Cálculo Numérico - Trabajo Práctico N°11

Sistemas de ecuaciones diferenciales

Método de Euler - Método de Runge-Kutta

Problema 1:

Convierta las siguientes ecuaciones diferenciales acopladas (donde t es la variable independiente) en ecuaciones de primer orden de la forma $\dot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{y})$:

$$\ddot{y} = x - 2y \qquad \ddot{x} = y - x \tag{1}$$

$$\ddot{y} = -y\left(\dot{y}^2 + \dot{x}^2\right)^{1/4} \qquad \ddot{x} = -x\left(\dot{y}^2 + \dot{x}^2\right)^{1/4} - 32 \tag{2}$$

$$\ddot{y}^2 + t sin(y) = 4\dot{x} \qquad x\ddot{x} + t cos(y) = 4\dot{y} \tag{3}$$

Problema 2:

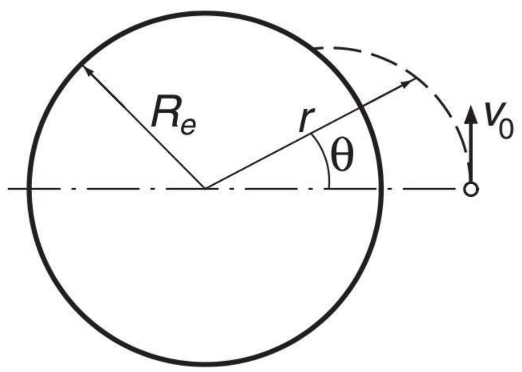

Figura 1: Esquema del problema a resolver - nave espacial.

Una nave espacial es lanzada desde una altitud de $H = 772\ [km]$ con una velocidad inicial $v_0 = 6700\ [m/s]$ en la dirección mostrada en la figura. Las ecuaciones diferenciales que describen el movimiento de la nave espacial son:

$$\ddot{r} = r\dot{\theta}^2 - \frac{GM_e}{r^2} \quad , \quad \ddot{\theta} = -\frac{2\dot{r}\dot{\theta}}{r} \tag{4}$$

donde r y θ son las coordenadas polares del problema. Las constantes de movimiento involucradas son:

- Constante de gravitación universal: $G = 6{,}672 \times 10^{-11}\ m^3 kg^{-1} s^{-2}$:

- Masa de la tierra: $M_e = 5{,}9742 \times 10^{24}\ kg$
- Radio de la tierra a nivel del mar: $R_e = 6378{,}14\ km$.

1. Derive las ecuaciones de movimiento (Opcional).
2. Derive las ecuaciones lineales de primer orden y las condiciones iniciales de la forma $\dot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{b}$.
3. Utilice el método de Runge-Kutta de cuarto orden para resolver las ecuaciones diferenciales resultantes. Se desea obtener la solución desde el tiempo de lanzamiento hasta que la nave espacial toca tierra. Determine θ en el lugar de impacto.
4. Obtener los mismos resultados pedidos en el punto anterior pero en este caso utilizando el método de Euler.

Problema 3:

La ecuación diferencial del movimiento de un péndulo simple es:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} sin(\theta) \tag{5}$$

donde:

- θ: es el desplazamiento angular desde la vertical.
- g: es la aceleración de la gravedad.
- L: es la longitud del péndulo.

Utilizando la transformación de coordenadas $\tau = t\sqrt{g/L}$ la ecuación se convierte en:

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} = -sin(\theta) \tag{6}$$

Derive las ecuaciones de movimiento. Utilice un método numérico adecuado para determinar el periodo del péndulo si la amplitud inicial es $\theta(0) = 1$ [rad]. Note que para pequeñas amplitudes ($sin\theta \approx \theta$) el periodo es $2\pi\sqrt{L/g}$.

Problema 4:

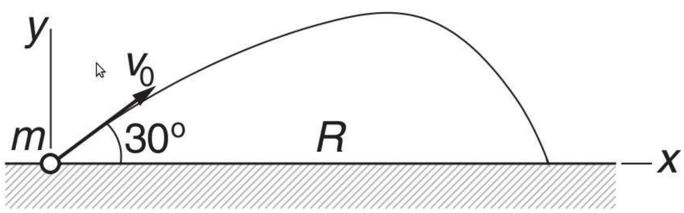

Figura 2: Esquema de tiro balístico.

Un proyectil de masa $m = 0{,}25$ $[kg]$ es lanzado con una velocidad inicial de $v_0 = 50$ $[m/s]$ en la dirección mostrada en la figura. Asumiendo que la fuerza aerodinámica de arrastre actuando en el proyectil es $F_D = C_D v^{3/2}$, las ecuaciones diferenciales que describen el movimiento son:

$$\ddot{x} = -\frac{C_D}{m}\dot{x}v^{1/2} \qquad \ddot{y} = -\frac{C_D}{m}\dot{y}v^{1/2} - g \tag{7}$$

donde $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$. Derive las ecuaciones de movimiento, determine el tiempo de vuelo y el rango R. Utilice $C_D = 0{,}03$ y $g = 9{,}80665$ $[m/s^2]$.

Problema 5:

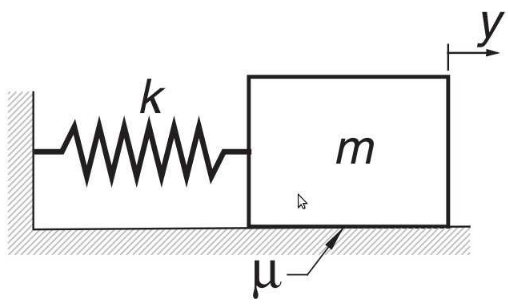

Figura 3: Sistema masa resorte con fricción.

Considere el sistema masa - resorte donde se considera fricción seca entre el bloque y la superficie horizontal. La fuerza de fricción tiene una magnitud constante $\mu m g$ (μ es el coeficiente de fricción) y es siempre opuesta a la dirección de movimiento. La ecuación diferencial de movimiento del bloque puede ser expresada como:

$$\ddot{y} = -\frac{k}{m}y - \mu g\frac{\dot{y}}{|\dot{y}|} \tag{8}$$

donde y es medida desde la posición de reposo. Si el bloque se suelta desde el reposo a $y = y_0$, verifique por integración numérica que el siguiente valor de pico de y es $y = y_0 - 4\mu m g/k$ (esta relación puede ser derivada analíticamente). Utilice $k = 3000$ $[N/m]$, $m = 6$ $[kg]$, $\mu = 0{,}5$, $g = 9{,}80665$ $[m/s^2]$, y $y_0 = 0{,}1$ $[m]$. Compruebe el comportamiento del sistema en ausencia de fricción.

Problema 6:

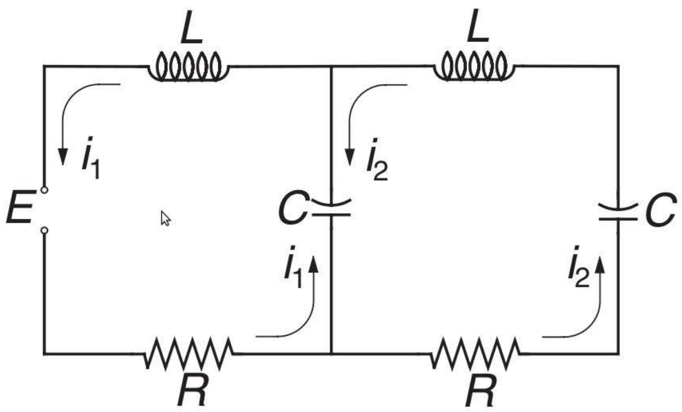

Figura 4: Diagrama del circuito a analizar.

La fuente de voltaje constante mostrada en el circuito de la figura es encendida a $t = 0$. Esta excitación provoca una respuesta transitoria del circuito donde las corrientes i_1 e i_2 se estabilizan luego de aproximadamente $t \approx 0{,}05$ $[s]$. Grafique el comportamiento de las corrientes desde $t = 0$ $[s]$ a $t = 0{,}05$ $[s]$. Los datos del circuito son: $E = 9$ $[V]$, $R = 0{,}25$ $[\Omega]$, $L = 1{,}2 \times 10^{-3}$ $[H]$, y $C = 5 \times 10^{-3}$ $[F]$.

Las ecuaciones que modelan el comportamiento del circuito a analizar son:

$$L\frac{di_1}{dt} + R\,i_1 + \frac{q_1 - q_2}{C} = E \tag{9}$$

$$L\frac{di_2}{dt} + R\,i_2 + \frac{q_2 - q_1}{C} + \frac{q_2}{C} = 0 \tag{10}$$

dos ecuaciones adicionales que relacionan la carga y la corriente son:

$$\frac{dq_1}{dt} = i_1 \quad , \quad \frac{dq_2}{dt} = i_2 \tag{11}$$