Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Tarea 6

29 de Noviembre 2023

2º semestre 2023 - Profesores G. Diéguez - S. Bugedo - N. Alvarado - B. Barías

Diego Pérez - 22203583

Problema 1

(a) Supongamos por contradicción que existe un vértice $t \in V$ tal que $\deg(t) \neq 2$. Por la condición del enunciado, se tiene $\deg(t) \geq 3$ y $\deg(v) \geq 2$ para todo $v \in V$. Se usa la identidad vista en clases:

$$2|E| = \sum_{v \in V} \deg(v) = \deg(t) + \sum_{v \in V/\{t\}} \deg(v) \geq 3 + \sum_{v \in V/\{t\}} 2 = 2|V| + 1$$

Lo que es imposible ya que $|E| = |V|$. Sigue que $\deg(v) = 2$ para todo $v \in V$.

(b) En primer lugar, dado $v = (b_1, b_2, \cdots, b_n) \in V_n$, los vértices adyacentes a v por enunciado son exactamente $(1-b_1, b_2, \cdots, b_n)$, $(b_1, 1-b_2, \cdots, b_n) \cdots (b_1, b_2, \cdots, 1-b_n)$, por lo que todo vértice $v \in V_n$ cumple $\deg(v) = n$.

Además, dado un par $x, y \in V_n$ con $x = (x_1, \cdots, x_n)$ e $y = (y_1, \cdots, y_n)$, la secuencia de nodos adyacentes:

$$\begin{aligned} x =& (x_1, x_2 \cdots, x_n) \\ & (y_1, x_2 \cdots, x_n) \\ & (y_1, y_2 \cdots, x_n) \\ & \vdots \\ & (y_1, y_2 \cdots, y_n) = y \end{aligned}$$

Muestra que G_n es conexo para todo n. (posiblemente la lista contiene vértices iguales, pero en tal caso solo se trabaja con el primero de estos que aparece en la lista).

Por lo visto en clases, sigue que G_n es Euleriano si y solo si $\deg(v) = n$ es par para todo $v \in V_n$. Sigue que G_n es Euleriano si y solo si n es par.

Problema 2

Proposición: Dados a, b enteros con $MCD(a, b) = d$, entonces existen x, y coprimos tales que $a = xd$ y $b = yd$.

Demostración: Como d divide a a y b, entonces existen x, y con $a = xd$ y $b = yd$, por lo que basta demostrar que son coprimos. Supongamos $MCD(x, y) = z > 1$. Sea $d' = dz$, como $z|x$, entonces $d' = dz|dx = a$ y similarmente $d'|b$. Pero $d' = dz > d$, que contradice que d era el MCD de a y b. Sigue que $z = 1$ como queríamos. ■

(a) Tomamos x e y coprimos con $k = xd$ y $m = yd$. Por enunciado, existe l entero con $lyd = lm = k(a - b) = xd(a - b) \implies ly = x(a - b)$. Como l es entero, $y|(a - b)x$ y dada la coprimidad de x e y, se conlucye $y|a - b$. Esto es equivalente a $a \equiv b \mod (y)$ que era lo que queríamos demostrar.

(b) Sea x, y coprimos con $a = dx$ y $m = dy$

$\boxed{\implies}$ Si la congruencia tiene una solución t, entonces $dy = m|at - b = dxt - b$, como $d|dy$ se obtiene que $d|dxt - b$ y como $d|dxt$, se concluye que $d|b$

$\boxed{\impliedby}$ Si $d|b$, entonces existe un z entero tal que $dz = b$. Como $MCD(x, y) = 1$, entonces existe un t tal que $y|xt - 1$, por lo que $y|xt' - z$ para $t' = zt$. Se tiene

$$\frac{xt' - z}{y} \in \mathbb{Z} \implies \frac{dxt' - dz}{dy} = \frac{at' - b}{m} \in \mathbb{Z} \implies at' \equiv b \mod m$$

Por lo que la congruencia lineal tiene solución.