Tema 6: EDPs parabólicas e hiperbólicas

Forma general de una ecuación diferencial en derivadas parciales de segundo orden en dos dimensiones y con coeficientes lineales:

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+f\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0$$

Podemos clasificar estas ecuaciones según los valores de A, B y C:

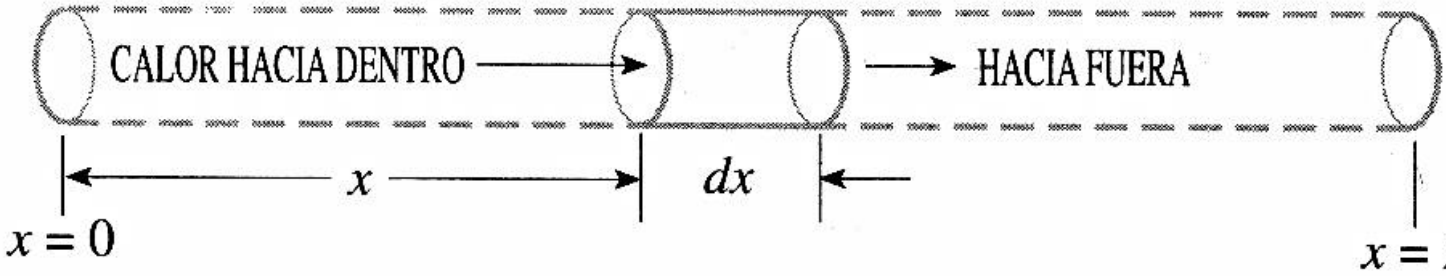
- Si $(B^2 - 4AC) < 0$, se denominan elípticas.
- Si $(B^2 - 4AC) = 0$, se denominan parabólicas.
- Si $(B^2 - 4AC) > 0$, se denominan hiperbólicas.

En los casos en los que B=0, las ecuaciones elípticas tienen A y C positivos; las parabólicas tienen alguno de los dos coeficientes nulo; y las hiperbólicas tienen los coeficientes con signo opuesto.

Las ecuaciones parabólicas e hiperbólicas de interés en Física tienen el tiempo como una de las variables del sistema. El tipo de ecuación parabólica que vamos a estudiar es:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=D\cdot\nabla^2 u$$

6.1 La ecuación del calor en una dimensión



Datos: $u_o(x)$ para $\forall x$ y para $t=0$; $u(x=0)$ y $u(x=L)$ $\forall t$

$$\Delta Q_i = -k \cdot A \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\Delta Q_o = -k \cdot A \cdot \left[\frac{du}{dx} + \frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dx}\right) dx \right]$$

$$\Delta Q = \Delta Q_i - \Delta Q_o = -k \cdot A \cdot \frac{du}{dx} - \left[-k \cdot A \cdot \left(\frac{du}{dx} + \frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dx}\right) dx \right) \right] = k \cdot A \cdot \frac{d^2u}{dx^2} \cdot dx$$

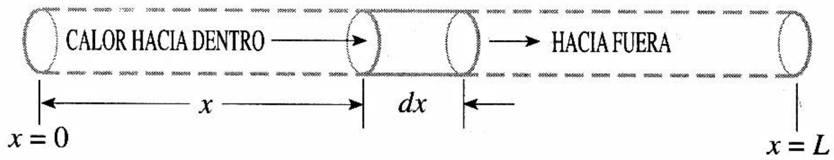
$$\Delta Q = c \cdot \rho \cdot \left(A \cdot dx \right) \frac{du}{dt}$$

$$\boxed{k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c \cdot \rho \cdot \frac{\partial u}{\partial t}} \longrightarrow k \nabla^2 u = c \cdot \rho \cdot \frac{\partial u}{\partial t}$$

Tema 6: EDPs parabólicas e hiperbólicas

6.1 La ecuación del calor en una dimensión

$$\boxed{k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c\cdot\rho\cdot\frac{\partial u}{\partial t}}$$



- Para cada variable, hacemos una división en intervalos iguales, Δx y Δt
- Se trata de un problema de condiciones de frontera en la coordenada espacial y de condiciones iniciales en la coordenada temporal.
- Criterio para los índices:

$$u(i,n) = u(i\cdot\Delta x, n\cdot\Delta t)$$

- Expresando la derivada segunda como diferencia finita:

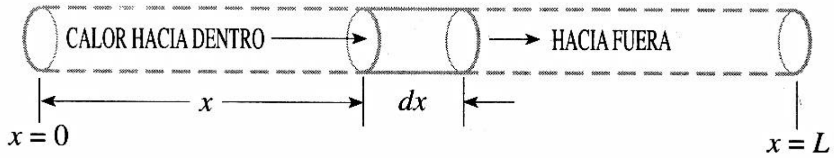
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u(i+1,n) - 2u(i,n) + u(i-1,n)}{(\Delta x)^2}$$

- La ecuación queda:

$$\frac{\partial u(i,n)}{\partial t} = \frac{k}{c\rho(\Delta x)^2}\left[u(i+1,n) - 2u(i,n) + u(i-1,n)\right]$$

6.1 La ecuación del calor en una dimensión

$$\boxed{k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c\cdot\rho\cdot\frac{\partial u}{\partial t}}$$



$$\frac{\partial u(i,n)}{\partial t} = \frac{k}{c\rho(\Delta x)^2}\left[u(i+1,n) - 2u(i,n) + u(i-1,n)\right]$$

- Aplicando diferencias finitas a la derivada temporal:

$$\frac{\partial u(i,n)}{\partial t} = \frac{u(i,n+1) - u(i,n)}{\Delta t}$$

$$\frac{u(i,n+1) - u(i,n)}{\Delta t} = \frac{k}{c\rho(\Delta x)^2}\left[u(i+1,n) - 2u(i,n) + u(i-1,n)\right]$$

$$u(i,n+1) = u(i,n) + \frac{k\Delta t}{c\rho(\Delta x)^2}\left[u(i+1,n) - 2u(i,n) + u(i-1,n)\right]$$

- Haciendo $r = \dfrac{k\Delta t}{c\rho(\Delta x)^2}$

$$\boxed{u(i,n+1) = r\left[u(i+1,n) + u(i-1,n)\right] + \left(1-2r\right)u(i,n)}$$

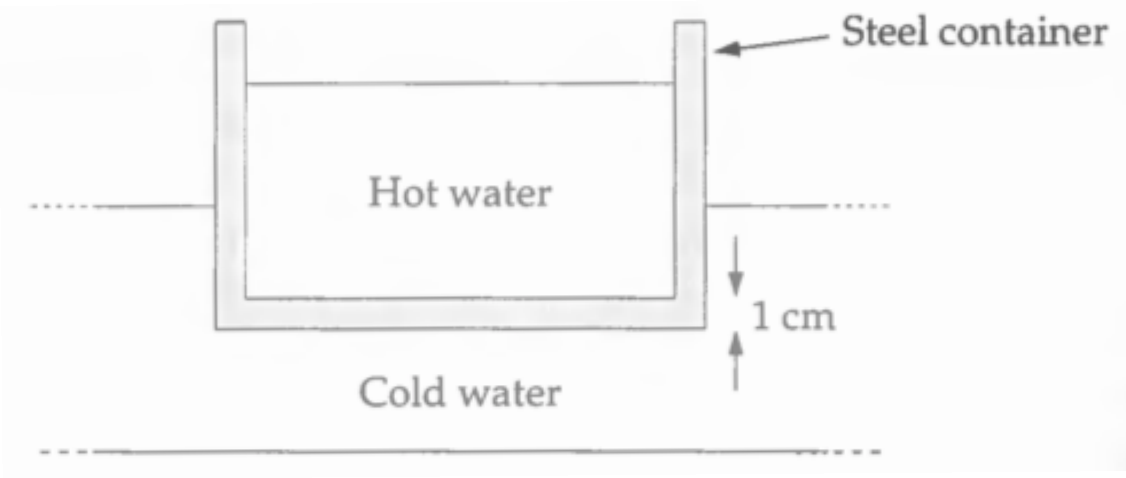
Tema 6: EDPs parabólicas e hiperbólicas

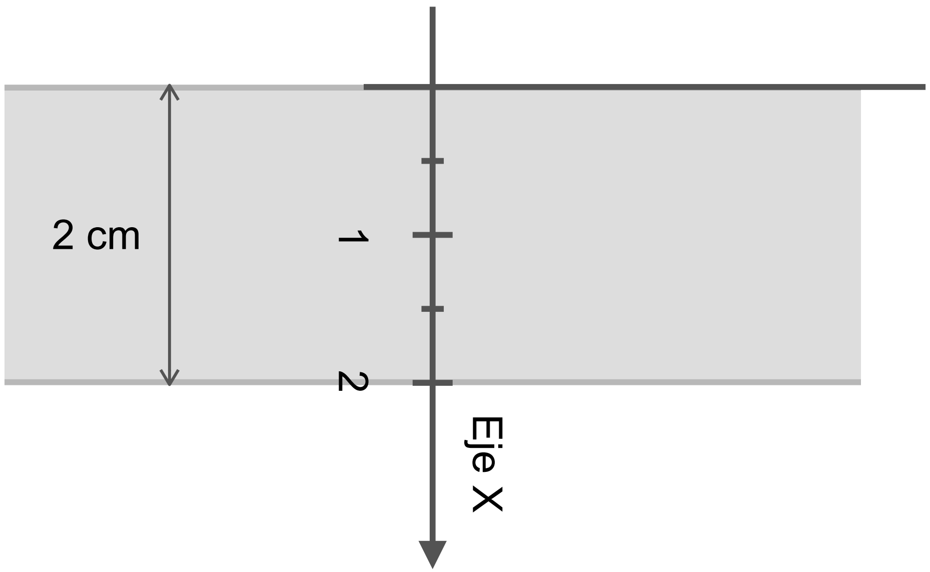
6.1 La ecuación del calor en una dimensión

Temperatura inicial del contenedor: 20ºC.

Temperatura del agua fría: 0ºC.

Temperatura del agua caliente: 50ºC





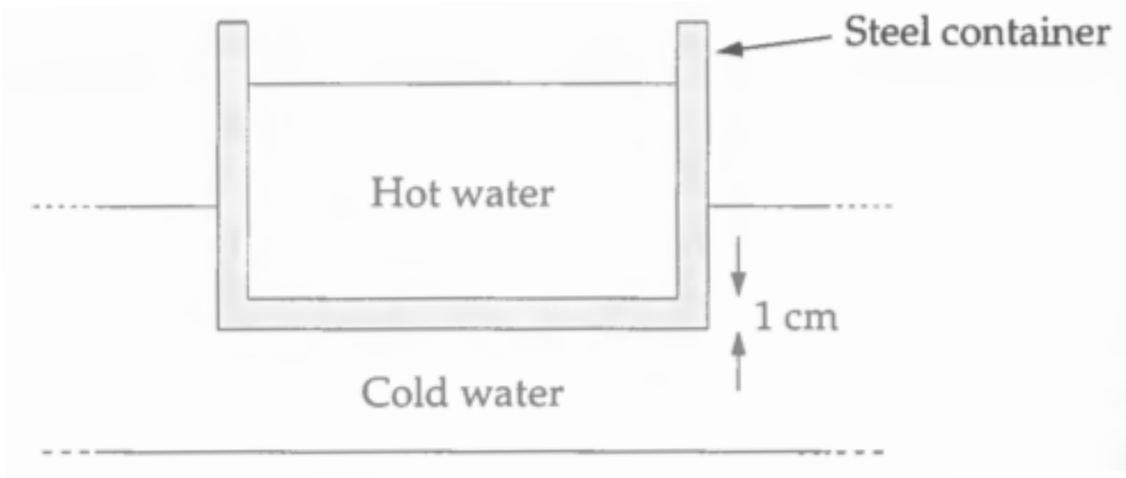
Tema 6: EDPs parabólicas e hiperbólicas

6.1 La ecuación del calor en una dimensión

Temperatura inicial del contenedor: 20ºC.

Temperatura del agua fría: 0ºC.

Temperatura del agua caliente: 50ºC



N=100;   u(0,n)=50;   u(100,n)=0

Condiciones iniciales: u(0,0)=50;   u(100,0)=0;   u(i,0)=20 (i=1,.., 99)

$D=k/c\rho=4.25\cdot 10^{-6}\ m^2s^{-1}$

Representar la distribución de temperaturas para t=0.01 s, t=0.1 s, t=0.4 s, t=1 s y t=10 s.

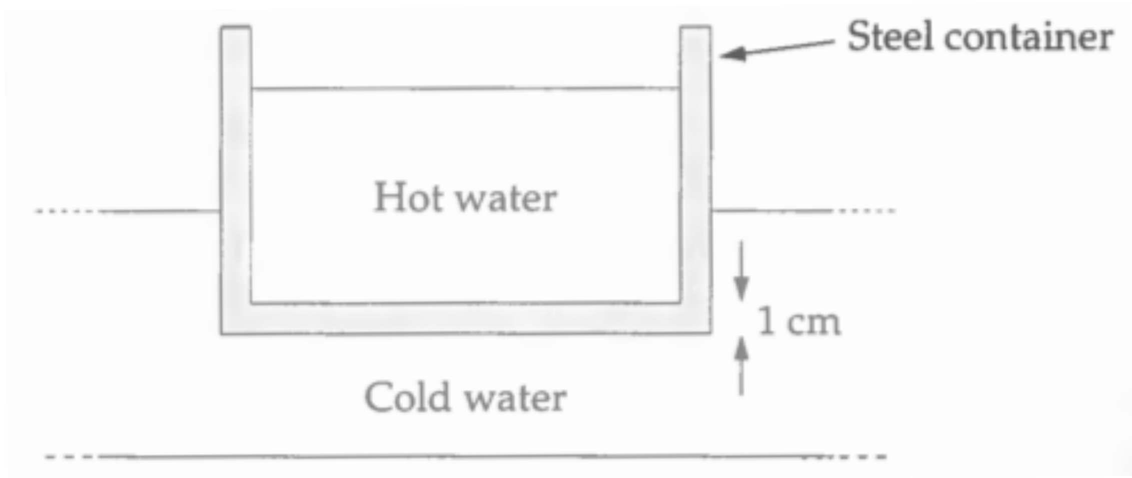
Tema 6: EDPs parabólicas e hiperbólicas

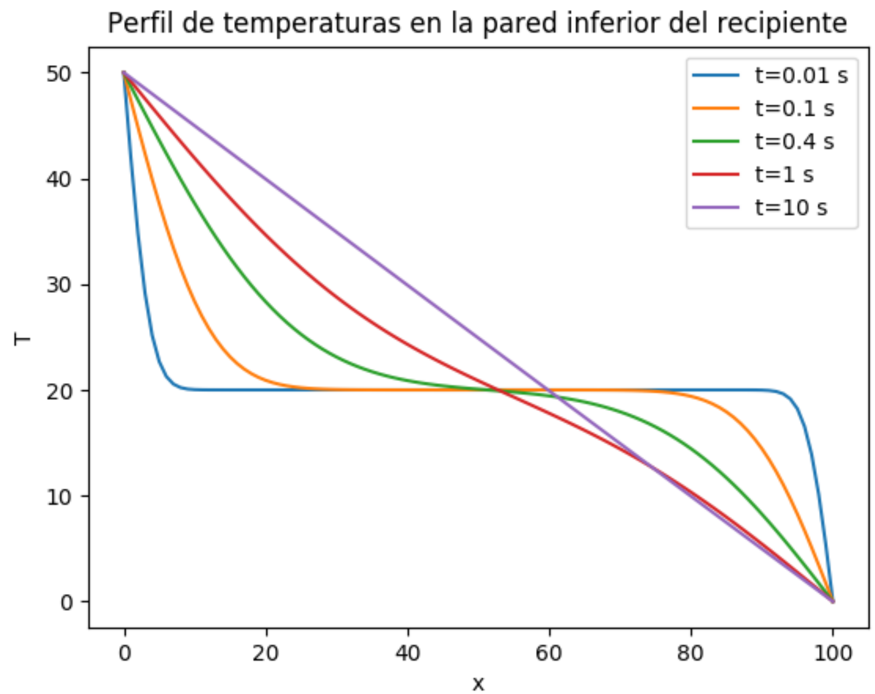
6.1 La ecuación del calor en una dimensión

Temperatura inicial del contenedor: 20ºC.

Temperatura del agua fría: 0ºC.

Temperatura del agua caliente: 50ºC





6.2 Métodos explícitos y métodos implícitos

Ejemplo

Calcular las temperaturas en función del tiempo en el interior de una placa de acero de 2 cm de espesor. El flujo de calor es perpendicular a las caras de la placa. Se toma la cara superior como x=0 y la inferior como x=2 cm. Las condiciones iniciales en t=0 están dadas por

$$u(x) = 100x \quad \text{para} \;\; 0 \le x \le 1$$

$$u(x) = 200 - 100x \quad \text{para} \;\; 1 \le x \le 2$$

las condiciones de frontera en x=0 y x=2 son u(x=0)=0ºC y u(x=2)=0ºC. Los parámetros del acero son: k=0.13 cal/s·cm·ºC, c=0.11 cal/gºC, y ρ=7.8 g/cm^3. Usar 8 subdivisiones en x (Δx=0.25 cm). Comparar los resultados para distintos valores de r. Probar r=0.4, r=0.5 y r=0.6

6.2 Métodos explícitos y métodos implícitos

$$u(i,n+1) = r\left[u(i+1,n) + u(i-1,n)\right] + \left(1-2r\right)u(i,n)$$

$$r = \frac{k\Delta t}{c\rho(\Delta x)^2}$$

- Si hacemos r=0.5 y Δx=0.25:

$$u(i,n+1) = 0.5\cdot\left[u(i+1,n) + u(i-1,n)\right]$$

$$\Delta t = r\frac{c\rho(\Delta x)^2}{k} = 0.206 \text{ seg}$$

6.2 Métodos explícitos y métodos implícitos

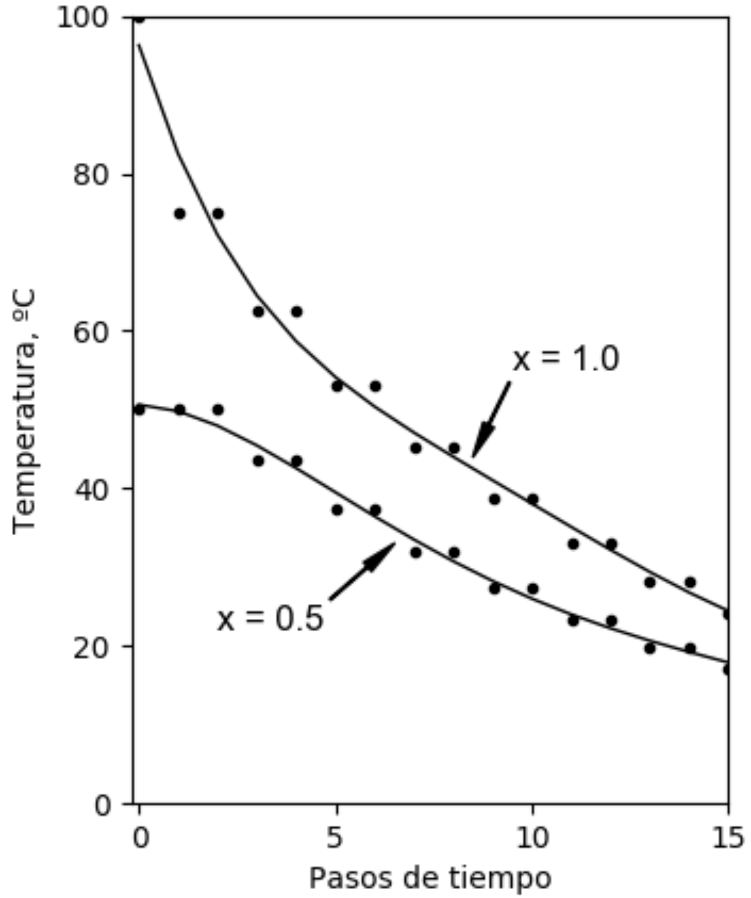
Resultados:

Pasos de tiempo	t	0.25 (Calculado)	0.50 (Calculado)	0.50 (Analítico)	0.75 (Calculado)	1.00 (Calculado)	1.00 (Analítico)
0	0	25.00	50.00	50.00	75.00	100.00	100.00
1	0.206	25.00	50.00	49.58	75.00	75.00	80.06
2	0.413	25.00	50.00	47.49	62.50	75.00	71.80
3	0.619	25.00	43.75	44.68	62.50	62.50	65.46
4	0.825	21.88	43.75	41.71	53.13	62.50	60.11
5	1.031	21.88	37.50	38.79	53.13	53.13	55.42
6	1.237	18.75	37.50	35.99	45.31	53.13	51.18
7	1.444	18.75	32.03	33.37	45.31	45.31	47.33
8	1.650	16.02	32.03	30.91	38.67	45.31	43.79
9	1.856	16.02	27.34	28.63	38.67	38.67	40.52
10	2.062	13.67	27.34	26.51	33.01	38.67	37.51
11	2.269	13.67	23.34	24.55	33.01	33.01	34.72
12	2.475	11.67	23.34	22.73	28.17	33.01	32.15
13	2.681	11.67	19.92	21.04	28.17	28.17	29.76
14	2.887	9.96	19.92	19.48	24.05	28.17	27.55

(Valor x spans columns 0.25–1.00)

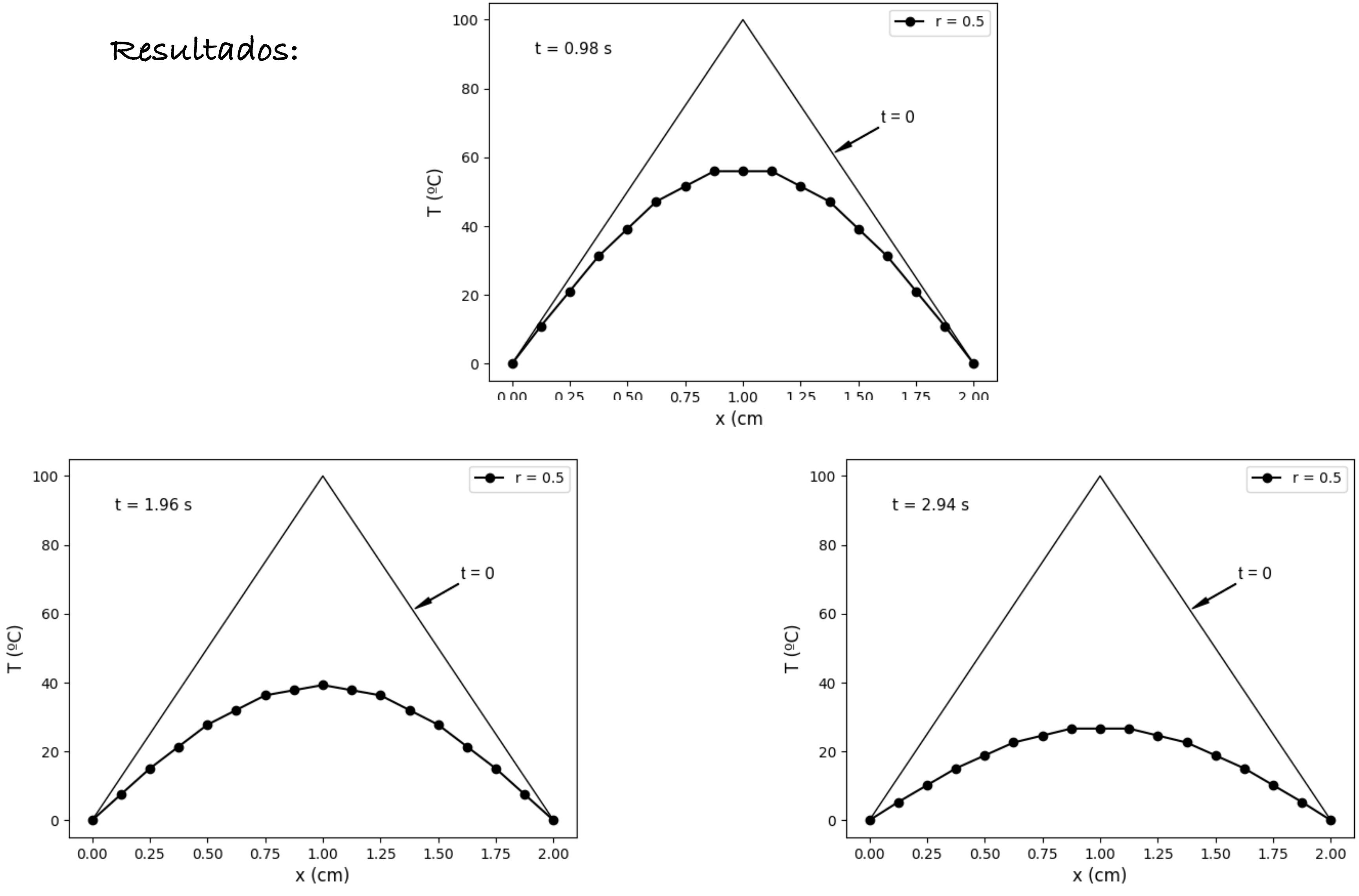
6.2 Métodos explícitos y métodos implícitos

Resultados:



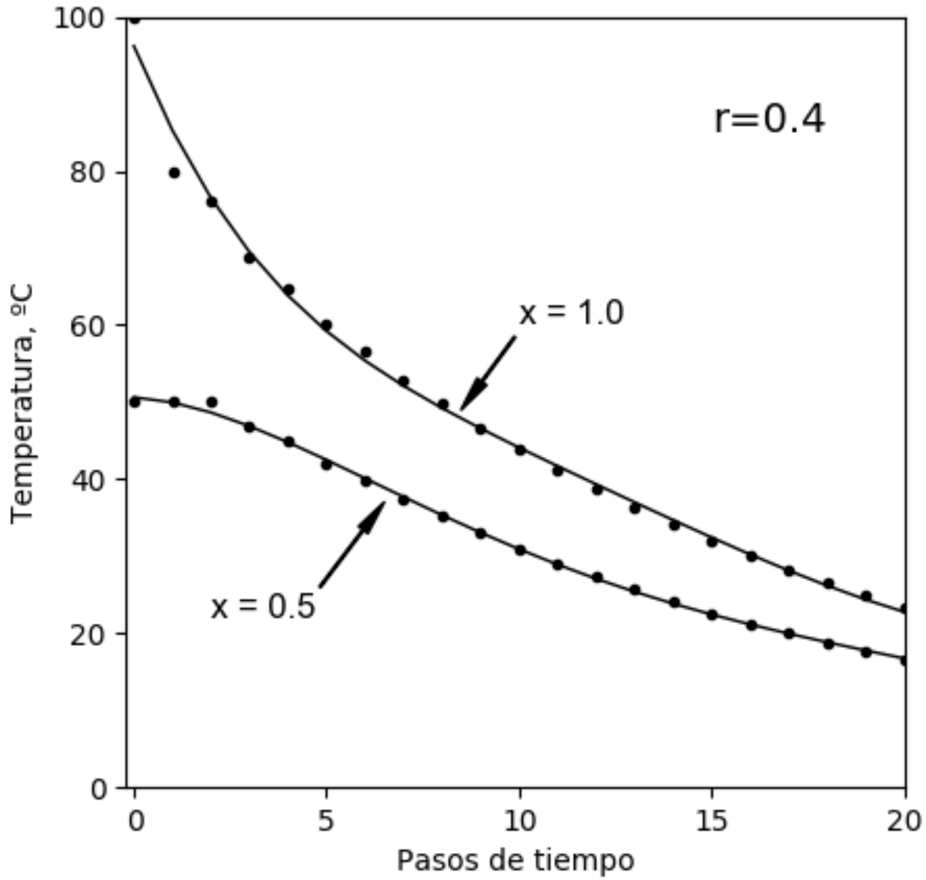
6.2 Métodos explícitos y métodos implícitos

Resultados:



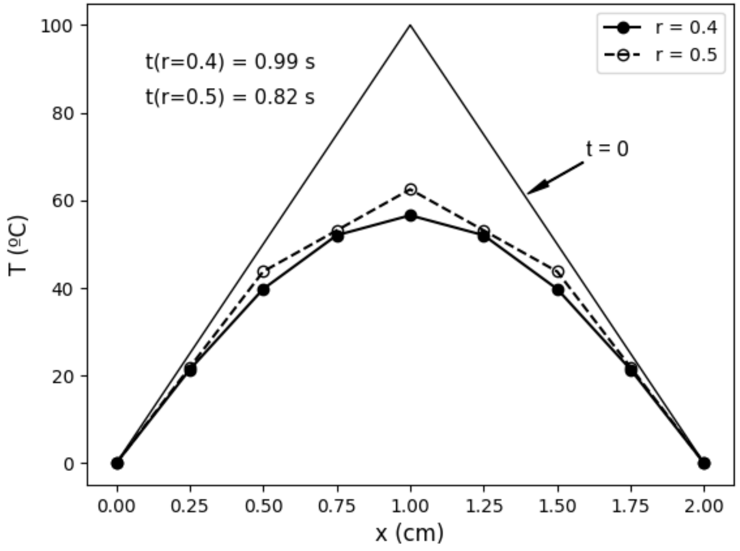
6.2 Métodos explícitos y métodos implícitos

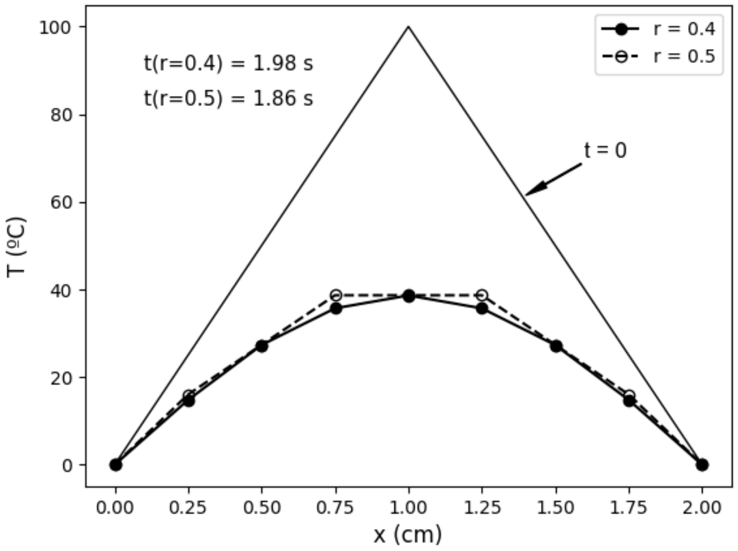
Resultados:

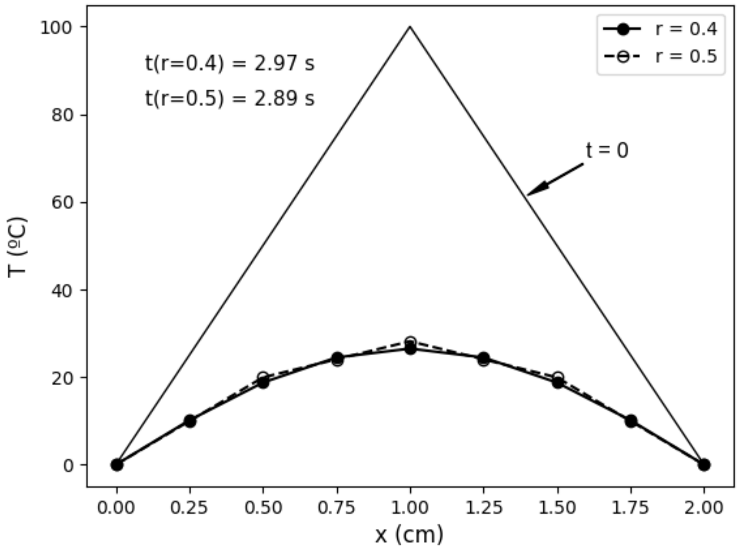


6.2 Métodos explícitos y métodos implícitos

Resultados:

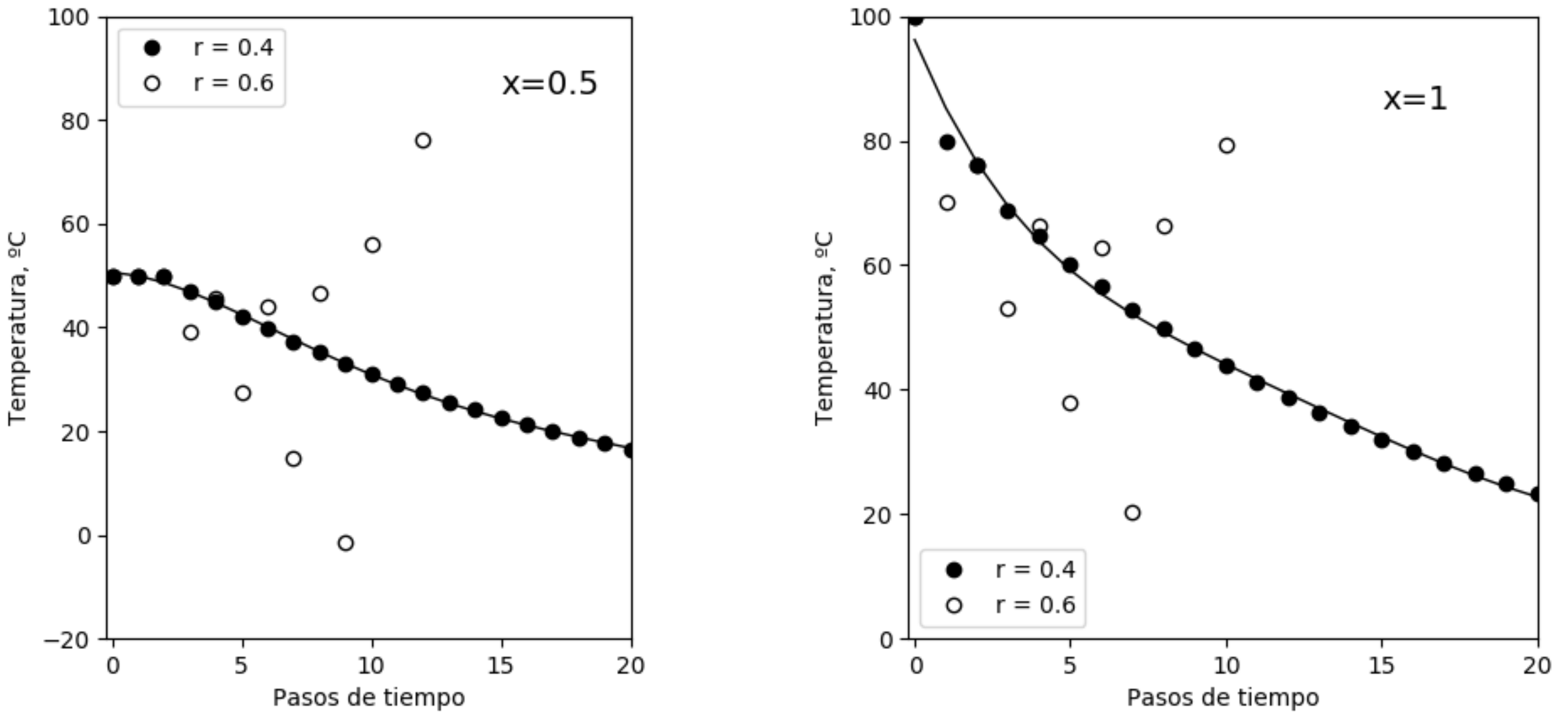






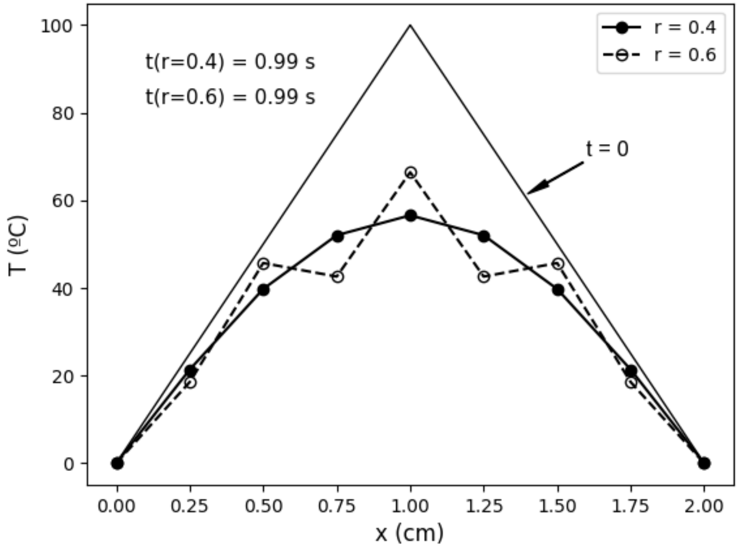
6.2 Métodos explícitos y métodos implícitos

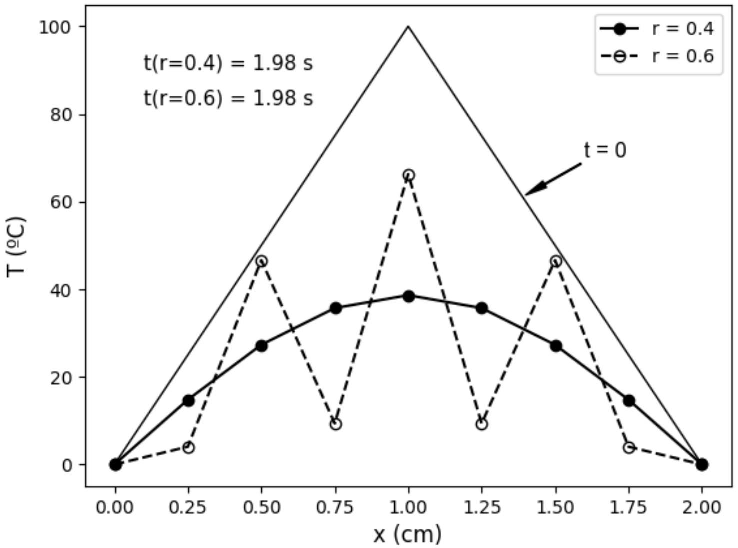
Resultados:

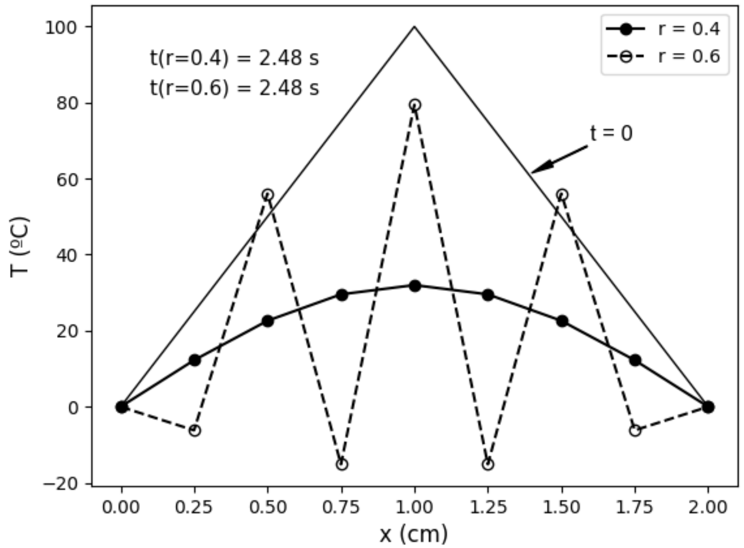


6.2 Métodos explícitos y métodos implícitos

Resultados:

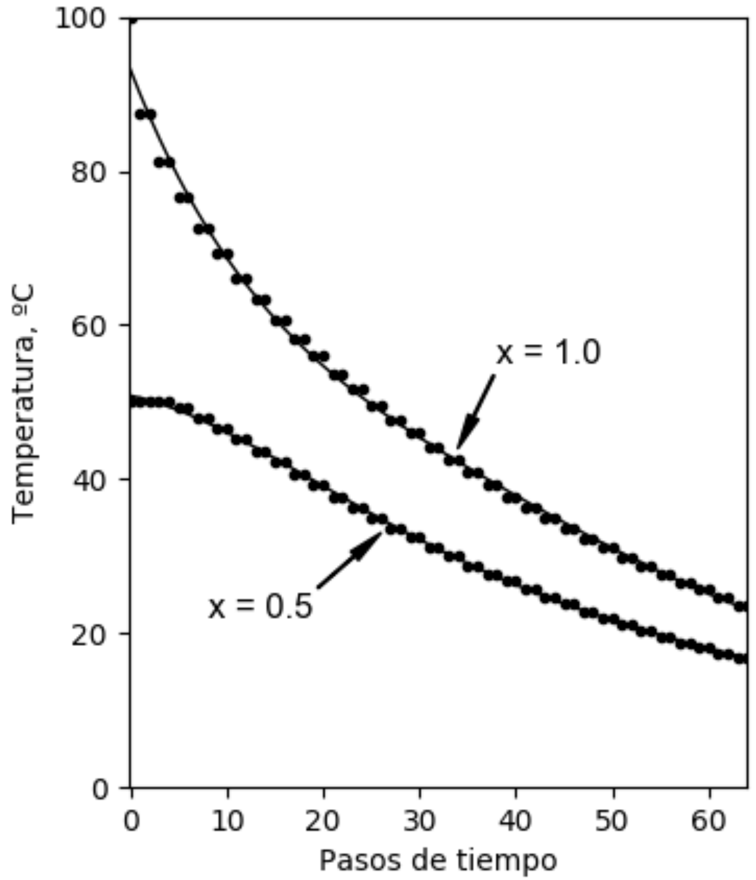






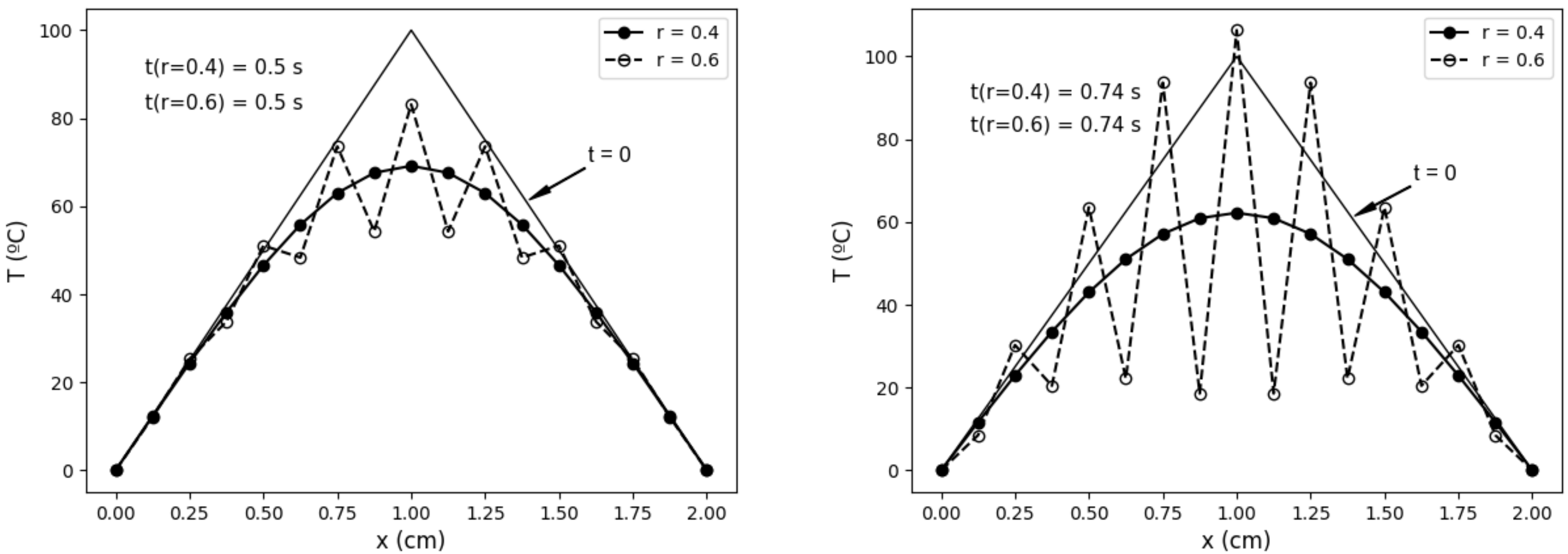
6.2 Métodos explícitos y métodos implícitos

Resultados, N=16:



6.2 Métodos explícitos y métodos implícitos

Resultados, N=16:



6.2 Métodos explícitos y métodos implícitos

El método explícito:

$$u(i,n+1) = r\left[u(i+1,n)+u(i-1,n)\right]+\left(1-2r\right)u(i,n)$$

tiene inestabilidades debido al diferente orden de error que se comete en las diferencias centrales y en las diferencias hacia adelante. El valor r=0.5 marca el límite entre estabilidad (r<0.5) e inestabilidad (r>0.5)

La derivada temporal hacia adelante

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u(i,n+1)-u(i,n)}{\Delta t}$$

se puede interpretar como una diferencia central en el punto intermedio, n+1/2.

Se puede simular que la derivada segunda en diferencias centrales se toma en el instante n+1/2 promediando su valor entre el instante n y el instante n+1:

$$\frac{u(i,n+1)-u(i,n)}{\Delta t} = \frac{1}{2}\frac{k}{c\rho}\left[\frac{u(i+1,n)-2u(i,n)+u(i-1,n)}{(\Delta x)^2}+\frac{u(i+1,n+1)-2u(i,n+1)+u(i-1,n+1)}{(\Delta x)^2}\right]$$

6.2 Métodos explícitos y métodos implícitos

$$\frac{u(i,n+1)-u(i,n)}{\Delta t}=\frac{1}{2}\frac{k}{c\rho}\left[\frac{u(i+1,n)-2u(i,n)+u(i-1,n)}{(\Delta x)^2}+\frac{u(i+1,n+1)-2u(i,n+1)+u(i-1,n+1)}{(\Delta x)^2}\right]$$

$$u(i,n+1)-u(i,n)=\frac{1}{2}\frac{k\Delta t}{c\rho(\Delta x)^2}\left[u(i+1,n)-2u(i,n)+u(i-1,n)+u(i+1,n+1)-2u(i,n+1)+u(i-1,n+1)\right]$$

Utilizando el factor r y agrupando los términos en el instante n+1 a la izquierda:

$$(2+2r)\cdot u(i,n+1)-r\cdot u(i+1,n+1)-r\cdot u(i-1,n+1)=(2-2r)\cdot u(i,n)+r\cdot u(i+1,n)+r\cdot u(i-1,n)$$

Reordenando:

$$-r\cdot u(i-1,n+1)+(2+2r)\cdot u(i,n+1)-r\cdot u(i+1,n+1)=r\cdot u(i-1,n)+(2-2r)\cdot u(i,n)+r\cdot u(i+1,n)$$

Este enfoque constituye un método implícito y se conoce como Método de Crank-Nicolson.

En cada intervalo temporal hay que resolver un sistema tridiagonal.

6.2 Métodos explícitos y métodos implícitos

Método theta:

Se define un parámetro, $0 \le \theta \le 1$, y se utiliza para realizar un promedio ponderado para la derivada segunda espacial entre los instantes n y n+1, siendo θ el factor de ponderación.

$$\frac{u(i,n+1)-u(i,n)}{\Delta t}=\frac{k}{c\rho}\left[\frac{(1-\vartheta)\cdot\left(u(i+1,n)-2u(i,n)+u(i-1,n)\right)}{(\Delta x)^2}+\frac{\vartheta\cdot\left(u(i+1,n+1)-2u(i,n+1)+u(i-1,n+1)\right)}{(\Delta x)^2}\right]$$

Usando el factor r:

$$u(i,n+1)-u(i,n)=r\cdot\left[(1-\vartheta)\cdot\left(u(i+1,n)-2u(i,n)+u(i-1,n)\right)+\vartheta\cdot\left(u(i+1,n+1)-2u(i,n+1)+u(i-1,n+1)\right)\right]$$

Para θ=0.5 se tiene el método de Crank-Nicolson. Para θ=0 se tiene el método explícito. Para θ=1 se tiene el método implícito simple:

$$-r\cdot u(i-1,n+1)+(1+2r)\cdot u(i,n+1)-r\cdot u(i+1,n+1)=u(i,n)$$

Reagrupando para el caso general, tenemos:

$$-r\vartheta\cdot u(i-1,n+1)+(1+2r\vartheta)\cdot u(i,n+1)-r\vartheta\cdot u(i+1,n+1)=r(1-\vartheta)\cdot u(i-1,n)+\left[1-2r(1-\vartheta)\right]\cdot u(i,n)+r(1-\vartheta)\cdot u(i+1,n)$$

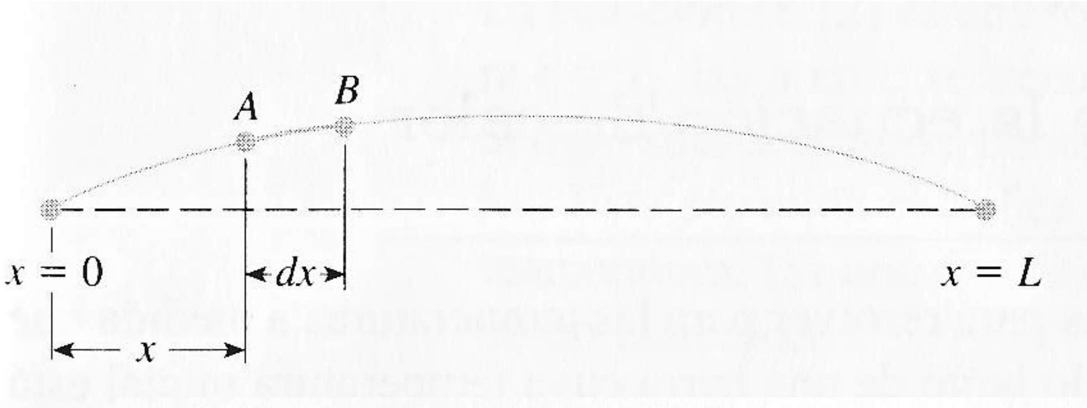
Tema 6: EDPs parabólicas e hiperbólicas

6.3 La ecuación de onda en una dimensión

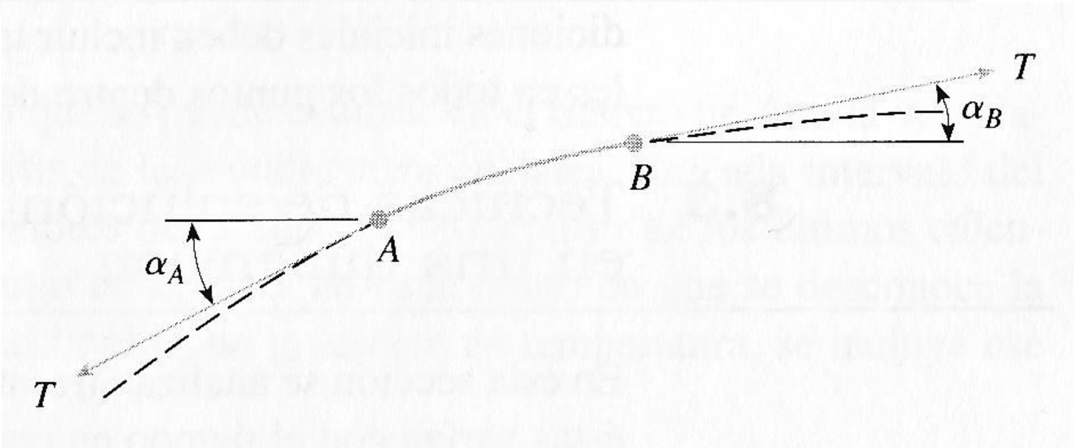
La ecuación de onda es de tipo hiperbólico. En una dimensión:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

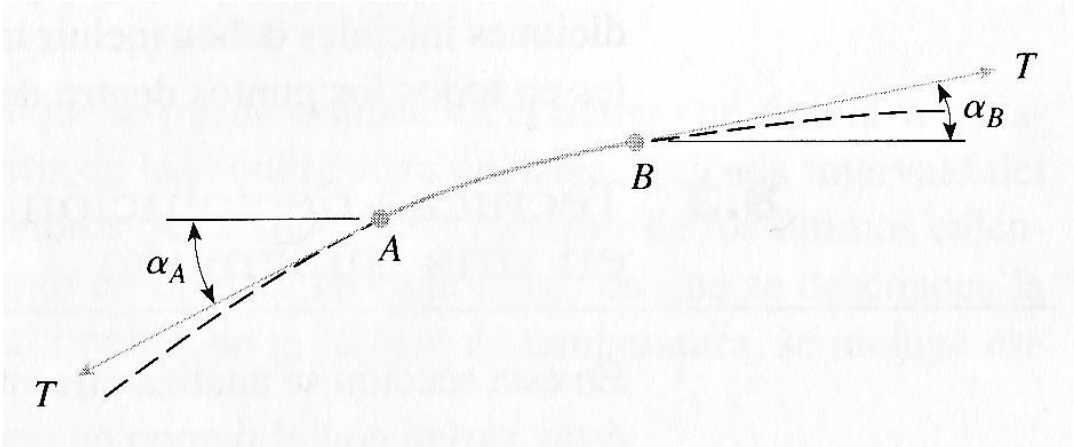
Sea una cuerda tensa entre dos extremos fijos:



u(x) ≡ y(x)



6.3 La ecuación de onda en una dimensión



Componentes verticales de la tensión:

$$T_A = -T\,\mathrm{sen}(\alpha_A)$$
$$T_B = T\,\mathrm{sen}(\alpha_B)$$

Para ángulos pequeños se puede aproximar el seno por la tangente, i.e., por la derivada.

$$\mathrm{sen}(\alpha_A) \approx \tan(\alpha_A) = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=A}$$

$$\mathrm{sen}(\alpha_B) \approx \tan(\alpha_B) = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=B} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=A} + \left.\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=A} \cdot dx$$

6.3 La ecuación de onda en una dimensión

Tensión neta:

$$T_n = T_A + T_B = -T\,\text{sen}(\alpha_A) + T\,\text{sen}(\alpha_B) = T\left[-\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=A} + \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=A} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot dx \right] = T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot dx$$

Usando la 2ª Ley de Newton, tomando λ como la densidad lineal de la cuerda:

$$\lambda \cdot dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot dx \qquad \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\lambda}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$$

Cualquier función de la forma u = f(x ± ct), con $c=(T/\lambda)^{1/2}$ es solución de la ecuación

La derivada segunda espacial requiere 2 condiciones de contorno y la derivada temporal 2 condiciones iniciales (por ejemplo, posición y velocidad inicial).

Por tanto, se necesita conocer:

$$u(A,t) \quad \text{y} \quad u(B,t) \qquad \forall t$$
$$u(x,0) \quad \text{y} \quad u'(x,0) \qquad \forall x$$

6.3 La ecuación de onda en una dimensión

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\lambda}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$$

Tomando diferencias finitas:

$$\frac{u(i,n+1) - 2u(i,n) + u(i,n-1)}{(\Delta t)^2} = \frac{T}{\lambda}\frac{u(i+1,n) - 2u(i,n) + u(i-1,n)}{(\Delta x)^2}$$

Haciendo

$$r^2 = \frac{(\Delta t)^2 \cdot T}{(\Delta x)^2 \cdot \lambda} \quad \rightarrow \quad r = \frac{\Delta t}{\Delta x}\cdot\frac{T}{\Delta t} = \frac{\Delta t}{\Delta x}\cdot c$$

Y despejando:

$$u(i,n+1) - 2u(i,n) + u(i,n-1) = r^2 \cdot \left[u(i+1,n) - 2u(i,n) + u(i-1,n)\right]$$

$$\boxed{u(i,n+1) = -u(i,n-1) + 2(1-r^2)\cdot u(i,n) + r^2 \cdot \left[u(i+1,n) + u(i-1,n)\right]}$$

De manera similar a lo que hacíamos en la ecuación del calor, se puede dar a r un valor arbitrario:

$$r = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{\Delta t}{\Delta x}\sqrt{\frac{T}{\lambda}} = 1 \quad \rightarrow \quad \Delta t = \frac{\Delta x}{\sqrt{T/\lambda}}$$

Con este valor de r se simplifica la expresión para u(i,n+1):

$$\boxed{u(i,n+1) = -u(i,n-1) + u(i+1,n) + u(i-1,n)}$$

6.3 La ecuación de onda en una dimensión

$$\boxed{u(i,n+1)=-u(i,n-1)+2(1-r^2)\cdot u(i,n)+r^2\cdot\left[u(i+1,n)+u(i-1,n)\right]}$$

$$r=1 \quad\rightarrow\quad \Delta t=\frac{\Delta x}{\sqrt{T/\lambda}} \qquad \boxed{u(i,n+1)=-u(i,n-1)+u(i+1,n)+u(i-1,n)}$$

Para n=0 aparece el término u(i,-1). Para conocer su valor hay que usar la derivada. Supongamos que viene dada por la función g(x):

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=g(x) \quad\longrightarrow\quad \frac{u(i,1)-u(i,-1)}{2\Delta t}=g(x)$$

$$u(i,-1)=u(i,1)-2\Delta t\cdot g(x)$$

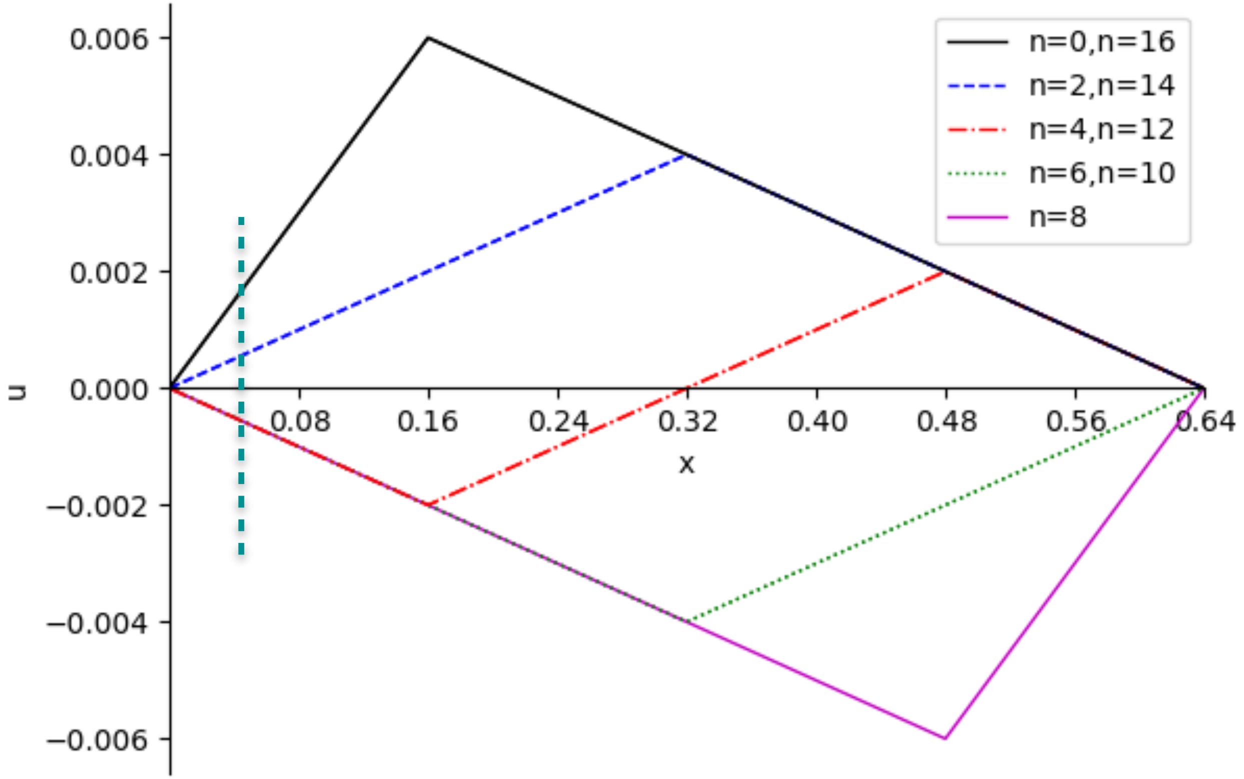
Por tanto, la ecuación para n=0 queda:

$$u(i,1)=-u(i,1)+2\Delta t\cdot g(x)+u(i+1,0)+u(i-1,0)$$

Despejando u(i,1):

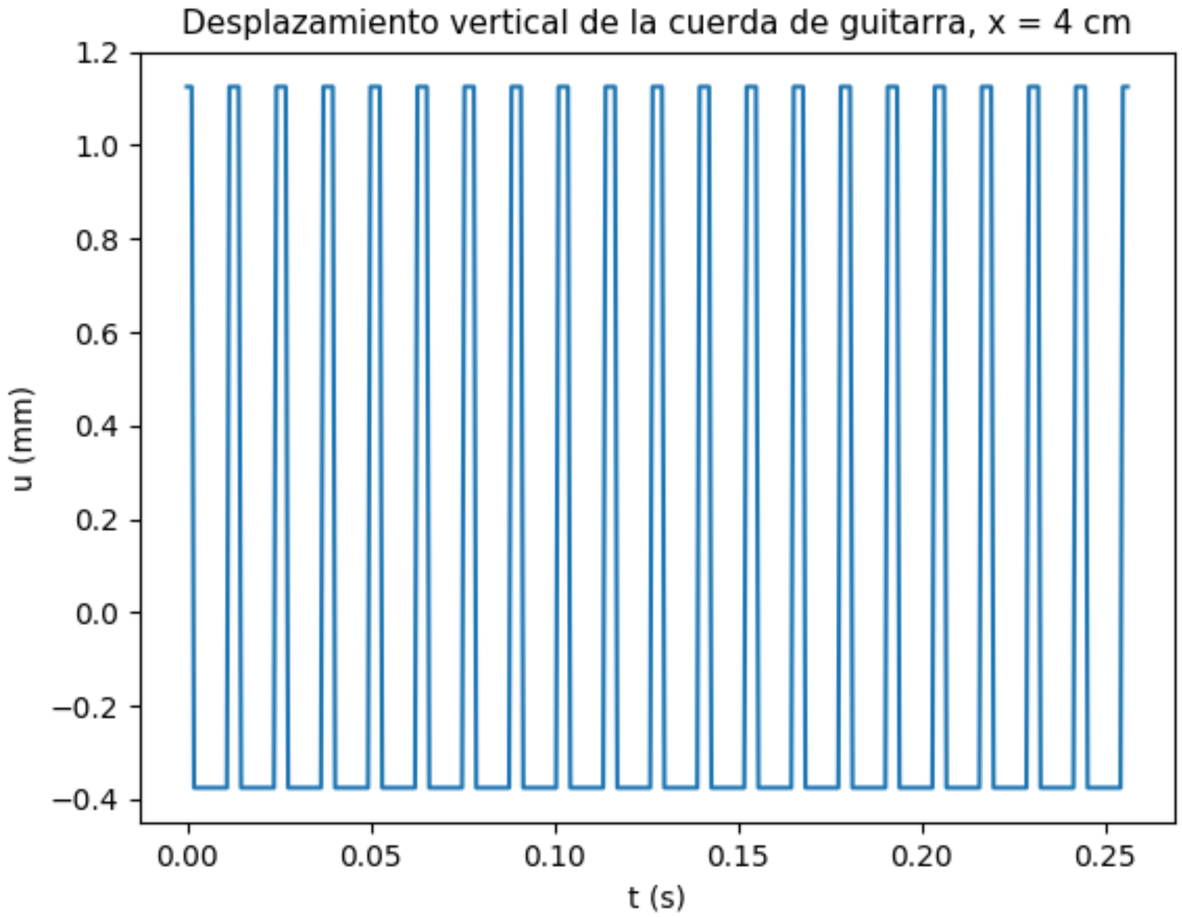
$$u(i,1)=\frac{1}{2}\left[u(i+1,0)+u(i-1,0)\right]+g(x)\cdot\Delta t$$

6.4 Espectro de frecuencias

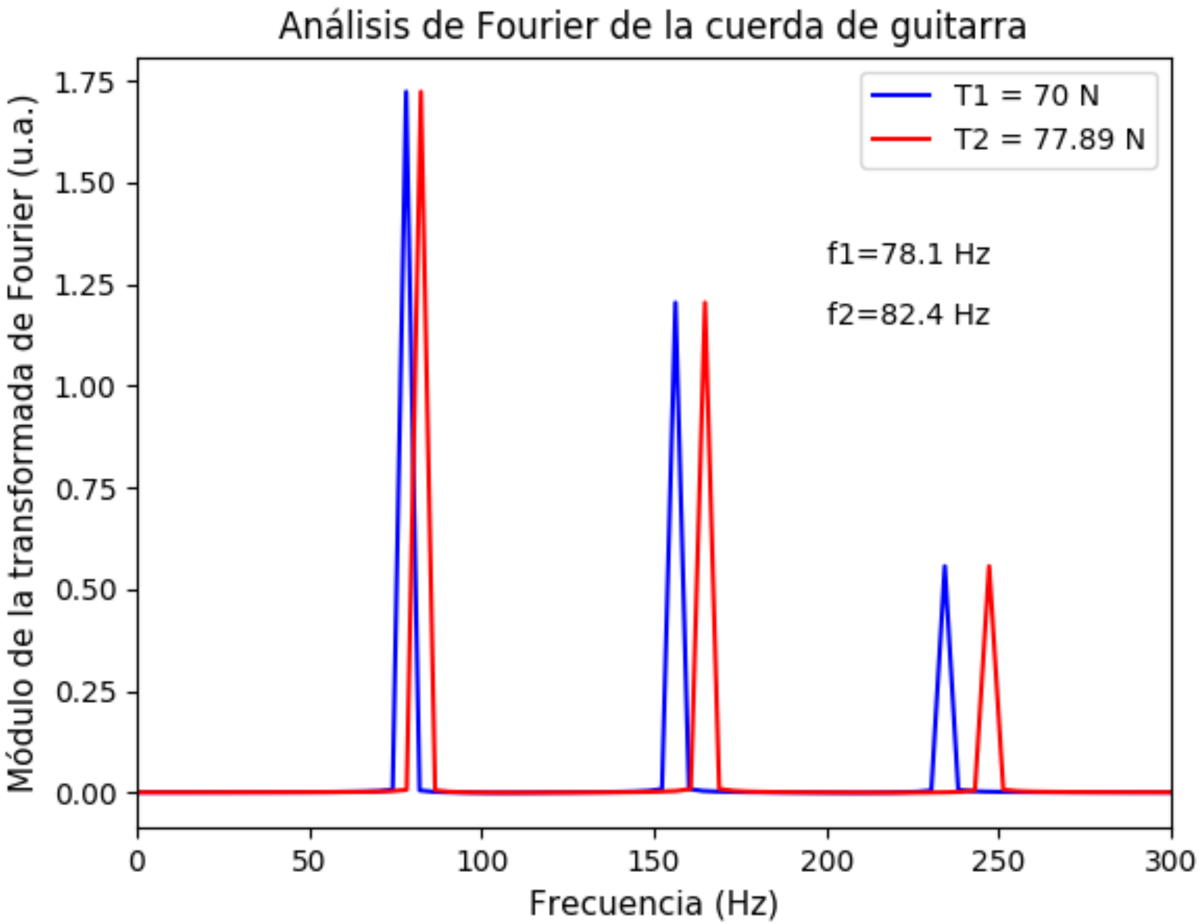


L=64 cm, 128 intervalos espaciales, 5120 intervalos temporales

6.4 Espectro de frecuencias

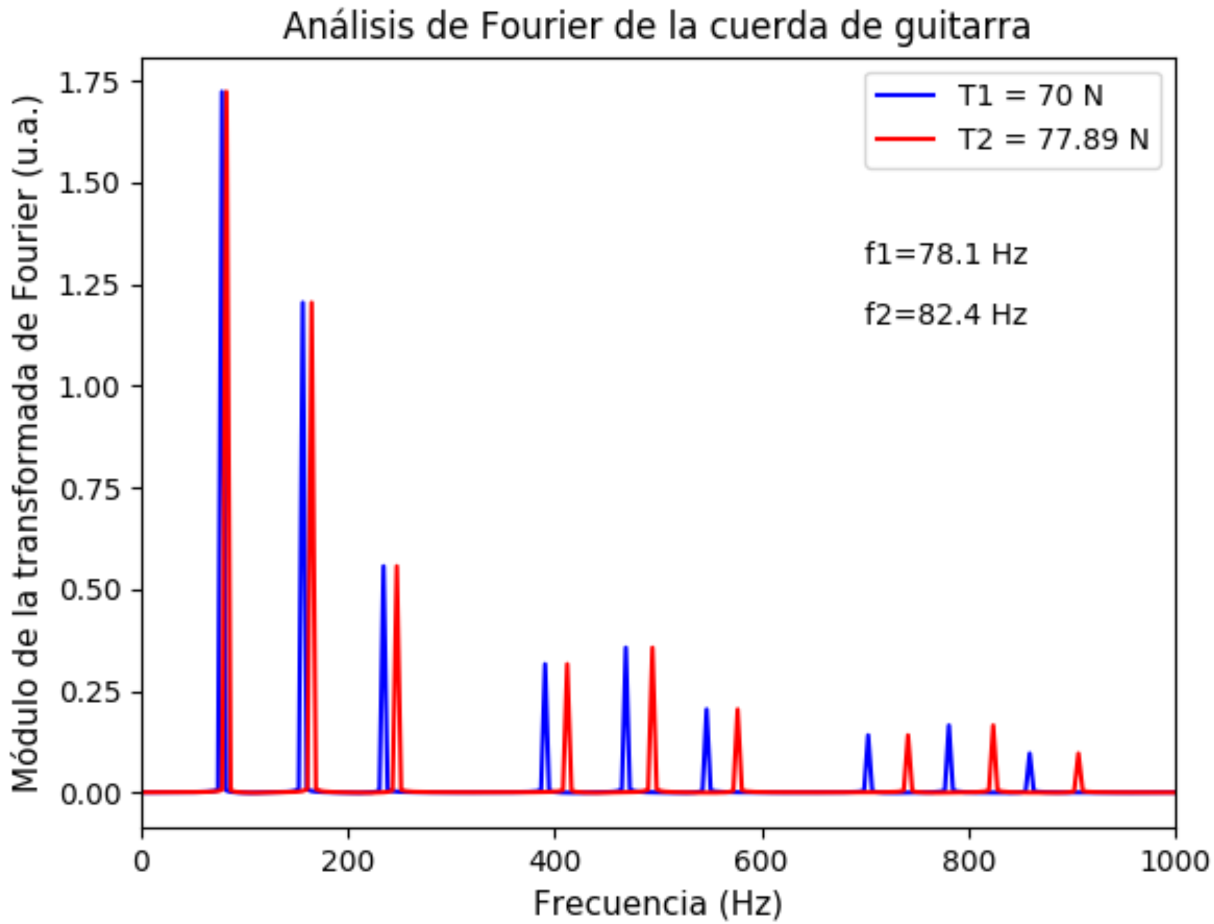


6.4 Espectro de frecuencias



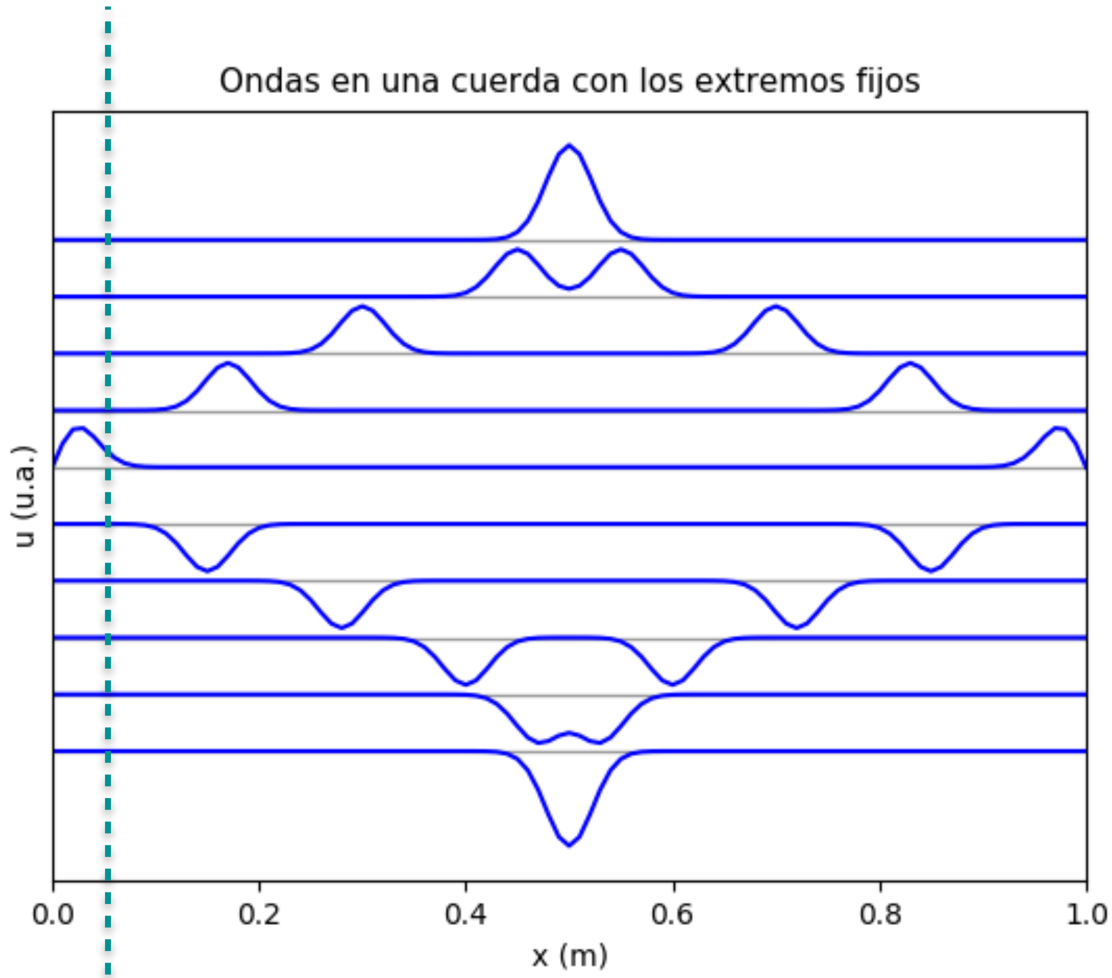
$$\omega = \frac{2\pi k}{L_t}; \qquad f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{k}{L_t}$$

6.4 Espectro de frecuencias

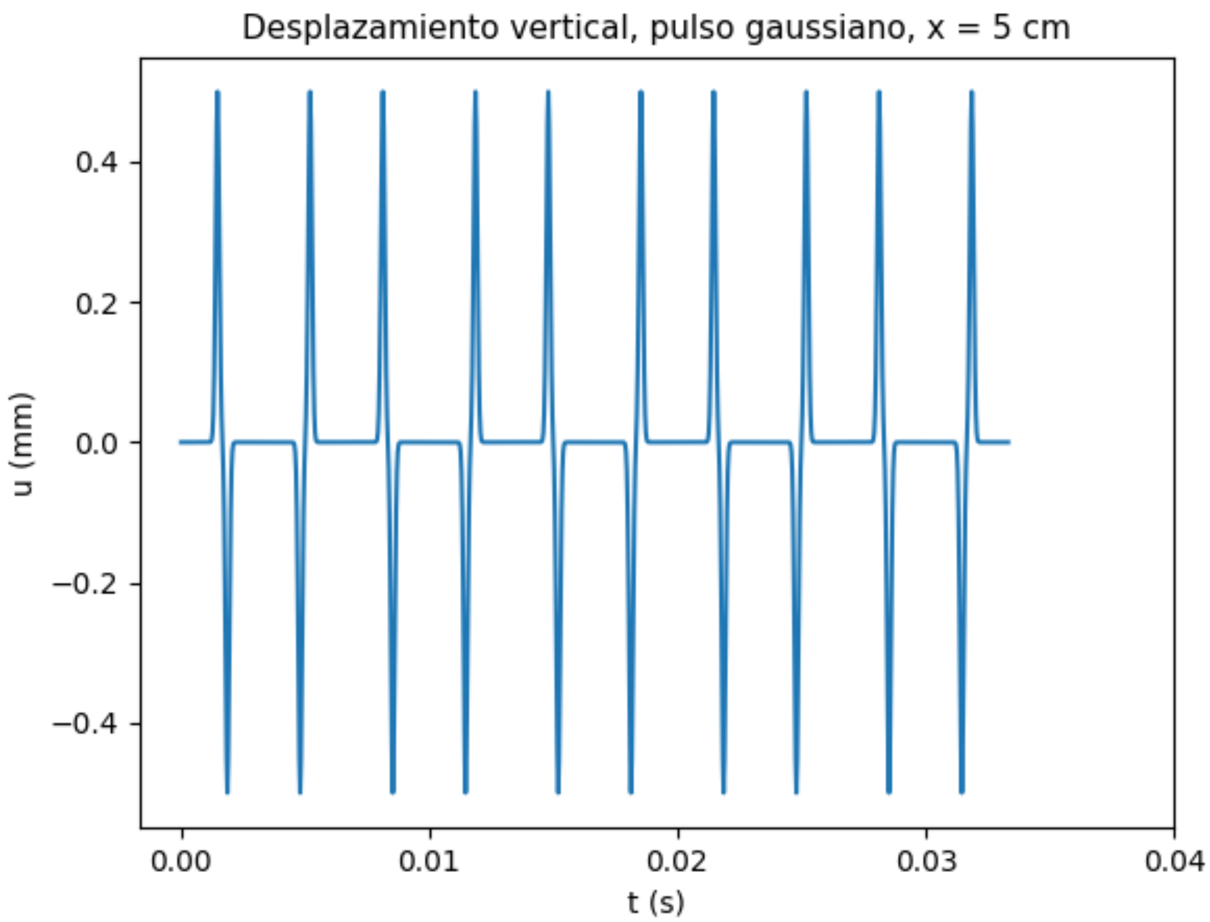


Tema 6: EDPs parabólicas e hiperbólicas

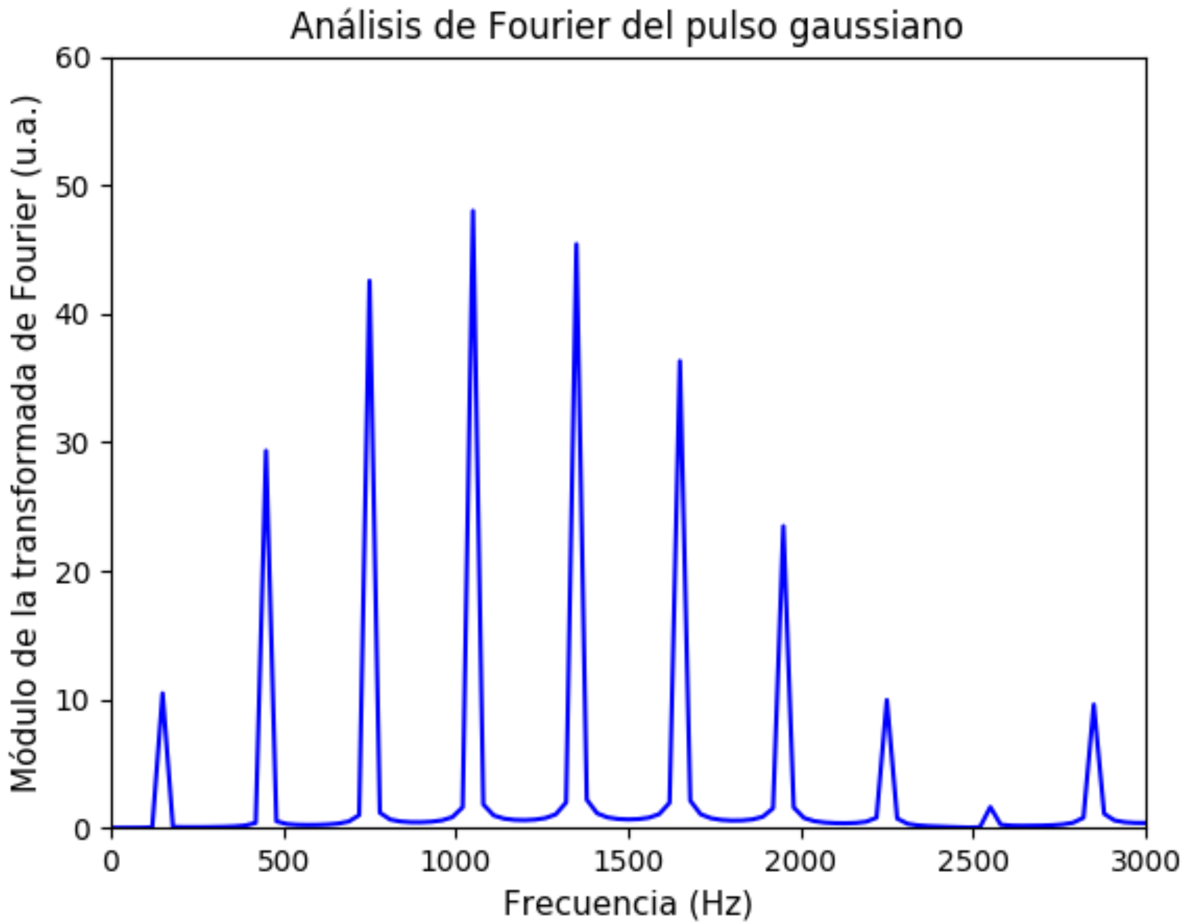
6.4 Espectro de frecuencias



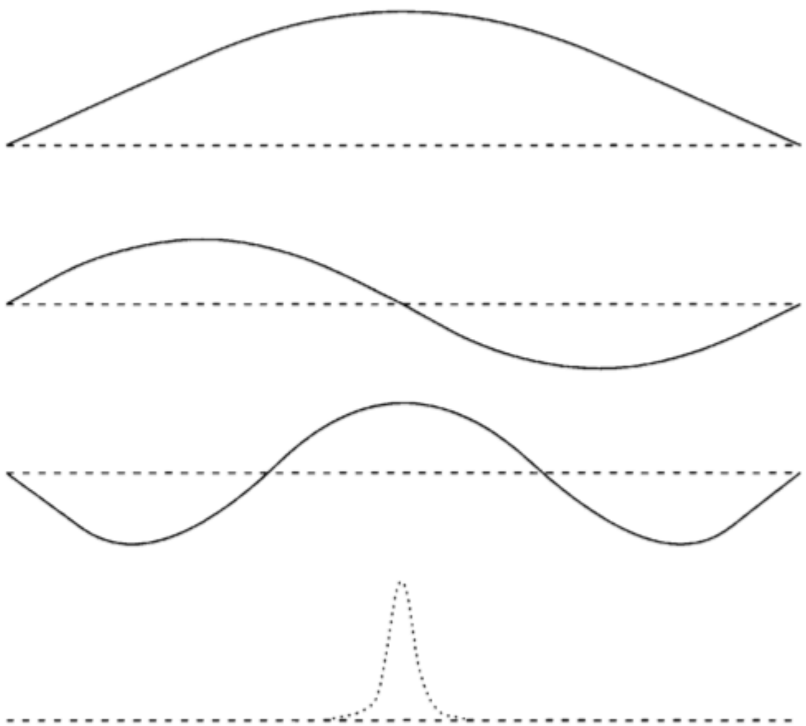
6.4 Espectro de frecuencias



6.4 Espectro de frecuencias



6.4 Espectro de frecuencias

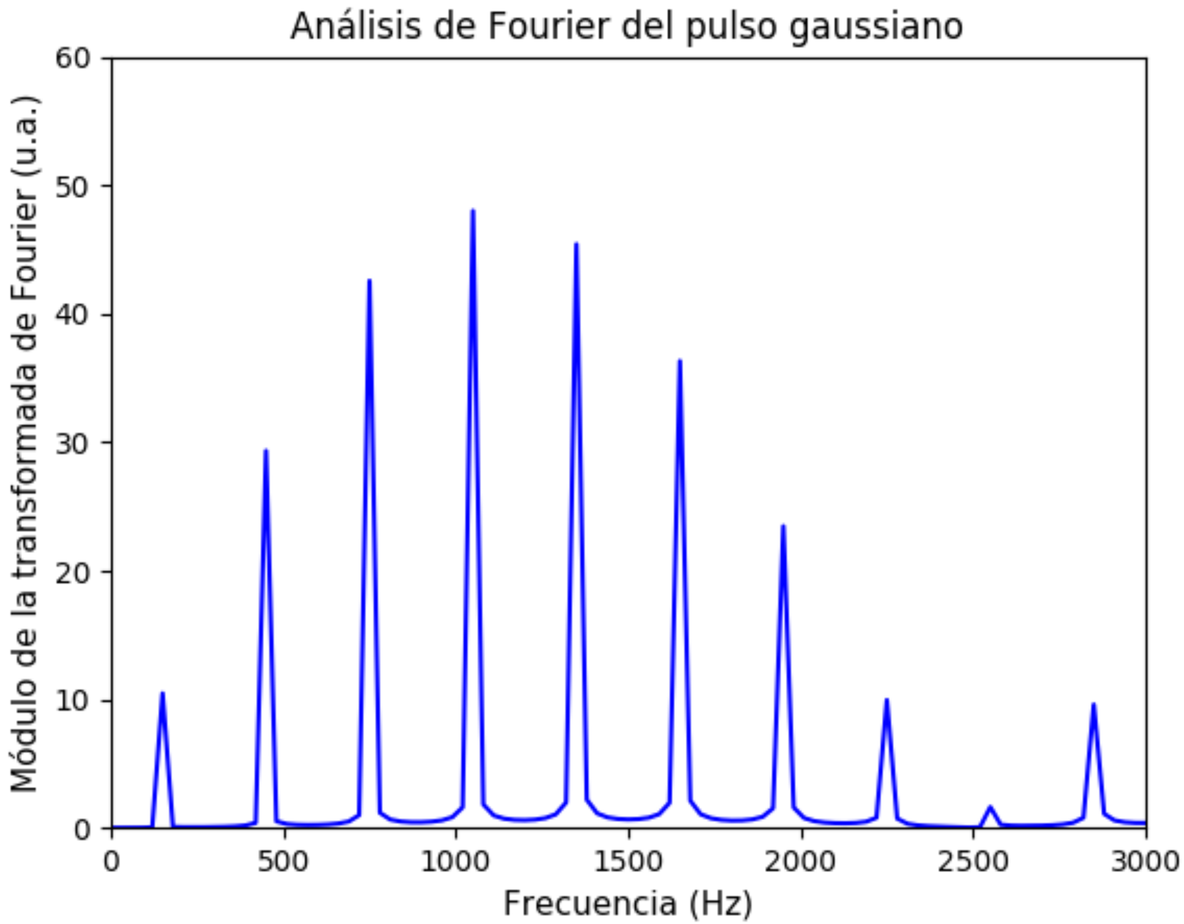


$\lambda = 2L, L, 2L/3, \ldots 2L/m$

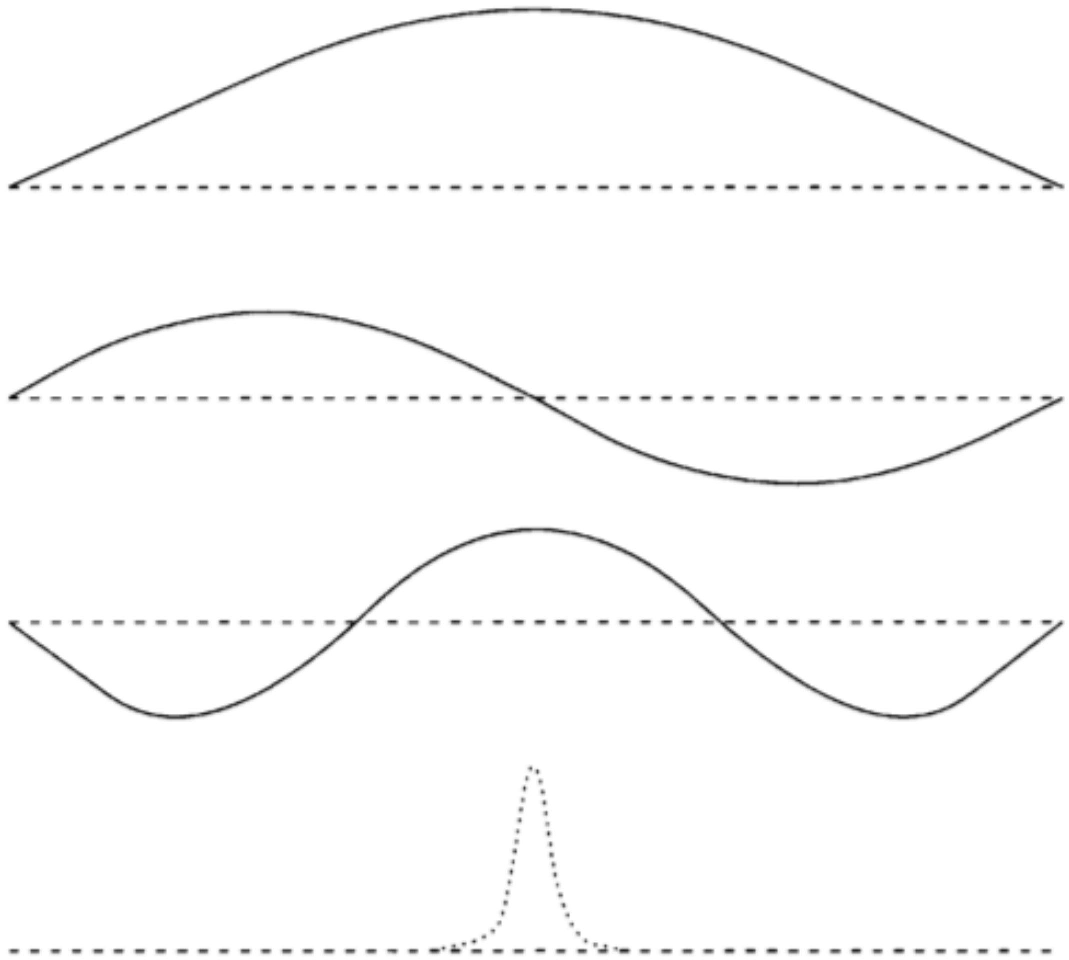
$\lambda f = c \longrightarrow f = mc/2L$

Para $m=1$, $f=c/2L=300/2=150$ Hz

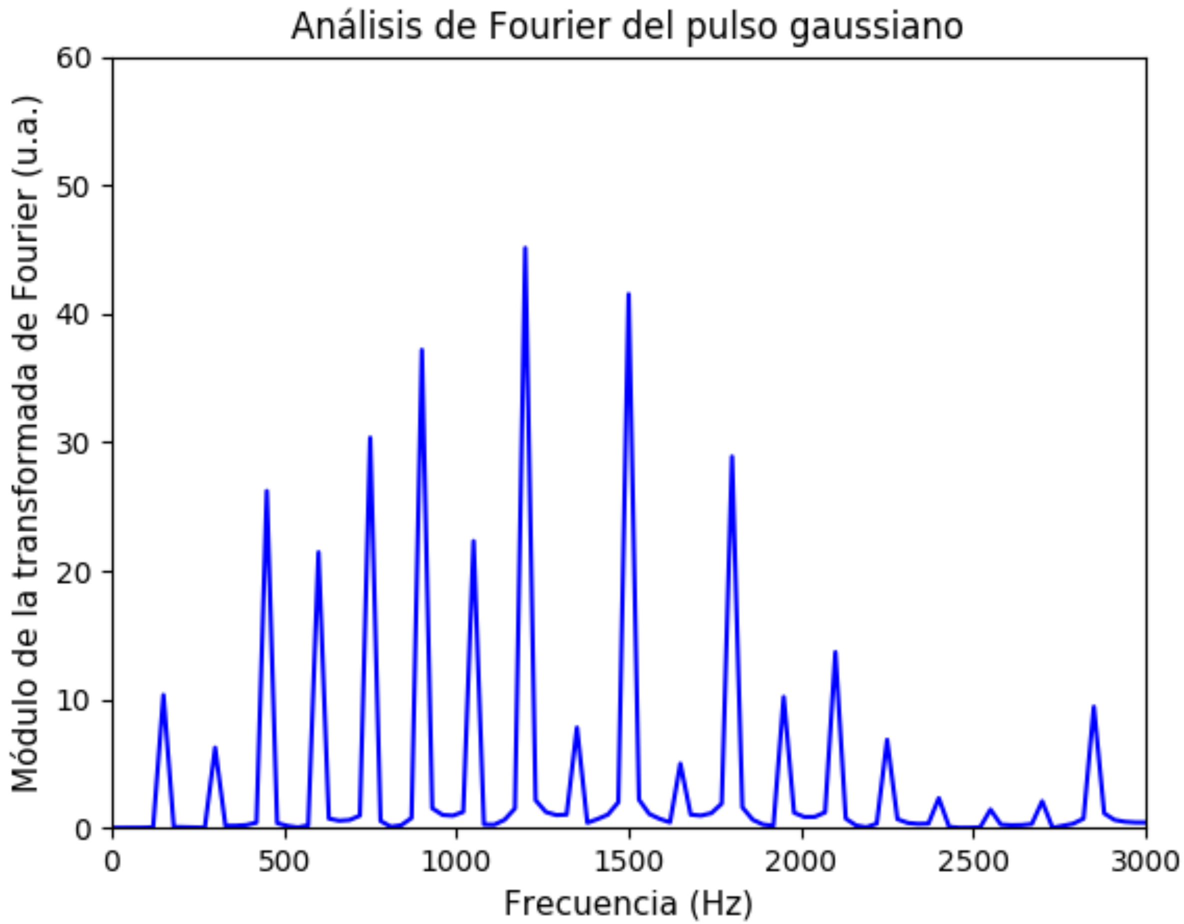
6.4 Espectro de frecuencias



6.4 Espectro de frecuencias



6.4 Espectro de frecuencias



6.5 Problemas en más de una dimensión espacial

La ecuación del calor, o difusión, en dos dimensiones, tiene la forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{c\rho}\nabla^2 u$$

Cambio de notación: u(i,j,n) $\longrightarrow$ u_{ij}^{k}.

Tomando diferencias finitas:

$$u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^{k} = r\left(u_{i+1,j}^{k} - 2u_{i,j}^{k} + u_{i-1,j}^{k} + u_{i,j+1}^{k} - 2u_{i,j}^{k} + u_{i,j-1}^{k}\right)$$

donde $r = \frac{k\Delta t}{c\rho h^2}$ $\quad \Delta x = \Delta y = h$

Despejando en el instante k+1:

$$u_{i,j}^{k+1} = r\left(u_{i+1,j}^{k} + u_{i-1,j}^{k} + u_{i,j+1}^{k} + u_{i,j-1}^{k}\right) + \left(1-4r\right)u_{i,j}^{k}$$

Si en el método explícito en 1 dimensión el criterio de estabilidad era r ≤ 1/2, en 2 dimensiones pasa a ser r ≤ 1/4, y en 3 dimensiones r ≤ 1/6. Con r = 1/4

$$u_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{4}\left(u_{i+1,j}^{k} + u_{i-1,j}^{k} + u_{i,j+1}^{k} + u_{i,j-1}^{k}\right)$$

6.5 Problemas en más de una dimensión espacial

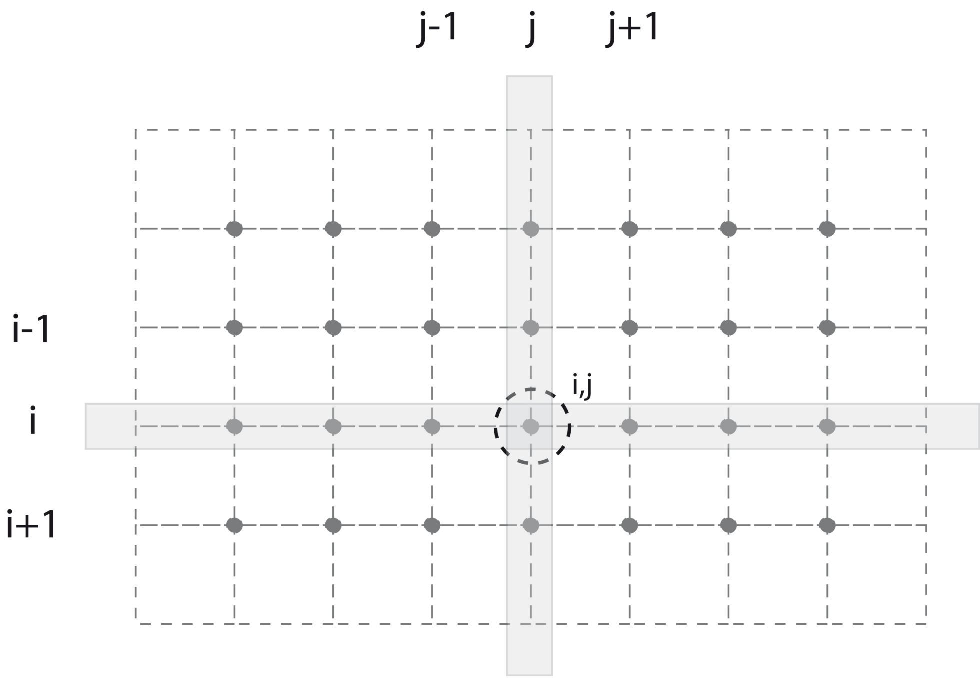
Método de Crank-Nicolson en 2 dimensiones:

$$u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^{k} = \frac{r}{2}\Big(u_{i+1,j}^{k+1} - 2u_{i,j}^{k+1} + u_{i-1,j}^{k+1} + u_{i,j+1}^{k+1} - 2u_{i,j}^{k+1} + u_{i,j-1}^{k+1} +$$
$$+u_{i+1,j}^{k} - 2u_{i,j}^{k} + u_{i-1,j}^{k} + u_{i,j+1}^{k} - 2u_{i,j}^{k} + u_{i,j-1}^{k}\Big)$$

Reagrupando:

$$-ru_{i-1,j}^{k+1} - ru_{i,j-1}^{k+1} + (2+4r)u_{i,j}^{k+1} - ru_{i+1,j}^{k+1} - ru_{i,j+1}^{k+1} = r\left(u_{i-1,j}^{k} + u_{i+1,j}^{k} + u_{i,j-1}^{k} + u_{i,j+1}^{k}\right) + \left(2-4r\right)u_{i,j}^{k}$$

Se puede aproximar este sistema a un conjunto de sistemas tridiagonales mediante el <u>método implícito de dirección alternada</u>. En este método cada paso temporal se divide en dos mitades. En la primera mitad se resuelve la ecuación para las columnas, tomando como incógnitas sólo la parte vertical, variando el índice i. Los elementos j-1 y j+1 no se toman como incógnitas sino como valores conocidos a partir de la iteración anterior



6.5 Problemas en más de una dimensión espacial

Método implícito de dirección alternada

En la primera mitad del ciclo temporal, k+1/2:

$$\frac{u_{i,j}^{k+1/2}-u_{i,j}^{k}}{\Delta t/2}=\frac{k}{c\rho h^{2}}\frac{1}{2}\Big(u_{i+1,j}^{k+1/2}-2u_{i,j}^{k+1/2}+u_{i-1,j}^{k+1/2}+u_{i,j+1}^{k}-2u_{i,j}^{k}+u_{i,j-1}^{k}+$$
$$+u_{i+1,j}^{k}-2u_{i,j}^{k}+u_{i-1,j}^{k}+u_{i,j+1}^{k}-2u_{i,j}^{k}+u_{i,j-1}^{k}\Big)$$

Reagrupando y usando r:

$$-ru_{i-1,j}^{k+1/2}+(4+2r)u_{i,j}^{k+1/2}-ru_{i+1,j}^{k+1/2}=r\left(u_{i-1,j}^{k}+u_{i+1,j}^{k}+2u_{i,j-1}^{k}+2u_{i,j+1}^{k}\right)+\left(4-6r\right)u_{i,j}^{k}$$

que da un sistema tridiagonal para cada valor de j:

$$\begin{pmatrix} 4+2r & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 4+2r & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4+2r & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 4+2r & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 4+2r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{i,j}^{k+1/2} \\ \text{para} \\ \text{un} \\ j \text{ dado} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u_{i,j}^{k} \\ \text{para} \\ \text{un } j \\ \text{dado y} \\ u_{i,j-1}^{k} \\ \text{y } u_{i,j+1}^{k} \end{pmatrix}$$

6.5 Problemas en más de una dimensión espacial

Método implícito de dirección alternada

En la segunda mitad del ciclo temporal, k+1:

$$\frac{u_{i,j}^{k+1}-u_{i,j}^{k+1/2}}{\Delta t/2}=\frac{k}{c\rho h^2}\frac{1}{2}\Big(u_{i+1,j}^{k+1/2}-2u_{i,j}^{k+1/2}+u_{i-1,j}^{k+1/2}+u_{i,j+1}^{k+1}-2u_{i,j}^{k+1}+u_{i,j-1}^{k+1}+$$
$$+u_{i+1,j}^{k+1/2}-2u_{i,j}^{k+1/2}+u_{i-1,j}^{k+1/2}+u_{i,j+1}^{k+1/2}-2u_{i,j}^{k+1/2}+u_{i,j-1}^{k+1/2}\Big)$$

Reagrupando y usando r:

$$-ru_{i,j-1}^{k+1}+(4+2r)u_{i,j}^{k+1}-ru_{i,j+1}^{k+1}=r\left(2u_{i-1,j}^{k}+2u_{i+1,j}^{k}+u_{i,j-1}^{k}+u_{i,j+1}^{k}\right)+\left(4-6r\right)u_{i,j}^{k+1/2}$$

que de nuevo da un sistema tridiagonal para cada valor de i:

$$\begin{pmatrix} 4+2r & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 4+2r & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4+2r & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 4+2r & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 4+2r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{i,j}^{k+1} \\ \text{para} \\ \text{un} \\ i \text{ dado} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u_{i,j}^{k+1/2} \\ \text{para} \\ \text{un } i \\ \text{dado y} \\ u_{i-1,j}^{k+1/2} \\ \text{y } u_{i+1,j}^{k+1/2} \end{pmatrix}$$

6.5 Problemas en más de una dimensión espacial

Veamos ahora cómo tratar la ecuación de onda en dos dimensiones:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\sigma}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

donde T es la tensión y σ la densidad superficial

Tomando diferencias finitas:

$$\frac{u_{i,j}^{k+1} - 2u_{i,j}^{k} + u_{i,j}^{k-1}}{(\Delta t)^2} = c^2\,\frac{u_{i+1,j}^{k} + u_{i-1,j}^{k} + u_{i,j+1}^{k} + u_{i,j-1}^{k} - 4u_{i,j}^{k}}{h^2}$$

Despejando en el instante k+1:

$$u_{i,j}^{k+1} = -u_{i,j}^{k-1} + \frac{c^2(\Delta t)^2}{h^2}\left\{\begin{matrix} & 1 & \\ 1 & 0 & 1 \\ & 1 & \end{matrix}\right\} u_{i,j}^{k} + \left(2 - 4\frac{c^2(\Delta t)^2}{h^2}\right) u_{i,j\,i,j}^{k\;\;k}$$

Si hacemos $c^2(\Delta t)^2 / h^2 = 1/2$, el último término desaparece y la ecuación se simplifica:

$$u_{i,j}^{k+1} = -u_{i,j}^{k-1} + \frac{1}{2}\left\{\begin{matrix} & 1 & \\ 1 & 0 & 1 \\ & 1 & \end{matrix}\right\} u_{i,j}^{k}$$

6.5 Problemas en más de una dimensión espacial

Para el primer paso temporal hay que hacer uso de la derivada:

$$u_{i,j}^{1} = \frac{1}{4}\left\{ \begin{matrix} & 1 & \\ 1 & 0 & 1 \\ & 1 & \end{matrix} \right\} u_{i,j}^{0} + \Delta t \cdot g(x_i, y_j)$$