

Сортировки. Задачи

Булгаков Илья, Гусев Илья

Московский физико-технический институт

Москва, 2023

Содержание

1 Задачи на сортировки

Задача 1

С помощью сортировки слиянием определите количество инверсий в перестановке. Перестановкой длины n называется массив из n попарно различных целых чисел от 1 до n . Пара чисел a_i и a_j образуют инверсию, если $i < j$, но $a_i > a_j$.

Задача 1 (Решение)

С помощью сортировки слиянием определите количество инверсий в перестановке. Перестановкой длины n называется массив из n попарно различных целых чисел от 1 до n . Пара чисел a_i и a_j образуют инверсию, если $i < j$, но $a_i > a_j$.

Решение:

- Для общности будем считать, что нам дана не перестановка, а массив различных чисел
- Разобьем этот массив на две части, и решим задачу рекурсивно для обеих частей
- Найдем количество таких инверсий, что элементы лежат в разных частях
- Получим ответ для всего массива, просуммировав все случаи

Задача 2

Пусть в алгоритме быстрой сортировки в качестве пивота всегда детерминированно выбирается центральный элемент массива. Для произвольного n за $O(n)$ постройте перестановку, на котором такая сортировка занимает $\Omega(n^2)$ времени.

Задача 2 (Решение)

Пусть в алгоритме быстрой сортировки в качестве пивота всегда детерминированно выбирается центральный элемент массива. Для произвольного n за $O(n)$ постройте перестановку, на котором такая сортировка занимает $\Omega(n^2)$ времени.

Решение:

- Хотим, чтобы массив делился наименее равномерно
- Например, можно сделать центральный элемент наименьшим
- Тогда, при делении элементов на две части, одна будет иметь размер 0, а другая $n - 1$

Задача 3

На прямой заданы n отрезков координатами своих концов $[a_i, b_i]$. Найдите

- a длину их объединения (асимптотика: $O(n \log n)$);
- b длину их пересечения (асимптотика: $O(n)$);
- c максимальное количество отрезков, которое можно выбрать так, чтобы выбранные отрезки по- парно не пересекались (асимптотика: $O(n \log n)$).

Задача 3 (Решение)

На прямой заданы n отрезков координатами своих концов $[a_i, b_i]$. Найдите

- a длину их объединения (асимптотика: $O(n \log n)$);
- b длину их пересечения (асимптотика: $O(n)$);
- c максимальное количество отрезков, которое можно выбрать так, чтобы выбранные отрезки по-парно не пересекались (асимптотика: $O(n \log n)$).

Решение (пункт a):

- Воспользуемся методом сканирующей прямой:
- Пусть начало или конец отрезка - событие. Отсортируем события по возрастанию координат
- Пройдемся по ним в отсортированном порядке, обрабатывая каждое событие

Задача 3 (Решение)

На прямой заданы n отрезков координатами своих концов $[a_i, b_i]$. Найдите

- a длину их объединения (асимптотика: $O(n \log n)$);
- b длину их пересечения (асимптотика: $O(n)$);
- c максимальное количество отрезков, которое можно выбрать так, чтобы выбранные отрезки по-парно не пересекались (асимптотика: $O(n \log n)$).

Решение (пункт b):

- $\min(b_i) - \max(a_i)$

Задача 3 (Решение)

На прямой заданы n отрезков координатами своих концов $[a_i, b_i]$. Найдите

- a длину их объединения (асимптотика: $O(n \log n)$);
- b длину их пересечения (асимптотика: $O(n)$);
- c максимальное количество отрезков, которое можно выбрать так, чтобы выбранные отрезки по- парно не пересекались (асимптотика: $O(n \log n)$).

Решение (пункт c):

- Воспользуемся жадным алгоритмом:
- Отсортируем отрезки по правому концу
- В качестве очередного отрезка будем брать отрезок с минимальной координатой правого конца, который можем взять

Задача 4

Напомним, что процедура $Partition(A, x)$ переупорядочивает элементы массива A так, что сначала идут все элементы, не превосходящие x , в некотором порядке, а затем — все элементы, большие x . Покажите, как реализовать $Partition(A, x)$ с привлечением $O(1)$ дополнительной памяти.

Задача 4 (Решение)

Напомним, что процедура $Partition(A, x)$ переупорядочивает элементы массива A так, что сначала идут все элементы, не превосходящие x , в некотором порядке, а затем — все элементы, большие x . Покажите, как реализовать $Partition(A, x)$ с привлечением $O(1)$ дополнительной памяти.

Решение:

- Заведём два указателя - на начало и на конец массива
- Будем двигать их до тех пор, пока левый указатель не будет указывать на элемент, больший чем x , а правый - на элемент не превосходящий x
- Поменяем эти элементы местами, и продолжим процедуру

Задача 5

Пусть A — массив длины n , а B — его отсортированная версия. Найдите за $O(n \log n)$ перестановку σ , такую что $B_i = A_{\sigma(i)}$ для всех i . В массиве A могут быть повторяющиеся элементы.

Задача 5 (Решение)

Пусть A — массив длины n , а B — его отсортированная версия. Найдите за $O(n \log n)$ перестановку σ , такую что $B_i = A_{\sigma(i)}$ для всех i . В массиве A могут быть повторяющиеся элементы.

Решение:

- Для каждого элемента из массива A найдем его позицию в B
- Это делается за $O(\log n)$ бинарным поиском

Бонусная задача

Leetcode: 976. Largest Perimeter Triangle

Дан массив чисел *nums*. Верните самый большой возможный периметр треугольника с ненулевой площадью, длины сторон которого содержатся в массиве *nums*. Если выбрать треугольник с ненулевой площадью невозможно - верните 0.