

# DINAMICA DE UNA PARTICULA

- 7.1 *Introducción*
- 7.2 *Ley de inercia*
- 7.3 *Momentum lineal*
- 7.4 *Principio de conservación del momentum*
- 7.5 *Redefinición de masa*
- 7.6 *Segunda y tercera leyes de Newton; concepto de fuerza*
  - 7.7 *Crítica del concepto de fuerza*
  - 7.8 *Unidades de fuerza*
  - 7.9 *Fuerzas de fricción*
  - 7.10 *Fuerzas de fricción en fluidos*
  - 7.11 *Sistemas con masa variable*
  - 7.12 *Movimiento curvilíneo*
  - 7.13 *Momentum angular*
  - 7.14 *Fuerzas centrales*
  - 7.15 *Equilibrio y reposo*

## 7.1 *Introducción*

En el capítulo 5, relativo a la cinemática, discutimos los elementos que intervienen en la “descripción” del movimiento de una partícula. Investiguemos ahora la razón *por la cual* las partículas se mueven de la manera en que lo hacen. ¿Por qué los cuerpos cerca de la superficie de la tierra caen con aceleración constante? ¿Por qué la tierra se mueve alrededor del sol en una órbita elíptica? ¿Por qué los átomos se unen para formar moléculas? ¿Por qué oscila un resorte cuando se le estira y luego se le suelta? Quisiéramos comprender estos y otros movimientos que observamos continuamente a nuestro alrededor. Esta comprensión es importante no solamente desde el punto de vista del conocimiento básico de la naturaleza, sino también desde el punto de vista de la ingeniería y las aplicaciones prácticas. La comprensión de cómo se producen los movimientos nos capacita para diseñar máquinas y otros instrumentos prácticos que se mueven en la forma en que nosotros deseamos. El estudio de la relación entre el movimiento de un cuerpo y las causas de este movimiento se denomina *dinámica*.

Por nuestra experiencia diaria sabemos que el movimiento de un cuerpo es un resultado directo de sus *interacciones* con los otros cuerpos que lo rodean. Cuando un bateador golpea una pelota, su acción modifica el movimiento de la pelota. La trayectoria de un proyectil no es sino el resultado de su interacción con la tierra. El movimiento de un electrón alrededor de un núcleo es el resultado de sus interacciones con el núcleo y quizás con otros electrones. Las interacciones se describen convenientemente por un concepto matemático denominado *fuerza*. El estudio de la dinámica es básicamente el análisis de la relación entre la fuerza y los cambios en el movimiento de un cuerpo.

Las leyes del movimiento que presentaremos en la siguiente discusión son generalizaciones que resultan de un análisis cuidadoso de los movimientos que observamos alrededor nuestro y la extrapolación de nuestras observaciones a ciertos experimentos ideales o simplificados.

## 7.2 *Ley de inercia*

Una *partícula libre* es aquella que no está sujeta a interacción alguna. Estrictamente no existe tal cosa, ya que toda partícula está sujeta a interacciones con el resto del mundo. Luego una partícula libre deberá estar completamente aislada, o ser la única partícula en el mundo. Pero entonces sería imposible observarla porque, en el proceso de la observación, hay siempre una interacción entre el observador y la partícula. En la práctica, sin embargo, hay algunas partículas que podemos considerar libres, ya sea porque se encuentran suficientemente lejos de otras y sus interacciones son despreciables, o porque las interacciones con las otras partículas se cancelan, dando una interacción total nula.

Consideremos ahora la *ley de inercia*, la cual establece que

*una partícula libre se mueve siempre con velocidad constante, o (lo que es lo mismo) sin aceleración.*

Esto es, una partícula libre se mueve en línea recta con una velocidad constante o se encuentra en reposo (velocidad cero). Esta proposición se denomina la *primera ley de Newton*, porque fue inicialmente propuesta por Sir Isaac Newton (1642-1727). Es la primera de tres "leyes" que él enunciara en el siglo diecisiete.

Nosotros recordamos de los capítulos 5 y 6 que el movimiento es relativo. Luego, cuando enunciamos la ley de inercia debemos indicar con respecto a quién o a qué se refiere el movimiento de la partícula libre. Suponemos que el movimiento de la partícula está relacionado a un observador quien es asimismo una partícula libre (o un sistema); es decir, que no está sujeto a interacciones con el resto del mundo. Tal observador se denomina *observador inercial*, y el sistema de referencia que él utiliza se llama un *sistema inercial de referencia*. Suponemos que los sistemas inerciales de referencia no están rotando, debido a que la existencia de rotaciones implicaría que hay aceleraciones (o cambios en la velocidad debidos a cambios en la dirección), y entonces que hay interacciones, lo cual sería contrario a nuestra definición del observador inercial como "partícula libre" o sin aceleración. De acuerdo a la ley de inercia, diferentes observadores inerciales pueden estar en movimiento, unos con relación a otros, con velocidad constante. Estando sus observaciones relacionadas ya sea mediante las transformaciones de Galileo o las de Lorentz, dependiendo ello de la magnitud de sus velocidades relativas.

Debido a su rotación diaria y a su interacción con el sol y los otros planetas, la tierra no es un sistema inercial de referencia. Sin embargo, en muchos casos los efectos de la rotación de la tierra y las interacciones son despreciables, y los sistemas de referencia unidos a nuestros laboratorios terrestres pueden, sin gran error, ser considerados inerciales. Tampoco el sol es un sistema inercial de referencia. Debido a sus interacciones con otros cuerpos en la galaxia, el sol describe una órbita curva alrededor del centro de la galaxia (Fig. 7-1). Sin embargo, como el movimiento del sol es más rectilíneo y uniforme que el de la tierra (la aceleración orbital de la tierra es 15 millones de veces mayor que la del sol), la semejanza del sol a un sistema inercial es mucho mayor.

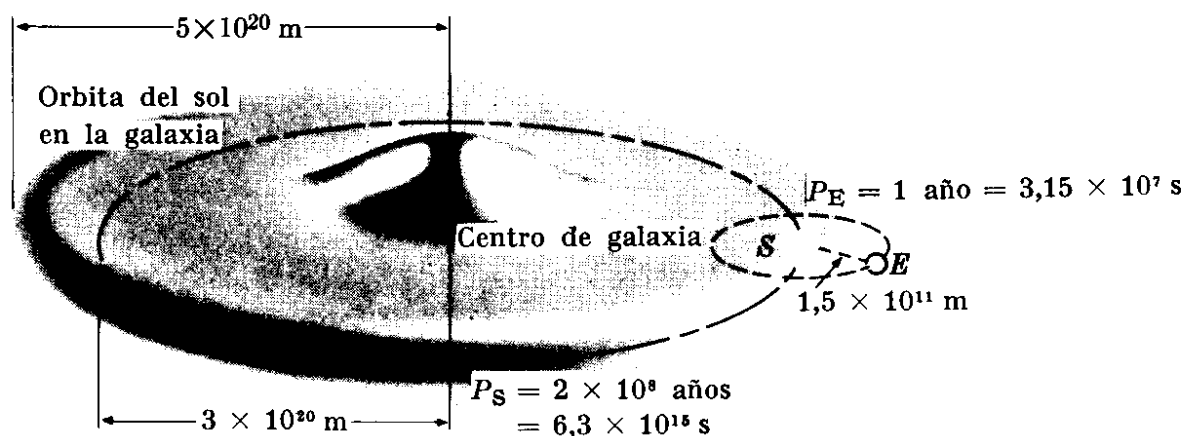


Fig. 7-1. Un sistema situado en la tierra no es inercial debido a la rotación diaria de la tierra y a su movimiento acelerado alrededor del sol. El sol igualmente no es un sistema inercial debido a su movimiento alrededor del centro de la galaxia. Sin embargo, para propósitos prácticos cualquiera de estos cuerpos puede utilizarse para definir un sistema inercial.

Ilustremos algunos experimentos realizados en nuestros laboratorios terrestres que sustenten la ley de inercia. Una bola esférica en reposo en una superficie horizontal lisa permanece en reposo a menos que actuemos sobre ella. Esto es, su velocidad permanece constante, con un valor igual a cero. Suponemos que la superficie sobre la cual la bola está reposando equilibra la interacción entre la tierra y la bola, y por tanto que la bola se encuentra esencialmente libre de interacciones. Cuando la bola es golpeada, como en el juego de billar, sufre momentáneamente una interacción y gana velocidad, pero después se encuentra libre nuevamente, moviéndose en una línea recta con la velocidad adquirida cuando se le golpeó. Si la bola es rígida y perfectamente esférica, y la superficie es perfectamente horizontal y lisa, podemos suponer que la bola continuará moviéndose de ese modo indefinidamente. En la práctica este no es el caso, ya que la bola disminuye su velocidad y eventualmente se detiene. Decimos entonces que ha habido una interacción adicional entre la bola y la superficie. Esta interacción, llamada *fricción*, se estudiará más adelante.

### 7.3 *Momentum lineal*

En la sección 2.3 dimos una definición operacional de *masa* diciendo que es un número que asociamos a cada partícula o cuerpo, el que se obtiene comparando el cuerpo con un cuerpo patrón, utilizando para ello una balanza de brazos iguales. La masa, entonces, es un coeficiente que distingue una partícula de otra. Nuestra definición operacional de masa nos da su valor suponiendo que la partícula se halle en reposo. Sin embargo, a partir de dicha definición no sabemos si la masa será la misma cuando se encuentre en movimiento; luego, para ser precisos, deberíamos utilizar el término *masa en reposo*. Supongamos, por el momento, que la masa es independiente del estado de movimiento y llamémosla simplemente masa. Más adelante, en el capítulo 11, haremos un análisis más cuidadoso de este aspecto importante y verificaremos que nuestra suposición es una buena aproximación en tanto la velocidad de la partícula sea muy pequeña comparada con la velocidad de la luz.

El *momentum lineal* de una partícula se define como el producto de su masa por su velocidad. Designándolo por  $\mathbf{p}$ , tenemos

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}. \quad (7.1)$$

El momentum lineal es una cantidad vectorial, y tiene la misma dirección de la velocidad. Es un concepto físico de mucha importancia porque combina los dos elementos que caracterizan el estado dinámico de una partícula: su masa y su velocidad. En adelante escribiremos la palabra *momentum* en lugar de “momentum lineal”. En el sistema MKSC, el momentum se expresa en  $\text{m kg s}^{-1}$  (a esta unidad no se le ha dado un nombre especial).

El hecho de que el momentum lineal es una cantidad dinámica con mayor información que la velocidad puede demostrarse estudiando algunos experimentos simples. Por ejemplo, es más difícil detener o aumentar la velocidad de un camión

cargado en movimiento que de uno vacío, aun si la velocidad original fuera la misma en cada caso, porque el momentum de un camión cargado es mayor.

Podemos ahora expresar de otra manera la ley de inercia diciendo que

*una partícula libre siempre se mueve con momentum constante.*

## 7.4 Principio de conservación del momentum

Una consecuencia inmediata de la ley de inercia es que un observador inercial reconoce que una partícula no es libre (es decir, que interactúa con otras partículas) cuando observa que la velocidad o el momentum de la partícula deja de permanecer constante; o en otras palabras, cuando la partícula experimenta una aceleración.

Consideremos ahora una situación ideal. Supongamos que, en lugar de observar una partícula aislada en el universo, como se supuso en la ley de inercia, observamos dos partículas que están sujetas solamente a su interacción mutua y se encuentran por otro lado aisladas del resto del universo. Como resultado de su interacción, sus velocidades individuales no son constantes sino que cambian con el tiempo, y sus trayectorias en general son curvas, como se indica en la Fig. 7-2 por las curvas (1) y (2). En un cierto tiempo  $t$ , la partícula 1 se encuentra en  $A$  con velocidad  $\mathbf{v}_1$  y la partícula 2 en  $B$  con velocidad  $\mathbf{v}_2$ . Posteriormente en el tiempo  $t'$ , las partículas se encuentran en  $A'$  y  $B'$  con velocidades  $\mathbf{v}'_1$  y  $\mathbf{v}'_2$ , respectivamente. Denominando  $m_1$  y  $m_2$  las masas de las partículas, el momentum total del sistema en el tiempo  $t$  es

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2. \quad (7.2)$$

Posteriormente en  $t'$ , el momentum total del sistema es

$$\mathbf{P}' = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 = m_1 \mathbf{v}'_1 + m_2 \mathbf{v}'_2. \quad (7.3)$$

Al escribir esta ecuación hemos mantenido nuestra suposición de que las masas de las partículas son independientes de sus estados de movimiento; así hemos usado las mismas masas de la ec. (7.2). De otra manera hubiéramos escrito  $\mathbf{P}' = m'_1 \mathbf{v}'_1 + m'_2 \mathbf{v}'_2$ . El resultado importante de nuestro experimento es que independientemente de los valores de  $t$  y  $t'$ , siempre encontramos como resultado de nuestra observación, que  $\mathbf{P} = \mathbf{P}'$ . En otros términos,

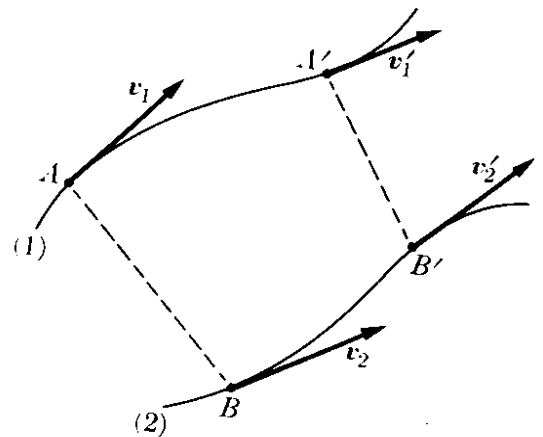


Fig. 7-2. Interacción entre dos partículas.

*el momentum total de un sistema compuesto de dos partículas que están sujetas solamente a su interacción mutua permanece constante.*

Este resultado constituye el *principio de la conservación del momentum*, uno de los principios fundamentales y universales de la física. Consideremos, por ejemplo, un átomo de hidrógeno, compuesto por un electrón rotando alrededor de un protón, y supongamos que el sistema se encuentra aislado de modo que solamente se tomará en cuenta la interacción entre el electrón y el protón. Por consiguiente, la suma de los momentos del electrón y del protón con relación a un sistema inercial de referencia es constante. Similarmente, consideremos el sistema compuesto por la tierra y la luna. Si fuera posible despreciar las interacciones debidas al sol y a los otros cuerpos del sistema planetario, entonces la suma de los momentos de la tierra y la luna, con relación a un sistema inercial de referencia, sería constante.

Aunque el principio ya enunciado de la conservación del momentum considera solamente dos partículas, este principio se cumple para cualquier número de partículas que formen un sistema aislado; es decir, partículas que están sometidas solamente a sus propias interacciones mutuas y no a interacciones con otras partes del mundo. Por ello, el principio de la conservación del momentum en su forma general dice

*el momentum total de un sistema aislado de partículas es constante.*

Por ejemplo, consideremos una molécula de hidrógeno compuesta por dos átomos (dos electrones y dos protones). Si la molécula está aislada, de modo que solamente las interacciones entre estas cuatro partículas son consideradas, la suma de sus momentos en relación a un sistema inercial de referencia será constante. Similarmente, consideremos nuestro sistema planetario, compuesto del sol, los planetas y sus satélites. Si pudiéramos despreciar las interacciones con todos los otros cuerpos celestes, el momentum total del sistema planetario en relación a un sistema inercial de referencia sería constante.

No se conocen excepciones a este principio general de conservación del momentum. Por el contrario, cuando parece que hay violación de este principio en un experimento, el físico inmediatamente busca alguna partícula desconocida o que no ha notado y la cual puede ser la causa de la aparente falta de conservación del momentum. Es esta búsqueda la que ha dado lugar a que los físicos identifiquen el neutrón, el neutrino, el fotón, y muchas otras partículas elementales. Más adelante tendremos que reformular el principio de la conservación del momentum en una manera algo diferente; pero para la gran mayoría de los problemas que discutiremos, podemos usarlo en la manera en que se ha propuesto.

La conservación del momentum puede expresarse matemáticamente escribiendo la siguiente ecuación:

$$\mathbf{P} = \sum_i \mathbf{p}_i = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 + \dots = \text{constante.} \quad (7.4)$$

la cual implica que, en un sistema aislado, el cambio en el momentum de una partícula durante un intervalo particular de tiempo es igual y opuesto al cambio en el momentum del resto del sistema durante el mismo intervalo de tiempo. Así, por ejemplo, en el caso de una molécula de hidrógeno aislada, el cambio del

momentum de uno de los electrones es igual y opuesto a la suma de los cambios en el momentum del otro electrón y de los dos protones.

Para el caso particular de dos partículas

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \text{constante} \quad (7.5)$$

es decir

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2. \quad (7.6)$$

Nótese que, de la ec. (7.6)

$$\mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}'_2 = -(\mathbf{p}'_2 - \mathbf{p}_2). \quad (7.7)$$

O, llamando  $\mathbf{p}' - \mathbf{p} = \Delta\mathbf{p}$  el cambio en el momentum entre los tiempos  $t$  y  $t'$ , podemos escribir

$$\Delta\mathbf{p}_1 = -\Delta\mathbf{p}_2. \quad (7.8)$$

Este resultado indica que, para dos partículas interactuantes, el cambio en el momentum de una partícula en un cierto intervalo de tiempo es igual y opuesto al cambio en el momentum de la otra durante el mismo intervalo de tiempo (Fig. 7-3). Por lo tanto, el resultado anterior puede expresarse igualmente diciendo que

*una interacción produce un intercambio de momentum,*

de manera que el momentum “perdido” por una de las partículas interactuantes es igual al momentum “ganado” por la otra partícula.

La ley de inercia propuesta en la sección 7.2 es justamente un caso particular del principio de conservación del momentum. Como tenemos solamente una partícula aislada en lugar de varias, la ec. (7.4), tiene solamente un término por lo que  $\mathbf{p} = \text{constante}$  o lo que es lo mismo,  $\mathbf{v} = \text{constante}$ , lo cual es una expresión de la ley de inercia.

Continuamente encontramos alrededor nuestro, ejemplos del principio de conservación del momentum. Un ejemplo es el retroceso de una arma de fuego. Inicialmente el sistema del cañón y la bala se hallan en reposo, y el momentum total es cero. Cuando el cañón es disparado, retrocede para compensar el momentum ganado por la bala. Cuando un núcleo se desintegra, emitiendo (por ejemplo) un electrón y un neutrino, el momentum total del electrón, el neutrino, y el núcleo resultante debe ser cero, ya

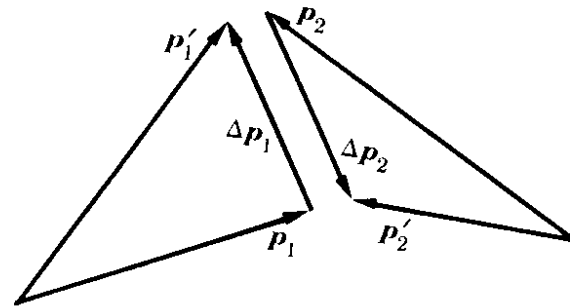


Fig. 7-3. Intercambio de momentum como resultado de la interacción entre dos partículas.

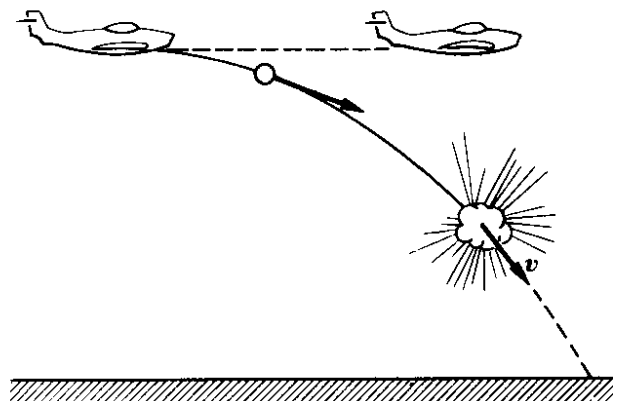


Fig. 7-4. El momentum se conserva en la explosión de una granada.

que inicialmente el sistema se encontraba en reposo con respecto a un sistema inercial en el laboratorio. Similarmente, si una granada o una bomba estalla en pleno vuelo, el momentum total de todos los fragmentos inmediatamente después de la explosión debe tener un valor igual al momentum de la granada inmediatamente antes de la explosión (Fig. 7-4).

**EJEMPLO 7.1.** Un revólver cuya masa es de 0,80 kg dispara una bala cuya masa es de 0,016 kg con una velocidad de  $700 \text{ m s}^{-1}$ . Calcular la velocidad de retroceso del revólver.

**Solución:** Inicialmente tanto la bala como el revólver se encuentran en reposo y su momentum total es cero. Después de la explosión la bala se desplaza hacia adelante con un momentum

$$p_1 = m_1 v_1 = (0,016 \text{ kg}) \times (700 \text{ m s}^{-1}) = 11,20 \text{ m kg s}^{-1}.$$

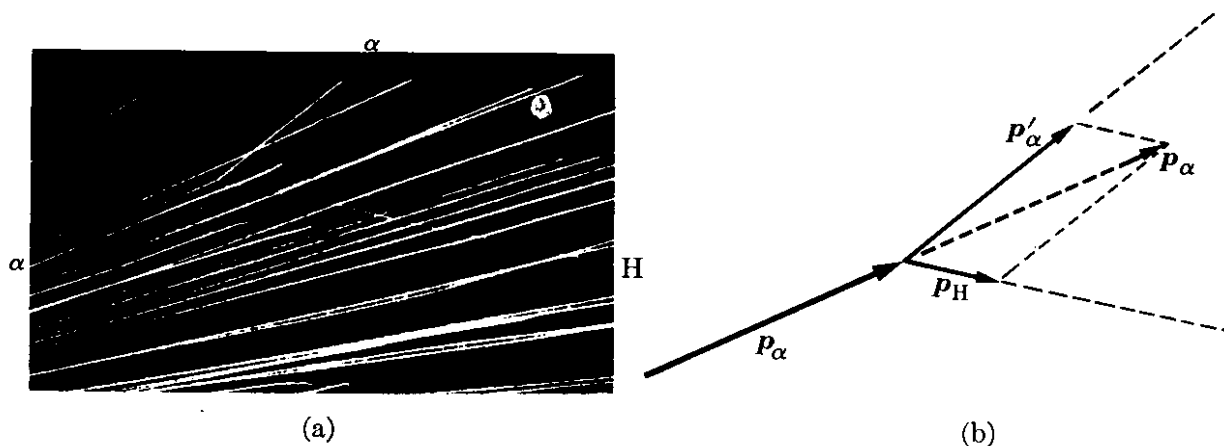
El revólver debe entonces retroceder con momentum igual pero opuesto. Por consiguiente debemos tener también :

$$p_2 = 11,20 \text{ m kg s}^{-1} = m_2 v_2$$

o, ya que  $m_2 = 0,80 \text{ kg}$ ,

$$v_2 = \frac{11,20 \text{ m kg s}^{-1}}{0,80 \text{ kg}} = 14,0 \text{ m s}^{-1}.$$

**EJEMPLO 7.2.** Análisis de la conservación del momentum en las interacciones entre partículas atómicas.



**Fig. 7-5.** Conservación del momentum en la colisión de una partícula (núcleo de helio) y un protón (núcleo de hidrógeno).

**Solución:** La fotografía de la cámara de niebla en la Fig. 7-5 (a), muestra una partícula alfa (o núcleo de helio) incidente interactuando con un átomo de hidrógeno que se encontraba inicialmente en reposo formando parte del gas de la cámara. La partícula alfa sufre una deflexión de su dirección original y el átomo de hidrógeno es puesto en movimiento. Si conocemos las masas respectivas, las que en este caso tienen una relación de 4 a 1, y medimos sus velocidades (por técnicas especiales desarrolladas para analizar fotografías de cámaras de niebla), podemos trazar el diagrama del momentum de la Fig. 7-5 (b). Cuando, después de la interacción, los



momentos se suman, el resultado es igual al momentum de la partícula alfa incidente; esto es  $p_\alpha = p'_\alpha + p_H$ . Hasta ahora se ha observado que la conservación del momentum se cumple en todas las interacciones atómicas y nucleares.

### 7.5 Redefinición de masa

Utilizando la definición (7.1) del momentum, y suponiendo que la masa de una partícula es constante, podemos expresar el cambio en el momentum de la partícula en un tiempo  $\Delta t$  como

$$\Delta p = \Delta(mv) = m \Delta v.$$

Por ello, la ec. (7.8) se convierte en  $m_1 \Delta v_1 = -m_2 \Delta v_2$  o, considerando solamente las magnitudes:

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{|\Delta v_1|}{|\Delta v_2|}, \quad (7.9)$$

la cual indica que los cambios de magnitud de velocidad son inversamente proporcionales a las masas. Este resultado nos permite definir la masa dinámicamente. Así, si la partícula 1 es nuestra partícula "patrón", su masa  $m_1$  puede definirse como la unidad. Haciendo interactuar cualquier otra partícula, llamémosle la partícula 2, con la partícula patrón y aplicando la ec. (7.9) podemos obtener su masa  $m_2$ . Este resultado indica que nuestra definición operacional previa de masa de la sección 2.3 puede reemplazarse por esta nueva definición operacional, derivada a partir del principio de conservación del momentum y la suposición de que la masa no cambia con la velocidad.

### 7.6 Segunda y tercera leyes de Newton; concepto de fuerza

En muchos casos observamos el movimiento de solamente una partícula, ya sea porque no tenemos manera de observar las otras partículas con las cuales interactúa o porque las ignoramos a propósito. En esta situación es algo difícil usar el principio de conservación del momentum. Sin embargo, hay una manera práctica de resolver esta dificultad, introduciendo el concepto de *fuerza*. La teoría matemática correspondiente se denomina *dinámica de una partícula*.

La ecuación 7.8 relaciona el cambio en el momentum de las partículas 1 y 2 durante el intervalo de tiempo  $\Delta t = t' - t$ . Dividiendo ambos lados de esta ecuación entre  $\Delta t$ , podemos escribir

$$\frac{\Delta p_1}{\Delta t} = - \frac{\Delta p_2}{\Delta t}, \quad (7.10)$$

que indica que las variaciones promedio con respecto al tiempo del momentum de las partículas en un intervalo  $\Delta t$  son iguales en magnitud y opuestas en direc-

ción. Si hacemos  $\Delta t$  muy pequeño, vale decir, si encontramos el límite de la ec. (7.10) cuando  $\Delta t \rightarrow 0$ , obtenemos

$$\frac{d\mathbf{p}_1}{dt} = - \frac{d\mathbf{p}_2}{dt}, \quad (7.11)$$

de modo que las variaciones (vectoriales) instantáneas del momentum de las partículas, en cualquier instante  $t$ , son iguales y opuestas. Así, utilizando nuestros ejemplos previos, podemos ver que la variación, con respecto al tiempo, del momentum del electrón en un átomo aislado de hidrógeno es igual y opuesta a la variación, con respecto al tiempo, del momentum del protón. O, si suponemos que la tierra y la luna constituyen un sistema aislado, la variación, con respecto al tiempo, del momentum de la tierra es igual y opuesto a la variación, con respecto al tiempo, del momentum de la luna.

*Designaremos el cambio con respecto al tiempo del momentum de una partícula con el nombre de "fuerza".* Esto es, la fuerza que "actúa" sobre una partícula es

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}. \quad (7.12)$$

La palabra "actúa" no es apropiada ya que sugiere la idea de algo aplicado a la partícula. La fuerza es un concepto matemático el cual, por definición, es igual a la derivada con respecto al tiempo del momentum de una partícula dada, cuyo valor a su vez depende de su interacción con otras partículas. Por consiguiente, físicamente, podemos considerar la fuerza como la expresión de una interacción. Si la partícula es libre,  $\mathbf{p} = \text{constante}$  y  $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt = 0$ . Por lo tanto, podemos decir que no actúan fuerzas sobre una partícula libre.

La expresión (7.12) es la *segunda ley de movimiento de Newton*; pero, como podemos ver, es más una definición que una ley, y es una consecuencia directa del principio de conservación del momentum.

Utilizando el concepto de fuerza, podemos escribir la ec. (7.11) en la forma

$$\mathbf{F}_1 = - \mathbf{F}_2, \quad (7.13)$$

donde  $\mathbf{F}_1 = d\mathbf{p}_1/dt$  es la fuerza sobre la partícula 1 debido a su interacción con la partícula 2 y  $\mathbf{F}_2 = d\mathbf{p}_2/dt$  es la fuerza sobre la partícula 2 debido a su interacción con la partícula 1. Luego llegamos a la conclusión que

*cuando dos partículas interactúan, la fuerza sobre una partícula es igual y opuesta a la fuerza sobre la otra.*

Esta es la *tercera ley del movimiento de Newton*, nuevamente una consecuencia de la definición de fuerza y el principio de conservación del momentum. Se le denomina algunas veces como la *ley de acción y reacción*.

En numerosos problemas  $\mathbf{F}_1$  (y por consiguiente también  $\mathbf{F}_2$ ) puede expresarse como una función del vector de posición relativo de las dos partículas,  $\mathbf{r}_{12}$ , y quizás también como una función de su velocidad relativa. De acuerdo a la ec. (7.9), si  $m_2$  es mucho mayor que  $m_1$ , el cambio en la velocidad de  $m_2$  es muy pequeño

comparado con aquel de  $m_1$ , y podemos suponer que la partícula 2 permanece prácticamente en reposo en algún sistema de referencia inercial. Podemos entonces hablar del movimiento de la partícula 1 bajo la acción de la fuerza  $\mathbf{F}_1$  (Fig. 7.6), y  $\mathbf{F}_1$  puede considerarse una función de la posición o la velocidad de  $m_1$  solamente. Es en estos casos que la ec. (7.12) es particularmente útil. Por ejemplo, este es el caso de los cuerpos terrestres que se mueven bajo la acción gravitacional de la tierra, o de un electrón que se mueve con relación a un núcleo atómico.

La determinación de  $\mathbf{F}(\mathbf{r}_{12})$  en las diversas interacciones encontradas en la naturaleza es uno de los problemas más importantes de la física. Es precisamente debido a que el físico ha sido capaz de asociar formas funcionales de  $\mathbf{F}(\mathbf{r}_{12})$  con diferentes interacciones observadas en la naturaleza que el concepto de fuerza le ha sido tan útil.

Recordando la definición (7.1) del momentum, podemos escribir la ec. (7.12) en la forma

$$\mathbf{F} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt}, \quad (7.14)$$

y si  $m$  es constante, tenemos

$$\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad \text{ó} \quad \mathbf{F} = m\mathbf{a}. \quad (7.15)$$

Podemos expresar la ec. (7.15) en palabras diciendo:

*La fuerza es igual a la masa multiplicada por la aceleración, si la masa es constante.*

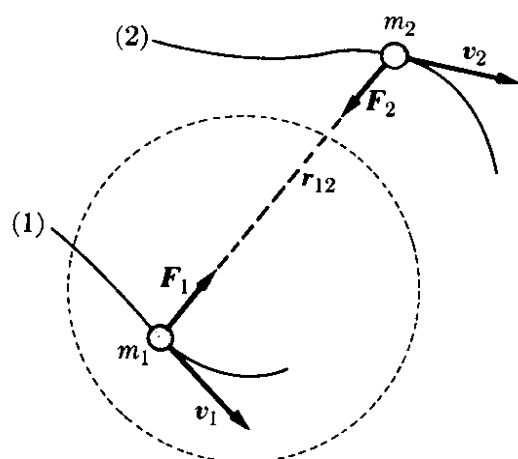
Nótese que en este caso la fuerza tiene la misma dirección que la aceleración. Por la ec. (7.15) apreciamos que si la fuerza es constante la aceleración,  $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m$ , es también constante y el movimiento es uniformemente acelerado. Esto es lo que sucede con cuerpos que caen cerca de la superficie terrestre: todos los cuerpos caen hacia la tierra con la misma aceleración  $\mathbf{g}$ , y, por consiguiente, la fuerza de atracción gravitacional de la tierra, llamada *peso*, es

$$\mathbf{W} = m\mathbf{g}. \quad (7.16)$$

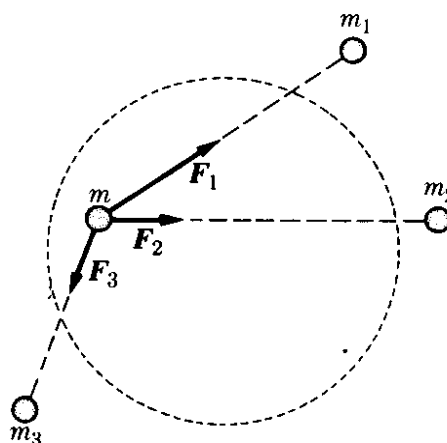
[Estrictamente hablando, debíamos escribir  $\mathbf{W} = m\mathbf{g}_0$ , estando  $\mathbf{g}$  y  $\mathbf{g}_0$  relacionadas por la ec. (6.27)].

Al escribir la ec. (7.12) hemos supuesto que la partícula interactúa solamente con otra partícula como se desprende de la discusión precedente a la ec. (7.12), y la ilustración de la Fig. 7-6. Sin embargo, si la partícula  $m$  interactúa con las partículas  $m_1, m_2, m_3, \dots$  (Fig. 7-7) cada una produce un cambio en el momentum de  $m$  que es caracterizado por las fuerzas respectivas  $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \dots$ , de acuerdo a la ec. (7.12). Luego el cambio *total* del momentum de la partícula  $m$  es

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \dots = \mathbf{F}.$$



**Fig. 7-6.** Como resultado de la conservación del momentum, la acción y la reacción son iguales y opuestas.



**Fig. 7-7.** Fuerza resultante sobre una partícula.

La suma vectorial de la derecha recibe el nombre de fuerza *resultante*  $F$  aplicada sobre  $m$ . Esta regla para calcular la fuerza resultante ya ha sido usada en el capítulo 4. En la Fig. 7-7 no hemos indicado las interacciones posibles entre  $m_1$  y  $m_2$ ,  $m_1$  y  $m_3$ ,  $m_2$  y  $m_3$ , etc., debido a que estas interacciones no son relevantes para nuestro presente propósito. También hemos supuesto implícitamente que la interacción entre  $m$  y  $m_1$ , por ejemplo, no es alterada por la presencia de  $m_3$ ,  $m_4$ , ...; en otras palabras, hemos supuesto que no hay efectos de interferencia.

En las secciones que siguen en este capítulo, en las cuales discutiremos el movimiento de una partícula, supondremos que la fuerza resultante  $F$  es sólo función de las coordenadas de la partícula, ignorando así el movimiento de las otras partículas con las cuales interactúa. Esta aproximación muy útil, como dijimos antes, constituye lo que se conoce como la *dinámica de una partícula*. En capítulos posteriores consideraremos los movimientos de sistemas de partículas y las fuerzas asociadas con las diferentes interacciones conocidas por los físicos.

## 7.7 Crítica del concepto de fuerza

Hagamos ahora una evaluación crítica del concepto de fuerza. Nosotros introdujimos este concepto (esto es,  $F = dp/dt$ ) en la ec. (7.12) como una noción matemática conveniente para describir la variación del cambio del momentum de una partícula debido a sus interacciones con otras partículas. Sin embargo, en la vida diaria tenemos una imagen algo diferente del concepto de fuerza. Nosotros “sentimos” una fuerza (realmente una interacción) cuando un bateador golpea una pelota, un martillo golpea un clavo, un boxeador golpea la cara de su oponente, o un peso hala una cuerda. Y obviamente es difícil reconciliar esta imagen sensorial de fuerza con la fuerza o interacción entre el sol y la tierra. En ambos casos, sin embargo, tenemos una interacción entre dos cuerpos. El estudiante puede decir: sí, pero hay una gran distancia entre el sol y la tierra, mientras que el bateador “toca” la pelota. Y este es precisamente el punto en el cual las

cosas no son tan diferentes como parecen. No importa cuán compacto pueda parecer un sólido, sus átomos están separados y mantienen sus posiciones en la misma manera en que los planetas mantienen su posición como resultado de sus interacciones con el sol. El "bate" nunca está en contacto con la pelota en el sentido microscópico, aunque sus moléculas se acercan mucho a aquellas de la pelota, produciendo una alteración temporal en sus posiciones como resultado de sus interacciones. Así todas las fuerzas en la naturaleza corresponden a interacciones entre cuerpos situados a cierta distancia entre ellos. En algunos casos la distancia es tan pequeña desde el punto de vista humano que tendemos a extrapolar y pensamos que es cero. En otros casos la distancia es muy grande desde el punto de vista humano. Sin embargo, desde el punto de vista físico, no hay diferencia esencial entre las dos clases de fuerza. Por lo tanto, debemos aplicar tales conceptos sensoriales o macroscópicos como "contacto" muy cuidadosamente cuando tratemos procesos en escala atómica.

El hecho de que dos partículas interactúan cuando las separa cierta distancia, significa que debemos considerar un mecanismo para la transmisión de la interacción. Este mecanismo se considerará en los capítulos posteriores; aquí diremos solamente que nuestra discusión requerirá una revisión de la ec. (7.5). En la forma en que está escrita la ec. (7.5) presupone que la interacción entre las partículas es instantánea. Sin embargo, las interacciones se propagan con una velocidad finita presumiblemente igual a la de la luz, como se discutirá en los capítulos posteriores. A fin de tomar en cuenta el retardo en la interacción debida a la velocidad finita de la propagación será necesario incorporar un término adicional a la ec. (7.5). Cuando esto se hace, el concepto de fuerza pasa a un plano secundario y la ley de acción y reacción pierde su significado. Sin embargo, mientras las partículas se desplacen a velocidades pequeñas en comparación con la velocidad de la luz, o interactúen muy débilmente, la ec. (7.5) y la teoría que emana de ella constituye una aproximación excelente para describir la situación física.

## 7.8 Unidades de fuerza

De las ecs. (7.12) o (7.15) apreciamos que la unidad de fuerza debe expresarse en función de las unidades de masa y aceleración. Así en el sistema MKSC la fuerza se mide en  $\text{m kg s}^{-2}$ , una unidad denominada *newton* y denotada por N; esto es,  $N = \text{m kg s}^{-2}$ , consecuentemente, definimos el newton como la fuerza que es aplicada a un cuerpo cuya masa es de un kg produce una aceleración de  $1 \text{ m s}^{-2}$ .

Aun es frecuente el uso de la unidad cgs de fuerza llamada *dina*, y definida como la fuerza que aplicada a un cuerpo cuya masa es de 1 gramo, le proporciona una aceleración de  $1 \text{ cm s}^{-2}$ ; esto es,  $\text{dina} = \text{cm g s}^{-2}$ . Notando que  $1 \text{ kg} = 10^3 \text{ g}$  y que  $1 \text{ m} = 10^2 \text{ cm}$ , vemos que  $N = \text{m kg s}^{-2} = (10^2 \text{ cm}) (10^3 \text{ g}) \text{ s}^{-2} = 10^5 \text{ dinas}$ .

La unidad británica de fuerza, muy raramente usada, es el *poundal*, definida como la fuerza que actuando sobre un cuerpo cuya masa es de 1 libra le proporciona una aceleración de  $1 \text{ pie lb s}^{-2}$ . Recordando que  $1 \text{ lb} = 0,4536 \text{ kg}$  y que

1 pie = 0,3048 m, podemos escribir que poundal = (0,3048 m) (0,4536 kg) s<sup>-2</sup> = 0,1383 N.

Otras dos unidades son utilizadas frecuentemente por los ingenieros. Ellas están basadas en la ec. (7.16) la cual define el peso de un cuerpo. Una es el *kilogramo fuerza*, abreviado kgf, que se define como una fuerza igual al peso de una masa igual a un kilogramo. Así, poniendo  $m = 1$  kg en la ec. (7.16), tenemos  $\text{kgf} = gN \simeq 9,807$  N. Análogamente la *libra fuerza*, abreviada lbf, se define como una fuerza igual al peso de una masa igual a 1 libra. Poniendo  $m = 1$  lb en la ec. (7.16) obtenemos  $\text{lbf} = g \text{ pdl} \simeq 32,17 \text{ pdl} = 4,448$  N.

Nótese que la masa medida en kilogramos o libras y el peso medido en kilogramos fuerza o libras fuerza se expresan por el mismo número. Así una masa de 7,24 lb pesa 7,24 lbf o 238,7 paundales. La introducción de kgf y lbf para medir fuerzas requiere la definición de nuevas unidades de masa si deseamos usar estas unidades de fuerza junto con la ecuación de movimiento  $F = ma$ . Por ejemplo, en el sistema británico tenemos que

$$\text{lbf} = (\text{nueva unidad de masa}) \times (\text{pie s}^{-2}).$$

Llamando la nueva unidad de masa un *slug*, vemos que

$$\text{slug} = \frac{\text{lbf}}{\text{pie s}^{-2}} = \frac{32,17 \text{ pdl}}{\text{pie s}^{-2}} = 32,17 \text{ lb},$$

ó  $1 \text{ lb} = 0,0311 \text{ slug}$ . Un slug es, por consiguiente, la masa de un cuerpo cuya aceleración es de  $1 \text{ pie s}^{-2}$  cuando actúa sobre él una fuerza de 1 lbf.

Aunque el peso, siendo una fuerza, debía expresarse en N o en paundales, es costumbre, especialmente en usos caseros y de ingeniería, expresarlo en kilogramos fuerza o libras fuerza. En la práctica, sin embargo, uno habla de una fuerza de tantas libras y no de libras fuerza.

**EJEMPLO 7.3.** Un automóvil cuya masa es de 1000 kg sube por un camino cuya inclinación es de  $20^\circ$ . Determinar la fuerza que ha de ejercer el motor si el auto debe moverse (a) con movimiento uniforme, (b) con aceleración de  $0,2 \text{ m s}^{-2}$ . Encontrar también en cada caso la fuerza ejercida sobre el automóvil por el camino.

**Solución:** Designamos la masa del automóvil por  $m$ ; las fuerzas que actúan sobre él se ilustran en la Fig. 7-8. Ellas son su peso  $W = mg$ , dirigido hacia abajo; la fuerza  $F$  debido al motor hacia arriba, y la fuerza  $N$  debido al camino en dirección perpendicular a  $F$ . Usando un conjunto de ejes como el indicado en la figura, y empleando la ec. (7.15), encontramos que el movimiento a lo largo de la dirección  $X$  satisface la ecuación

$$F - mg \sin \alpha = ma \quad \text{ó} \quad F = m(a + g \sin \alpha).$$

El auto no tiene movimiento a lo largo del eje  $Y$ , por lo que

$$N - mg \cos \alpha = 0 \quad \text{ó} \quad N = mg \cos \alpha.$$

Notamos que la fuerza  $N$  debido al camino es independiente de la aceleración del auto e, introduciendo valores numéricos, es igual a  $9210 \text{ N}$ . Pero la fuerza  $F$  debido al motor depende de la aceleración del auto. Cuando el auto se mueve con

velocidad constante,  $a = 0$ , y  $F = mg \sin \alpha$ ; en nuestro ejemplo es 3350 N. Cuando se mueve con la aceleración de  $0,2 \text{ m s}^{-2}$ , entonces  $F = 3550 \text{ N}$ .

Sugerimos que el estudiante resuelva este problema cuando el auto se mueve hacia abajo.

**EJEMPLO 7.4.** Determinar la aceleración con la cual se mueven las masas  $m$  y  $m'$  de la Fig. 7-9. Suponer que la rueda rota libremente alrededor de  $O$  y despreciar cualquier efecto que pueda deberse a la masa de la rueda (estos efectos se considerarán más adelante, en el capítulo 10).

**Solución:** Supongamos que el movimiento es en la dirección mostrada por la flecha, de manera que  $m$  está cayendo y  $m'$  subiendo. Ambas masas se mueven con la misma aceleración  $a$  si la cuerda es inextensible, como podemos suponer. Las masas interactúan a través de la cuerda. Designaremos por  $F$  las fuerzas iguales y opuestas que ejercen las masas entre sí. Luego la ecuación del movimiento hacia abajo de  $m$  con aceleración  $a$  es  $mg - F = ma$ , y la ecuación del movimiento hacia arriba de  $m'$  con la misma aceleración  $a$  es  $F - m'g = m'a$ .

Sumando las dos ecuaciones, eliminamos  $F$ , y obtenemos

$$a = \frac{m - m'}{m + m'} g$$

para la aceleración común. Por lo tanto la tensión en la cuerda es

$$F = \frac{2mm'}{m + m'} g.$$

Un sistema similar al mostrado en la Fig. 7-9 y denominado *máquina de Atwood* se utiliza algunas veces para estudiar las leyes del movimiento uniformemente acelerado. Una ventaja de su uso es que, empleando un valor de  $m$  muy próximo a  $m'$ , podemos lograr que la aceleración  $a$  sea muy pequeña, lo cual hace más fácil observar el movimiento.

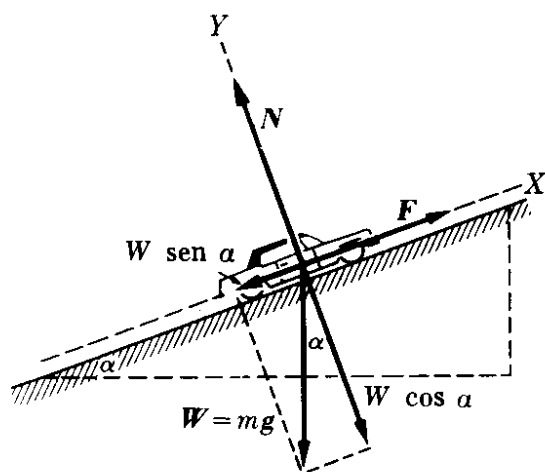


Figura 7-8

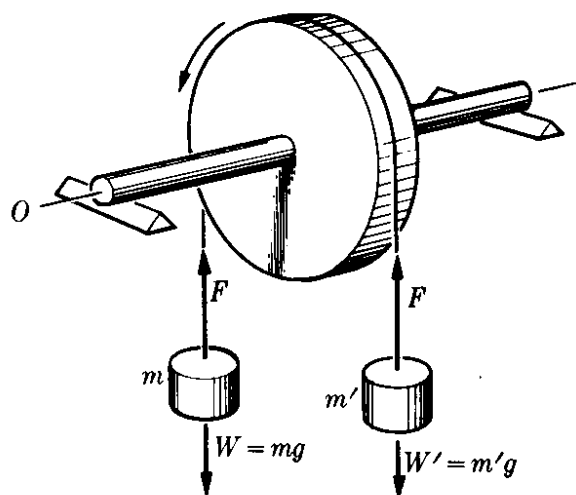


Figura 7-9

**EJEMPLO 7.5.** Una partícula de masa  $m = 10 \text{ kg}$ , sometida a la acción de una fuerza  $P = (120t + 40) \text{ N}$ , se desplaza en una trayectoria rectilínea. Cuando  $t = 0$  la partícula se encuentra en  $x_0 = 5 \text{ m}$ , con una velocidad  $v_0 = 6 \text{ m s}^{-1}$ . Encontrar su velocidad y posición en cualquier instante posterior.

**Solución:** Usando la ec. (7.5), obtenemos

$$120t + 40 = 10a \quad \text{ó} \quad a = (12t + 4) \text{ m s}^{-2}.$$

De ahora en adelante procedemos como en el ejemplo 5.2. Ya que para movimiento rectilíneo  $a = dv/dt$ ,

$$\frac{dv}{dt} = 12t + 4.$$

Integrando, tenemos

$$\int_0^v dv = \int_0^t (12t + 4) dt \quad \text{ó} \quad v = (6t^2 + 4t + 6) \text{ m s}^{-1}.$$

Ahora, poniendo  $v = dx/dt$  e integrando nuevamente, tenemos

$$\int_0^x dx = \int_0^t v dt = \int_0^t (6t^2 + 4t + 6) dt$$

ó

$$x = (2t^3 + 2t^2 + 6t + 5) \text{ m},$$

lo cual nos permite encontrar la posición en cualquier instante posterior.

## 7.9 Fuerzas de fricción

Cuando hay dos cuerpos en contacto, tal como en el caso de un libro que reposa sobre una mesa, hay una resistencia que se opone al movimiento relativo entre los dos cuerpos. Supongamos, por ejemplo, que empujamos el libro a lo largo de la mesa, dándole cierta velocidad. Después de soltado, disminuye su velocidad y hasta que se detiene. Esta pérdida del momentum es una indicación de la existencia de una fuerza opuesta al movimiento. Esta fuerza se denomina *fricción por deslizamiento* y se debe a la interacción entre las moléculas de los dos cuerpos, algunas veces llamada *cohesión* o *adhesión* dependiendo de si los cuerpos son del mismo o diferente material. El fenómeno es algo complejo y depende de muchos factores tales como la condición y la naturaleza de las superficies, la

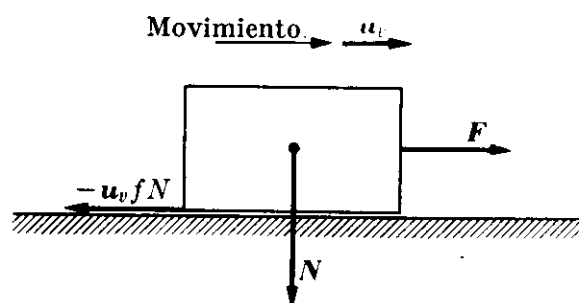


Fig. 7-10. La fuerza de fricción se opone al movimiento y depende de la fuerza normal.

velocidad relativa, etc. Podemos verificar experimentalmente que la fuerza de fricción  $F_f$  tiene una magnitud que, para muchos propósitos prácticos, puede considerarse como proporcional a la fuerza normal  $N$  de presión de un cuerpo sobre el otro (Fig. 7-10). La constante de proporcionalidad es llamada *coeficiente de fricción*, y se designa por  $f$ . Esto es, en magnitud

$$F_f = \text{fricción por deslizamiento} = fN. \quad (7.17)$$

La fuerza de fricción por deslizamiento siempre se opone al movimiento del cuerpo, y por ende tiene una dirección opuesta a la velocidad. Podemos escribir la ec. (7.17)



**TABLA 7-1 Coeficientes de fricción (Todas las superficies secas)\***

Material	$f_s$	$f_k$
Acero sobre acero (duro)	0,78	0,42
Acero sobre acero (blando)	0,74	0,57
Plomo sobre acero (blando)	0,95	0,95
Cobre sobre acero (blando)	0,53	0,36
Níquel sobre níquel	1,10	0,53
Fierro fundido sobre fierro fundido	1,10	0,15
Teflón sobre teflón (o sobre acero)	0,04	0,04

\* Estos valores deben considerarse como promedios, ya que los coeficientes de fricción son cantidades macroscópicas que dependen de las propiedades microscópicas de ambos materiales, y fluctúan bastante.

en forma vectorial reconociendo que un vector unitario en la dirección del movimiento se obtiene dividiendo el vector velocidad entre la magnitud de la velocidad,  $\mathbf{u}_v = \mathbf{v}/v$ . Esto permite escribir la ec. (7.17) en la forma vectorial  $\mathbf{F}_f = -\mathbf{u}_v fN$ . Por ejemplo, en el caso de la Fig. 7-10, si  $\mathbf{F}$  es la fuerza aplicada que mueve al cuerpo hacia la derecha (posiblemente al tirar de una cuerda), la fuerza horizontal resultante hacia la derecha es  $\mathbf{F} - \mathbf{u}_v fN$ , y la ecuación de movimiento del cuerpo, aplicando la ec. (7.15), es

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} - \mathbf{u}_v fN.$$

En general hay dos clases de coeficientes de fricción. El coeficiente *estático* de fricción,  $f_s$ , que al multiplicarse por la fuerza normal, nos da la fuerza mínima necesaria para poner en movimiento relativo dos cuerpos que están inicialmente en contacto y en reposo. El coeficiente *cinético* de fricción,  $f_k$ , que al multiplicarse por la fuerza normal, nos da la fuerza necesaria para mantener dos cuerpos en movimiento uniforme relativo. Se ha encontrado experimentalmente que  $f_s$  es mayor que  $f_k$  para todos los materiales hasta ahora examinados. La tabla 7-1 proporciona valores representativos de  $f_s$  y  $f_k$  para varios materiales.

La fricción es un concepto estadístico, ya que la fuerza  $F_f$  representa la suma de un número muy grande de interacciones entre las moléculas de los dos cuerpos en contacto. Es, por supuesto, imposible tener en cuenta las interacciones moleculares individuales, pues ellas se determinan en forma colectiva por algún método experimental y representadas aproximadamente por el coeficiente de fricción.

En los siguientes ejemplos ilustramos cómo tratar problemas dinámicos involucrando fricción entre sólidos.

**EJEMPLO 7.6.** Un cuerpo cuya masa es de 0,80 kg se encuentra sobre un plano inclinado 30°. ¿Qué fuerza debe aplicarse al cuerpo de modo que se mueva (a) hacia

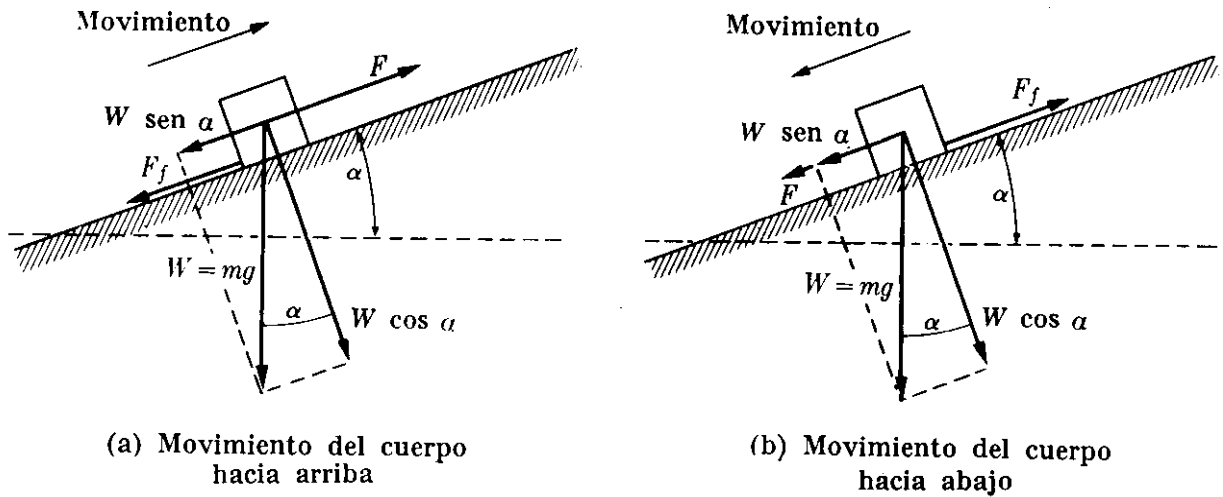


Figura 7-11

arriba (b) hacia abajo? En ambos casos suponer que el cuerpo se mueve con movimiento uniforme y con aceleración de  $0,10 \text{ m s}^{-2}$ . El coeficiente de fricción de deslizamiento con el plano es 0,30.

**Solución:** Consideremos en primer lugar el movimiento del cuerpo hacia arriba. Las fuerzas que actúan en el cuerpo se ilustran en la Fig. 7-11 (a). Ellas son el peso  $W = mg$ , dirigido hacia abajo, la fuerza aplicada  $F$  (que suponemos hacia arriba del plano), y la fuerza de fricción  $F_f$ , la cual es siempre *opuesta* al movimiento y en este caso hacia abajo. \* Cuando descomponemos el peso en sus componentes a lo largo del plano y perpendicular al plano, el movimiento del cuerpo a lo largo del plano, usando la ec. (7.15), está dado por

$$F - mg \sin \alpha - F_f = ma.$$

Ahora, de acuerdo a la ec. (7.17), debemos escribir  $F_f = fN$ . De la Fig. 7-11 (a) vemos que la fuerza normal del cuerpo contra el plano es  $mg \cos \alpha$ . Así  $F_f = f mg \cos \alpha$ . Y la ecuación del movimiento se transforma en

$$F - mg (\sin \alpha + f \cos \alpha) = ma.$$

Esta ecuación sirve para dos propósitos. Si conocemos la aceleración  $a$ , podemos encontrar la fuerza aplicada  $F$ . Por otro lado, si conocemos la fuerza  $F$  podemos encontrar la aceleración. En el primer caso tenemos:

$$F = m[a + g (\sin \alpha + f \cos \alpha)].$$

Por ejemplo, si el movimiento es uniforme,  $a = 0$ , y cuando insertamos los valores numéricos correspondientes  $F = 5,95 \text{ N}$ . Cuando el cuerpo se mueve con una aceleración de  $0,10 \text{ m s}^{-2}$ , obtenemos  $F = 6,03 \text{ m s}^{-2}$ .

En la Fig. 7-11 (b) se ilustran las fuerzas cuando el cuerpo se mueve hacia abajo. Ahora hemos supuesto que la fuerza  $F$  es hacia abajo, pero podríamos haber supuesto lo contrario. Sin embargo, la fuerza de fricción  $F_f$  debe ser hacia arriba para oponerse al movimiento. Considerando la dirección hacia abajo como positiva, el estudiante puede verificar que la ecuación del movimiento es ahora

$$F + mg (\sin \alpha - f \cos \alpha) = ma$$

6

$$F = m[a - g (\sin \alpha - f \cos \alpha)].$$

\* Otra fuerza que no se ha mostrado en la figura es la fuerza ejercida por el plano sobre el cuerpo. No necesitamos considerar esta fuerza en este problema.

Si el movimiento es uniforme ( $a = 0$ ), cuando insertamos los valores numéricos, obtenemos  $F = -1,88$  N mientras que si se desliza hacia abajo con una aceleración de  $0,10 \text{ m s}^{-2}$ , obtenemos  $F = -1,80$  N. El signo negativo en cada caso significa que la fuerza  $F$  es hacia arriba en lugar de hacia abajo como habíamos supuesto.

Sugerimos que el estudiante determine el movimiento del cuerpo cuando no se aplica ninguna fuerza  $F$ , y en vista del resultado obtenido justifique el signo negativo obtenido previamente para  $F$ .

## 7.10 Fuerzas de fricción en fluidos

Cuando un cuerpo se mueve a velocidad relativamente baja a través de un fluido tal como un gas o un líquido, la fuerza de fricción puede obtenerse aproximadamente suponiendo que es proporcional a la velocidad, y opuesta a ella. Por consiguiente escribimos

$$F_f = \text{fricción del fluido} = -K\eta v. \quad (7.18)$$

El coeficiente de fricción  $K$  depende de la forma del cuerpo. Por ejemplo, en el caso de una esfera de radio  $R$ , un cálculo laborioso indica que

$$K = 6\pi R, \quad (7.19)$$

relación conocida como la *ley de Stokes*. El coeficiente  $\eta$  depende de la fricción interna del fluido (i.e., la fuerza de fricción entre las diferentes capas del fluido que se mueven a diferentes velocidades). Esta fricción interna se denomina también *viscosidad* y recibe el nombre de *coeficiente de viscosidad*.\* El coeficiente de viscosidad en el sistema MKSC se expresa en  $\text{N s m}^{-2}$ . Esto puede verse de la siguiente manera. De la ley de Stokes, ec. (7.19) vemos que  $K$  se expresa en metros (lo mismo se aplica a cuerpos de diferentes formas). Así, de conformidad con la ec. (7.18)  $\eta$  debe expresarse en  $\text{N/m (m s}^{-1})$  que es igual a las unidades ya indicadas. Recordando que  $\text{N} = \text{m kg s}^{-2}$ , podemos también expresar la viscosidad en  $\text{m}^{-1} \text{ kg s}^{-1}$ . La viscosidad puede también expresarse en  $\text{cm}^{-1} \text{ g s}^{-1}$ , una unidad llamada *poise*, y abreviada P. El poise es igual a un décimo de la unidad MKSC de la viscosidad, ya que

$$1 \text{ m}^{-1} \text{ kg s}^{-1} = (10^2 \text{ cm})^{-1} (10^3 \text{ g}) \text{ s}^{-1} = 10 \text{ cm}^{-1} \text{ g s}^{-1} = 10 \text{ P}.$$

El coeficiente de viscosidad de los líquidos disminuye a medida que aumenta la temperatura, mientras que en el caso de los gases, el coeficiente aumenta con el aumento de temperatura. La tabla 7-2 presenta los coeficientes de viscosidad de varios fluidos.

Cuando un cuerpo se desplaza a través de un fluido viscoso bajo la acción de una fuerza  $F$ , la fuerza resultante es  $F - K\eta v$  y la ecuación del movimiento es

$$ma = F - K\eta v. \quad (7.20)$$

\* En el capítulo 24, se dará una definición más general del coeficiente de viscosidad.

Suponiendo una fuerza  $F$  constante, la aceleración  $a$  produce un aumento continuo en  $v$  y por lo tanto en la fuerza de fricción, de modo que eventualmente el miembro de la derecha se hace cero. En dicho momento la aceleración es también cero y no hay mayor aumento en la velocidad, estando la fuerza de fricción equilibrada exactamente por la fuerza aplicada.

**TABLA 7-2** Coeficientes de Viscosidad, en Poises\*

Líquidos	$\eta \times 10^3$	Gases	$\eta \times 10^3$
Agua (0°C)	1,792	Aire (0°C)	1,71
Agua	1,005	Aire	1,81
Agua (40°C)	0,656	Aire (40°C)	1,90
Glicerina	833	Hidrógeno	0,93
Aceite de castor	9,86	Amoníaco	0,97
Alcohol	0,367	Bióxido de carbono	1,46

\*Todos a 20°C, excepto aquellos en que se indica la temperatura.

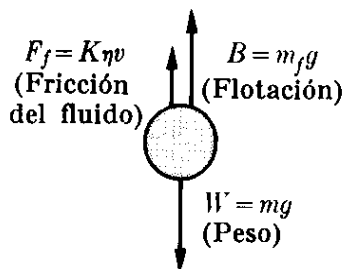
La partícula continúa moviéndose en la dirección de la fuerza con una velocidad constante, llamada *velocidad límite o terminal*, la cual está dada por

$$v_L = \frac{F}{K\eta}. \quad (7.21)$$

Por lo tanto la velocidad límite depende de  $\eta$  y de  $K$ ; esto es, de la viscosidad del fluido y de la forma del cuerpo. En caída libre bajo la influencia de la gravedad,  $F = mg$ , y la ec. (7.21) se torna

$$v_L = \frac{mg}{K\eta}. \quad (7.22)$$

La ec. (7.22) debe corregirse para tener en cuenta el empuje ejercido por el fluido, el cual, de conformidad con el principio de Arquímedes, es igual al peso del fluido desplazado por el cuerpo. Si  $m_f$  es la masa del fluido desplazado, su peso es  $m_f g$ , de modo que el empuje hacia arriba es  $B = -m_f g$ , y la fuerza total hacia abajo será  $mg - m_f g = (m - m_f)g$ . Esto da, en lugar de la ec. (7.22),



$$v_L = \frac{(m - m_f)g}{K\eta}. \quad (7.23)$$

**Fig. 7-12.** Fuerzas que actúan en un cuerpo que cae dentro de un fluido.

Las tres fuerzas que actúan sobre el cuerpo en este caso se ilustran en la Fig. 7-12. Para cuerpos grandes y velocidades mayores, la fuerza de fricción es proporcional a una potencia mayor de la velocidad, y la discusión de los párrafos previos no es suficiente para describir los eventos físicos.

**EJEMPLO 7.7.** Encontrar la velocidad límite de una gota de lluvia. Suponer un diámetro de  $10^{-3}$  m. La densidad del aire con respecto al agua es  $1,30 \times 10^{-3}$ .

**Solución:** Suponiendo que las gotas son esféricas, de radio  $r$ , encontramos, usando la ec. (1.1) que sus masas son

$$m = \rho V = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho,$$

donde  $\rho$  es la densidad del agua. Igualmente si  $\rho_f$  es la densidad del fluido (en este caso aire) tenemos que

$$m_f = \rho_f V = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_f,$$

de modo que

$$m - m_f = \frac{4}{3}\pi r^3 (\rho - \rho_f).$$

También, de la ec. (7.19),  $K = 6\pi r$  ya que las gotas son esféricas. Aplicando la ec. (7.23), encontramos que la velocidad límite está dada por:

$$v_L = \frac{2(\rho - \rho_f)r^2g}{9\eta}.$$

Sustituyendo valores numéricos, incluyendo  $\eta = 1,81 \times 10^{-5}$  N s m<sup>-2</sup> y  $\rho = 10^3$  kg m<sup>-3</sup>, encontramos que  $v_L = 30$  m s<sup>-1</sup>, o alrededor de 107 km hr<sup>-1</sup> ó 66 mi hr<sup>-1</sup>. Una gota mucho más grande no tendrá una velocidad límite muy diferente, debido a las consideraciones mencionadas en el párrafo previo a este ejemplo.

**EJEMPLO 7.8.** Obtener en función del tiempo la velocidad de una partícula que se mueve en una trayectoria rectilínea en un fluido viscoso, suponiendo que la ec. (7.20) es correcta y que la fuerza es constante.

**Solución:** Como el movimiento es rectilíneo podemos escribir la ec. (7.20) (recordando que  $a = dv/dt$ ) como

$$m \frac{dv}{dt} = F - K\eta v,$$

de modo que

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{K\eta}{m} \left( v - \frac{F}{K\eta} \right).$$

Separando variables e integrando, tenemos

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v - F/K\eta} = -\frac{K\eta}{m} \int_0^t dt,$$

ó

$$\ln \left( v - \frac{F}{K\eta} \right) - \ln \left( v_0 - \frac{F}{K\eta} \right) = -\frac{K\eta}{m} t.$$

O utilizando la ec. (M. 18), en la cual  $\ln e^x = x$ , obtenemos

$$v = \frac{F}{K\eta} + \left( v_0 - \frac{F}{K\eta} \right) e^{-(K\eta/m)t}.$$

El segundo término disminuye muy rápidamente, siendo pronto despreciable, de modo que la velocidad se vuelve constante e igual a  $F/K\eta$ , de acuerdo con la ec. (7.21).

En otras palabras, la velocidad límite es independiente de la velocidad inicial. Si  $v_0 = 0$ ,

$$v = \frac{F}{K\eta} (1 - e^{-(K\eta/m)t}).$$

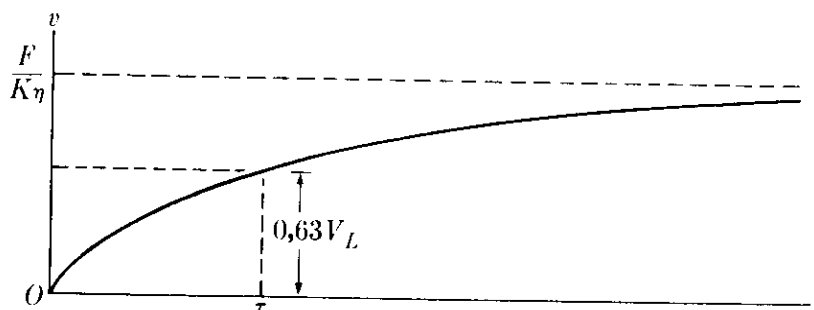


Fig. 7-13. Velocidad en función del tiempo de un cuerpo que cae en un fluido viscoso.

La variación de  $v$  con respecto a  $t$  se ilustra en la Fig. 7-13. El tiempo de relajación se define como  $\tau = m/K\eta$ . Este es el tiempo para el cual  $v$  es el 63 % de  $v_L$ , como puede verificar el estudiante. Sugerimos que el estudiante prosiga con los cálculos y, utilizando el resultado previo de  $v$ , obtenga por integración la distancia recorrida en función del tiempo. Encontrar también la distancia correspondiente al tiempo  $\tau$ .

### 7.11 Sistemas con masa variable

Puede considerarse que la gran mayoría de los sistemas que encontramos en física tienen masa constante. Sin embargo, en ciertos casos la masa es variable. El ejemplo más simple es el de la gota de agua. Mientras cae, la humedad puede condensarse en su superficie o el agua puede evaporarse, resultando en un cambio de masa. Supongamos que la masa de la gota es  $m$  cuando se desplaza con velocidad  $v$  y que la humedad, cuya velocidad es  $v_0$ , se condensa en la gota a una razón de  $dm/dt$ . El cambio total del momentum es la suma de  $m dv/dt$ , correspondiente a la aceleración de la gota, y  $(dm/dt)(v - v_0)$ , correspondiente a la velocidad con que gana momentum la humedad. Luego la ecuación de movimiento de la gota, utilizando la ec. (7.14) es

$$F = m \frac{dv}{dt} + \frac{dm}{dt} (v - v_0).$$

Para resolver esta ecuación es necesario hacer algunas suposiciones sobre, por ejemplo, cómo varía la masa con el tiempo.

Una cinta transportadora sobre la cual cae material en un extremo y/o se descarga en el otro extremo es otro ejemplo de masa variable. Consideremos, por ejemplo, el sistema de la Fig. 7-14, en el cual el material cae continuamente sobre la cinta transportadora a razón de  $dm/dt$  kg s<sup>-1</sup>. La cinta se desplaza a una velocidad constante  $v$  y se aplica una fuerza  $F$  para moverla. Si  $M$  es la masa de la cinta

y  $m$  es la masa del material que ha caído en el tiempo  $t$ , el momentum del sistema en ese instante es  $P = (m + M)v$ . Luego la fuerza aplicada a la cinta es:

$$F = \frac{dP}{dt} = v \frac{dm}{dt}.$$

Nótese que en este caso la fuerza es de bida enteramente al cambio de masa y no al cambio de velocidad.

Quizás el ejemplo más interesante es aquel de un cohete, cuya masa disminuye debido al consumo del combustible.

En el ejemplo siguiente analizaremos la dinámica de un cohete.

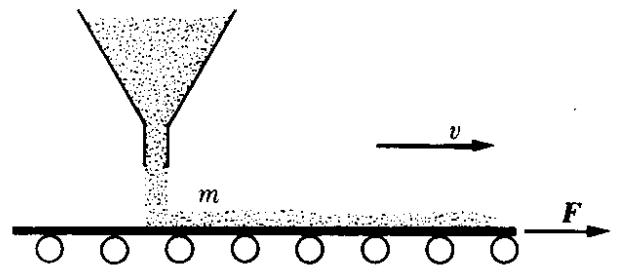


Figura 7-14

**EJEMPLO 7.9.** Discutir el movimiento de un cohete.

**Solución:** Un cohete es un proyectil el cual, en lugar de recibir un impulso inicial de la expansión de los gases en el cañón, se mueve debido a una fuerza derivada de la expulsión de los gases que se producen en la cámara de combustión dentro del cohete mismo. El cohete en el momento del despegue tiene una cierta cantidad de combustible que usa gradualmente, y por ello su masa no es constante sino que disminuye.

Llamemos  $v$  la velocidad del cohete con respecto a un sistema inercial, el cual supondremos en una buena aproximación que es la tierra, y  $v'$  la velocidad de salida de los gases, también con respecto a la tierra. Luego la velocidad de escape de los gases con respecto al cohete es

$$v_s = v' - v.$$

Esta velocidad es siempre opuesta a  $v$ , y es usualmente constante. Sea  $m$  la masa del cohete, incluyendo su combustible, en cualquier instante. Durante un pequeño intervalo  $dt$ , la masa del sistema experimenta un cambio pequeño  $dm$ , el cual es negativo ya que la masa disminuye. En el mismo intervalo la velocidad del cohete cambia en  $dv$ . El momentum del sistema en el tiempo  $t$  es  $p = mv$ . El momentum en el tiempo  $t + dt$ , ya que  $-dm$  es el valor positivo de la masa de los gases expelidos, es

$$p' = \underbrace{(m + dm)(v + dv)}_{\text{Cohete}} + \underbrace{(-dm)v'}_{\text{Gases}} = mv + m dv - (v' - v) dm$$

ó

$$p' = mv + m dv - v_s dm,$$

donde hemos despreciado el término de segundo orden  $dm dv$ . El cambio en el momentum en el tiempo  $dt$  es

$$dp = p' - p = m dv - v_s dm,$$

y el cambio en el momentum del sistema por unidad de tiempo es

$$\frac{dp}{dt} = m \frac{dv}{dt} - v_s \frac{dm}{dt}.$$

Si  $F$  es la fuerza externa que actúa en el cohete, la ecuación de movimiento, de acuerdo a la ec. (7.12) es

$$m \frac{dv}{dt} - v_s \frac{dm}{dt} = F. \quad (7.24)$$

El segundo término en el miembro de la izquierda se denomina el *empuje* del cohete y es igual a la "fuerza" debido al escape de los gases. Para resolver esta ecuación debemos hacer alguna suposición con respecto a  $v_e$ . En general se supone que  $v_e$  es constante. También, despreciando la resistencia del aire y la variación de la gravedad con la altura, escribimos  $F = mg$ , de modo que la ec. (7.24) se transforma en

$$\frac{dv}{dt} - \frac{v_e}{m} \frac{dm}{dt} = g. \quad (7.25)$$

Para simplificar, consideremos que el movimiento es vertical. Entonces  $v$  está dirigida hacia arriba y  $v_e$  y  $g$  hacia abajo, y la ec. (7.25) toma la forma

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v_e}{m} \frac{dm}{dt} = -g.$$

Multiplicando por  $dt$  e integrando desde el comienzo del movimiento ( $t = 0$ ), cuando la velocidad es  $v_0$  y la masa  $m_0$ , hasta un tiempo arbitrario  $t$ , tenemos

$$\int_{v_0}^v dv + v_e \int_{m_0}^m \frac{dm}{m} = -g \int_0^t dt.$$

Luego

$$v - v_0 + v_e \ln \frac{m}{m_0} = -gt,$$

o

$$v = v_0 + v_e \ln \left( \frac{m_0}{m} \right) - gt. \quad (7.26)$$

Si  $t$  es el tiempo necesario para quemar todo el combustible, entonces en la ec. (7.26),  $m$  es la masa final y  $v$  la velocidad máxima obtenida por el cohete. En general,  $v_0 = 0$ , y el último término (en muchos casos) es despreciable. Por ejemplo, si un cohete tiene una masa inicial de 3000 toneladas, una masa final de 2780 toneladas después que se ha quemado el combustible, y los gases son expulsados a  $2840 \text{ lb s}^{-1}$  (o  $1290 \text{ kg s}^{-1}$ ), entonces  $t = 155 \text{ s}$ . Si suponemos una velocidad de escape de  $55.000 \text{ m s}^{-1}$  y  $v_0 = 0$ , la máxima velocidad de esta etapa del cohete será :

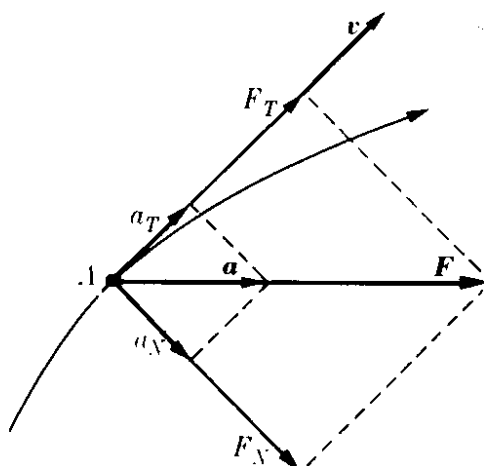
$$\begin{aligned} v &= 55.000 \ln \frac{3000}{2780} \text{ m s}^{-1} - (9,8 \text{ m s}^{-2})(155 \text{ s}) \\ &= (55.000 \ln 1,08 - 1520) \text{ m s}^{-1} = 2710 \text{ m s}^{-1}. \end{aligned}$$

Esta velocidad es casi  $9000 \text{ pies s}^{-1}$ , o aproximadamente  $6000 \text{ mi hr}^{-1}$ . Estas cifras se refieren al cohete Centauro, que tiene 5 etapas, cada una de las cuales es capaz de desarrollar  $1,5$  millones de lbf de empuje en el momento del despegue.

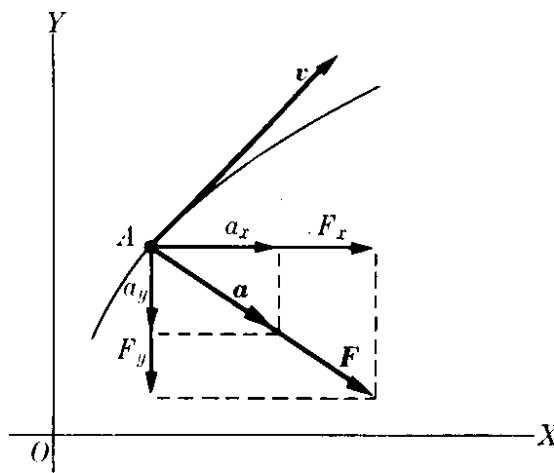
## 7.12 Movimiento curvilíneo

En los ejemplos dados hasta el momento hemos tratado el movimiento rectilíneo. Consideremos ahora el caso del movimiento curvilíneo. Si la fuerza tiene la misma dirección que la velocidad, el movimiento es en línea recta. Para producir el movimiento curvilíneo, la fuerza resultante debe estar haciendo un ángulo con respecto a la velocidad, de modo que la aceleración tenga una componente perpendicular a la velocidad que proporcionará el cambio en la dirección del movimiento. Por otro lado, recordemos que (si la masa es constante) la fuerza es paralela a la





**Fig. 7-15.** Relación entre las componentes tangencial y normal de la fuerza y la aceleración en el movimiento curvilíneo.



**Fig. 7-16.** Relación entre las componentes rectangulares de la fuerza y la aceleración en el movimiento curvilíneo.

aceleración. La relación de todos estos vectores en el movimiento curvilíneo se ilustra en la Fig. 7-15.

De la relación  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$  y ambas ecs. (5.44), llegamos a la conclusión que la componente de la fuerza tangente a la trayectoria, o la *fuerza tangencial*, es

$$F_T = ma_T \quad \text{o} \quad F_T = m \frac{dv}{dt}, \quad (7.27)$$

y la componente de la fuerza perpendicular a la trayectoria, o la *fuerza normal* o *centrípeta* es,

$$F_N = ma_N \quad \text{o} \quad F_N = \frac{mv^2}{\rho}, \quad (7.28)$$

donde  $\rho$  es el radio de curvatura de la trayectoria. La fuerza centrípeta está siempre dirigida al centro de curvatura de la trayectoria. La fuerza tangencial es responsable del cambio en la magnitud de la velocidad, y la fuerza centrípeta es responsable del cambio en la dirección de la velocidad. Si la fuerza tangencial es cero, no hay aceleración tangencial y el movimiento circular es uniforme. Si la fuerza centrípeta es cero, no hay aceleración normal y el movimiento es rectilíneo.

En el caso particular de movimiento circular,  $\rho$  es el radio  $R$  del círculo y  $v = \omega R$ , de modo que la fuerza es también

$$F_N = m\omega^2 R. \quad (7.29)$$

Para el caso de movimiento circular uniforme la única aceleración es  $a_N$ , que puede escribirse, usando la ec. (5.58), en forma vectorial:  $\mathbf{a} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$ . Por consiguiente  $\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times (m\mathbf{v})$  y ya que  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ ,

$$\mathbf{F} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}. \quad (7.30)$$

Esta es una relación matemática útil entre la fuerza, la velocidad angular y momentum lineal de una partícula en movimiento circular uniforme.

Algunas veces puede ser más conveniente usar las componentes rectangulares de  $\mathbf{F}$  (Fig. 7-16). Por ejemplo, en el caso de movimiento plano, la ecuación vectorial  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$  puede descomponerse en las siguientes dos ecuaciones:

$$F_x = ma_x \quad \text{y} \quad F_y = ma_y$$

o

$$F_x = m \frac{dv_x}{dt} \quad \text{y} \quad F_y = m \frac{dv_y}{dt}. \quad (7.3)$$

Integrando estas ecuaciones, obtenemos la velocidad y la posición de la partícula en cualquier instante.

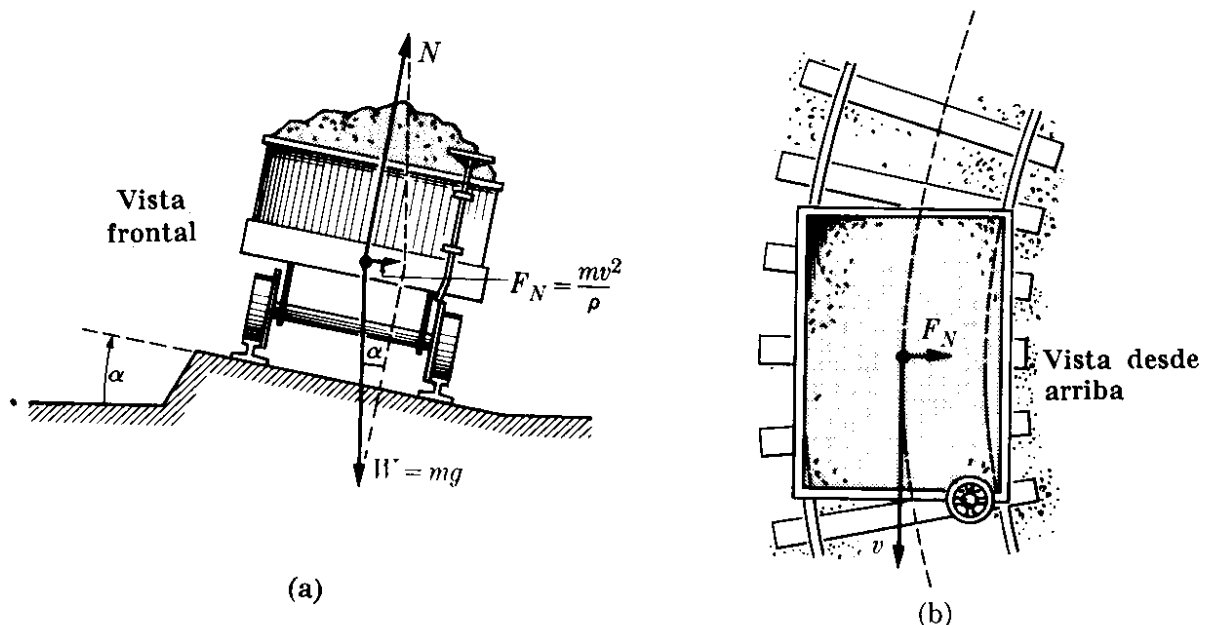
En general, cuando incluimos el caso en el cual la masa es variable, debemos usar  $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ . Pero  $\mathbf{p}$ , siendo paralela a la velocidad es tangente a la trayectoria. Así podemos escribir  $\mathbf{p} = u_T \mathbf{p}$  y, usando la ec. (5.42), tenemos

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = u_T \frac{dp}{dt} + \frac{du_T}{dt} p = u_T \frac{dp}{dt} + u_N \frac{vp}{\rho}.$$

Luego, en lugar de las ecs. (7.27) y (7.28) tenemos

$$F_T = \frac{dp}{dt} \quad \text{y} \quad F_N = \frac{pv}{\rho}.$$

**EJEMPLO 7.10.** Las líneas de los ferrocarriles y las pistas de alta velocidad tienen peralte en las curvas para proporcionar la fuerza centrípeta necesaria para que un vehículo se mueva a lo largo de las curvas. Encontrar el ángulo del peralte como función de la velocidad del vehículo a lo largo de la curva.



**Fig. 7-17.** Peralte de las curvas para producir una fuerza centrípeta.

**Solución:** La Fig. 7-17 ilustra un peralte, aunque el ángulo ha sido exagerado. Las fuerzas que actúan sobre el carro son su peso  $W = mg$ , y la fuerza normal  $N$  debida a los rieles. Su resultante  $F_N$  debe ser suficiente para producir la fuerza centrípeta dada por la ec. (7.28). Así  $F_N = mv^2/\rho$ , donde  $\rho$  es el radio de la curva. Entonces de la figura tenemos que

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_N}{W} = \frac{v^2}{\rho g}.$$

El resultado es independiente de la masa del cuerpo. Como  $\alpha$  está fija una vez que se han colocado los rieles, esta fórmula da la velocidad correcta para pasar la curva de modo que no hayan fuerzas laterales que actúen sobre el vehículo. Para velocidades menores o mayores no hay problemas con la curva, ya que las pistas proporcionan la fuerza de equilibrio apropiada. Sin embargo, para velocidades mucho mayores el vehículo tenderá a salirse de la curva.

**EJEMPLO 7.11.** Una masa  $m$  suspendida de un punto fijo por una cuerda de longitud  $L$  gira alrededor de la vertical con velocidad angular  $\omega$ . Encontrar el ángulo que hace la cuerda con la vertical. Este sistema se llama *péndulo cónico*.

**Solución:** El sistema ha sido ilustrado en la Fig. 7-18. La masa  $A$  gira alrededor de la vertical  $OC$ , describiendo un círculo de radio  $R = CA = OA \sin \alpha = L \sin \alpha$ . Las fuerzas que actúan sobre  $A$  son su peso  $W = mg$  y la tensión  $F$  de la cuerda. Su resultante  $F_N$  debe ser justamente la fuerza centrípeta necesaria para describir el círculo. Así, usando la ec. (7.29), tenemos

$$F_N = m\omega^2 R = m\omega^2 L \sin \alpha.$$

De la figura vemos que

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_N}{W} = \frac{\omega^2 L \sin \alpha}{g}$$

o, ya que  $\operatorname{tg} \alpha = \sin \alpha / \cos \alpha$ ,

$$\cos \alpha = \frac{g}{\omega^2 L}$$

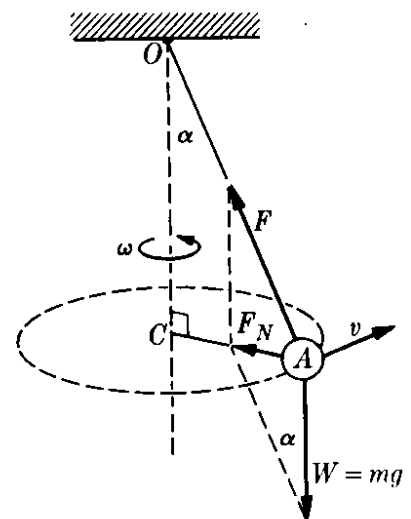


Fig. 7-18. Péndulo cónico.

Por lo tanto, cuanto mayor es la velocidad angular  $\omega$ , mayor es el ángulo  $\alpha$ , como se demuestra experimentalmente. Por esta razón el péndulo cónico ha sido utilizado como un regulador de velocidad de las máquinas de vapor; cierra la válvula de la entrada de vapor cuando la velocidad supera un límite prefijado y la abre cuando dicha velocidad baja de dicho límite.

**EJEMPLO 7.12.** Analizar el efecto de la rotación de la tierra sobre el peso de un cuerpo.

**Solución:** En la sección 6.5 discutimos, desde un punto de vista cinemático, el movimiento de un cuerpo en relación con un sistema de referencia que rota con la tierra. En este ejemplo trataremos el mismo problema dinámicamente.

La Fig. 7-19 muestra una partícula  $A$  sobre la superficie terrestre. La fuerza gravitacional debida a la atracción de la tierra la designamos por  $W_0$ . Si la tierra no estuviera rotando, la aceleración de un cuerpo cerca a la superficie terrestre sería  $g_0 = W_0/m$ . Sin embargo, debido a la rotación de la tierra, parte de esta fuerza

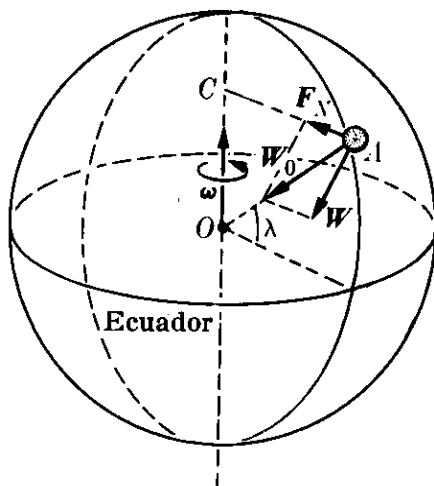


Fig. 7-19. Efecto de la rotación.

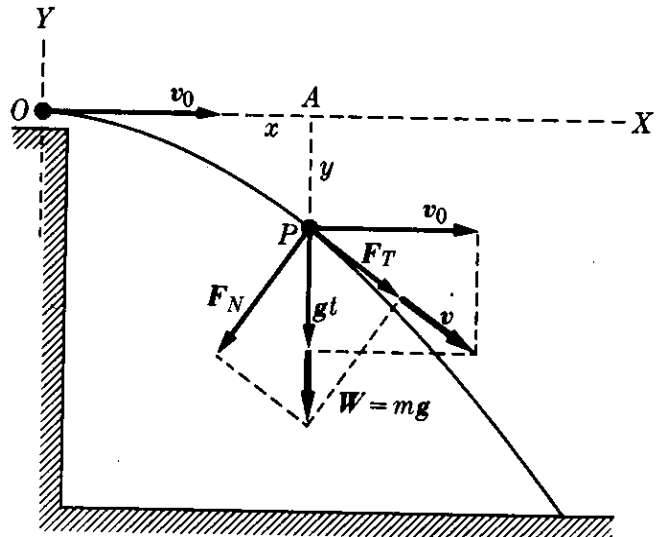


Figura 7-20

debe usarse para producir la fuerza centrípeta  $F_N$  necesaria para que A se mueva en una trayectoria circular de radio  $CA = r \cos \lambda$  con velocidad angular  $\omega$ . Esto es, usando la ec. (7.29), tenemos que  $F_N = m\omega^2 r \cos \lambda$ . La diferencia  $W_0 - F_N$  nos da la fuerza total  $W$ , que produce una fuerza hacia abajo sobre la partícula. Así la aceleración efectiva de la gravedad es  $g = W/m$ . Si la partícula A está suspendida de un punto mediante una cuerda (como una plomada), la cuerda tendrá la dirección de  $W$ . Igualmente, la tensión hacia arriba sobre A producida por la cuerda será igual a  $W$ . Por consiguiente, cuando se utiliza un resorte para determinar el peso de un cuerpo, es la fuerza  $W$  la que se determina. Solamente en los polos y a lo largo del Ecuador  $W_0$  y  $W$  tienen la misma dirección, y solamente en dichos lugares la plomada sigue la dirección radial.

**EJEMPLO 7.13.** Calcular las fuerzas normal y tangencial que actúan en un proyectil lanzado horizontalmente desde lo alto de un edificio.

**Solución:** Si el proyectil se lanza con velocidad inicial horizontal  $v_0$  (Fig. 7-20), entonces en el punto P su velocidad horizontal es aún  $v_0$  pero su velocidad vertical es  $gt$ , donde  $t$  es el tiempo necesario para que el proyectil caiga la distancia  $y$ , o se desplace horizontalmente  $x = v_0 t$ . Luego la velocidad total del proyectil es

$$v = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}.$$

Así la ec. (7.27) da la fuerza tangencial como

$$F_T = m \frac{dv}{dt} = \frac{mg^2 t}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}}.$$

Para encontrar la fuerza centrípeta podemos usar la ec. (7.28), pero ello requeriría del cálculo previo de la curvatura de la trayectoria, la cual es una parábola. Podemos realizar el cálculo de otra manera ya que conocemos que la fuerza resultante es

$$W = mg = \sqrt{F_T^2 + F_N^2}.$$

Por consiguiente

$$F_N = \sqrt{W^2 - F_T^2} = \frac{mgv_0}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}}.$$

### 7.13 Momentum angular

El momentum angular con respecto a  $O$  (Fig. 7-21) de una partícula de masa  $m$  que se mueve con velocidad  $\mathbf{v}$  (y por consiguiente momentum  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ ) está definido por el producto vectorial

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

o

$$\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v}.$$

(7.32)

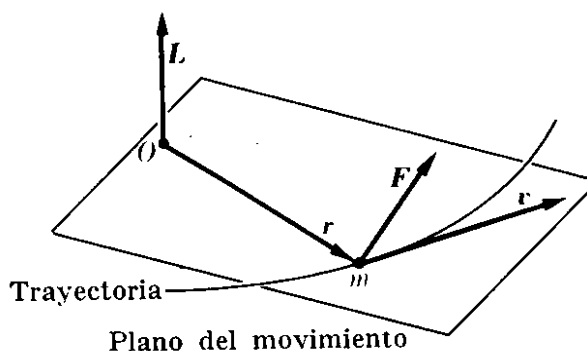


Fig. 7-21. El momentum angular de una partícula.

El momentum angular es entonces un vector perpendicular al plano determinado por  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{v}$ . El momentum angular de la partícula en general cambia en magnitud y dirección mientras la partícula se mueve. Sin embargo, si una partícula se mueve en un plano, y el punto  $O$  está situado en el plano, la dirección del momentum angular permanece invariante, es decir, perpendicular al plano, ya que tanto  $\mathbf{r}$  como  $\mathbf{v}$  están en el plano. En el caso de movimiento circular (Fig. 7-22), cuando  $O$  es el centro del círculo, los vectores  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{v}$  son perpendiculares y  $v = \omega r$ , de modo que

$$L = mrv = mr^2\omega. \quad (7.33)$$

La dirección de  $\mathbf{L}$  es la misma que la de  $\omega$ , de modo que la ec. (7.33) puede escribirse vectorialmente como

$$\mathbf{L} = mr^2\boldsymbol{\omega}. \quad (7.34)$$

Si el movimiento plano en vez de circular es una curva cualquiera, podemos descomponer la velocidad en sus componentes radial y transversal, como se explicó en la sección 5.11; esto es,  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_\theta$  (Fig. 7-23). Luego podemos escribir el momentum angular como

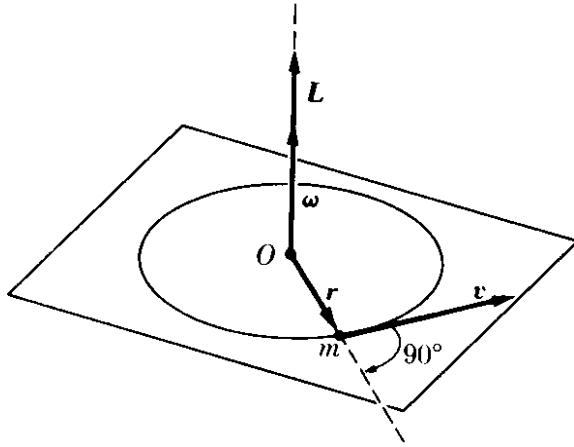
$$\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times (\mathbf{v}_r + \mathbf{v}_\theta) = m\mathbf{r} \times \mathbf{v}_\theta,$$

ya que  $\mathbf{r} \times \mathbf{v}_r = 0$  (los dos vectores son paralelos). Por ello, la magnitud de  $\mathbf{L}$  es  $L = mrv_\theta$ . Pero como  $v_\theta = r(d\theta/dt)$  de conformidad con la ec. (5.64), podemos escribir

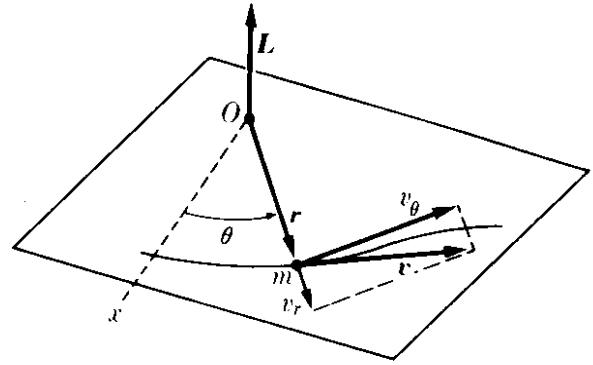
$$L = mr^2 \frac{d\theta}{dt}. \quad (7.35)$$

Esta expresión es idéntica a la ec. (7.33) para movimiento circular, ya que  $\omega = d\theta/dt$ , pero en el caso general  $r$  no es constante. Recordando la ec. (3.26) del producto vectorial, podemos escribir el momentum angular de una partícula como

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix}$$



**Fig. 7-22.** Relación vectorial entre la velocidad angular y el momentum angular en el movimiento circular.



**Fig. 7-23.** Relación entre el momentum angular y la componente transversal de la velocidad.

o, en función de las componentes

$$L_x = yp_z - zp_y, \quad L_y = zp_x - xp_z, \quad L_z = xp_y - yp_x \quad (7.36)$$

Podemos notar que cuando el movimiento es en un plano, digamos el plano  $XY$ , tenemos  $z = 0$  y  $P_z = 0$ , de modo que  $L_x = L_y = 0$ , y solamente queda la componente  $L_z$ . Esto es, el momentum angular es perpendicular al plano, como hemos indicado previamente, usando una lógica diferente.

Tomemos ahora la derivada con respecto al tiempo de la ec. (7.32). Esto nos da:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}. \quad (7.37)$$

Pero  $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}$ , y  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$  es siempre paralelo a  $\mathbf{v}$ , de modo que

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} = \mathbf{v} \times \mathbf{p} = m\mathbf{v} \times \mathbf{v} = 0.$$

Por otro lado,  $d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}$  de acuerdo a la ec. (7.12). Entonces, la ec. (7.37) se torna  $d\mathbf{L}/dt = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ . Cuando recordamos que, de acuerdo a la definición (4.5), el torque de  $\mathbf{F}$  alrededor de  $O$  es  $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ , obtenemos finalmente

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\tau}. \quad (7.38)$$

El estudiante debe notar que esta ecuación es correcta solamente cuando  $\mathbf{L}$  y  $\boldsymbol{\tau}$  se evalúan con respecto al mismo punto.

La ec. (7.38), que es fundamental para la discusión del movimiento de rotación, guarda gran semejanza con la ec. (7.12), con el momentum lineal  $\mathbf{p}$  reemplazado por el momentum angular  $\mathbf{L}$ , y la fuerza  $\mathbf{F}$  reemplazada por el torque  $\boldsymbol{\tau}$ . Establece simplemente que:

*el cambio con respecto al tiempo del momentum angular de una partícula es igual al torque de la fuerza aplicada a ella.*

Esto implica que el cambio  $d\mathbf{L}$  en el momentum angular en un intervalo corto de tiempo  $dt$  es paralelo al torque  $\boldsymbol{\tau}$  aplicado a la partícula.

### 7.14 Fuerzas centrales

Si el torque aplicado a una partícula es cero ( $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0$ ), de acuerdo a la ec. (7.38), debemos tener  $d\mathbf{L}/dt = 0$  o  $\mathbf{L} =$  vector constante. Por consiguiente el momentum angular de una partícula es constante si el torque de las fuerzas es cero. Esta condición se satisface si  $\mathbf{F} = 0$ ; es decir si la partícula es libre. De la Fig. 7-24, tenemos  $L = mvr \sin \theta = mvd$ , donde  $d = r \sin \theta$ . Esta cantidad permanece constante ya que todos los factores involucrados son también constantes, y la trayectoria de la partícula libre es una línea recta y la velocidad no cambia.

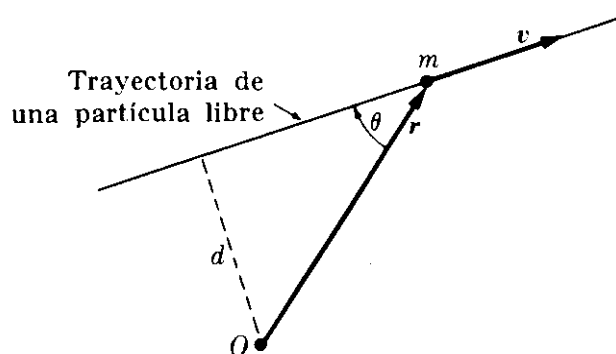


Fig. 7-24. El momentum angular de una partícula libre es constante.

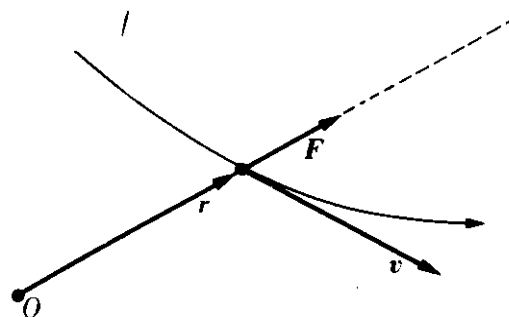


Fig. 7-25. El momentum angular es constante en el movimiento bajo fuerzas centrales.

La condición  $\mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0$  se satisface también si  $\mathbf{F}$  es paralela a  $\mathbf{r}$ ; en otras palabras, si la dirección de  $\mathbf{F}$  pasa por el punto O. Una fuerza cuya dirección pasa siempre a través de un punto fijo se denomina *fuerza central* (Fig. 7-25). Por ello, cuando un cuerpo se mueve bajo la acción de una fuerza central su momentum angular permanece constante, y viceversa. Otra manera de establecer esto, es decir que

*cuando la fuerza es central, el momentum angular con respecto al centro de la fuerza es una constante del movimiento, y viceversa.*

Este resultado es muy importante porque muchas fuerzas de la naturaleza son centrales. Por ejemplo, la tierra gira alrededor del sol bajo la influencia de una fuerza central cuya dirección está dirigida siempre hacia el centro del sol. Luego el momentum angular de la tierra con respecto al sol es constante. El electrón en un átomo de hidrógeno se mueve esencialmente bajo la fuerza central debido a la interacción electrostática con el núcleo, estando la dirección de la

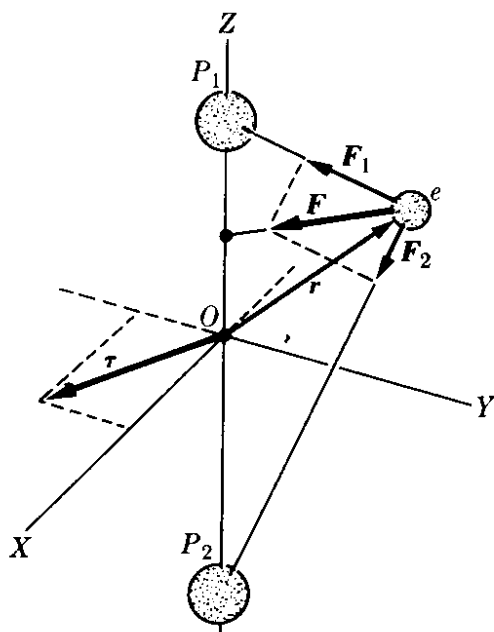
fuerza siempre dirigida hacia el núcleo. Así el momentum angular del electrón con respecto al núcleo es constante.

En átomos que tienen muchos electrones, la fuerza sobre cada electrón no es rigurosamente central porque, además de la interacción central con el núcleo, hay también interacción con otros electrones. Sin embargo, en general, la fuerza promedio sobre el electrón puede considerarse como central. Igualmente, en ciertos núcleos, podemos suponer como primera aproximación que sus componentes (protones y neutrones) se mueven en promedio bajo la acción de fuerzas centrales.

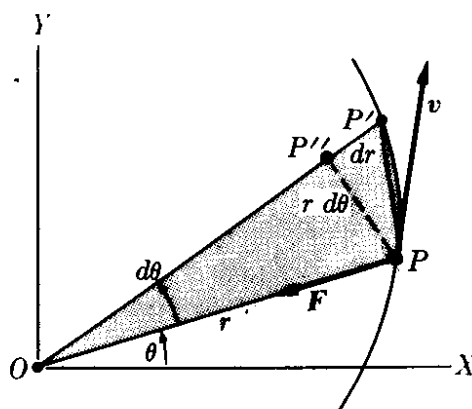
En una molécula, por otro lado, la fuerza sobre un electrón no es central, porque resulta de la atracción producida por los diferentes núcleos y la repulsión de los otros electrones. Por consiguiente el momentum angular de los electrones no es constante. En una molécula diatómica, tiene lugar una situación interesante (Fig. 7-26). Un electrón  $e$  gira alrededor de dos núcleos  $P_1$  y  $P_2$ , sometido a sus fuerzas  $\mathbf{F}_1$  y  $\mathbf{F}_2$ , cuya resultante  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$  siempre queda en el plano determinado por  $Oe = \mathbf{r}$  y la línea que pasa a través de los núcleos, o sea el eje  $Z$ . El torque resultante sobre el electrón con respecto al centro de masa  $O$  de la molécula (si despreciamos las interacciones con los otros electrones) es

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}.$$

De la Fig. 7-26 vemos que este torque es perpendicular al plano determinado por el vector posición  $\mathbf{r}$  y el eje  $Z$ . O sea el torque se encuentra en el plano  $XY$  de modo que  $\tau_z = 0$ . De acuerdo a la ec. (7.38) esto nos da  $dL_z/dt = 0$  o sea  $L_z = \text{constante}$ . Este resultado no es solamente válido para moléculas diatómicas sino para cualquier molécula lineal, o en una forma más general, para el movi-



**Fig. 7-26.** En el movimiento bajo la acción de una fuerza axial, la componente del momento angular a lo largo del eje es constante.



**Fig. 7-27.** Bajo fuerzas centrales, el vector posición barre áreas iguales en tiempos iguales.



miento bajo la acción de una fuerza que pasa siempre por un eje fijo. Tal fuerza se denomina *fuerza axial*. Por consiguiente,

*cuando la fuerza es axial, la componente del momentum angular a lo largo del eje es constante.*

Este resultado es muy útil cuando estudiamos la estructura de átomos y moléculas.

El movimiento debido a una fuerza central está confinado siempre a un plano ya que  $L$  es constante. Luego, usando la ec. (7.35), tenemos

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{const.} \quad (7.39)$$

Cuando la partícula se mueve de  $P$  a  $P'$  (Fig. 7-27), el radio vector  $r$  barre el área sombreada, correspondiente al triángulo  $OPP'$ . Por ello

$$dA = \text{área } \triangle OPP' = \frac{1}{2}r^2 d\theta,$$

y el área barrida por unidad de tiempo es

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

Comparando este resultado con la ec. (7.39), vemos que  $dA/dt = \text{constante}$ , indicando que en el movimiento bajo fuerzas centrales, el radio vector de la partícula barre áreas iguales en tiempos iguales. Este resultado es de interés histórico en relación con el descubrimiento de las leyes de movimiento planetario, y se conoce como la *segunda Ley de Kepler*. Nos referiremos a ella con más detalle en el capítulo 13, cuando estudiemos el movimiento planetario.

**EJEMPLO 7.14.** En el caso del proyectil del ejemplo 7.13, encontrar el momentum angular y el torque de  $mg$  con respecto a  $O$ . Verificar que se cumple la ec. (7.38).

**Solución:** Al establecer los ejes  $X$  e  $Y$  como en la Fig. 7-20, las coordenadas del punto  $P$  son  $x = OA = v_0 t$ ,  $y = Ap = -\frac{1}{2}gt^2$ , y las componentes de la velocidad son  $v_x = v_0$ ,  $v_y = -gt$ . Recordando  $p = mv$  y usando la tercera ecuación de 7.36, podemos escribir

$$L_z = xp_y - yp_x = m(xv_y - yv_x) = -\frac{1}{2}mgv_0 t^2.$$

Igualmente las componentes de la fuerza aplicada en  $P$  son  $F_x = 0$ ,  $F_y = -mg$ . Luego, usando la ec. (4.8), obtenemos

$$\tau_z = xF_y - yF_x = -mgv_0 t.$$

El estudiante puede verificar que en este caso  $dL_z/dt = \tau_z$ , de modo que la ec. (7.38) se confirma.

**EJEMPLO 7.15.** Estimar el momentum angular de la tierra alrededor del sol, y aquel de un electrón alrededor del núcleo en un átomo de hidrógeno. En ambos casos suponer, por simplicidad, que la órbita es circular, de modo que se puedan aplicar las relaciones de la Fig. 7-22.

**Solución:** La masa de la tierra es de  $5,98 \times 10^{24}$  kg y su distancia media al sol es de  $1,49 \times 10^{11}$  m. Igualmente, de nuestra definición del segundo dado en la sección 2.3, llegamos a la conclusión que el período de revolución de la tierra alrededor del sol es  $3,16 \times 10^7$  s. Así la velocidad angular promedio de la tierra alrededor del sol es, de la ec. (5.51),

$$\omega = \frac{2\pi}{P} = \frac{2\pi}{3,16 \times 10^7 \text{ s}} = 1,98 \times 10^{-7} \text{ s}^{-1}.$$

Entonces, de la ec. (7.33) el momentum angular de la tierra con respecto al sol es

$$\begin{aligned} L &= mr^2\omega = (5,98 \times 10^{24} \text{ kg})(1,49 \times 10^{11} \text{ m})^2(1,98 \times 10^{-7} \text{ s}^{-1}) \\ &= 2,67 \times 10^{40} \text{ m}^2 \text{ kg s}^{-1}. \end{aligned}$$

Por otro lado, un electrón en un átomo de hidrógeno tiene una masa de  $9,11 \times 10^{-31}$  kg, su distancia media al núcleo es  $5,29 \times 10^{-11}$  m, y su velocidad angular es  $4,13 \times 10^{16} \text{ s}^{-1}$ . Por tanto, usando nuevamente la ec. (7.33), encontramos que el momentum angular del electrón alrededor del núcleo es

$$\begin{aligned} L &= mr^2\omega = (9,11 \times 10^{-31} \text{ kg})(5,29 \times 10^{-11} \text{ m})^2(4,13 \times 10^{16} \text{ s}^{-1}) \\ &= 1,05 \times 10^{-34} \text{ m}^2 \text{ kg s}^{-1}. \end{aligned}$$

Este valor numérico constituye una de las constantes más importantes de la física, y se designa por el símbolo  $\hbar$ , hache cruzada. El momento angular de las partículas atómicas y fundamentales se expresa en unidades de  $\hbar$ . La cantidad  $h = 2\pi\hbar$  se denomina *constante de Planck*.

El estudiante debe tener en cuenta la tremenda disparidad en los valores de las cantidades físicas en las dos situaciones que hemos resuelto, y puede dudar si se aplican las mismas leyes en ambos casos. Podemos responder diciendo que en ambos casos, como las fuerzas son centrales, el momentum angular es constante. Sin embargo, en el caso del electrón, cuando nos referimos a una partícula atómica, se requiere una cierta revisión de nuestros métodos; la nueva técnica es denominada mecánica cuántica, pero no trataremos esta teoría en este momento. Podemos adelantar sin embargo, que el resultado que conseguiremos estará esencialmente de acuerdo con lo que hemos obtenido en este ejemplo.

**EJEMPLO 7.16.** Dispersión de una partícula por una fuerza central repulsiva que varía inversamente con el cuadrado de la distancia.

**Solución:** Estudiemos la desviación o dispersión que sufre una partícula cuando está sometida a una fuerza de repulsión que varía en forma inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de la partícula en movimiento con respecto a un punto fijo o centro de fuerzas. Este problema es de especial interés debido a su aplicación en física atómica y nuclear. Por ejemplo, cuando un protón, acelerado por una máquina tal como un ciclotrón, pasa cerca de un núcleo del material del blanco, es desviado o dispersado bajo la acción de una fuerza de esta clase, debido a la repulsión electrostática del núcleo.

Sea  $O$  el centro de la fuerza y  $A$  una partícula que se dirige hacia  $O$  desde una gran distancia con velocidad  $v_0$  (Fig. 7-28). La distancia  $b$ , denominada *parámetro de impacto*, es la distancia perpendicular entre la prolongación de la trayectoria rectilínea inicial y una línea trazada a través de  $O$  paralela a  $v_0$ . Suponiendo que la fuerza entre  $A$  y  $O$  es de repulsión y central, la partícula seguirá la trayectoria  $AMB$ . La forma de la curva depende de la forma como varía la fuerza con la distancia. Si la fuerza es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, esto es, si

$$F = k/r^2, \tag{7.40}$$

la trayectoria es una hipérbola, como se demostrará en la sección 13.5. Cuando la partícula se encuentra en  $A$  su momentum angular es  $mv_0b$ . En cualquier otra posición tal como  $M$ , su momentum angular, de acuerdo a la ec. (7.35), es  $mr^2(d\theta/dt)$ . Por consiguiente, como el momentum angular debe permanecer constante, por ser la fuerza central,

$$mr^2 \frac{d\theta}{dt} = mv_0b. \quad (7.41)$$

La ecuación de movimiento en la dirección  $Y$  se obtiene combinando la ec. (7.40) con la segunda de las ec. (7.31); esto es

$$m \frac{dv_y}{dt} = F_y = F \sin \theta = \frac{k \sin \theta}{r^2}.$$

Eliminando  $r^2$  usando la ec. (7.41) podemos escribir

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{k}{mv_0b} \sin \theta \frac{d\theta}{dt}.$$

Para encontrar la deflexión de la partícula, debemos integrar esta ecuación de un extremo de la trayectoria al otro. En  $A$  el valor de  $v_y$  es cero debido a que el movimiento inicial es paralelo al eje  $X$ , y también  $\theta = 0$ . En  $B$  tenemos  $v_y = v_0 \sin \phi$  y  $\theta = \pi - \phi$ . Notar que en  $B$  la velocidad es nuevamente  $v_0$  ya que, debido a la simetría, la velocidad perdida cuando la partícula se aproxima a  $O$  debe ganarse cuando se aleja de  $O$ . (El principio de conservación de energía, a discutirse en el próximo capítulo, también verifica esto.) Luego

$$\int_0^{v_0 \sin \phi} dv_y = \frac{k}{mv_0b} \int_0^{\pi - \phi} \sin \theta d\theta$$

o sea

$$v_0 \sin \phi = \frac{k}{mv_0b} (1 + \cos \phi).$$

Recordando que  $\cotg \frac{1}{2} \phi = (1 + \cos \phi)/\sin \phi$ , obtenemos finalmente

$$\cotg \frac{1}{2} \phi = \frac{mv_0^2}{k} b. \quad (7.42)$$

Esta relación da el ángulo de dispersión  $\phi$  en función del parámetro de impacto  $b$ .

En la sección 14.7 aplicaremos esta ecuación a la dispersión de partículas cargadas por los núcleos. Nótese que el resultado (7.42) es válido solamente para una fuerza que varía inversamente con el cuadrado de la distancia de la partícula al centro de fuerzas. Si la fuerza depende de la distancia en una manera diferente, el ángulo de dispersión satisface una ecuación diferente. Por ello, los experimentos de dispersión son muy útiles cuando deseamos determinar la ley de fuerzas en interacciones entre partículas.

En los laboratorios de física nuclear, los experimentos de dispersión son realizados acelerando electrones, protones, u otras partículas por medio de un ciclotrón, o un acelerador Van de Graaff, o algún equipo similar, y observando la distribución angular de las partículas dispersadas.

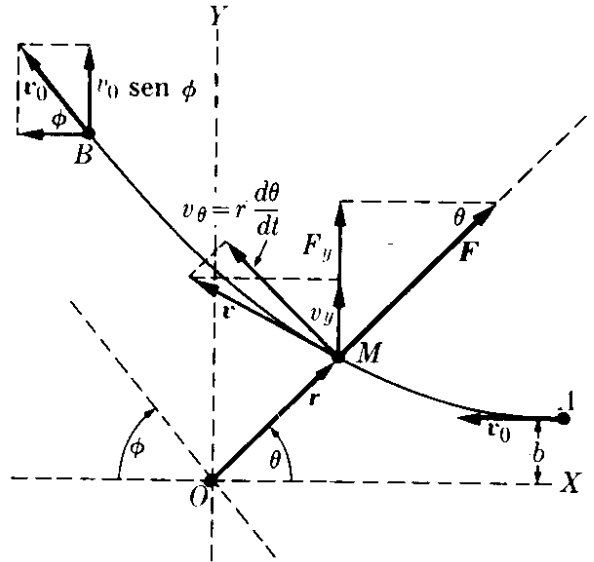


Fig. 7-28. Dispersión de una partícula bajo la acción de una fuerza central que varía inversamente con el cuadrado de la distancia.

**7.15 Equilibrio y reposo**

Terminaremos este capítulo con una revisión de los conceptos de reposo y equilibrio. Una partícula se encuentra *en reposo* con relación a un observador inercial cuando su velocidad, medida por este observador, es cero. Una partícula se encuentra en *equilibrio* con respecto a un observador inercial cuando su aceleración es cero ( $a = 0$ ). Luego, de la ec. (7.15), llegamos a la conclusión que  $F = 0$ ; esto es, una partícula se encuentra en equilibrio cuando la resultante de todas las fuerzas actuantes es cero. Esta definición fue utilizada en el capítulo 4.

Una partícula puede estar en reposo con relación a un observador inercial, pero no estar en equilibrio. Por ejemplo, cuando tiramos una piedra verticalmente hacia arriba, la piedra está momentáneamente en reposo cuando alcanza su altura máxima. Sin embargo, no se encuentra en equilibrio ya que está sometida a la fuerza de atracción no balanceada de la tierra. Por dicha razón la piedra comenzará inmediatamente a caer.

Igualmente, una partícula puede estar en equilibrio y no estar en reposo relativo a un observador inercial. Un ejemplo lo constituye una partícula libre. Como no actúan fuerzas sobre ella no hay aceleración y la partícula se encuentra en equilibrio. Sin embargo, la partícula puede no estar en reposo con respecto a muchos observadores inerciales. La situación más común que se encuentra es aquella de una partícula que está tanto en reposo como en equilibrio al mismo tiempo. Por dicha razón muchas personas consideran erróneamente los dos conceptos como sinónimos. Por supuesto una partícula en equilibrio puede estar siempre en reposo en algún sistema inercial de referencia.

**Bibliografía**

1. "Inertia", D. Sciama, *Sci. Am.*, febrero de 1957, pág. 99
2. "Galileo and the Law of Inertia", S. Drake, *Am. J. Phys.* **32**, 601 (1964)
3. "Isaac Newton", I. Cohen, *Sci. Am.*, diciembre de 1955, pág. 73
4. "Resource Letter PhM-1 on the Philosophical Foundation of Classical Mechanics", M. Hesse, *Am. J. Phys.* **32**, 905 (1964)
5. "The Conservation Laws of Physics", G. Feinberg y M. Goldhaber, *Sci. Am.*, octubre de 1963, pág. 36
6. "Friction", F. Palmer, *Sci. Am.*, febrero de 1951, pág. 54
7. "Resource Letter F-1 on Friction", E. Rabinowicz, *Am. J. Phys.* **31**, 897 (1963)
8. "The Shape of Raindrops", J. McDonald, *Sci. Am.*, febrero de 1954, pág. 64
9. "Billiard-Ball Collision Experiment", J. Bayes y W. Scott, *Am. J. Phys.* **31**, 197 (1963)
10. "Duration of Atomic Collisions", O. Oldenberg, *Am. J. Phys.* **25**, 94 (1957)
11. *Concepts of Mass in Classical and Modern Physics*, M. Jammer. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1961
12. *Mechanics*, Keith R. Symon. Reading, Mass.: Addison-Wesley, segunda edición, 1960, Secciones 2-4, 4-4 y 4-5

13. *Physical Mechanics*, Robert B. Lindsay. Princeton, N. J.: D. Van Nostrand, 1963, Secciones 1-6 a la 1-10, 3-10, 3-6, 3-7
14. *Introduction to Engineering Mechanics*, John V. Huddleston. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1961, cap. 19
15. *Vector Mechanics*, D. Christie. New York: McGraw-Hill, 1964, caps. 6 y 12; Secciones 7.1 a 7.5
16. *The Feynman Lectures on Physics*, vol. I, R. P. Feynman, R. B. Leighton y M. L. Sands. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1963, caps. 9, 10 y 18
17. *Source Book in Physics*, W. F. Magie. Cambridge, Mas.: Harvard University Press, 1963, pág. 1, Galileo; pág. 30, Newton
18. *Foundations of Modern Physical Science*, Gerald Holton y D. H. D. Roller. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1958, caps. 16 y 17

## Problemas

- 7.1 Una partícula de 3,2 kg de masa se mueve hacia el oeste con una velocidad de  $6,0 \text{ m s}^{-1}$ . Otra partícula de 1,6 kg de masa se desplaza hacia el norte con una velocidad de  $5,0 \text{ m s}^{-1}$ . Las dos partículas interactúan. Después de 2 s la primera partícula se mueve en la dirección  $N 30^\circ E$  con una velocidad de  $3,0 \text{ m s}^{-1}$ . Encontrar: (a) la magnitud y dirección de la velocidad de la otra partícula, (b) el momentum total de las dos partículas tanto al comienzo como al final de los 2 s, (c) el cambio en el momentum de cada partícula, (d) el cambio en la velocidad de cada partícula, y (e) las magnitudes de estos cambios en velocidad; verificar la ec. (7.9).
- 7.2 Un tronco de un árbol de 45 kg flota en un río cuya velocidad es de  $8 \text{ km hr}^{-1}$ . Un cisne de 10 kg intenta aterrizar en el tronco mientras vuela a  $8 \text{ km hr}^{-1}$  en sentido contrario al de la corriente. El cisne resbala a lo largo del tronco y sale del extremo de éste con una velocidad de  $2 \text{ km hr}^{-1}$ . Calcular la velocidad final del tronco. Despreciar la fricción del agua. ¿Es necesario convertir las velocidades a  $\text{m s}^{-1}$ ?
- 7.3 En la reacción química  $\text{H} + \text{Cl} \rightarrow \text{HCl}$ , el átomo H se estaba moviendo inicialmente hacia la derecha con una velocidad de  $1,57 \times 10^5 \text{ m s}^{-1}$ , mientras que el átomo de Cl se estaba moviendo perpendicularmente con una velocidad de  $3,4 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}$ . Encontrar la magnitud y dirección (respecto al movimiento original del átomo de H) de la velocidad de la molécula resultante HCl. Usar las masas atómicas de la tabla A-1.
- 7.4 Escribir una ecuación expresando la conservación del momentum en la reacción química  $A + BC \rightarrow AB + C$ .
- 7.5 Una partícula cuya masa es de 0,2 kg se está moviendo a  $0,4 \text{ m s}^{-1}$  a lo largo del eje X cuando choca con otra partícula, de masa 0,3 kg, que se encuentra en reposo. Después del choque que la primera partícula se mueve a  $0,2 \text{ m s}^{-1}$  en una dirección que forma un ángulo de  $40^\circ$  con el eje X. Determinar (a) la magnitud y la dirección de la velocidad de la segunda partícula después del choque y (b) el cambio en la velocidad y el momentum de cada partícula. (c) Verificar la relación (7.9).
- 7.6 Encontrar el momentum adquirido por una masa de 1 gm, 1 kg, y  $10^6 \text{ kg}$  cuando cada una de ellas cae desde una altura de 100 m. Considerando que el momentum adquirido por la tierra es igual y opuesto, determinar la velocidad (hacia arriba) adquirida por la tierra. La masa de la tierra se da en la tabla 13.1. Determinar la magnitud de la fuerza en cada caso.
- 7.7 Dos carros, A y B, se empujan, uno hacia el otro (Fig. 7-29). Inicialmente B está en reposo, mientras que A se mueve hacia la derecha a  $0,5 \text{ m s}^{-1}$ . Después

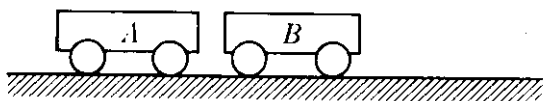


Figura 7-29

del choque, *A* rebota a  $0,1 \text{ m s}^{-1}$ , mientras que *B* se mueve hacia la derecha a  $0,3 \text{ m s}^{-1}$ . En un segundo experimento, *A* está cargado con una masa de  $1 \text{ kg}$  y se dirige hacia *B* con una velocidad de  $0,5 \text{ m s}^{-1}$ . Después de la colisión, *A* permanece constante, mientras que *B* se desplaza hacia la derecha a  $0,5 \text{ m s}^{-1}$ . Encontrar la masa de cada carro.

7.8 Considerar el sistema tierra-luna (ignorar el movimiento de este sistema alrededor del sol). En 28 días, la luna gira alrededor de la tierra en un círculo de  $4,0 \times 10^8 \text{ m}$  de radio. (a) ¿Cuál es el cambio en el momentum de la luna en 14 días? (b) ¿Cuál debe ser el cambio en el momentum de la tierra en 14 días? (c) ¿Se encuentra estacionaria la tierra en el sistema tierra-luna? (d) La masa de la tierra es 80 veces la de la luna. ¿Cuál es el cambio en la velocidad de la tierra en 14 días?

7.9 Dos objetos, *A* y *B*, que se mueven sin fricción en una línea horizontal, interactúan. El momentum de *A* es  $p_A = p_0 - bt$ , siendo  $p_0$  y  $b$  constante y  $t$  el tiempo. Encontrar el momentum de *B* en función del tiempo si (a) *B* se encuentra inicialmente en reposo y (b) el momentum inicial de *B* fue  $-p_0$ .

7.10 Una granada que se desplaza horizontalmente a una velocidad de  $8 \text{ km s}^{-1}$  con respecto a la tierra explota en tres segmentos iguales. Uno de ellos continúa moviéndose horizontalmente a  $16 \text{ km s}^{-1}$ , otro se desplaza hacia arriba haciendo un ángulo de  $45^\circ$  y el tercero se desplazará haciendo un ángulo de  $45^\circ$  bajo la horizontal. Encontrar la magnitud de las velocidades del segundo y tercer fragmentos.

7.11 Un satélite se mueve "horizontalmente" a una velocidad de  $8 \text{ km s}^{-1}$  con respecto a la tierra. Deseamos dejar caer verticalmente una carga de  $50 \text{ kg}$  lanzándola horizontalmente del satélite: Calcular la velocidad del satélite después

del lanzamiento de la carga si la masa total (incluyendo la carga) es de  $450 \text{ kg}$ . (¿Cuál es la velocidad de la carga, con respecto a la tierra inmediatamente después del lanzamiento?)

7.12 Un vagón vacío cuya masa es de  $10^4 \text{ kg}$  pasa a una velocidad de  $0,5 \text{ m s}^{-1}$  bajo un depósito estacionario de carbón. Si se dejan caer  $2 \times 10^4 \text{ kg}$  de carbón en el vagón al pasar debajo del depósito. (a) ¿Cuál es la velocidad final del vagón? (b) ¿Cuál es la velocidad del vagón si el carbón sale del vagón mediante orificios en su suelo y el carbón cae verticalmente con respecto al vagón. (c) Suponiendo que fuera posible lanzar todo el carbón de una sola vez por detrás del vagón de modo que el carbón quede en reposo con respecto a tierra, calcular la velocidad resultante del vagón. (d) ¿En qué condiciones se tendría el mismo resultado que en (c) si el carbón fuese lanzado haciendo un ángulo con respecto al vagón en movimiento?

7.13 Un carro con masa de  $1,5 \text{ kg}$  se desplaza a lo largo de su trayectoria a  $0,20 \text{ m s}^{-1}$  hasta que choca contra un obstáculo fijo al extremo de su camino. ¿Cuál es el cambio en el momentum y la fuerza promedio ejercida sobre el carro, si en  $0,1 \text{ s}$  (a) queda en reposo, (b) rebota con una velocidad de  $0,10 \text{ m s}^{-1}$ ? Discutir la conservación del momentum en el choque.

7.14 ¿Qué fuerza constante se requiere a fin de aumentar el momentum de un cuerpo de  $2300 \text{ kg m s}^{-1}$  a  $3000 \text{ kg m s}^{-1}$  en  $50 \text{ seg}$ ?

7.15 Un automóvil tiene una masa de  $1500 \text{ kg}$  y su velocidad inicial es de  $60 \text{ km hr}^{-1}$ . Cuando se aplican los frenos se produce una desaceleración constante, y el auto se detiene en  $1,2 \text{ minutos}$ . Determinar la fuerza aplicada al auto.

7.16 ¿Durante qué tiempo debe actuar una fuerza constante de  $80 \text{ N}$  sobre un cuerpo de  $12,5 \text{ kg}$  a fin de detenerlo, considerando que la velocidad inicial del cuerpo es de  $72 \text{ km hr}^{-1}$ ?

7.17 Un cuerpo con una masa de  $10 \text{ g}$  cae desde una altura de  $3 \text{ m}$  en una pila de arena. El cuerpo penetra una distancia de  $3 \text{ cm}$  en la arena hasta detenerse. ¿Qué fuerza ha ejercido la arena sobre el cuerpo?

7.18 Dos mulas halan un carguero en un canal mediante sogas atadas a la proa del carguero. El ángulo entre las sogas es de  $40^\circ$  y la tensión en las cuerdas es de 2500 N y 2000 N respectivamente. (a) Considerando que la masa del carguero es de 1700 kg. ¿Cuál sería la aceleración si el agua no ofreciera resistencia? (b) Si el carguero se desplaza con movimiento uniforme, cuál es la resistencia del agua?

7.19 Un hombre está parado en la plataforma de un camión que se mueve a la velocidad de  $36 \text{ km hr}^{-1}$ . ¿Bajo qué ángulo y en qué dirección debe el hombre apoyarse para evitar caer si, en 2 s la velocidad del camión cambia a (a)  $45 \text{ km hr}^{-1}$ , (b) a  $9 \text{ km hr}^{-1}$ ?

7.20 Un ascensor cuya masa es de 250 kg lleva tres personas cuyas masas son 60 kg, 80 kg y 100 kg, y la fuerza ejercida por el motor es de 5000 N. ¿Con qué aceleración subirá el ascensor? Partiendo del reposo, que altura alcanzará en 5 s?

7.21 Suponer en el problema previo que el hombre de 100 kg de masa está parado sobre una balanza. ¿Cuánto "pesa" a medida que el ascensor se acelera?

7.22 Un ascensor vacío de una masa de 5000 kg se desplaza verticalmente hacia abajo con una aceleración constante. Partiendo del reposo, recorre 100 pies en los primeros diez segundos. Calcular la tensión en el cable que sostiene el ascensor.

7.23 Un cuerpo cuya masa es de 60 kg está parado en una balanza. Si de repente se impulsa hacia arriba con una aceleración de  $245 \text{ cm s}^{-2}$ . ¿Cuál será la lectura de la escala? Discutir el efecto asociado con este problema cuando se aplica a una máquina que mide la aceleración del cuerpo midiendo la fuerza ejercida. (Tal máquina, denominada *acelerómetro*, es una herramienta de mucha utilidad en la industria y en laboratorios de investigación.)

7.24 Una masa de 200 gm se desplaza con velocidad constante  $v = u_x 50 \text{ cm s}^{-1}$ . Cuando la masa se encuentra en  $r = -u_x 10 \text{ cm}$ , actúa una fuerza constante  $F = -u_x 400 \text{ dinas}$  sobre ella. Determinar: (a) el tiempo en que se de-

tiene la masa, y (b) la posición de la masa en el instante en que se detiene.

7.25 Un hombre cuya masa es de 90 kg se encuentra en un ascensor. Determinar la fuerza que ejerce el piso sobre el hombre cuando: (a) el ascensor asciende con velocidad uniforme, (b) el ascensor baja con velocidad uniforme, (c) el ascensor acelera hacia arriba a  $3 \text{ m s}^{-2}$ , (d) el ascensor acelera hacia abajo a  $3 \text{ m s}^{-2}$ , y (e) el cable se rompe y el ascensor cae libremente.

7.26 Un cuerpo cuya masa es de 2 kg se desplaza sobre una superficie horizontal lisa bajo la acción de una fuerza horizontal  $F = 55 + t^2$  donde  $F$  se expresa en newtons y  $t$  en segundos. Calcular la velocidad de la masa cuando  $t = 5 \text{ s}$  (el cuerpo se encontraba en reposo cuando  $t = 0$ ).

7.27 Un cuerpo de masa  $m$  se mueve a lo largo del eje  $X$  de acuerdo a la ley  $x = A \cos(\omega t + \phi)$ , donde  $A$ ,  $\omega$  y  $\phi$  son constantes. Calcular la fuerza que actúa sobre el cuerpo en función de su posición. ¿Cuál es la dirección de la fuerza cuando  $x$  es (a) positivo, (b) negativo?

7.28 La fuerza resultante sobre un objeto de masa  $m$  es  $F = F_0 - kt$ , donde  $F_0$  y  $k$  son constantes y  $t$  es el tiempo. Encontrar la aceleración. Mediante integración, encontrar ecuaciones para la velocidad y la posición.

7.29 Sobre una partícula de masa  $m$ , inicialmente en reposo, actúa una fuerza  $F = F_0(1 - (t - T)^2/T^2)$  durante el intervalo  $0 \leq t \leq 2T$ . Demostrar que la velocidad de la partícula al final del intervalo es  $4F_0T/3m$ . Notar que la velocidad depende solamente del producto  $F_0(2T)$  y, que si  $T$  disminuye, se obtiene la misma velocidad haciendo  $F_0$  proporcionalmente más grande. Representar  $F$  en función de  $t$ . ¿Puede Ud. pensar en una situación física en la cual este problema proporcionaría una descripción adecuada?

7.30 Un cuerpo inicialmente en reposo en  $x_0$  se mueve en línea recta bajo la acción de una fuerza  $F = -k/x^3$ . Demostrar que su velocidad en  $x$  es  $v^2 = 2(K/m)/(1/x - 1/x_0)$ . Este método puede utilizarse para determinar la velo-

cidad de un cuerpo que cae hacia la tierra desde una gran altura.

7.31 Repetir el ejemplo 7.3 para el caso en que el carro está corriendo hacia abajo.

7.32 Un cuerpo con una masa de 1,0 kg se encuentra sobre un plano liso inclinado  $30^\circ$  con respecto a la horizontal. ¿Con qué aceleración se moverá el cuerpo si hay una fuerza aplicada sobre él de 8,0 N paralela al plano y dirigida (a) hacia arriba, (b) hacia abajo?

7.33 Un camión cuya masa es de 5000 kg está viajando hacia el norte a  $30 \text{ m s}^{-1}$  cuando, en 20 segundos, tuerce hacia un camino situado N  $70^\circ$  E. Encontrar (a) el cambio en el momentum. (b) la magnitud y la dirección de la fuerza promedio ejercida sobre el camión.

7.34 Los cuerpos de la Fig. 7-30 tienen masas de 10 kg, 15 kg y 20 kg, respectivamente. Se aplica en C una fuerza  $F$  de 50 N. Encontrar la aceleración del sistema y las tensiones en cada cable. Discutir el mismo problema cuando el sistema se mueve verticalmente en lugar de horizontalmente.

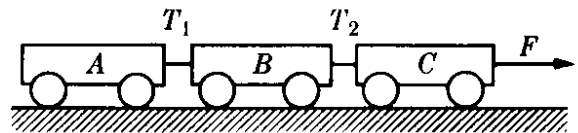


Figura 7-30

7.35. Calcular la aceleración de los cuerpos en la Fig. 7-31 y la tensión en la cuerda. Resuelva primero el problema algebraicamente y luego encuentre la solución numérica cuando  $m_1 = 50 \text{ g}$ ,  $m_2 = 80 \text{ g}$  y  $F = 10^5 \text{ dinas}$ .

7.36 Los cuerpos de la Fig. 7-32 están unidos con una cuerda como se muestra. Suponiendo que no hay fricción en las poleas, calcular la aceleración de los cuerpos y la tensión en la cuerda. Resolver algebraicamente el problema y luego aplicar la solución al caso en que  $m_1 = 8 \text{ kg}$  y  $m_2 = 2 \text{ kg}$ .

7.37 Determinar la aceleración con la cual se mueven los cuerpos de la Fig. 7-33 (a) y (b) también las tensiones en las cuerdas. Suponer que los cuerpos se deslizan sin fricción. Resolver el problema algebraicamente y luego aplicar

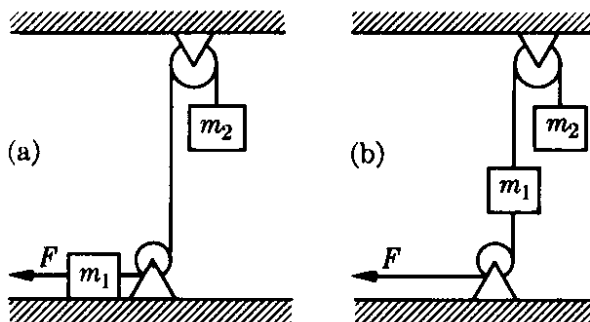


Figura 7-31

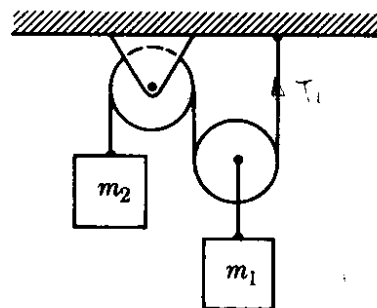


Figura 7-32

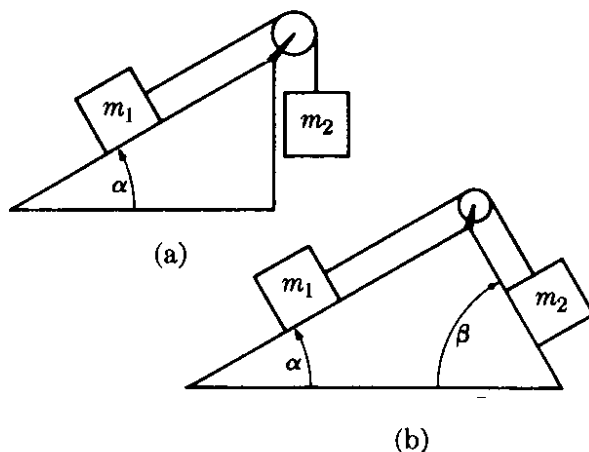


Figura 7-33

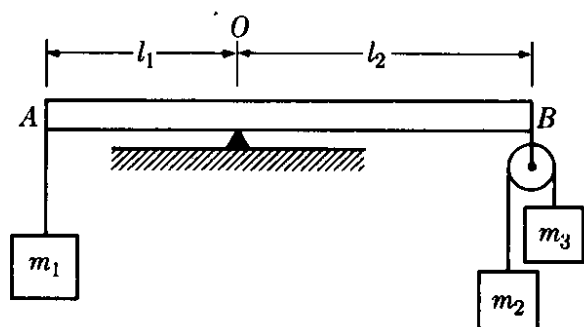


Figura 7-34



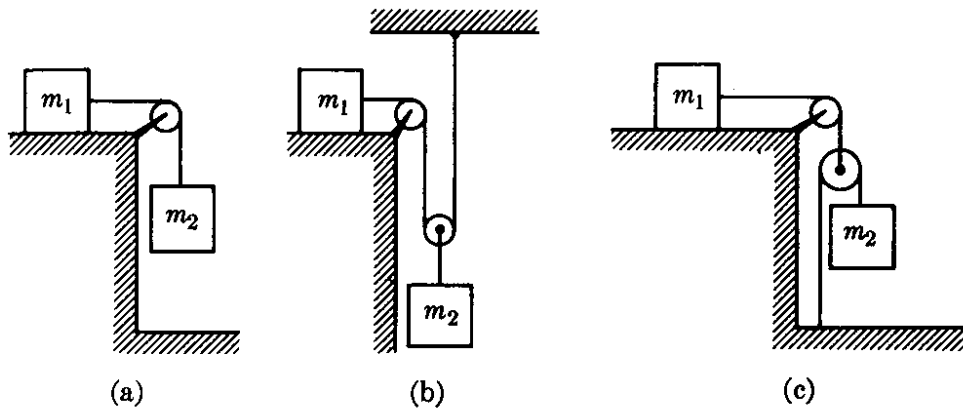


Figura 7-35

la solución obtenida cuando  $m_1 = 200$  g,  $m_2 = 180$  g,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\beta = 60^\circ$ .

7.38 Repetir el problema anterior cuando hay fricción, con coeficientes  $f_1$  sobre la primera superficie y  $f_2$  sobre la segunda. Discutir todos los movimientos posibles.

7.39 (a) Demostrar que la viga  $AB$  de la Fig. 7-34 se encontrará en equilibrio cuando se cumpla la siguiente ecuación:

$$m_1(m_2 + m_3)l_1 = 4m_2m_3l_2.$$

(b) Encontrar la fuerza que el punto pivote ejerce sobre la viga.

7.40 Calcular la aceleración de los cuerpos  $m_1$  y  $m_2$  y la tensión en las cuerdas (Fig. 7-35). Todas las poleas tienen peso despreciable y fricción nula y los cuerpos se deslizan sin fricción. ¿Cuál dispositivo acelerará  $m_1$  más rápidamente que en la caída libre? Resolver el problema primero algebraicamente, luego obtener la solución para el caso en que  $m_1 = 4$  kg y  $m_2 = 6$  kg.

7.41 Demostrar que las aceleraciones de los cuerpos en la Fig. 7-36, con

$$P = g/(m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3),$$

son

- (a)  $a_1 = 4m_2m_3P$ ,  
 $a^2 = (m_1m_3 - m_1m_2 - 4m_2m_3)P$ ,  
 $a_3 = (m_1m_3 - m_1m_2 + 4m_2m_3)P$ ;  
 (b)  $a_1 = (4m_2m_3 - m_1m_2 - m_1m_3)P$ ,  
 $a_2 = (3m_1m_3 - m_1m_2 - 4m_2m_3)P$ ,  
 $a_3 = (m_1m_3 - 3m_1m_2 + 4m_2m_3)P$ .

7.42 Las masas de  $A$  y  $B$  en la Fig. 7-37 son de 3 kg y 1 kg respectivamente. Si

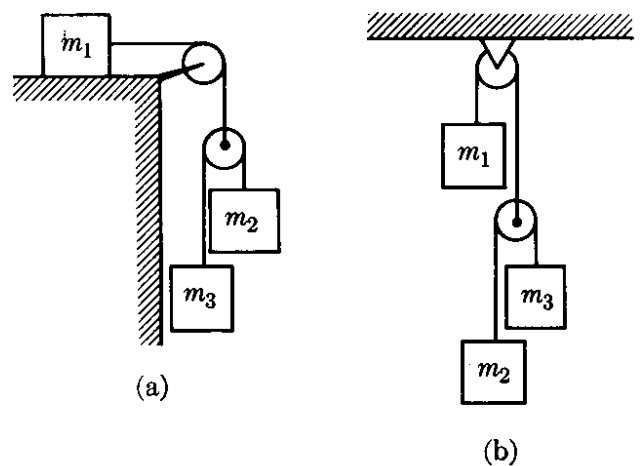


Figura 7-36

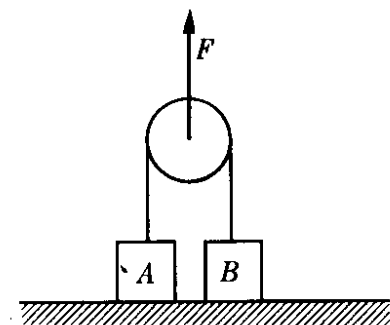


Figura 7-37

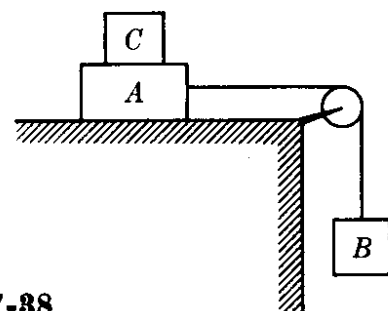
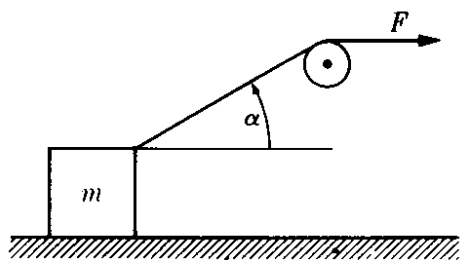
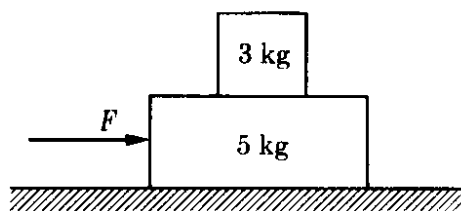


Figura 7-38

**Figura 7-39****Figura 7-40**

se aplica una fuerza  $F = 5t^2 \text{ N}$  a la polea, encontrar la aceleración de A y B en función de  $t$ . ¿Qué sucede después que B alcanza la polea?

7.43 Las masas de A y B en la Fig. 7-38 son, respectivamente de 10 kg y 5 kg. El coeficiente de fricción entre A y la mesa es de 0,20. Encontrar la masa mínima de C que evitará el movimiento de A. Calcular la aceleración del sistema si C se separa del sistema.

7.44 Determinar la fuerza de fricción ejercida por el aire sobre un cuerpo cuya masa es de 0,4 kg si cae con una aceleración de  $9,0 \text{ m s}^{-2}$ .

7.45 Repetir el ejemplo 7.6 para un caso en el cual no haya fuerza aplicada. La velocidad inicial del cuerpo es de  $2 \text{ m s}^{-1}$  hacia arriba. ¿Qué distancia recorrerá el cuerpo antes de detenerse? ¿Cuál es el valor menor del coeficiente de fricción de modo que el cuerpo, una vez detenido, no regrese hacia abajo?

7.46 Un bloque de masa 0,2 kg inicia su movimiento hacia arriba, sobre un plano inclinado a  $30^\circ$  con la horizontal, con una velocidad de  $12 \text{ m s}^{-1}$ . Si el coeficiente de fricción de deslizamiento es de 0,16, determinar qué distancia recorrerá el bloque sobre el plano antes de detenerse. ¿Qué velocidad tendrá el bloque al retornar (si retorna) a la base del plano?

7.47 Un tren cuya masa es de 100 toneladas sube un terreno que se eleva 1 pie cada 224 pies de longitud. La tracción del tren es de 9000 lbf y su aceleración es de  $1 \text{ pie s}^{-2}$ . Calcular la fuerza de fricción.

7.48 Encontrar la aceleración de  $m$  en la Fig. 7-39 si el coeficiente de fricción con el piso es  $f$ . Encontrar también la

fuerza ejercida por el piso sobre el cuerpo. Resolver para  $m = 2,0 \text{ kg}$ ,  $f = 0,2$  y  $F = 1,5 \text{ N}$ .

7.49 Un bloque cuya masa es 3 kg está colocado encima de otro bloque de masa de 5 kg (Fig. 7-40). Suponer que no hay fricción entre el bloque de 5 kg y la superficie sobre la cual reposa. Los coeficientes de fricción estático y de deslizamiento entre los bloques son 0,2 y 0,1 respectivamente. (a) ¿Cuál es la máxima fuerza que puede aplicarse a cualquier bloque de modo de deslizar todo el sistema y mantener los bloques juntos? (b) ¿Cuál es la aceleración cuando se aplica la fuerza máxima? (c) ¿Cuál es la aceleración del bloque de 3 kg si la fuerza es mayor que la fuerza máxima y se aplica al bloque de 5 kg? ¿Cuál si se aplica al bloque de 3 kg?

7.50 Encontrar la velocidad límite de una esfera de 2 cm de radio y una densidad de  $1,50 \text{ g cm}^{-3}$  que cae en glicerina (densidad =  $1,26 \text{ g cm}^{-3}$ ). Encontrar también la velocidad de la esfera cuando su aceleración es de  $100 \text{ cm s}^{-2}$ .

7.51 Un cuerpo con una masa de 4 kg es lanzado verticalmente con una velocidad inicial de  $60 \text{ m s}^{-1}$ . El cuerpo encuentra una resistencia del aire de  $F = -3v/100$ , donde  $F$  se expresa en newtones y  $v$  es la velocidad del cuerpo en  $\text{m s}^{-1}$ . Calcular el tiempo que transcurre desde el lanzamiento hasta que alcanza la máxima altura. ¿Cuál es la máxima altura?

7.52 Un cuerpo cae desde una altura de 108 cm en 5 s, partiendo del reposo. Encontrar su velocidad límite si la resistencia es proporcional a la velocidad.

7.53 Usando los resultados del ejemplo 7.8 encontrar el tiempo que toman las gotas del ejemplo 7.7 para alcanzar

0,50 y 0,63 de su velocidad límite. Encontrar también la distancia cubierta en el tiempo  $\tau$ .

7.54 Representar la velocidad de un cuerpo que cae en un fluido viscoso en función del tiempo  $t$  cuando la velocidad inicial es diferente de cero. Considerar ambos casos cuando  $v_0$  es menor y mayor que  $F/K\eta$ . ¿Qué sucede cuando  $v_0 = F/K\eta$ ?

7.55 El electrón en un átomo de hidrógeno gira alrededor de un protón, siguiendo una trayectoria casi circular de radio  $0,5 \times 10^{-10}$  m con una velocidad que se estima en  $2,2 \times 10^6$  m s<sup>-1</sup>. Calcular la magnitud de la fuerza entre el electrón y el protón.

7.56 Una piedra cuya masa es de 0,4 kg está atada al extremo de una cuerda de 0,8 m. Si la piedra describe un círculo a una velocidad de 80 rev/min, ¿cuál es la magnitud de la fuerza que ejerce la cuerda sobre la piedra? Si la cuerda se rompe la tensión es mayor de 50 kgf. ¿Cuál es la mayor velocidad angular posible?

7.57 Un pequeño bloque de 1 kg de masa está atado a una cuerda de 0,6 m y gira a 60 rev/min en un círculo vertical. Calcular la tensión en la cuerda cuando el bloque que se encuentra (a) en el punto más alto del círculo; (b) en el punto más bajo, (c) cuando la cuerda está horizontal, (d) calcular la velocidad lineal que debe tener el bloque en el punto más alto a fin de que la tensión en la cuerda sea cero.

7.58 Un tren pasa una curva con peralte a 63 km hr<sup>-1</sup>. El radio de la curva es de 300 m. Calcular (a) el peralte de la curva de modo que el tren no experimente fuerzas laterales, (b) el ángulo que hace con la vertical una cadena que cuelga de uno de los vagones.

7.59 Una autopista tiene 24 pies de ancho. Calcular la diferencia de nivel entre los bordes extremo e interno del camino a fin de que un auto pueda viajar a 50 mi hr<sup>-1</sup> (sin que experimente fuerzas laterales) alrededor de una curva cuyo radio es de 2000 pies.

7.60 Una curva de una autopista cuyo radio es de 1000 pies no tiene peralte. Suponer que el coeficiente de fricción

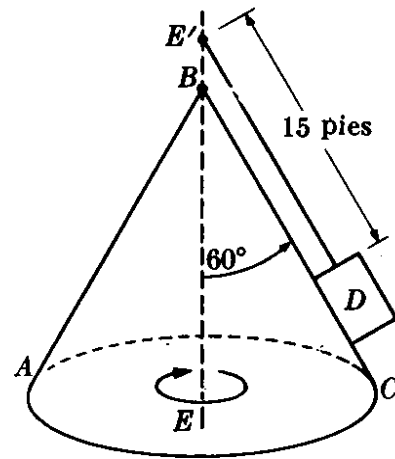


Figura 7-41

entre la llanta y el asfalto seco de 0,75, entre la llanta y el asfalto húmedo es de 0,50, y entre la llanta y el hielo es de 0,25. Determinar la máxima velocidad con la cual se puede pasar la curva con seguridad (a) en días secos?, (b) en días lluviosos, (c) en días en que ha nevado. ¿Por qué son estos valores independientes de la masa del auto?

7.61 Un cuerpo D, el cual tiene una masa de 12 lb (Fig. 7-41), se encuentra sobre una superficie cónica lisa ABC y está girando alrededor del eje EE' con una velocidad angular de 10 rev/min. Calcular: (a) la velocidad lineal del cuerpo, (b) la reacción de la superficie sobre el cuerpo, (c) la tensión en el hilo, y (d) la velocidad angular necesaria para reducir la reacción del plano a cero.

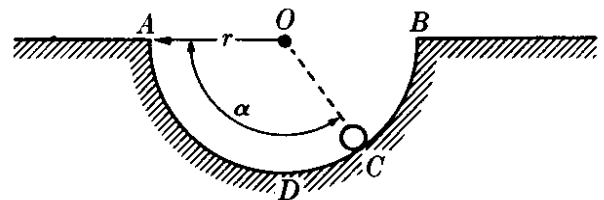


Figura 7-42

7.62 Una pequeña bola de masa  $m$ , inicialmente en A, se desliza sobre una superficie circular lisa ADB (Fig. 7-42). Mostrar que cuando la bola se encuentra en el punto C la velocidad angular y la fuerza ejercida por la superficie son  $\omega = \sqrt{2g \sin \alpha / r}$ ,  $F = mg(1 + 2 \sin \alpha)$ .

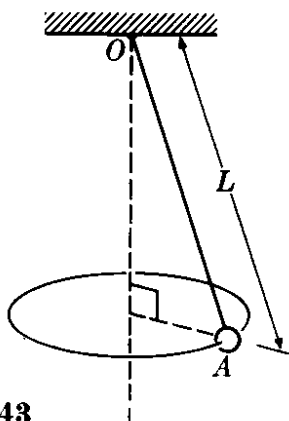


Figura 7-43

7.63 Refiriéndose al péndulo cónico de la Fig. 7-43 que rota en un círculo horizontal con una velocidad angular  $\omega$ , calcular la tensión en la cuerda y el ángulo que hace con la vertical para el caso cuando  $M = 12 \text{ kg}$ ,  $L = 1,16 \text{ m}$  y  $\omega = 3,0 \text{ rad s}^{-1}$ .

7.64 Demostrar la igualdad de los períodos de 2 péndulos cónicos que cuelgan del mismo techo con diferentes longitudes, pero moviéndose de modo que sus masas se encuentran a la misma altura sobre el piso.

7.65 Una partícula de densidad  $\rho_1$  está suspendida rotando en un líquido de densidad  $\rho_2$  en rotación. Demostrar que la partícula describirá una trayectoria espiral hacia afuera (hacia adentro) si  $\rho_1$  es mayor (menor) que  $\rho_2$ .

7.66 Demostrar que si un cuerpo se mueve bajo la acción de una fuerza  $F = k\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ , donde  $\mathbf{u}$  es un vector unitario arbitrario, el movimiento es circular con velocidad angular  $\omega = k\mathbf{u}$ , o, en un caso más general, el movimiento es de espiral paralelo a  $\mathbf{u}$ .

7.67 Para  $t = 0$ , un cuerpo de masa  $3,0 \text{ kg}$  está situado en  $\mathbf{r} = \mathbf{u}_x 4 \text{ m}$ , y tiene una velocidad  $\mathbf{v} = (\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y 6) \text{ m s}^{-1}$ . Si actúa sobre la partícula una fuerza constante  $\mathbf{F} = \mathbf{u}_y 5 \text{ N}$ , encontrar (a) el cambio en el momentum (lineal) del cuerpo después de  $3 \text{ s}$ , (b) el cambio en el momentum angular del cuerpo después de  $3 \text{ s}$ .

7.68 Una bola cuya masa es de  $200 \text{ gm}$  se está moviendo hacia el norte con una velocidad de  $300 \text{ cm s}^{-1}$ . Cuando se

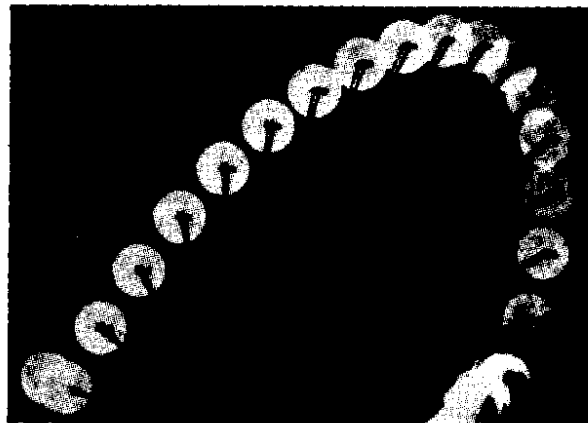


Figura 7-44

aplica una fuerza de  $2000 \text{ dinas}$  en la dirección este, obtener la ecuación de la trayectoria y calcular después de  $40 \text{ s}$ : (a) la magnitud y dirección de la velocidad, (b) la distancia recorrida desde el momento inicial, (c) el desplazamiento medido desde el punto inicial.

7.69 Sobre una partícula que se mueve con una velocidad  $v_0$  a lo largo del eje  $X$  actúa una fuerza  $F$  paralela al eje  $Y$  mientras se mueve en la región  $0 \leq x \leq L$ . Encontrar el cambio en la dirección de su movimiento. ¿A qué distancia del eje  $X$  se encontrará la partícula que llega a una pared situada en  $x = L$ ?

7.70 Una masa puntual se está moviendo en el plano  $XY$  bajo la acción de una fuerza constante cuyas componentes son  $F_x = 6 \text{ N}$  y  $F_y = -7 \text{ N}$ . Cuando  $t = 0 \text{ s}$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $v_x = -2 \text{ m s}^{-1}$ , y  $v_y = 0$ , encontrar la posición y la velocidad cuando  $t = 2 \text{ s}$ . Suponer que la masa de la partícula es de  $16 \text{ kg}$ .

7.71 El vector posición de un cuerpo de masa  $6 \text{ kg}$  está dado por  $\mathbf{r} = \mathbf{u}_x (3t^2 - 6t) + \mathbf{u}_y (-4t^2) + \mathbf{u}_z (3t + 2) \text{ m}$ . Encontrar: (a) la fuerza que actúa sobre la partícula, (b) el torque con respecto al origen de la fuerza que actúa sobre la partícula, (c) el momentum lineal y el momentum angular de la partícula con respecto al origen, (d) verificar que  $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$  y  $\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{L}/dt$ .

7.72 Cuando  $t = 0 \text{ s}$ , una masa de  $3 \text{ kg}$  está situada en  $\mathbf{r} = \mathbf{u}_x 5 \text{ m}$  y tiene una velocidad  $\mathbf{u}_y 10 \text{ m s}^{-1}$ . Determinar el momentum angular de la masa con respecto al origen para (a)  $t = 0 \text{ s}$  y (b)  $t = 12 \text{ s}$ .

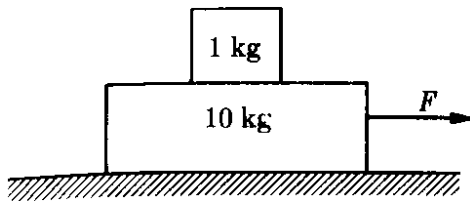


Figura 7-45

7.73 Un extremo de una banda de goma está unido a un disco; el otro extremo está fijo. El disco puede desplazarse sobre una mesa horizontal lisa. Si la banda de goma se estira y se empuja el disco en un cierto ángulo, éste describe la trayectoria mostrada por la fotografía estroboscópica de la Fig. 7-44 (el intervalo de tiempo entre destellos es de 0,5 s). Realizando mediciones en la fotografía, demostrar que la ley de las áreas se confirma en este movimiento. A partir de la situación física descrita, ¿puede Ud. decir si la fuerza sobre el disco es central?

7.74 Un cuerpo de masa de 1 kg reposa sobre otro de masa 10 kg, el cual a su vez reposa sobre una superficie horizontal como muestra la Fig. 7-45. La fuerza  $F$  varía con el tiempo  $t$  (medido en segundos), de tal modo que  $F = 0,2t$  N. Si el coeficiente de fricción estática es de 0,2 y el coeficiente de fricción cinético es 0,15 entre todas las superficies, encontrar el movimiento de cada bloque en función del tiempo.

7.75 Cuando la tierra se encuentra en el afelio (la posición más lejana con respecto al sol), en junio 21, su distancia es de  $1,52 \times 10^{11}$  m y su velocidad orbital es de  $2,93 \times 10^4$  m s<sup>-1</sup>. Encontrar su velocidad orbital en el perihelio (la posición más cercana al sol) seis meses más tarde, cuando su distancia del sol es  $1,47 \times 10^{11}$  m. ¿Afectan estas variaciones en la velocidad la duración del día solar? Encontrar también la velocidad angular de la tierra alrededor del sol en ambos casos (Ayuda: tanto en el afelio como en el perihelio la velocidad es perpendicular al radio vector).

7.76 Un cohete de  $10^3$  kg se coloca verticalmente en su base de lanzamiento. El gas de propulsión se expele a una velocidad de 2 kg s<sup>-1</sup>. Encontrar la velocidad mínima de los gases de escape de

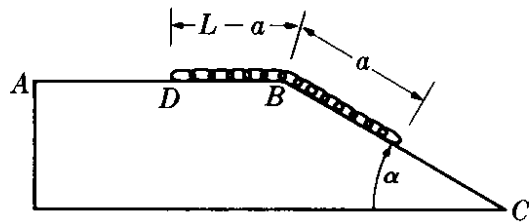


Figura 7-46

modo que el cohete comience a elevarse. Encontrar también la velocidad del cohete 10 s después de la ignición, suponiendo que la velocidad de escape es la mínima.

7.77 Un cohete, lanzado verticalmente, expele los gases a una velocidad constante de  $5 \times 10^{-3} m_0$  kg s<sup>-1</sup>, donde  $m_0$  es su masa inicial. La velocidad de escape de los gases con respecto al cohete es de  $5 \times 10^3$  m s<sup>-1</sup>. Encontrar la velocidad y la altura del cohete después de 10 s.

7.78 Una cadena flexible de longitud  $L$  y peso  $W$  (Fig. 7-46) está colocada inicialmente en reposo sobre una superficie sin fricción ABC, estando D a una distancia  $L - a$  de B. Demostrar que cuando el extremo D llega al punto B la velocidad de la cadena es  $v =$

$$= \sqrt{(g/L)(L^2 - a^2) \sin \alpha}.$$

7.79 Una soga uniforme de masa  $M$  y longitud  $L$  (Fig. 7-47) pasa sobre un clavo liso de radio muy pequeño. Cuando se inicia el movimiento  $BC = b$ . Demostrar que la aceleración y la velocidad cuando  $BC = \frac{2}{3} L$  son  $a = g/3$ ,  $v = \sqrt{2g/L(\frac{8}{3} L^2 + 2bL - b^2)}$ . Aplicar el resultado para  $L = 12$  pies,  $b = 7$  pies.

7.80 Una masa  $M$ , unida al extremo de una cadena muy larga que tiene una masa  $m$  por unidad de longitud, se tira verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial  $v_0$ . Demostrar que la máxima altura alcanzada por  $M$  es de  $h = (M/m) [\sqrt{1 + 3mv_0^2/2Mg} - 1]$  y que la velocidad de  $M$  cuando retorna a tierra es de  $v = \sqrt{2gh}$ .

7.81 El vapor de agua se condensa sobre una gota de lluvia a razón de  $m$  unidades de masa por unidad de tiempo; inicialmente la gota tiene una masa  $M$  y parte del reposo. Demostrar que la distancia que cae en un tiempo  $t$  es  $\frac{1}{2}gt^2$

$\{\frac{1}{2}t^2 + (M/m)t - (M^2/m^2) \ln [1 + (m/M)t]\}$ .  
Despreciar la resistencia debida al aire.

7.82 Una partícula se mueve bajo la acción de una fuerza constante a través de un fluido que ejerce una fuerza contraria al movimiento y proporcional a la velocidad. Demostrar que, si se suprime la fuerza después que el cohete alcance la velocidad límite, la velocidad en el tiempo  $t$  será  $v = v_L e^{-(k/m)t}$  y la distancia recorrida será  $x = (m/k) v_L (1 - e^{-(k/m)t})$ . Verificar que la distancia recorrida antes de que se detenga es  $v_L(m/k)$ . Demostrar que la velocidad de la partícula se reducirá a  $1/e$  de su valor límite después de un tiempo  $t = (m/k)$ .

7.83 Un cuerpo se mueve bajo la acción de una fuerza constante  $F$  en un fluido que se opone al movimiento con una fuerza proporcional al cuadrado de la velocidad; esto es,  $F_f = -kv^2$ . Demostrar que la velocidad límite es  $v_L = \sqrt{F/k}$ .

7.84 Demostrar que cuando un cuerpo está en movimiento bajo una fuerza que se opone al movimiento proporcional al cuadrado de la velocidad, la velocidad en el tiempo  $t$  es:

$$v = v_L \frac{(v_0 + v_L)e^{(kv_L/m)t} + (v_0 - v_L)e^{-(kv_L/m)t}}{(v_0 + v_L)e^{(kv_L/m)t} - (v_0 - v_L)e^{-(kv_L/m)t}}.$$

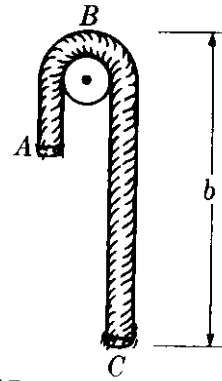


Figura 7-47

Demostrar que la relación entre la velocidad y la distancia es  $v^2 = (F/k) + [v_0^2 - (F/k)]e^{-2(k/m)x}$ . Representar  $v^2$  en función de  $x$  para  $v_0 = 0$ . Si la fuerza se suprime después que el cuerpo alcance la velocidad límite, mostrar que la velocidad de la partícula disminuye a  $1/e$  del valor de la velocidad límite después de recorrer una distancia  $m/k$ .