S.A.T DRILL

GATESPLAN | MATHGATE

확률과 통계

나열의 이론 – 순열

§ Section 1.1 경우의 수와 고정관념의 함정

수학자 Martin Gardner(1914-2010)는 확률이 수학에서 우리의 직관이 가장 잘 빗나가며 많은 정답이 상식에서 벗어난다는 평을 하였다. 우리가 중등수학에서 접하는 경우의 수나 확률 문제에서 이런 '비상식적인 순간'들을 경험하는 것은 해설에서 제시한 방법으로 정답은 나오는데 대체 왜 그렇게 푸는지는 모르겠고 *더 옳게 보이는 내 방법*으로는 정답을 구할 수 없을 때이다. 이 절과 (대체 언제 쓸 지는 모르겠지만) 이어지는 절에서는 우리가 흔히 범하는 직관적 오류들을 짚어보고 *내 방법*이 사실은 직관의 함정에 빠진 결과였음을 이해하는 기회를 가져보고자 한다. 직관의 함정들은 학습 과정에서 은연중에 자연스럽게 발생하므로, 우리는 대개 이 오류들을 스스로 알아차릴 수 없고 경우의 수와 확률을 공부하는데 어려움을 겪게 만드는 주된 요인이 된다. 이 절에서는 특히 순열에 대해 가지고 있는 고정관념을 해소하고 더 넓은 관점에서 볼 수 있도록 몇 가지 사실을 짚어보고자 한다.

1. 이미 정해진 배치 순서에 집착하는 실수

긴 의자에 남자 4명과 여자 3명이 번갈아가며 앉기로 했다고 하자. 이때 가능한 모든 경우를 구하려고 할 때, 우리는 남자와 여자가 번갈아 앉는 상태를 상상한다. 이 상태로 남자 자리에만 네 명의 남자를 순서대로 앉히는 상황을 생각해보자.

[남1] 여 [남2] 여 [남3] 여 [남4]

그런데 이 상황은 동일한 순서로 자리의 배치만 남자가 왼쪽에, 여자가 오른쪽에 앉는 것과 차이가 없다.

[남1] [남2] [남3] [남4] 여 여 여

남자 네 명이 1, 2, 3, 4 순서로만 앉는 한 가지 경우는, 남녀의 자리 배치 규칙을 바꾸더라도 영향을 받지 않는다.

[남1] [남2] 여 여 여 [남3] [남4]

마찬가지로 배치를 다시 바꿔보아도 남자 네 명을 앉히는 방법은 변하지 않는다.

[남1] 여 여 [남2] 여 [남3] [남4] = ⋯

여기까지를 이해했다면, 우리는 위 상황에서 남자 넷을 일렬로 앉혀 4!, 여자 셋을 일렬로 앉혀 3!, 남녀 각각의 자리 배치는 서로 영향을 주지 않는 별개의 결정이므로 전체 경우의 수는 단지 각각의 경우를 곱해서 구할 수 있다. 즉, $4!\times3!$. 이 과정에서 사전에 정해진 '자리의 배치'는 어찌 되든 상관없음을 알 수 있다.

문제 1. 어느 여객선의 좌석이 A구역에 2개, B구역에 1개, C구역에 1개 남아 있다. 남은 좌석을 남자 승객 2명과 여자 승객 2명에게 임의로 배정할 때, 남자 승객 2명이 모두 A구역에 배정될 확률을 p라 하자. $120p$의 값을 구하시오.

문제 2. 어느 동호회 회원 21명이 5인승, 7인승, 9인승의 차 3대를 나누어 타고 여행을 떠나려고 한다. 현재 5인승, 7인승, 9인승의 차에 각각 4명, 5명, 6명이 타고 있고, A와 B를 포함한 6명이 아직 도착하지 않았다. 이 6명을 차 3대에 임의로 배정할 때, A와 B가 같은 차에 배정될 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $10p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

---

1) 정답 20 | 11` 9월 평가원

2. 현실적 상상으로부터 오는 정보의 과다

앞선 예로 돌아가서, 남녀가 번갈아가며 앉는 와중에 남학생 네 명은 1, 2, 3, 4의 순서대로만 앉는다고 해 보자. 이때 고려해야 할 조건은 두 가지이다. 1) 남학생들 사이에 여학생이 끼어있어야 한다. 2) 남학생은 1, 2, 3, 4 순으로 앉아있다. 개인차는 있겠지만, 한 가지 조건을 만족하는 상황까지는 무리 없이 상상할 수 있어도 두 가지 혹은 그 이상의 조건을 동시에 만족하는 상황은 잘 그려내지 못할 수 있다.

그런데 이들 중 어떤 조건들은 고려할 필요가 없다. 여학생들이 자리는 이미 정해져 있다. 심지어 남학생들이 앉는 방법은 순서가 정해진 한 가지 뿐이다. 그렇다면, 2)의 조건은 결과에 영향을 주지 않으므로 완전히 무시해도 좋다. 이처럼 무시할 수 있는 경우는 “결과가 정해져 있어서 굳이 세어 줄 필요가 없는 경우”이다.

이런 오류를 피하기 위해서는 문제에서 제시한 상황을 다양한 관점에서 바라볼 필요가 있다. (=많은 연습이 필요하다.) 단순히 ‘이렇게 풀면 됩니다.’라는 매뉴얼에 따라 훈련해서는 결과가 좋을 수 없는 분야임을 명심하고 상황에 대한 이해를 여러 측면에서 접할 수 있었으면 한다.

문제 3. 단어 banana의 6개 문자를 순서를 바꿔 일렬로 나열할 때, 두 n이 서로 이웃할 확률을 구하시오.

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{5}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

[문제 3]에서 6개 문자를 나열하는 전체 경우의 수를 $\frac{6!}{3!\cdot 2!}$으로 구한다. 이때 왜 나누는지에 대한 이해는 앞서 설명한 오류 중 1번과 관계가 있다. 설명을 위해 banana의 여섯 글자 중 세 개의 a를 각각 a_1, a_2, a_3라고 하고, 두 개의 n은 각각 n_1, n_2라 하자.

예제 1. 여섯 개의 글자 a_1, a_2, a_3, b, n_1, n_2를 나열할 때, 알파벳 순서대로 나열하는 모든 경우를 직접 쓰시오.

[예제 4]는 총 12가지 경우의 수가 있다. 이 결과를 표로 구해보면 아래와 같다.

<table>
<tr><td rowspan="6">$a\ a\ a\ b\ n_1\ n_2$</td><td>$a_1\ a_2\ a_3\ b\ n_1\ n_2$</td><td rowspan="6">$a\ a\ a\ b\ n_2\ n_1$</td><td>$a_1\ a_2\ a_3\ b\ n_2\ n_1$</td></tr>
<tr><td>$a_1\ a_3\ a_2\ b\ n_1\ n_2$</td><td>$a_1\ a_3\ a_2\ b\ n_2\ n_1$</td></tr>
<tr><td>$a_2\ a_1\ a_3\ b\ n_1\ n_2$</td><td>$a_2\ a_1\ a_3\ b\ n_2\ n_1$</td></tr>
<tr><td>$a_2\ a_3\ a_1\ b\ n_1\ n_2$</td><td>$a_2\ a_3\ a_1\ b\ n_2\ n_1$</td></tr>
<tr><td>$a_3\ a_1\ a_2\ b\ n_1\ n_2$</td><td>$a_3\ a_1\ a_2\ b\ n_2\ n_1$</td></tr>
<tr><td>$a_3\ a_2\ a_1\ b\ n_1\ n_2$</td><td>$a_3\ a_2\ a_1\ b\ n_2\ n_1$</td></tr>
</table>

2) 정답 154 | 10` 6월 평가원
3) 정답 ⑤ | 17` 3월 교육청

다음 페이지에 계속..

$a\ a\ a\ b\ n_1\ n_2$	$a_1\ a_2\ a_3\ b\ n_1\ n_2$
	$a_1\ a_3\ a_2\ b\ n_1\ n_2$
	$a_2\ a_1\ a_3\ b\ n_1\ n_2$
	$a_2\ a_3\ a_1\ b\ n_1\ n_2$
	$a_3\ a_1\ a_2\ b\ n_1\ n_2$
	$a_3\ a_2\ a_1\ b\ n_1\ n_2$

$a\ a\ a\ b\ n_2\ n_1$	$a_1\ a_2\ a_3\ b\ n_2\ n_1$
	$a_1\ a_3\ a_2\ b\ n_2\ n_1$
	$a_2\ a_1\ a_3\ b\ n_2\ n_1$
	$a_2\ a_3\ a_1\ b\ n_2\ n_1$
	$a_3\ a_1\ a_2\ b\ n_2\ n_1$
	$a_3\ a_2\ a_1\ b\ n_2\ n_1$

앞선 예제에서 세 알파벳의 배치 방법은 $aaabnn$으로 정해져 있으므로 언제나 $3!\times 2! = 12$개다. 이 12개의 순열은 모두 하나의 순서 $aaabnn$로 대표된다. 12개가 1개로 대표되는 것이다. 따라서 각 a와 n을 모두 구분해 나열하는 방법은 $6!$개이며, 이 결과를 배치방법에 따라 $aaabnn$, $aaanbn$, $aaannb$, $\cdots$ 로 구분하면 각각 12개의 순열을 가진 그룹이 만들어진다. 각 그룹은 배치방법 하나로 대표되므로 우리가 구하려는 수는 $\dfrac{6!}{12}$개다.

문제 4. 15개의 자리가 있는 일자형의 놀이기구에 5명이 타려고 할 때, 5명이 어느 누구와도 이웃하지 않게 탈 확률은?

① $\dfrac{1}{26}$ ② $\dfrac{1}{13}$ ③ $\dfrac{3}{26}$ ④ $\dfrac{2}{13}$ ⑤ $\dfrac{5}{26}$

4) 정답 ④ | 13` 7월 교육청

§ Section 1.2 주어진 상황 이해

경우의 수와 확률 문제를 풀 때, 기본적인 유형들은 훈련을 통해 습득하였지만 조금이라도 색다른 조건이 추가되면 어떻게 해결해야 할지 막막한 사람들이 있다. 이 절에서는 이런 어려움을 해소하기 위한 한 가지 방법을 제시하여 일부 상황에서 조금 더 해결책을 찾아볼 수 있는 사고 기반을 마련하는데 집중한다.

1. 경우나누기

경우의 수와 확률 문제에서 가장 자주 쓰이는 전략은 경우나누기이다. 주어진 상황에서 가장 유용하게 쓰일 값을 기준으로 모든 가능한 사건을 더 작은 단위로 분할해 각각 계산하는 방법이다. 여기서 우리가 주지해야 할 것은 *1) 언제 경우나누기를 사용해야 할 것인가* 와 *2) 무엇을 기준으로 삼아야 할 것인가* 이다.

우선 경우나누기의 목표를 명확히 하자. 경우나누기는 문제를 복잡하게 만드는 변수를 그 값에 따라 분할함으로써 수행한다. 그러면 기존의 복잡한 문제는 더 작고 간단한 여러 문제로 나눠지고, 우리는 각각의 사건을 구해서 다시 합치면 된다. 이러한 경우나누기의 목적에 따라 주어진 상황에서 '값이 변할 수 있어서 문제를 복잡하게 만드는 것'을 찾으면 대개 그것이 경우나누기의 기준으로 충분하다.

문제 5. 어느 행사장에는 현수막을 1개씩 설치할 수 있는 장소가 5곳이 있다. 현수막은 A, B, C 세 종류가 있고, A는 1개, B는 4개, C는 2개가 있다. 다음 조건을 만족하도록 현수막 5개를 택하여 5곳에 설치할 때, 그 결과로 나타날 수 있는 경우의 수는? (단, 같은 종류의 현수막끼리는 구분하지 않는다.)[5)]

(가) A는 반드시 현수막을 설치한다. (나) B는 2곳 이상 설치한다.

① 55 ② 65 ③ 75 ④ 85 ⑤ 95

문제 6. 집합 $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$에서 A로의 함수 중 다음 조건을 만족하는 함수 f의 개수를 구하시오.[6)]

(가) f는 일대일 대응 (나) $\lvert f(1)-f(2)\rvert = \lvert f(2)-f(3)\rvert$

5) ①번 | 11` 수능
6) 432개