Tarea 1 MAT2605

Diego Pérez

17 de Agosto

Problema 1

(i)

$$\left.\begin{aligned} &s = 0 \\ &c = 2^{10} + 2^3 + 2^1 = 1034 \\ &f = 2^{-1} + 2^{-4} + 2^{-7} + 2^{-8} = \frac{147}{256} \end{aligned}\right\} \text{Formato decimal} = (-1)^s \cdot 2^{c-1023} \cdot (1+f) = 3224$$

(ii)

$$\left.\begin{aligned} &s = 1 \\ &c = 2^{10} + 2^3 + 2^1 = 1034 \\ &f = 2^{-1} + 2^{-4} + 2^{-7} + 2^{-8} = \frac{147}{256} \end{aligned}\right\} \text{Formato decimal} = (-1)^s \cdot 2^{c-1023} \cdot (1+f) = -3224$$

(iii)

$$\left.\begin{aligned} &s = 0 \\ &c = 111111111_{(2)} = 1023 \\ &f = 2^{-1} + 2^{-4} + 2^{-7} + 2^{-8} = \frac{147}{256} \end{aligned}\right\} \text{Formato decimal} = (-1)^s \cdot 2^{c-1023} \cdot (1+f) = 1.57421875$$

(iv)

$$\left.\begin{aligned} &s = 0 \\ &c = 111111111_{(2)} = 1023 \\ &f = 2^{-1} + 2^{-4} + 2^{-7} + 2^{-8} + 2^{-52} \end{aligned}\right\} \text{Formato decimal} = (-1)^s \cdot 2^{c-1023} \cdot (1+f) = x$$

donde $x = 1.5742187500000002220446049250313080847263336181640625$

Problema 2

(a) Problemático cuando $x \to \infty$. Se usa en este caso $\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$.

(b) Problemático cuando $x \approx y$. Se usa en este caso $ln(x/y)$.

(c) Problemático cuando $x \to 0$. Se usa en este caso la serie de Taylor:

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^k x^{2k-2}}{(2k+1)!}$$

Donde N es el entero positivo que representa el truncamiento de la serie.

(d) Problemático cuando $x \approx n\pi, n \in \mathbb{Z}$. Se usa en este caso $-\tan x \frac{(\sin x)^2}{1+\cos x}$.

(e) Problemático cuando $x \to -\infty$. Se usa en este caso $\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}\right)$.

Problema 3

```
A = rand(2,3);
B = rand(3,3);
C = rand(3,2);
D = rand(3,3);
%(a)
2*A+C.'

%(C)
3*B-2*D

%(D)
A*D

%(E)
C*A

%(F)
A*C

%(G)
B*D

%(I)
C.'*B

%(K)
det(D)

%(L)
A*A.'

%(M)
A.'*A

%(N)
det(A*A.')

%(O)
det(A.'*A)
```

No son válidas: (b) ya que B y C tienen dimesiones distintas, (h) dimensiones no admiten producto y (j) A no es cuadrada.

Problema 4

(a) $\pi = 4(\arctan 1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{2k+1}$

(b) $\pi = 6(\arctan 1/\sqrt{3}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{6(-1)^k(1/\sqrt{3})^{2k+1}}{2k+1}$

(c) Usaremos $\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1+\tan x \tan y}$ y $\tan(2x) = \frac{2\tan x}{1-(\tan x)^2}$.

Sea $a = \arctan(1/5)$. Reemplazando en la identidad de doble ángulo dos veces se obtiene $\tan(2a) = 5/12$ y $\tan(4a) = 120/119$. Por identidad de tangente de diferencia de ángulo, $\tan(4a - \pi/4) = 1/239$, por lo que $\arctan(1/239) = 4a - \pi/4$. Finalmente, $16\arctan(1/5) - 4\arctan(1/239) = 16a - (16a - \pi) = \pi$, como queríamos demostrar.

(d) (i) Para (c), se calculan por separado $\arctan(1/5)$ y $\arctan(1/239)$ y luego se combinan.

```
format long
N = 100000;
a = zeros(1,N+1);
b = zeros(1,N+1);
c_1 = zeros(1,N+1);
c_2 = zeros(1,N+1);

for k = 0:N
    if k==0
        a(1) = 4;
        b(1) = 6/sqrt(3);
        c_1(1) = 1/5;
        c_2(1) = 1/239;
    else
        a(k+1) = (a(k)+(4*(-1)^k/(2*k+1)));
        b(k+1) = (b(k)+6*((-1)^k)*(1/sqrt(3))^(2*k+1)/(2*k+1));
        c_1(k+1) = (c_1(k)+((-1)^k)*(1/5)^(2*k+1)/(2*k+1));
        c_2(k+1) = (c_2(k)+((-1)^k)*(1/239)^(2*k+1)/(2*k+1));
    end
end
c = 16*c_1-4*c_2;
a_ = a(N+1)
b_ = b(N+1)
c_ = c(N+1)
```

(ii) Continuación del código anterior

```
a_rel = zeros(1,N+1);
b_rel = zeros(1,N+1);
c_rel = zeros(1,N+1);

for k = 1:N+1
    a_rel(k) = abs(pi-a(k))/(pi);
    b_rel(k) = abs(pi-b(k))/(pi);
    c_rel(k) = abs(pi-c(k))/(pi);
end
```

(iii) El gráfico se muestra más abajo.

```
N_rango = 10:1:N+1;
loglog(N_rango,a_rel(N_rango),'black',N_rango,b_rel(N_rango),'red',
   N_rango,c_rel(N_rango),'blue')
xlabel('N')
ylabel('error relativo')
grid on
```

(iv) Como se aprecia en el gráfico, la serie que mejor converge es la de la parte (c), y la que peor lo hace es la serie (a). Además, hay un estancamiento de error relativo en las series de (b) y (c) desde $N = 31$. Esto se debe a que a partir de $N = 32$, los errores relativos de ambas series son menores al epsilon de máquina y por aproximación, se toma que son $\approx 8.881784197001252 \cdot \exp(-16)$

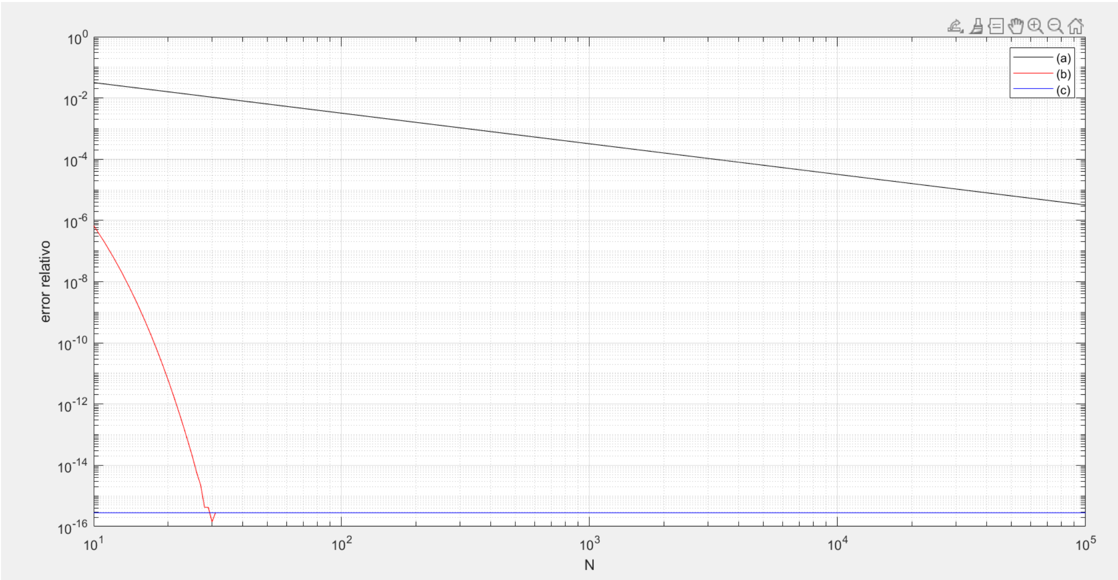

Figure 1: Gráfico pregunta (iii)

(v) Aplicando directamente el siguiente código, se obtiene que la pendiente es $\approx -1.079059892899501 \cdot \exp(-4)$.

```
a_rel_log = (a_rel(N_rango));
N_rango_log = log(N_rango);
p = polyfit(N_rango_log,a_rel_log,1);
pendiente = p(1)
```

Problema 5

(a) Si se reemplaza directamente $K = 2000$ en el código, se entrega NaN, ya que tanto $(2 \cdot 2000)!$ y $4^{2000} \cdot (2000!)^2$ son mayores a real max, por lo que su división es de la forma Inf/Inf, que por definición es NaN.

(b) Se escribe el coeficiente de otra manera:

$$\frac{(2k)!}{4^k (k!)^2 (2k)} = \frac{1}{2k} \prod_{i=1}^{k} \frac{k+i}{4i}$$

Implementando esta forma en matlab:

```
k = 2000;
TaylorCoefficient = 1/(2*k);

for i = 1:k
    TaylorCoefficient = TaylorCoefficient*(k+i)/(4*i);
end

TaylorCoefficient
```

De donde se obtiene que el coeficiente es $\approx 3.153718538958840 \cdot \exp(-6)$.