, por cada una de estas opciones, tenemos ahora* $\binom{18}{9}$ *posibles elecciones para el equipo C y finalmente restan* $\binom{9}{9} = 1$ *para el equipo D.*

   Por la regla del producto, resulta que la profesora puede elegir los cuatro equipos de

   $$\binom{36}{9} \cdot \binom{27}{9} \cdot \binom{18}{9} \cdot \binom{9}{9} = \frac{36!}{9!27!} \cdot \frac{27!}{9!18!} \cdot \frac{18!}{9!9!} \cdot \frac{9!}{9!0!} = \frac{36!}{9!9!9!9!}$$

   formas.

3. *Otra forma de plantear el caso anterior es la siguiente. Alineamos a los 36 estudiantes:*

1°	2°	$\cdots$	35°	36°
estudiante	estudiante	$\cdots$	estudiante	estudiante

   Para seleccionar los 4 equipos podemos distribuir las letras A, B, C y D en los 36 espacios. O sea, debemos realizar disposiciones de 36 letras donde 4 de ellas se repiten 9 veces. Sabemos que esto se calcula por $\frac{36!}{9!9!9!9!}$.

Cadenas: En teoría de códigos y de lenguaje de computación, se consideran ciertas disposiciones llamadas *cadenas*, formadas a partir de un *alfabeto* que consta de determinados símbolos.
Si el alfabeto consta de los símbolos 0, 1 y 2, entonces 01, 11, 21 y 20 son cuatro de las

nueve cadenas de *longitud dos*. Posibles cadenas de entre las 27 de longitud 3 son: 000, 012 o 202.

En general, si n es un entero positivo, por la regla del producto existen 3^n cadenas de longitud n para el alfabeto $0, 1$ y 2. Si $x = x_1 x_2 \cdots x_n$ es una de estas cadenas, definimos el *peso* de x, que se denota $wt(x) = x_1 + \cdots + x_n$. Por ejemplo $wt(12) = 3$, $wt(210) = 3$ y $wt(101) = 2$.

Entre las 3^{10} cadenas de longitud 10, queremos determinar el número de ellas que tengan peso par. Observemos que esto depende sólo del número de símbolos 1 que contenga. Completemos entonces la siguiente tabla para realizar el conteo:

Nro. de «1»	**Nro. de cadenas**	**Explicaciones**
0	2^{10}	Cada posición puede ser ocupada por 0 o 2
2	$\binom{10}{2} \cdot 2^8$	Podemos elegir las posiciones de los 1 de $\binom{10}{2}$ formas, y por cada una de ellas habrá 2^8 formas de ubicar 0 y 2.
4	$\binom{10}{4} \cdot 2^6$	
6	$\binom{10}{6} \cdot 2^4$	
8	$\binom{10}{8} \cdot 2^2$	
10	$\binom{10}{10}$	

Luego, por la regla de la suma, el número de cadenas de longitud 10 que tienen peso par es:

$$2^{10} + \binom{10}{2} \cdot 2^8 + \binom{10}{4} \cdot 2^6 + \binom{10}{6} \cdot 2^4 + \binom{10}{8} \cdot 2^2 + \binom{10}{10} = \sum_{k=0}^{5} \binom{10}{2k} \cdot 2^{10-2k}.$$

Ejemplo 16 ***Un error muy escurridizo...***
Supongamos que queremos extraer 5 cartas de una baraja francesa.

- *¿Cuántas selecciones de cartas existen si pedimos que no hayan tréboles en la elección?*

  En este caso, tendremos que pensar en las combinaciones de todas las cartas menos los tréboles ($52 - 13 = 39$)*, esto es* $\binom{39}{5} = 575.757$.

- *¿Cuántas selecciones son posibles si pedimos que en el conjunto de 5 cartas haya AL MENOS un trébol?*

Claramente, estas opciones son las que no se consideraron en el apartado anterior, luego tenemos

$$\binom{52}{5} - \binom{39}{5} = 2.598.960 - 575.757 = 2.023.203$$

posibilidades.

- *Supongamos ahora que, para contestar la misma pregunta del ejercicio anterior, hacemos el siguiente razonamiento:*
  Como queremos tener al menos un trébol en la mano, contamos primero esta posibilidad, que puede hacerse de $\binom{13}{1}$ formas. Sabiendo ya que tenemos un trébol, el resto de las posibilidades son $\binom{51}{4}$. Por la regla del producto, la cantidad de opciones son:

  $$\binom{13}{1} \cdot \binom{51}{4} = 13 \cdot 249.900 = 3.248.700.$$

  ¡Pero esto difiere en más de un millón de posibilidades respecto de la respuesta anterior!

  El error está en el segundo razonamiento, ya que las siguientes opciones:

  3T - 5T 3C QD AC y 5T - 3T 3C QD AC

  son distintas en este razonamiento, pero son idénticas en lo que de verdad nos concierne. Es decir que estamos contando de más...

- *Una forma de contar esta situación de un modo parecido al anterior, PERO CORRECTO, es:*

N° de ♣	***N° de formas de selecc. este n°. de ♣***	***N° de cartas que NO son ♣***	***N° de formas de selec. este n° de NO ♣***
1	$\binom{13}{1}$	4	$\binom{39}{4}$
2	$\binom{13}{2}$	3	$\binom{39}{3}$
3	$\binom{13}{3}$	2	$\binom{39}{2}$
4	$\binom{13}{4}$	4	$\binom{39}{1}$
5	$\binom{13}{5}$	0	$\binom{39}{0}$

La suma de estas posibilidades es $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} \binom{13}{i}\binom{39}{5-i} = 2.023.203.$

Veamos ahora algunas propiedades del **número combinatorio** $\displaystyle\binom{n}{r}$.

Proposición 1 *Sean $r \leq n$ dos enteros no negativos. Entonces:*

1. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.
2. $\binom{n}{1} = n$.
3. $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$.
4. $\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r}$ *(Triángulo de Pascal).*

Demos. Ejercicio. ■

Una aplicación interesante del item 4 de esta proposición es la configuración del Triángulo de Pascal:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & \binom{0}{0} & & & & & & \\
 & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & & \\
 & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & & \\
 & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & & \\
 & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & \\
 & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} & \\
\binom{6}{0} & & \binom{6}{1} & & \binom{6}{2} & & \binom{6}{3} & & \binom{6}{4} & & \binom{6}{5} & & \binom{6}{6}
\end{array}
$$

Que, resolviendo los números combinatorios nos da:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}
$$

Estos números aparecen en las sucesivas potencias de la suma de dos números cualesquiera:

$$
\begin{array}{rcl}
(x+y)^2 & = & x^2 + 2xy + y^2 \\
(x+y)^3 & = & x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \\
(x+y)^4 & = & (x+y)^3(x+y) = (x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3)(x+y) \\
 & = & (x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3)x + (x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3)y \\
 & = & x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4
\end{array}
$$

y, en general vale el siguiente teorema:

Teorema 5 ***(El teorema del binomio de Newton)*** *Sean x, $y \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}_0$. Entonces*

$$\begin{aligned}(x+y)^n &= \binom{n}{0}x^n y^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}y^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}x^1 y^{n-1} + \binom{n}{n}x^0 y^n \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k.\end{aligned}$$

Demostración: Haremos la demostración por inducción en n:

- El caso $n = 1$ se verifica fácilmente, pues $(x+y)^1 = x + y = \binom{1}{0}x + \binom{1}{1}y$.
- Supongamos que $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}$. Queremos probar entonces que $(x+y)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^k y^{n+1-k}$.

$$\begin{aligned}(x+y)^{n+1} &= (x+y)^n(x+y) = (x+y)^n x + (x+y)^n y \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}\right)x + \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}\right)y \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k+1}y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}x^k y^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k+1} \\ &= \binom{n}{n}x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right]x^k y^{n-k+1} + \binom{n}{0}y^{n+1} \\ &= \binom{n+1}{0}x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}x^k y^{n-k+1} + \binom{n+1}{n+1}y^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^k y^{n-k+1}.\end{aligned}$$

■

Ejemplo 17 *El coeficiente de x^5y^2 en el desarrollo de $(x+y)^7$ es $\binom{7}{5} = \binom{7}{2} = 21$. El coeficiente de a^5b^2 en el desarrollo de $(2a-3b)^7$ es $\binom{7}{5}(2)^5(-3)^2 = 6.048$.*

Nota 4 *Notemos que si se aplica la propiedad distributiva (del producto respecto a la suma) para desarrollar completamente el lado derecho de la expresión*

$$(x+y)^n = (x+y)(x+y)\cdots(x+y),$$

se obtienen 2^n sumandos (no todos distintos, debido a la propiedad conmutativa) con n factores x o y cada uno, es decir, sumandos de la forma $x^k y^{n-k}$ para algún $k \in \{0, 1 \ldots, n\}$. El teorema anterior afirma que son exactamente $\binom{n}{k}$ los sumandos de la forma $x^k y^{n-k}$.

Use el teorema anterior (eligiendo convenientemente valores para x e y) para demostrar las siguientes propiedades del número combinatorio.

Corolario 4

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = 0.$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$

El siguiente resultado generaliza el Teorema 5 (¿por qué?). Se deja su demostración como ejercicio.

Teorema 6 *Sean $n_1, \cdots, n_r \in \mathbb{N}_0$ tales que $n_i \leq n$, $i = 1, \cdots, r$ y $n_1 + \cdots + n_r = n$. Entonces el coeficiente de $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_r^{n_r}$ en el desarrollo de $(x_1 + x_2 + \cdots + x_r)^n$ es*

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_r!}.$$

4 Combinaciones con repetición: Distribuciones.

Cuando se permiten las repeticiones, hemos visto que, para n objetos distintos, una disposición de tamaño r de estos objetos puede obtenerse de n^r formas, para un entero $r \geq 0$. Ahora analizaremos el problema comparable para las combinaciones y de nuevo obtendremos un problema relacionado con el anterior cuya solución se sigue de las reglas de conteo anteriores.

Ejemplo 18

1. *Siete amigos van a cenar a un restaurante donde hay 4 menúes fijos entre los cuales pueden elegir. ¿Cuántas compras diferentes son posibles?*
   Observemos que nos interesa el número de menúes de cada tipo que se encarguen sin importar el orden en que se encarguen.

Veamos algunas posibles representaciones del pedido (cada número corresponde a un menú):

a) $1, 1, 2, 2, 3, 3, 4$
b) $1, 1, 1, 2, 2, 2, 4$
c) $1, 2, 2, 4, 4, 4, 4.$

No podemos decir que estamos haciendo combinaciones de 28 elementos tomados de a 7 ya que entre estos 28 elementos hay muchos repetidos... Tampoco son permutaciones con repeticiones pues no me interesa el orden en que pida los menúes...
Busquemos entonces otra forma de representar los mismos pedidos que antes:

a) $x\,x\,|\,x\,x\,|\,x\,x\,|\,x$
b) $x\,x\,x\,|\,x\,x\,x\,|\,|\,x$
c) $x\,|\,x\,x\,|\,|\,x\,x\,x\,x.$

donde los x a la izquierda de la primera barra representan el primer menú, y así sucesivamente.
En este caso, podemos notar que cada posible pedido es una disposición lineal de letras «x» y barras «$|$». O sea debemos contar la cantidad de formas de disponer 10 letras donde hay 7 x y 3 barras. Es decir, tenemos $\frac{10!}{7!3!} = \binom{10}{3}$ formas diferentes de encargar el pedido.

2. *¿De cuántas formas podemos distribuir siete manzanas y seis naranjas entre cuatro niños de modo de que cada uno reciba al menos una manzana?*

   Si cada niño recibe una manzana, en realidad debemos repartir 3 manzanas y 6 naranjas entre los 4 niños.

$$\textit{Opciones de reparto de manzanas: } m|m|m|,\ mm||m|,\ ||m|mm \to \frac{6!}{3!3!} = 20$$

$$\textit{Opciones de reparto de naranjas: } nn|n|n|nn,\ nnn||n|nn,\ nnn|n|n|n \to \frac{9!}{6!3!} = 84$$

   Por la regla del producto, podemos distribuir las frutas de $20 \cdot 84$ formas diferentes.

En general...

Si X es un conjunto con n elementos distintos, y queremos elegir r pero tenemos la posibilidad de repetir objetos en la elección, estamos considerando todas las disposiciones de r letras x y $n-1$ barras $|$, que se calcula: $\frac{(r+n-1)!}{r!(n-1)!} = \binom{n+r-1}{r}$.
Luego, el número de combinaciones de r objetos tomados de X permitiendo **repeticiones** es $C(r+n-1, r)$.

Nota 5 *En el ejemplo 18,* $r = 7$ *y* $n = 4$*. es decir que cuando trabajamos con combinaciones con repeticiones puede ser* $r > n$*. Pero observemos que en la forma de calcularlas, a través del número combinatorio* $n + r - 1 \geq r$ *siempre, como debe ser.*

Ejemplo 19 *Soluciones enteras no negativas de ecuaciones:*

1. *Queremos determinar la cantidad de soluciones enteras no negativas de la ecuación*

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7, \quad x_i \geq 0 \; \forall\, i = 1, \cdots, 4.$$

Podríamos pensar que resolver esa ecuación en el conjunto de los naturales y el cero, es equivalente a disponer 7 elementos entre 4 casilleros (delimitados por 3 barras), donde estos elementos son exactamente iguales (a una unidad). Luego tendremos $C(7 + 4 - 1, 7) = \frac{10!}{7!3!} = 120$ *soluciones.*

Notemos que hubiera sido lo mismo preguntarnos de cuántas formas podemos distribuir 7 canicas en 4 recipientes.

2. *Supongamos que nos preguntamos ahora cuántas soluciones enteras no negativas hay de la inecuación*

$$x_1 + \cdots + x_6 < 10.$$

Pero esto es equivalente a preguntarnos cuántas soluciones no negativas hay de la ecuación

$$x_1 + \cdots + x_6 + x_7 = 10 \quad \text{con } x_7 > 0.$$

O bien cuántas soluciones no negativas hay de la ecuación

$$y_1 + \cdots + y_6 + y_7 = 9 \quad \text{donde } \; y_i = x_i,\; i = 1, \cdots, 6 \;\text{ e }\; y_7 = x_7 - 1$$

Por lo analizado antes sabemos que las soluciones de esta ecuación son $\frac{(9+6)!}{9!6!} = 5005.$

5 El principio del palomar, o de las casillas, o de las cajas, o de Dirichlet, o...

Para finalizar, presentaremos una de las herramientas teóricas más conocidas de la combinatoria (¡y con más nombres populares!), el *principio del palomar.* Este principio establece, en particular, que si hay 9 casillas en un palomar y 10 palomas, en al menos una casilla hay más de una paloma.

En general, el principio establece que si hay n objetos para ser ubicados en m lugares, y $n > m$, entonces nos veremos obligados a situar en alguno de los lugares más de un objeto.

Para dar un enuncicado más preciso y formal recurriremos nuevamente a la funciones entre conjuntos finitos.

Teorema 7 ***(Principio del palomar.)*** *Sean $m, n \in \mathbb{N}$ tales que $n > m$. Entonces no existe ninguna función inyectiva $f\colon [\![1, n]\!] \to [\![1, m]\!]$.*

Demostración: Definamos el conjunto

$$H = \{n \in \mathbb{N} \colon \text{existe función inyectiva } f\colon [\![1, n]\!] \to [\![1, m]\!], \text{ para algún } m \in \mathbb{N} \text{ tal que } n > m\}.$$

Debemos probar que $H = \emptyset$. Por el contrario, supongamos que esto no ocurre, es decir, que H es un subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$. Luego, por el principio del buen orden, debe existir un primer elemento de H, digamos $h \in H$. Entonces, por definición de H, existe un $m < h$ y una $f\colon [\![1, h]\!] \to [\![1, m]\!]$ que es inyectiva.
Llamando $c = f(h)$, definimos la siguiente función

$$g\colon [\![1, m]\!] \to [\![1, m]\!], \text{ tal que } g(i) = \begin{cases} i, & \text{si } i \neq c, i \neq m \\ m, & \text{si } i = c \\ c, & \text{si } i = m \end{cases}.$$

Claramente g es biyectiva. Además para todo $i \in [\![1, h-1]\!]$, $f(i) \neq c$. Luego $g(f(i)) \neq m$. Luego, si definimos la función j en $[\![1, h-1]\!]$ por $j(i) = g(f(i))$, resultará que $j(i) \in [\![1, m-1]\!]$. Hemos encontrado entonces una función inyectiva $j\colon [\![1, h-1]\!] \to [\![1, m-1]\!]$ donde $m - 1 < h - 1$. Pero entonces $h - 1 \in H$ y por ende h no es el primer elemento del conjunto. Esta contradicción proviene de suponer que $H \neq \emptyset$. Luego $H = \emptyset$. ∎

En otras palabras, el teorema nos dice expresamente que **si quisiéramos ubicar n objetos en m casillas, entonces tendremos que poner más de un elemento en alguna de las casillas**.

Ejemplo 20

1. *Dadas 13 personas, hay dos que cumplen años el mismo mes.*
2. *En un conjunto A de $m \geq 2$ personas, existen dos personas con el mismo números de amigos (en A).*

   Vamos a convenir que a es amigo de a para todo $a \in A$. Además, notemos que

   $$a \text{ es amigo de } b \Leftrightarrow b \text{ es amigo de } a.$$

   Luego, si $f(x) :=$número de amigos de x en A, *resulta que:*

- *Si alguien tiene m amigos, entonces nadie puede tener un solo amigo y* $f\colon A \to [\![2, m]\!]$.
- *Si nadie tiene m amigos, entonces* $f\colon A \to [\![1, m-1]\!]$.

En ambos casos, resulta que, por el principio de las casillas f no puede ser inyectiva y, por lo tanto existen dos personas que tienen la misma cantidad de amigos en A.

Corolario 5 *Si $n \neq m$, no existe $f\colon [\![1, n]\!] \to [\![1, m]\!]$ biyectiva.*

Corolario 6 *Una función $f\colon [\![1, n]\!] \to [\![1, n]\!]$ es inyectiva si y solo si es sobreyectiva.*

Referencias

[1] R.Grimaldi, *Matemáticas Discreta y Combinatoria - Una introducción con aplicaciones*, 3^{ra} ED, Addison Wesley Longman, Argentina.

[2] R. Johnsonbaugh, *Matemáticas Discretas*, 4^{ta} ED, Pearson, México.