

Амортизационный анализ. Задачи

Булгаков Илья, Гусев Илья

Московский физико-технический институт

Москва, 2023

Содержание

1 Задачи

Задача 1

Покажите, как можно реализовать deque (динамический массив, позволяющий также вставлять элементы в начало и удалять элементы из начала). Учётное время работы всех операций должно быть $O(1)$.

Задача 1 (Решение)

Покажите, как можно реализовать deque (динамический массив, позволяющий также вставлять элементы в начало и удалять элементы из начала). Учётное время работы всех операций должно быть $O(1)$.

Решение:

- Берем динамический массив и зацикливаем!

Задача 2

Пусть есть куча, которая умеет выполнять `insert`, `merge`, `extractMin` за $O(\log n)$, а `heapify` (по-строить кучу по данному множеству ключей) — за $O(n)$. На её основе постройте кучу, которая умеет делать всё то же (амортизированно), но `insert` — за чистое $O(1)$.

Задача 2 (Решение)

Пусть есть куча, которая умеет выполнять `insert`, `merge`, `extractMin` за $O(\log n)$, а `heapify` (по-строить кучу по данному множеству ключей) — за $O(n)$. На её основе постройте кучу, которая умеет делать всё то же (амортизированно), но `insert` — за чистое $O(1)$.

Решение:

- Будем добавлять элементы лениво.
- Когда приходит запрос `extractMin`, строим на последних добавленных элементах кучу и сливаем с основной.

Задача 3

С помощью метода потенциалов докажите, что учётное время обработки операция push_{back}

Задача 3 (Решение)

С помощью метода потенциалов докажите, что учётное время обработки операция `push_back` и `pop_back` в динамическом массиве есть $O(1)$.

Решение:

- Введите потенциал $\Phi = |2s - c|$.

Задача 4

Объясните, как в статическом массиве находить не только минимум на отрезке, но и позицию его вхождения.

Задача 4 (Решение)

Объясните, как в статическом массиве находить не только минимум на отрезке, но и позицию его вхождения.

Решение:

- Храним в sparse table пары $(pos, value)$

Задача 5

На какие запросы помимо `min` можно отвечать с помощью `sparse table`?