Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Tarea 3

6 de Septiembre 2023

2º semestre 2023 - Profesores G. Diéguez - S. Bugedo - N. Alvarado - B. Barías

Diego Pérez - 22203583

Problema 1

1. Demostraremos que la siguiente interpretación:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(Dom) &:= \mathbb{Q} \\ \mathcal{I}(<) &:= \text{ Uso común dado a } < \\ \mathcal{I}(=) &:= \text{ Uso común dado a } = \end{aligned}$$

satisface Σ_2 y particularmente, satisface Σ_1. Para hacerlo, basta verificar que $\mathcal{I} \models \alpha_i$ para todo i.

- $\boxed{\alpha_1}$ sigue de que $x = x$.
- $\boxed{\alpha_2}$ sigue de la transitividad de $<$.
- $\boxed{\alpha_3}$ sigue de que $\mathbb{Q}$ admite un orden.
- $\boxed{\alpha_4}$ basta tomar $y = x + 1 \in \mathbb{Q}$.
- $\boxed{\alpha_5}$ basta tomar $y = x - 1 \in \mathbb{Q}$.
- $\boxed{\alpha_6}$ basta tomar $z = \frac{x+y}{2} \in \mathbb{Q}$.

2. a) $\forall x(P(x) \to \neg Q(x))$ o equivalentemente, $\forall x(\neg P(x) \vee \neg Q(x))$.

   b) $\forall x(R(x) \to \neg S(x))$ o equivalentemente, $\forall x(\neg R(x) \vee \neg S(x))$.

   c) $\forall x(\neg Q(x) \to S(x))$ o equivalentemente, $\forall x(Q(x) \vee S(x))$.

   d) $\forall x(P(x) \to \neg R(x))$ o equivalentemente, $\forall x(\neg P(x) \vee \neg R(x))$.

   e) $\boxed{\text{Respuesta: } \textbf{Si lo implica.}}$ Demostraremos que el conjunto

   $$\Sigma = \{\forall x(\neg P(x) \vee \neg Q(x)), \forall x(\neg R(x) \vee \neg S(x)), \forall x(Q(x) \vee S(x)), \neg(\forall x(\neg P(x) \vee \neg R(x)))\}$$

   es inconsistente, lo que implicará lo pedido. Para hacerlo, demostraremos $\Sigma \models \square$.

(1)	$\forall x(\neg P(x) \vee \neg Q(x))$	$\in \Sigma$
(2)	$\neg P(a) \vee \neg Q(a)$	especificación universal
(3)	$\forall x(\neg R(x) \vee \neg S(x))$	$\in \Sigma$
(4)	$\neg R(a) \vee \neg S(a)$	especificación universal
(5)	$\forall x(Q(x) \vee S(x))$	$\in \Sigma$
(6)	$Q(a) \vee S(a)$	especificación universal
(7)	$\neg P(a) \vee \neg R(a)$	resolución (2), (4), (6)
(8)	$\neg(\neg P(a) \vee \neg R(a))$	$\in \Sigma$ y especificación universal
(9)	$\square$	resolución (7) y (8)

   Como queríamos.

Problema 2

a) Por definición de $\mathcal{T}(A)$, este conjunto contiene los subconjuntos X de A tales que $A \setminus X$ es finito, junto con el elemento $\varnothing$. Sigue que $\varnothing$ es un elemento de $\mathcal{T}(A)$.

b) Por definición de $\mathcal{T}(A)$, basta verificar que $A \setminus A$ es finito, pero esto se desprende de $A \setminus A = \varnothing$. Sigue que $A \in \mathcal{T}(A)$

c) **Proposición:** Sea $M(A) = \bigcup \mathcal{T}(A)$, entonces, para cada conjunto A, $M(A) = A$.

Demostración: Notar que si A tiene 1 elemento o es el conjunto vacio, entonces la proposición se cumple trivialmente, por lo que supongamos que A tiene al menos 2 elementos. Para cada elemento x de A, sea $A_x = A \setminus \{x\}$. Primero, como $A \setminus A_x = \{x\}$ finito y $A_x \subseteq A$, tenemos que $A_x \in \mathcal{T}(A)$. Supongamos que existe un $a \in A$ tal que $a \notin M(A)$, entonces, por definición de M, $a \notin T$ para cualquier elemento T de $\mathcal{T}(A)$. Sin embargo, $a \in A_b$ para $a \neq b$ (b existe ya que A tiene al menos 2 elementos) y $A_b \subseteq A$, contradicción. Sigue que $A \subseteq M(A)$.

Por otro lado, todo elemento X de $\mathcal{T}(A)$ cumple $X \in \mathcal{P}(A)$, por lo que $X \subseteq A$, implicando $M(A) \subseteq A$. Como $A \subseteq M(A)$, se concluye que $A = M(A)$. ■

Por (b), tenemos que $M(A) = A \in \mathcal{T}(A)$.

d) Sea $N = \bigcap \mathcal{X}$. Primero, si X es un elemento de $\mathcal{X}$, entonces $X \in \mathcal{P}(A)$, por lo que $X \subseteq A$. Esto implica que $N \subseteq A$ y $N \in \mathcal{P}(A)$. Queda demostrar que $A \setminus N$ es finito. Supongamos por contradicción que $A \setminus N$ es infinito, luego, existe una secuencia infinita de $x_0, x_1, \cdots$ de elementos de A tales que $x_i \in A$ pero $x_i \notin S$ para algún $S \in \mathcal{X}$ y para todo $i \geq 0$. Como $\mathcal{X}$ tiene una cantidad finita de elementos, existe un $S \in \mathcal{X}$ y una subsecuencia infinita de $\{x_i\}$ (llamemosla $\{y_i\}$) con $y_i \in A$ pero $y_i \notin S$. Luego, $A \setminus S$ es infinito, lo que contradice $S \in \mathcal{T}(A)$. Sigue que $A \setminus N$ es finito, por lo que $N \in \mathcal{T}(A)$.