

# Сортировки. Задачи 2

Булгаков Илья, Гусев Илья

Московский физико-технический институт

Москва, 2023

# Содержание

## 1 Задачи на сортировки 2

# Задача 1

Дано  $n$  пар  $(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)$ , а также число  $k$ . Нужно выбрать  $I \subset \{1, \dots, n\}$ , такое что  $|I| = k$ , максимизируя сумму  $\sum_{i \in I} a_i + \sum_{i \notin I} b_i$ .  
Найдите максимальное значение суммы за  $O(n \log n)$ .

# Задача 1 (Решение)

Дано  $n$  пар  $(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)$ , а также число  $k$ . Нужно выбрать  $I \subset \{1, \dots, n\}$ , такое что  $|I| = k$ , максимизируя сумму  $\sum_{i \in I} a_i + \sum_{i \notin I} b_i$ . Найдите максимальное значение суммы за  $O(n \log n)$ .

Решение:

- Максимизируем сумму

$$\sum_{i \in I} a_i + \sum_{i \notin I} b_i = \sum b_i + \sum_{i \in I} (a_i - b_i)$$

- Нужно выбрать  $k$  самых выгодных пар по величине  $a_i - b_i$
- Это делается сортировкой пар по возрастанию  $a_i - b_i$

## Задача 2

Через  $\text{mex}$  (minimal exclusive) данного массива чисел будем обозначать минимальное целое неотрицательное число, которого нет в этом массиве. Дан массив целых чисел  $a_1, \dots, a_n$ . За одну операцию можно изменить одно любое число массива на  $\text{mex}$  всех его элементов (сам  $\text{mex}$  может измениться). Покажите, как сделать массив неубывающим не более чем за  $2n$  операций. Асимптотика:  $O(n)$ .

## Задача 2 (Решение)

Через  $\text{mex}$  (minimal exclusive) данного массива чисел будем обозначать минимальное целое неотрицательное число, которого нет в этом массиве. Дан массив целых чисел  $a_1, \dots, a_n$ . За одну операцию можно изменить одно любое число массива на  $\text{mex}$  всех его элементов (сам  $\text{mex}$  может измениться). Покажите, как сделать массив неубывающим не более чем за  $2n$  операций. Асимптотика:  $O(n)$ .

Решение:

- Сделаем массив перестановкой чисел от 0 до  $n - 1$ , применив операцию к числам больше  $n - 1$
- Применим операцию к последнему числу, оно станет равно  $n$
- Посмотрим на число, которое лежало до этого. Это наш следующий  $\text{mex}$ .
- Применим операцию к позиции, равной этому числу. Повторяем предыдущий пункт

## Задача 3

В данном массиве длины  $n$  найдите первые  $k$  порядковых статистик за  $O(n \log k)$ .

## Задача 3 (Hint)

В данном массиве длины  $n$  найдите первые  $k$  порядковых статистик за  $O(n \log k)$ .

Hint:

- $\log k$ , скорее всего, берется из сортировки массива размера  $k$



## Задача 3 (Hint)

В данном массиве длины  $n$  найдите первые  $k$  порядковых статистик за  $O(n \log k)$ .

Hint:

- $\log k$ , скорее всего, берется из сортировки массива размера  $k$
- Если мы знаем первые  $k$  порядковых статистик на двух массивах, как получить на объединении?

## Задача 3 (Решение)

В данном массиве длины  $n$  найдите первые  $k$  порядковых статистик за  $O(n \log k)$ .

Решение:

- Разбиваем на куски по  $k$  элементов
- Находим порядковые статистики на кусках сортировкой
- Объединяем куски суммарно за  $O(n)$ :  $\frac{n}{k}$  кусков, каждые два за  $O(k)$ .

## Задача 4

У мамы есть  $n$  детей. Чтобы уложить  $i$ -го из них спать, нужно петь ему колыбельную в течение  $a_i$  минут, после этого он будет спать  $b_i$  минут подряд. Можно ли уложить всех детей так, чтобы у мамы была хотя бы одна свободная минута, в течение которой все дети бы спали? Асимптотика:  $O(n \log n)$ .

## Задача 4 (Hint)

У мамы есть  $n$  детей. Чтобы уложить  $i$ -го из них спать, нужно петь ему колыбельную в течение  $a_i$  минут, после этого он будет спать  $b_i$  минут подряд. Можно ли уложить всех детей так, чтобы у мамы была хотя бы одна свободная минута, в течение которой все дети бы спали? Асимптотика:  $O(n \log n)$ .

Hint:

- Сформулируем систему на  $a_i$  и  $b_i$ , равносильную наличию решения
- Придумаем жадный алгоритм: каких детей следует укладывать раньше других?

## Задача 4 (Решение)

У мамы есть  $n$  детей. Чтобы уложить  $i$ -го из них спать, нужно петь ему колыбельную в течение  $a_i$  минут, после этого он будет спать  $b_i$  минут подряд. Можно ли уложить всех детей так, чтобы у мамы была хотя бы одна свободная минута, в течение которой все дети бы спали? Асимптотика:  $O(n \log n)$ .

Решение:

- Отсортируем детей по  $a_i + b_i$  и проверим, выполняется ли система

## Задача 5

В  $2n - 1$  ящиках лежат яблоки и апельсины (в  $i$ -ом ящике  $a_i$  яблок и  $b_i$  апельсинов). Требуется выбрать  $n$  ящиков так, что в них окажется не менее половины всех яблок и не менее половины всех апельсинов. Докажите, что такой выбор всегда существует.

## Задача 5 (Решение)

В  $2n - 1$  ящиках лежат яблоки и апельсины (в  $i$ -ом ящике  $a_i$  яблок и  $b_i$  апельсинов). Требуется выбрать  $n$  ящиков так, что в них окажется не менее половины всех яблок и не менее половины всех апельсинов. Докажите, что такой выбор всегда существует.

Решение:

- Отсортируем ящики по  $a_i$
- Рассмотрим все нечетные ящики
- Рассмотрим все четные ящики и последний
- В обоих случаях мы набираем более половины яблок
- Выберем случай, где больше апельсинов

# Бонусная задача

Leetcode: 2279. Maximum Bags With Full Capacity of Rocks

Даны  $n$  мешков с камнями. Про  $i$ -тый мешок мы знаем, что в него помещается  $capacity[i]$  камней, и что сейчас в нем лежит  $rocks[i]$  камней. Также нам дано  $additionalRocks$  камней, и мы хотим разложить эти камни по мешкам так, чтобы количество заполненных мешков было максимально.