计算机图形学学科研讨会　　2005　杭州

几何造型中的计算与逼近问题

王国瑾

浙江大学数学系

CAD&CG 国家重点实验室

几何造型

——计算机图形学的重要内容之一

本次会议的一个重要议题:

- 几何造型研究——现状如何?
- 几何造型研究——往何处去?

从几何造型的相关术语谈起

- 几　何　设　计
- 几　何　表　示
- 几　何　计　算
- 几　何　逼　近
- 几　何　处　理

- 几何设计的核心问题

  ——几何表示 几何造型

- 几何造型的基本技术

  ——几何计算 几何逼近

- 几何计算

  ——几何特征量化 几何关系判断

  几何形式转化 数字几何处理

- 几何逼近

  ——近似几何表示 区域几何表示

报 告 内 容

(一) 几何造型的研究现状与趋势

(二) 几何计算与几何逼近的研究进展

(一) 几何造型研究的现状与趋势

- 从国内外专业期刊看研究现状

  CAGD, CAD, JCST, 软件学报,

  计算机学报，计算机辅助设计与图形学学报

- 从国内外专业会议看研究趋势

  SIAM C on GDC, IMA C on MS, GMP,

  CAD/CG, KCJ C on GVC, SSS, GDC,

  Siggraph, Eurograph, Pacific Grapgics, China Graph

国际权威期刊CAGD

- 近三年及今年一季度的论文内容分析
- 近三年及今年一季度的完成单位统计

表1.CAGD论文内容的分类统计

年　　份	2002	2003	2004	2005	2002-2005
论文总篇数	45	38	51	14	148
参数曲线与曲面	25	21	26	7	79
代数与三角样条	3	5	4	4	16
点集插值与逼近	8	3	6	2	19
网格与细分曲面	8	6	7		21
区间曲线与曲面	1		3		4
点云曲线与曲面			1		1
代数曲线与曲面		1		1	2
立体造型运动学		2	4		6

表2. CAGD论文“参数曲线曲面”内容的分 类 统 计

年　　份	2002	2003	2004	2005	2002-2005
论文总篇数	25	21	26	7	79
曲线曲面表示	12	5	8	5	30
参数化技术	2	3	3		8
隐式化技术	4		1		5
光顺/形状控制		1	4	1	6
连续拼接	2				2
降阶逼近	2	1	2	1	6
等距变换	2	1			3
几何量计算	1	9	6		16
极小/可展曲面		1	2		3

表3. CAGD论文的主要完成国家统计

年　　份	2002	2003	2004	2005	2002-2005
论文总篇数	45	38	51	14	148
美国	10	6	15	2	33
中国	7	7	11	3	28
德国	4	5	7	1	17
西班牙	7	2	4	3	16
韩国	3	2	5	2	12
英国	3	1	1	1	6
奥地利		2	4		6
加拿大	4	2			6
印度	2	3			5
匈牙利	3	1			4

表4. CAGD论文的我国完成单位统计

年　　份	2002	2003	2004	2005	2002-2005
论文总篇数	45	38	51	14	148
中国总篇数	7	7	11	3	28
中国占比例	16%	18%	22%	21%	19%
浙江大学	4	3	4		11
中国科技大学	1	2	2		5
清华大学			1	3	4
中科院系统所			2		2
中南大学	1		1		2
山东理工大学		1	1		2
山东大学	1				1
香港大学		1			1

从国内外专业会议看研究趋势

- 美国工业与应用数学协会的几何设计与计算会议 **(SIAM Conference on GDC)**

1983年开始, 两年举行一次. 2003年在美国Seattle召开.

2005年10月30日－11月3日将在美国亚利桑那州Phoenix 召开

SIAM on GDC’05 目的

- 让学术界、工业界和政府部门研究人员讨论几何在设计、制造及物理现象表示与分析等问题中的数学与计算问题

- 引起对应用计算与数学方法去解决实际问题或对几何现象在医学、生物学、建筑、艺术等领域的应用感兴趣的人们的关注.

SIAM on GDC'05主题

- 代数及微分几何, 计算几何, 计算拓扑
- 计算机辅助设计与制造, 计算机视觉与基于图象的造型
- 计算机图形与可视化, 曲线与曲面设计, 动力学与机器人
- 网格生成与处理, 多分辨率方法
- 逆向工程, 散乱数据造型与样条
- 工程、医学、建筑及其他领域的应用等

从国内外专业会议看研究趋势

● 英国数学及其应用学会的<u>曲面数学会议</u>
(IMA Conference on MS)

每两年举行一次．2003年在英国利兹召开第10届会议

2005年9月5－7日将在英国召开第11届会议.

IMA Conference on MS’ 05的出发点

- 构造、表示与处理复杂曲面的基于计算机的方法需要曲面数学
- 计算机辅助设计与制造、计算机视觉及零件检查中要求曲面描述
- 曲面描述引起图形信息系统、多媒体、科学与医学的许多其他领域的兴趣.

IMA Conference on MS' 05的主题

- 曲面表示、处理、逼近、设计及应用，重点是计算方法及数学原理
- 综述曲面数学某方面的技术情况
- 涉及曲面数学实际应用并能指示研究方向

从国内外专业会议看研究趋势

- **几何造型与处理国际会议(GMP)**

每两年举行一次. 00香港, 02东京, 04北京, 06美国

GMP’04

特邀演讲:

- 曲线分形, 图象研究综述, 偏微方程曲面处理

15个国家投寄论文133篇, 录用报告31篇:

- 曲线与曲面6篇, 插值与逼近4篇, 几何造型3篇
- 网格编辑与处理4篇, 网格与细分3篇
- 三维数据几何处理3篇, 立体与曲面重建4篇
- 逆向工程及工业应用4篇

从国内外专业会议看研究趋势

- **CAD&CG国际会议(CAD/CG)**

<u>CAD/CG’05</u>　2005年12月, 香港

主题:

- 几何与立体造型、基于图象的造型与可视化、CAD数据库及数据交换
- 设计计算, 工程公差、网格、逆向工程、计算几何应用、计算机图形

从国内外专业会议看研究趋势

- 中韩双边第一届几何与可视计算会议

(Korea and China Joint C on Geometric and Visual Computing)

2005年8月韩国釜山(Busan)

会议内容：

- 几何造型、曲面重建、数字几何处理
- 网格生成、计算几何、反向工程
- CAD在纳米及生物技术中的应用
- 产品数据交换、虚拟制造、绘制技术
- 基于web的协同设计

从国内外专业会议看研究趋势

- **中国SIAM几何设计与计算学术会议(GDC)**
<u>**GDC'02 (青岛)**</u>

投稿论文104篇, 74篇收入论文集:

- 自由曲线与曲面33篇, 计算几何10篇
- CAD/CAM技术及应用9篇
- 基于图象的建模和绘制7篇
- 网格的生成与处理8篇, 反向工程4篇
- 三维造型系统新技术3篇

从国内外专业会议看研究趋势

● 中国SIAM 几何设计与计算学术会议(GDC)

<u>**GDC'05 (合肥)**</u>

特邀演讲12篇:

- 代数样条曲面的近似参数化, 双三次Bézier曲面插值
- 网格曲面编辑，网格计算与优化，计算几何
- 几何定理证明与发现的自动化,数字几何中频谱分析
- 几何逼近与计算，点云曲线的B样条拟合
- 由常微分方程解产生的分段函数
- 三维数字化技术，T网格上的样条曲面

从国内外专业会议看研究趋势

- 中国SIAM 几何设计与计算学术会议(GDC)

<u>GDC'05 (合肥)</u>

投稿论文132篇, 36篇推荐到期刊, 43篇收入论文集:

- 自由曲线与曲面24篇, 网格/细分与点曲面15篇
- 插值与逼近14篇, 计算机辅助设计4篇
- 计算机图象处理11篇, 图形学算法及应用6篇

从国内外专业会议看研究趋势

图形会议部分有关几何造型,也可看出研究趋势

- 美国图形会议(Siggraph)
- 欧洲图形会议(Eurograph)
- 太平洋图形会议(Pacific Grapgics)
  02(北京), 03(加拿大), 04(北京), 05(澳门)
- 中国图形会议(China Graph)
  02(北京), 03(澳门), 04(西安).

几何造型研究 现状分析之一

- 几何造型的主流研究内容与方向, 近几年没有明显变化，仍集中在传统的曲面表示与计算
- 参数曲面的表示、逼近、计算, 占研究总量一半以上
- 传统的样条和插值, 占研究总量四分之一左右
- 新兴的网格、点云、细分曲面后来居上, 研究内容不断增长，但只限于研究总量的六分之一
- 这三者构成了几何造型的研究主体

几何造型研究 现状分析之一(续)

原因分析：

- 国内外设计系统仍是以NURBS为主，且仍有数学模型或方法问题亟需解决

- 网格、细分曲面虽有优点，但极限曲面位置不确定，只能为艺术造型与动画设计所用，离机械产品设计的目标有距离

几何造型研究　现状分析之二

- 参数曲面表示、逼近、计算，内容构成有了变化
- 精确表示法(含隐式化表示)与重新参数化

  ——减少到了研究总量的一半左右
- 几何处理、几何逼近、几何量近似计算

  ——增加到了研究总量的一半左右
- 曲面求交与拼接已不再是研究热点
- 传统微分几何的测地线计算、曲率计算、可展性质、极小性质

  ——渐受重视，催生着计算微分几何学科建立

几何造型研究　现状分析之三

- 样条与点集插值方面，两个新动向：

——三角样条与代数样条的融合形成了一时的热点

——大规模点云数据的拟合及逼近，随着数字几何处理的普及，成为新的热点，且较多采用径向基函数法及极小能量法

几何造型研究 现状分析之四

- 我国学者在权威期刊CAGD的几何造型论文
  ——有逐年增加之势

- 近年中达到了国际总量的五分之一左右
  ——紧跟美国, 占世界第二

- 我国学者在计算机图形学的研究表现
  ——其国际地位比几何造型要稍逊一筹

几何造型研究　趋势分析之一

- 关注代数、微分几何与CAGD的交叉及融合

- 大力开发

  ——多元样条的代数性质与几何构造

  ——T样条维数定理及实用算法

  ——网格曲面生成与优化算法

- 促进

  ——计算代数几何、计算微分几何、离散微分几何、计算拓扑等的建立与发展，使几何造型有更深厚扎实的理论基础

几何造型研究　趋势分析之二

- 积极开拓
  ——点云数据的获取与最佳参数化技术
  ——网格曲面、细分曲面的插值定位技术
  ——细分曲面的分析性质与应用范围

- 建立
  ——数字几何处理的全新理论框架及整套实用算法

几何造型研究　趋势分析之三

- 不断解决
  ——计算机图形学提出的曲面模型、设计、
  绘制等数学理论问题
- 发展基于图象的几何造型算法
  ——促进几何设计、计算机图形、图象、视觉
  的四者融合
- 继续研究
  ——参数曲面、代数曲面的几何表示、
  几何逼近、几何计算方法
- 从工程、医学、生物、建筑、艺术等应用角度
  ——发展新理论

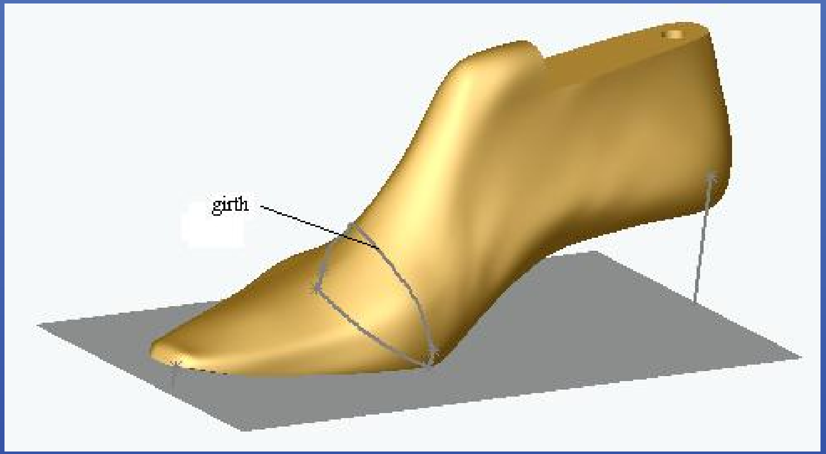
(二) 几何计算与几何逼近的研究进展

- 具有公共测地线的曲面束计算
- 多面体表面上的局部最短路径计算
- 由点云内在性质驱动的网格重建算法
- 平面三角片与其插值曲面片的最大距离估计
- 圆锥曲线的有理四次表示
- 有理曲线高阶导矢多项式逼近的收敛性
- 基于精确表示圆弧的等距曲线逼近
- 用割角多边形产生B-B曲线的更小包围域
- L_2范数下带约束的Bézier曲线最佳降多阶

具有一条公共空间测地线的曲面束的参数表示

●正向分析法(传统方法)：

给定一张曲面, 求出测地线



●逆向综合法(新的方法)：

鞋腰线：度量鞋面的宽与高

当鞋面被展平时, 它投影到一条近似直线

鞋的形状频繁地改变，以适合时尚潮流

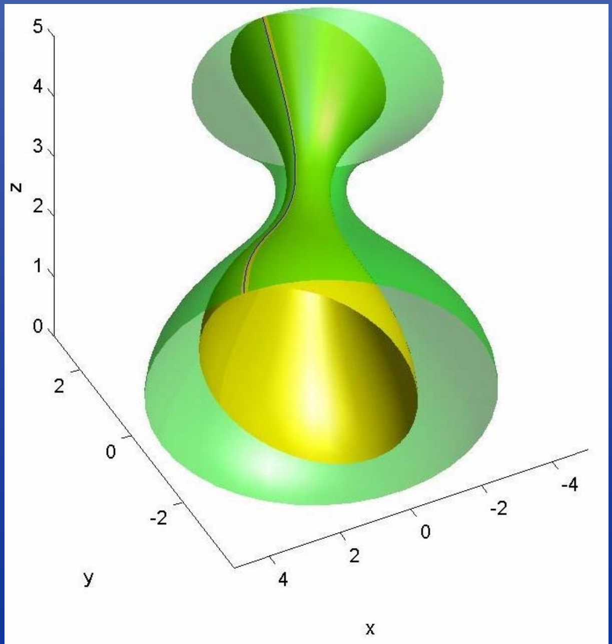
➢ 以鞋腰线为公共测地线, 写出曲面束方程, 其任一曲面都是候选鞋面

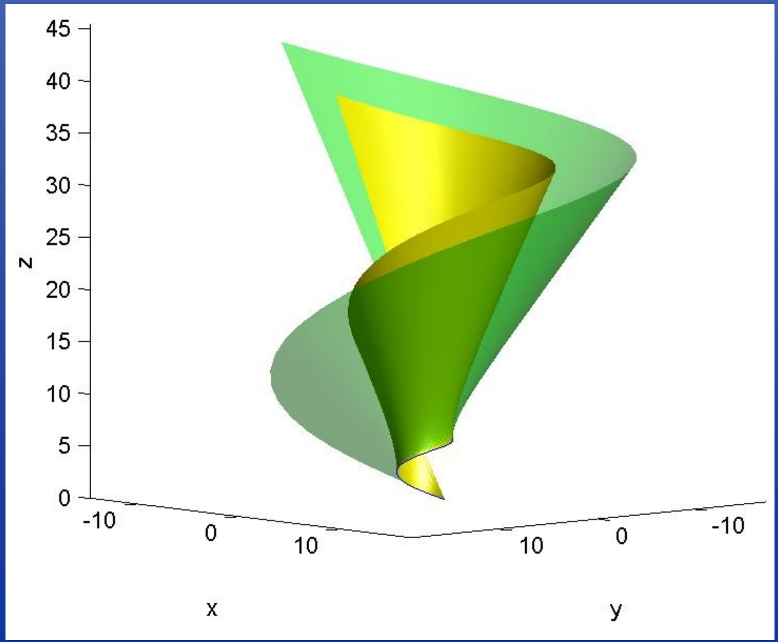
基本思路与做法:

利用沿此测地线的Frenet三面形

把曲面束表为此局部座标系中各分量的线性组合

求出组合系数满足测地线与等参要求的充要条件





多面体表面上局部最短路径的快速算法

相关的最好工作：

- Chen,Han, **Proc Sixth ACM Sym. On Computational Geometry, 1990**

  求精确最短路径，利用Continuous Dijkstra技巧，但预处理既多费时间又多占空间

- Kanai, Suzuki, CAD, 2001

  求近似最短路径，尽量缩小求解区域，选择合适子图，近似算法带来不确定性

●新算法

模拟光线行进路径

将连接源点和终点的多面体上的面列展开在平面上

把问题转化为此面列上这两点之间光线行进路径的确定

✓ 与Kanai法相比

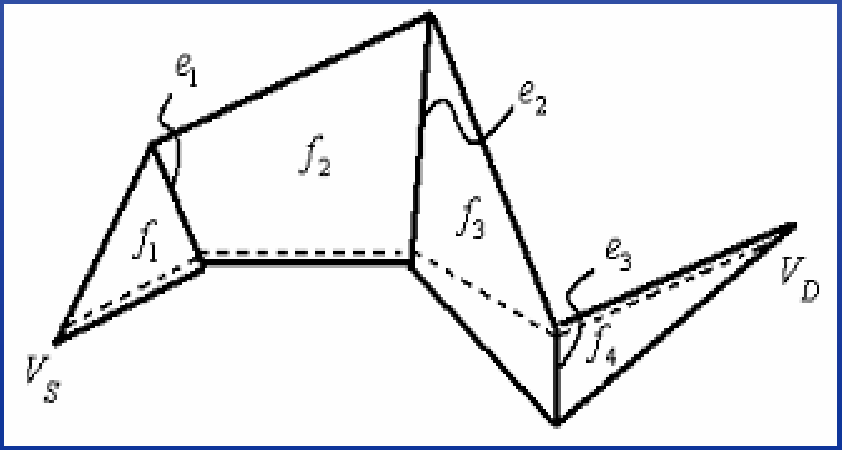
前者效果精确，后者近似；

相对误差不高于0.4%时，效率快3到4倍，不占用额外存储空间；

算法时间复杂度不超过$O\left(k^2\right)$，k 为最短路径穿过的多边形平面个数.

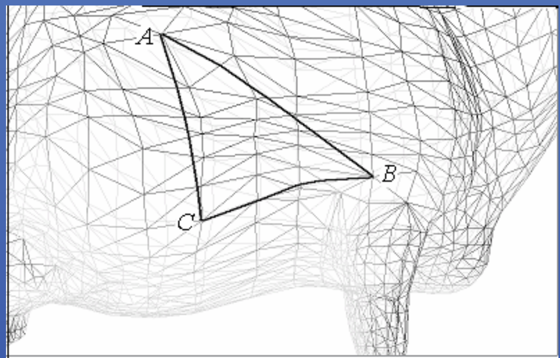
规则面列上

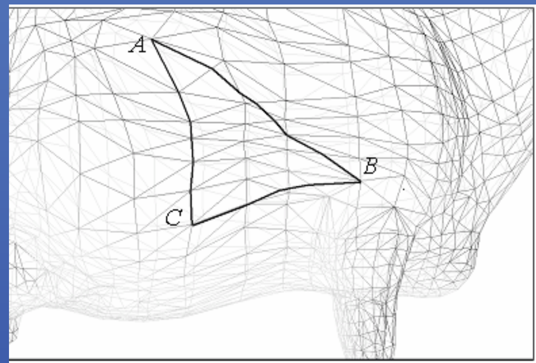
面的局部最短路径

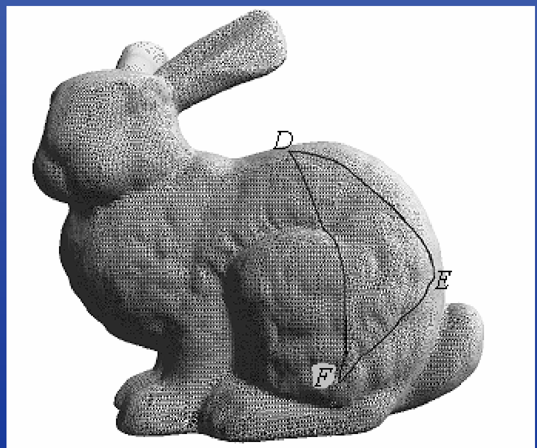


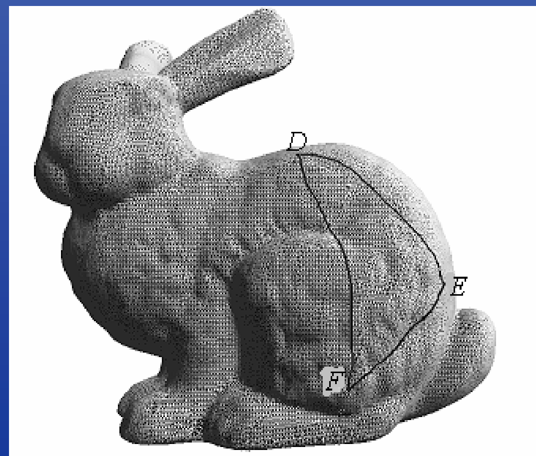
实例验证：

本算法求出的最短路径









KS算法求出的路径

由点云内在性质驱动的网格重建算法

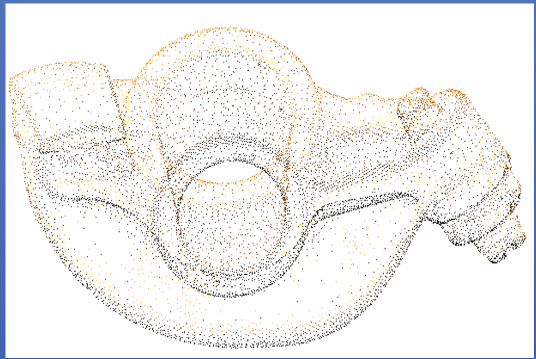
相关工作:

- Bernardini F.,Mittleman J.,Rushmeier H.et al, IEEE TVCG, 1999
- Huang, J., Menq, C. H., CAD, 2002

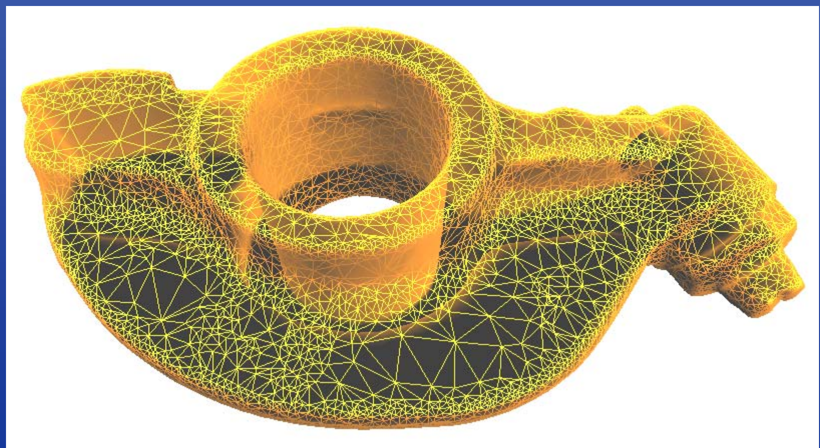
- **方法的局限：**算法借助于人为确定的参数
- **新方法的思想：**
  - 将网格中此点邻接的最长最短边的长度比定义为采样均匀度.
  - 用它驱动算法，为活动边寻找新点, 组成新三角形
  - 是对点云限制在二维流形上的局部最小权三角剖分, 所以拓扑结构接近被采样体表面

实际例子：摇臂

点云



重建网格曲面



重建网格，可以看到点云的不均匀分布

平面三角片与其插值曲面片的最大距离估计

相关工作:

- Sheng, X., Hirsch, B.E., CAD, 1992:

  （M_i : 曲面二阶偏导矢界）

$$\sup_{(u,v)\in T}\|S(u,v)-l(u,v)\|\le\frac{2}{9}L^2(M_1+2M_2+M_3).$$

- Vigo,M., Pla,N. and Brunet,P., CAGD, 1999:

  引入有向三角剖分，改进估计，但形式复杂，计算繁琐

- Sun W.,Bradley C,Zhang Y.F.and Loh H.T., CAD, 2001:

  将常数 $\frac{2}{9}$ 改进为 $\frac{1}{8}$ ，证明不严密，非精确估计

新的估计

$$\sup_{(u,v)\in T}\left\|S(u,v)-l(u,v)\right\|\le\frac{1}{8}L^2\left(M_1+M_2+M_3-\min\{M_1,M_2,M_3\}\right),$$

- 是最精确的和不可改进的
- 当 $M_1=M_2=M_3$时，将Sun的界值减少了一倍

有理四次圆锥曲线的几何特征

- **研究意义：**

  有理三次椭圆段的圆心角:

  不超过$\left[1.5+0.5\,\mathrm{sgn}\left(c-\sqrt{3}\right)\right]\pi-\arctan\left(2\sqrt{3}c/(c^2-3)\right)$

  （ c：长短轴半径之比）

  但有理四次椭圆段的圆心角：可接近2π

- **理论依据：**

  除二次外，所有有理圆锥曲线都是退化的

  即是可不适当参数化的或可降阶的

有理四次圆锥曲线

●可降阶的：

有二次多项式 $S(t)=a_0(1-t)^2+2a_1(1-t)t+a_2t^2$,

使得 $\boldsymbol{r}(t)\equiv\boldsymbol{q}(t)S(t)/S(t)$.

●是可不适当参数化的：

有参数变换 $s(t)=\dfrac{(1-t)^2a_0+2(1-t)ta_1+t^2a_2}{(1-t)^2b_0+2(1-t)tb_1+t^2b_2}$

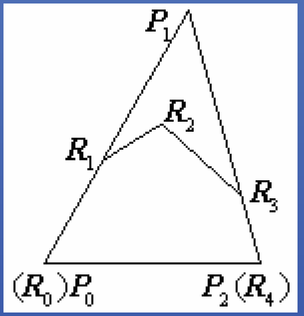
使得 $\boldsymbol{r}(t)\equiv\boldsymbol{q}(s(t))$,

有理四次圆锥曲线是可降阶的，当且仅当：

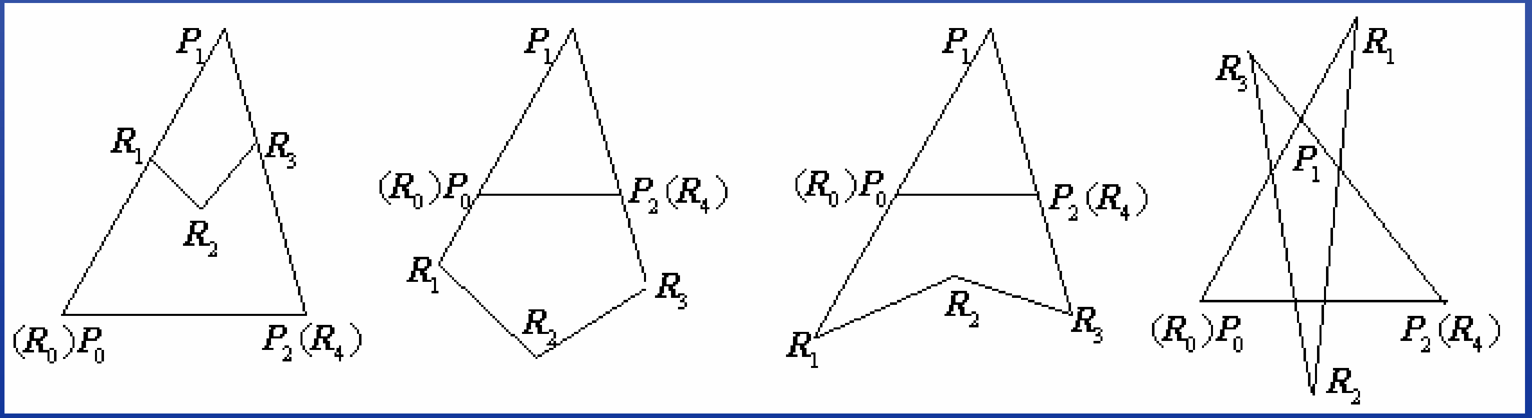
（1a）$\boldsymbol{R}_i\,(i=0,1,\ldots,4)$ 五点共面；

（1b）$\boldsymbol{R}_1,\boldsymbol{R}_2,\boldsymbol{R}_3$ 三点的位置

为下列情形之一：



(1)

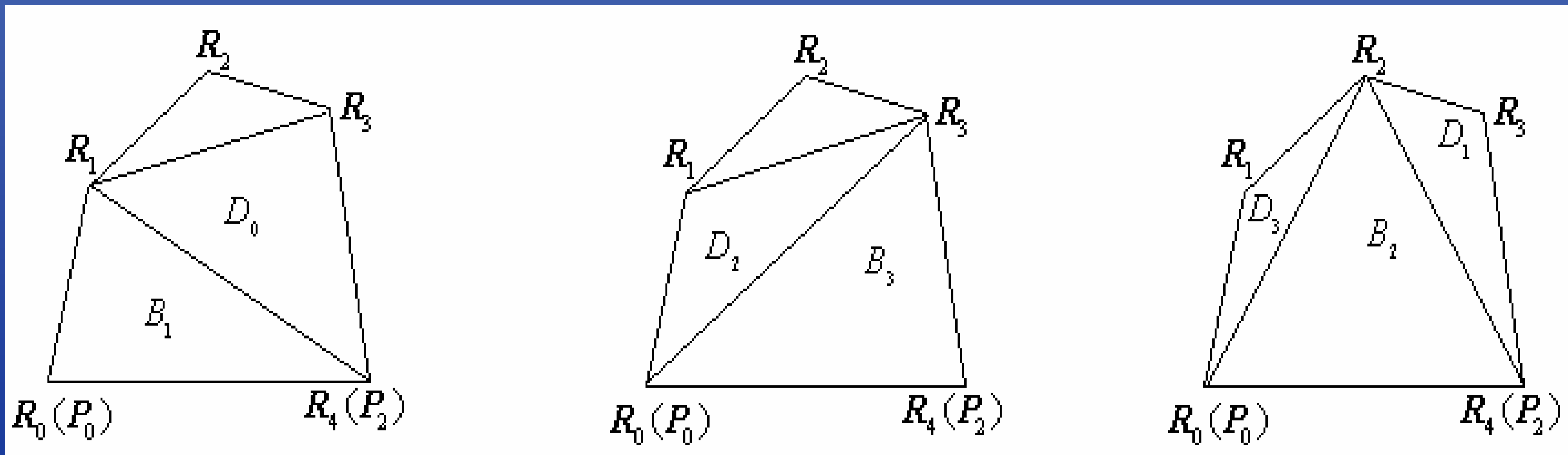


(2) (3) (4) (5)

$$(1c)\quad \frac{\omega_1^2}{\omega_0\omega_2}=\frac{3}{8}\frac{B_2B_3}{B_1D_0};\qquad (1d)\quad \frac{\omega_2^2}{\omega_1\omega_3}=\frac{4}{9}\frac{B_3D_0}{B_2D_1}=\frac{4}{9}\frac{B_1D_2}{B_2D_3};$$

$$(1e)\quad \frac{\omega_3^2}{\omega_2\omega_4}=\frac{3}{8}\frac{B_1B_2}{B_3D_2}.$$

有向面积:



有理曲线高阶导矢多项式逼近的收敛性

相关工作:

- Wang, Sederberg and Chen, JAT,1997：
  Hybrid多项式逼近收敛性,
- Wang and Zheng,GMIP,1997：
  Hybrid曲线移动控制顶点的界估计
- Wang and Sederberg,CADDM,1994:
  有理曲线求积的Hybrid多项式逼近
- Liu and Wang, GMP,2000:
  Hybrid与Hermite多项式逼近的关系

$$\mathrm{H}^{r,p}(t) \equiv \mathrm{R}(t) = \sum_{i=0, i\neq r}^{r+p} B_i^{r+p}(t)\,\mathrm{H}_i^{r,p} + B_r^{r+p}(t)\,\mathrm{V}^{r,p}(t), \qquad 0 \le t \le 1$$

- 问题：

可否用Hybrid多项式逼近的导矢（曲率，挠率）

代替有理曲线导矢（曲率，挠率）？ 收敛？ 条件？

Floater, 94的导矢界公式推广

$$\left\|\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{R}(t)}{\mathrm{d}t}\right\| \le n\omega^2 \max_{0\le i\le n-1} \left\|\mathrm{R}_i\mathrm{R}_{i+1}\right\|. \qquad 0\le t\le 1. \qquad \omega = \frac{\max\limits_{0\le i\le n}\omega_i}{\min\limits_{0\le i\le n}\omega_i}$$

推广到高阶:

$$\left\|\frac{\mathrm{d}^2\,\mathrm{R}(t)}{\mathrm{d}t^2}\right\| \le 2n(3n-2)\omega^3 \max_{0\le i\le n-1} \left\|\mathrm{R}_i\mathrm{R}_{i+1}\right\|, \qquad 0\le t\le 1.$$

$$\left\|\frac{\mathrm{d}^3\,\mathrm{R}(t)}{\mathrm{d}t^3}\right\| \le 6n(7n^2-10n+4)\omega^4 \max_{0\le i\le n-1} \left\|\mathrm{R}_i\mathrm{R}_{i+1}\right\|, \qquad 0\le t\le 1.$$

其中关键：证明

$$\|\mathrm{H}_k\| \le n\cdot(\max_{0\le i\le n}\omega_i)^2 \max_{0\le i\le n-1}\|\mathrm{R}_i\mathrm{R}_{i+1}\|, \qquad k=0,1,\cdots,2n-2.$$

$$\mathrm{H}_k = \frac{1}{\binom{2n-2}{k}}\sum_{i=\max(0,k-n+1)}^{[k/2]}(k-2i+1)\binom{n}{i}\binom{n}{k-i+1}\mathrm{Dir}(\tilde{\mathrm{R}}_i,\tilde{\mathrm{R}}_{k-i+1})$$

$$k=0,1,\cdots,2n-2.$$

再分析余项，证明：当Hybrid多项式逼近收敛时，结论成立：

$$\lim_{s\to\infty}\left\|\frac{\mathrm{d}^l\,\tilde{\mathrm{H}}^{s,s}(t)}{\mathrm{d}t^l}-\frac{\mathrm{d}^l\,\mathrm{R}(t)}{\mathrm{d}t^l}\right\| \le$$

$$\lim_{s\to\infty}\mathrm{O}\left(\frac{s^l}{2^s}\right)\left(\sum_{k=0}^{n-1}\binom{s}{k}\lambda_{\max}^{s-k}\right)\|\mathbf{T}_n^{11}\|_\infty\|(\mathbf{T}_n^{11})^{-1}\|_\infty\max_{1\le k\le n}\|\mathrm{R}_k-\mathrm{R}_0\|=0.$$

$$0\le t\le 1, \qquad l=0,1,2,3.$$

基于精确表示圆弧的等距曲线逼近方法

相关工作:

- Lee,I.K.,Kim,M.S.,Elber,G.,CAD,1996
  基圆二次Bézier样条曲线逼近的包络方法
- Ahn, Y.J., Kim, Y.S., Shin, JCAM, 2004
  改用Floater (CAD, 97)的圆逼近法逼近基圆

✓ 方法的局限:

不能精确表示常用曲线, 逼近误差偏大

分析：等距逼近误差的来源

（1）基曲线到目标曲线的距离, 与等距半径的

- 大小不一致性

（2）基曲线到目标曲线的指向, 与基曲线法向的

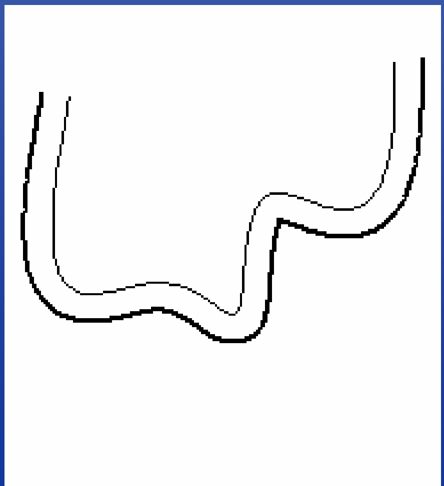
- 方向不一致性

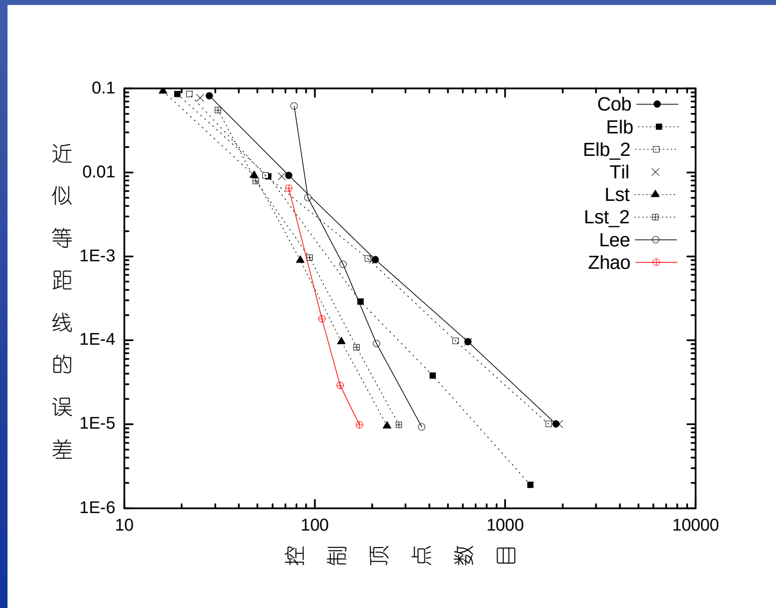
✓ 思想

- 避免(1), 减轻(2)
- 把基曲线单位法矢看作单位圆弧, 精确表为有理Bézier曲线
- 合成曲线$\boldsymbol{C}(t)+r\boldsymbol{Q}(s)$, 重新参数化$\boldsymbol{Q}(s)$, 保证等距逼近曲线$C^1$

本方法优点

- 精确表示圆弧的等距线
- 误差界与基曲线法向转角六次方同阶, Lee: 四次方同阶
- 曲线的分段数较少，如对三次均匀B样条曲线作等距逼近:



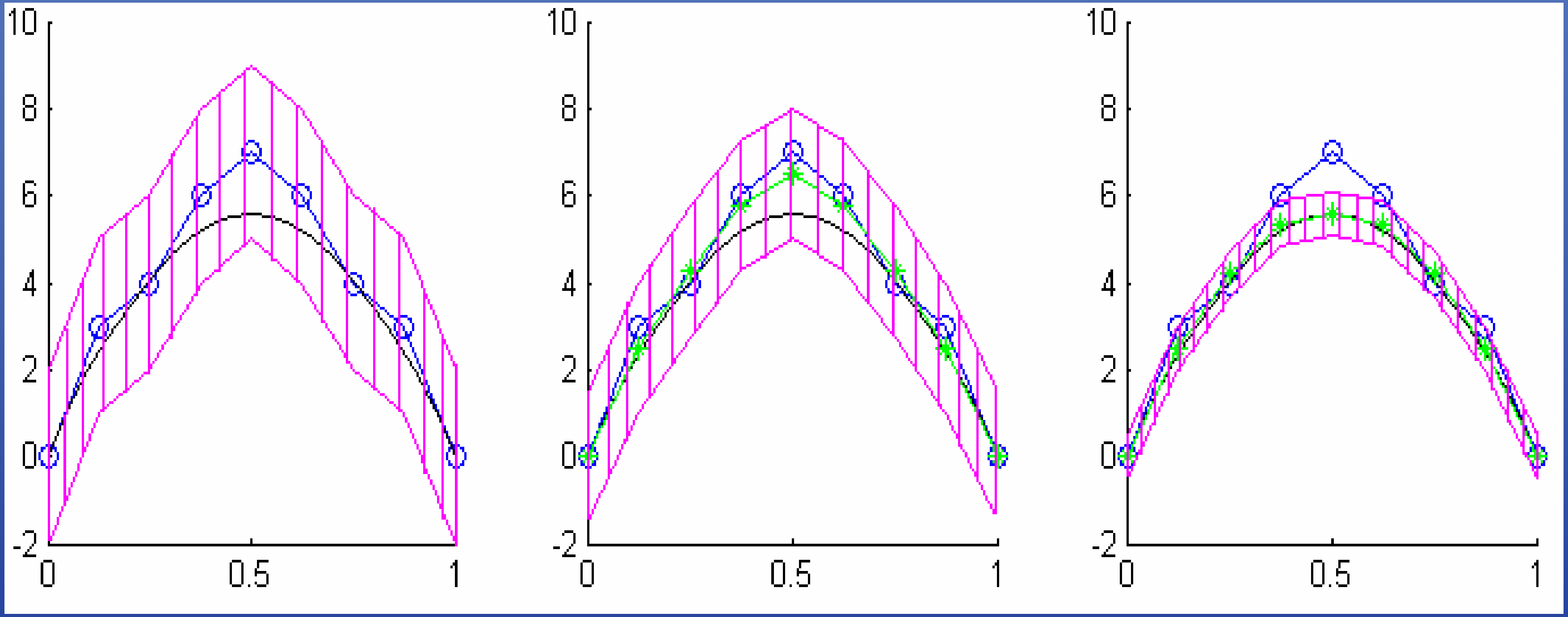


用割角多边形产生
B-B曲线的更小包围域

相关工作:

- Nairn,D., Peter,J., Lutterkort,D,
  控制多边形包围域的界, CAGD, 1999
- Reif Ulrich.,
  给出新证明, 并推广到曲面, CAGD, 2000
- David Lutterkort, Jŏrg Peters,
  提出另一种包围域, CAGD, 2001
- Zhang R-J., Wang G-J.,
  提出拟控制多边形包围域, CAGD, Accepted

八次B-B多项式曲线的包围域



控制多边形　　拟控制多边形　　割角多边形

新旧方法逼近曲线的精确界值

$$\Delta = \|\Delta_2 b\|_\infty$$

多项式曲线次数	2	3	4	5	6	7	8
控制多边形法	$\frac{1}{4}\Delta$	$\frac{1}{3}\Delta$	$\frac{1}{2}\Delta$	$\frac{3}{5}\Delta$	$\frac{3}{4}\Delta$	$\frac{6}{7}\Delta$	Δ
拟控制多边形法	$\frac{1}{16}\Delta$	$\frac{1}{12}\Delta$	$\frac{1}{4}\Delta$	$\frac{7}{20}\Delta$	$\frac{1}{2}\Delta$	$\frac{17}{28}\Delta$	$\frac{3}{4}\Delta$
割角多边形法	$\frac{1}{16}\Delta$	$\frac{1}{12}\Delta$	$\frac{1}{8}\Delta$	$\frac{3}{20}\Delta$	$\frac{1}{6}\Delta$	$\frac{3}{14}\Delta$	$\frac{1}{4}\Delta$

L_2范数意义下带约束的 Bézier 曲线最佳降多阶

相关工作:

- Eck, M., CAD, 1995
- Lutterkort, D., Peters, J., Reif. U., CAGD, 1999
- Peters, J., Reif, U., JAT, 2000
- Chen G., Wang G.-J., CAGD, 2002
- Zheng J., Wang G.-Z. , Graphical Models, 2003

✓ 方法的局限：

误差事后估计；非显式表达；或非最佳降阶

新 方 法

- 充分利用Jacobi多项式的代数性质
- 事先判别精确误差，误差最小
- $(r-1, s-1)$阶约束，一次降 $n-m$ 阶
- 给出降阶显式：$\tilde{P}_m(t)$

$$
=\left(B_0^m(t), B_1^m(t), \cdots, B_m^m(t)\right)\left(F_{(m+1)\times(m+1)}^m B_{(m+1)\times(n+1)}^n - F_{(m+1)\times(m-r+1)}^m \right.
$$

$$
\left. \times A_{(m-r+1)\times(n-m)}^n \left(A_{(n-m)\times(n-m)}^n\right)^{-1} B_{(n-m)\times(n+1)}^n \right)\left(b_0 \quad b_1 \quad \cdots \quad b_n\right)^T,
$$

新 方 法

$B^n_{(n+1)(n+1)} = (b_{i,j})$：$n$ 次Bernstein基到 n 次幂基的转换矩阵

$F^m_{(m+1)\times(m+1)} = (f_{ij})$：$m$ 次幂基到 m 次Bernstein基的转换矩阵

矩阵A的元素：

$$c^l_j = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=j-s}^{l} (-1)^{i-j} \binom{l+2s}{l-i} \binom{l+2r+2s+i}{i} \binom{i+s}{j}, & n-r \geq j > s; \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{l} (-1)^{i-j} \binom{l+2s}{l-i} \binom{l+2r+2s+i}{i} \binom{i+s}{j}, & s \geq j \geq 0. \end{cases}$$

谢　谢　！