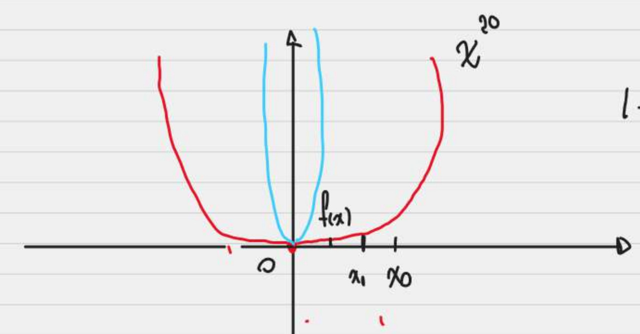


$|f(x)| < \varepsilon$

Def: g es contractiva en $[a,b]$ si
$a \le x \le b \Rightarrow a \le g(x) \le b$

Buscamos x / $g(x) = f(x)$

$2^x = \cos(x) + x$

$2^x - \cos(x) = x$

$e^x = x^2 + x - x$

6) Se quiere calcular la solución de la ecuación $e^x = 3x$, usando la iteración simple de punto fijo con diferentes funciones de iteración:

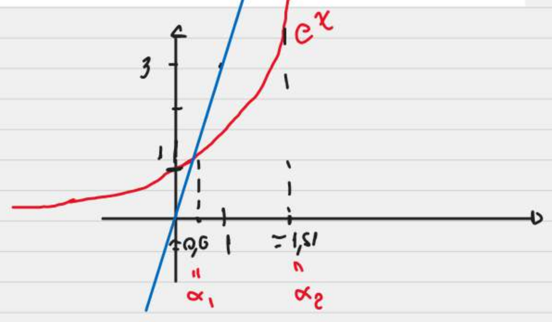
i) $g_1(x) = \dfrac{e^x}{3}$ ii) $g_2(x) = \dfrac{e^x - x}{2}$ iii) $g_3(x) = \log(3x)$ iv) $g_4(x) = e^x - 2x$

¿Cuáles son útiles para calcular la solución de la ecuación?

$e^x = 3x$

i) $g_1(x) = \dfrac{e^x}{3}$

$e^x = 3x \iff \underbrace{\dfrac{e^x}{3}}_{g_1(x)} = x$ ✓



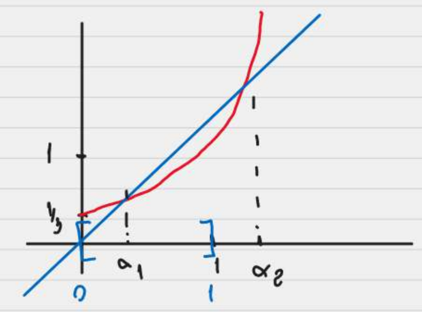
g_1 y punto α

$|g_1'(\alpha)| > 1$ no es útil para aprox. α

$|g_1'(\alpha)| < 1$ es útil

¿ existe $[a,b]$ /
- $a < x < b \Rightarrow a < g_1(x) < b$
- $\sup_{[a,b]} |g_1'(x)| < 1$?

- $g_1'(x) = \dfrac{e^x}{3}$



Si tomamos $[0,1]$, $x \in [0,1]$

$0 < \dfrac{e^0}{3} < g(x) < e^1/3 < 1$

$\therefore 0 < g(x) < 1$

$\sup_{[0,1]} |g'(x)| = |e^1/3| < 1$

$\therefore \forall x_0 \in [0,1]$, x_n converge a α_1

g_1 es útil para aprox. α_1

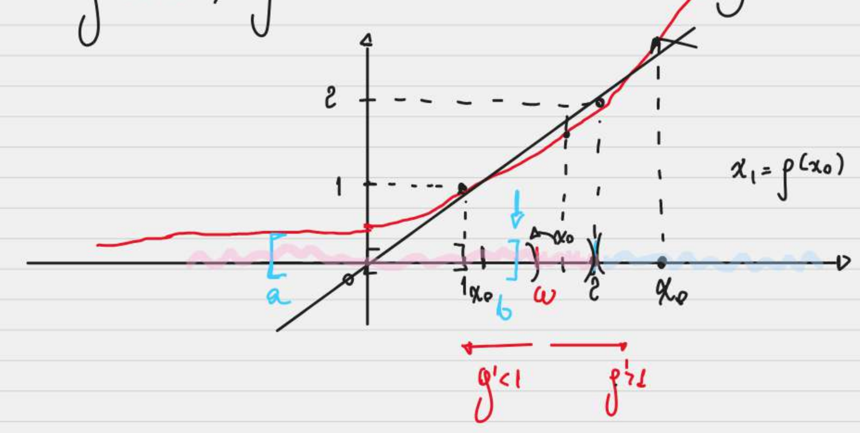
$|g'(\alpha_2)| = |e^{\alpha_2}/3| = e^{\alpha_2}/3 > e^{\overset{\text{gráfica}}{1,4}}/3 > 1$ $(\alpha_2 > 1)$

$\therefore |g'(\alpha_2)| > 1$

$\therefore g_2$ no es útil.

4) Consideramos la iteración $x_{k+1} = 2^{x_k - 1}$ para resolver la ecuación $2x = 2^x$. Determinar para que valores iniciales x_0 la iteración converge y en ese caso cual es el límite.

$g(x) = x$, $g(x) = 2^{x-1}$



- $x \in [a,b]$, $a < 0$ $a < 0 < 2^{x-1}$
- $g'(x) = 2^{x-1} \cdot \ln(2)$

$g'(x) < 1 \iff 2^{x-1} \cdot \ln(2) < 1$

$\iff 2^{x-1} < 1/\ln(2)$

$x - 1 < \log_2(1/\ln(2))$

$x < \log_2(1/\ln(2)) + 1 \simeq 1{,}5 = \omega$

- Sea $x_0 < \omega$. Sea $a < 0$, $a < x_0$, y sea $\omega > b > 1$, $x_0 < b$

Luego,
- $\sup_{[a,b]} |g'(x)| \overset{g'\text{ crec.}}{=} |g'(b)| < 1$ por $b < \omega$
- $a < x < b$, entonces $g(x) < g(b) = 2^{b-1} < b$

$a < 0 < 2^{a-1} = g(a) < g(x)$

$\therefore \forall x_0 \in [a,b]$, $x_n \to \alpha = 1$

Como $a < 0$ y $b > \omega$ son arbitrarios, se tiene $\forall x_0 \in (-\infty, \omega)$, $x_n \to \alpha = 1$

9) La presión requerida para sumergir un objeto grande y pesado en un terreno suave y homógeneo que se encuentra sobre una base dura, puede predecirse a partir de la presión requerida para sumergir objetos más pequeños en el mismo suelo.

En particular la presión p necesaria para sumergir una lámina circular de radio r una distancia d en un terreno suave, donde la base dura yace a una distancia $D > d$, puede aproximarse por una ecuación de la forma

→ $p = k_1 e^{k_2 r} + k_3 r$,

donde $k_i, i = 1, 2, 3$ dependen de d, pero no de r.

Recordar que la presión se obtiene de dividir la fuerza aplicada y el área correspondiente.

a) Encontrar los valores de k_i, $i = 1, 2, 3$, si se supone que una lámina circular de radio 1 pulgada requiere una presión de 10 libras/pulgada^2, para sumergirse 1 pie en un terreno suave, una lámina de radio 2 pulgadas requiere una presión de 12 libras/pulgada^2 para sumergirse 1 pie, y una lámina de 3 pulgadas de radio requiere 15 libras/pulgada^2 de presión para sumergirse esa distancia.

b) Usando los cálculos realizados en a), predecir el radio mínimo de una lámina circular que deberá sostener una carga de 500 libras de fuerza sumergiéndose menos de 1 pie.

- $r = 1$, $p = 10$, $D = 1$
- $r = 2$, $p = 12$, $D = 1$
- $r = 3$, $p = 15$, $D = 1$

$p = k_1 e^{k_2 r} + k_3 r$

$$\begin{cases} 10 = k_1 e^{k_2 \cdot 1} + k_3 \cdot 1 & (1) \\ 12 = k_1 e^{k_2 \cdot 2} + k_3 \cdot 2 & (2) \\ 15 = k_1 e^{k_2 3} + k_3 \cdot 3 & (3) \end{cases}$$

$F = 500$, $p = F/\text{área}$

$\dfrac{500}{\pi r^2} = k_1 e^{k_2 r} + k_3 r$ ← $p = \dfrac{500}{\pi \cdot r^2}$

1° Newton para aprox r

2° Newton mult.

$(0,0,0) = f(k_1, k_2, k_3)$

$f(k_1, k_2, k_3) = (k_1 e^{k_2 \cdot 1} + k_3 - 10,\ k_1 e^{2k_2} + 2k_3 - 12,\ k_1 e^{k_2 \cdot 3} + k_3 - 15)$

```
--> y = MetNewton(f2,[1,1,0]',1000,0.0001,2)
Warning :
matrix is close to singular or badly scaled. rcond = 3.3919E-09
Warning :
matrix is close to singular or badly scaled. rcond = 5.6141E-09

   1000.

 iteraciones:
 y  =

   8.7768728
   0.2605863
  -1.3896095
```

(1) $k_3 = 10 - k_1 e^{k_2}$ saco k_3

$$\begin{cases} (2)\ 12 = k_1 e^{2k_2} + 2(10 - k_1 e^{k_2}) \\ (3)\ 15 = k_1 e^{3k_2} + 3(10 - k_1 e^{k_2}) \end{cases} \iff \begin{cases} 12 = k_1 e^{2k_2} + 20 - 2k_1 e^{k_2} \\ 15 = k_1 e^{3k_2} + 30 - 3k_1 e^{k_2} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -8 = k_1 (e^{2k_2} - 2e^{k_2}) \\ -15 = k_1 (e^{3k_2} - 3e^{k_2}) \end{cases}$$ saco k_1

$\Rightarrow \dfrac{-8}{-15} = \dfrac{\cancel{k_1} (e^{2k_2} - 2e^{k_2})}{\cancel{k_1} (e^{3k_2} - 3e^{k_2})}$

$\Rightarrow 8(e^{3k_2} - 3e^{k_2}) - 15(e^{2k_2} - 2e^{k_2}) = 0$

Newton → k_2

3. Calcule los valores de x para los cuales la serie converge. Determine la suma de la serie para dichos valores de x.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-5)^n x^n$, c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{x^n}$, e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin^n(x)}{3^n}$.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-5)^n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-5)^{n+1} \cdot x^{n+1}$$

$$= (-5)x \cdot \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} (-5)^n x^n}_{} = (-5)x \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} (-5x)^n}_{\text{geométrica}}$$

Converge $\iff |-5x| < 1 \iff 5|x| < 1 \iff |x| < 1/5$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-5)^n x^n = (-5)x \sum_{n=0}^{+\infty} (-5x)^n = (-5)x \cdot \frac{1}{1 - (-5x)}$$

$$= \frac{-5x}{1 + 5x}.$$

3. Estudiar el carácter de las siguientes series en función de los valores posibles de los parámetros a y b, si los hay. En cada caso utilizar alguno de los criterios de convergencia para justificar la respuesta.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n + 1}$,

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|b|^n}{n(1 + a^n)}$, $a > 1$, $|b| \neq a$,

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{1 + n^2}$,

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$,

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{(n+2)(n+a)5^n}$, $a > 0$,

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{3^n - 1}$.

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$, con $a_n > 0$?
- $\{a_n\}$ decreciente
- $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$

entonces la serie converge

$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

$a_n = 1/\sqrt{n}$ decreciente y $a_n \to 0$ ✓

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{|b|^n}{n(1 + a^n)}}_{a_n}$, $a > 1$, $|b| \neq a$ (#)

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\dfrac{|b|^{n+1}}{(n+1)(1 + a^{n+1})}}{\dfrac{|b|^n}{n(1 + a^n)}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{|b|^{n+1} \cdot n(1 + a^n)}{|b|^n \cdot (n+1)(1 + a^{n+1})}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} |b| \cdot \underbrace{\frac{n}{n+1}}_{\to 1} \cdot \frac{1 + a^n}{1 + a^{n+1}} = \lim_{n \to +\infty} |b| \cdot \frac{n}{n+1} \cdot \frac{\cancel{a^n}(\overset{\to 0}{1/a^n} + 1)}{\cancel{a^n}(\underset{\to 0}{1/a^n} + a)}$$

$a > 1$, $a^n \to +\infty$

$= |b| \cdot 1 \cdot \dfrac{1}{a} = \dfrac{|b|}{a}$

Si $\dfrac{|b|}{a} < 1$, entonces la serie converge por c. del cociente

$\dfrac{|b|}{a} > 1$, entonces diverge.

$|b|/a = 1$ no puede ser por (#)