b) Utilizar el polinomio de Taylor de grado 10 de la función e^x para aproximar

a) e^{-2} b) $1/e^2$

empleando aritmética de punto flotante con redondeo a tres dígitos decimales. El valor correcto en 3 dígitos es 0,135. ¿Cuál es la mejor aproximación y por qué?

$0,\sqcup\sqcup\sqcup \times 10^{-}$

$e^{-2} = 1/e^2 = 0,135\ldots$

a) $e^{-2} \simeq \sum_{k=0}^{10} \frac{1}{k!}(-2)^k = 1 + \frac{(-2)^1}{1!} + \frac{(-2)^2}{2!} + \ldots$

- $1 = 0,1 \times 10^1$
- $0,1\times 10^1 + \frac{(-2)^1}{1!}$

$0,1^{\times 10^1} - 2 = 0,1\times 10^1 - 0,2\times 10^1$

$= -0,1 \times 10^1$

- $-0,1\times 10^1 + \frac{(-2)^2}{2!} = -0,1\times 10^1 + 2$

$= -0,1\times 10^1 + 0,2\times 10^1$

$0,1345\times 10^3$

$0,135\times 10^3$

b) $e^2 \simeq \sum_{k=0}^{10} \frac{1}{k!} 2^k$

e) $a_n = \frac{n!}{n^n}$,

Queremos ver $\frac{n!}{n^n} \leqslant \frac{1}{n}$

Inducción en n.

- $n=1$, $1/1 \leqslant 1/1$
- paso inducción. (HI) $\frac{n!}{n^n} \leqslant 1/n$

$\Leftrightarrow n! \leqslant \frac{n^n}{n} = n^{n-1}$

$\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n!\,(n+1)}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n!}{(n+1)^n} \underset{(HI)}{\leqslant} \frac{n^{n-1}}{(n+1)^n}$

$= \underbrace{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n-1}}_{\leqslant 1} \cdot \frac{1}{n+1}$

$\leqslant \frac{1}{n+1}$ ✓

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|b|^n}{n(1+a^n)}$, $a>1$, $|b|\neq a$,

$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{|b|^{n+1}}{(n+1)(1+a^{n+1})}}{\frac{|b|^n}{n(1+a^n)}}$

$= \lim_{n\to+\infty} \frac{|b|^{n+1}\, n\,(1+a^n)}{|b|^n\,(n+1)(1+a^{n+1})}$

$= \lim_{n\to+\infty} |b| \cdot \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1+a^n}{1+a^{n+1}}$ $a>1$

$= \lim_{n\to+\infty} |b| \cdot \frac{n}{n+1} \cdot \frac{\cancel{a^n}(1/a^n + 1)}{\cancel{a^n}(1/a^n + a)}$

$= |b| \cdot 1 \cdot \frac{1}{a} = \frac{|b|}{a}$ <1 la serie converge

>1 diverge

$a \neq |b|$ por ejerc.

f) $a_n = \frac{n^p}{e^n}$, $p>0$,

g) $a_n = \sqrt[n]{n}$.

f) $a_n = \frac{n^p}{e^n} = e^{p\cdot\ln(n) - n}$

$\lim_{n\to+\infty} p\cdot \underbrace{\ln(n)}_{+\infty} - \underbrace{n}_{+\infty} = \lim_{n\to+\infty} n\left(p\cdot\frac{\ln(n)}{n} - 1\right)$

$\overset{L'H}{=} \lim_{n\to+\infty} n\left(p\cdot\frac{1/n}{1} - 1\right) = -\infty.$

g) $a_n = \sqrt[n]{n} = n^{1/n}$

$= e^{1/n\cdot\ln(n)}$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n} \overset{L'H}{=} \lim_{n\to+\infty} \frac{1/n}{1} = 0$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$,

$\frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{A}{2n+1} + \frac{B}{2n+3}$

$= \frac{(2n+3)A + (2n+1)B}{(2n+1)(2n+3)}$

$= \frac{2n(A+B) + 3A + B}{}$

pedimos $\begin{cases} A+B=0 \\ 3A+B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-B \\ -2B=1 \end{cases} \Rightarrow B=-1/2$

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{(2n+1)}}_{a_n} - \frac{1}{(2n+3)}$

$\frac{1}{(2(n+1)+1)}$

$a_{n+1} = \frac{1}{(2(n+1)+1)} = \frac{1}{(2n+3)}$

$= \frac{1}{(2\cdot 1+1)} - \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+1} = 1/3$

$|r|<1$, $\sum_{n=0}^{+\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$

$S_n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$

$S = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-r^{n+1}}{1-r} = \frac{1}{1-r}$

$\sum_{n=1}^{+\infty} r^n = \frac{1}{1-r} - \overset{r^0}{1} = \frac{1-(1-r)}{1-r} = \frac{r}{1-r}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right)$,

$\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n$

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n - \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$

$= \frac{1/2}{1-1/2} - \frac{1/3}{1-1/3}$

$\int$ con. $|r|<1$ en ambos casos