

# MOVIMIENTO OSCILATORIO

- 12.1 *Introducción*
- 12.2 *Cinemática del movimiento armónico simple*
- 12.3 *Fuerza y energía en el movimiento armónico simple*
- 12.4 *Dinámica del movimiento armónico simple*
- 12.5 *Péndulo simple*
- 12.6 *Péndulo compuesto*
- 12.7 *Superposición de dos MAS: Igual dirección, igual frecuencia*
- 12.8 *Superposición de dos MAS: Igual dirección, diferente frecuencia*
- 12.9 *Superposición de dos MAS: Direcciones perpendiculares*
- 12.10 *Osciladores acoplados*
- 12.11 *Oscilaciones armónicas*
- 12.12 *Oscilaciones amortiguadas*
- 12.13 *Oscilaciones forzadas*
- 12.14 *Impedancia de un oscilador*
- 12.15 *Análisis de Fourier del movimiento periódico*

## 12.1 Introducción

Uno de los movimientos más importantes observados en la naturaleza es el movimiento oscilatorio (o vibratorio). Una partícula oscila cuando se mueve periódicamente con respecto a la posición de equilibrio. El movimiento de un péndulo es oscilatorio. Un cuerpo en el extremo de un resorte estirado, una vez que se suelta, comienza a oscilar. Los átomos de un sólido están vibrando. Similarmente, los átomos en una molécula vibran unos con respecto a otros. Los electrones de una antena radiante o receptora oscilan rápidamente. Una comprensión del movimiento vibratorio es también esencial en la discusión del fenómeno ondulatorio, sobre el cual trataremos en la Parte 3 de este texto.

De todos los movimientos oscilatorios, el más importante es el *movimiento armónico simple* (MAS), debido a que, además de ser el movimiento más simple de describir matemáticamente, constituye una aproximación muy cercana de muchas oscilaciones encontradas en la naturaleza. La mayor parte de nuestras discusiones en este capítulo se concentrarán en esta clase de movimiento.

## 12.2 Cinemática del movimiento armónico simple

Por definición, decimos que una partícula que se mueve a lo largo del eje de las  $X$  tiene un movimiento armónico simple cuando su desplazamiento  $x$  respecto al origen del sistema de coordenadas está dado en función del tiempo por la relación

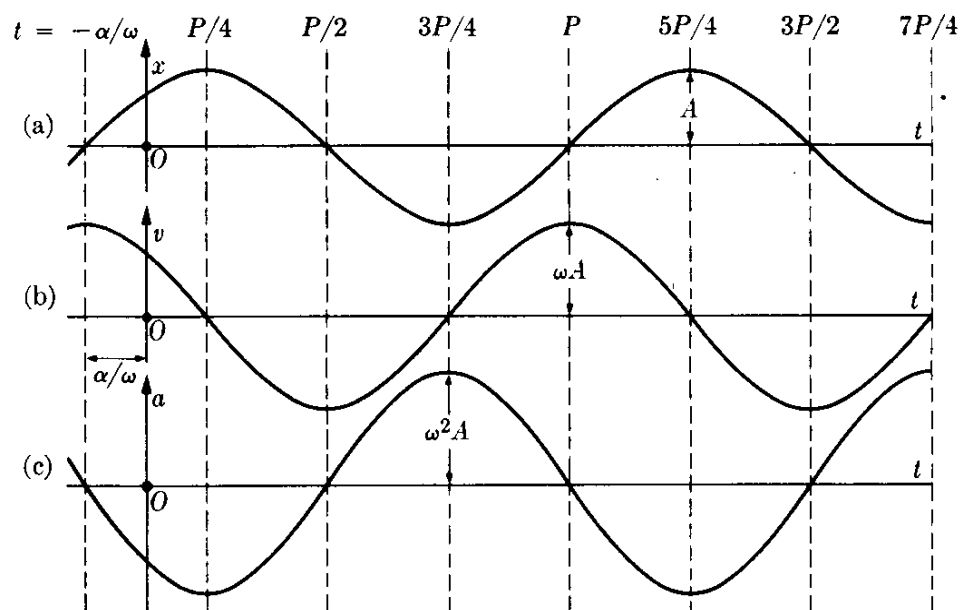
$$x = A \sin(\omega t + \alpha). \quad (12.1)$$

La cantidad  $\omega t + \alpha$  se denomina la *fase*, y por ello  $\alpha$  es la fase inicial; esto es, su valor cuando  $t = 0$ . Aunque hemos definido el movimiento armónico simple en función de una expresión senoidal, puede igualmente expresarse en función de una expresión cosenoidal, el único cambio sería una diferencia inicial de fase de  $\pi/2$ . Como la función seno (o coseno) varía entre  $-1$  y  $+1$ , el desplazamiento de la partícula varía entre  $x = -A$  y  $x = +A$ . El desplazamiento máximo a partir del origen,  $A$ , se define como la *amplitud* del movimiento armónico simple. La función seno se repite cada vez que el ángulo aumenta en  $2\pi$ . Por consiguiente, el desplazamiento de la partícula se repite después de un intervalo de tiempo de  $2\pi/\omega$ . Luego el movimiento armónico simple es periódico, y su período es  $P = 2\pi/\omega$ . La frecuencia  $\nu$  de un movimiento armónico simple es igual al número de oscilaciones completas por unidad de tiempo; así  $\nu = 1/P$ . La cantidad  $\omega$ , denominada *frecuencia angular* de la partícula oscilante, está relacionada con la frecuencia por una relación similar a la ec. (5.51) del movimiento circular,

$$\omega = \frac{2\pi}{P} = 2\pi\nu. \quad (12.2)$$

La velocidad de la partícula, que se determina usando la ec. (5.2), es

$$v = \frac{dx}{dt} = \omega A \cos(\omega t + \alpha). \quad (12.3)$$



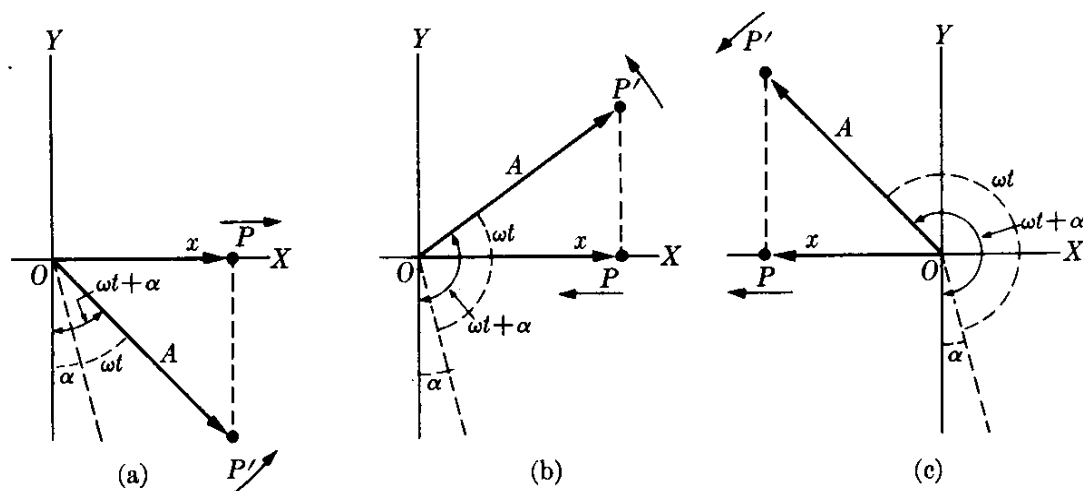
**Fig. 12-1.** Gráficos del desplazamiento, la velocidad y la aceleración en función del tiempo en el MAS.

Similarmente, la aceleración está dada por:

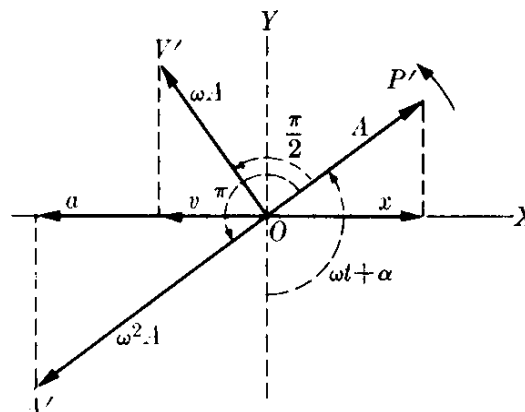
$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A \sin(\omega t + \alpha) = -\omega^2 x, \quad (12.4)$$

la cual indica que en el movimiento armónico simple la aceleración es siempre proporcional y opuesta al desplazamiento. En la Fig. 12-1, hemos ilustrado  $x$ ,  $v$ , y  $a$  en función del tiempo.

El desplazamiento de una partícula que se mueve con MAS puede también considerarse como la componente  $X$  de un vector  $OP'$ , con  $\overline{OP'} = A$ , que rota alrededor de  $O$  en sentido contrario a las agujas del reloj con velocidad angular  $\omega$ , y formando (a cada instante) un ángulo  $\omega t + \alpha$  con el eje negativo de las  $Y$ ,



**Fig. 12-2.** Vector rotante del desplazamiento en el MAS.

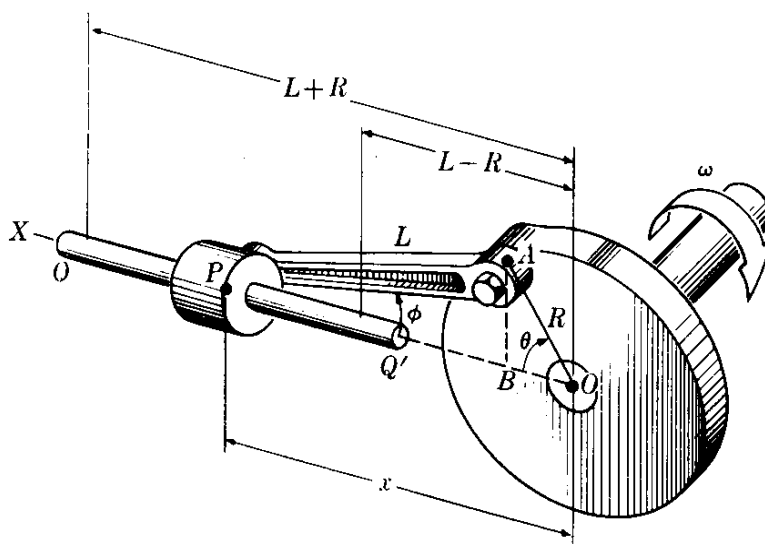


**Fig. 12-3.** Vectores rotantes del desplazamiento, la velocidad y la aceleración en el MAS.

medido también en sentido contrario del movimiento de las agujas del reloj. En la Fig. 12-2 hemos representado el vector  $\overrightarrow{OP'}$  en varias posiciones. El estudiante puede verificar que en cualquier instante la componente X de  $\overrightarrow{OP'}$  está dada por  $x = OP = OP' \cos(\omega t + \alpha)$ , en concordancia con la ec. (12.1).

La velocidad y la aceleración de la partícula pueden también representarse por los vectores rotantes  $\overrightarrow{OV'}$  y  $\overrightarrow{OA'}$ , cuyas longitudes son  $\omega A$  y  $\omega^2 A$ , respectivamente, y cuyas componentes a lo largo del eje X dan la velocidad  $v$  y la aceleración  $a$  de la partícula que se mueve con MAS. La orientación relativa de estos vectores se ilustra en la Fig. 12-3. Puede notarse que  $\overrightarrow{OV'}$  está adelantado  $\pi/2$  y  $\overrightarrow{OA'}$  está adelantado  $\pi$ , ambos con respecto al vector rotante  $\overrightarrow{OP'}$ .

**EJEMPLO 12.1.** Determinar si  $P$  en el mecanismo ilustrado en la Fig. 12-4 se mueve con MAS. En este mecanismo,  $QQ'$  es una barra sobre la cual puede deslizarse el cilindro  $P$ ; está conectada por una varilla  $L$  al borde de una rueda de radio  $R$  que gira con velocidad angular constante  $\omega$  (Este mecanismo, encontrado en muchas máquinas de vapor, transforma el movimiento oscilatorio del pistón en el movimiento rotacional de la rueda).



**Fig. 12-4.** El movimiento de  $P$  es oscilante pero no armónico simple.

**Solución:** De la figura podemos ver fácilmente que  $P$  oscila desde una posición a una distancia  $L + R$  a partir de  $O$  hasta una posición  $L - R$  a partir de  $O$ . Para determinar si el movimiento es armónico simple, debemos encontrar si el desplazamiento de  $P$  satisface la ec. (12.1). De la geometría de la figura tenemos que  $x = R \cos \theta + L \cos \phi$  y  $L \sin \phi = R \sin \theta$ , de modo que  $\sin \phi = (R/L) \sin \theta$

$$\cos \phi = (1 - \sin^2 \phi)^{1/2} = \frac{1}{L} (L^2 - R^2 \sin^2 \theta)^{1/2}.$$

Por consiguiente

$$x = R \cos \theta + (L^2 - R^2 \sin^2 \theta)^{1/2},$$

la cual, ya que  $\theta = \omega t$ , da

$$x = R \cos \omega t + (L^2 - R^2 \sin^2 \omega t)^{1/2}.$$

Esta expresión da el desplazamiento de  $P$  en función del tiempo. Cuando comparamos esta ecuación con la ec. (12.1), vemos que el primer término,  $R \cos \omega t$ , corresponde al movimiento armónico simple con  $\alpha = \pi/2$ , pero el segundo no. Así, aunque el movimiento de  $P$  es oscilatorio, no es armónico simple.

Un ingeniero mecánico al diseñar un mecanismo como el de la Fig. 12-4 tiene que pensar cómo aplicar la fuerza correcta en  $P$  de modo que el desplazamiento  $x$  esté dado por la ecuación expresada líneas arriba, de modo que la rueda se mueve con movimiento circular uniforme. Cuando  $P$  está unido al pistón de una máquina de vapor, esto se lleva a cabo regulando la admisión de vapor.

**EJEMPLO 12.2.** Discutir el movimiento de una partícula sobre la cual actúa una fuerza oscilante  $F = F_0 \sin \omega t$ .

**Solución:** La ecuación de movimiento de la partícula es  $m\alpha = F_0 \sin \omega t$ , o ya que  $a = dv/dt$ ,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F_0}{m} \sin \omega t.$$

Integrando esta ecuación obtenemos

$$v = -\frac{F_0}{m\omega} \cos \omega t + v_0,$$

donde  $v_0$  es una constante de integración y no la velocidad inicial la cual se obtiene cuando  $t = 0$ . Como puede verse, la velocidad inicial es  $v_0 - F_0/m\omega$ . Recordando que  $v = dr/dt$  e integrando por segunda vez, obtenemos

$$r = -\frac{F_0}{m\omega^2} \sin \omega t + v_0 t + r_0,$$

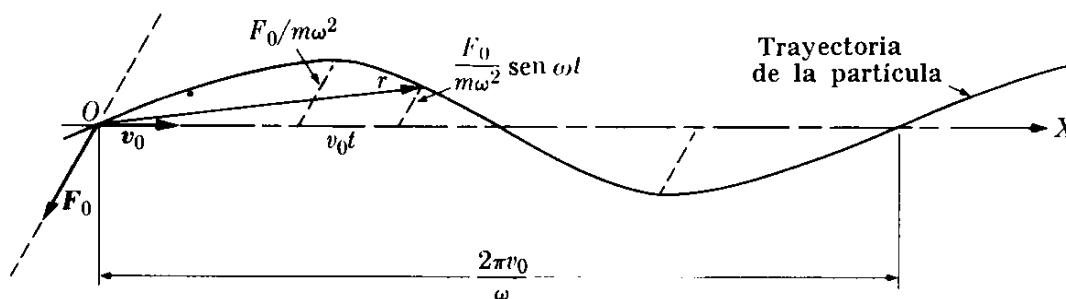


Fig. 12-5. Movimiento plano bajo la acción de una fuerza armónica.

expresión que da la posición de la partícula en función del tiempo.  $r_0$  es la posición inicial de la partícula. Si suponemos que  $r_0 = 0$ , la trayectoria de la partícula es como se ilustra en la Fig. 12-5. Como puede notarse, la partícula avanza hacia la derecha pero oscila alrededor del eje en la dirección dada por  $F_0$ . Esta figura no debe confundirse con la Fig. 12-1 (a) que da el desplazamiento como una función del tiempo para una partícula que se mueve con MAS. La situación física que hemos ilustrado ocurre, por ejemplo, cuando un electrón (o cualquier partícula cargada) se mueve en un campo eléctrico oscilante.

Sugerimos que el estudiante considere el caso particular cuando  $F_0$  y  $v_0$  son paralelos, y que represente el desplazamiento en función del tiempo.

### 12.3 Fuerza y energía en el movimiento armónico simple

De la ec. (12.4) podemos calcular la fuerza que debe actuar sobre una partícula de masa  $m$  a fin de que oscile con movimiento armónico simple. Aplicando la ecuación de movimiento  $F = ma$ , y sustituyendo el resultado de la ec. (12.4), la cual nos da la aceleración, tenemos

$$F = -m\omega^2 x = -kx, \quad (12.5)$$

donde hemos definido

$$k = m\omega^2 \quad \text{ó} \quad \omega = \sqrt{k/m}. \quad (12.6)$$

Esto indica que en el movimiento armónico simple la fuerza es proporcional al desplazamiento, y opuesta a él. Por ello la fuerza está siempre dirigida hacia el origen  $O$ . Este es el punto de equilibrio ya que en el origen  $F = 0$ , por ser  $x = 0$ . Podemos también decir que la fuerza  $F$  es de atracción, siendo el centro de atracción el punto  $O$ . La fuerza dada por la ec. (12.5) es el tipo de fuerza que aparece cuando uno deforma un cuerpo elástico tal como un resorte; ya vimos varios ejemplos de esta fuerza en el capítulo 8. La constante  $k = m\omega^2$ , llamada algunas veces *constante elástica*, representa la fuerza necesaria para desplazar la partícula una unidad de distancia. Combinando las ec. (12.2) y (12.6), podemos escribir las ecuaciones

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}, \quad \nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (12.7)$$

que expresan el período y la frecuencia de un movimiento armónico simple en función de la masa de la partícula y la constante elástica de la fuerza aplicada. La energía cinética de la partícula es

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \alpha). \quad (12.8)$$

O, ya que  $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$ , usando la ec. (12.1) para el desplazamiento, podemos expresar también la energía cinética en función del desplazamiento por la relación

$$E_k = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 [1 - \sin^2(\omega t + \alpha)] = \frac{1}{2}m\omega^2 (A^2 - x^2). \quad (12.9)$$

Obsérvese que la energía cinética es un máximo en el centro ( $x = 0$ ) y cero en los extremos de oscilación ( $x = \pm A$ ).

Para obtener la energía potencial recordamos la ec. (8.24),  $F = -dE_p/dx$ . Usando la ec. (12.5) para la fuerza, podemos escribir

$$dE_p/dx = kx.$$

Integrando (escogiendo el cero de la energía potencial en el origen o posición de equilibrio) obtenemos

$$\int_0^{E_p} dE_p = \int_0^x kx \, dx \quad \text{ó} \quad E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2x^2. \quad (12.10)$$

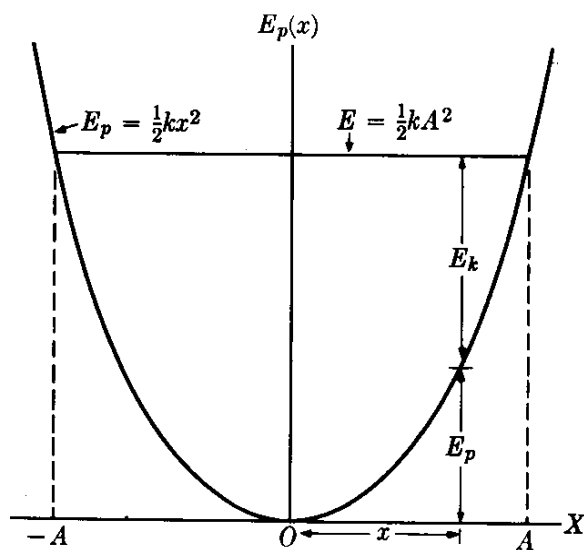
Por consiguiente, la energía potencial es un mínimo (cero) en el centro ( $x = 0$ ) y aumenta a medida que la partícula se aproxima a los extremos de la oscilación ( $x = \pm A$ ). Sumando las ec. (12.9) y (12.10) obtenemos la siguiente expresión para la energía total del oscilador armónico simple.

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 = \frac{1}{2}kA^2, \quad (12.11)$$

la cual es una constante. Esto era de esperarse por la ec. (8.29), ya que la fuerza es conservativa. Por lo tanto, podemos decir que, durante una oscilación hay un intercambio continuo de energías potencial y cinética. Al alejarse de la posición de equilibrio, la energía potencial aumenta a expensas de la energía cinética;

lo inverso sucede cuando la partícula se acerca hacia la posición de equilibrio.

La Fig. 12-6 muestra la energía potencial,



**Fig. 12-6.** Relaciones de energía en el MAS.

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2$$

representada por una parábola. Para una energía total dada  $E$ , correspondiente a la línea horizontal, los límites de la oscilación están determinados por sus intersecciones con la curva de energía potencial, como se explicó en la sección 8.11. Como la parábola  $E_p$  es simétrica, los límites de oscilación se encuentran a distancias iguales  $\pm A$  del origen  $O$ . En cualquier punto  $x$  la energía cinética  $E_k$  está dada por la distancia entre la curva  $E_p(x)$  y la línea  $E$ .

## 12.4 *Dinámica del movimiento armónico simple*

En la sección 12.2 definimos el movimiento armónico simple mediante sus propiedades cinemáticas expresadas por la ec. (12.1). Sólo posteriormente discutimos la clase de fuerza necesaria para producir tal movimiento (dada por la ec. 12.5).

Sin embargo, es importante discutir el problema inverso: Demostraremos que, dada una fuerza de atracción proporcional al desplazamiento (esto es,  $F = -kx$ ), el movimiento resultante es armónico simple.

Un procedimiento consiste en usar la ecuación de movimiento,  $F = ma$ , considerando  $F = -kx$ , y, recordando que en un movimiento rectilíneo  $a = d^2x/dt^2$ , escribir la ecuación

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad \text{ó} \quad m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0.$$

Haciendo  $\omega^2 = k/m$ , podemos escribir

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0. \quad (12.12)$$

Esta es una ecuación diferencial cuyas soluciones se conocen que son funciones senos o cosenos de  $\omega t$ . Sustituyendo en lugar de  $x$  el valor de  $A \sin(\omega t + \alpha)$ , podemos verificar directamente que esta expresión de  $x$ , que corresponde al movimiento armónico simple, satisface a la ec. (12.12). Por consiguiente, decimos que  $x = A \sin(\omega t + \alpha)$  es la solución general de la ec. (12.12) ya que tiene dos constantes arbitrarias, la amplitud  $A$  y la fase inicial  $\alpha$ .\* Por lo tanto, verificamos el hecho de que *una fuerza de atracción proporcional al desplazamiento produce movimiento armónico simple*.

En este punto nos adelantamos a decir al estudiante que esta ecuación diferencial (12.12) aparece en muchas situaciones en física. Donde se le encuentre indica que el fenómeno correspondiente es oscilatorio de acuerdo a la ley  $A \sin(\omega t + \alpha)$ , ya sea que describa un desplazamiento lineal o angular de una partícula, una corriente eléctrica o la concentración iónica en un plasma, la temperatura de un cuerpo, o cualquiera de una multitud de otras situaciones físicas.

**EJEMPLO 12.3.** Discutir la solución de la ec. (12.12) del movimiento armónico simple en función del desplazamiento inicial  $x_0$  y la velocidad inicial  $v_0$ .

**Solución:** Hemos indicado que la solución general de la ec. (12.12) es

$$x = A \sin(\omega t + \alpha).$$

Luego, la velocidad es  $v = dx/dt = \omega A \cos(\omega t + \alpha)$ . Por tanto, para  $t = 0$ , tenemos

$$x_0 = A \sin \alpha, \quad v_0 = \omega A \cos \alpha.$$

Dividiendo obtenemos

$$\operatorname{tg} \alpha = \omega x_0 / v_0 \quad \text{y} \quad A = (x_0^2 + v_0^2 / \omega^2)^{1/2}.$$

Por ejemplo, si la partícula se encuentra en la posición de equilibrio  $x_0 = 0$  y recibe un golpe que le proporciona una velocidad  $v_0$ , tenemos  $\alpha = 0$  y  $A = v_0 / \omega$ . El desplazamiento está dado entonces por  $x = v_0 / \omega \sin \omega t$ . La energía total de

---

\* La solución general de la ec. (12.12) puede también escribirse en la forma alterna  $x = a \sin \omega t + b \cos \omega t$ , donde  $a$  y  $b$  son constantes arbitrarias. Esta solución es equivalente a  $x = A \sin(\omega t + \alpha)$  si suponemos que  $a = A \cos \alpha$  y  $b = A \sin \alpha$ .



la partícula, en concordancia con la ec. (12.11), será  $E = \frac{1}{2}k(v_0/\omega)^2 = \frac{1}{2}mv_0^2$ , que es igual a la energía cinética inicial.

Por otro lado, si la partícula se coloca a la distancia  $x_0$  de la posición de equilibrio y se suelta,  $v_0 = 0$ , y por lo tanto  $\tan \alpha = \infty$  ó  $\alpha = \pi/2$  y  $A = x_0$ . El desplazamiento está dado por  $x = x_0 \cos \omega t$ . Utilizando la ec. (12.11), obtenemos la energía total de la partícula como  $E = \frac{1}{2}kx_0^2$ , la cual es igual a la energía potencial inicial de la partícula.

**EJEMPLO 12.4.** Derivar una expresión general para el período de un movimiento oscilatorio, usando el principio de conservación de la energía.

**Solución:** Refiriéndonos a la discusión de la sección 8.9 del movimiento rectilíneo bajo fuerzas conservativas, encontramos que podemos aplicar la ec. (8.34), esto es :

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{[(2/m)(E - E_p(x))]^{1/2}} = t,$$

en la cual  $E_p(x)$  es la energía potencial del movimiento y  $E$  es la energía total. De acuerdo a la discusión de la sección 8.11, la partícula oscila, entre las posiciones dadas por  $x_1$  y  $x_2$  obtenidas al resolver la ecuación  $E_p(x) = E$  (recordar la Fig. 8-18). Si, en la ecuación de arriba suponemos que  $x_0 = x_1$  y  $x = x_2$ , el tiempo  $t$  corresponde a la mitad de una oscilación y por consiguiente es igual a la mitad del período :  $t = \frac{1}{2}P$ . Por lo tanto, de la ecuación precedente obtenemos

$$P = 2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{(2/m)(E - E_p)^{1/2}}. \quad (12.13)$$

Esta es una ecuación general que da el período de cualquier movimiento oscilatorio, ya sea éste MAS o no. Nótese que nos permite calcular el período si conocemos la energía potencial  $E_p(x)$ , aún sin resolver la ecuación de movimiento para obtener  $x$  en función de  $t$ . Segerimos que el estudiante utilice el valor  $E_p = \frac{1}{2}kx^2$  (el cual corresponde al movimiento armónico simple), y obtenga  $P = \pi A \sqrt{2m/E}$ , haciendo  $x_1 = -A$  y  $x_2 = +A$ , verificando así que este resultado es idéntico al de la ec. (12.11).

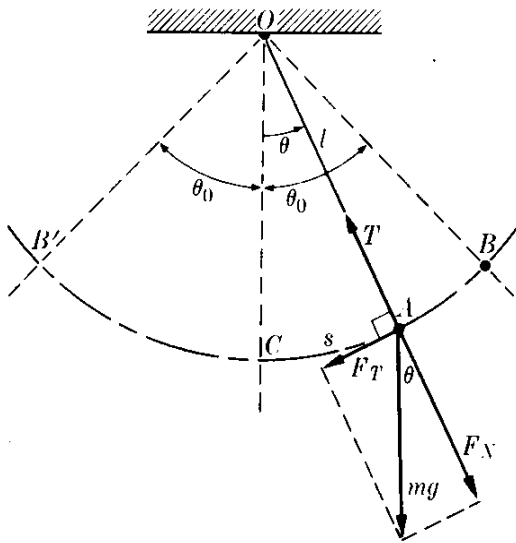
## 12.5 Péndulo simple

Un ejemplo de movimiento armónico simple es el movimiento de un péndulo. Un péndulo simple se define como una partícula de masa  $m$  suspendida del punto  $O$  por una cuerda de longitud  $l$  y de masa despreciable (Fig. 12-7). Si la partícula se lleva a la posición  $B$  de modo que la cuerda haga un ángulo  $\theta_0$  con la vertical  $OC$ , y luego se suelta, el péndulo oscilará entre  $B$  y la posición simétrica  $B'$ .

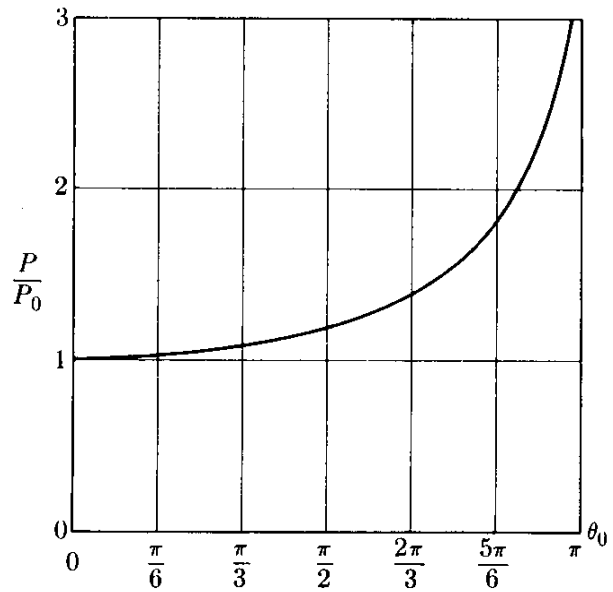
Para determinar la naturaleza de las oscilaciones, debemos escribir la ecuación de movimiento de la partícula. La partícula se mueve en un arco de círculo de radio  $l = OA$ . Las fuerzas que actúan sobre la partícula son su peso  $mg$  y la tensión  $T$  a lo largo de la cuerda. De la figura, se ve que la componente tangencial de la fuerza es

$$F_T = -mg \sin \theta,$$

donde el signo menos se debe a que se opone al desplazamiento  $s = CA$ . La ecuación del movimiento tangencial es  $F_T = ma_T$  y, como la partícula se mueve a lo



**Fig. 12-7.** Movimiento oscilatorio de un péndulo.



**Fig. 12-8.** Variación del período de un péndulo en función de la amplitud.

largo de un círculo de radio  $l$ , podemos usar la ec. (5.56) (reemplazando  $R$  por  $l$ ) para expresar la aceleración tangencial. Esto es  $a_T = l d^2\theta/dt^2$ . La ecuación del movimiento tangencial es por consiguiente

$$ml \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \sin \theta \quad \text{ó} \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0. \quad (12.14)$$

Esta ecuación no es del mismo tipo que la ec. (12.12) debido a la presencia del  $\sin \theta$ . Sin embargo, si el ángulo  $\theta$  es pequeño, lo cual es cierto si la amplitud de las oscilaciones es pequeña, podemos usar la ec. (M.30) y escribir  $\sin \theta \sim \theta$  en la ec. (12.14) para el movimiento del péndulo, obteniéndose

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \theta = 0.$$

Esta es la ecuación diferencial idéntica a la ec. (12.12) si reemplazamos  $x$  por  $\theta$ , esta vez refiriéndonos al movimiento angular y no al movimiento lineal. Por ello podemos llegar a la conclusión que, dentro de nuestra aproximación, el movimiento angular del péndulo es armónico simple con  $\omega^2 = g/l$ . El ángulo  $\theta$  puede así expresarse en la forma  $\theta = \theta_0 \sin(\omega t + \alpha)$ . Entonces, usando la ec. (12.2),  $P = 2\pi/\omega$ , el período de oscilación está dado por la expresión

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (12.15)$$

Nótese que el período es independiente de la masa del péndulo. Para mayores amplitudes, la aproximación  $\sin \theta \sim \theta$  no es válida. En tal caso, la fórmula del período depende de la amplitud  $\theta_0$ . Si deseamos obtener la fórmula general del período, primero expresamos la energía potencial del péndulo como una fun-

ción del ángulo (ejemplo 8.7) y la sustituimos luego en la expresión de  $P$  dada por la ec. (12.13). Nosotros omitiremos los detalles matemáticos, pero indicaremos que el resultado puede expresarse por la serie

$$P = 2\pi \sqrt{l/g} \left( 1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{1}{2} \theta_0 + \frac{9}{64} \sin^4 \frac{1}{2} \theta_0 + \dots \right).$$

La variación con la amplitud  $\theta_0$  del período  $P$ , expresado en función del período  $P_0 = 2\pi \sqrt{l/g}$  correspondiente a oscilaciones muy pequeñas, se ilustra en la Fig. 12-8. Nótese que el período  $P$  difiere apreciablemente de  $P_0$  solamente para amplitudes muy grandes. Para pequeñas amplitudes es suficiente tomar el primer término correctivo, y aun sustituir  $\frac{1}{2}\theta_0$  por  $\sin \frac{1}{2}\theta_0$ , obteniéndose

$$P = 2\pi \sqrt{l/g} \left( 1 + \frac{1}{16} \theta_0^2 \right), \quad (12.16)$$

donde  $\theta_0$  se expresa en radianes. Esta es una aproximación suficiente para la mayor parte de las situaciones prácticas. De hecho, el término  $\theta_0^2/16$  representa menos del 1 % para amplitudes menores de  $23^\circ$ .

Hay, sin embargo, un diseño especial en el cual el período de un péndulo es independiente de la amplitud. Este diseño recibe el nombre de *péndulo cicloidal*. Una cicloide es una curva generada por un punto en el borde de un disco que rueda sobre un plano, como se muestra en la Fig. 12-9. Si en un plano vertical construimos una trayectoria con la forma de una cicloide, y dejamos que la masa  $m$  oscile bajo la acción de la gravedad, la amplitud del movimiento dependerá del punto desde el cual se suelta la partícula, pero el período siempre será  $P = 4\pi \sqrt{a/g}$ , siendo  $a$  el radio del círculo que genera la cicloide.

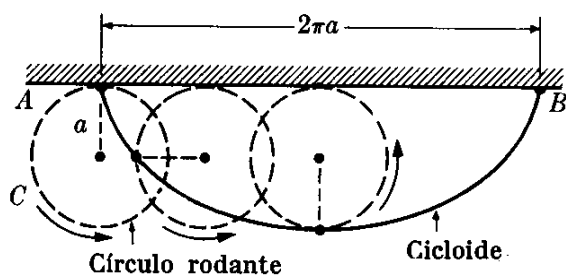


Fig. 12-9. Definición de la cicloide.

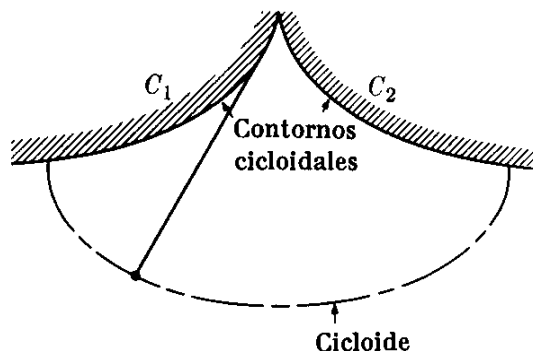


Fig. 12-10. Péndulo cicloidal.

Una manera práctica de construir un péndulo cicloidal se ilustra en la Fig. 12-10, donde  $C_1$  y  $C_2$  son dos contornos cicloidales. Por razonamiento geométrico, puede demostrarse que cuando el péndulo está suspendido entre ellos, su masa describe una cicloide, y el período de oscilación es independiente de la amplitud.\*

**EJEMPLO 12.5.** Calcular la tensión en la cuerda de un péndulo en función del ángulo que hace la cuerda con la vertical.

\* Para mayores detalles sobre la cicloide, ver G. B. Thomas, *Cálculo infinitesimal y geometría analítica*, tercera edición. Madrid: Aguilar, 1964, sec. 12.2.

**Solución:** Para calcular la tensión  $T$ , primero obtenemos la fuerza centrípeta sobre la partícula,

$$F_C = T - F_N = T - mg \cos \theta,$$

ya que, de la Fig. 12-7,  $F_N$  está dada por  $mg \cos \theta$ . Luego igualando esta expresión a la masa multiplicada por la aceleración centrípeta  $mv^2/l$  (nótese que  $l$  es el radio) de acuerdo a la ec. (7.28), obtenemos

$$T - mg \cos \theta = mv^2/l.$$

Para conseguir la velocidad usamos el resultado del ejemplo 8.7. Esto es,

$$v^2 = 2gl(\cos \theta - \cos \theta_0),$$

y por lo tanto

$$T = mg(3 \cos \theta - 2 \cos \theta_0).$$

Esta expresión es válida para cualquier amplitud, ya que no se ha hecho ninguna aproximación con respecto a  $\theta$ .

## 12.6 Péndulo compuesto

Un péndulo compuesto (o físico) es cualquier cuerpo rígido que puede oscilar libremente alrededor de un eje horizontal bajo la acción de la gravedad. Sea  $ZZ'$  (Fig. 12-11) el eje horizontal y  $C$  el centro de masa del cuerpo. Cuando la línea  $OC$  hace un ángulo  $\theta$  con la vertical, la componente  $Z$  del torque actuante sobre el cuerpo es  $\tau_z = -mgb \sin \theta$ , donde  $b$  es la distancia  $OC$  entre el eje  $Z$  y el centro de masa  $C$ . Si  $I$  es el momento de inercia del cuerpo alrededor del eje  $Z$ , y  $\alpha = d^2\theta/dt^2$  es la aceleración angular, la ec. (10.14),  $I\alpha = \tau_z$ , da  $I d^2\theta/dt^2 = -mgb \sin \theta$ . Suponiendo que las oscilaciones son de pequeña amplitud, podemos suponer que  $\sin \theta \sim \theta$ , de modo que la ecuación del movimiento es

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{mgb}{I} \theta$$

ó

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{gb}{K^2} \theta = 0.$$

Aquí hemos utilizado  $I = mK^2$ , donde  $K$  es el radio de giro, definido en la ec. (10.10). Podemos comparar esta ecuación del movimiento con la ec. (12.12), demostrando que el movimiento angular oscilatorio es armónico simple, con  $\omega^2 = gb/K^2$ . Por consiguiente, el período de las oscilaciones es

$$P = 2\pi \sqrt{K^2/gb}. \quad (12.17)$$

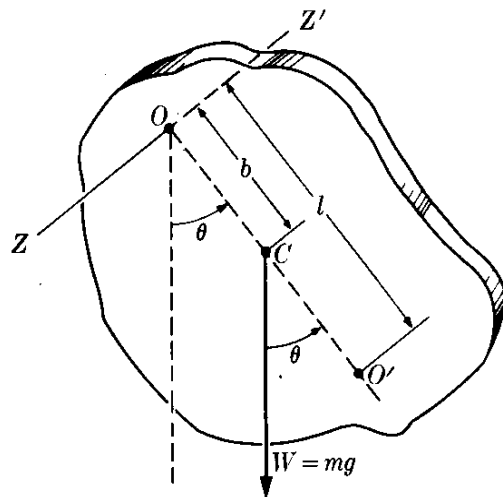


Fig. 12-11. Péndulo compuesto.

La cantidad  $l = K^2/b$  se denomina la longitud del péndulo simple equivalente, ya que un péndulo de tal longitud tiene el mismo período que el péndulo compuesto. Notamos que el período del péndulo compuesto es independiente de su masa, así como de su forma geométrica, siempre que el radio de giro  $K$  y la posición del centro de masa, dado por  $b$ , permanezcan inalterables.

**EJEMPLO 12.6.** Un anillo de 0,10 m de radio está suspendido de una varilla, como se ilustra en la Fig. 12-12. Determinar su período de oscilación.

**Solución:** Designando el radio del anillo por  $R$ , su momento de inercia con respecto a un eje que pasa a través de su centro de masa  $C$  es  $I_C = mR^2$  (vea la tabla 10-1). Entonces, si aplicamos el teorema de Steiner, ec. 10.8, suponiendo  $a = R$ , el momento de inercia con respecto a un eje que pasa a través del punto de suspensión  $O$  es

$$I = I_C + mR^2 = mR^2 + mR^2 = 2mR^2,$$

expresión que da un radio de giro  $K^2 = 2R^2$ . También en nuestro caso  $b = R$ . Entonces, usando la ec. (2.17), obtenemos

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{2R^2}{gR}} = 2\pi \sqrt{\frac{2R}{g}},$$

lo cual indica que la longitud equivalente del péndulo simple es  $OO' = 2R$ , o sea el diámetro del anillo. Al reemplazar los valores de  $R = 0,10$  m y  $g = 9,8$  m s<sup>-2</sup> obtenemos  $P = 0,88$  s.

**EJEMPLO 12.7.** Una esfera de radio  $R$  está suspendida desde un punto fijo por una cuerda, de modo que la distancia desde el centro de la esfera al punto de suspensión es  $l$ . Encontrar el período del péndulo.

**Solución:** A menos que el radio  $R$  sea muy pequeño comparado con  $l$ , no podemos considerar el péndulo como simple, y debemos usar las expresiones que hemos discutido en esta sección. De la tabla 10.1 tenemos que el momento de inercia de una esfera con respecto a un eje que pasa por su centro es  $\frac{2}{5}mR^2$ . Por consiguiente, cuando aplicamos el Teorema de Steiner para encontrar el momento de inercia con respecto al punto de suspensión, haciendo  $a = l$ , obtenemos

$$I = \frac{2}{5}mR^2 + ml^2 = m(l^2 + \frac{2}{5}R^2).$$

Esta expresión da como radio de giro  $K^2 = l^2 + \frac{2}{5}R^2 = l^2(1 + 0,4R^2/l^2)$ . Por tanto aplicando la ec. (12.7) y notando que en este caso  $b = l$ , tenemos

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{l(1 + 0,4R^2/l^2)}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + 0,4 \frac{R^2}{l^2}\right)^{1/2}.$$

Considerando que  $R$  es pequeño comparado con  $l$ , podemos reemplazar  $(1 + 0,4R^2/l^2)^{1/2}$  por  $1 + 0,2R^2/l^2$  usando la aproximación del binomio (M.28). Entonces

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + 0,2 \frac{R^2}{l^2}\right).$$

El primer término da el período, si despreciamos el tamaño de la esfera. Por ejemplo, si  $l = 1$  m y  $R = 0,01$  m, tenemos  $R^2/l^2 = 10^{-4}$ , y el término correctivo es 1,00002. Así el tamaño finito de la masa del péndulo aumenta el período en 0,002%, una cantidad que es despreciable en la mayoría de los casos.

**EJEMPLO 12.8.** Péndulo de torsión.

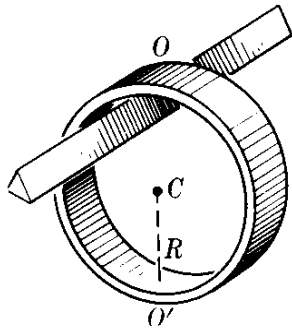


Figura 12-12

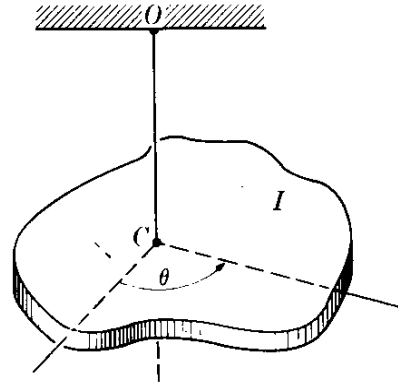


Fig. 12-13. Péndulo de torsión. El centro de masa se encuentra en C.

**Solución:** Otro ejemplo de movimiento armónico simple es el péndulo de torsión, consistente en un cuerpo suspendido por un alambre o fibra (Fig.12-13) de tal manera que la línea  $OC$  pasa por el centro de masa del cuerpo. Cuando el cuerpo se rota un ángulo  $\theta$  a partir de su posición de equilibrio, el alambre se tuerce, ejerciendo sobre el cuerpo un torque  $\tau$  alrededor de  $OC$  que se oponen al desplazamiento  $\theta$  y de magnitud proporcional al ángulo,  $\tau = -\kappa\theta$ , donde  $\kappa$  es el coeficiente de torsión del alambre. Si  $I$  es el momento de inercia del cuerpo con respecto al eje  $OC$ , la ecuación del movimiento, usando la ec. (10.14) con  $\alpha = d^2\theta/dt^2$ , es

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\kappa\theta \quad \text{ó} \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{\kappa}{I} \theta = 0.$$

Nuevamente encontramos la ecuación diferencial (12.12), de modo que el movimiento angular es armónico simple, con  $\omega^2 = \kappa/I$ ; el período de oscilación es

$$P = 2\pi \sqrt{I/\kappa}. \quad (12.18)$$

Este resultado es interesante debido a que podemos usarlo experimentalmente para determinar el momento de inercia de un cuerpo suspendiéndolo de un alambre cuyo coeficiente de torsión  $\kappa$  se conoce, y luego midiendo el período  $P$  de oscilación.

## 12.7 Superposición de dos MAS: Igual dirección, igual frecuencia

Consideraremos ahora la superposición, o interferencia, de dos movimientos armónicos simples que producen un desplazamiento de la partícula a lo largo de la misma línea. Discutamos primero el caso en que ambos tienen la misma frecuencia (Fig. 12-14). El desplazamiento de la partícula producido por cada movimiento armónico simple está dado por:

$$x_1 = OP_1 = A_1 \sin(\omega t + \alpha_1)$$

y

$$x_2 = OP_2 = A_2 \sin(\omega t + \alpha_2).$$

El desplazamiento resultante de la partícula está dado por

$$x = OP = x_1 + x_2 = A_1 \sin(\omega t + \alpha_1) + A_2 \sin(\omega t + \alpha_2).$$

Demostraremos ahora que  $x$  corresponde a un movimiento armónico de la misma frecuencia. La componente  $x$  del vector suma  $\vec{OP'}$  de los vectores rotantes  $\vec{OP'_1}$  y  $\vec{OP'_2}$ , es justamente la suma de las componentes  $X$  de  $\vec{OP'_1}$  y  $\vec{OP'_2}$  (esto es,  $x_1 + x_2$ ), y por ende es igual a  $x$ . También, ya que el ángulo entre  $\vec{OP'_1}$  y  $\vec{OP'_2}$  tiene el valor fijo  $\delta = \alpha_2 - \alpha_1$ , el vector  $\vec{OP'}$  tiene una magnitud constante  $A$ , y rota también alrededor de  $O$  con velocidad angular  $\omega$ . Por consiguiente el vector rotante  $\vec{OP'}$  genera un movimiento armónico simple de frecuencia angular  $\omega$ , y podemos escribir  $x = \vec{OP}$ ,

$$x = A \sin(\omega t + \alpha). \quad (12.19)$$

Calculamos la amplitud  $A$  aplicando la ec. (3.3) al vector resultante de los dos vectores:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \delta}. \quad (12.20)$$

La fase inicial  $\alpha$  puede encontrarse proyectando los tres vectores sobre los ejes  $OX_1$  y  $OY_1$  los cuales rotan con velocidad angular  $\omega$  constituyendo un sistema de referencia en el cual los vectores  $\vec{OP'_1}$ ,  $\vec{OP'_2}$  y  $\vec{OP'}$  se encuentran en reposo. Luego, teniendo en cuenta la ley de adición de vectores, tenemos

$$A \cos \alpha = A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2$$

y

$$A \sin \alpha = A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2.$$

Dividiendo, obtenemos

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2}{A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2}. \quad (12.21)$$

Consideremos algunos casos importantes especiales. Si  $\alpha_2 = \alpha_1$ , entonces  $\delta = 0$ , y decimos que los dos movimientos están *en fase*. Sus vectores rotantes son paralelos y las ec. (12.20) y (12.21) dan

$$A = A_1 + A_2 \quad \alpha = \alpha_1. \quad (12.22)$$

Por consiguiente, los dos movimientos armónicos simples interfieren constructivamente ya que sus amplitudes se suman (Fig. 12-15). Si  $\alpha_2 = \alpha_1 + \pi$ , entonces  $\delta = \pi$ , y decimos que los dos movimientos armónicos simples están *en oposición*. Sus vectores rotantes son antiparalelos y las ec. (12.20) y (12.21) dan si  $A_1 > A_2$ ,

$$A = A_1 - A_2, \quad \alpha = \alpha_1, \quad (12.23)$$

y los dos movimientos armónicos simples interfieren atenuándose ya que sus amplitudes se sustraen (Fig. 12-16). En particular, si  $A_1 = A_2$ , los dos movimientos armónicos simples se cancelan mutuamente. (¿Qué sucedería si  $A_1 < A_2$ ?)

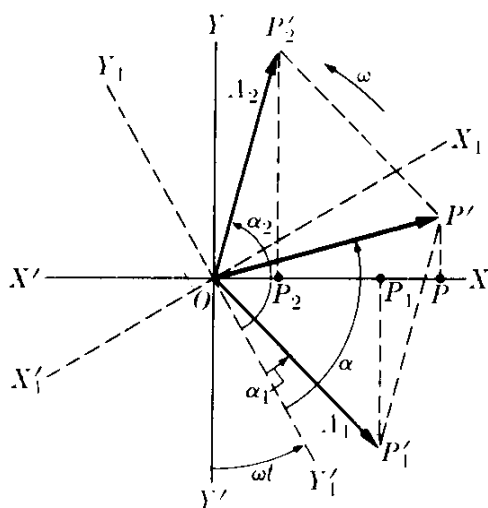
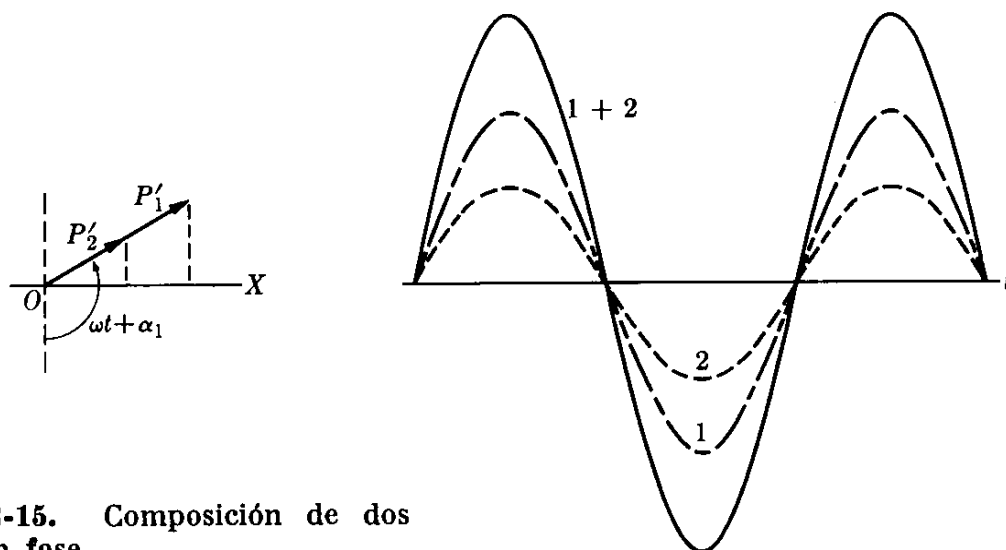


Fig. 12-14. Composición de dos MAS de la misma frecuencia.



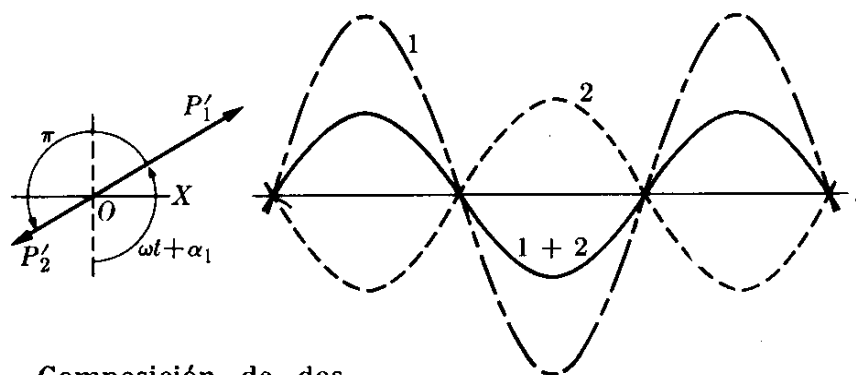
**Fig. 12-15.** Composición de dos MAS en fase.

Si  $\alpha_2 = \alpha_1 + \pi/2$ , entonces  $\delta = \pi/2$ , y se dice que los dos movimientos armónicos simples están en *cuadratura*. Entonces, aplicando la ec. (12.20), obtenemos

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}. \quad (12.24)$$

El estudiante puede verificar con la ec. (12.21) que la expresión de  $\alpha$  está dada por

$$\alpha = \alpha_1 + \arctg \frac{A_2}{A_1}. \quad (12.25)$$

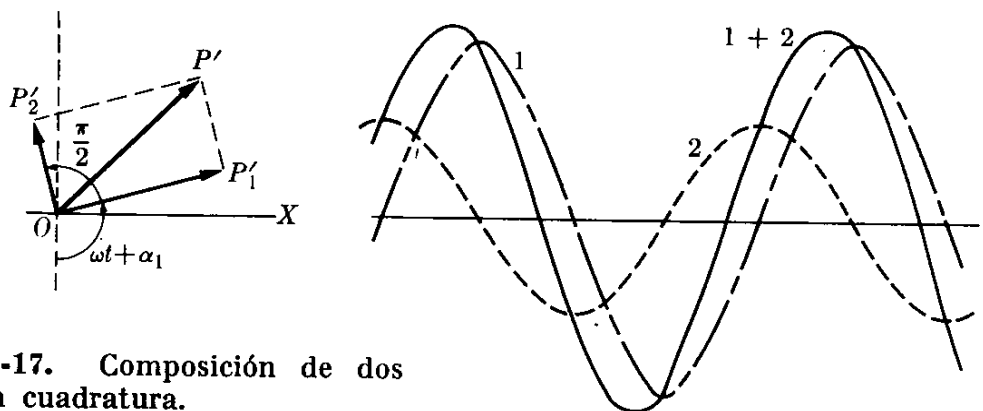


**Fig. 12-16.** Composición de dos MAS en oposición.

Los dos vectores rotantes son, en este caso, perpendiculares. En la Fig. 12-17, se ha representado el caso cuando  $A_1 = \sqrt{3} A_2$  de modo que  $\alpha = \alpha_1 + \pi/6$  y  $A = 2A_2$ . El estudiante debe investigar el caso en el cual  $\alpha_2 = \alpha_1 + 3\pi/2$ .

**EJEMPLO 12.9.** Una partícula está sometida, simultáneamente, a dos movimientos armónicos simples de la misma dirección y frecuencia. Sus ecuaciones son  $x_1 = 10 \sin (2t + \pi/4)$  y  $x_2 = 6 \sin (2t + 2\pi/3)$ . Encontrar el movimiento resultante.





**Fig. 12-17.** Composición de dos MAS en cuadratura.

**Solución:** La diferencia de fase es  $\delta = \alpha_2 - \alpha_1 = 2\pi/3 - \pi/4 = 5\pi/12$ . Por lo tanto, como las amplitudes son  $A_1 = 10$  y  $A_2 = 6$ , la amplitud resultante es

$$A = \sqrt{10^2 + 6^2 + 2(10)(6) \cos(5\pi/12)} = 12,92.$$

La fase inicial está dada por

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{10 \operatorname{sen}(\pi/4) + 6 \operatorname{sen}(2\pi/3)}{10 \cos(\pi/4) + 6 \cos(2\pi/3)} = 6,527,$$

de modo que  $\alpha = 81,3^\circ = 1,42$  rad. Por consiguiente, el movimiento resultante es descrito por la ecuación  $x = 12,92 \operatorname{sen}(2t + 1,42)$ .

### 12.8 Superposición de dos MAS: Igual dirección, diferente frecuencia

El caso en el cual dos movimientos armónicos simples en la misma dirección pero con diferente frecuencia interfieren tiene también importancia. Consideremos por simplicidad, el caso en el cual  $\alpha_1 = 0$  y  $\alpha_2 = 0$ ; entonces los movimientos están descritos por las ecuaciones  $x_1 = A_1 \operatorname{sen} \omega_1 t$  y  $x_2 = A_2 \operatorname{sen} \omega_2 t$ .

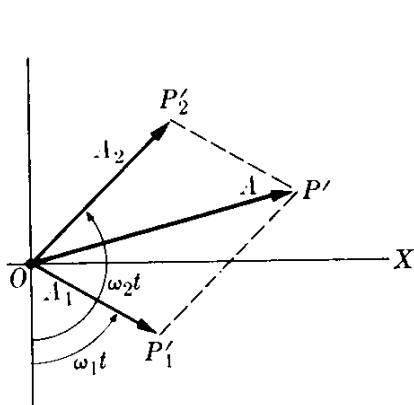
El ángulo entre los vectores rotantes  $\overrightarrow{OP'_2}$  y  $\overrightarrow{OP'_1}$  (Fig. 12-18) es ahora  $\omega_1 t - \omega_2 t = (\omega_1 - \omega_2)t$ , y no es constante. Por ello, el vector resultante  $\overrightarrow{OP'}$  no tiene longitud constante y no rota con velocidad angular constante. En consecuencia, el movimiento resultante,  $x = x_1 + x_2$  no es armónico simple. Sin embargo, como observamos de la Fig. 12-18, la "amplitud" del movimiento es

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\omega_1 - \omega_2)t}, \quad (12.26)$$

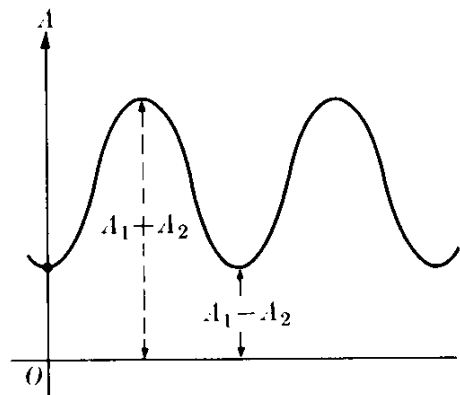
y "oscila" entre los valores  $A = A_1 + A_2$  [cuando  $(\omega_1 - \omega_2)t = 2n\pi$ ] y  $A = |A_1 - A_2|$  [cuando  $(\omega_1 - \omega_2)t = 2n\pi + \pi$ ]. Se dice entonces que la amplitud es *modulada*. La frecuencia de la amplitud de oscilación se expresa por

$$\nu = (\omega_1 - \omega_2)/2\pi = \nu_1 - \nu_2, \quad (12.27)$$

y es igual a la diferencia de las frecuencias de los movimientos que interfieren.



**Fig. 12-18.** Composición de dos MAS de diferentes frecuencias.



**Fig. 12-19.** Fluctuación en amplitud o pulsaciones.

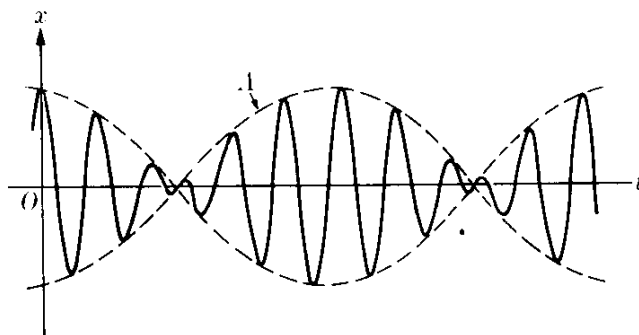
La Fig. 12-19 muestra la variación de  $A$  con  $t$ . La situación descrita tiene lugar cuando, por ejemplo, dos vibradores de frecuencia muy próximos están vibrando simultáneamente en lugares muy cercanos. Se observa una fluctuación en la intensidad de los sonidos, llamadas *pulsaciones*, que se deben al cambio en la amplitud  $\alpha$ , como se ilustra en la Fig. 12-19.

Una situación interesante ocurre cuando  $A_1 = A_2$ , esto es, cuando las dos amplitudes son iguales. Entonces usando la ec. (M.7) obtenemos

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 = A_1(\sin \omega_1 t + \sin \omega_2 t) \\ &= 2A_1 \cos \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t \sin \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t, \end{aligned} \quad (12.28)$$

indicando que el movimiento es oscilatorio con frecuencia angular  $\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$  y amplitud

$$A = 2A_1 \cos \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t. \quad (12.29)$$



**Fig. 12-20.** Pulsaciones cuando las dos amplitudes son iguales.

Este resultado puede obtenerse directamente de la ec. (12.26) haciendo  $A_2 = A_1$ . El gráfico de  $x$  en función del tiempo  $t$  se ilustra en la Fig. 12-20, en la cual la línea punteada muestra la modulación de la amplitud.

### 12.9 Superposición de dos MAS: direcciones perpendiculares

Consideremos ahora el caso en el que una partícula se mueve en un plano de tal modo que sus coordenadas  $x$  e  $y$  oscilan con movimiento armónico simple. Examinaremos primero el caso en el que los dos movimientos tienen la misma frecuencia. Escogiendo nuestro origen del tiempo de modo que la fase inicial del movimiento a lo largo del eje  $X$  sea cero, tenemos para la coordenada  $x$

$$x = A \sin \omega t. \quad (12.30)$$

El movimiento a lo largo del eje  $Y$  es descrito por la ecuación

$$y = B \sin (\omega t + \delta), \quad (12.31)$$

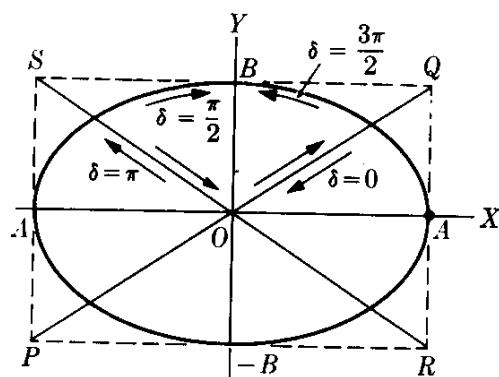
donde  $\delta$  es ahora la diferencia de fase entre las oscilaciones  $x$  e  $y$ . Nosotros hemos supuesto que las amplitudes  $A$  y  $B$  son diferentes. La trayectoria de la partícula está obviamente limitada por las líneas  $x = \pm A$  e  $y = \pm B$ .

Consideraremos ahora algunos casos especiales. Si los dos movimientos están en fase,  $\delta = 0$  e  $y = B \sin \omega t$ , que pueden combinarse con la ec. (12.30) para dar

$$y = (B/A)x.$$

Esta es la ecuación de la línea recta  $PQ$  en la Fig. 12-21, y el movimiento que resulta es armónico simple, con amplitud  $\sqrt{A^2 + B^2}$ , debido a que el desplazamiento a lo largo de la línea  $PQ$  es

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{A^2 + B^2} \sin \omega t. \quad (12.32)$$



**Fig. 12-21.** Composición de dos MAS de la misma frecuencia pero en direcciones perpendiculares. La trayectoria depende de la diferencia de fase.

Si los movimientos están en oposición,  $\delta = \pi$  e  $y = -B \sin \omega t$ . Combinado con la ec. (12.30), esto da

$$y = -\frac{B}{A}x,$$

la cual es la ecuación de la línea recta  $RS$ . El movimiento es nuevamente armónico simple con amplitud  $\sqrt{A^2 + B^2}$ . Entonces decimos que cuando  $\delta = 0$  ó  $\pi$ , la interferencia de los movimientos armónicos simples perpendiculares de la misma frecuencia da lugar a una *polarización rectilínea*.

Cuando  $\delta = \pi/2$ , se dice que los movimientos a lo largo de los ejes  $X$  e  $Y$  están en *cuadratura*; e

$$y = B \sin (\omega t + \pi/2) = B \cos \omega t.$$

Combinada con la ec. (12.30), da

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1,$$

que es la ecuación de la elipse ilustrada en la Fig. 12-21. La elipse es recorrida en la dirección de las agujas del reloj. Esto puede verificarse encontrando la velocidad de la partícula en el punto  $x = +A$ , en la cual la velocidad es paralela al eje  $Y$ . En este punto, de la ec. (12.30), debemos tener  $\sin \omega t = 1$ . La componente  $Y$  de la velocidad es  $v_y = dy/dt = -\omega B \sin \omega t = -\omega B$ . Por ser negativa el punto pasa por  $A$  moviéndose hacia abajo, lo cual corresponde a una rotación en el sentido de las agujas del reloj. Se obtiene la misma elipse si  $\delta = 3\pi/2$  ó  $-\pi/2$ , pero el movimiento es en sentido contrario a las agujas del reloj (¿puede el estudiante verificar esta proposición?). Luego, podemos decir, que cuando la diferencia de fase  $\delta$  es  $\pm \pi/2$ , la interferencia de dos movimientos armónicos simples de la misma frecuencia y direcciones perpendiculares da lugar a *polarización elíptica*, con los ejes de la elipse paralelos a las direcciones de los dos movimientos.

Cuando  $A = B$ , la elipse se transforma en un círculo y tenemos *polarización circular*. Para un valor arbitrario de la diferencia de fase  $\delta$ , la trayectoria es aún una elipse pero sus ejes están rotados con respecto a los ejes de coordenadas. En la Fig. 12-22 se muestran las trayectorias para ciertas diferencias de fase.

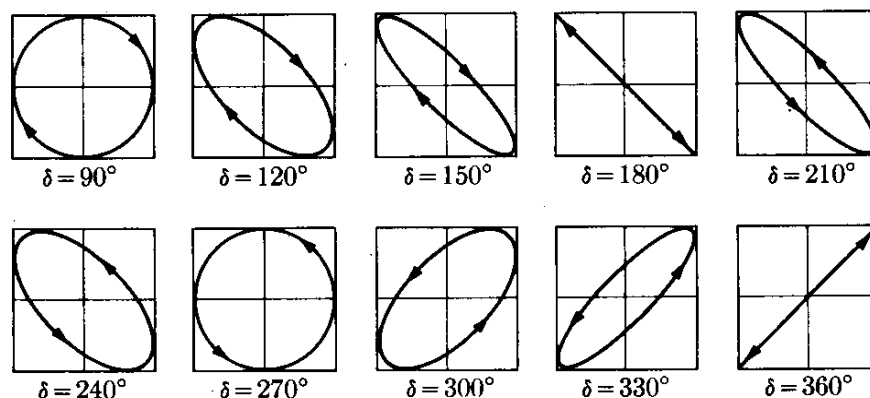


Fig. 12-22. Trayectorias para diferencias de fases selectas.

De acuerdo con la sección 12.33, los movimientos descritos por la ec. (12.30) y (12.31) requieren fuerzas a lo largo de los ejes  $X$  e  $Y$  iguales a  $F_x = -kx$  y  $F_y = -ky$ . La fuerza resultante que actúa sobre la partícula es por lo tanto

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= u_x F_x + u_y F_y = \\ &= -k(u_x x + u_y y) = -kr, \end{aligned} \quad (12.33)$$

siendo  $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$  (Fig. 12-23) el vector posición de la partícula. Por tanto el movimiento que hemos descrito cinemáticamente en esta sección es debido a una fuerza central atractiva proporcional al desplazamiento.

La fuerza dada por la ec. (12.33) produce siempre un movimiento plano aun si la partícula se mueve en el espacio, debido a que la fuerza es

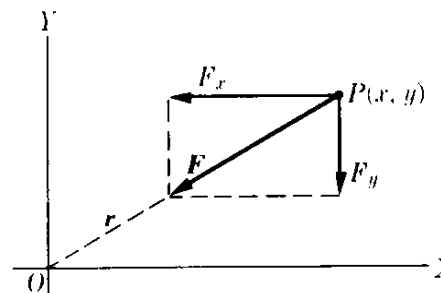
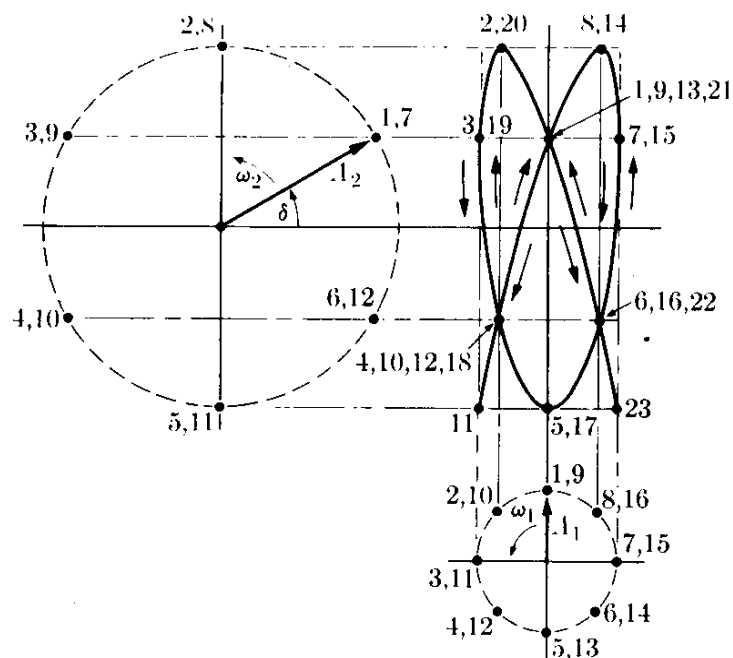


Fig. 12-23. Fuerza de atracción proporcional al desplazamiento.

central y, por consiguiente, la trayectoria más general bajo tal fuerza es una elipse. La energía potencial correspondiente a la fuerza de la ec. (12.33) es (recordar el ejemplo 8.8):

$$E_p = \frac{1}{2}k(x^2 + y^2) = \frac{1}{2}kr^2. \quad (12.34)$$

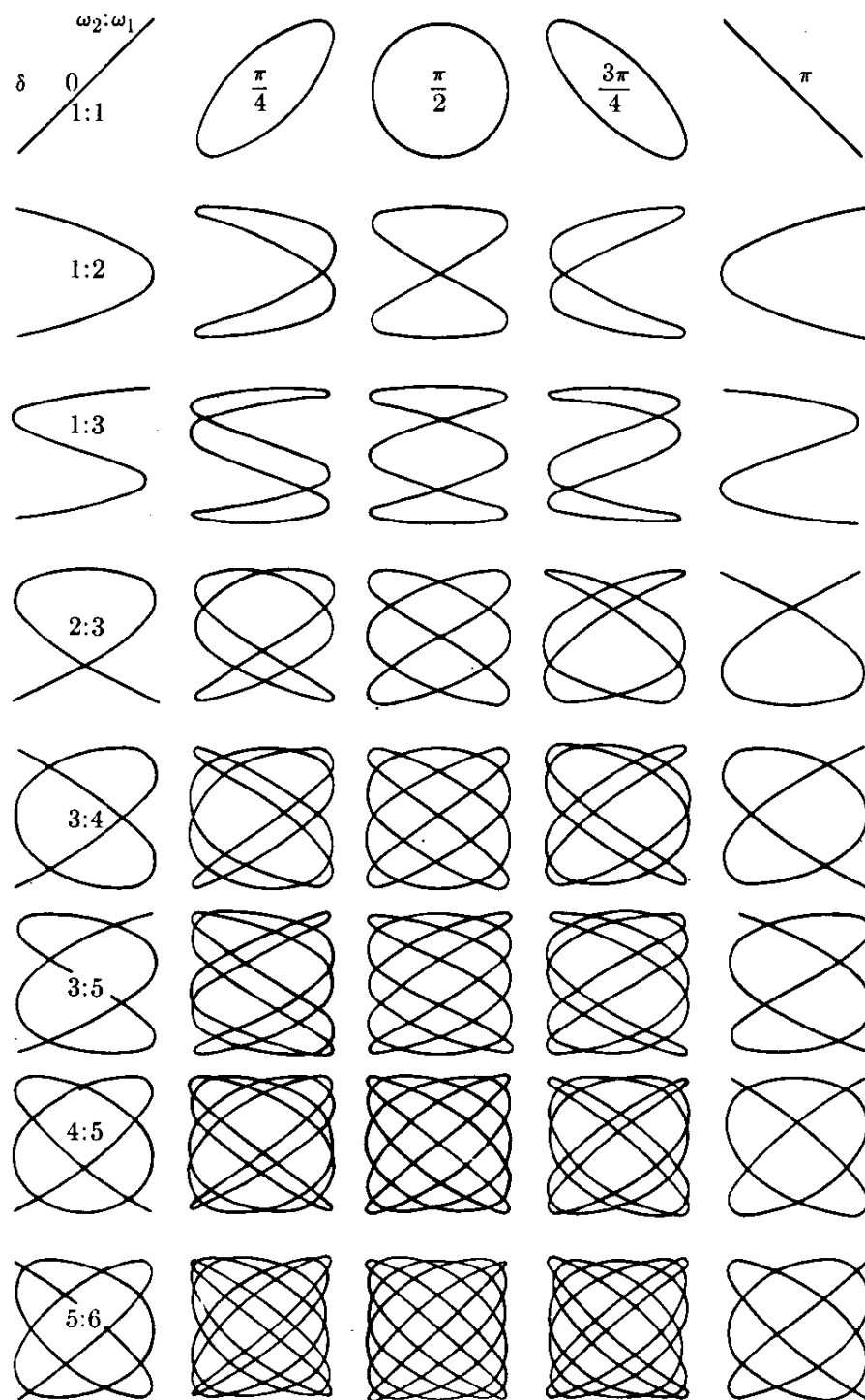


**Fig. 12-24.** Figuras de Lissajous para  $\omega_2/\omega_1 = \frac{4}{3}$  y una diferencia de fase de  $\pi/6$ .

Otra situación interesante es la interferencia de dos movimientos oscilatorios perpendiculares de frecuencias diferentes. Esto es,

$$x = A_1 \sin \omega_1 t, \quad y = A_2 \sin (\omega_2 t + \delta). \quad (12.35)$$

La Fig. 12-24 ilustra el caso para el cual  $\omega_1 = \frac{3}{4}\omega_2$  y  $\delta = \pi/6$ . La trayectoria resultante es la línea sólida. Tal trayectoria depende de la relación  $\omega_2/\omega_1$  y de la diferencia de fase  $\delta$ . Estas trayectorias se llaman *figuras de Lissajous*, y se ilustran en la Fig. 12-25 para diferentes valores de la relación  $\omega_2/\omega_1$  y varias diferencias de fase en cada caso.



**Fig. 12-25.** Figuras de Lissajous. Dependen de la relación  $\omega_2/\omega_1$  y de la diferencia de fase.

### 12.10 Osciladores acoplados

Una situación encontrada frecuentemente es aquella de dos osciladores *acoplados*. En la Fig. 12-26 se ilustran tres situaciones posibles. En (a) tenemos dos masas  $m_1$  y  $m_2$  unidas a dos resortes  $k_1$  y  $k_2$  y acopladas por el resorte  $k$ , de modo que los movimientos de  $m_1$  y  $m_2$  no son independientes. En (b) tenemos dos péndulos acoplados por la cuerda  $AB$ . En (c), los cuerpos  $I_1$  e  $I_2$  unidos a las barras  $k_1$  y  $k_2$  están acoplados por la barra  $k$ , formando dos péndulos de torsión acoplados. Encontraremos una situación similar en la sección 17.11 (volumen II) cuando estudiemos circuitos eléctricos oscilantes acoplados. El efecto total del acoplamiento de dos osciladores puede describirse como un intercambio de energía entre ellos.

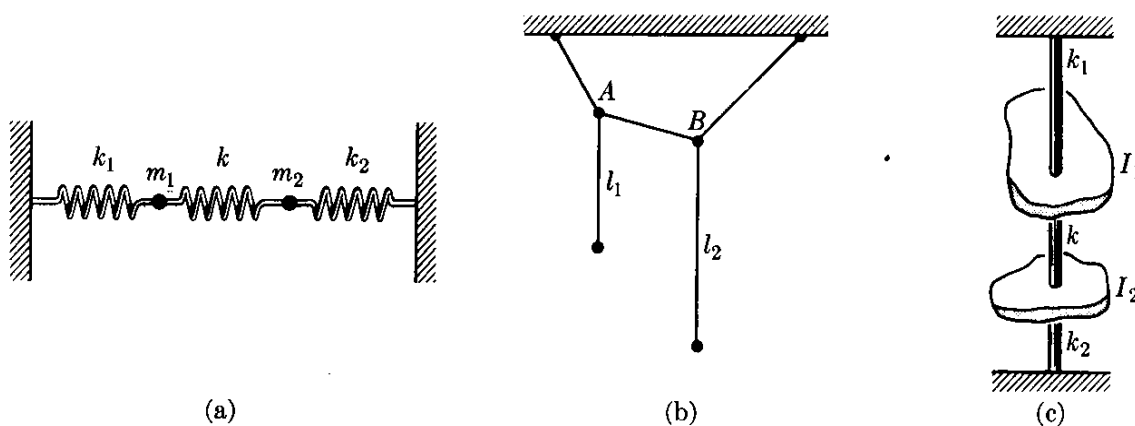


Fig. 12-26. Varios tipos de osciladores acoplados.

Para discutir el problema dinámicamente, debemos establecer la ecuación de movimiento de cada oscilador. Consideremos el caso especial de dos masas  $m_1$  y  $m_2$  unidas a resortes (Fig. 12-27). Llamemos  $x_1$  y  $x_2$  los desplazamientos de  $m_1$  y  $m_2$  a partir de su posición de equilibrio, medidos como positivos cuando están a la derecha. Luego el resorte  $k_1$  ejerce una fuerza  $-k_1x_1$  sobre  $m_1$ , y similarmente  $k_2$  ejerce una fuerza  $-k_2x_2$  sobre  $m_2$ . El resorte  $k$  ha sufrido una elongación  $x_2 - x_1$  y, por lo tanto, las fuerzas que ejerce sobre cada partícula cuando trata de recobrar

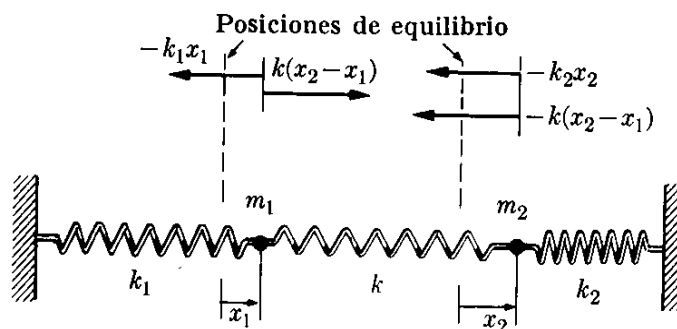


Fig. 12-27. Osciladores acoplados.

su longitud original son  $k(x_2 - x_1)$  sobre  $m_1$  y  $-k(x_2 - x_1)$  sobre  $m_2$ . Entonces la ecuación de movimiento de cada partícula [usando la ec. (7.15),  $m d^2x/dt^2 = F$ ] es

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -k_1 x_1 + k(x_2 - x_1)$$

y

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -k_2 x_2 - k(x_2 - x_1).$$

Combinando términos similares, podemos escribir

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \frac{k_1 + k}{m_1} x_1 = \frac{k}{m_1} x_2 \quad (12.36)$$

y

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + \frac{k_2 + k}{m_2} x_2 = \frac{k}{m_2} x_1.$$

Los lados de la izquierda de estas ecuaciones son muy similares a la ec. (12.12), excepto que la constante elástica es  $k_1 + k$  y  $k_2 + k$ . Esto, en vista de la ec. (12.7), es equivalente a un cambio en la frecuencia de oscilación con respecto a las frecuencias cuando no están acoplados. Otra diferencia en la ec. (12.36) con respecto a la ec. (12.12) es que, en lugar de cero en el miembro de la derecha, tenemos un término que se refiere a cada oscilador. A este término podemos llamarlo el *término de acoplamiento*. En lugar de intentar obtener la solución general de la ec. (12.36) indicaremos los resultados principales, limitándonos al caso especial de dos osciladores idénticos de modo que  $m_1 = m_2$  y  $k_1 = k_2$ . Este caso, aunque más simple, tiene esencialmente todas las características del caso general. Entonces las ecs. (12.36) son:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \frac{k_1 + k}{m_1} x_1 = \frac{k}{m_1} x_2, \quad \frac{d^2 x_2}{dt^2} + \frac{k_1 + k}{m_1} x_2 = \frac{k}{m_1} x_1. \quad (12.37)$$

Puede demostrarse que el movimiento general de dos osciladores acoplados, descrito por las ec. (12.37) puede considerarse como la superposición de dos *modos normales* de oscilación. En uno de los modos normales, los dos osciladores se mueven en fase con amplitudes iguales. Esto es

$$x_1 = A_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1), \quad x_2 = A_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1), \quad (12.38)$$

donde

$$\omega_1 = \sqrt{k_1/m_1}. \quad (12.39)$$

Esto es, la frecuencia de los osciladores acoplados es la misma frecuencia de oscilación que cada masa tendría si no hubiera acoplamiento. Esto es fácilmente comprensible porque, como los osciladores tienen igual amplitud y están en fase,



el resorte central no sufre ningún estiramiento y por lo tanto no ejerce ninguna fuerza sobre las masas, las cuales se mueven como si no estuvieran acopladas.

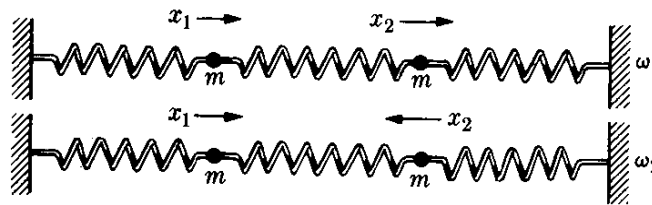
En el segundo modo normal, los dos osciladores se mueven en oposición con amplitudes iguales. Esto es,

$$x_1 = A_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2), \quad x_2 = -A_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2), \quad (12.40)$$

donde

$$\omega_2 = \sqrt{(k_1 + 2k)/m_1}, \quad (12.41)$$

y entonces la frecuencia es mayor que la frecuencia sin acoplamiento. Esto es fácilmente comprensible ya que ahora el resorte central se estira y se comprime, y esto equivale a aumentar la constante elástica de cada oscilador. Estos dos modos normales de oscilación están representados esquemáticamente en la Fig. 12-28. Los modos normales (12.38) y (12.40) corresponden a una situación en la cual las dos masas se mueven con diferencia de fase constante, la cual es cero en el modo (12.38) y  $\pi$  en el modo (12.40). Las dos masas pasan simultáneamente a través de su posición de equilibrio y alcanzan sus desplazamientos máximos simultáneamente.



**Fig. 12-28.** Vibraciones normales de dos osciladores acoplados idénticos.

La solución general de las ecs. (12.37) es una combinación lineal de los modos normales de oscilación. Esto es

$$x_1 = A_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2) \quad (12.42)$$

y

$$x_2 = A_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) - A_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2). \quad (12.43)$$

Podemos ver que estas dos ecuaciones expresan la solución general de la ec. (12.37) ya que contienen cuatro constantes arbitrarias;  $A_1$ ,  $\alpha_1$ ,  $A_2$  y  $\alpha_2$ , como corresponde a un sistema de dos ecuaciones diferenciales acopladas de segundo orden. Estas dos ecuaciones indican que  $x_1$  y  $x_2$  son los resultados de las interacciones de dos movimientos armónicos simples en la misma dirección pero de frecuencia y fase distintas, una situación ya discutida en la sección 12.8. Por lo tanto lo que se explicó en dicha ocasión se aplica en este caso.

Para una mejor comprensión de la física del problema, consideremos el caso especial de amplitudes iguales,  $A_1 = A_2$ , y supongamos que las fases iniciales son cero ( $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ ). Entonces usando la ec. (M.7), tenemos

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 \sin \omega_1 t + A_1 \sin \omega_2 t = A_1(\sin \omega_1 t + \sin \omega_2 t) \\ &= [2A_1 \cos \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t] \sin \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 x_2 &= A_1 \sin \omega_1 t - A_1 \sin \omega_2 t = A_1(\sin \omega_1 t - \sin \omega_2 t) \\
 &= [2A_1 \sin \tfrac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t] \cos \tfrac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t.
 \end{aligned}$$

Comparando estas expresiones con la ec. (12.29), vemos que la amplitud modulada de  $x_1$  es  $2A \cos \tfrac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t$ , pero la amplitud modulada de  $x_2$  es  $2A \sin \tfrac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t = 2A \cos [\tfrac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t - \pi/2]$ . Vemos entonces que las dos amplitudes moduladas tienen una diferencia de fase de  $\pi/2$ , o un cuarto del período modulante. Las variaciones de  $x_1$  y  $x_2$  en función de  $t$  se ilustran en la Fig. 12-29. Debido a la diferencia de fase entre las dos amplitudes modulantes hay un intercambio de energía entre los dos osciladores. Durante un cuarto del período modulante, la amplitud modulante de un oscilador disminuye y la del otro aumenta, dando lugar a una transferencia de energía del primero al segundo. Durante el siguiente cuarto del período, la situación se invierte y la energía fluye en la dirección opuesta. El proceso se repite continuamente. Esto puede observarse usando dos péndulos como se indica en la Fig. 12-26(b).

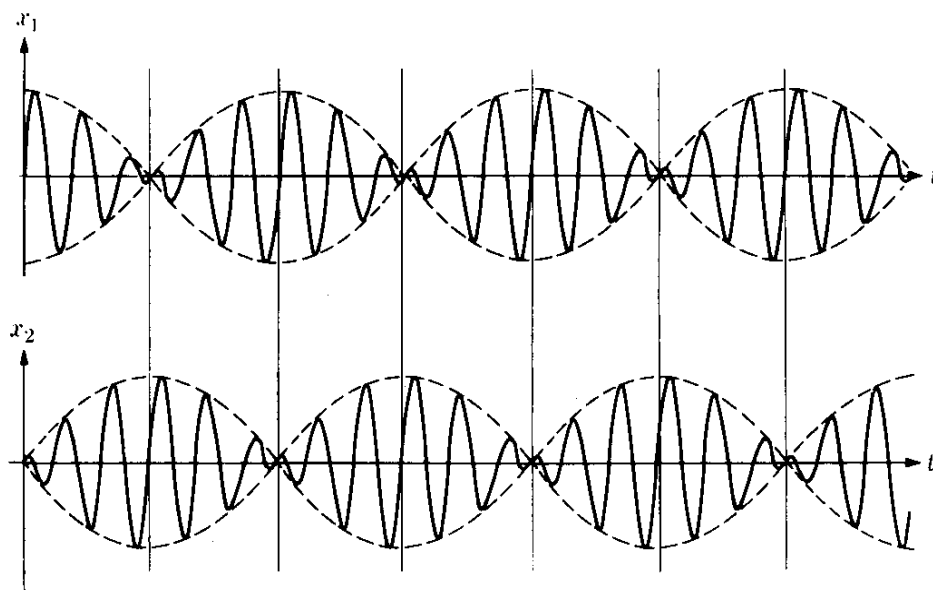


Fig. 12-29. Osciladores acoplados de igual amplitud.

Es también interesante considerar la energía total del sistema. La energía cinética total es  $E_k = \tfrac{1}{2}m_1v_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_2^2$ . Para obtener la energía potencial aplicamos la ec. (12.10) a cada resorte lo cual da  $E_p = \tfrac{1}{2}k_1x_1^2 + \tfrac{1}{2}k_2x_2^2 + \tfrac{1}{2}k(x_1 - x_2)^2$ , ya que  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_1 - x_2$  son las elongaciones de cada resorte, o

$$E_p = \tfrac{1}{2}(k_1 + k)x_1^2 + \tfrac{1}{2}(k_2 + k)x_2^2 - kx_1x_2.$$

La energía total es entonces

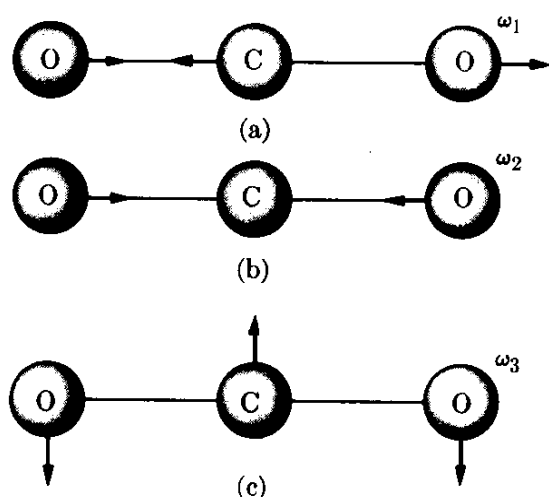
$$\begin{aligned}
 E = E_k + E_p &= [\tfrac{1}{2}m_1v_1^2 + \tfrac{1}{2}(k_1 + k)x_1^2] \\
 &\quad + [\tfrac{1}{2}m_2v_2^2 + \tfrac{1}{2}(k_2 + k)x_2^2] - kx_1x_2.
 \end{aligned} \tag{12.44}$$

El término del primer paréntesis depende solamente de  $x_1$ , y puede llamarse la energía de  $m_1$ ; el término del segundo paréntesis corresponde a la energía de  $m_2$ . Pero el último término contiene tanto  $x_1$  como  $x_2$ , y se denomina *la energía de acoplamiento o de interacción*. Este término es el que describe el intercambio de energía entre los dos osciladores. En la ausencia de este término, la energía de cada oscilador es constante. Cuando hay un acoplamiento, la energía total es constante. Este es un resultado general como vimos en el capítulo 9, cuando dos sistemas interactúan, dando por resultado un intercambio de energía, la energía total del sistema es de la forma

$$E = (E_k + E_p)_1 + (E_k + E_p)_2 + (E_p)_{12}, \quad (12.45)$$

donde el último término representa la interacción.

Los osciladores acoplados se encuentran en muchas situaciones físicas, como se indicó líneas arriba. Un caso importante es la vibración de los átomos en una molécula. Una molécula no es una estructura rígida y los átomos oscilan con respecto a su posición de equilibrio. Sin embargo, la oscilación de cada átomo afecta su interacción con los otros, y entonces forma un sistema de osciladores acoplados.



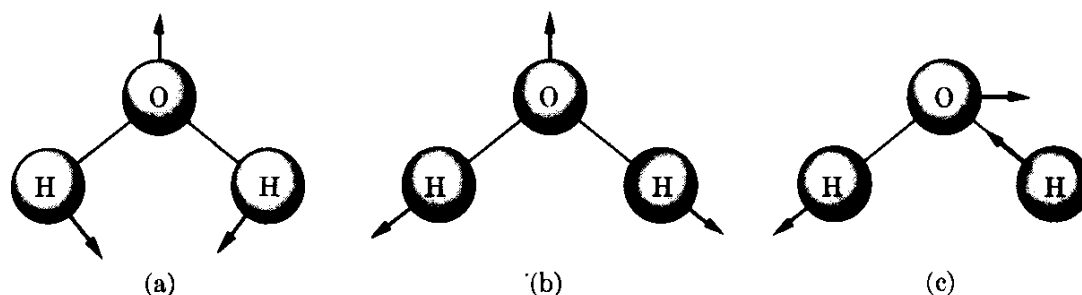
**Fig. 12-30.** Vibraciones normales de la molécula de  $\text{CO}_2$ .

Consideremos, por ejemplo, el caso de una molécula triatómica tal como  $\text{CO}_2$ . Geométricamente esta molécula tiene el ordenamiento  $\text{O}=\text{C}=\text{O}$ , como se indica en la Fig. 12-30, y es similar a los osciladores de la Fig. 12-27. El movimiento relativo de los tres átomos puede describirse en función de osciladores normales. En la Fig. 12-30(a), los átomos de oxígeno oscilan en fase, con el átomo de carbono moviéndose en dirección opuesta para conservar la posición del centro de masa. Este modo corresponde a la oscilación  $\omega_1$  de la Fig. 12-28. En la Fig. 12-30(b) los dos átomos de oxígeno se mueven en direcciones opuestas, con respecto al átomo de carbono, que permanece fijo en el centro de masa. Este modo corres-

ponde a la oscilación  $\omega_2$  de la Fig. 12-28. La situación de la Fig. 12-30(c) no se ha considerado previamente. Corresponde a un movimiento perpendicular a la línea que une los átomos con una frecuencia angular  $\omega_3$ , resultando en una flexión de la molécula. Para la molécula de  $\text{CO}_2$ , los valores de las tres frecuencias angulares son

$$\omega_1 = 4,443 \times 10^{14} \text{ s}^{-1}, \quad \omega_2 = 2,529 \times 10^{14} \text{ s}^{-1}, \quad \omega_3 = 1,261 \times 10^{14} \text{ s}^{-1}.$$

Si la molécula no es lineal o tiene más de tres átomos, el análisis de las oscilaciones normales se vuelve más complicado, pero es esencialmente el mismo.

Fig. 12-31. Vibraciones normales de la molécula de  $\text{H}_2\text{O}$ .

Por ejemplo, para la molécula de  $\text{H}_2\text{O}$ , en la cual el átomo se encuentra a cada lado, las vibraciones normales se ilustran en la Fig. 12-31. Sus frecuencias son  $3,017 \times 10^{14} \text{ s}^{-1}$ ,  $6,908 \times 10^{14} \text{ s}^{-1}$  y  $7,104 \times 10^{14} \text{ s}^{-1}$ .

### 12.11 Oscilaciones anarmónicas

El movimiento armónico simple es generado por una fuerza  $F = -kx$  correspondiente a una energía potencial  $E_p = \frac{1}{2}kx^2$ , midiéndose  $x$  a partir de la posición de equilibrio  $O$ . Cuando la posición de equilibrio se encuentra en  $x_0$  en lugar del origen como en la Fig. 12-32, entonces debemos escribir

$$E_p = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2.$$

El gráfico de  $E_p$  es una parábola con su vértice en  $x_0$ . Si la energía total  $E$  interseca  $E_p$  en  $A$  y en  $B$ , la partícula oscila entre las posiciones  $x_1$  y  $x_2$ , que están colocadas simétricamente con respecto a  $x_0$ . Notando que

$$dE_p/dx = k(x - x_0) \quad \text{y} \quad d^2E_p/dx^2 = k,$$

podemos escribir para la frecuencia angular

$$\omega = \sqrt{k/m} = \sqrt{(d^2E_p/dx^2)/m}. \quad (12.46)$$

Consideremos ahora el caso en que la energía potencial no es una parábola pero tiene un mínimo bien definido, como se indica en la Fig. 12-33. Esta es la situación encontrada más a menudo en sistemas físicos y da como resultado un *movimiento oscilatorio anarmónico*. Si la energía total de la partícula es  $E$ , la partícula oscilará entre las posiciones  $x_1$  y  $x_2$  las cuales son asimétricas con respecto a la posición de equilibrio  $x_0$ . La frecuencia de las oscilaciones depende ahora de la energía. Para obtener un estimado de la frecuencia se procede como sigue.

Dada una función  $f(x)$ , el teorema de Taylor\* (ver ec. M.31) nos permite expresarla como una serie de potencias,

$$f(x) = f(x_0) + (df/dx)_0(x - x_0) + \frac{1}{2}(d^2f/dx^2)_0(x - x_0)^2 + \frac{1}{6}(d^3f/dx^3)_0(x - x_0)^3 + \dots,$$

\* Ver G. B. Thomas, *Cálculo infinitesimal y geometría analítica*, tercera edición. Madrid: Aguilar, 1961, pág. 720.

El primer término es la fuerza armónica simple y los otros son los términos anarmónicos.

**EJEMPLO 12.10.** Obtener la frecuencia de oscilación correspondiente al potencial intermolecular dado en el ejemplo 8.11.

**Solución:** El potencial intermolecular es

$$E_p = -E_{p,0} \left[ 2 \left( \frac{r_0}{r} \right)^6 - \left( \frac{r_0}{r} \right)^{12} \right],$$

donde  $r_0$  es la separación de equilibrio. Así

$$\frac{d^2 E_p}{dr^2} = -E_{p,0} \left( 84 \frac{r_0^6}{r^8} - 156 \frac{r_0^{12}}{r^{14}} \right).$$

Poniendo  $r = r_0$ , obtenemos

$$\left( \frac{d^2 E_p}{dr^2} \right)_{r_0} = 72 \frac{E_{p,0}}{r_0^2}.$$

Entonces, usando la ec. (12.48), encontramos que la frecuencia de oscilación es aproximadamente  $\omega = \sqrt{72 E_{p,0} / m r_0^2}$ .

En esta fórmula  $m$  es la masa reducida, ya que estamos discutiendo el movimiento relativo de dos moléculas. Si calculamos  $r_0$  por algún método independiente y observamos  $\omega$  experimentalmente, podemos determinar la energía  $E_{p,0}$  de la interacción molecular. Al resolver este problema hemos supuesto que el oscilador es lineal, de modo que el potencial centrífugo (sección 8.10) no interviene en el problema.

## 12.12 Oscilaciones amortiguadas

La discusión del movimiento armónico simple en las secciones previas indica que las oscilaciones tienen amplitud constante. Sin embargo, por experiencia, sabemos que la amplitud de un cuerpo vibrante tal como un resorte o un péndulo, con una amplitud que decrece gradualmente hasta que se detiene. Esto es, el movimiento oscilatorio es amortiguado.

Para explicar dinámicamente el amortiguamiento podemos suponer que, en adición a la fuerza elástica  $F = -kx$ , actúa otra fuerza, opuesta a la velocidad. En la sección 7.10 consideramos una fuerza de esta clase, debida a la viscosidad del medio en el cual el movimiento tiene lugar. Siguiendo la lógica de la sección 7.10, escribiremos esta fuerza como  $F' = -\lambda v$ , donde  $\lambda$  es una constante y  $v$  es la velocidad. El signo negativo se debe al hecho que  $F'$  se opone a  $v$ . Nótese que otros tipos de fuerzas de amortiguamiento — proporcionales a potencias mayores de la velocidad, o con otras relaciones físicas diferentes — pueden presentarse en varias situaciones físicas. La fuerza resultante sobre el cuerpo es  $F + F'$ , y su ecuación de movimiento es

$$ma = -kx - \lambda v, \quad (12.50)$$

o, recordando que  $v = dx/dt$  y que  $a = d^2x/dt^2$  tenemos

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \lambda \frac{dx}{dt} + kx = 0. \quad (12.51)$$

Esta ecuación se escribe usualmente en la forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0, \quad (12.52)$$

donde  $2\gamma = \lambda/m$  y  $\omega_0^2 = k/m$  es la frecuencia angular sin amortiguamiento. Esta es una ecuación diferencial que difiere de la ec. (12.12) del movimiento armónico simple, en que contiene el término adicional  $2\gamma dx/dt$ . Su solución puede obtenerse mediante la aplicación de técnicas aprendidas en el curso de cálculo.\* En lugar de intentar resolverla de una manera formal, escribamos su solución para el caso de pequeño amortiguamiento, cuando  $\gamma < \omega_0$ . La solución es entonces

$$x = Ae^{-\gamma t} \sin(\omega t + \alpha), \quad (12.53)$$

donde  $A$  y  $\alpha$  son constantes arbitrarias determinadas por las condiciones iniciales (como se explicó en el ejemplo 12.3 para el caso de movimiento armónico simple), y

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \sqrt{k/m - \lambda^2/4m^2}. \quad (12.54)$$

El estudiante puede verificar por sustitución directa que la ec. (12.53) es una solución de la ec. (12.52). Como contiene dos constantes arbitrarias es la solución general de la ecuación diferencial. La ec. (12.54) indica que el efecto del amortiguamiento es disminuir la frecuencia de las oscilaciones.

La amplitud de las oscilaciones no es constante y está dada por  $Ae^{-\gamma t}$ . Debido al exponente negativo, la amplitud decrece a medida que el tiempo aumenta, resultando un movimiento amortiguado. La fig. 12-34 muestra la variación de  $x$  en función de  $t$ .

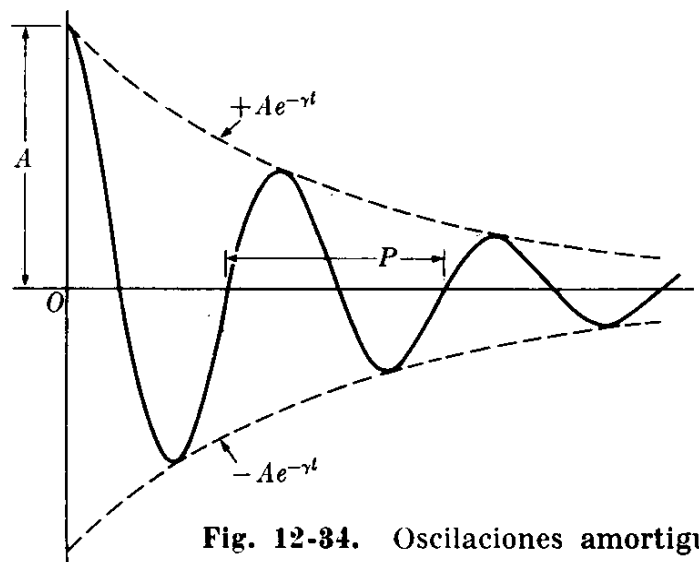


Fig. 12-34. Oscilaciones amortiguadas.

Si el amortiguamiento es muy grande,  $\gamma$  puede ser mayor que  $\omega_0$  y  $\omega$ , dada por la ec. (12.54), se vuelve imaginaria. En este caso no hay oscilaciones y la partícula si se la desplaza y se la deja libre, se aproxima gradualmente a la posición de

\* Ver por ejemplo, *Cálculo infinitesimal y geometría analítica*, tercera edición, por G. B. Thomas. Madrid: Aguilar, 1964, sec. 18.9.

equilibrio sin pasarla, o a lo más pasándola una sola vez. La energía perdida por la partícula en oscilaciones amortiguadas es absorbida por el medio que la rodea.

**EJEMPLO 12.11.** Un péndulo consiste de una esfera de aluminio de 0,005 m de radio suspendida de una cuerda de 1 m de largo. Determinar cómo la viscosidad del aire afecta su amplitud y su período.

**Solución:** De la sección 7.10 sabemos que la fuerza viscosa que actúa sobre una esfera de radio  $R$  que se mueve en un fluido con velocidad  $v$  es  $F = -6\pi\eta Rv$ . Así podemos encontrar la ecuación del movimiento tangencial del péndulo agregando — a la fuerza  $F_T = -mg \sin \theta \approx -mg\theta$  obtenida en la sección 12.5 para pequeñas amplitudes — la fuerza viscosa, con  $v = ds/dt = l d\theta/dt$ , donde  $l$  es la longitud del péndulo. Por consiguiente

$$ml \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\theta - 6\pi\eta Rl \frac{d\theta}{dt} \quad \text{ó} \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{6\pi\eta R}{m} \frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l} \theta = 0,$$

la cual es una ecuación diferencial matemáticamente idéntica a la ec. (12.52). Poniendo  $m = (4\pi R^3/3)\rho$ , donde  $\rho$  es la densidad de la esfera de aluminio, igual a  $2,65 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ , llegamos a la conclusión que

$$\gamma = \frac{6\pi\eta R}{2(4\pi R^3/3)\rho} = \frac{9\eta}{4R^2\rho}.$$

La viscosidad del aire, suponiendo una temperatura de  $20^\circ\text{C}$ , es  $1,78 \times 10^{-4} \text{ m}^{-1} \text{ kg s}^{-1}$ . Así  $\gamma = 6,43 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ . Por tanto la amplitud decrece de acuerdo a la ley  $Ae^{-0.000643t}$ . El tiempo necesario para que la amplitud se reduzca al 10 % se obtiene igualando el exponente a 0,9 ó  $-6,43 \times 10^{-4}t = \ln 0,9$ . El tiempo es de  $1,64 \times 10^3 \text{ s}$ , o alrededor de 27 minutos.

Para ver cómo la viscosidad del aire afecta la frecuencia (o el período) de las oscilaciones usamos la ec. (12.54), notando que  $\omega_0^2 = g/l$ . Así  $\omega = \sqrt{g/l - \gamma^2}$ . Pero  $g/l = 9,8 \text{ s}^{-2}$ , mientras que  $\gamma^2$  en nuestro caso es del orden de  $4 \times 10^{-7} \text{ s}^{-2}$ , despreciable comparada con  $g/l$ . Así, llegamos a la conclusión que la viscosidad del aire prácticamente no afecta la frecuencia o período del péndulo considerado en este ejemplo, aunque afecta su amplitud.

## 12.13 Oscilaciones forzadas

Otro problema de gran importancia es aquel de las vibraciones de un oscilador, esto es, las vibraciones que resultan cuando aplicamos una fuerza oscilatoria externa a una partícula sometida a una fuerza elástica. Esto sucede, por ejemplo, cuando colocamos un vibrador en una caja resonante y forzamos las paredes de la caja (y el aire dentro), a oscilar, o cuando las ondas electromagnéticas, absorbidas por una antena, actúan sobre el circuito eléctrico de nuestro radio o nuestra televisión, produciendo oscilaciones eléctricas forzadas.

Sea  $F = F_0 \cos \omega_f t$  la fuerza oscilante aplicada, siendo su frecuencia angular  $\omega_f$ . Suponiendo que la partícula está sometida a una fuerza elástica  $-kx$  y a una fuerza de amortiguamiento  $-\lambda v$ , su ecuación de movimiento es  $ma = -kx - \lambda v + F_0 \cos \omega_f t$ . Realizando las sustituciones  $v = dx/dt$ ,  $a = d^2x/dt^2$ , tenemos

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \lambda \frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos \omega_f t, \quad (12.55)$$

la cual, si suponemos  $2\gamma = \lambda/m$  y  $\omega_0^2 = k/m$ , puede escribirse en la forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega_f t. \quad (12.56)$$

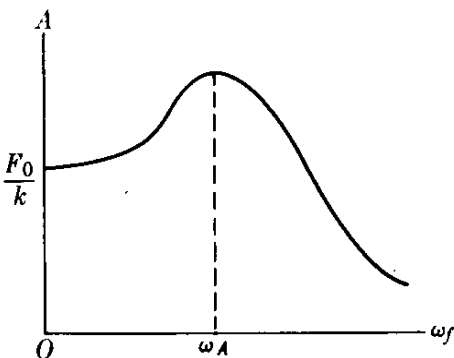
Esta es una ecuación diferencial similar a la ec. (12.52), difiriendo solamente en que el miembro de la derecha no es cero. Podríamos resolverla por métodos matemáticos normales; en lugar de ello usemos nuestra intuición física como guía. Parece lógico que en este caso la partícula no oscilará con su frecuencia angular no amortiguada  $\omega_0$  ni con la frecuencia angular amortiguada  $\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ . En su lugar, la partícula será forzada a oscilar con la frecuencia angular  $\omega_f$  de la fuerza aplicada. Luego supondremos como posible solución de la ec. (12.56), una expresión de la forma

$$x = A \sin(\omega_f t - \alpha), \quad (12.57)$$

donde, por conveniencia, se ha dado un signo negativo a la fase inicial  $\alpha$ . La sustitución directa en la ecuación demuestra que será satisfactoria si la amplitud está dada por\*

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_f^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega_f^2}} \quad (12.58)$$

**Fig. 12-35.** Variación de la amplitud con la frecuencia de fuerza aplicada.



y la fase inicial del desplazamiento por

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\omega_f^2 - \omega_0^2}{2\gamma\omega_f}. \quad (12.59)$$

Nótese que tanto la amplitud  $A$  como la fase inicial  $\alpha$  no son ya constantes arbitrarias, sino cantidades fijas que dependen de la frecuencia  $\omega_f$  de la fuerza aplicada. Matemáticamente esto significa que hemos obtenido una solución "particular" de la ecuación diferencial. La ec. (12.57) indica que las oscilaciones forzadas no están amortiguadas, pero tienen amplitud constante y frecuencia igual a aquella de la fuerza aplicada. Esto significa que la fuerza aplicada supera a las fuerzas de amortiguamiento, y proporciona la energía necesaria para mantener las oscilaciones.

En la Fig. 12-35 la amplitud  $A$  está representada en función de la frecuencia  $\omega_f$  para un valor dado de  $\lambda$ . La amplitud tiene un máximo pronunciado cuando el denominador de la ec. (12.58) tiene su valor mínimo. Esto ocurre para la frecuencia  $\omega_A$ , dada por

$$\omega_A = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} = \sqrt{k/m - \lambda^2/2m^2}. \quad (12.60)$$

\* Para verificar esto, desarróllese primero  $\sin(\omega_f t - \alpha)$  y sustitúyase el resultado en la ec. (12.56). Luego, iguálense los coeficientes de  $\sin \omega_f t$  y  $\cos \omega_f t$ , respectivamente, en ambos lados de la ecuación. De las dos ecuaciones así obtenidas, encuéntrense las ec. (12.58) y (12.59) inmediatamente.

Se demuestra en la teoría de ecuaciones diferenciales que la solución general de la ec. (12.56) se obtiene sumando a la ec. (12.53), que es solución de la ec. (12.52), la ec. (12.57). Sin embargo, ya que la ec. (12.53) corresponde a una oscilación amortiguada, se hace despreciable rápidamente y puede ignorarse. Por esta razón se le denomina usualmente el término *transitorio*.



Cuando la frecuencia  $\omega_f$  de la fuerza aplicada es igual a  $\omega_A$ , se dice que hay *resonancia en la amplitud*. Cuanto menor es el amortiguamiento más pronunciada es la resonancia, y cuando  $\lambda$  es cero, la amplitud de resonancia es infinita y ocurre para  $\omega_A = \omega_0 = \sqrt{k/m}$ . La Fig. 12-36 muestra la variación de la amplitud  $A$  en función de la frecuencia  $\omega_f$  para diferentes valores del amortiguamiento  $\lambda$ .

La velocidad del oscilador forzado es

$$v = \frac{dx}{dt} = \omega_f A \cos(\omega_f t - \alpha). \quad (12.61)$$

Comparando con la expresión  $F = F_0 \cos \omega_f t$  de la fuerza aplicada, vemos que  $\alpha$  representa el desfase de la velocidad con respecto a la fuerza. La amplitud de la velocidad  $v_0$  es

$$v_0 = \omega_f A = \frac{\omega_f F_0 / m}{\sqrt{(\omega_f^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2 \omega_f^2}},$$

la cual puede escribirse también en la forma

$$v_0 = \frac{F_0}{\sqrt{(m\omega_f - k/\omega_f)^2 + \lambda^2}}. \quad (12.62)$$

La cantidad  $v_0$  varía con  $\omega_f$ , como se indica en la Fig. 12-37, y adquiere su máximo valor cuando la cantidad dentro del paréntesis del denominador es cero,  $m\omega_f - k/\omega_f = 0$ , ó

$$\omega_f = \sqrt{k/m} = \omega_0. \quad (12.63)$$

A esta frecuencia de la fuerza aplicada, la velocidad e igualmente la energía cinética de las oscilaciones son máximas, y se dice que hay *resonancia en la energía*. Nótese que la ec. (12.63), cuando se sustituye en la ec. (12.59), da  $\alpha = 0$ . Es decir la resonancia en la energía ocurre cuando la frecuencia de la fuerza aplicada es igual a la frecuencia natural del oscilador sin amortiguamiento, y en este caso la velocidad se encuentra en fase con la fuerza aplicada. Estas son las condiciones más favorables para transferencia de energía al oscilador, ya que la variación con respecto al tiempo del trabajo hecho sobre el oscilador por la fuerza aplicada es  $Fv$ , y esta cantidad es siempre positiva cuando  $F$  y  $v$  están en fase. Por consiguiente

*cuando hay resonancia en la energía la transferencia de energía de la fuerza aplicada al oscilador forzado está al máximo.*

Cuando el amortiguamiento es muy pequeño no hay gran diferencia entre las frecuencias correspondientes a la resonancia en la amplitud y la resonancia en la energía.

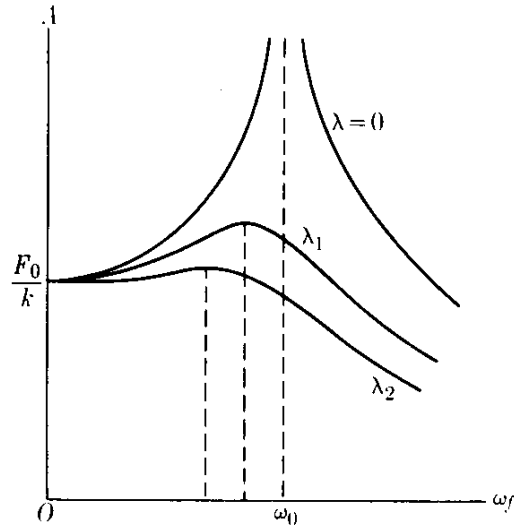
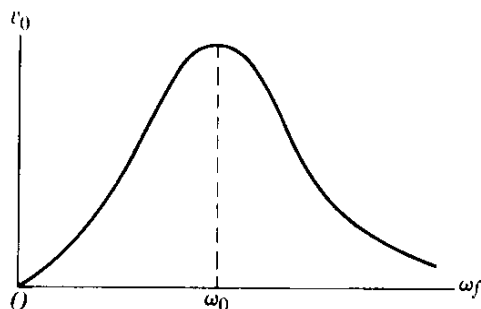
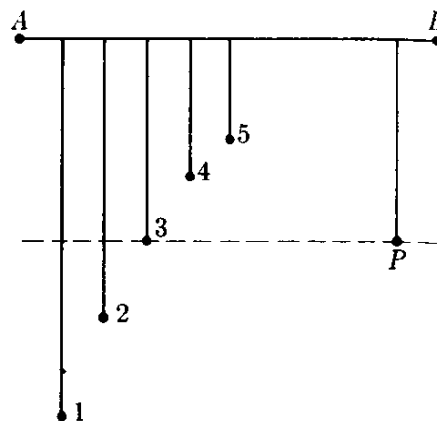


Fig. 12-36. Variación de la amplitud de las oscilaciones forzadas (en la figura,  $\lambda_2$  es mayor que  $\lambda_1$ ).

La resonancia puede ilustrarse con un experimento muy simple. Si de una misma cuerda, suspendemos varios péndulos como se indica en la Fig. 12-38, y ponemos el péndulo  $P$  en movimiento, los otros comenzarán también a oscilar debido a su acoplamiento. Sin embargo, de los cinco péndulos forzados a oscilar, aquel que oscila con la mayor amplitud es el número 3, el cual tiene la misma longitud que  $P$  y por consiguiente la misma frecuencia natural, ya que el amortiguamiento es despreciable y no hay distinción entre las resonancias en la amplitud y en la energía en este caso.



**Fig. 12-37.** Variación de la amplitud de la velocidad de la oscilación forzada con la frecuencia de la fuerza aplicada.



**Fig. 12-38.** Resonancia en la amplitud en el movimiento pendular.

El fenómeno de resonancia se encuentra en casi todas las ramas de la física. Se observa siempre que un sistema es sometido a una acción externa que varía periódicamente con el tiempo. Por ejemplo, si un gas está colocado en una región en la cual existe un campo eléctrico oscilatorio tal como una onda electromagnética, se inducirán oscilaciones forzadas en los átomos que forman las moléculas del gas. Considerando que, como se explicó al final de la sección 12.10, las moléculas tienen frecuencias naturales de vibración definidas, la energía de absorción será un máximo cuando la frecuencia del campo eléctrico aplicado coincida con una de las frecuencias naturales de vibración de las moléculas. Por medio de este principio podemos obtener el *espectro vibracional* de las moléculas. Similarmente, podemos considerar los electrones en un átomo como osciladores que tienen ciertas frecuencias naturales. La energía que absorbe un átomo de un campo eléctrico oscilante es máxima cuando la frecuencia del campo coincide con una de las frecuencias naturales del átomo. Algunos cristales, tales como el cloruro de sodio, están compuestos de partículas positivas y negativas (llamadas iones). Si el cristal es sometido a un campo eléctrico oscilante externo, los iones positivos oscilan relativamente con respecto a los iones negativos. La energía de absorción por el cristal está al máximo cuando la frecuencia del campo eléctrico coincide con la frecuencia natural de la oscilación relativa de los iones, la cual en el caso de cristales de cloruro de sodio es aproximadamente de  $5 \times 10^{12}$  Hz.

Quizás el ejemplo más familiar de resonancia sea lo que sucede cuando sintonizamos una radio a una estación radioemisora. Todas las estaciones radioemisoras

están produciendo todo el tiempo oscilaciones forzadas en el circuito del receptor. Pero, para cada posición del sintonizador, corresponde una frecuencia natural de oscilación del circuito eléctrico del receptor. Cuando esta frecuencia coincide con aquella de la radio emisora, la energía de absorción está al máximo, y por ello es la única estación que podemos oír. Si dos estaciones tienen frecuencias muy próximas, algunas veces las oímos simultáneamente, lo que da lugar a un efecto de interferencia.

Podemos extender el concepto de resonancia a muchos procesos en los cuales hay consideraciones favorables para la transferencia de energía de un sistema a otro, aun si no podemos describir el proceso en función de oscilaciones forzadas. En este sentido es posible hablar de resonancias en reacciones nucleares y en procesos que tienen lugar entre partículas fundamentales. Así considerado el concepto de resonancia en la energía juega un papel importante en la descripción de muchos fenómenos.

### 12.14 Impedancia de un oscilador

Un oscilador amortiguado se caracteriza por tres cantidades: su masa  $m$ , la constante elástica  $k$ , y la constante de amortiguamiento  $\lambda$ . En las fórmulas de la sección 12.13, estas cantidades siempre aparecen en combinaciones especiales con frecuencia  $\omega_f$  de la fuerza aplicada.

La cantidad que aparece en el denominador de la ec. (12.62) se denomina la *impedancia* del oscilador, y se designa por la letra  $Z$ . Luego

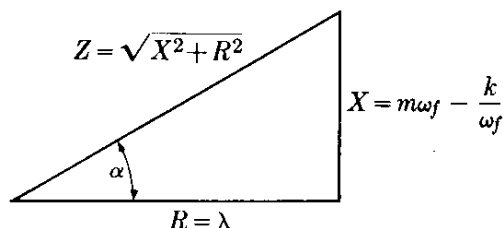
$$Z = \sqrt{(m\omega_f - k/\omega_f)^2 + \lambda^2}. \quad (12.64)$$

Similarmente, la *reactancia*  $X$  y la *resistencia*  $R$  se definen por

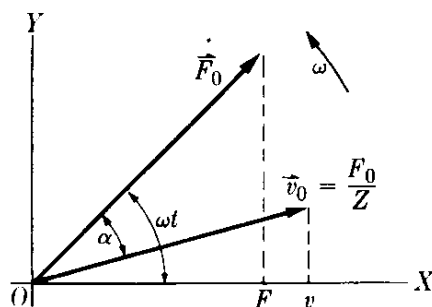
$$X = m\omega_f - k/\omega_f, \quad R = \lambda. \quad (12.65)$$

Por consiguiente

$$Z = \sqrt{X^2 + R^2}. \quad (12.66)$$



**Fig. 12-39.** Relación entre impedancia, resistencia, y reactancia en oscilaciones forzadas.



**Fig. 12-40.** Relación entre los vectores rotantes fuerza y velocidad en oscilaciones forzadas.

Sustituyendo en la ec. (12.59) obtenemos

$$\operatorname{tg} \alpha = X/R. \quad (12.67)$$

La relación entre  $Z$ ,  $X$  y  $R$  se indica en la Fig. 12-39, la cual ayuda a recordar las fórmulas precedentes.

De la ec. (12.62) vemos que  $v_0 = F_0/Z$ , y la velocidad en cualquier instante es

$$v = \frac{F_0}{Z} \cos(\omega_f t - \alpha). \quad (12.68)$$

Esto significa que la fuerza y la velocidad pueden representarse por vectores rotantes, como se indica en la Fig. 12-40. Notar que si  $\alpha$  es positiva el vector rotante  $\vec{v}_0$  se *atrás*a con respecto al vector rotante  $\vec{F}_0$ , y si  $\alpha$  es negativa, el vector rotante  $\vec{v}_0$  se *adelanta* a  $\vec{F}_0$ . Cuando hay resonancia  $\alpha = 0$ , y  $\vec{v}_0$  y  $\vec{F}_0$  tienen la misma dirección. La potencia transferida al oscilador es

$$P = Fv = \frac{F_0^2}{Z} \cos \omega_f t \cos(\omega_f t - \alpha).$$

Desarrollando el segundo coseno y multiplicándolo por el primero, tenemos

$$P = \frac{F_0^2}{Z} (\cos^2 \omega_f t \cos \alpha - \cos \omega_f t \sin \omega_f t \sin \alpha). \quad (12.69)$$

Nosotros estamos más interesados en la potencia promedio,  $\bar{P}$ , ya que esto es lo que importa cuando calculamos la energía absorbida por el oscilador en un cierto tiempo. Ahora, de acuerdo a las ec. (M.13) y (M.14),

$$\cos^2 \omega_f t = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\omega_f t) \quad \text{y} \quad \cos \omega_f t \sin \omega_f t = \frac{1}{2} \sin 2\omega_f t.$$

Pero  $\overline{(\cos 2\omega_f t)} = \overline{(\sin 2\omega_f t)} = 0$ , ya que las curvas seno y coseno son positivas la mitad del tiempo y negativas la otra mitad, pero en la misma medida. Por consiguiente  $\overline{(\cos^2 \omega_f t)} = \frac{1}{2}$  y  $\overline{(\cos \omega_f t \sin \omega_f t)} = 0$ , lo que da por resultado final

$$\bar{P} = \frac{F_0^2}{2Z} \cos \alpha = \frac{1}{2} F_0 v_0 \cos \alpha = \frac{F_0^2 R}{2Z^2} = \frac{1}{2} R v_0^2. \quad (12.70)$$

Esto comprueba que la máxima transferencia de energía tiene lugar cuando  $v_0$  es un máximo ya que  $R$  es fijo. Cuando se tiene resonancia de energía,  $\alpha = 0$  y  $Z = R$ , resultando

$$(\bar{P})_{\text{res}} = \frac{F_0^2}{2R}. \quad (12.71)$$

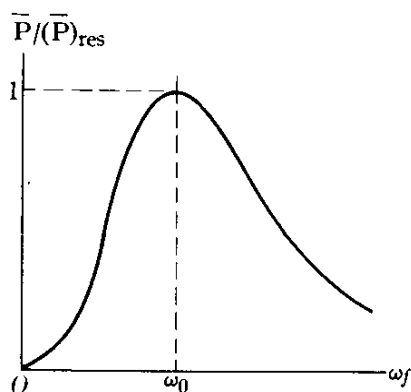


Fig. 12-41. Relación entre  $P\bar{E}$  y  $(P\bar{E})_{\text{res}}$ .

La relación entre  $\bar{P}$  y  $(\bar{P})_{\text{res}}$  se ilustra en la Fig. 12-41.

La teoría concerniente a osciladores amortiguados y forzados que hemos formulado en las últimas tres secciones, aunque referidas especialmente a una partícula oscilante se aplica a cualquier situación física descrita por una ecuación como la ec. (12.52) o la ec. (12.56). En particular, como veremos en el capítulo 17, este es precisamente el caso de los circuitos eléctricos.

### 12.15 Análisis de Fourier del movimiento periódico

Al comienzo de este capítulo explicamos que el movimiento armónico simple es justamente un caso específico del movimiento periódico u oscilatorio. Pero un movimiento periódico general  $P$  está descrito por

$$x = f(t), \quad (12.72)$$

donde la función  $f(t)$  es periódica y tiene la propiedad  $f(t) = f(t + P)$ , como se muestra en la Fig. 12-42. La gráfica de  $f(t)$  se repite a intervalos iguales de  $P$ . Este movimiento general oscilatorio puede expresarse como una combinación de movimientos armónicos simples.

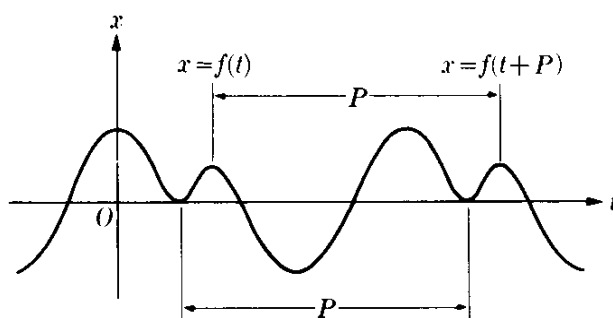


Fig. 12-42. Una función periódica del tiempo.

Consideremos, como ejemplo, el movimiento cuyo desplazamiento está descrito por

$$x = A \sin \omega t + B \sin 2\omega t. \quad (12.73)$$

Esta expresión representa la superposición de dos movimientos armónicos simples de frecuencias angulares  $\omega$  y  $2\omega$  o períodos  $P$  y  $\frac{1}{2}P$ . Obviamente  $x$  es también periódica, y su período será  $P$ . Esto puede verse en el gráfico de la Fig. 12-43, en el cual la curva (a) corresponde a  $\sin \omega t$  y la curva (b) a  $\sin 2\omega t$ . Aunque  $x$  es periódica, no es armónica simple.

Si sumamos a la ec. (12.73) términos de la forma  $\sin 3\omega t$ ,  $\sin 4\omega t$ , ...,  $\sin n\omega t$ , ... de frecuencias angulares  $3\omega$ ,  $4\omega$ , ...,  $n\omega$  y períodos  $P/3$ ,  $P/4$ , ...,  $P/n$ , ..., o si sumamos funciones cosenoidales de las mismas frecuencias, obtendremos un desplazamiento  $x$  que es periódico con período  $P$ . Su forma exacta depende del número de funciones seno y coseno que sumemos, y de sus amplitudes relativas.

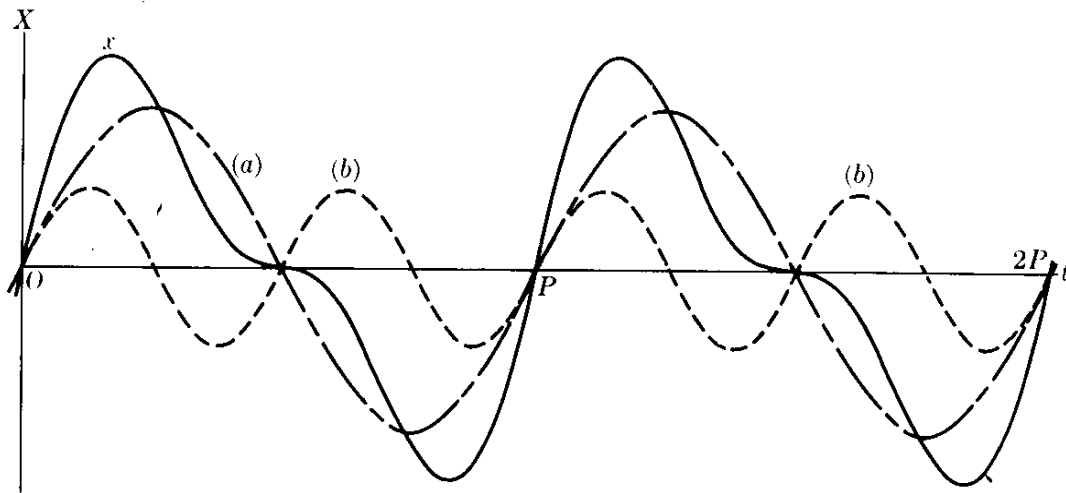


Fig. 12-43. Superposición de dos MAS de frecuencia  $\omega$  y  $2\omega$ .

Así vemos que sumando movimientos armónicos simples cuyas frecuencias son múltiples de una frecuencia fundamental y cuyas amplitudes sean seleccionadas correctamente, podemos obtener casi cualquier función periódica arbitraria. Lo inverso es también valedero, y constituye el *teorema de Fourier*, demostrado en

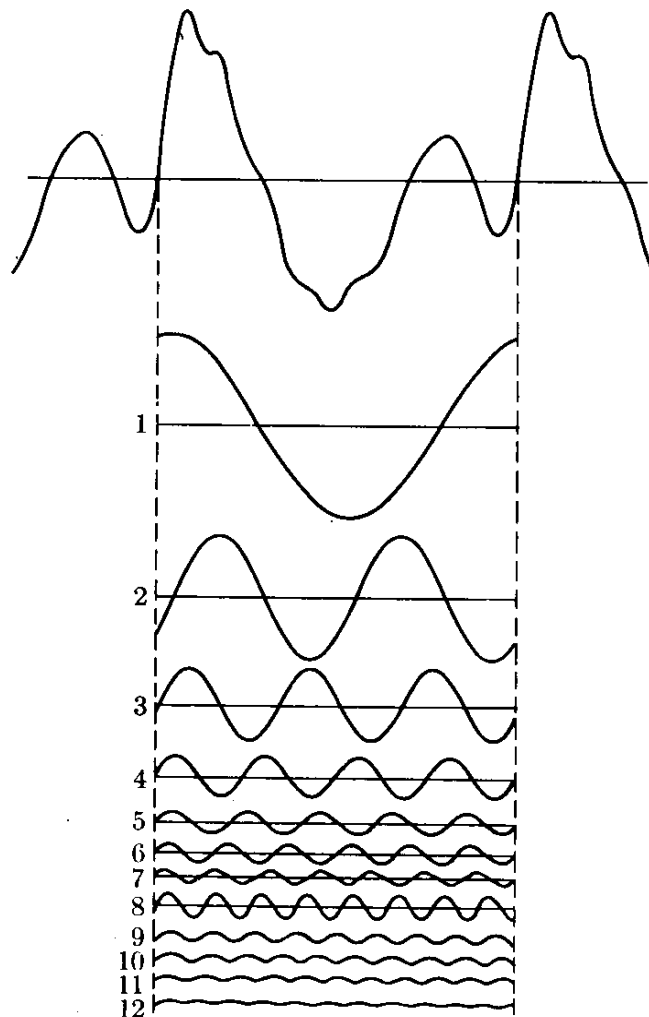


Fig. 12-44. Análisis de Fourier de una función periódica.

textos de matemáticas. El teorema de Fourier establece que una función periódica  $f(t)$  de período  $P = 2\pi/\omega$  puede expresarse como la suma

$$x = f(t) = a_0 + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + \dots + a_n \cos n\omega t \\ + \dots + b_1 \sin \omega t + b_2 \sin 2\omega t + \dots + b_n \sin n\omega t + \dots \quad (12.74)$$

que se conoce como *serie de Fourier*. La frecuencia  $\omega$  se denomina frecuencia *fundamental* y las frecuencias  $2\omega, 3\omega, \dots, n\omega, \dots$  son las *armónicas* o *sobretonos*.

**Nota sobre los coeficientes de Fourier:** Los coeficientes  $a_n$  y  $b_n$  se obtienen mediante las expresiones

$$a_0 = \frac{1}{P} \int_0^P f(t) dt, \quad a_n = \frac{2}{P} \int_0^P f(t) \cos n\omega t dt, \\ b_n = \frac{2}{P} \int_0^P f(t) \sin n\omega t dt, \quad (12.75)$$

que se derivan en textos de matemáticas pero que el estudiante puede fácilmente obtener. Por ejemplo para obtener  $a_n$ , multiplicamos ambos lados de la ec. (12.74) por  $\cos n\omega t$  e integramos, todos los términos dan cero excepto  $a_n$ . Para  $b_n$ , usamos  $\sin n\omega t$ . (Consultar G. B. Thomas, *Cálculo infinitesimal y geometría analítica*, tercera edición. Madrid: Aguilar, 1964, pág. 821).

El teorema de Fourier nos da aun otra razón del por qué de la importancia del movimiento armónico simple. Aplicando el teorema de Fourier, cualquier clase de movimiento periódico puede considerarse como la superposición de movimientos armónicos simples. En la Fig. 12-44 el movimiento periódico correspondiente a la curva mostrada está analizado en sus componentes de Fourier, indicándose las primeras doce armónicas. El teorema de Fourier también explica la cualidad diferente del sonido producido por diferentes instrumentos musicales. La misma nota o tono musical producido por un piano, una guitarra, y un oboe suenan diferente a nuestros oídos a pesar del hecho de que los tonos tienen la misma frecuencia fundamental. La diferencia es debida a la presencia de los armónicos o sobretonos con diferentes amplitudes relativas. En otras palabras, el análisis de Fourier del sonido es diferente para cada instrumento.

El método de Fourier es útil no sólo para analizar curvas periódicas, sino también para analizar curvas no periódicas. En el caso no periódico la curva se extiende desde  $-\infty$  a  $+\infty$ , y podemos suponer que este intervalo cubre un período. La diferencia esencial entre este caso y el explicado previamente es que en lugar de analizar la curva en función de un espectro *discreto* de frecuencias  $\omega, 2\omega, 3\omega, \dots, n\omega, \dots$ , debemos analizarlo en función de un espectro *continuo* de frecuencias. La amplitud correspondiente a cada frecuencia está dada por una función llamada la *transformada de Fourier* de la curva analizada. Ilustraremos un ejemplo, sin entrar en detalles matemáticos.

Supongamos que una curva es descrita por la ecuación  $x = A \sin \omega_0 t$  en el intervalo de tiempo de  $t_1$  a  $t_2$ , siendo cero en todo el resto del tiempo, como se indica en la Fig. 12-45. Físicamente esto corresponde a la situación en la cual

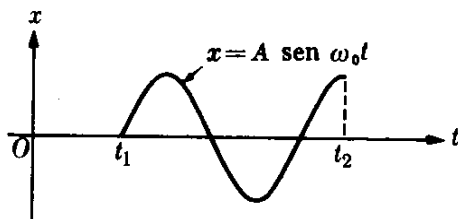


Fig. 12-45. Pulso oscilante limitado.

un cuerpo se hace oscilar súbitamente en  $t = t_1$  y se detiene súbitamente en  $t = t_2$ . Esto se denomina algunas veces un *pulso*.

Si la curva se hubiera extendido desde  $-\infty$  a  $+\infty$ , no habríamos tenido que hacer ningún análisis de Fourier ya que la curva hubiera sido una función armónica de frecuencia  $\omega_0$ . Pero para anular la curva para  $t < t_1$  ó  $t > t_2$ , debemos añadir otras frecuencias, de modo que la serie resultante de Fourier sea cero en aquellas regiones. Luego un pulso finito es la composición de muchas frecuencias, aun si la fuente vibrante tiene sólo una frecuencia bien definida. Puede demostrarse que el perfil de la amplitud como una función de  $\omega$  (o la transformada de Fourier) correspondiente al pulso está dada por la función

$$F(\omega) = \frac{1}{4} \Delta t A \left[ \frac{\sin \frac{1}{2}(\omega - \omega_0) \Delta t}{\frac{1}{2}(\omega - \omega_0) \Delta t} \right],$$

donde  $\Delta t = t_2 - t_1$ . Este perfil de la amplitud se ilustra en la Fig. 12-46. Para  $\omega = \omega_0$ , tenemos  $F(\omega_0) = \frac{1}{4} \Delta t A$ . Debido a que el numerador de la fracción dentro del paréntesis no es nunca mayor que uno, cuando la diferencia  $\omega - \omega_0$  aumenta en valor absoluto, el valor de  $F(\omega)$  disminuye en una forma oscilatoria. El rango de los valores de  $\omega$  para los cuales  $F(\omega)$  es mayor que el 50 % de su valor para  $\omega = \omega_0$  corresponde aproximadamente a la condición

$$|\frac{1}{2}(\omega - \omega_0) \Delta t| < \frac{\pi}{2} \quad \text{ó} \quad -\frac{\pi}{\Delta t} < \omega - \omega_0 < \frac{\pi}{\Delta t}.$$

Así si llamamos  $\Delta\omega = 2\pi/\Delta t$ , llegamos a la conclusión de que las únicas frecuencias cuyas amplitudes son apreciables son aquellas en el rango  $\Delta\omega$  alrededor de  $\omega_0$ , dado por

$$\Delta\omega \Delta t \sim 2\pi. \quad (12.76)$$

Esto indica que cuanto más corto es el intervalo de tiempo, mayor es el rango de frecuencias requeridas para representar exactamente el pulso.

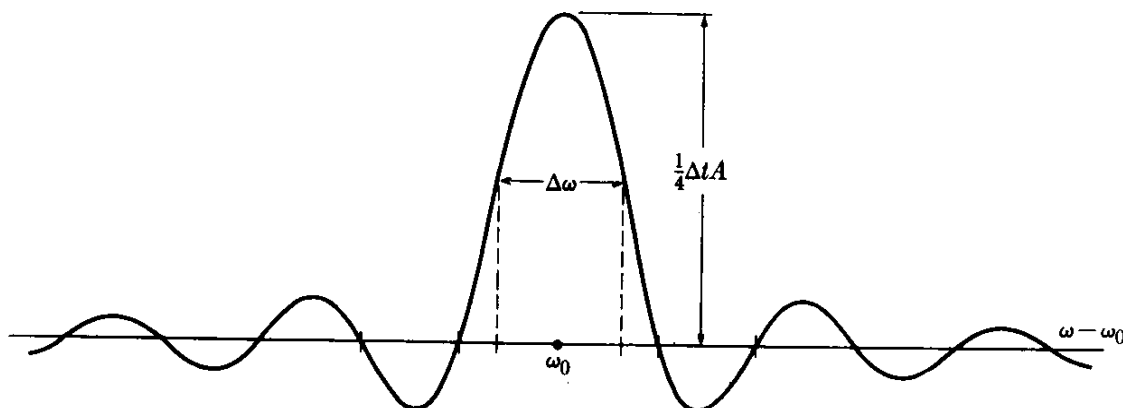


Fig. 12-46. Análisis (o transformada) del pulso de la Fig. 12-45.



## Bibliografía

1. "Restless Harmonic Oscillator", M. Hane, *Am. J. Phys.* **30**, 84 (1962)
2. "An Unusual Method of Solving the Harmonic Oscillator Problem", R. Weinstein ; *Am. J. Phys.* **29**, 830 (1961)
3. "Precision Measurement of Period vs. Amplitude for a Pendulum", M. Smith ; *Am. J. Phys.* **32**, 632 (1964)
4. "Exact Normal Modes of Oscillation of a Linear Chain of Identical Particles", J. Louch ; *Am. J. Phys.* **30**, 585 (1962)
5. *Waves and Oscillations*, R. Waldron. Princeton, N. J. : Van Nostrand, Momentum Books, 1964
6. *Mechanics*, segunda edición, Keit R. Symon. Reading, Mass. : Addison-Wesley, 1960, secs. 2.7 hasta 2.11, 3.10 y 4.10
7. *Physical Mechanics*, tercera edición, por R. B. Lindsay. Princeton, N. J. : Van Nostrand, 1963, cap. 9
8. *Introduction to Engineering Mechanics*, J. Huddleston. Reading, Mass. : Addison-Wesley, 1961, cap. 14
9. *Vector Mechanics*, D. Christie. New York : McGraw-Hill, 1964, caps. 8, 19 y 20
10. *The Feynman Lectures on Physics*, vol. I, R. Feynman, R. Leighton y M. Sands. Reading, Mass. : Addison-Wesley, 1963, caps. 21 hasta el 25, 49 y 50
11. *Source Book in Physics*, W. F. Magie. Cambridge, Mass. : Harvard University Press, 1963, pág. 1, Galileo ; pág. 93, Hooke ; pág. 95, Young

## Problemas

12.1 Una rueda de 30 cm de radio tiene una manigueta en su borde. La rueda gira a  $0,5 \text{ rev s}^{-1}$  con su eje en posición horizontal. Suponiendo que los rayos del sol incidan verticalmente sobre la tierra, la sombra de la manigueta está animada de movimiento armónico simple. Encontrar (a) el periodo de oscilación de la sombra, (b) su frecuencia y (c) su amplitud. (d) Escribir las ecuaciones que expresan su desplazamiento en función del tiempo. Suponer la fase inicial cero.

12.2 Una partícula se mueve con movimiento armónico simple de amplitud 0,10 m ; y periodo 2 s. Hacer una tabla indicando los valores de la elongación, la velocidad y la aceleración para los tiempos siguientes :  $t = 0$ ,  $P/8$ ,  $3P/8$ ,  $P/2$ ,  $5P/8$ ,  $3P/4$ ,  $7P/8$ , y  $P$ . Representar las curvas de elongación, velocidad y aceleración, en función del tiempo.

12.3 Un oscilador armónico simple es descrito por la ecuación

$$x = 4 \sin (0,1t + 0,5)$$

donde todas las cantidades se expresan en unidades MKS. Encontrar (a) la amplitud, el periodo, la frecuencia, y la fase inicial del movimiento, (b) la velocidad y la aceleración, (c) las condiciones iniciales, (d) la posición, velocidad y aceleración para  $t = 5 \text{ s}$ . Hacer un gráfico de la posición, velocidad, y aceleración en función del tiempo.

12.4 Una partícula está situada en el extremo de un vibrador que pasa por su posición de equilibrio con una velocidad de  $2 \text{ m s}^{-1}$ . La amplitud es de  $10^{-3} \text{ m}$ . ¿Cuál es la frecuencia y el periodo del vibrador? Escribir la ecuación que exprese su desplazamiento en función del tiempo.

12.5 Una partícula cuya masa es de 1 g vibra con movimiento armónico simple de 2 mm de amplitud. Su aceleración en el extremo de su recorrido es de  $8,0 \times 10^3 \text{ m s}^{-2}$ . Calcular la frecuencia del movimiento y la velocidad de la partícula cuando pasa por la posición de equilibrio y cuando la elongación es de 1,2 mm. Escribir la ecuación que expresa la fuerza que actúa sobre la partícula en función de la posición y del tiempo.

12.6 Una partícula oscila con una frecuencia de 100 HZ y una amplitud de 3 mm. Calcular su velocidad y aceleración en el centro y los extremos de su recorrido. Escribir la ecuación que expresa la elongación como una función del tiempo. Suponer que la fase inicial es cero.

12.7 Una partícula se mueve con movimiento armónico simple con amplitud de 1,5 m y frecuencia de 100 ciclos por segundo. ¿Cuál es su frecuencia angular? Calcular (a) su velocidad, (b) su aceleración, y (c) su fase, cuando su desplazamiento es de 0,75 m.

12.8 El movimiento de una aguja de una máquina de coser es prácticamente armónico. Si su amplitud es de 0,3 cm y su frecuencia es de  $600 \text{ vib min}^{-1}$ , ¿cuál será la elongación, la velocidad, y la aceleración un treintavo de segundo después que pase por el centro de la trayectoria (a) en un sentido positivo o hacia arriba, (b) en un sentido negativo o hacia abajo?

12.9 Un movimiento armónico simple tiene una amplitud de 8 cm y un período de 4 s. Calcular la velocidad y la aceleración 0,5 s después que la partícula pase por el extremo de su trayectoria.

12.10 En el Problema 12.2, calcular las energías cinética, potencial y total en cada instante, suponiendo que la partícula tiene una masa de 0,5 kg. Observar que la energía total permanece constante. Graficar las curvas de las energías cinética y potencial (a) en función del tiempo, (b) en función de la posición. ¿A qué conclusión llega?

12.11 Una partícula cuya masa es de 0,50 kg se mueve con movimiento armó-

nico simple. Su período es de 0,15 s y la amplitud de su movimiento es de 10 cm. Calcular la aceleración, la fuerza, la energía potencial y la energía cinética cuando la partícula está a 5 cm de la posición de equilibrio.

12.12 Una partícula de masa  $m$  se mueve a lo largo del eje  $X$  bajo la acción de la fuerza  $F = -kx$ . Cuando  $t = 2 \text{ s}$ , la partícula pasa a través del origen, y cuando  $t = 4 \text{ s}$  su velocidad es de  $4 \text{ m s}^{-1}$ . Encontrar la ecuación de la elongación y demostrar que la amplitud del movimiento será  $32\sqrt{2}/\pi \text{ m}$  si el período de oscilación es de 16 s.

12.13 Una plancha horizontal oscila con movimiento armónico simple con una amplitud de 1,5 m y una frecuencia de 15 oscilaciones por minuto. Calcular el valor mínimo del coeficiente de fricción a fin de que un cuerpo colocado sobre la plancha no resbale cuando la plancha se mueve.

12.14 Cuando un hombre de 60 kg se introduce en un auto, el centro de gravedad del auto baja 0,3 cm. ¿Cuál es la constante elástica de los muelles del auto? Suponiendo que la masa del auto es de 500 kg, ¿cuál es su período de vibración cuando está vacío y cuando el hombre está dentro?

12.15 Un bloque de madera cuya densidad con respecto al agua es  $\rho$  tiene dimensiones  $a$ ,  $b$  y  $c$ . Mientras está flotando en el agua con el lado  $a$  en la posición vertical, se empuja hacia abajo y se suelta. Encontrar el período de la oscilación resultante.

12.16 Una partícula se mueve de modo que sus coordenadas en función del tiempo están dadas por  $x = v_0 t$ ,  $y = y_0 \sin \omega t$ . (a) Representar  $x$  e  $y$  en función del tiempo  $t$  (b) Representar la trayectoria de la partícula. (c) ¿Qué fuerza es necesaria para producir este movimiento? (d) Encontrar las magnitudes de la velocidad y la aceleración en función del tiempo.

12.17 Encontrar, para un movimiento armónico simple, los valores de  $\langle \bar{x} \rangle$  y  $\langle \bar{x}^2 \rangle$ , donde los promedios se refieren al tiempo.

12.18 Encontrar los valores promedio de las energías cinética y potencial en un movimiento armónico simple con relación (a) al tiempo, (b) a la posición.

12.19 El período de un péndulo es de 3 s. ¿Cuál será su período si su longitud (a) aumenta, (b) disminuye en un 60 %?

12.20 El péndulo de un reloj tiene un período de 2 s cuando  $g = 9,80 \text{ m s}^{-2}$ . Si la longitud se aumenta en 1 mm. ¿Cuánto se habrá atrasado el reloj después de 24 horas?

12.21 ¿Cuánto se habrá atrasado el reloj del problema anterior después de 24 horas si se le coloca en un lugar donde  $g = 9,75 \text{ m s}^{-2}$  sin cambiar la longitud del péndulo? ¿Cuál debe ser la longitud correcta del péndulo a fin de mantener el tiempo correcto en la nueva posición?

12.22 ¿Cuál debía ser el porcentaje de cambio en la longitud de un péndulo a fin de que tenga el mismo período cuando se le desplaza de un lugar en el cual  $g = 9,8 \text{ m s}^{-2}$  a un lugar donde  $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$ ?

12.23 Encontrar el valor de la amplitud de un péndulo simple de modo que la ec. (12.15) del período sea correcta en un 2 %.

12.24 Un péndulo cuya longitud es de 2 m está situado en un lugar en el cual  $g = 9,8 \text{ m s}^{-2}$ . El péndulo oscila con una amplitud de  $2^\circ$ . Expresar, en función del tiempo, (a) su desplazamiento angular, (b) su velocidad angular, (c) su aceleración angular, (d) su velocidad lineal, (e) su aceleración centrípeta, y (f) la tensión en la cuerda si la masa en su extremo es de 1 kg.

12.25 Un péndulo de 1,00 m de largo y cuya masa es de 0,6 kg se separa de modo que está situado a 4 cm sobre la altura de equilibrio. Expresar, en función de la altura del péndulo, la fuerza tangencial a su trayectoria, su aceleración tangencial, su velocidad, y su desplazamiento angular cuando se le permite oscilar. Encontrar los valores numéricos correspondientes al punto de su amplitud máxima y al punto más bajo de la trayectoria del péndulo. Encontrar su amplitud angular.

12.26 El péndulo del problema anterior se coloca de modo que forma un ángulo de  $30^\circ$  con la vertical y luego se suelta. ¿Puede su movimiento considerarse armónico simple? Calcular (a) la aceleración, (b) la velocidad, y (c) la tensión en la cuerda cuando su desplazamiento angular es de  $15^\circ$  y cuando pasa por el punto de equilibrio.

12.27 Estimar el orden relativo de magnitud de los dos primeros términos correctivos en la serie del período de un péndulo simple si la amplitud es (a)  $10^\circ$  (b)  $30^\circ$ .

12.28. Refiriéndonos al péndulo del ejemplo 12.7, encontrar el máximo valor de  $R/l$  de modo que el término correctivo en la expresión del péndulo no represente más que el 1 %.

12.29 Una varilla de 1 m de largo está suspendida de uno de sus extremos de tal manera que constituye un péndulo compuesto. Encontrar el período y la longitud del péndulo simple equivalente. Encontrar el período de oscilación si la varilla se cuelga de un eje situado a una distancia de uno de sus extremos igual a la longitud del péndulo equivalente previamente encontrada.

12.30 Un disco sólido de radio  $R$  puede colgarse de un eje horizontal a una distancia  $h$  de su centro. (a) Encontrar la longitud del péndulo simple equivalente. (b) Encontrar la posición del eje para el cual el período es un mínimo. (c) Representar el período en función de  $h$ .

12.31 Una varilla de longitud  $L$  oscila con respecto a un eje horizontal que pasa por un extremo. Un cuerpo de igual masa que la varilla está situado sobre la varilla a una distancia  $h$  del eje. (a) Obtener el período del sistema en función de  $h$  y de  $L$ . (b) ¿Hay algún valor de  $h$  para el cual el período es el mismo como si no hubiera masa?

12.32 Un cubo sólido, de lado  $a$ , puede oscilar alrededor de un eje horizontal coincidente con un borde. Encontrar su período.

12.33 Un péndulo de torsión consiste de un bloque rectangular de madera de

8 cm  $\times$  12 cm  $\times$  3 cm con una masa de 0,3 kg, suspendido por medio de un alambre que pasa a través de su centro y de tal modo que el lado más corto es vertical. El período de oscilación es de 2,4 s. ¿Cuál es la constante de torsión  $k$  del alambre?

12.34 Refiriéndonos a la Fig. 12-11, demostrar que si  $K_c$  es el radio de giro con respecto a un eje paralelo que pasa por el centro de masa de un péndulo compuesto, la longitud del péndulo simple equivalente es  $l = (K_c^2/b) + b$ . [Sugerencia: Utilizar el teorema de Steiner para relacionar el radio de giro con el centro de masa.]

12.35. Usando el resultado del problema precedente, demostrar que la longitud del péndulo simple equivalente a un péndulo compuesto (sección 12.6) es la misma que la distancia entre el centro de percusión (Problema 10.28) y el punto de suspensión si el golpe se aplica en el punto  $C$ .

12.36 Demostrar que si el péndulo compuesto oscila alrededor de  $O'$  (Fig. 12-11) en lugar de  $O$ , su período es el mismo y la longitud del péndulo simple equivalente permanece inalterable.

12.37 Encontrar la ecuación del movimiento resultante de la superposición de dos movimientos armónicos simples paralelos cuyas ecuaciones son  $x_1 = 6 \text{ sen } 2t$  y  $x_2 = 8 \text{ sen } (2t + \alpha)$ , si  $\alpha = 0, \pi/2$  y  $\pi$ . Hacer un gráfico de cada movimiento y del movimiento resultante en cada caso.

12.38 Encontrar la ecuación resultante de la superposición de dos movimientos armónicos simples paralelos cuyas ecuaciones son :

$$x_1 = 2 \text{ sen } (\omega t + \pi/3)$$

y

$$x_2 = 3 \text{ sen } (\omega t + \pi/2)$$

Hacer un gráfico de cada movimiento y del movimiento resultante. Representar sus respectivos vectores rotantes.

12.39 Encontrar la ecuación de la trayectoria del movimiento resultante de la combinación de dos movimientos armónicos simples perpendiculares cuyas ecuaciones son  $x = 4 \text{ sen } \omega t$ , e  $y = 3 \text{ sen } (\omega t + \alpha)$ , cuando  $\alpha = 0, \pi/2$ , y  $\pi$ . Hacer un gráfico de la trayectoria de la partícula para cada caso y señalar el sentido en el cual viaja la partícula.

12.40 Eliminando la dependencia del tiempo entre las ec. (12.30) y (12.31) demostrar que la ecuación de la ecuación de la trayectoria es

$$x^2/A^2 + y^2/B^2 - 2xy \cos \delta / AB = \text{sen}^2 \delta.$$

Demostrar que ésta es la ecuación de una elipse, con ejes haciendo un ángulo con respecto a los ejes  $X - Y$ . [Sugerencia: Cualquier ecuación de la forma  $ax^2 + bxy + cy^2 = k$  es una elipse si  $b^2 - 4ac < 0$ . Ver G. B., *Cálculo infinitesimal y geometría analítica*, sec. 9-10.]

12.41 Demostrar que la elipse del problema 12.40 es recorrida en el sentido de las agujas del reloj o en el sentido contrario dependiendo de si  $0 < \delta < \pi$  ó  $\pi < \delta < 2\pi$ .

12.42 Encontrar la ecuación de la trayectoria resultante de una partícula sometida a dos movimientos armónicos simples perpendiculares, si  $\omega_1/\omega_2 = 1/2$  y  $\alpha = 0, \pi/3$  y  $\pi/2$ . En cada caso representar la trayectoria y mostrar el sentido en el cual es recorrida.

12.43 Demostrar por sustitución directa en la ecuación de movimiento (12.37) que las expresiones (12.38) son las oscilaciones normales, siempre que  $\omega = \sqrt{k_1/m_1}$ . Demostrar lo mismo para las oscilaciones normales (12.40) si  $\omega = \sqrt{(2k_1 + k)/m_1}$ .

12.44 La energía potencial de interacción entre dos átomos en una molécula diatómica puede expresarse con buena aproximación por el potencial de Morse  $E(r) = D[1 - e^{-a(r-r_0)}]^2$ , siendo  $D$ ,  $a$ , y  $r_0$  constantes características de la molécula. (a) Hacer un gráfico del potencial y encontrar la posición de equilibrio. (b) Hacer un desarrollo en serie de potencias de  $r - r_0$  y determinar la relación del primer término anarmónico al primer término armónico. (c) Encontrar, en función de  $D$  y  $a$ , la frecuencia de la vibración relativa de dos átomos a baja

energía. [Sugerencia: Usar la ec. (M.23) para desarrollar el exponente.]

12.45 Determinar el valor de  $A$  y  $\alpha$  en función de  $x_0$  y  $v_0$  para un oscilador amortiguado. Aplicar la solución para el caso cuando  $v_0 = 0$ .

12.46 Verificar, por sustitución directa, que cuando  $\gamma > \omega_0$ , la solución de la ec. (12.52) para un oscilador amortiguado es  $x = Ae^{-(\gamma + \beta)t} + Be^{-(\gamma - \beta)t}$ , donde  $\beta = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ . Encontrar los valores de  $A$  y  $B$  si  $t = 0$ ,  $x = x_0$  y  $v = 0$ . Graficar en función de  $t$ .

12.47 ¿Qué sucede a la solución de la ec. (12.54) cuando  $\gamma = \omega_0$ ? Verificar, por sustitución directa, que en este caso la solución general de la ec. (12.52) es  $x = (A + Bt)e^{-\gamma t}$ . Se dice entonces que el oscilador está *amortiguado críticamente*. Encontrar  $A$  y  $B$  si, cuando  $t = 0$ ,  $x = x_0$ , y  $v = 0$ . Representar  $x$  en función de  $t$ . ¿Qué diferencia encuentra Ud. entre este problema y el precedente?

12.48 Demostrar que en el movimiento oscilatorio amortiguado la velocidad está dada por

$$v = A'e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \alpha + \delta),$$

donde  $A' = A\omega_0$  y  $\tan \delta = -\omega/\gamma$ .

12.49 Un péndulo simple tiene un período de 2 s y una amplitud de  $2^\circ$ . Después de 10 oscilaciones completas su amplitud ha sido reducida a  $1.5^\circ$ . Encontrar la constante de amortiguamiento  $\gamma$ .

12.50 Encontrar los valores límites de la amplitud y la fase de un oscilador forzado con amortiguamiento cuando (a)  $\omega_f$  es mucho menor que  $\omega_0$  y (b)  $\omega_f$  es mucho mayor que  $\omega_0$ . Determinar los factores dominantes en cada caso.

12.51 Demostrar que en el oscilador armónico forzado con amortiguamiento, la potencia promedio de la fuerza aplicada es igual a la potencia promedio disipada por la fuerza de amortiguamiento.

12.52 Refiriéndose al péndulo del Problema 12.49, calcular la potencia necesaria para mantener las oscilaciones con amplitud constante. La masa del péndulo es de 1 kg.

12.53 En el caso de un oscilador amortiguado, la cantidad  $\tau = 1/2\gamma$  se denomina el *tiempo de relajación*. (a) Verificar que tiene unidades de tiempo. (b) ¿En cuánto ha variado la amplitud del oscilador después de un tiempo  $\tau$ ? (c) Expresar, como una función de  $\tau$ , el tiempo necesario para que la amplitud se reduzca a la mitad de su valor inicial. (d) ¿Cuáles son los valores de la amplitud después de tiempos iguales a dos, tres veces, etc., el valor obtenido en (c)?

12.54 Suponer que para un oscilador amortiguado  $\tau$  es muy pequeño comparado con  $\omega_0$ , de modo que la amplitud permanece esencialmente constante durante una oscilación. (a) Verificar que la energía del oscilador amortiguado puede escribirse en la forma  $E = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 e^{-2\gamma t}$ . (b) La potencia promedio disipada será definida por  $P = -dE/dt$ . Demostrar que  $P = 2\gamma E = E/\tau$ . (c) Demostrar que esta disipación de potencia es igual al trabajo promedio hecho por la fuerza de amortiguamiento por unidad de tiempo.

12.55 Demostrar que para un oscilador forzado  $\bar{P} = \frac{1}{2}(P)_{\text{res}}$  cuando la reactancia es igual a la resistencia  $X = \pm R$  ó  $\omega_f^2 - \omega_0^2 = \pm 2\gamma\omega_f$ . La diferencia  $(\Delta\omega)_{1/2}$  entre los dos valores de  $\omega_f$  para esta situación se denomina *ancho de la banda* del oscilador y a la relación  $Q = \omega/(\Delta\omega)_{1/2}$  se denomina el *valor Q* del oscilador. Demostrar que para pequeño amortiguamiento  $(\Delta\omega)_{1/2} = 2\gamma$  y por lo tanto  $Q = \omega_0/2\gamma$ . [Sugerencia: usar las ec. (12.70) y (12.71) con los valores apropiados de  $R$  y de  $Z$ .]

12.56 (a) Encontrar los valores promedio de las energías cinética y potencial de las oscilaciones forzadas de un oscilador amortiguado. (b) Obtener la relación de la suma de estas energías y el trabajo hecho por la fuerza aplicada en un período. Este es un factor útil para indicar el funcionamiento de un oscilador. Demostrar que para pequeño amortiguamiento es igual a  $Q/2\tau$ . (Recordar el Problema 12.55).

12.57 Escribir la ecuación del movimiento de un oscilador armónico simple sin amortiguamiento al cual se le aplica

la fuerza  $F = F_0 \cos \omega_f t$ . Verificar que su solución es

$$x = [F_0/m(\omega_0^2 - \omega_f^2)] \cos \omega_f t.$$

Discutir la resonancia en este caso.

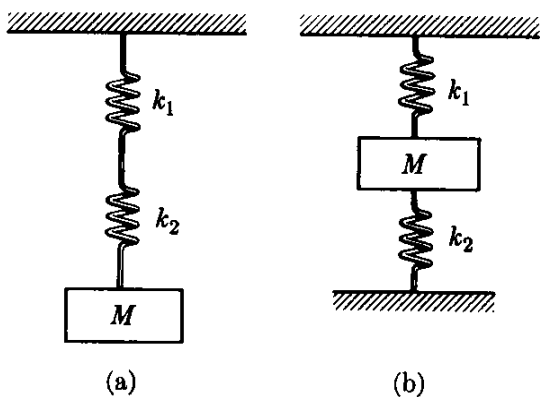


Figura 12-47

12.58 Los módulos de elasticidad de los resortes en la Fig. 12-47 son, respectivamente  $k_1$  y  $k_2$ . Calcular la constante  $k$  del sistema cuando los dos resortes están conectados como en (a) y (b).

12.59 Una partícula se desliza hacia adelante y hacia atrás entre dos planos inclinados sin fricción. (a) Encontrar el período del movimiento si  $h$  es la altura inicial. (b) ¿Es el movimiento oscilatorio? ¿Es armónico simple?

12.60 Una partícula de masa  $m$  situada en una mesa horizontal lisa (Fig. 12-49) está sostenida por dos alambres estirados de longitud  $l_0$  cuyos extremos están fijos en  $P_1$  y  $P_2$ . La tensión de los alambres es  $T$ . Si la partícula se desplaza lateralmente una cantidad  $x_0$  pequeña comparada con la longitud de los alambres, y luego se suelta, determinar el movimiento subsiguiente. Encontrar su frecuencia de oscilación y escribir la ecuación de su movimiento. Suponer que la longitud de los alambres y la tensión permanecen inalterables.

12.61 La partícula de la Fig. 12-50 se encuentra bajo condiciones similares que en el problema anterior, pero está sostenida por dos resortes, cada uno de constante elástica  $k$  y longitud normal  $l_0$ . Obtener la misma información solicitada



Figura 12-48

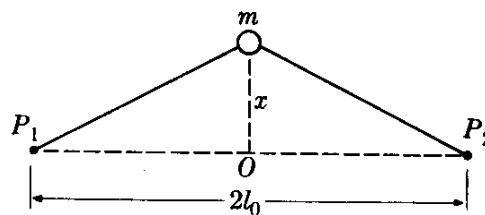


Figura 12-49

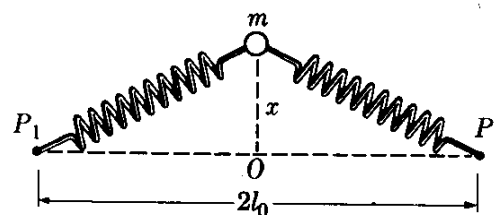


Figura 12-50

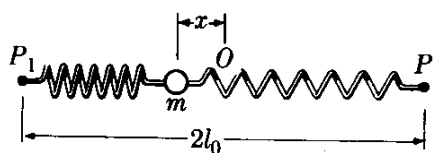


Figura 12-51

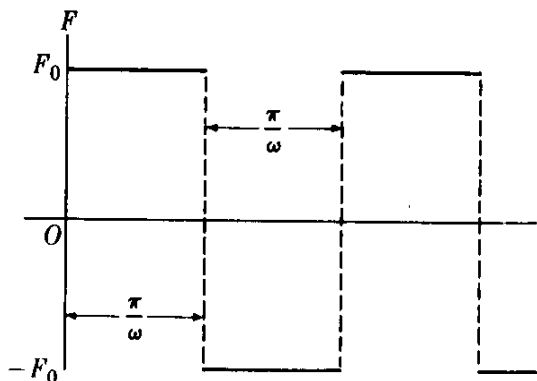


Figura 12-52

en el problema anterior. Nótese que debemos tener en cuenta el alargamiento de los resortes.

12.62 Repetir el problema anterior, suponiendo que el desplazamiento es a lo

largo de la línea  $P_1P_2$ , como en la figura 12-51.

12.63 Una partícula de masa  $m$  está sometida a la fuerza mostrada en la figura 12-52 llamada una *onda cuadrada*; i.e. la fuerza es constante en magnitud pero invierte su dirección a intervalos regulares de  $\pi/\omega$ . Esta fuerza puede representarse por la Serie de Fourier:

$$F = F_0(4/\pi)(\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \dots).$$

(a) Escribir la ecuación de movimiento de la partícula. (b) Verificar, por sustitución directa que su solución puede escribirse como  $x = a + bt + A \sin \omega t + B \sin 3\omega t + C \sin 5\omega t + \dots$  donde  $a$  y  $b$  son constantes arbitrarias, y determinar los valores de los coeficientes  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , ..., de modo que la ecuación del movimiento se satisfaga.

12.64 Un oscilador armónico simple de frecuencia natural  $\omega_0$  está sometido a la misma fuerza del problema precedente. (a) Escribir su ecuación de movimiento. (b) Verificar, por sustitución directa que su solución puede escribirse como  $x = a \sin(\omega_0 t + \alpha) + A \sin \omega t + B \sin 3\omega t + C \sin 5\omega t + \dots$ , donde  $a$  y  $\alpha$  son constantes arbitrarias, y determinar los valores de los coeficientes  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , ..., de modo que las ecuaciones de movimiento se satisfagan.

12.65 Demostrar que la energía potencial de un péndulo puede escribirse como  $E_p = 2mgl \sin^2 \frac{1}{2}\theta$ . Aplicando la ec. (12.13) demostrar que

$$P = \sqrt{l/g} \int_0^{\theta_0} d\theta / \sqrt{\sin^2 \frac{1}{2}\theta_0 - \sin^2 \frac{1}{2}\theta}.$$

Esta integral no puede evaluarse en términos de funciones elementales. En la integral hacer la sustitución  $\sin \frac{1}{2}\theta = \sin \frac{1}{2}\theta_0 \sin \Psi$ , donde  $\Psi$  es una nueva variable que varía de 0 a  $\pi/2$  cuando  $\theta$  varía entre 0 y  $\theta_0$ . En seguida hacer un desarrollo en series del radical resultante, usando la ec. (M.22), e integrar para obtener el desarrollo en serie de  $P$  dado en la sección 12.5.

12.66 Para el movimiento armónico simple  $E_p = \frac{1}{2} kx^2$ . (a) Usar la ec. (12.13) para obtener el período del MAS

y verificar que el resultado concuerda con la ec. (12.7). (b) Demostrar que la ec. (8.34), con  $x_0 = 0$  da

$$\arcsen(x/A) = \omega t + \alpha,$$

donde  $A^2 = 2E/k$ . Verificar que concuerda con la ec. (12.1).

12.67 Considerar una partícula oscilante bajo la influencia del potencial anarmónico  $E_p(x) = \frac{1}{2} kx^2 - \frac{1}{4} ax^4$ , donde  $a$  es positiva y mucho menor que  $k$ . (a) Hacer un gráfico esquemático de  $E_p(x)$ . ¿Es la curva simétrica alrededor del valor  $x = 0$ ? En vista de la respuesta anterior, ¿en qué dirección se desplaza el centro de oscilación a medida que aumenta la energía? Espera Ud. que  $x$  promedio sea cero. (b) Obtener la fuerza como una función de  $x$  y hacer un gráfico esquemático. ¿Cuál es el efecto del término anarmónico sobre la fuerza?

12.68 Refiriéndonos al problema precedente, (a) escribir la ecuación del movimiento. (b) Probar como solución

$$x = A \cos \omega t + B \cos 2\omega t + x_1,$$

donde los dos últimos términos son los resultados del término anarmónico. (c) ¿Puede esto ser una solución exacta? Despreciando todos los términos que involucran productos de  $A$  y  $B$  o potencias de  $B$  mayores que la primera, demostrar que  $\omega = \omega_0$ ,  $x_1 = \alpha A^2/2\omega_0^2$  y  $B = -\alpha A^2/6\omega_0^2$ , donde  $\omega_0^2 = k/m$  y  $\alpha = a/m$ . [Sugerencia: Usar la relación trigonométrica  $\cos^2 \omega t = 1/2(1 + \cos 2\omega t)$ .]

12.69 Repetir el Problema 12.67. Suponiendo que la energía potencial es

$$E_p(x) = \frac{1}{2} kx^2 - \frac{1}{4} ax^4.$$

Como antes,  $a$  es mucho menor que  $k$ .

12.70 Refiriéndonos al problema precedente, (a) escribir la ecuación del movimiento. (b) Probar como solución  $x = A \sin \omega t + B \sin 3\omega t$  donde el último término es el resultado del término anarmónico. (c) ¿Puede ésta ser una solución exacta? (d) Despreciando todos los términos que contengan productos de  $A$  y  $B$  o potencias de  $B$  mayores que la primera, demostrar que  $\omega_0^2 = 3\alpha A^2/4yB = \alpha A^2/4(9\omega^2 - \omega_0^2)$  donde  $\omega_0$  y  $\alpha$  tienen

la misma definición que en el problema 12.68. [*Sugerencia:* Usar la relación trigonométrica  $\sin^3 \omega t = \frac{3}{4} \sin \omega t - \frac{1}{4} \sin 3 \omega t$ .]

12.71 Refiriéndonos a los Problemas 12.68 y 12.70, podemos encontrar los valores  $\bar{x}$  y  $(\bar{x}^2)$ , donde los promedios se refieren al tiempo y comparar los resultados para el oscilador armónico simple. (Recordar el Problema 12.71).

12.72 Aplicar los resultados del problema 12.70 al movimiento de un péndulo simple reemplazando  $\sin \theta$  en la expresión de  $F_T$  dada al comienzo de la sección 12.5, por sus dos primeros términos en su desarrollo de serie (M.25) obteniendo  $\omega \approx \omega_0^3(1 - \theta_0^2/16)$  y  $\theta = \theta_0 \sin \omega t + (\theta_0/192) \sin 3\omega t$ . Del valor de  $\omega$ , obtener directamente el resultado del período  $P$  dado al final de la sección 12.5.