Базовые алгоритмы

Булгаков Илья, Гусев Илья, Виталий Ерошин

Московский физико-технический институт

Москва, 2023

Содержание

Мастер-теорема

Формулировка

Пусть имеется рекуррентное соотношение:

$$T(n) = aT(\frac{n}{b}) + O(n^c), T(1) = O(1), n > 1,$$

где $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{R}, b > 1, c \in \mathbb{R}^+$.
Тогда асимптотическое решение имеет вид:

$$\text{Если } c > \log_b a, \text{ то } T(n) = O(n^c)$$

$$\text{Если } c = \log_b a, \text{ то } T(n) = O(n^c \log n)$$

$$\text{Если } c < \log_b a, \text{ то } T(n) = O(n^{\log_b a})$$

Мастер-теорема

Идея

Распишем рекуррентное соотношение $T(n) = aT(\frac{n}{b}) + O(n^c)$ до $T(1)$.

$$T(n) = \sum_{i=0}^{\log_b n} O(n^c(\frac{a}{b^c})^i) + O(1)$$

Искомая асимптотика зависит от асимптотики $\sum_{i=0}^{\log_b n} O((\frac{a}{b^c})^i)$.

Мастер-теорема

- Позволяет аналитически получить асимптотику разных алгоритмов.
- Утверждение верно для Θ и Ω.

Мастер-теорема

Задача 1

Найти решение рекурренты в в терминах Θ:

$$T(n) = 7T(n/7) + n$$

Мастер-теорема

Задача 1 (Решение)

Найти решение рекурренты в в терминах Θ:

$$T(n) = 7T(n/7) + n$$

Решение:

- $a = 7$
- $b = 7$
- $c = 1$
- $1 = \log_7 7$, значит по мастер-теореме $T(n) = \Theta(n \log n)$

Мастер-теорема

Задача 2

Найти решение рекурренты в в терминах Θ:

$$T(n) = T(n-1) + 2$$

Мастер-теорема

Задача 2 (Решение)

Найти решение рекурренты в в терминах Θ:

$$T(n) = T(n-1) + 2$$

Решение:

$$T(n) = T(n-1) + 2 = T(n-2) + 2 + 2 = \ldots = 2 * n = \Theta(n)$$

Мастер-теорема

Простые примеры

- Двоичный поиск
- Сортировка слиянием