

# ДО и персистентные структуры. Задачи

Булгаков Илья, Гусев Илья

Московский физико-технический институт

Москва, 2023

# Содержание

## 1 Задачи

# Задача 1

К массиву длины  $n$  поступает  $q$  запросов одного из двух видов:

а) изменить число в точке

б) по индексам  $l$  и  $r$  сообщить сумму  $a_l + 2a_{l+1} + 3a_{l+2} + \dots + (r - l + 1)a_r$

Обработайте все запросы за  $O(n + q \log n)$ .

## Задача 1 (Решение)

К массиву длины  $n$  поступает  $q$  запросов одного из двух видов:

- а) изменить число в точке
- б) по индексам  $l$  и  $r$  сообщить сумму  $a_l + 2a_{l+1} + 3a_{l+2} + \dots + (r - l + 1)a_r$

Обработайте все запросы за  $O(n + q \log n)$ .

Решение:

- В вершине дерева отрезков храним соответствующую сумму с коэффициентами
- Чтобы склеить результаты из двух вершин, нужно сдвинуть все коэффициенты

## Задача 2

На плоскости заданы  $n$  прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат. Определите площадь их объединения за  $O(n \log n)$ .

## Задача 2 (Решение)

На плоскости заданы  $n$  прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат. Определите площадь их объединения за  $O(n \log n)$ .

Решение:

- Сжимаем координаты
- Идем деревом отрезков
- Поддерживаем профиль пересекаемых прямоугольников при их прохождении, скажем, слева направо

## Задача 3

Найдите количество инверсий в массиве длины  $n$  за  $O(n \log n)$ , используя дерево отрезков

## Задача 3 (Решение)

Найдите количество инверсий в массиве длины  $n$  за  $O(n \log n)$ , используя дерево отрезков

Решение:

- Будем добавлять элементы по возрастанию
- При каждом добавлении смотрим количество элементов справа от текущего



## Задача 4

В статическом массиве находите количество различных элементов на подотрезке за  $O(\log n)$ , где  $n$  — длина массива. Более формально, по индексам  $l$  и  $r$  определите размер множества  $a_l, a_{l+1}, \dots, a_r$ .

## Задача 4 (Решение)

В статическом массиве находите количество различных элементов на подотрезке за  $O(\log n)$ , где  $n$  — длина массива. Более формально, по индексам  $l$  и  $r$  определите размер множества  $a_l, a_{l+1}, \dots, a_r$ .

Решение:

- $prev(i) = \max\{j : j < i \wedge a_j = a_i\}$
- Количество различных чисел на отрезке  $[l, r]$  — это в точности количество позиций, у которых  $prev < l$

## Задача 5

На плоскости даны  $n$  точек. К нему поступают запросы следующего вида: “сколько точек лежит в прямоугольнике  $[x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ ?”. С помощью предподсчёта за  $O(n \log n)$  научитесь отвечать на каждый запрос за  $O(\log n)$ .

## Задача 5 (Решение)

На плоскости даны  $n$  точек. К нему поступают запросы следующего вида: “сколько точек лежит в прямоугольнике  $[x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ ?”. С помощью предподсчёта за  $O(n \log n)$  научитесь отвечать на каждый запрос за  $O(\log n)$ .

Решение:

- Сжимаем координаты
- Fractional Cascading