

Дерево отрезков

Булгаков Илья, Сенотов Валерий, Гусев Илья

Московский физико-технический институт

Москва, 2023

Содержание

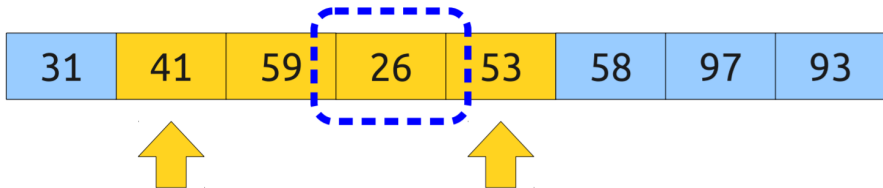
1 Задача RMQ. Напоминание

2 Дерево отрезков

Задача RMQ. Напоминание

RMQ - Range Minimum (Maximum) Query - задача поиска минимума на отрезке.

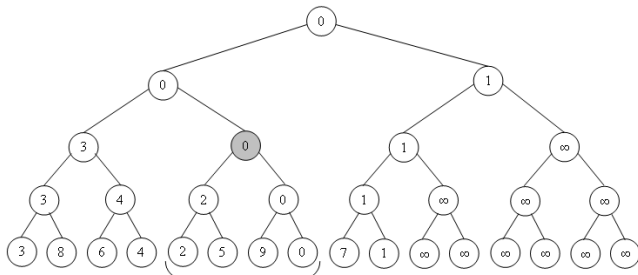
Дан массив чисел, к нему делаются запросы на поиск минимума на отрезке $[l, r]$



Дерево отрезков

Введение

Рассмотрим еще одну структуру данных для решения задачи RMQ. Дерево отрезков – это двоичное дерево, в каждой вершине которого написано значение заданной функции на некотором отрезке. Функция в нашем случае – это минимум.



Дерево отрезков

Построение и хранение

Как храним дерево?

Храним подобно бинарной куче - заведём массив $T[2n - 1]$.

Свойства:

- Корень будет лежать в первом элементе массива
- Листы лежат в элементах с номерами от n до $2n - 1$.
- Сыновья i -ой вершины будут лежать в элементах с номерами $2i$ и $2i + 1$ - левый и правый соответственно.
- $T[i] = \min(T[2i], T[2i + 1])$ для i -ой вершины, не являющейся листом.

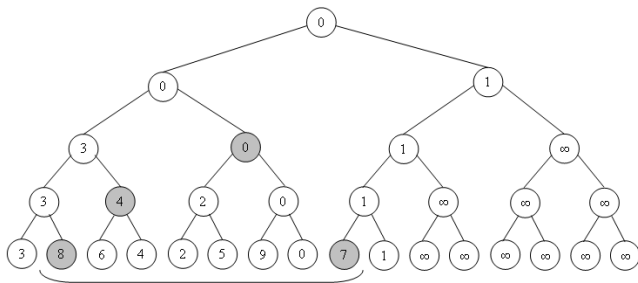
Построение за $O(n)$ подобно бинарной куче.

Дерево отрезков

Теория: фундаментальные отрезки

Фундаментальный отрезок – такой отрезок, что существует вершина в дереве, которой он соответствует.

Утверждение: на каждом уровне их количество не превосходит 2.

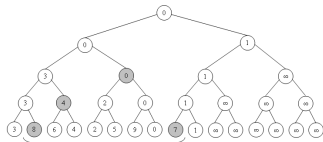


Дерево отрезков

Теория: фундаментальные отрезки

Утверждение: на каждом уровне число фундаментальных отрезков не превосходит 2.

Идея доказательства: смотрим на отрезок, для которого вычисляем RMQ. Находим длину максимального фундаментального отрезка T , которое входит в отрезок. Таких отрезков не больше 2. Если бы их было ≥ 3 , то либо отрезок был разрывной, либо включал фундаментальный отрезок длиной $2T$. Рассматриваем оставшиеся части отрезка, находим для них максимальный фундаментальный отрезок. Длина полученного отрезка строго меньше T , а их число тоже не может превышать $2x$ по той же логике.

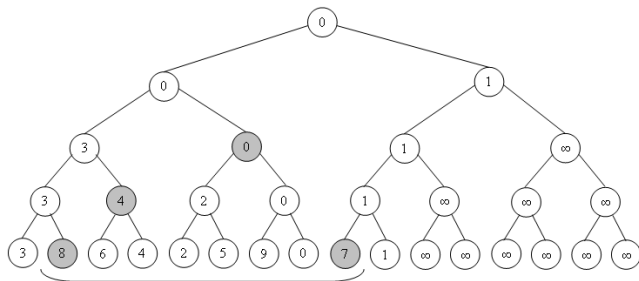


Дерево отрезков

Вычисление

Два способа вычисления решения:

- Вычисление сверху
- Вычисление снизу



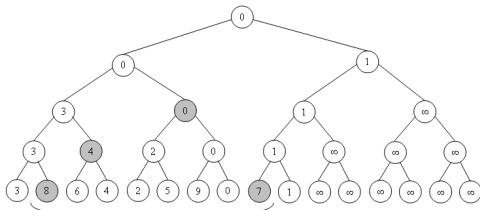
Дерево отрезков

Вычисление сверху

Начнем проверять детей вершины root.

Возможны два варианта:

- отрезок $[l \dots r]$ попадает только в одного сына корня. Просто перейдём в того сына, в котором лежит наш отрезок-запрос, и применим алгоритм к нему.
- отрезок пересекается с обоими сыновьями. Перейти в левого сына и посчитать ответ в нём, а затем — перейти в правого сына, посчитать его ответ, выбрать $\min(\max)$.

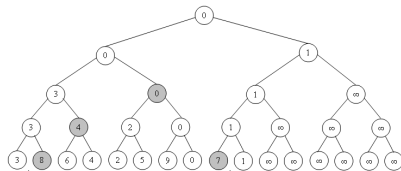


Дерево отрезков

Вычисление снизу

Заведём два указателя – l и r . В начале l и r указывают на листы, соответствующие запросу.

- Если l указывает на вершину, являющуюся правым сыном своего родителя, то эта вершина принадлежит разбиению на фундаментальные отрезки, иначе не принадлежит.
- Для r – если он указывает на вершину, являющуюся левым сыном своего родителя, то добавляем её в разбиение.
- Потом сдвигаем оба указателя на уровень выше и повторяем операцию. Продолжаем операции пока указатели не зайдут один за другой.

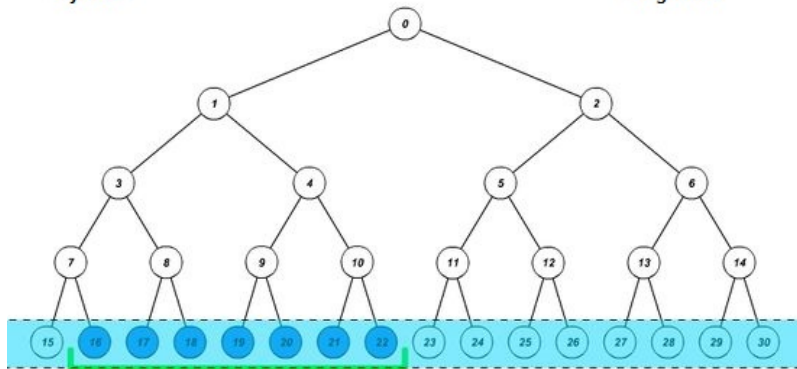


Дерево отрезков

Вычисление снизу

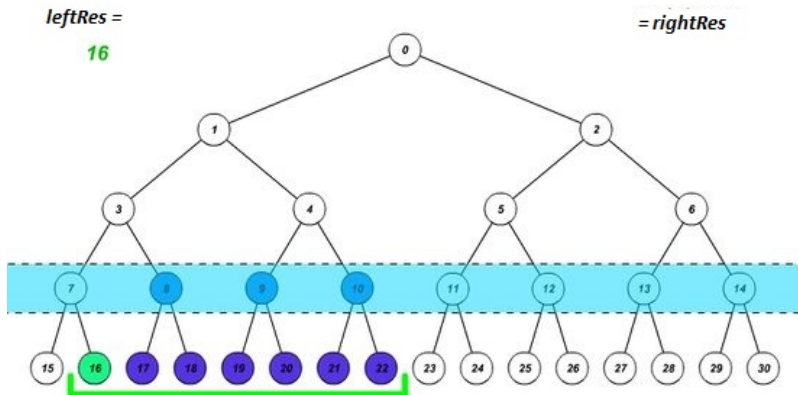
leftRes =

= righthRes



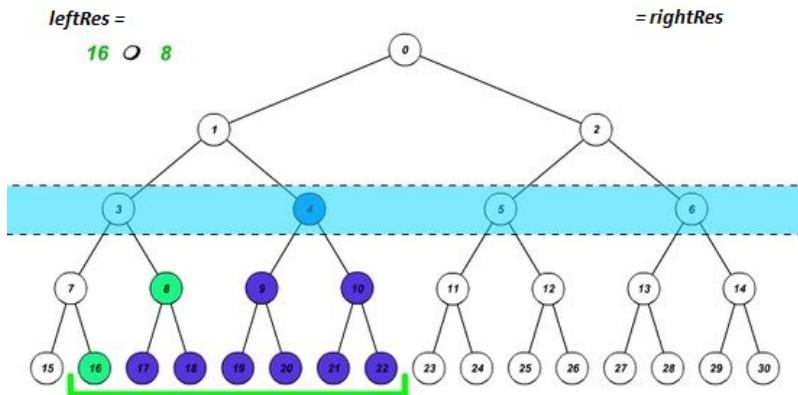
Дерево отрезков

Вычисление снизу



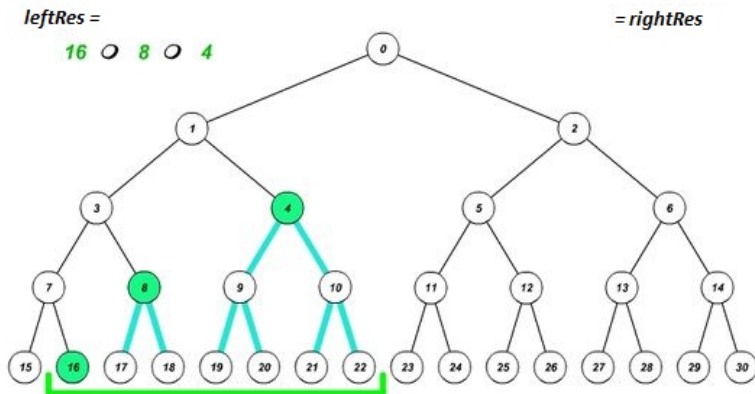
Дерево отрезков

Вычисление снизу



Дерево отрезков

Вычисление снизу

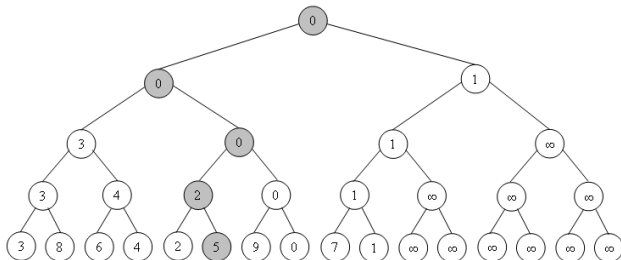


Дерево отрезков

Модификация точечная

Как изменить значение элемента дерева? Заметим, что для каждого листа есть ровно $\log(n)$ фундаментальных отрезков, которые его содержат – все они соответствуют вершинам, лежащим на пути от нашего листа до корня.

Значит, при изменении элемента достаточно просто пробежаться от его листа до корня и обновить значение во всех вершинах на пути по формуле $T[i] = \min(T[2i], T[2i + 1])$.



Дерево отрезков

Модификация на отрезке

Как изменить значение не одной ячейки массива, а, а целого интервала ($a[l], a[r]$)? Например, увеличить значения всех ячеек из интервала на заданное число X .

Дерево отрезков

Модификация на отрезке

Реализуется через запрос сверху и несогласованные поддеревья. Благодаря определённой модификации, дерево отрезков может выполнять обновление элементов (увеличение или присваивание) на отрезках произвольной длины за $O(\log N)$. Эта модификация достаточно общая, и позволяет решать с помощью дерева отрезков целый класс новых задач.

Дерево отрезков

Модификация на отрезке. Тривиальное решение

Вариант 1. Пусть в процессе выполнения запроса присваивания на отрезке мы спустились в вершину, полностью принадлежащую этому отрезку. По логике нам нужно изменить значение в этой вершине, и во всех вершинах её поддеревя. Но сложность такой операции неприемлемо высока: $O(N \log N)$.

Дерево отрезков

Модификация на отрезке. Решение

Вариант 2. Изменяем значение только в самой вершине, не обновляя её поддереву (таким образом, в поддереве теперь хранятся устаревшие некорректные значения), и запоминаем, что у этой вершины есть несогласованная модификация. На этом выполнение запроса для вершины и её поддерева завершено.

Если последующие запросы не будут обращаться к поддереву с несогласованной модификацией, то они будут выполняться корректно. Но рано или поздно может поступить запрос, который требуется обработать индивидуально для дочерних вершин с несогласованной модификацией. Тогда передадим модификацию дочерним вершинам (только дочерним вершинам, а не всему поддереву). Теперь данная вершина согласована, а несогласованность перешла к её дочерним. Такая операция называется **проталкиванием модификации**.

Дерево отрезков


Оценка работы


Оценки работы:


Препроцессинг - $O(n)$


Запрос - $O(\log(n))$.

Полезные ссылки I

 [E-maxx: sqrt-декомпозиция](https://e-maxx.ru/algorithm/sqrt_decomposition)
https://e-maxx.ru/algorithm/sqrt_decomposition

 [Хабр: Static RMQ](https://habr.com/ru/post/114980/)
<https://habr.com/ru/post/114980/>

 [Хабр: RMQ - 2. Дерево отрезков](https://habr.com/ru/post/115026/)
<https://habr.com/ru/post/115026/>

 [segmenttree](https://brestprog.by/topics/segmenttree/)
<https://brestprog.by/topics/segmenttree/>