Cálculo Numérico - Trabajo Práctico N°10

Ecuaciones diferenciales - Problemas de valores iniciales

Método de Euler - Método de Runge-Kutta

Problema 1:

Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales aplicando el método de Euler con pasos $h = 0{,}2$ y $h = 0{,}1$ respectivamente:

1. $\frac{dy}{dt} = t^2 - y$ con $y(0) = 1$, $t = [0, 3]$; solución exacta $y(t) = -e^{-t} + t^2 - 2t + 2$
2. $\frac{dy}{dt} = e^{-2t} - 2y$ con $y(0) = \frac{1}{10}$, , $t = [0, 10]$; solución exacta $y(t) = \left(\frac{1}{10} + t\right) e^{-2t}$

Calcule para cada caso el error global de la aproximación, definido como:

$$e_r = |y(t_k) - \overline{y}(k)| \tag{1}$$

donde $y(t_k)$ es la solución exacta evaluada en el punto t_k, y $\overline{y}(k)$ es la aproximación a la solución obtenida utilizando el método de Euler en el paso k.

Problema 2:

Verifique que el problema:

$$\frac{dy}{dt} = y^{1/3} \quad con \quad y(0) = 0 \tag{2}$$

tiene dos soluciones $y(t) = \frac{2}{3}t^{3/2}$ y $y(t) = 0$. Cual de las soluciones puede ser reproducida con el método de Euler si las condiciones iniciales son establecidas como $y(0) = 0$ e $y(0) = 10^{-16}$.

Problema 3:

Un paracaidista salta desde un avión, hasta el momento en que abre el paracaídas la resistencia del aire es proporcional a $v^{3/2}$, donde v es la velocidad del paracaídas. Supongamos que el intervalo temporal es $[0, 6]$ y que la ecuación diferencial para la velocidad de descenso es:

$$\frac{dv}{dt} = 10 - 0{,}01v^{3/2} \quad en \quad [0, 6] \quad con \;\; v(0) = 0 \tag{3}$$

Utilice el método de Euler con $h = 0{,}05$ para estimar $v(6)$.

Problema 4:

El método de Euler, obtenido de la serie de Taylor truncada a primer orden queda expresado por:

$$y(t_0 + h) = y(t_0) + \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t_0} h + \mathcal{O}\left(h^2\right) \tag{4}$$

donde $\mathcal{O}\left(h^2\right)$ es el orden del error local cometido en un paso. Demostrar que el error global cometido en N pasos es de $\mathcal{O}(h)$.

Problema 5:

Dado un problema de valores iniciales general:

$$y' = \frac{dy}{dt} = f\left(y\left(t\right), t\right) \qquad y\left(0\right) = y_0 \tag{5}$$

deduzca los coeficientes del método de Runge-Kutta de orden 2 definido como:

$$\begin{aligned} v_0 &= y_0 \\ v_{n+1} &= v_n + \alpha_1 k q_1 + \alpha_2 k q_2 \\ q_1 &= f\left(v_n, t_n\right) \\ q_2 &= f\left(v_n + \beta k q_1, t_n + \gamma k\right) \end{aligned} \tag{6}$$

donde se utiliza v_n como el valor aproximado de $y\left(t_n\right)$; α_1,α_2,β, y γ son los coeficientes a determinar, y k es el valor del paso temporal.

Problema 6:

En una reacción química, una molécula de una sustancia A se combina con otra de una sustancia B para formar una molécula de sustancia C. Se sabe que la concentración $y\left(t\right)$ de la sustancia C en el instante t es la solución del problema de valor inicial

$$y' = k\left(a - y\right)\left(b - y\right) \quad con \quad y\left(0\right) = 0 \tag{7}$$

donde k es una constante positiva, a y b son las concentraciones iniciales de las sustancias A y B respectivamente. Supongamos que $k = 0{,}01$, $a = 70 \times 10^{-3}$ $[mol/litro]$ y $b = 50 \times 10^{-3}$ $[mol/litro]$. Utilice el método de Runge-Kutta de orden $N = 4$ con $h = 0{,}5$ para hallar la solución en el intervalo $[0, 20]$. Compare la solución obtenida con la solución exacta $y\left(t\right) = 350\left(1 - e^{-0{,}2t}\right) / \left(7 - 5e^{-0{,}2t}\right)$, observe que el valor límite cuando $t \to +\infty$ es 50.

Problema 7:

Utilice el método de Runge -Kutta de orden 4 para integrar:

$$y' = 3y - 4e^{-x} \quad y\left(0\right) = 1 \tag{8}$$

con $x = [0, 10]$ y longitud de paso $h = 0{,}1$. Compare el resultado obtenido con la solución exacta $y = e^{-x}$.

Resolución

Resolución-Problema 5:

Los métodos de Runge-Kutta se desarrollan a partir de las series de Taylor, proponiendo una expresión con coeficientes apropiados de tal manera que se reproduzca el mismo orden de precisión de la serie de Taylor pero sin necesidad de evaluar derivadas, solo se realizan evaluaciones de la función en algunos puntos determinados a priori. Consideremos la serie de Taylor de $y\left(t+k\right)$ centrada en t_n dada por:

$$y\left(t_n+k\right)=y\left(t_n\right)+\frac{dy\left(t_n\right)}{dt}k+\frac{1}{2!}\frac{d^2y\left(t_n\right)}{dt^2}k^2+\frac{1}{3!}\frac{d^3y\left(t_n\right)}{dt^3}k^3+\cdots \tag{9}$$

dada una ecuación diferencial ordinaria general:

$$y'=\frac{dy}{dt}=f\left(y\left(t\right),t\right)=f \tag{10}$$

las derivadas de orden superior que aparecen en (9) se obtienen a continuación:

$$y''=\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d}{dt}f\left(y,t\right)=\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}=f_t+f_yf \tag{11}$$

$$y'''=\frac{d^3y}{dt^3}=\frac{d}{dt}\left(f_t+f_yf\right)=f_{tt}+2f_{yt}f+f_{yy}f^2+f_tf_y+f_y^2f \tag{12}$$

Como se puede observar, cuando se trabaja con métodos de Taylor de alto orden, obtener una expresión analítica de gran cantidad de derivadas de la función de interés es una tarea complicada y de poca utilidad práctica en casos generales. La ventaja de los métodos de Runge-Kutta, es que solo requieren la evaluación de la función en algunos puntos de interés. Estos métodos proponen la siguiente forma explícita de la solución de la ecuación diferencial considerada :

$$\begin{aligned}
v_0&=y_0\\
v_{n+1}&=v_n+\alpha_1kq_1+\alpha_2kq_2\\
q_1&=f\left(v_n,t_n\right)\\
q_2&=f\left(v_n+\beta kq_1,t_n+\gamma k\right)
\end{aligned} \tag{13}$$

donde los coeficientes deben cumplir ciertas restricciones de manera que exista una correspondencia con el desarrollo en serie de Taylor del mismo orden. Será de utilidad el desarrollo en serie de Taylor de una función de dos variables centrada en (x,t) dado por:

$$f\left(y+a,t+b\right)=f\left(y,t\right)+\left(a\frac{\partial}{\partial y}+b\frac{\partial}{\partial t}\right)f\left(y,t\right)+\frac{1}{2!}\left(a\frac{\partial}{\partial y}+b\frac{\partial}{\partial t}\right)^2f\left(y,t\right)+\frac{1}{3!}\left(a\frac{\partial}{\partial y}+b\frac{\partial}{\partial t}\right)^3f\left(y,t\right)+\cdots \tag{14}$$

Luego, las restricciones que deben satisfacer los coeficientes se encuentran igualando la expresión (13) con la serie de Taylor (9). Utilizando (14) para desarrollar en serie de Taylor $q_2 =$

$f(v_n + \beta k q_1, t_n + \gamma k)$, y remplazando en (13) se obtiene:

$$v_{n+1} = v_n + k\alpha_1 f + k\alpha_2 f + k^2\alpha_2\beta f_y f + k^2\alpha_2\gamma f_t \tag{15}$$

Comparando términos entre (15) y el desarrollo en serie de Taylor (9) despreciando términos de orden mayor a 2 (remplazando la expresión (11) en (9)), se encuentran las siguientes relaciones a satisfacer para que el método encontrado sea de orden 2:

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 &= 1 \\ \alpha_2\beta &= \frac{1}{2} \\ \alpha_2\gamma &= \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{16}$$

como se puede observar, se tienen 4 incógnitas con solo tres ecuaciones, con lo cual uno de los parámetros debe ser elegido arbitrariamente para definir un método particular, esta posibilidad brinda una familia de métodos de Runge-Kutta. Adoptando:

$$\alpha_1 = 0 \tag{17}$$

se obtiene el método de Euler mejorado con los demás parámetros:

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= 1 \\ \beta &= \frac{1}{2} \\ \gamma &= \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{18}$$