Cálculo Numérico - Trabajo Práctico N°6

Interpolación y aproximación polinomial - Ajuste de curvas

Interpolación de Lagrange - Regresión de mínimos cuadrados

Problema 1:

Utilice un polinomio de interpolación de Lagrange cuadrático con nodos en $x_0 = 1$, $x_1 = 2$ y $x_2 = 2{,}5$ para aproximar $f(x) = x + \frac{2}{x}$ en los puntos $x = 1{,}5$ y $x = 1{,}2$. Grafique los coeficientes de Lagrange $C_{N,k}(x)$ donde N es el orden del polinomio, y k es el número del punto donde se interpola; verifique que $C_{N,k}(x_k) = 1$, y que $C_{N,k}(x_j) = 0 \; \forall j \neq k$. Compruebe que $\sum_{k=0}^{N} C_{N,k}(x) = 1$, de este resultado se puede considerar el polinomio de Lagrange

$$P_N(x) = \sum_{k=0}^{N} f(x_k)\, C_{N,k}(x) \tag{1}$$

como una suma ponderada en los puntos de evaluación $f(x_k)$. Graficar el error $e(x) = |f(x) - P_N(x)|$ y notar que $e(x_k) = 0 \, , \forall k$.

Ayuda: si lo prefiere, utilice Maple, Matlab, lápiz y papel, o el manipulador de ecuaciones que prefiera para realizar el análisis. En principio no es necesario programar ningún método para obtener los resultados requeridos.

Problema 2:

Realice un programa para encontrar el polinomio de Lagrange de grado n que interpole $n + 1$ puntos arbitrarios. Con este programa obtenga el polinomio interpolador que aproxime las siguientes funciones:

1. $f(x) = e^{-x^2}$, considerar polinomios pares con $n = 2, 4, 6, 8$ grafique el polinomio de Lagrange obtenido y compare con la solución exacta, calcule el error $(e(x) = |f(x) - P_N(x)|)$ para cada caso y verifique la tendencia del polinomio y el error cuando aumenta el orden del polinomio. Verifique que agregar más puntos no mejora la aproximación en todo el dominio.

2. $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2$, considere polinomios de orden $n = 1, 2, \, y \, 3$, grafique el error para ambos casos, que sucede cuando aumenta el orden de los polinomios interpolantes?

3. $f(x) = x^x$ pruebe diferentes ordenes de aproximación y verifique el error cometido al aproximar los puntos que pertenecen a la función mediante el polinomio interpolador.

Para todos los casos anteriores verifique que sucede fuera del rango de interpolación, es decir para $x < x_0$ y $x > x_N$. Es posible utilizar el polinomio interpolador para extrapolar el valor de la función fuera del rango considerado?. Para visualizar este caso grafique la función y el polinomio interpolador fuera del rango de ajuste considerado.

Problema 3:

El calor especifico c_ρ de los materiales depende de la temperatura, para $T \rightarrow 0$ se encuentra que $c_\rho \rightarrow 0$ (se encuentra que el mismo tiende a cero como T^3 para los sólidos), mientras que a elevadas temperaturas el mismo tiende a un valor aproximadamente constante $T \rightarrow \infty$, $c_\rho \rightarrow cte$. De un ensayo de laboratorio realizado al aluminio se relevaron los siguientes valores del calor específico en función de la temperatura:

T $[^oC]$	c_ρ $\left[\frac{kJ}{Kg\,^oK}\right]$
-260.15	0.1
-200	0.45
-100	0.699
0	0.87
100	0.941
300	1.04

Cuadro 1:

De los valores obtenidos de ensayo aproxime el comportamiento del calor específico en el rango de temperaturas en que se tomaron las mediciones utilizando un polinomio de Lagrange adecuado. Grafique el resultado encontrado y analice si esta aproximación es aceptable. De la aproximación obtenida extrapole el valor del calor específico para $T = 500$ $[^oC]$, es un valor adecuado considerando el comportamiento descripto arriba?. Es el polinomio de Lagrange un método adecuado para aproximar los valores del ensayo? .

Problema 4:

Utilizando el método de regresión de mínimos cuadrados, encontrar la ecuación de la recta $f(x) = Ax + B$ que mejor aproxima los siguientes datos:

x_k	y_k
-1	10
0	9
1	7
2	5
3	4
4	3
5	0
6	-1

Cuadro 2: Datos a ajustar mediante una recta.

Obtenga también el valor de error cuadrático medio, definido como:

$$E_{CM} = \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \left| f(x_k) - y_k \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{2}$$

Implemente también y calcule el coeficiente de correlación definido como:

$$R = \frac{N\sum_{k=1}^{N} x_k y_k - \left(\sum_{k=1}^{N} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{N} y_k\right)}{\sqrt{N\sum_{k=1}^{N} x_k^2 - \left(\sum_{k=1}^{N} x_k\right)^2}\sqrt{N\sum_{k=1}^{N} y_k^2 - \left(\sum_{k=1}^{N} y_k\right)^2}} \tag{3}$$

una forma alternativa, y quizás más conveniente de evaluar es la siguiente:

$$R = \frac{\sum_{k=1}^{N} (y_k - \overline{y})^2 - \sum_{k=1}^{N} (f(x_k) - y_k)^2}{\sum_{k=1}^{N} (y_k - \overline{y})^2} \tag{4}$$

donde $\overline{y}$ es la media aritmética de la serie de valores dados, definida como:

$$\overline{y} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} y_k \tag{5}$$

Respuesta:
$A = -1{,}60714285...$ $B = 8{,}642857...$ $E_{CM} = 0{,}41726...$

Problema 5:

Supongamos que tenemos N puntos $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{N}$cuyas abscisas son todas distintas. Utilizando el método de mínimos cuadrados, es posible encontrar la parábola óptima $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ que mejor aproxima estos puntos, donde por definición se obtendrán los coeficientes $A, B,\ y\, C$ de la parábola con el menor error cuadrático medio (2). Utilizando mínimos cuadrados se pide encontrar el método con cual determinar la parábola óptima dado un conjunto de puntos $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{N}$.

Ayuda: Se debe encontrar el mínimo del error definido en (2) para la función de la parábola, remplazando ésta en (2) se obtiene una ecuación en las variables $A, B,\ y\, C$ (notar que estas son las nuevas variables), donde es necesario minimizar la ecuación resultante. El mínimo de E_{CM} se obtiene diferenciando respecto de las variables, con lo cual se encuentran tres ecuaciones independientes que definen el método buscado.

Problema 6:

La densidad relativa del aire se midió en un experimento a varias altitudes h. Los datos relevados fueron los siguientes: Utilizando el método de ajuste cuadrático encontrado en el problema 5, para

$h\,[km]$	0	1.525	3.050	4.575	6.10	7.625	9.150
ρ	1	0.8617	0.7385	0.6292	0.5328	0.4481	0.3741

Cuadro 3: Mediciones de la densidad relativa a diferentes altitudes.

obtener la densidad relativa del aire a $h = 10{,}5\,[km]$.

Problema 7:

Se llevaron a cabo tres ensayos de tensiones en una barra de aluminio. En cada ensayo de deformación fueron medidos los mismos valores de tensión. Los resultados relevados fueron:

$\sigma\,[MPa]$	34.5	69.0	103.5	138.0
ϵ_1 (test 1)	0.46	0.95	1.48	1.93
ϵ_2 (test 2)	0.34	1.02	1.51	2.09
ϵ_3 (test 3)	0.73	1.10	1.62	2.12

Cuadro 4: Valores relevados en los ensayos de tensión en la barra de aluminio.

donde las unidades de deformación están en $\left[\frac{m}{mm}\right]$. Utilice regresión lineal para estimar el módulo de elasticidad del aluminio con el que está construida la barra. ($E = \frac{\sigma}{\epsilon}$ en las unidades adecuadas.)

Problema 8:

La intensidad de la radiación de una substancia radioactiva fué medida a diferentes intervalos de tiempo. Los resultados medidos fueron:

t (años)	0	0.5	1	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5
γ	1.0	0.994	0.990	0.985	0.979	0.977	0.972	0.969	0.967	0.960	0.956	0.952

Cuadro 5: Valores medidos de la radiación relativa a diferentes intervalos de tiempo.

Donde γ es la intensidad relativa de la radiación. Conociendo que la radioactividad decae exponencialmente con el tiempo, $\gamma(t) = ae^{-bt}$ encontrar los parámetros a y b de la curva de ajuste adecuada.

Problema 9:

En ciertos ensayos experimentales, dadas las condiciones particulares del mismo, se puede tener cierta confianza en la precisión de los resultados obtenidos, la cual puede variar de un punto a otro en las mediciones. Esto puede ocurrir por ejemplo, cuando los instrumentos de medición son más sensibles en cierto rango de medición. Otra posibilidad puede ser que los datos obtenidos en cierto experimento, no sean confiables absolutamente debido a un cambio en las condiciones externas u otros factores. Bajo estas circunstancias se puede asignar un factor de peso o confidencia W_i a los datos a ajustar, para luego minimizar la suma de los errores cuadráticos medios con el factor de peso adecuado. Adoptando este criterio se obtiene un error cuadrático medio:

$$E_{CMW} = \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} W_k^2 \left| f(x_k) - y_k \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{6}$$

Este procedimiento fuerza la función de ajuste cerca de los puntos donde se le asigna mayor peso. Considerando 6, encontrar el método de mínimos cuadrados para aproximar un conjunto de datos considerando el factor de peso W_k.

Resolución

Resolución - Problema 1:

Gráficas de los coeficientes interpoladores, polinomio interpolados y error de aproximación respectivamente:

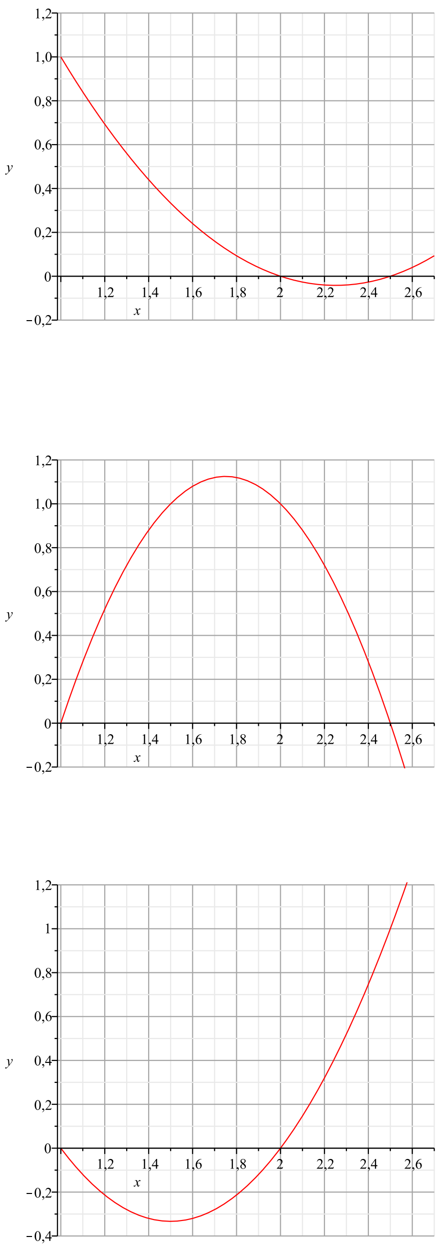


Figura 1: Gráfica de los coeficientes interpoladores de Lagrange para el caso considerado.

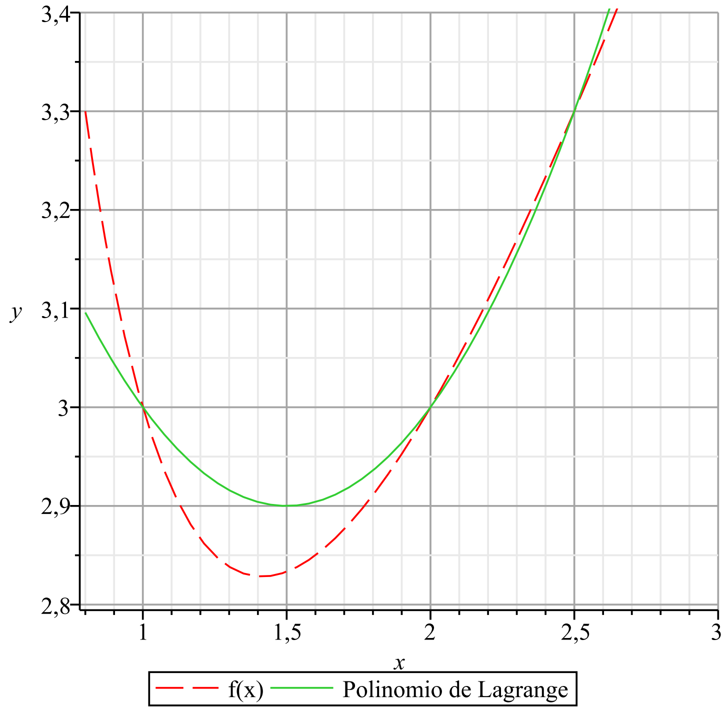


Figura 2: Comparación entre interpolante de Lagrange y la función a interpolar.

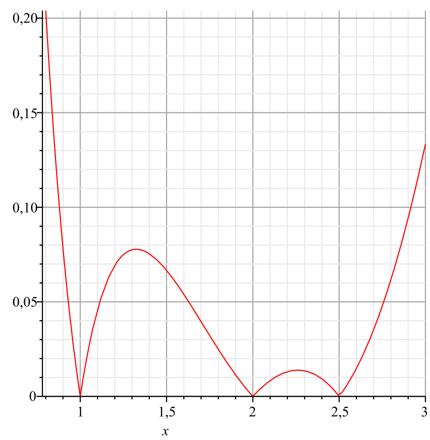


Figura 3: Error de la aproximación a la función $f(x)$.

Polinomio de Lagrange encontrado:

$$P_N(x) = 0{,}4x^2 - 1{,}2x + 3{,}8 \tag{7}$$

Resolución - Problema 2:

En las gráficas siguientes se presenta la solución del ejercicio 2.1:

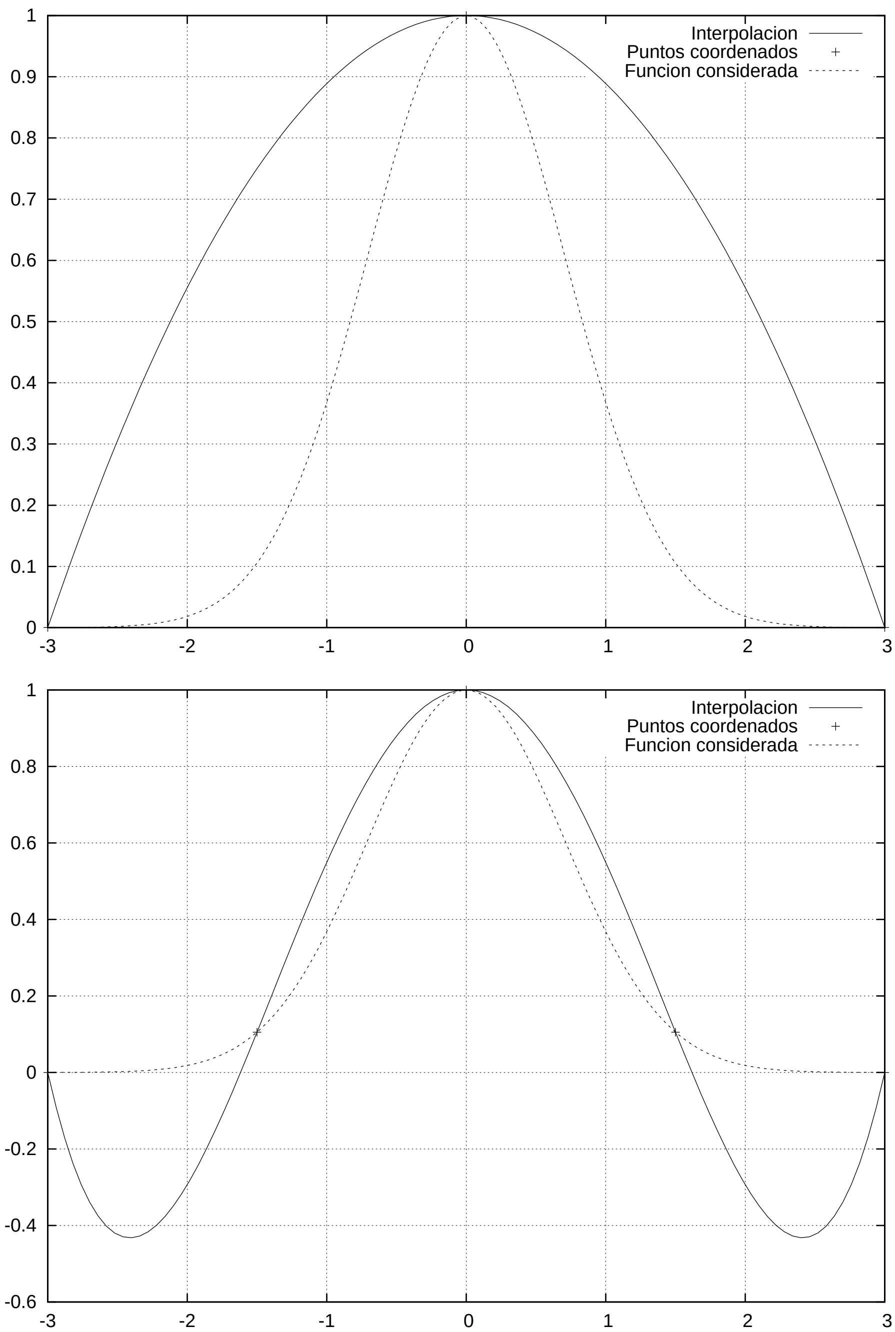


Figura 4: Polinomios interpoladores, $n = 2, 4$

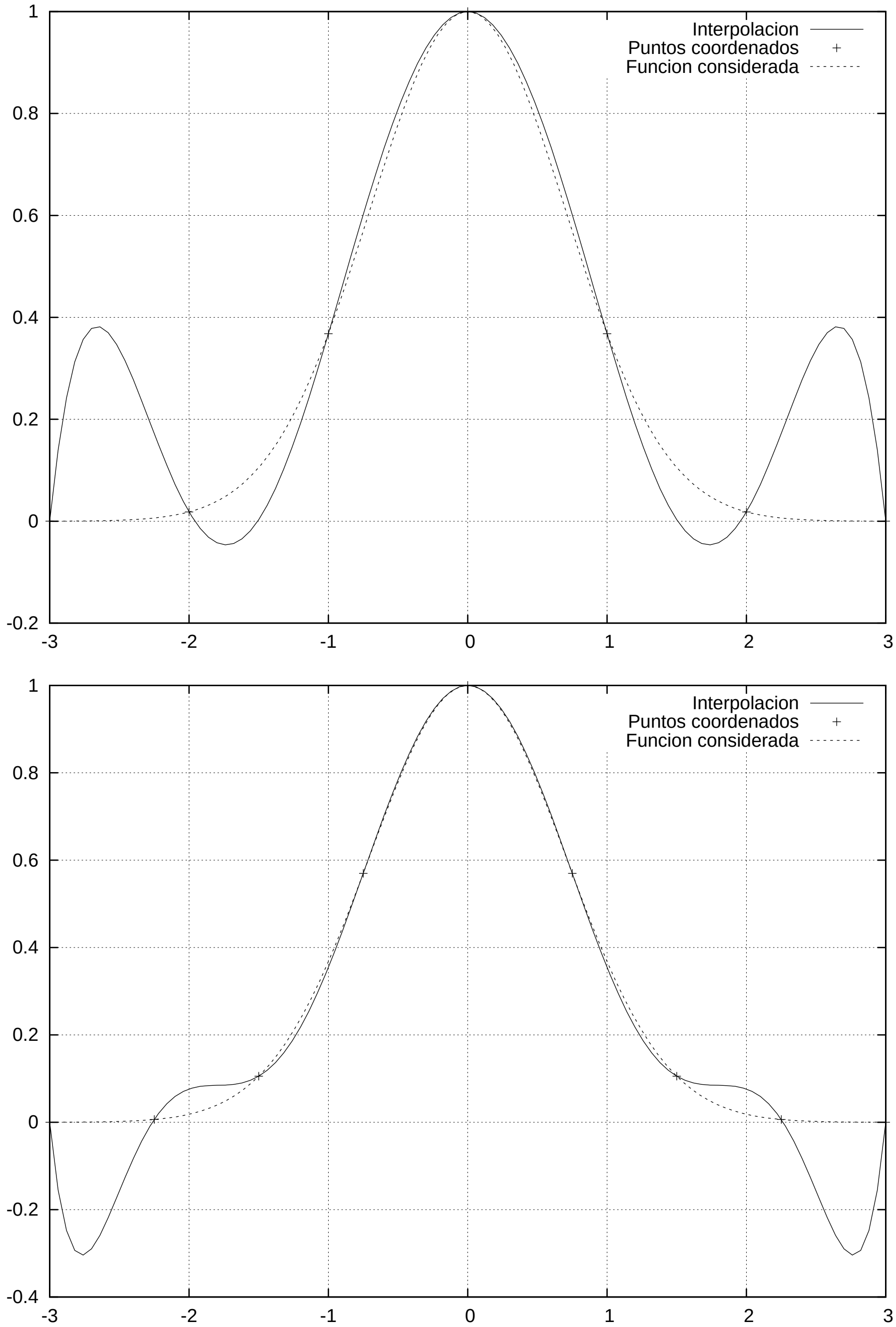


Figura 5: Polinomios interpoladores, $n = 6, 8$

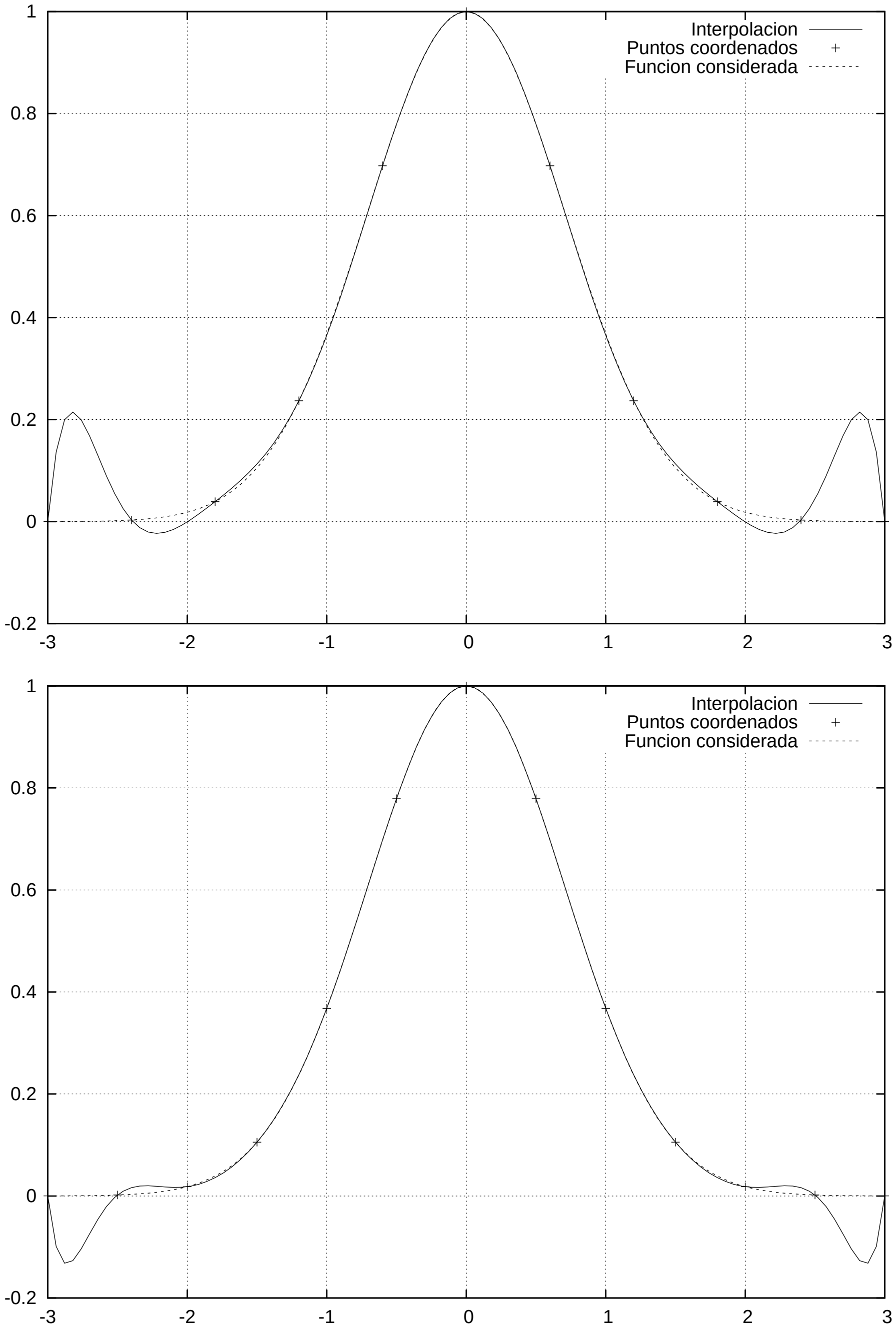
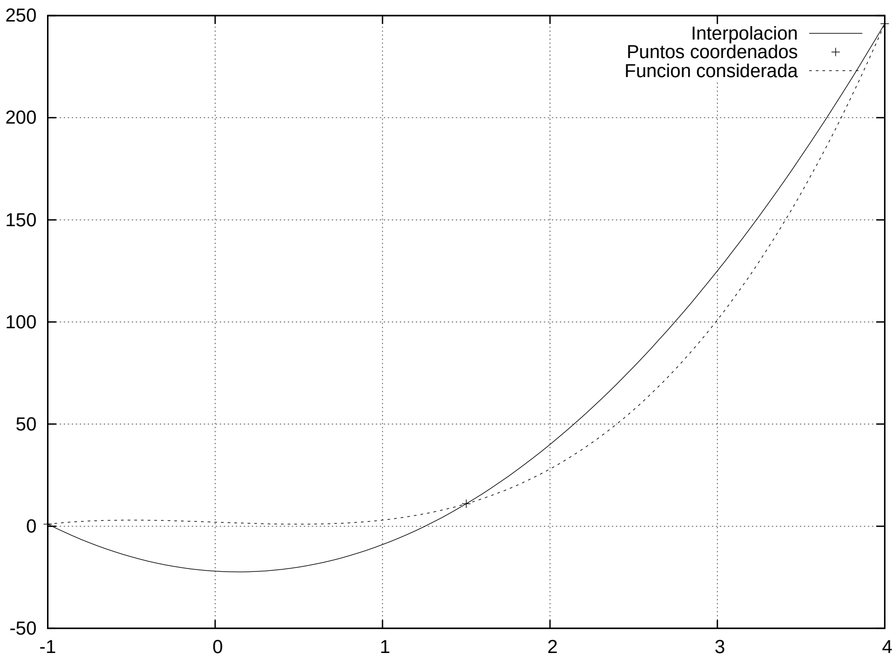


Figura 6: Polinomios interpoladores, $n = 10, 12$

En las gráficas siguientes se presenta la solución del ejercicio 2.2:



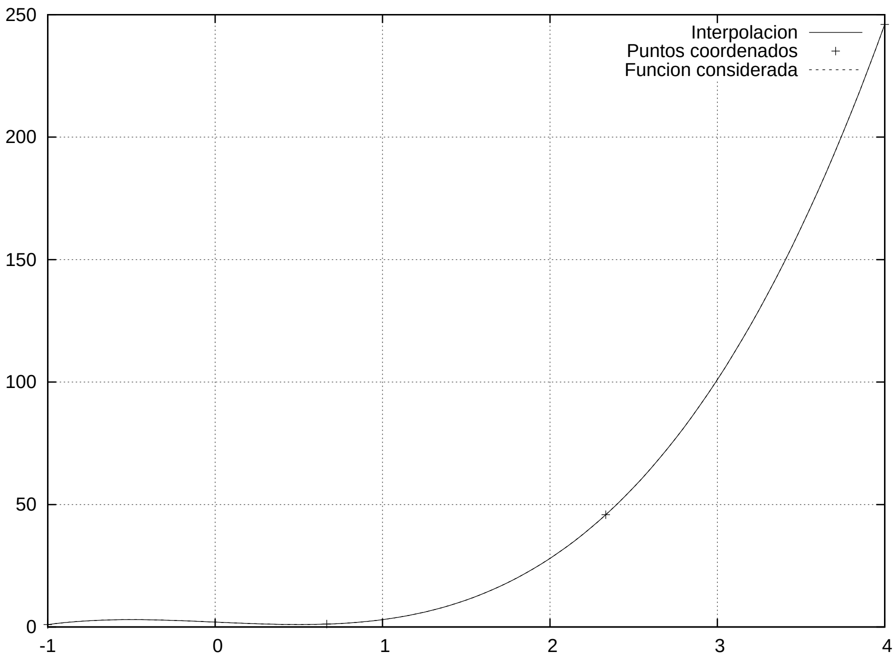
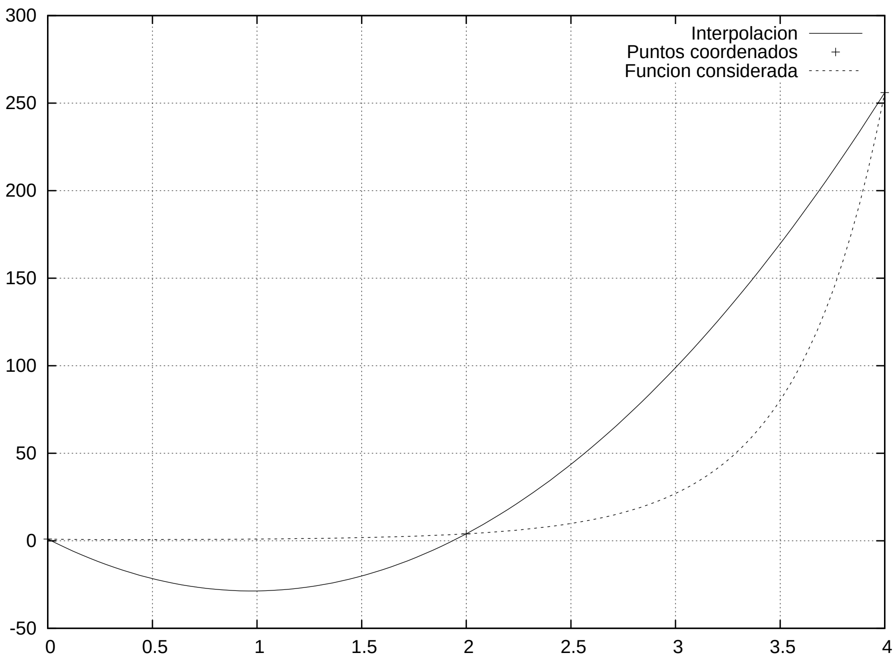


Figura 7: Polinomios interpoladores, $n = 2$, $y\,3$

En las gráficas siguientes se presenta la solución del ejercicio 2.3:



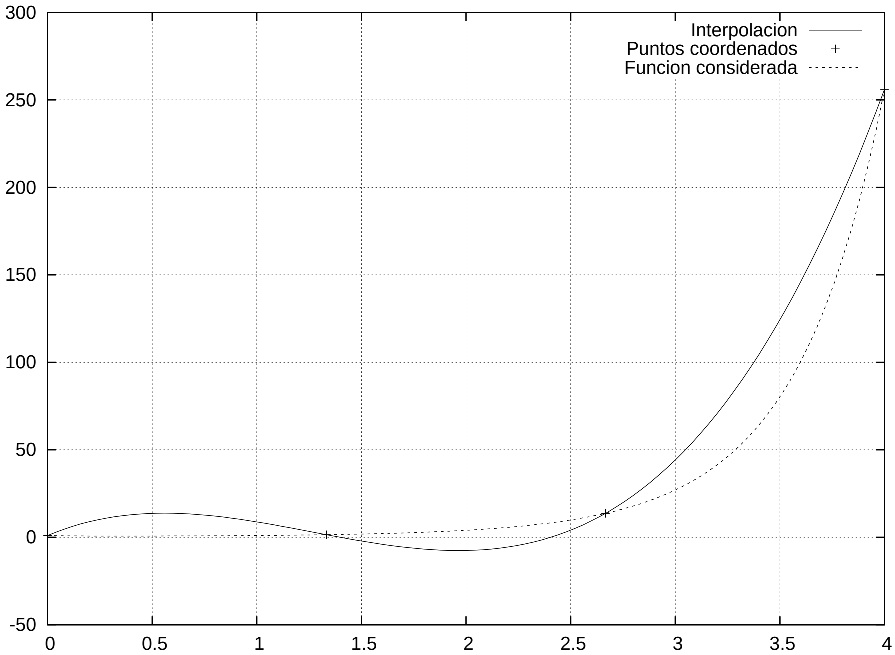


Figura 8: Polinomios interpoladores, $n = 2, 3$

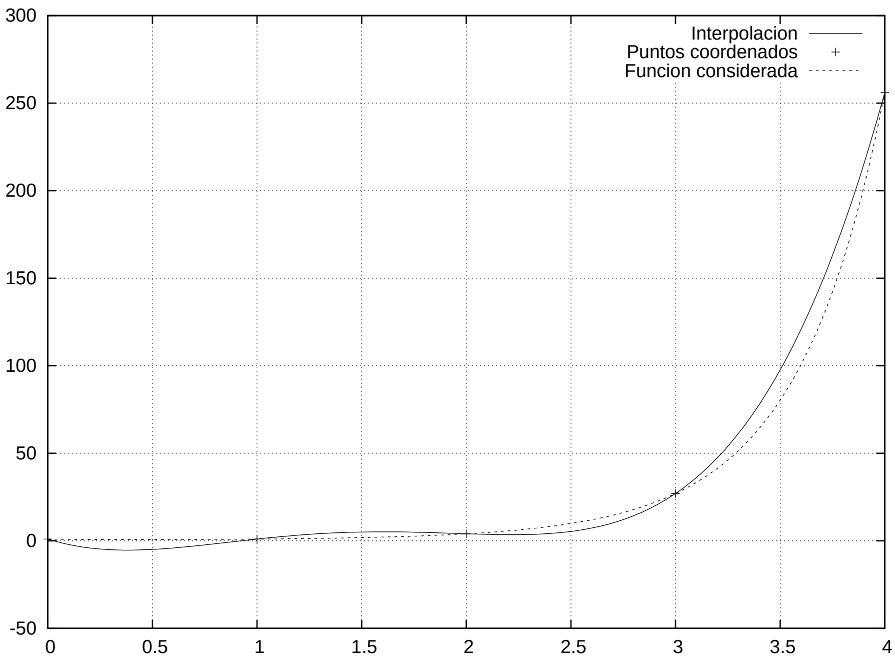


Figura 9: Polinomios interpoladores, $n = 4$

Resolución - Problema 3:

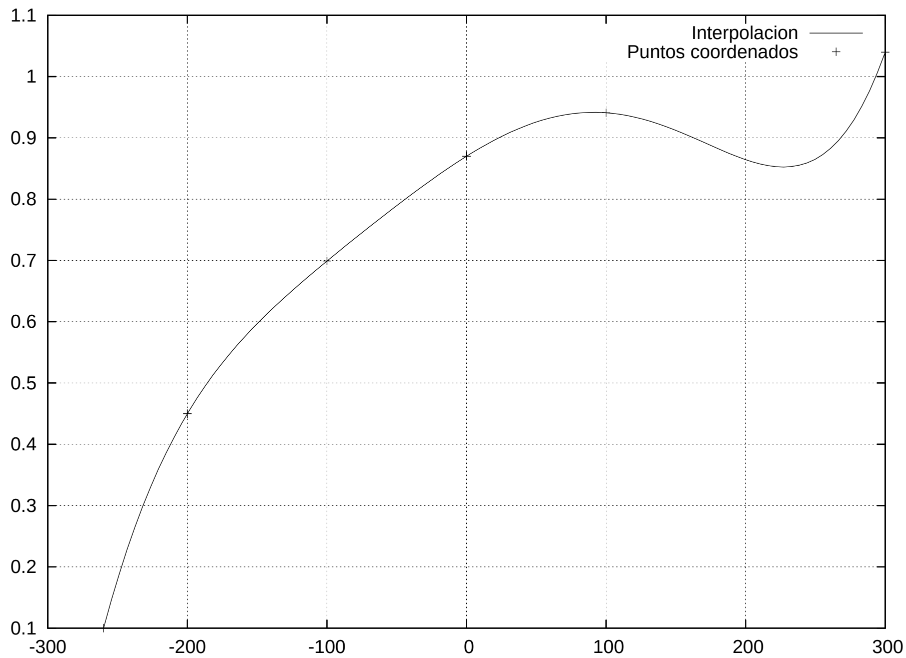


Figura 10: Polinomio interpolador de Lagrange utilizado para aproximar los valores de medición.

Notar que seria una buena aproximación interpolar los valores medidos de a tramos, es decir, obtener por ejemplo dos polinomios interpoladores en dos tramos del dominio de medición. Como es sabido, los polinomios de Lagrange no son buenas aproximaciones para extrapolar valores de medición, en caso de utilizarlos para tal fin, es recomendable graficar el polinomio junto con los valores de medición para verificar su tendencia. De los resultados se puede observar también que en ocasiones no son una buena aproximación para interpolar valores de mediciones, no se recomienda utilizar ordenes de interpolación grandes. Esta recomendación es muy dependiente de los valores a interpolar. Notar que en ocasiones es una buena medida no considerar ciertos puntos de las mediciones para obtener una mejor aproximación a los valores, se recomienda siempre graficar el polinomio junto con los valores de medición antes de adoptar algún criterio. De lo anterior se concluye que los polinomios de Lagrange, no son en general una buena herramienta para interpolar valores de ensayos, para tal motivo se utilizan métodos de ajuste de curvas apropiados.

Resolución - Problema 6:

Polinomio de ajuste encontrado:

$$P(x) = 0{,}0027632101x^2 - 0{,}0934473068x + 0{,}9988952381 \tag{8}$$

$$E_{MC} = 0{,}0010184689 \tag{9}$$

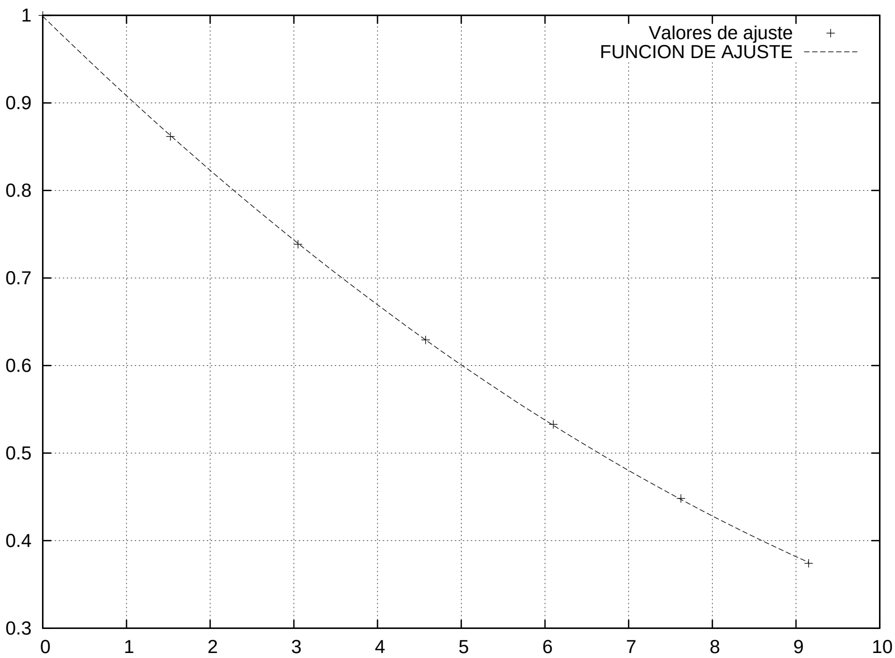


Figura 11: Resultado de la curva de ajuste.

Resolución - Problema 7:

Polinomio de ajuste:

$$P(x) = 65{,}3020970380x + 2{,}7177342055 \tag{10}$$

$$E_{MC} = 6{,}7084632931 \tag{11}$$

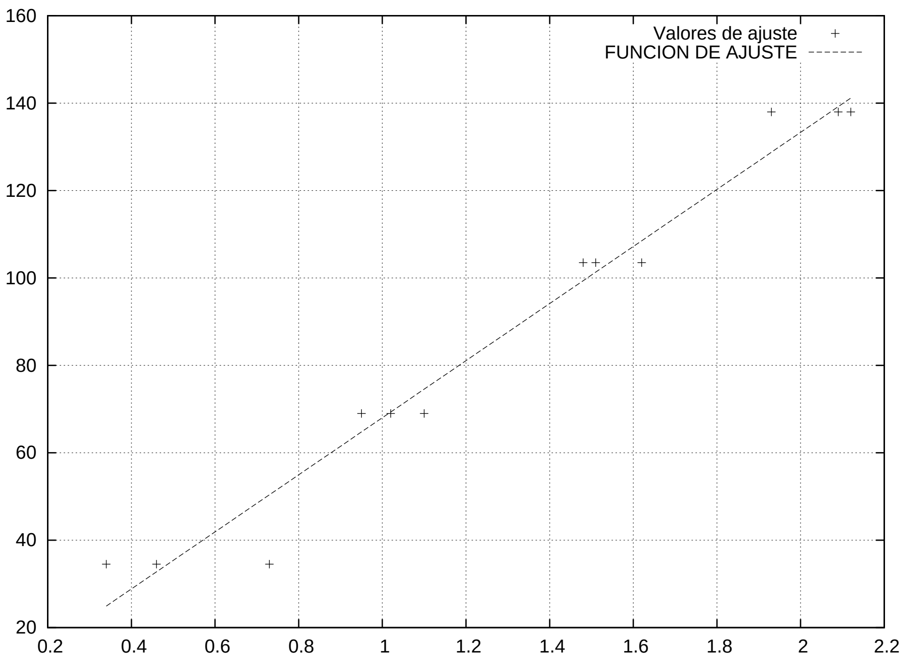


Figura 12: Resultado de la curva de ajuste.