Cálculo Numérico - Trabajo Práctico N°8

Integración Numérica

Método del Trapecio, Simpson y Boole

Problema 1:

Fórmulas de cuadratura cerradas de ***Newton-Cotes***. Supongamos que $x_k = x_0 + kh \quad (k = 0, 1, \ldots, M)$ son nodos equiespaciados, y sea $f_k = f(x_k)$ para cada $k = 0, 1, \ldots, M$. Las cuatro primeras fórmulas cerradas de Newton-Cotes están dadas por las siguientes expresiones:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\, dx \approx \frac{h}{2}(f_0 + f_1) \qquad (\textit{Regla del trapecio}) \tag{1}$$

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\, dx \approx \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2) \qquad (\textit{Regla de Simpson}) \tag{2}$$

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)\, dx \approx \frac{3h}{8}(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3) \qquad \left(\textit{Regla } \frac{3}{8} \textit{ de Simpson}\right) \tag{3}$$

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)\, dx \approx \frac{2h}{45}(7f_0 + 32f_1 + 12f_2 + 32f_3 + 7f_4) \qquad (\textit{Regla de Boole}) \tag{4}$$

Utilizando un polinomio interpolador de Lagrange $P_M(x)$ para aproximar la función $f(x)$en los nodos $x_0, x_1, \ldots, x_M$, obtenga las fórmulas cerradas de Newton-Cotes presentadas arriba.

Notar que el hecho de aproximar una función $f(x)$ dada mediante polinomios, nos brinda una expresión relativamente sencilla de integrar comparada con una función arbitraria muchas veces imposible de resolver en forma analítica.

Problema 2:

Considerando que se utiliza un polinomio interpolador de Lagrange $P_M(x)$ para obtener las fórmulas de cuadratura cerradas de Newton-Cotes, determine el grado de precisión de la regla del Trapecio y de la regla de Simpson. Para el primer caso es suficiente con aplicar la regla en el intervalo $[0, 1]$ a las funciones $f(x) = 1, x, \ y \ x^2$; mientras que para el segundo basta con aplicar la regla en el intervalo $[0, 2]$ a las funciones $f(x) = 1, x, x^2, x^3, \ y \ x^4$. Se entiende como grado de precisión, al polinómio de mayor grado que es posible integrar con estos métodos sin cometer errores en la aproximación.

Problema 3:

Con motivo de comparar la precisión en la aproximación a una cierta integral utilizando el método del Trapecio o el de Simpson, es necesario realizar las evaluaciones con el mismo número de nodos.

Esto requiere utilizar el doble de intervalos M a integrar en el caso del trapecio respecto el método de Simpson, ya que en la regla del trapecio se utilizan dos nodos por intervalo, mientras que en el de Simpson se utilizan tres nodos por intervalo. Para comprobar las diferencias en la aproximación con uno y otro método se desea calcular las siguientes integrales utilizando la regla compuesta del trapecio con $M = 10$ y la regla compuesta de Simpson con $M = 5$:

1. $\int_{-1}^{1} \left(1 + x^2\right)^{-1} dx$
2. $\int_0^4 x^2 e^{-x} dx$
3. $\int_0^1 \left(2 + sin\left(2\sqrt{\vartheta}\right)\right) d\vartheta$
4. $\int_0^{\pi} sin\left(2\varphi\right) e^{-\varphi} d\varphi$

Recomendación: antes de probar o realizar algún intento por resolver las integrales anteriores asegúrese que su programa funciona correctamente. Calcule la integral de alguna función conocida, evalue el comportamiento de los resultados cuando M crece. Como ejemplo puede utilizar $f(x) = e^x$ o alguna otra función que le resulte conveniente.

Problema 4:

Longitud de una curva. La longitud de una curva $y = f(x)$ definida sobre un intervalo $a \leq x \leq b$ es:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx \tag{5}$$

Aproxime la longitud de las curvas definidas por las siguientes funciones utilizando la regla compuesta del trapecio con $M = 5$ y la regla compuesta de Simpson con $M = 10$. Pruebe aumentar la cantidad de divisiones del intervalo de integración para verificar la convergencia a un valor determinado, mantenga la relación entre la regla del trapecio y de Simpson de manera que sean comparables los resultados obtenidos.

1. $f(x) = x^3 \qquad 0 \leq x \leq 1$
2. $f(\psi) = sin(\psi) \qquad 0 \leq \psi \leq \pi/4$

Problema 5:

Una forma alternativa de obtener las formulas de ***Newton-Cotes***. Deduzca la regla de Simpson $(M = 1, h = 1)$ utilizando el método de los coeficientes indeterminados. Determine las constantes $w_0, w_1,\, y\, w_2$ de manera que:

$$\int_0^2 g(t)\; dt = w_0 g(0) + w_1 g(1) + w_2 g(2) \tag{6}$$

sea exacta para las funciones $g(t) = 1$, $g(t) = t$, y $g(t) = t^2$. Note que debe obtener un sistema de ecuaciones lineales en w_i, $i = 0, 1, 2$.

Problemas de aplicación

Problema 6:

La tabla 1 debajo muestra la potencia P entregada por las ruedas de un auto en función de la velocidad V. Si la masa del auto es $m = 2000$ $[kg]$, determine el tiempo $\triangle t$ que le toma al auto acelerar de 1 $[m/s]$ a 6 $[m/s]$. Utilice la regla del trapecio como método de integración.

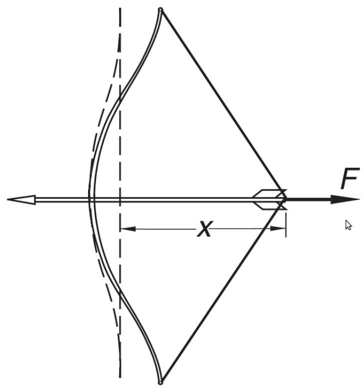
V $[\frac{m}{s}]$	0	1.0	1.8	2.4	3.5	4.4	5.1	6.0
P $[kW]$	0	4.7	12.2	19.0	31.8	40.1	43.8	43.2

Cuadro 1: Potencia entregada por las ruedas de un auto en función de la velocidad.

Ayuda: $\triangle t = m \int_{V_0}^{V_f} \frac{V}{P} \, dV$ la cual puede ser derivada de las leyes de Newton $F = m\frac{dV}{dt}$ y de la definición de potencia $P = FV$.

Problema 7:

La tabla debajo muestra la fuerza F realizada sobre la cuerda de un arco de flecha en función del desplazamiento x desde su posición de equilibrio (ver figura). Si la cuerda es estirada 0,5 $[m]$, determine la velocidad de la flecha de 0,075 $[kg]$ cuando esta sale del arco en la posición de equilibrio de la cuerda.



x $[m]$	0.00	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
F $[N]$	0.0	37	71	104	134	161	185	207	225	239	250

Cuadro 2: Fuerza realizada sobre la cuerda en función del desplazamiento x desde la posición de equilibrio.

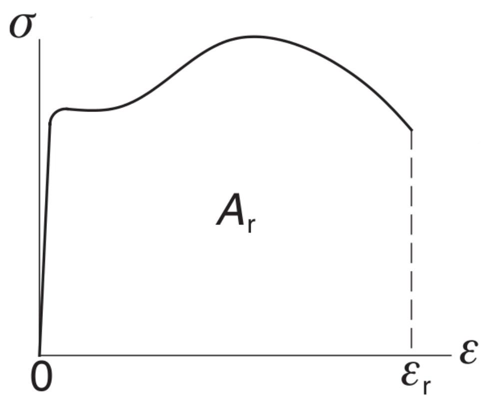
Ayuda: En un caso ideal aproximado, la velocidad de salida de la flecha se obtiene de igualar la energía cinética de la misma con el trabajo realizado por el sistema arco-flecha, esto es: $\frac{1}{2}mV^2 = \int_{x_0}^{x_f} F \, dx$

Problema 8:

Considere el diagrama de tensión-deformación obtenido de un ensayo uniaxial de tensión sobre una probeta de una aleación de niquel. El area bajo el diagrama se obtiene de:

$$A_r = \int_{\varepsilon=0}^{\varepsilon_r} \sigma \, d\varepsilon \tag{7}$$

donde ε_r es la deformación de ruptura de la probeta. El área debajo de la curva representa el trabajo que debe ser realizado por unidad de volumen del especimen ensayado para causar la ruptura, este de denomina módulo de tenacidad. Utilice un método de integración adecuado para aproximar el módulo de tenacidad de la aleación de niquel ensayada. Los valores relevados de ensayo se presentan en la tabla siguiente. Notar que los valores no están equiespaciados, por lo cual es necesario reformular los programas utilizados.



σ $[Mpa]$	586	662	765	841	814	122	150
ε	0.001	0.025	0.045	0.068	0.089	0.122	0.150

Cuadro 3: Valores relevados de ensayo a ruptura de la probeta de aleación de niquel.

Resolución

Resolución - Problema 1:

Utilizando el polinomio de Lagrange siguiente para aproximar la función a integrar en el intervalo adecuado, se tiene:

$$f(x) \approx P_M(x) = \sum_{k=0}^{M} f_k\, L_{M,k}(x) \quad con \quad f_k = f(x_k) \tag{8}$$

El procedimiento general para deducir las fórmulas de Newton-Cotes es:

$$\int_{x_0}^{x_M} f(x)\,dx \approx \int_{x_0}^{x_M} P_M(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_M} \left(\sum_{k=0}^{M} f_k\, L_{M,k}(x)\right) dx = \sum_{k=0}^{M} \left(\int_{x_0}^{x_M} L_{M,k}(x)\,dx\right) f_k = \sum_{k=0}^{M} w_k f_k \tag{9}$$

con

$$w_k = \int_{x_0}^{x_M} L_{M,k}(x)\,dx \tag{10}$$

que es el coeficiente o peso a determinar para cada caso. Notar que es la integral del coeficiente de Lagrange en todo el intervalo o dominio considerado. En este caso se puede considerar más aun la idea de coeficientes de ponderación.

Considerando el caso de regla de Simpson, con $M = 2$, se tiene el polinomio de Lagrange a integrar:

$$P_2(x) = f_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + f_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \tag{11}$$

Notar que $f_0, f_1,\ y\ f_2$ son valores conocidos y constantes resultado de evaluar la función $f(x_k)$ en $x_k,\ k = 0, 1, 2$. Remplazando (11)en (9) se obtiene:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx \approx f_0\int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}dx + f_1\int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}dx + f_2\int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}dx \tag{12}$$

Como los nodos están equiespaciados $x_k = x_0 + kh$, se pueden reescribir los términos de (12) como:

$$x_k - x_j = (k-j)\,h \quad y \quad x - x_k = (x - x_0 - kh) \tag{13}$$

de lo anterior surge un cambio de variables $x = x_0 + ht$ (con $dx = h\,dt$ y $t = [0, 2]$) para poder expresar los términos de (12) de una manera más elegante. Remplazando en (13), se obtiene $x - x_k = h(t-k)$. Luego, remplazando los cambios de variables anteriores en (12), se obtiene la sigueinte expresión:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx \approx f_0\int_{0}^{2} \frac{h(t-1)\,h(t-2)}{h(0-1)\,h(0-2)}h\,dt + f_1\int_{0}^{2} \frac{h(t-0)\,h(t-2)}{h(1-0)\,h(1-2)}h\,dt + f_2\int_{0}^{2} \frac{h(t-0)\,h(t-1)}{h(2-0)\,h(2-1)}h\,dt \tag{14}$$

$$= f_0 \int_0^2 \frac{(t-1)(t-2)}{2} h\, dt + f_1 \int_0^2 \frac{t(t-2)}{-1} h\, dt + f_2 \int_0^2 \frac{t(t-1)}{2} h\, dt = \tag{15}$$

$$= f_0 \frac{h}{2} \int_0^2 (t-1)(t-2)\, dt - f_1 h \int_0^2 t(t-2)\, dt + f_2 \frac{h}{2} \int_0^2 t(t-1)\, dt = \tag{16}$$

Evaluando la integral de cada coeficiente por separado, se tiene:

$$\int_0^2 \left(t^2 - 3t + 2\right) dt = \left.\left(\frac{t^3}{3} - \frac{3t^2}{2} + 2t\right)\right|_0^2 = \frac{2}{3} \tag{17}$$

$$\int_0^2 \left(t^2 - 2t\right) dt = \left.\left(\frac{t^3}{3} - t^2\right)\right|_0^2 = -\frac{4}{3} \tag{18}$$

$$\int_0^2 \left(t^2 - t\right) dt = \left.\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2}\right)\right|_0^2 = \frac{2}{3} \tag{19}$$

Luego se obtiene el resultado buscado:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\, dx \approx f_0 \frac{h}{3} + f_1 \frac{4}{3} h - f_2 \frac{h}{3} = \frac{h}{3}\left(f_0 + 4f_1 - f_2\right) \tag{20}$$

donde se demuestra la regla de Simpson obtenida a partir de la cuadratura de Newton-Cotes.

Resolución-Problema 3:

1. $I_{tr} = 0{,}759981497226790$; $I_{sim} = 0{,}784564830064115$
2. $I_{tr} = 1{,}52162778130442$; $I_{sim} = 1{,}52379339425796$
3. $I_{tr} = 2{,}85740884771065$; $I_{sim} = 2{,}87073811054499$
4. $I_{tr} = 0{,}366951220580332$; $I_{sim} = 0{,}382714433341350$

Resolución-Problema 4:

1. $L_{tr} = 1{,}54791308888646$; $L_{sim} = 1{,}54786565467412$
2. $L_{tr} = 1{,}05809340281740$; $L_{sim} = 1{,}05809550139454$
3. $L_{tr} =$; $L_{sim} =$