Cálculo Numérico - Trabajo Práctico N°9

Integración y Derivación Numérica

Método de Cuadratura de Gauss-Legendre

Método de Diferencias Finitas

Problema 1:

Pruebe que las dos integrales son iguales y calcule la aproximación con dos puntos de Gauss:

$$\int_0^2 \frac{sen\,(t)}{t}dt = \int_{-1}^1 \frac{sen\,(x+1)}{x+1}dx \tag{1}$$

Note que se realiza el cambio de variables necesario para aplicar el método de Gauss-Legendre en forma directa.

Problema 2:

Resuelva el problema **3.4** de la guía N°8 utilizando el método de cuadratura de Gauss con dos y tres puntos, compare los resultados con los obtenidos utilizando el método compuesto del Trapecio y Simpson respectivamente.

Problema 3.4:

$$\int_0^\pi sin\,(2\varphi)\,e^{-\varphi}\,d\varphi \tag{2}$$

Problema 3:

La aproximación a la derivada primera mediante diferencia centrada queda determinada por la siguiente expresión:

$$f'\,(x) = \frac{f\,(x+h) - f\,(x-h)}{2h} + \mathcal{O}\left(h^2\right) \tag{3}$$

se observa que el error de la aproximación es $\mathcal{O}\left(h^2\right)$. Notar que dado un conjunto de puntos $(x_i, f\,(x_i))\,,\ i = 0, 1, \ldots, n$ es posible obtener una aproximación a la derivada primera utilizando (3) en todo el dominio excepto en los extremos x_0 y x_n, esto debido a que es necesario el valor de la función en puntos donde se desconoce ($x_{-1}\ y\ x_{n+1}$). Para obtener el valor de la derivada en los extremos se utilizan aproximaciones descentradas hacia adelante (forward) o hacia atrás (backward) según corresponda. Considerando esto encuentre una expresión adecuada para la derivada en los extremos que conserve el orden de aproximación $\mathcal{O}\left(h^2\right)$.

Ayuda: Encuentre la expansión en series de Taylor de $f\,(x+h)$ y $f\,(x+2h)$, opere con estas expresiones para obtener el resultado buscado.

Problemas de aplicación

Problema 4:

El voltaje $E = E(t)$ en un circuito electrónico obedece la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$E(t) = L\frac{dI}{dt} + R\,I(t) \tag{4}$$

donde R es la resistencia, L la inductancia e I la intensidad de corriente. Considerando $L = 0{,}05$ $[H]$, $R = 2$ $[\Omega]$ y los valores de intensidad de corriente $I(t)$ relevados en función del tiempo presentados en la tabla debajo:

t	$I(t)$
1.0	8.2277
1.1	7.2428
1.2	5.9908
1.3	4.5260
1.4	2.9122

1. Determine numéricamente el valor de $E(1{,}2)$ con precisión $\mathcal{O}\left(t^2\right)$.
2. Compare su respuesta considerando que $I(t) = 10\,e^{-t/10} sin(2t)$.

Problema 5:

La presión ejercida por una corriente de aire sobre una pared vertical es relevada en un ensayo experimental. Los valores relevados se presentan en la figura 1 debajo. Es de utilidad para cálculos estructurales conocer la ubicación del centro de presiones en la pared.

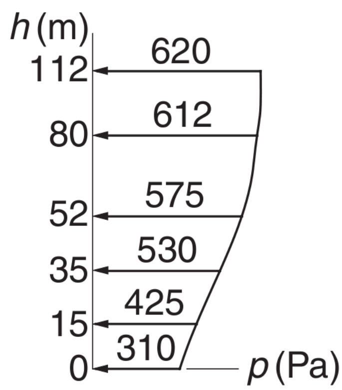

Figura 1: Distribución de presiones en una pared vertical.

Encontrar la altura del centro de presiones. Intente ajustar los datos relevados con una función adecuada, puede utilizar un ajuste cúbico, o el que considere adecuado. Porque es necesario encontrar una función que aproxime los datos para utilizar el método de Gauss-Legendre?, que otro método podría utilizar?, cual es el método correcto?.

Problema 6:

Las estaciones de radar A y B de la figura 2, separadas por una distancia $a = 500$ $[m]$, siguen en todo momento la aeronave ubicada en el punto C. Se toman mediciones simultaneas de los ángulos α y β en intervalos de tiempo de 1 $[s]$., los datos relevados se presentan en la tabla 1 a continuación.

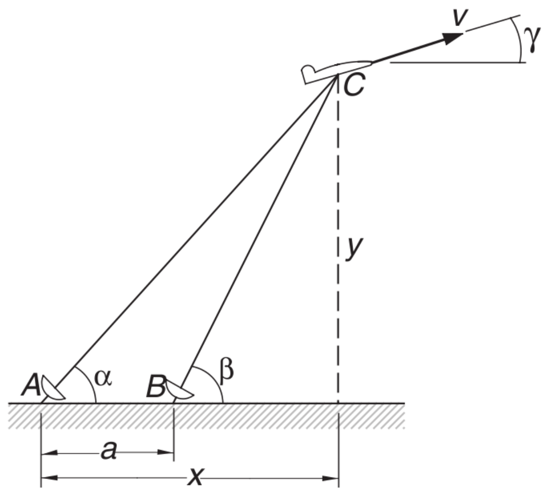

Figura 2: Esquema de las estaciones de radar y de la aeronave en vuelo.

t $[s]$	9	10	11
α [°]	54.80	54.06	53.34
β [°]	65.59	64.59	63.62

Cuadro 1: Datos relevados de α y β en función del tiempo.

Calcule la velocidad V de la aeronave, y el ángulo de ascenso γ a $t = 10$ $[s]$.

Problema 7:

Consideremos el sistema biela-manivela de la figura 3, donde la barra $A - B$ de longitud $R = 90$ $[mm]$ está rotando a una velocidad angular de $\frac{d\theta}{dt} = 5000$ $\left[\frac{rev}{min}\right]$. Calcule la aceleración del pistón a $\theta = 0°, 5°, 10°, \ldots, 180°$ por diferenciación numérica. Encuentre una expresión para la posición del pistón, luego evalúe de manera numérica para los valores angulares requeridos.

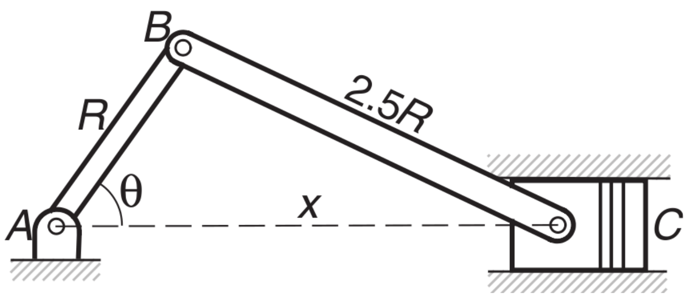

Figura 3: Diagrama esquemático del sistema biela-manivela.

Resolución

Resolución-Problema 3:

Del desarrollo en serie de Taylor de $f(x+h)$ y $f(x+2h)$, se tiene:

$$f(x+h) = f(x) + h\,f'(x) + \frac{1}{2}h^2\,f''(x) + \frac{1}{6}h^3\,f'''(x) + \mathcal{O}\left(h^4\right) \tag{5}$$

$$f(x+2h) = f(x) + 2h\,f'(x) + 2h^2\,f''(x) + \frac{4}{3}h^3\,f'''(x) + \mathcal{O}\left(h^4\right) \tag{6}$$

Multiplicando la primera ecuación por 4 y restándole la segunda, se tiene:

$$4f(x+h) = 4f(x) + 4h\,f'(x) + 2h^2\,f''(x) + \frac{4}{6}h^3\,f'''(x) + \mathcal{O}\left(h^4\right) \tag{7}$$

$$\begin{aligned} 4f(x+h) - f(x+2h) = &\left(4f(x) + 4h\,f'(x) + 2h^2\,f''(x) + \frac{4}{6}h^3\,f'''(x) + \mathcal{O}\left(h^4\right)\right) + \\ &- \left(f(x) + 2h\,f'(x) + 2h^2\,f''(x) + \frac{4}{3}h^3\,f'''(x) + \mathcal{O}\left(h^4\right)\right) \end{aligned} \tag{8}$$

$$4f(x+h) - f(x+2h) = 3f(x) + 2h\,f'(x) + \mathcal{O}\left(h^3\right) \tag{9}$$

despejando $f'(x)$ se obtiene la expresión forward:

$$f'(x) = \frac{4f(x+h) - f(x+2h) - 3f(x)}{2h} + \mathcal{O}\left(h^2\right) \tag{10}$$

Buscando la expresión backward, del desarrollo en serie de Taylor de $f(x-h)$ y $f(x-2h)$, se tiene:

$$f(x-h) = f(x) - h\,f'(x) + \frac{1}{2}h^2\,f''(x) - \frac{1}{6}h^3\,f'''(x) + \mathcal{O}\left(h^4\right) \tag{11}$$

$$f(x-2h) = f(x) - 2h\,f'(x) + 2h^2\,f''(x) - \frac{4}{3}h^3\,f'''(x) + \mathcal{O}\left(h^4\right) \tag{12}$$

Igual que antes, multiplicando por 4 la primera y restando la segunda se obtiene:

$$\begin{aligned} 4f(x-h) - f(x-2h) = &\left(4f(x) - 4h\,f'(x) + 2h^2\,f''(x) - \frac{4}{6}h^3\,f'''(x) + \mathcal{O}\left(h^4\right)\right) + \\ &- \left(f(x) - 2h\,f'(x) + 2h^2\,f''(x) - \frac{4}{3}h^3\,f'''(x) + \mathcal{O}\left(h^4\right)\right) \end{aligned} \tag{13}$$

$$f'(x) = \frac{-4f(x-h) + f(x-2h) + 3f(x)}{2h} + \mathcal{O}\left(h^2\right) \tag{14}$$

Resolución-Problema 6:

Se determinan las relaciones geométricas necesarias para resolver el problema. La velocidad de la aeronave se determina de manera vectorial como:

$$V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \tag{15}$$

Del esquema del problema se tienen las siguientes relaciones:

$$\frac{y}{x} = tan\,(\alpha) \quad ; \quad \frac{y}{(x-a)} = tan\,(\beta) \tag{16}$$

operando con estas relaciones se tiene:

$$x = -a\frac{tan\,(\beta)}{tan\,(\alpha) - tan\,(\beta)} \quad ; \quad y = -a\frac{tan\,(\beta)\ tan\,(\alpha)}{tan\,(\alpha) - tan\,(\beta)} \tag{17}$$

Dados los valores de α y β de la tabla, se obtienen los correspondientes de x e y para los tiempos considerados, luego se obtiene la derivada temporal y se evalúa el valor de la velocidad. Obtenida esta se encuentra el ángulo de ascenso de la siguiente ecuación:

$$V\,cos\,(\gamma) = \dot{x} \quad o \quad V\,sin\,(\gamma) = \dot{y} \tag{18}$$

Resolución-Problema 7:

La posición del pistón se determina de manera geométrica del esquema del problema como:

$$x = R\,cos\,(\theta) + 2{,}5R\,cos\,(\alpha) \tag{19}$$

con α el ángulo que forma la biela con la horizontal. Luego se tiene;

$$R\,sin\,(\theta) = 2{,}5R\,sin\,(\alpha) \quad \rightarrow \quad sin\,(\alpha) = \frac{1}{2{,}5}sin\,(\theta) \tag{20}$$

$$cos\,(\alpha) = \sqrt{1 - sin^2\,(\alpha)} \tag{21}$$

de las dos anteriores se tiene:

$$cos\,(\alpha) = \frac{1}{2{,}5}\sqrt{2{,}5^2 - sin^2\,(\theta)} \tag{22}$$

reemplazando en la primera se tiene:

$$x = R\left(cos\,(\theta) + \sqrt{2{,}5^2 - sin^2\,(\theta)}\right) \tag{23}$$

Luego, dada la velocidad angular constante de la manivela, se obtienen valores de la posición del pistón para diferentes tiempos que se corresponden con ángulos a través de la velocidad angular. Con estos datos y la expresión numérica de la derivada segunda se obtienen los datos buscados.