

Дерево Фенвика. Задачи

Булгаков Илья, Гусев Илья

Московский физико-технический институт

Москва, 2023

Задача 1

Пусть $f(i) = i \wedge (i + 1)$. Опишите все i , для которых $f(i) = i$

Задача 1 (Решение)

Пусть $f(i) = i \wedge (i + 1)$. Опишите все i , для которых $f(i) = i$

Решение:

- f зануляет последний блок из единиц
- Если $f(i) = i$, то последний блок из единиц отсутствует, то есть число i должно быть чётным
- Остаётся понять, что для чётных i равенство имеет место

Задача 2

Пусть $g(i) = i \vee (i + 1)$. Для каких i выполняется равенство $g(i) = i + 1$?

Задача 2 (Решение)

Пусть $g(i) = i \vee (i + 1)$. Для каких i выполняется равенство $g(i) = i + 1$?

Решение:

- Функция g выставляет единицей младший нулевой бит
- Если этот младший бит — на последнем месте, то число должно быть чётным

Задача 3

Дан массив чисел a_0, a_1, \dots, a_{n-1} . Поступает q запросов двух видов:

- а) изменение в точке
- б) сумма i на префиксе

Пусть $s_i = \sum_{j=f(i)}^i a_j$. Покажите, что следующий код корректно обрабатывает все запросы $j = f(i)$ и работает за $O(\log n)$ на запрос.

```
int get(int pos) { // a[0] + a[1] + ... + a[pos]
    int ans = 0;
    for (int i = pos; i >= 0; i = f(i) - 1) {
        ans += s[i];
    }
    return ans;
}

void update(int pos, int delta) { // a[pos] += delta
    for (int i = pos; i < n; i = g(i)) {
        s[i] += delta;
    }
}
```

Задача 4

Дан массив чисел a_1, a_2, \dots, a_n . Поступает q запросов одного из двух видов:

- а) увеличить число в некоторой точке (то есть по pos и $x \geq 0$ нужно увеличить a_{pos} на x)
- б) сообщить максимум на префиксе

Используйте только прямое дерево Фенвика. Обработайте все запросы за $O((n + q) \log n)$.

Задача 4 (Решение)

Дан массив чисел a_1, a_2, \dots, a_n . Поступает q запросов одного из двух видов:

- а) увеличить число в некоторой точке (то есть по pos и $x \geq 0$ нужно увеличить a_{pos} на x)
- б) сообщить максимум на префиксе

Используйте только прямое дерево Фенвика. Обработайте все запросы за $O((n + q) \log n)$.

Решение:

- Максимум на отрезке легко обновлять, если числа только увеличиваются

Задача 5 (Фенвик Фенвиков)

На плоскости даны n точек, в каждой точке написано своё число a_i .

Обработайте q запросов двух типов:

- а) изменить число, записанное в i -й точке
- б) найти сумму чисел, записанных в точках в прямоугольнике $(0, 0) \times (l, r)$

Асимптотика: $O((n + q) \log_2 n)$ времени и $O(n \log n)$ памяти.

Задача 5 (Решение)

На плоскости даны n точек, в каждой точке написано своё число a_i . Обработайте q запросов двух типов:

- а) изменить число, записанное в i -й точке
- б) найти сумму чисел, записанных в точках в прямоугольнике $(0, 0) \times (l, r)$

Асимптотика: $O((n + q) \log_2 n)$ времени и $O(n \log n)$ памяти.

Решение:

- Сожмите координаты, отсортировав все точки в порядке возрастания абсцисс
- Для каждого i рассмотрите вертикальную полосу, в которую входят точки с $f(i)$ -й по i -ю
- В каждой такой полосе постройте своё дерево Фенвика на точках, попавших в неё