# Tarea 2 MAT2605

Diego Pérez

31 de Agosto

## Problema 1

(a) Después de investigar, se concluye que los números de cada hermano son: $A = 4338327950, C = 6810182694$ y $D = 8249181110$. Tenemos que encontrar la parábola que pasa por los puntos $(1, A), (3, C)$ y $(4, D)$. Esto lo hacemos con Lagrange:

$$\begin{aligned} P_{\text{Lagrange}}(x) &= A\frac{(x-3)(x-4)}{(1-3)(1-4)} + B\frac{(x-1)(x-4)}{(3-1)(3-4)} + C\frac{(x-1)(x-3)}{(4-1)(4-3)} \\ &= 3305471622 + 965165980x + 67690348x^2 \end{aligned}$$

(b) La clave es $P_{\text{Lagrange}}(0) = 3305471622$. Este número traducido a coordenadas resulta $(\pm 33{,}054; \pm 71{,}622)$. Probando, el único punto que está en Chile es (-33.054, -71.622), que es un lugar en Valparaiso cerca de la casa de Pablo Neruda.

(c) Una parábola está unicamente determinada por exactamente 3 puntos, por lo que dados 2 puntos cualquiera en el plano, existen infinitas parábolas que pasan por dichos puntos. Esto implica que es practicamente imposible que Ana y Carlos acierten la clave, ya que todos los numeros enteros tienen igual probabilidad de ser la llave.

## Problema 2

(a) (I) Para los puntos dados se tiene

$$\|W_n\|_\infty = \max_{-1\leq x\leq 1} \left|(x^2-\alpha^2)(x^2-1)\right|$$

Notar que si $x^*$ es óptimo del problema de optimización de arriba, entonces $g'(x^*) = 0$ donde $g(x) := ((x^2-\alpha^2)(x^2-1))^2$, por lo que solo basta probar en las raíces del polinomio $g'$. Una computación muestra que $g'(x) = x(x^2-1)(x^2-\alpha^2)(x^2-(1+\alpha)/2)$. Por un argumento de simetría, solo basta evaluar el problema de optimización en los valores $\{0, 1, \alpha, \sqrt{(1+\alpha^2)/2}\}$. Sigue entonces que

$$\|W_n\|_\infty = \max\,\{0, \alpha^2, (\alpha^2-1)^2/4\} = \max\,\{\alpha^2, (\alpha^2-1)^2/4\}$$

Como queríamos. ■

(II) Sea $g(x) := x^2 - (x^2-1)^2/4$. Notar que $g(x) \leq 0$ en $x \in [0, \sqrt{2}-1] := I$ y $g(x) \geq 0$ en $x \in [\sqrt{2}-1, 1] := J$. Sigue que

$$\min_{0\leq\alpha\leq 1} \max\,\{\alpha^2, (\alpha^2-1)^2/4\} = \min\,\{\min_{\alpha\in I}(\alpha^2-1)^2/4, \min_{\alpha\in J}\alpha^2\} = \min\,\{3-2\sqrt{2}, 3-2\sqrt{2}\} = 3-2\sqrt{2}$$

Se tiene entonces que el mínimo valor de $\|W_n\|_\infty$ es $3-2\sqrt{2}$ que se alcanza cuano $\alpha = \sqrt{2}-1$.

(III) Se tiene $n = 3$ y $\alpha = 1/2$. Por la parte anterior, $\|W_3\|_\infty = 0{,}5^2 = 1/4$.
**Afirmación:** $\|f^{(4)}(x)\|_\infty = 12$
**Demostración:** Por diferenciabilidad, solo basta chequear los puntos $x$ que cumplen $f^{(5)}(x) = 0$. Notar que $f^{(5)}(x) = e^{-x^2}x(-32x^4+160x^2-120)$. Esta ecuación tiene soluciones $x_1 = 0$ y $x_{2,3,4,5} = \pm\sqrt{2{,}5 \pm \sqrt{2{,}5}}$. Revisando, se concluye que el máximo ocurre en $x = 0$, dando $f^{(4)}(0) = 12$, como queríamos. ■
Juntando todo, obtenemos:

$$\|f - P_n\|_\infty \leq \frac{\|f^{(n+1)}(x)\|_\infty}{(n+1)!}\|W_n\|_\infty = \frac{12}{24} \cdot 1/4 = \frac{1}{8}$$

Como queríamos.

(b) (I) Demostraremos que $|W_n(x)| \leq n! \cdot h^{n+1}$ para todo $x \in [a, b]$. Si $x$ es un nodo, entonces trivilmente se cumple lo pedido ya que $W_n(x) = 0$, por lo que asumimos que $x \in (x_k, x_{k+1})$ para algún $k$. Sigue que

$$|W_n(x)| = \prod_{i=0}^{k} |(x - x_i)| \cdot \prod_{i=k+1}^{n} |(x - x_i)| \leq \prod_{i=0}^{k} |(k - i + 1)h| \cdot \prod_{i=k+1}^{n} |(i - k)h| = h^{n+1} \cdot (k+1)! \cdot (n-k)!$$

**Afirmación:** $\max_{k \in \mathbb{Z} \cap [0,n]} (k + 1)! \cdot (n - k)! = n!$

**Demostración:** Notar que $(k + 1)! \cdot (n - k)! = (k + 1)! \cdot \prod_{i=1}^{n-k} i \leq (k + 1)! \cdot \prod_{i=1}^{n-k} i + k = n!$. Como la igualdad anterior se cumple para $k = 0$, se concluye que el máximo es $n!$
■
Juntando todo, se tiene $|W_n(x)| \leq h^{n+1}n!$ donde esta cota no puede mejorar por la afirmación. ■

(II) Directamente se tiene:

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{\frac{10^{n+2}}{(n+1)^{n+2}}(n+1)!}{\frac{10^{n+1}}{n^{n+1}}n!} = 10\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \overset{\text{Enunciado}}{\geq} \frac{10}{3}\left(\frac{n}{n+1}\right) \overset{(n\geq 2)}{\geq} \frac{20}{9} > 2$$

Como $A_2 \geq 1$, un argumento inductivo muestra que $A_n \geq 2^{n-2}$ para $n \geq 2$, por lo que

$$\lim_{x\to\infty} A_n \geq \lim_{x\to\infty} 2^{n-2} = \infty \implies \lim_{x\to\infty} A_n = \infty$$

■

# Problema 3

(a) (I) Notar que $\gamma_n(x_i) = 0$ para $i = 0, \cdots, n$, ya que la matríz asociada tedrá dos filas iguales cuando $x = x_i$. Además, es sabido que el determinante de una matríz es un polinomios en las entradas de esta, por lo que $\gamma_n$ es un polinomio en $x$ de grado a lo más $n$. Se concluye que existe una constante $C$ tal que $\gamma_n(x) = C(x - x_0)\cdots(x - x_n)$ ya que $x_0, \cdots x_n$ son todas raíces de $\gamma_n$.

(II) Calcularemos de dos formas el coeficiente de $x^n$ en $\gamma_n$. Expandiendo la expresión de la parte anterior, se tiene que dicho coeficiente es $C$, mientras que al calcular la determinante de la matríz usando la última fila, el coeficiente de $x^k$ en $\gamma_n$ es el determinante de la matríz resultante de eliminar la columna $k$ y la última fila de la matríz. Particularmente, $C = \det(V_{n-1})$.

(III) Usaremos inducción en $n$ para demostar $\det(V_n) = \prod_{0\leq i<j\leq n}(x_j - x_i)$.
**CB:** Si $n = 1$, entonces $\det(V_n) = x_1 - x_0 = \prod_{0\leq i<j\leq 1}(x_j - x_i)$
**HI:** Supongamos que para todos los reales $x_0, \cdots, x_n$, $\det(V_n) = \prod_{0\leq i<j\leq n}(x_j - x_i)$ y sea $x_{n+1}$ un real arbitrario.

**TI:** Tenemos:

$$\det(V_{n+1}) = \det(V_n) \prod_{0\leq i<n} (x_{n+1} - x_i) \overset{\text{HI}}{=} \prod_{0\leq i<j\leq n} (x_j - x_i) \cdot \prod_{0\leq i<n} (x_{n+1} - x_i) = \prod_{0\leq i<j\leq n+1} (x_j - x_i)$$

Por lo que la igualdad se cumple para $n+1$. Concluímos por inducción. ■

(b) Sea $P$ un polinomio de grado $n$ con raíces distintas $\alpha_0, \cdots \alpha_n$. Usando el sistema de la parte (a) en los puntos $(\alpha_i, 0)$ para $i = 0, \cdots n$, se obtiene que el vector $a := (a_0, \cdots, a_n)^\top$ pertene al kernel de $V_n$. Por la parte (a), sabemos que $\det(V_n) \neq 0$, por lo que $V_n$ es invertible, implicando que $a = 0$. Sigue que $P$ tiene todos sus coeficientes 0, por lo que es el polinomio 0. ■

(c) Sea $G = P_n - \tilde{P}_n$ un polinomio de grado a lo más $n$. Sebemos que $G(x_i) = P_n(x_i) - \tilde{P}_n(x_i) = 0$ para cada uno de los $n+1$ nodos. Por la parte (b), se tiene que $G$ es el polinomio 0, por lo que $P_n = \tilde{P}_n$. ■

(d) Sea $l(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x) - 1$. Como $l(x_i) = 1 - 1 = 0$ para cada nodo $x_i$, usando la parte (b) se concluye que $l(x) \equiv 0$, implicando que $\sum_{i=0}^n L_i(x) = 1$. ■

# Problema 4

(a)

```
function w = BarycentricWeights(xnod)
n = length(xnod)
w = ones(1,n)
for i = 1:n
    prod = 1;
    for j = 1:n
        if j~=i
            prod = prod/(xnod(i)-xnod(j));
        end
    end
    w(i) = prod;
end
end

function P = BarycentricEvaluation(xnod,w,f,xeval)
n = length(xnod);
m = length(xeval);
P = ones(1,m);
for i=1:m
    x = xeval(i);
    if ismember(x, xnod)
        for j = 1:n
            if x==xnod(j)
                P(i)=f(j);
            end
        end
    else
        num = 0;
        den = 0;
        for j = 1:n
            num = num+w(j)*f(j)/(x-xnod(j));
            den = den+w(j)/(x-xnod(j));
        end
        P(i)=num/den;
    end
```

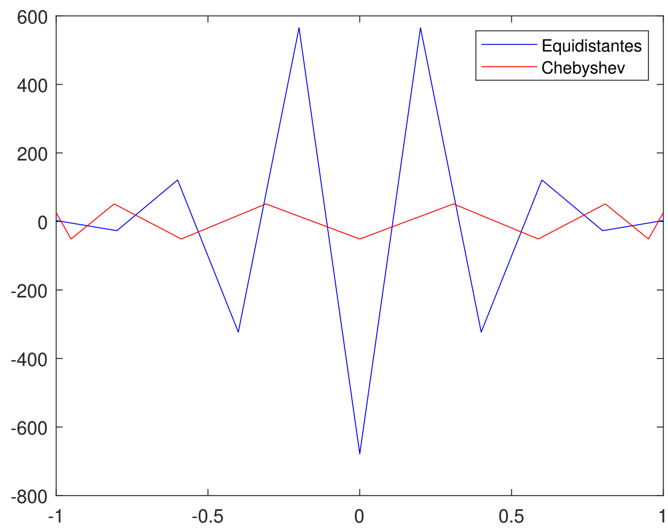


Figura 1: Pesos Equidistantes v/s Chebyshev

```
end
end
```

(b) Sobre los gráficos, se puede concluír que los pesos son considerablemente de menor magnitud (y más estables) cuando se usan nodos de Chebyshev.

```
n = 10;
xnod = -1:(2/n):1
cheb = ones(1,n+1)
for i = 1:(n+1)
    cheb(i) = -cos(pi*(i-1)/n)
end
w_xnod = BarycentricWeights(xnod);
w_cheb = BarycentricWeights(cheb);
plot(xnod,w_xnod,'blue',cheb,w_cheb,'red')
legend('Equidistantes','Chebyshev')
```

(c) El error es evidentemente mayor en los nodos equidistantes, por lo que al menos en esta función, es mejor usar nodos tipo Chebyshev.

```
x_ev = -1:1/100:1;
y_ev_eq = ones(1,11);
y_ev_ch = ones(1,11);
y_ev = ones(1,201)
for i = 1:11
    y_ev_eq(i) = fun(xnod(i)) ;
    y_ev_ch(i) = fun(cheb(i)) ;
end

for i = 1:201
    y_ev(i) = fun(x_ev(i)) ;
end
```

**Error** $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$

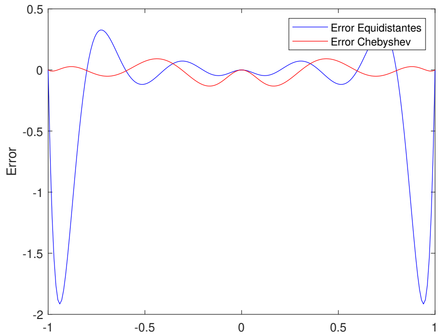


Figura 2: Error Equidistantes v/s Chebyshev

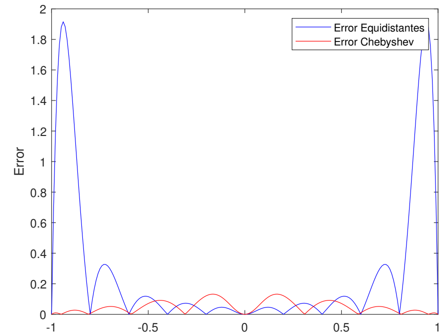


Figura 3: Error absoluto Equidistantes v/s Chebyshev

**Error** $f(x) = |x|$

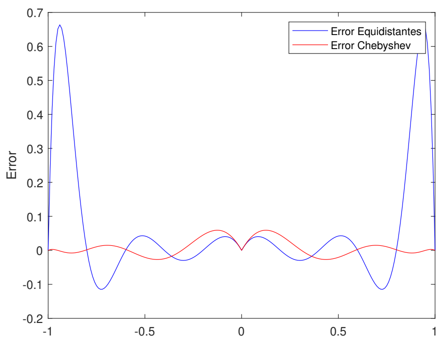


Figura 4: Error Equidistantes v/s Chebyshev

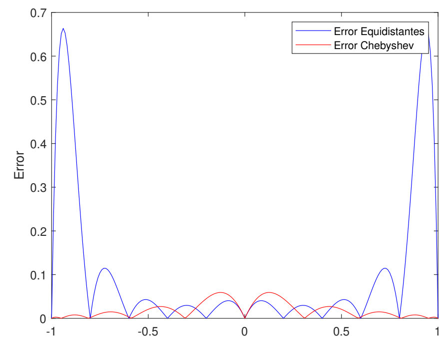


Figura 5: Error absoluto Equidistantes v/s Chebyshev

```
equidistantes = BarycentricEvaluation(xnod,w_xnod,y_ev_eq,x_ev);
chebyshev = BarycentricEvaluation(cheb,w_cheb,y_ev_ch,x_ev);

error_eq = y_ev-equidistantes;
error_ch = y_ev-chebyshev;

plot(x_ev,error_eq,'blue',x_ev,error_ch,'red')
legend('Error Equidistantes','Error Chebyshev')
ylabel('Error')
```

(d) No pondré el código ya que es idéntico al punto (c) y se encuentra en el archivo .m de la tarea. Nuevamente el error resulta menor en los nodos Chebyshev.

(e) Sea $\operatorname{sgn}(x)$ la función signo. Basta demostrar que para todo $k$, $\operatorname{sgn}(w_k) = -\operatorname{sgn}(w_{k+1})$. Tenemos:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sgn}(w_k) &= \left(\prod_{i=0}^{k-1} \operatorname{sgn}(x_k - x_i)\right) \cdot \operatorname{sgn}(x_k - x_{k+1}) \cdot \left(\prod_{i=k+1}^{n} \operatorname{sgn}(x_k - x_i)\right) \\
&= \left(\prod_{i=0}^{k-1} \operatorname{sgn}(x_{k+1} - x_i)\right) \cdot -\operatorname{sgn}(x_{k+1} - x_k) \cdot \left(\prod_{i=k+1}^{n} \operatorname{sgn}(x_{k+1} - x_i)\right) \\
&= -\operatorname{sgn}(w_{k+1})
\end{aligned}$$

Como queríamos. ■