Cálculo Numérico - Trabajo Práctico N°4

Resolución de Sistemas Lineales

Método de eliminación Gaussiana y Pivoteo

Problema 1:

Dado el siguiente sistema de ecuaciones $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, obtener los valores de las incógnitas y el valor del determinante de la matriz $\boldsymbol{A}$, $det(\boldsymbol{A})$.

$$
\begin{aligned}
4x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 20 \\
-2x_2 + 7x_3 - 4x_4 &= -7 \\
6x_3 + 5x_4 &= 4 \\
3x_4 &= 6
\end{aligned}
$$

Ayuda: Si $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$ de orden $N \times N$ es triangular superior o inferior, entonces $det(\boldsymbol{A}) = a_{11}a_{22}\cdots a_{NN} = \prod_{i=1}^{N} a_{ii}$

Respuesta:

$x_1 = 3$, $x_2 = -4$, $x_3 = -1$, $x_4 = 2$, $det(\boldsymbol{A}) = -144$

Problema 2:

Utilizando el método de eliminación Gaussiana, resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
a_1 + 2a_2 + a_3 + 4a_4 &= 13 \\
2a_2 + 4a_3 + 3a_4 &= 28 \\
4a_1 + 2a_2 + 2a_3 + a_4 &= 20 \\
-3a_1 + a_2 + 3a_3 + 2a_4 &= 6
\end{aligned}
$$

Respuesta:

$x_1 = 7{,}61$, $x_2 = -20{,}076$, $x_3 = 10{,}46$, $x_4 = 8{,}76$, $det(\boldsymbol{A}) = -26$

Problema 3:

Hallar el polinomio cúbico $y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$ que pasa por los puntos $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,3)$, y $(3,4)$.

Problema 4:

Utilizar eliminación Gaussiana para resolver el siguiente sistema lineal:

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Notar que es necesario utilizar técnicas de pivoteo parcial, o pivoteo de filas para poder resolver el sistema de manera adecuada. Realice un programa para efectuar dicha operación.

Problema 5:

Consideremos el problema de hallar el polinomio cúbico $y = c_1x^3 + c_2x^2 + c_3x + c_4$ que pasa por los cuatro puntos $(2, 8)$, $(3, 27)$, $(4, 64)$ y $(5, 125)$. Este problema nos llevaría a encontrar el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} 20514 & 4424 & 978 & 224 \\ 4424 & 978 & 224 & 54 \\ 978 & 224 & 54 & 14 \\ 224 & 54 & 14 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20514 \\ 4424 \\ 978 \\ 224 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Encontrar la solución del sistema de ecuaciones propuesto, y la solución de un sistema modificado donde se remplaza solo el término $A_{1,1} = 20515$, el cual es el mismo que el anterior más una pequeña perturbación relativa. Observe que la solución encontrada difiere notablemente en ambos casos, donde solo se considera una pequeña perturbación adicional en el nuevo sistema de ecuaciones.

Estos problemas se encuentran frecuentemente en la solución de sistemas de ecuaciones, donde la matriz de coeficientes se denomina mal condicionada. Esto ocurre cuando la matriz de coeficientes es "cuasi-singular", cuando el determinante de la misma es pequeño comparado con la norma euclidiana de la matriz de coeficientes definida como: $\|\boldsymbol{A}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ij}^2}$. Verificar que la matriz está mal condicionada.

Respuesta:

1. $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, $c_3 = 0$, $c_4 = 0$, $det(\boldsymbol{A}) = 144$, $\|\boldsymbol{A}\| = 21518$ con $A_{1,1} = 20514$
2. $c_1 = 0{,}642857$, $c_2 = 3{,}750$, $c_3 = -12{,}392857$, $c_4 = 12{,}74999$, $det(\boldsymbol{A}) = 224$, $\|\boldsymbol{A}\| = 21519$ con $A_{1,1} = 20515$

Problemas de aplicación

Problema 6:

Para el reticulado estructural estáticamente determinado que se muestra en la figura 1, obtener las ecuaciones de equilibrio utilizando el método de los nudos, donde $\sum_i P_{i,j} = 0$, $j = x, y$ en cada nudo. Las incógnitas son las fuerzas P_i en cada barra de la estructura. Resolver el sistema de ecuaciones resultantes y obtener los valores de las fuerzas en cada barra.

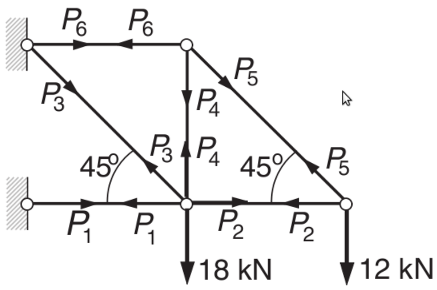

Figura 1: Reticulado estructural considerado.

Problema 7:

En el circuito eléctrico mostrado en la figura 2 pueden ser considerados cuatro loops. Aplicando la ley de Kirchoff a cada loop obtenga las ecuaciones en las incógnitas i_1, i_2, i_3 *y* i_4, y resuelva el sistema de ecuaciones resultantes utilizando el método adecuado.

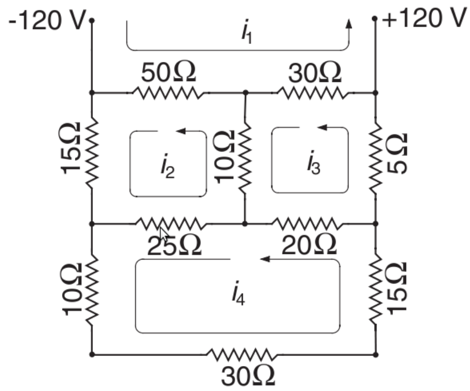

Figura 2: Circuito eléctrico considerado.

Problema 8:

El diagrama de la figura 3 muestra cinco reservorios de mezclado conectados por tuberías. Se bombea agua a través de las tuberías a una razón constante como se muestra en la figura. El agua que ingresa contiene un químico, donde la cantidad del mismo es especificado por medio de su concentración en $\left[\frac{mg}{m^3}\right]$. Aplicando el principio de conservación de la masa en cada reservorio para obtener las ecuaciones simultaneas de la concentración c_i dentro de cada reservorio. Notar que la relación de flujo másico del químico es obtenida multiplicando el flujo volumétrico de agua por la concentración.

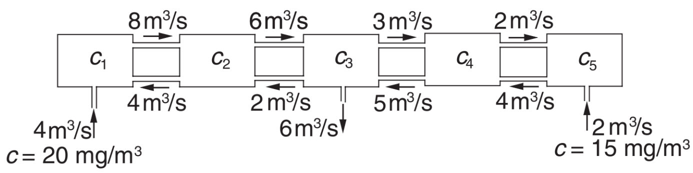

Figura 3: Esquema de reservorios a analizar.