kalmanfilter_document Documentation

リリース ***1.0.0***

gatakaba

2016 年 08 月 09 日

Contents

Contents:

Chapter 1

カルマンフィルタとは?

カルマンフィルタとは、観測されたデータに基づき、線形確率システムの状態を逐次的に推定するアルゴリズムです。時系列データならばどのようなデータに対して適用することができ、航空工学、ロボット工学、画像処理、計量経済学、農学など多岐にわたる分野において適用例があります。

Chapter 2

何ができるの?

カルマンフィルタが適用される場面は主にノイズ除去・未来予測・外れ値推定・センサヒュージョンです。カルマンフィルタは線形・雑音がガウスノイズという性質を持ち、そのため一般の状態空間モデルと比較して少ない計算量であるという性質を持ちます。

2.1 LQG の仮定

1. システム方程式及び観測方程式の線形性 (Linear)
2. システムの雑音及び観測雑音の白色性 (white)
3. 雑音分布のガウス正規性 (Gaussian)
4. 2 乗誤差規範カルマンフィルタは LQG 仮定の元、事後推定誤差分散を最小化することを目的としている

2.2 確率システム

システム方程式

$p(z_n|z_{n-1}) = N(z_n|Az_{n-1}, \Gamma)$

$p(x_n|z_n) = N(x_n|Cz_n, \Sigma)$

2.3 定式化

観測更新ステップ

$p(z_t|X^t) = \frac{p(x_t|z_t)p(z_t|X^{t-1})}{p(x_t|X^{t-1})}$

時間更新ステップ

$p(z_{t+1}|X^t) = \int p(z_{t+1}|z_t)p(z_t|X^t)dz_t$

2.4 用語と記号

事前推定誤差: $\hat{e} = \mu_k - \bar{\mu}_k = \mu_k - E[z|x_{k-1}]$

事後推定誤差: $\hat{e} = \mu_k - \hat{\mu}_k = \mu_k - E[z|x_k]$

事前推定誤差分散: $P_k = E[\hat{e}_k \hat{e}_k^T]$

事後推定誤差分散: $P_k = E[e_k e_k^T]$

2.5 計算

2.5.1 予測

- 事前平均値

  $\mu_n^- = A\mu_{n-1}$

- 事前分散

  $P_{n-1} = AV_{n-1}A^T + \Gamma$

2.5.2 フィルタリング

- カルマンゲイン

  $K_n = P_{n-1}C^T(CP_{n-1}C^T + \Sigma)^{-1}$

- 事後平均値

  $\mu_n = \mu_n^- + K_n(x_n - C\mu_n^-)$

- 事後分散

  $V_n = (I - K_nC)P_{n-1}$

2.6 メモ

- システムが定常であるとき、カルマンゲインは収束する

  $$\mu_n = A\mu_{n-1} + K_n(x_n - CA\mu_{n-1}) = A\mu_{n-1} + \frac{P_{n-1}}{P_{n-1} + \frac{\Sigma}{C^2}} \frac{(x_n - \hat{x}_n)}{C}$$

- $\Sigma << P_{n-1}$ の時、すなわち、システム方程式の分散が、観測値の分散よりも大きい場合、カルマンゲインは大きくなり、観測に基づく推定結果が支配的になる。

2.7 参考

- 非線形カルマンフィルタ
- PRML 下巻

Chapter 3

パラメータ推定

3.1 0. カルマンフィルタの尤度関数

完全データ X,Z が

$l(\theta) = \ln p(X, Z|\theta) = \ln p(z_0|\mu_0, P_0) + \sum_{n=2}^{N} \ln p(z_n|z_{n-1}, F, Q) + \sum_{n=1}^{N} \ln p(x_n|z_n, H, R)$

$\ln \mathcal{N}(\mathbf{x}|\mu, \mathbf{\Sigma}) = -\frac{D\ln(2\pi)}{2} - \frac{1}{2}\ln(|\Sigma|) - \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mu)\Sigma^{-1}(\mathbf{x} - \mu)$

3.2 1. EM アルゴリズムを用いて求める

パラメータ $\theta = \{A, \Gamma, C, \Sigma, \mu_0, P_0\}$ を EM アルゴリズムによって求める

- 完全データの対数尤度関数

  $\ln p(\mathbf{X}, \mathbf{Z}|\theta) = \ln(z_1|\mu_0, P_0) + \sum_{n=2}^{N} \ln p(z_n|z_{n-1}, A, \Gamma) + \sum_{n=1}^{N} \ln p(x_n|z_n, C, \Sigma)$
- 完全データの尤度関数の期待値

  $Q(\theta, \theta^{old}) = E_{\mathbf{Z}|\theta^{old}}[\ln p(\mathbf{X}, \mathbf{Z}|\theta)] = \sum_{\mathbf{Z}} \ln p(\mathbf{X}, \mathbf{Z}|\theta) p(\mathbf{Z}|\mathbf{X}, \theta^{old})$

3.3 E-step

E-step における隠れ変数の分布はカルマンスムーザーの方法を用いる

- $p(\mathbf{Z}|\mathbf{X}, \theta^{old})$
- $J_n = V_n A^T (P_n)^{-1}$
- $\hat{\mu}_n = \mu_n + J_n(\hat{\mu}_{n+1} - A\mu_n)$
- $\hat{V}_n = V_n + J_n(\hat{V}_{n+1} - P_n)J_n^T$
- $E[z_n] = \hat{\mu_n}$
- $E[z_n z_{n-1}^T] = \hat{V}_n J_{n-1}^T + \hat{\mu}_n \hat{\mu}_{n-1}^T$
- $E[z_n z_n^T] = \hat{V}_n + \hat{\mu}_n \hat{\mu}_n^T$

3.4 M-step

- $\mu_0^{new} = E[z_1]$
- $P_0^{new} = E[z_1 z_1^T] - E[z_1]E[z_1^T]$
- $A^{new} = (\sum_{n=2}^{N} E[z_n z_{n-1}^T])(\sum_{n=2}^{N} E[z_{n-1} z_{n-1}^T])^{-1}$
- $\Gamma^{new} = \frac{1}{N-1} \sum_{n=2}^{N} (E[z_n z_n^T] - A^{new} E[z_{n-1} z_n^T] - E[z_n z_{n-1}^T](A^{new})^T + A^{new} E[z_{n-1} z_{n-1}^T](A^{new})^T)$
- $C^{new} = (\sum_{n=1}^{N} x_n E[z_n^T])(\sum_{n=1}^{N} E[z_n z_n^T])^{-1}$
- $\Sigma^{new} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} (x_n x_n^T - C^{new} E[z_n] x_n^T - x_n E[z_n^T](C^{new})^T + C^{new} E[z_n z_n^T](C^{new})^T)$

3.5 2. MCMC 法により求める

Chapter 4

Indices and tables

- genindex
- modindex
- search