Cálculo Numérico - Trabajo Práctico N°5

Resolución de sistemas lineales

Método de Jacobi, Gauss-Seidel - Matrices en banda - Coeficiente de relajación

Problema 1:

Realice un programa implementando los métodos de Jacobi y de Gauss-Seidel, luego resuelva el siguiente sistema lineal:

$$\begin{aligned} 4x - y + z &= 7 \\ 4x - 8y + z &= -21 \\ -2x + y + 5z &= 15 \end{aligned} \tag{1}$$

Reescribiendo el sistema (2), intercambiando las filas 1 y 3 se obtiene el sistema lineal siguiente:

$$\begin{aligned} -2x + y + 5z &= 15 \\ 4x - 8y + z &= -21 \\ 4x - y + z &= 7 \end{aligned} \tag{2}$$

Es posible encontrar solución al sistema de ecuaciones (2) utilizando el método de Jacobi o Gauss-Seidel?, fundamente su respuesta. Compruebe que la sucesión de soluciones obtenidas para el sistema lineal (2) es divergente.

Respuesta:
Solución: $x = 2$, $y = 4$, $z = 3$

Problema 2:

Decida si los métodos de Jacobi y/o Gauss-Seidel son aplicables para resolver los siguientes sistemas de ecuaciones. En cada caso afirmativo calcule las soluciones, en el caso (a) con $\delta = 1 \times 10^{-11}$, en el caso (b) con $\delta = 1 \times 10^{-4}$. ¿Cuántas iteraciones son necesarias en cada caso para alcanzar la precisión deseada?

$$a) \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} \quad , \quad b) \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 & 5 \\ 7 & 10 & 8 & 7 \\ 6 & 8 & 10 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ 32 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Respuesta:
a).- Vector inicial: $X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, Solución: $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, con Gauss-Seidel tomó 14 iteraciones, con Jacobi tomó 47.

b).- Vector inicial: $X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, Solución: $x_1 =?$, $x_2 =?$, $x_3 =?$, $x_4 =?$, con Gauss-Seidel tomó ? iteraciones, con Jacobi tomó ?.

En ambos casos se utiliza como criterio de corte en la iteración el error de la aproximación calculado como la norma euclidiana de la diferencia entre los vectores solución en dos pasos de iteración consecutivos:

$$error_k = \|X_k - X_{k+1}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} (x_k - x_{k+1})^2} \tag{4}$$

Problema 3:

Como criterio general para decidir cuan cerca se está de la solución de determinado problema, frecuentemente se utiliza el error relativo entre dos puntos consecutivos. Si escribimos el sistema lineal general $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ como $\boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$, y si $\boldsymbol{x}_k$ es el vector obtenido en el k-ésimo paso del método iterativo de Jacobi y/o Gauss-Seidel, entonces la norma del residuo $\boldsymbol{Ax}_k - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ es en general un criterio más adecuado a la hora de decidir cuando detener el proceso iterativo del método. Implemente este criterio para decidir cuando detener el proceso iterativo. Notar las ventajas de este criterio.

Resuelva el problema 2 nuevamente considerando este criterio de corte en el proceso de iteración.

Respuesta:

a).- Vector inicial: $X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, Solución: $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, con Gauss-Seidel tomó 14 iteraciones, con Jacobi tomó 48

Problema 4:

Utilice el método iterativo de Gauss-Seidel para resolver el siguiente sistema lineal con estructura de banda:

$$\begin{aligned}
12x_1 - 2x_2 + x_3 &= 5 \\
-2x_1 + 12x_2 - 2x_3 + x_4 &= 5 \\
x_1 - 2x_2 + 12x_3 - 2x_4 + x_5 &= 5 \\
x_2 - 2x_3 + 12x_4 - 2x_5 + x_6 &= 5 \\
&\vdots \\
x_{46} - 2x_{47} + 12x_{48} - 2x_{49} + x_{50} &= 5 \\
x_{47} - 2x_{48} + 12x_{49} - 2x_{50} &= 5 \\
x_{48} - 2x_{49} + 12x_{50} &= 5
\end{aligned}$$

Ayuda: de los programas desarrollados anteriormente, crear de manera general un algoritmo que busque el ancho de banda de la matriz $\boldsymbol{A}$ del sistema de ecuaciones a resolver, el mismo se define como: $max\,\{abs\,(j-i)\}\ \forall\ i,j\ \setminus\ A\,(i,j) \neq 0$. Encontrado el ancho de banda, resolver el sistema de manera eficiente solo utilizando la banda diferente de cero de la matriz $\boldsymbol{A}$. Compruebe este hecho evaluando el tiempo requerido para resolver un sistema lineal con y sin ancho de banda.

Problema 5:

El método de Gauss-Seidel puede mejorar la convergencia con una técnica denominada relajación. La idea es realizar una ponderación entre el valor de la incógnita x_{k+1} y el valor obtenido en la iteración anterior x_k. Obteniendo una fórmula de iteración:

$$x_i \leftarrow \frac{\omega}{A_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1, i \neq j}^{N} A_{ij} x_j \right) + (1 - \omega)\, x_i \quad , \quad i = 1, 2, 3, \ldots, N \tag{5}$$

donde ω es un factor de relajación. Para $\omega < 1$ se obtiene una interpolación de los valores entre la iteración anterior y la actual (comparado con la ecuación de Gauss-Seidel clásica), este caso de denomina subrelajación. Para $\omega > 1$ se obtiene una extrapolación de los valores entre la iteración anterior y la actual, este caso de denomina sobrerelajación.

Utilizando el método de relajación resuelva el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -8 \\ 10 \\ 10 \\ -8 \\ 10 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Utilizar coeficiente de relajación $\omega = 1{,}1$ y $\omega = 1{,}0$, compare el número de iteraciones necesarias para resolver el sistema de ecuaciones. Notar que se encuentra la solución del sistema lineal siendo que este no es diagonalmente dominante. Esto verifica que la condición de diagonalmente dominante es solo una condición suficiente, no necesaria para que exista convergencia.