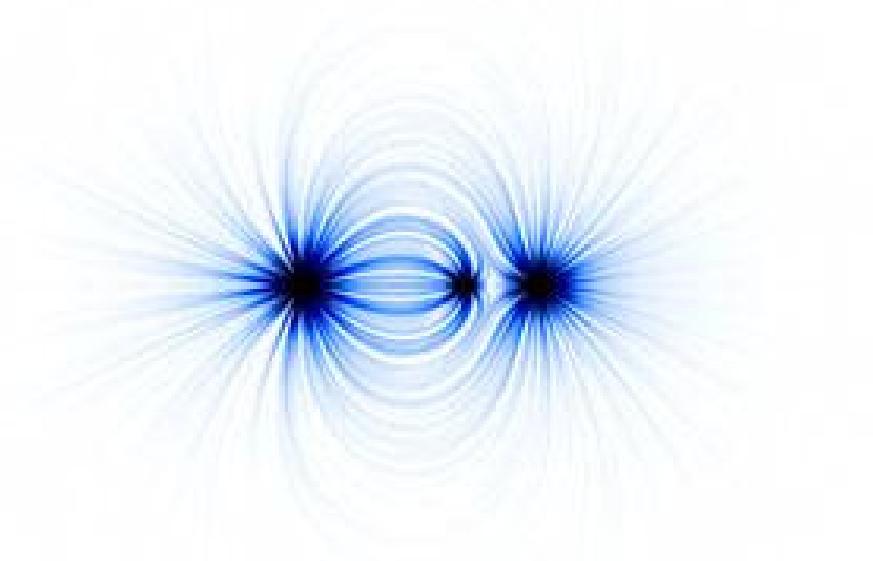




Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Física

Teoría Electromagnética

Con ejercicios resueltos



Fabián Cádiz

Parte I

Electrostática

Capítulo 1

Elementos de Cálculo vectorial

1.1. Álgebra de Vectores en R^3

Esta es una lista de identidades elementales del álgebra vectorial, que se supondrán bien conocidas

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y) \hat{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \hat{j} + (A_x B_y - A_y B_z) \hat{k}$$

$$\vec{A} \times \vec{A} = 0$$

$$\vec{A} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = 0$$

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C}$$

1.2. Cálculo diferencial en R^3

Sea $f : [R^3] \rightarrow R$ una función real. También es llamada **campo escalar**, pues a cada punto del espacio (R^3) le asocia un número real (un escalar). Ejemplo de un campo escalar puede ser la temperatura en cierta región del espacio $T : [\Omega \subseteq R^3 \rightarrow R]$

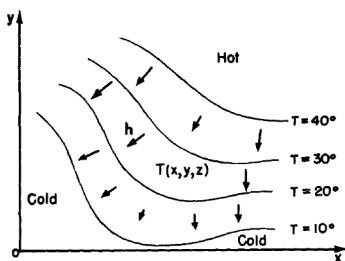


Fig. 1.1: $T(x, y, z)$ representa un campo escalar sobre Ω

Además de la existencia de campos escalares, también existen **campos vectoriales**. La idea es bien simple, a cada punto del espacio se le asocia un vector. En R^3 , el tipo de campos vectoriales que nos interesarán son de la forma $\vec{F} : [\Omega \subseteq R^3] \rightarrow R^3$.

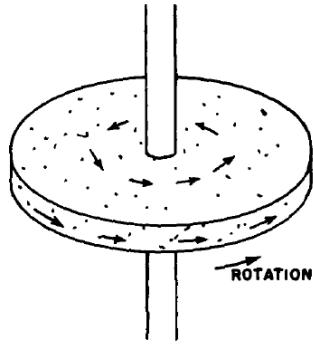


Fig. 1.2: La velocidad de los átomos de un objeto que rota es un ejemplo de campo vectorial

1.2.1. Derivadas de un campo escalar

Si f es un campo escalar diferenciable (y por lo tanto una función continua) sobre un dominio $D \subseteq R^3$, entonces está definido el **Gradiente** de f

$$\vec{\nabla}f(x, y, z) = \left(\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} \right)$$

El gradiente es un campo **vectorial**, pues a cada punto en D le asocia un vector. Es inmediato notar que el gradiente es perpendicular a curvas en donde el campo escalar f es constante, como las curvas que se muestran en la figura 1. (Llamadas isotermas en el caso de que el campo escalar sea la temperatura). En efecto, la curva

$$f(x, y, z) = C$$

puede ser parametrizada

$$f(x(t), y(t), z(t)) = C$$

Derivando con respecto a t , se obtiene

$$\frac{\partial f}{\partial x}x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}y'(t) + \frac{\partial f}{\partial z}z'(t) = 0$$

$$\left(\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} \right) \cdot (x'(t), y'(t), z'(t)) = 0$$

y entonces el gradiente es perpendicular a la dirección tangente a la curva. Más aún, si \hat{u} es un vector unitario, se define la **derivada direccional** de f en la dirección \hat{u} como

$$D_{\hat{u}}f(x, y, z) = \vec{\nabla}f(x, y, z) \cdot \hat{u}$$

Se puede demostrar que la derivada direccional se maximiza en la dirección del gradiente, es decir, el gradiente entrega la dirección de máxima variación de f .

1.3. $\vec{\nabla}$ como un operador

Conviene considerar al gradiente como algo independiente de que función se está derivando. Llamamos $\vec{\nabla}$ al operador

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

Por supuesto que este operador así escrito no significa nada. El operador $\vec{\nabla}$ debe operar sobre una función, por ejemplo

$$\vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

Tiene completo sentido en este caso. Hemos "multiplicado" al operador por una cantidad escalar. Hay que tener ciertas precauciones con este tipo de notación, por ejemplo, del álgebra de vectores es sabido que si α es un escalar

$$\alpha \vec{A} = \vec{A} \alpha$$

sin embargo, $f \vec{\nabla}$ no tiene sentido por si mismo, en efecto, es un nuevo operador

$$f \vec{\nabla} = \left(f \frac{\partial}{\partial x}, f \frac{\partial}{\partial y}, f \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

1.3.1. Divergencia y Rotor

Si \vec{F} es un campo vectorial, entonces

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$$

debe ser un escalar, y por lo tanto puede tener un sentido físico. Entendiendo $\vec{\nabla}$ como un operador vectorial, se tiene

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (F_x, F_y, F_z)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x} F_x + \frac{\partial}{\partial y} F_y + \frac{\partial}{\partial z} F_z$$

A esta cantidad escalar asociada a un campo vectorial se le llama **divergencia** de \vec{F} .

Veamos que más es posible definir a partir del operador gradiente. ¿Qué ocurre con $\vec{\nabla} \times \vec{F}$? Por supuesto que el resultado debe ser un campo vectorial, de hecho, muy útil en el análisis de funciones vectoriales. Desarrollando este producto cruz según el álgebra de vectores

$$(\vec{\nabla} \times \vec{F})_x = \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}$$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{F})_y = \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}$$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{F})_z = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}$$

A esta combinación se le llama **rotor**. En resumen, hemos definido las siguientes cantidades

$$\vec{\nabla} f \rightarrow \text{Vector}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} \rightarrow \text{Escalar}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} \rightarrow \text{Vector}$$

1.3.2. Segundas derivadas

Hasta ahora hemos definido cantidades que involucran únicamente primeras derivadas. Veamos que ocurre con las siguientes combinaciones

$$(a) \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} f)$$

$$(b) \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f)$$

$$(c) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{F})$$

$$(d) \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F})$$

$$(e) \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F})$$

Veamos la primera de ellas, es claro que debe obtenerse un campo escalar. Desarrollando

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} f) = \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Se ve que esto se puede reescribir como

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} f) = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f = (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) f = \vec{\nabla}^2 f$$

Vemos a $\vec{\nabla}^2$ como un nuevo operador, y como aparece mucho en física, tiene un nombre. Es llamado **Laplaciano**

$$\text{Laplaciano} \rightarrow \vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

debido a que el Laplaciano es un operador escalar, podría aplicarse sobre un vector

$$\vec{\nabla}^2 \vec{F}$$

por supuesto esto significa que el operador Laplaciano opera sobre cada componente de \vec{F}

$$\vec{\nabla}^2 \vec{F} = (\vec{\nabla}^2 F_x, \vec{\nabla}^2 F_y, \vec{\nabla}^2 F_z)$$

Veamos que ocurre con la expresión (b). Notemos que tiene la siguiente forma

$$\vec{A} \times (\vec{A} f) = (\vec{A} \times \vec{A}) f = 0$$

Esperamos que

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f)$$

sea cero para cualquier campo escalar f . Podemos verificarlo tomando alguna de las componentes

$$[\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f]_x = \vec{\nabla}_z (\vec{\nabla} f)_y - \vec{\nabla}_y (\vec{\nabla} f)_z$$

$$[\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f]_x = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) = 0$$

Del mismo modo se muestra para las demás componentes

La expresión (c) es por supuesto un campo vectorial

$$\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{F})$$

Sin embargo, no hay nada muy especial que decir acerca de él. Es simplemente un campo vectorial que podría aparecer en el futuro

La expresión (d) tiene la forma

$$\vec{A} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = 0$$

Es decir, esperamos que

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0$$

Para cualquier campo vectorial \vec{F} . Es así, y es fácil de verificar

Por último, veamos que sucede con la expresión (e)

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F})$$

Ésta tiene la forma de

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} (\vec{A} \cdot \vec{C}) - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C}$$

Podríamos seguir utilizando esta expresión y escribir

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \vec{F}$$

El último término es el Laplaciano

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) - \vec{\nabla}^2 \vec{F}$$

En resumen, hemos encontrado

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} f) = \vec{\nabla}^2 f \rightarrow \text{Laplaciano sobre } f, \text{ campo escalar}$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f) = 0$$

$$\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) \rightarrow \text{Campo vectorial}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) - \vec{\nabla}^2 \vec{F} \rightarrow \text{campo vectorial}$$

1.3.3. Dos teoremas adicionales

En muchos problemas físicos, sucede que un determinado campo vectorial \vec{F} tiene rotor nulo. Es decir

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$$

Hemos visto que el rotor de un gradiente es siempre cero. Podría ser ciento entonces, que \vec{F} fuera el gradiente de algún campo escalar, de esta forma su rotor sería siempre nulo. Lo interesante es que esto es siempre así, y enunciaremos el siguiente teorema

Si

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$$

Existe un campo escalar ψ , tal que

$$\vec{F} = \vec{\nabla} \psi$$

Del mismo modo, hemos visto que la divergencia de un rotor es siempre cero. Luego, si la divergencia de un campo vectorial \vec{F} es nula, podría tenerse que \vec{F} fuera el rotor de un campo vectorial. De ser así, estaría garantizado que su divergencia sea nula. En efecto, enunciamos el segundo teorema

Si

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0$$

Existe un campo vectorial \vec{A} , tal que

$$\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

1.4. Cálculo Integral en R^3

1.4.1. Integral de línea de un campo vectorial

Sea $\vec{F} : [\Omega \subseteq R^3] \rightarrow R^3$

Consideremos una curva Γ contenida en Ω . Sea $\vec{x}_0, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ una partición de Γ , (\bar{x}_k, \bar{y}_k) un punto en el trazo de Γ que va de \vec{x}_{k-1} a \vec{x}_k , y $\Delta \vec{x}_k = \vec{x}_k - \vec{x}_{k-1}$. Se define la integral de línea de $\vec{F}(\vec{x})$ por

$$\int_{\Gamma} d\vec{x} \cdot \vec{F}(\vec{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{F}(\bar{x}_k, \bar{y}_k) \cdot \Delta \vec{x}_k$$

Esto se puede reescribir como

$$\int_{\Gamma} d\vec{x} \cdot \vec{F}(\vec{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{F}(\bar{x}_k, \bar{y}_k) \cdot \frac{\Delta \vec{x}_k}{|\Delta \vec{x}_k|} |\Delta \vec{x}_k| = \int_{\Gamma} ds \hat{T}(\vec{x}) \cdot \vec{F}(\vec{x})$$

donde $\hat{T}(\vec{x})$ es la tangente unitaria a la curva Γ en \vec{x} . Así

$$\int_{\Gamma} d\vec{x} \cdot \vec{F}(\vec{x}) = \int_{\Gamma} ds \hat{T}(\vec{x}) \cdot \vec{F}(\vec{x})$$

La integral de línea de un campo vectorial sobre una curva Γ corresponde a sumar las proyecciones de $\vec{F}(\vec{x})$ en la dirección tangente a la curva en todo punto.

1.4.2. Integral de superficie de un campo vectorial

Sea $\vec{F} : [\Omega \subseteq R^3] \rightarrow R^3$ y S una superficie contenida en Ω . Se define la integral de flujo del campo \vec{F} sobre S como

$$\iint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{F}(\vec{x}) = \iint_S dS(\vec{x}) \hat{n}(\vec{x}) \cdot \vec{F}(\vec{x})$$

corresponde a sumar la proyección del campo \vec{F} sobre la normal a la superficie S en cada punto.

1.4.3. Teorema de la Divergencia

Sea $\Omega \subseteq R^3$ una región. Sea \vec{F} un campo vectorial continuo y diferenciable en Ω . Entonces

$$\iiint_{\Omega} d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \iint_{\delta\Omega} d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{F}(\vec{x})$$

1.4.4. Teorema de Stokes

Sea S una superficie en R^3 . Sea \vec{F} un campo vectorial continuo y diferenciable en una región que contiene a S . Entonces

$$\iint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{x})) = \oint_{\delta S} d\vec{x} \cdot \vec{F}(\vec{x})$$

donde δS es el contorno de S (una curva en R^3)

Capítulo 2

Introducción

Este curso trata sobre los fundamentos de la teoría Electromagnética, una teoría realmente exitosa y que es capaz de explicar y predecir una gran cantidad de fenómenos. Una de las dificultades en su construcción fue la gran cantidad de fenómenos complejos, que en un principio aparentemente no tenían relación unos con otros. Sin embargo uno de los mayores logros de la electrodinámica es mostrar que en realidad están todos relacionados, además de permitir la creación de nuevas aplicaciones, que no aparecen de forma inmediata en la naturaleza y que han cambiado la vida de todo el mundo. Absolutamente toda la teoría se encuentra resumida en un conjunto de cuatro ecuaciones diferenciales, llamadas **Ecuaciones de Maxwell**

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(t, \vec{x}) &= \frac{\rho(t, \vec{x})}{\epsilon_0} \\ \vec{\nabla} \times \vec{E}(t, \vec{x}) &= -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(t, \vec{x}) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(t, \vec{x}) &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B}(t, \vec{x}) &= \mu_0 \vec{J}(t, \vec{x}) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(t, \vec{x})\end{aligned}}$$

Éstas 4 ecuaciones resumen todos los resultados empíricos acumulados durante años por los estudios de los físicos Coulomb, Gauss, Ampère, Faraday y muchos otros. Fueron presentadas en 1873 por el matemático inglés **James Clerk Maxwell**¹. Además de explicar todos los fenómenos eléctricos y magnéticos conocidos hasta la época, muestran que electricidad y magnetismo no son fenómenos independientes, y explica la forma en como ambos se relacionan. Las ecuaciones de Maxwell fueron capaces de predecir la creación de ondas electromagnéticas de energía cuya velocidad de propagación teórica coincidía con la velocidad de la luz (hecho que corroboró Heinrich Hertz en 1887). Hoy se sabe que la luz es un tipo de onda electromagnética, luego, todas las leyes de la óptica, también son explicadas de forma consistente por las ecuaciones de Maxwell. Esto fue un gran suceso pues logró mostrar que fenómenos que parecían totalmente diferentes provenían de los mismos principios físicos. Radiación infrarroja, luz visible, radiación ultravioleta, rayos x, rayos gama, son todos diferentes tipos de ondas oscilatorias, y sólo se diferencian en sus frecuencias. Todas reciben el nombre de radiación, debido a que propagan (irradian) energía.

En este curso se pretenden desarrollar las bases empíricas para las ecuaciones de Maxwell, mediante la introducción del campo eléctrico \vec{E} y magnético \vec{B} .

¹A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field, James Clerk Maxwell

Primeramente estudiaremos el caso estático, en donde los campos no tienen dependencia temporal. En este caso las ecuaciones de Maxwell se transforman en:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{J}\end{aligned}$$

Notemos que ahora hay 2 ecuaciones para cada campo totalmente independientes entre sí, en otras palabras, electricidad y magnetismo son fenómenos absolutamente independientes mientras los campos sean estáticos. Las dos primeras ecuaciones corresponden a la Electrostática, mientras que las 2 últimas a la Magnetostática. Desarrollaremos las ideas y principios fundamentales de ambos casos estáticos, para luego estudiar los campos variantes en el tiempo y derivar las ecuaciones de Maxwell.



Fig. 2.1: James Clerk Maxwell

James Maxwell (1831-1879) Físico Escocés. Es el creador de la electrodinámica moderna y el fundador de la teoría cinética de los gases. Sus teorías constituyeron el primer intento de unificar dos campos de la física que, antes de sus trabajos, se consideraban completamente independientes: la electricidad y el magnetismo (conocidos como electromagnetismo). Además, en el año 1859 Maxwell formuló la expresión termodinámica que establece la relación entre la temperatura de un gas y la energía cinética de sus moléculas.

Capítulo 3

Electrostática

Una de las propiedades fundamentales de la materia corresponde a lo que se conoce como carga eléctrica. Esta propiedad es el origen de las fuerzas eléctricas. Considere un sistema de dos cargas puntuales y en reposo, q_1 y q_2 , separadas por una distancia r en el vacío. Por dos cargas puntuales, nos referimos por supuesto a objetos cuyo diámetro máximo es muchísimo menor que la separación entre ellos.

La fuerza entre cargas estáticas fue estudiada por Charles Augustin de **Coulomb**, (Físico e Ingeniero francés), encontrando una gran similitud entre la forma de las fuerzas electrostáticas y las de gravitación, pero notando que, a diferencia de la fuerza gravitacional, las fuerzas electrostáticas también pueden ser repulsivas.

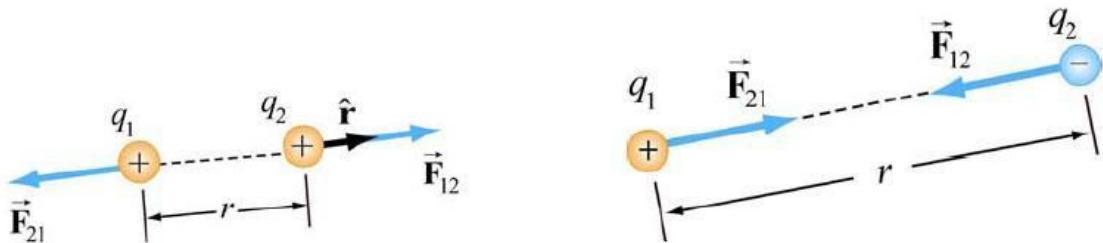
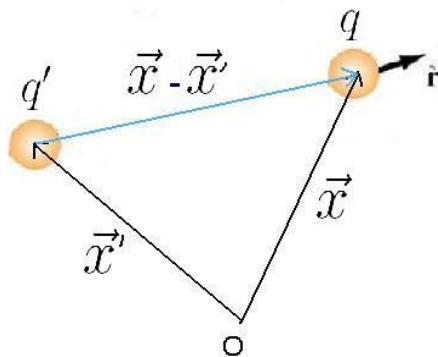


Fig. 3.1: Fuerza entre cargas puntuales puede ser repulsiva y atractiva

La fuerza que ejerce q' sobre q está dada por la **ley de Coulomb**

$$\vec{F}_q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{| \vec{x} - \vec{x}' |^3} (\vec{x} - \vec{x}')$$



Es decir, la fuerza electrostática es proporcional al producto de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas. Notar que la dirección

$$\frac{(\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

va siempre desde la carga q' hacia la carga q . El signo de la fuerza estará determinado entonces por el producto de las cargas, así, si ambas son iguales, la fuerza será repulsiva, mientras que si son de signo opuesto, la fuerza será atractiva.

En el sistema S.I., la constante de proporcionalidad está dada por

$$K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8,9875 \times 10^9 Nm^2/C^2$$

Donde ϵ_0 se conoce como la **permitividad del vacío**.

Similarmente, la fuerza sobre q' debido a q está dada por $\vec{F}_{q'} = -\vec{F}_q$, como debe ser por la tercera ley de Newton. La ley de Coulomb describe perfectamente las fuerzas entre 2 cargas puntuales, luego, resulta de interés estudiar qué sucede cuando hay más de dos cargas presentes. Supongamos que existen N cargas q_j con $j = 1, 2, \dots, N$. Supongamos que hay una carga q en la posición \vec{x} y que la posición de la carga q_j es \vec{x}_j . La fuerza que ejercen las N cargas sobre q está dada por el **principio de superposición**

$$\vec{F}_q = \sum_{j=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_j}{|\vec{x} - \vec{x}_j|^3} (\vec{x} - \vec{x}_j)$$

Es decir, la suma de cada fuerza por separado. El principio de superposición implica que la fuerza neta entre 2 cargas es **independiente** de la presencia de otras cargas. Esto es cierto siempre y cuando las cargas estén en posiciones fijas (recordar que son fuerzas electrostáticas). Podrán notar inmediatamente, que como estamos considerando cargas estáticas que se ejercen fuerzas entre sí, deben necesariamente existir fuerzas externas que las mantengan en equilibrio. Supondremos entonces que las cargas están forzadas a mantenerse en su posición, de forma que las leyes que hemos establecido hasta ahora son válidas.

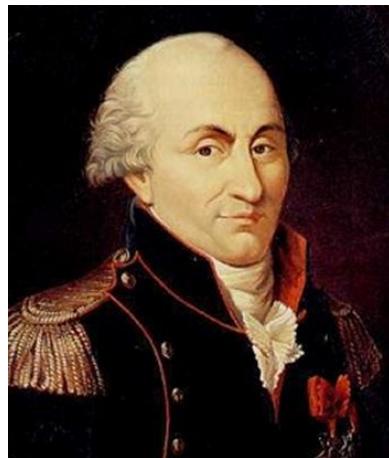


Fig. 3.2: Charles-Augustin de Coulomb (1736-1806)

3.1. Campo Eléctrico

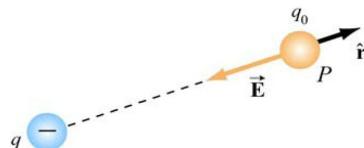
La fuerza electrostática, como la fuerza gravitacional, es una fuerza que actúa a distancia, es decir, no requiere que los objetos estén en contacto entre sí. Entonces, si tenemos 2 cargas puntuales, digamos, q y q_0 , podemos medir la fuerza que ejerce q sobre q_0 . A q_0 se le llamará **carga de prueba**, y la posicionaremos en diferentes lugares del espacio y mediremos la fuerza que siente debido a la presencia de la carga fija q . En este sentido, se piensa que q genera algo en todo el espacio que debe ser independiente de si colocamos o no la carga de prueba q_0 . Se dice que una carga eléctrica genera un **campo eléctrico** (matemáticamente descrito por un campo vectorial) en todo el espacio, el cual es capaz de actuar sobre otras cargas.

Justamente para cuantificar la magnitud del campo creado por la carga, podemos medir la fuerza que experimenta una carga positiva de prueba q_0 en algún punto del espacio.

El campo eléctrico \vec{E} se define formalmente como

$$\vec{E} = \lim_{q_0 \rightarrow 0} \frac{\vec{F}_{q_0}}{q_0}$$

Es decir, el campo existe en todo el espacio y es independiente de la carga de prueba. La sutileza de elegir una carga de prueba infinitamente pequeña es para que el campo producido por q_0 no altere de ninguna forma a la fuente del campo que queremos cuantificar.



Diremos entonces con este nuevo enfoque que la carga q es una fuente (crea) un campo eléctrico \vec{E} que ejerce una fuerza $\vec{F}_{q_0} = q_0 \vec{E}(x)$ sobre una carga q_0 ubicada en x . Usando la definición de Campo Eléctrico y la Ley de Coulomb, se obtiene que el campo eléctrico a una distancia r de la carga puntual q está dado por

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

donde \hat{r} es la dirección radial desde la carga q

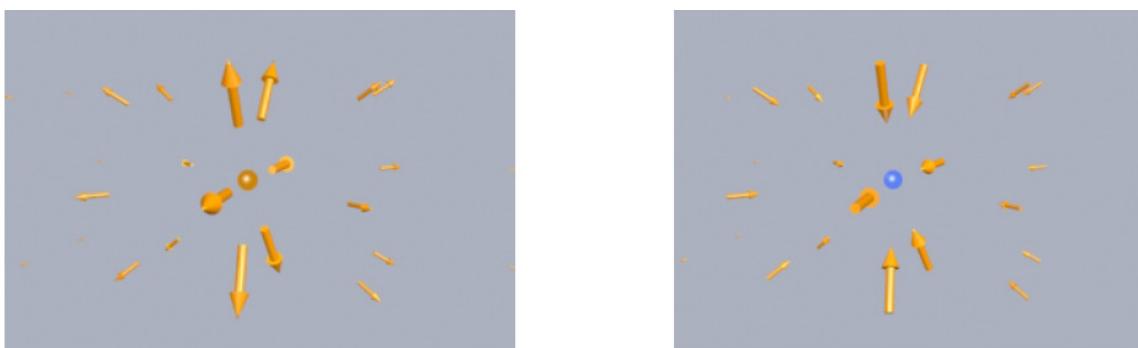


Fig. 3.3: Representación gráfica del campo vectorial \vec{E} para una carga positiva(izq) y negativa (der)

Lógicamente, el principio de superposición es también válido para el campo eléctrico, bajo las mismas condiciones mencionadas anteriormente. Así, el campo en \vec{x} de una distribución discreta de N cargas puntuales ubicadas en $q_j, j = 1, 2, \dots, N$ está dado por

$$\vec{E}(\vec{x}) = \sum_{j=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{|\vec{x} - \vec{x}_j|^3} (\vec{x} - \vec{x}_j) \quad (3.1)$$

La ley de Coulomb y el principio de superposición son las leyes empíricas fundamentales de la Electrostática. Más adelante, veremos que las ecuaciones de Maxwell para el campo Electrostático

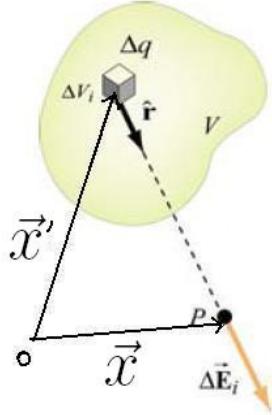
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{x}) = 0$$

contienen exactamente la misma información que acabamos de presentar (y por supuesto, contienen muchísima información adicional!), pero de una forma mucho más general, simple y elegante.

3.2. Distribuciones continuas de carga - Integrales de Coulomb

Se pueden extender estas ideas para cuando se tiene una gran cantidad de cargas distribuidas en una región del espacio. Supongamos una distribución continua de carga encerrada en un volumen V , por ésto entendemos una región del espacio en donde se puede definir una densidad volumétrica de carga en cada punto, digamos $\rho(\vec{x})$ (C / m^3)



En el caso de obtener una distribución continua de carga, se utiliza una partición del volumen V en celdas de volumen infinitesimal d^3x' . En la posición \vec{x}' , se encuentra un pequeño volumen con carga dada por

$$dq(\vec{x}') = d^3x' \rho(\vec{x}')$$

Como esta es una carga infinitesimal, el campo que genera en \vec{x} será el de una carga puntual

$$d\vec{E}(\vec{x}') = \frac{d^3x' \rho(\vec{x}')}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$$

Para obtener el campo generado por toda la distribución de carga, basta con sumar (integrar) sobre el volumen V las contribuciones individuales de cada elemento de volumen, luego

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{d^3x' \rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} (\vec{x} - \vec{x}')$$

En el caso de obtener una superficie S de carga, en donde para cada \vec{x}' en S se tiene una densidad superficial de carga (que denotaremos $\sigma(\vec{x}')$ para diferenciarla de una densidad volumétrica), se obtiene

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{ds' \sigma(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} (\vec{x} - \vec{x}')$$

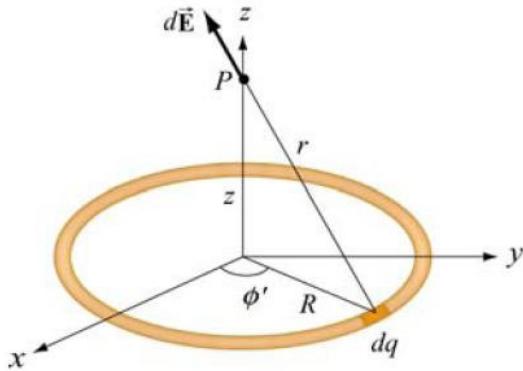
Por último, para una distribución lineal Γ , en donde para cada \vec{x}' en Γ se tiene una densidad lineal de carga, denotada $\lambda(\vec{x}')$ entonces el campo en \vec{x} está dado por

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Gamma} \frac{dx' \lambda(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} (\vec{x} - \vec{x}')$$

Éstas son las integrales de Coulomb y son una extensión al caso de una distribución discreta de cargas, a distribuciones continuas en el espacio

Ejemplo: Campo de un anillo de carga

Consideremos un anillo con densidad lineal de carga constante y dada por λ . El objetivo es calcular el campo eléctrico generado por esta distribución de carga en un punto sobre el eje de simetría a distancia z del origen



Un elemento diferencial de longitud sobre el anillo está dado por $dl = Rd\phi$ donde ϕ es el ángulo polar. Este elemento posee una carga $dq = \lambda dl = \lambda R d\phi$, de forma que el campo eléctrico en un punto \vec{x} debido a esta carga infinitesimal está dado por la ley de Coulomb

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} = \frac{d\phi R \lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$$

donde \vec{x}' es la posición del elemento de carga, en este caso

$$\vec{x}' = R\hat{r} = R(\cos\phi\hat{i} + \sin\phi\hat{j})$$

de forma que el campo total se obtiene integrando sobre todo el anillo (abarcando todo el rango de ϕ)

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{R}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\phi \frac{\vec{x} - R\hat{r}}{| \vec{x} - R\hat{r} |^3}$$

ahora, se desea el campo en un punto sobre el eje simetría del anillo, a distancia z del origen, de forma que

$$\vec{x} = z\hat{k}$$

y queda

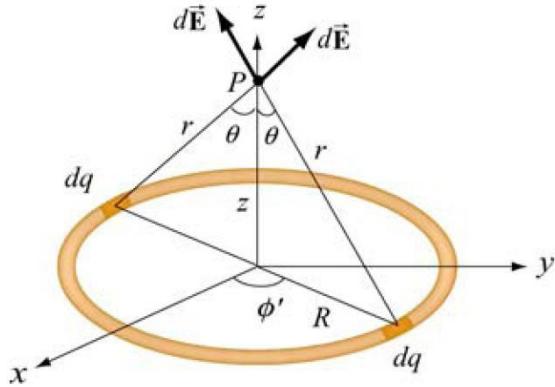
$$\vec{E}(z\hat{k}) = \frac{R}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\phi \frac{z\hat{k} - R\hat{r}}{| z\hat{k} - R\hat{r} |^3}$$

por supuesto que

$$| z\hat{k} - R\hat{r} | = (z^2 + R^2)^{1/2}$$

$$\vec{E}(z\hat{k}) = \frac{R}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\phi \frac{z\hat{k} - R \cos \phi \hat{i} - R \sin \phi \hat{j}}{(z^2 + R^2)^{3/2}}$$

De estas tres integrales (en \hat{i} , \hat{j} , \hat{k}), la única que no es nula es la según \hat{k} . Esto es fácil de ver apelando a la simetría de la distribución de carga



$$\vec{E}(z\hat{k}) = \frac{Rz}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\phi \frac{1}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \hat{k}$$

$$\vec{E}(z\hat{k}) = \frac{2\pi R}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \hat{k}$$

esto se puede escribir de otra forma considerando que $Q = 2\pi R\lambda$ es la carga total del anillo

$$\vec{E}(z\hat{k}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \hat{k}$$

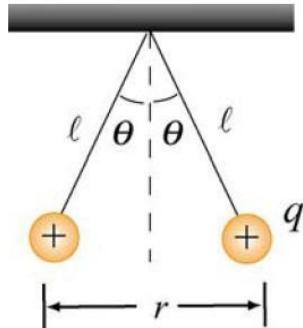
Si z es suficientemente grande en comparación con las dimensiones del anillo ($z \gg R$), entonces

$$\vec{E}(z\hat{k}) \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z^2} \hat{k}$$

que sería el campo a distancia z de una carga puntual Q en el origen

Problema

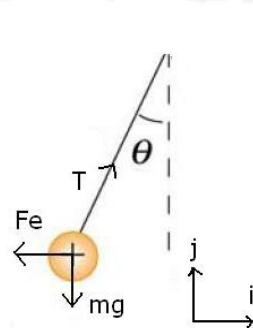
Dos pequeñas esferas de igual masa m y carga q , cuelgan por 2 hilos sin masa, sin carga y de largo l . Cada esfera forma un ángulo θ con el eje vertical, como se muestra en la figura



Calcule la carga q

Solución

Debido a la simetría del sistema, bastará con hacer análisis de fuerzas para una de las cargas. Consideramos el equilibrio entre las tres fuerzas que actúan: la fuerza de repulsión (las dos cargas son de igual signo) electrostática F_e , la tensión sobre el hilo T , y la fuerza gravitacional mg .



De la segunda ley de Newton para la esfera

$$F_x = T \sin \theta - F_e = ma_x = 0$$

$$F_y = T \cos \theta - mg = ma_y = 0$$

Como el sistema se encuentra en equilibrio, $a_x = a_y = 0$, entonces la primera ecuación equivale a

$$T \sin \theta = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

donde r es la separación entre las 2 cargas

$$q^2 = 4\pi\epsilon_0 T \sin \theta r^2$$

O equivalentemente,

$$q = \pm r \sqrt{4\pi\epsilon_0 T \sin \theta}$$

Del equilibrio de fuerzas para el eje vertical obtenemos

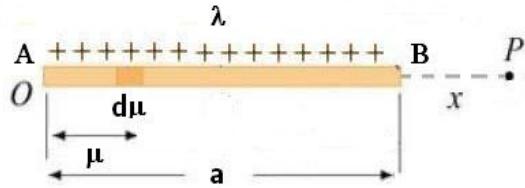
$$T = \frac{mg}{\cos\theta}$$

Y además, $r = 2l \sin \vartheta$. Finalmente se obtiene

$$q_{eq} = \pm 2l \sin \vartheta \sqrt{4\pi \varepsilon_0 m g t g \vartheta} = \pm 4l \sin \vartheta \sqrt{\pi \epsilon_0 m g t \tan \vartheta}$$

Problema

Se tiene una línea homogénea de carga con densidad lineal λ , y de longitud finita a . Calcular el campo eléctrico en el punto P a distancia x del extremo



Solución

Tomamos un pequeño elemento $d\mu$ de la línea de carga, situado a una distancia μ del punto A, y obtenemos el campo eléctrico en el punto P debido a este elemento diferencial

$$d\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda d\mu}{(a + x - \mu)^2} \hat{i}$$

Y el campo eléctrico total se obtiene integrando para toda la línea de carga. Esto es

$$\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^a \frac{\lambda d\mu}{(a + x - \mu)^2} \hat{i}$$

Sea $z = a + x - \mu$, así, $dz = -d\mu$ y el campo queda

$$\vec{E} = \frac{-\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{a+x}^x \frac{dz}{z^2} \hat{i} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{z} \Big|_{a+x}^x \hat{i} = \left(\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 x} - \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0(a+x)} \right) \hat{i}$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda(x+a) - \lambda x}{4\pi\epsilon_0 x(x+a)} \hat{i} = \frac{\lambda a}{4\pi\epsilon_0 x(x+a)} \hat{i} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{x(x+a)} \hat{i}$$

Con Q la carga total de la línea.

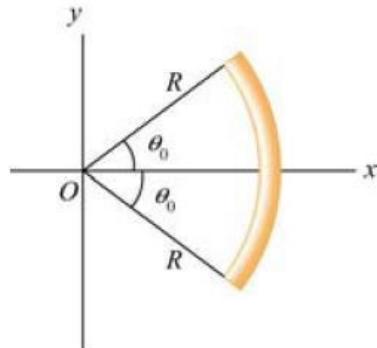
Notar que si $x \gg a$

$$\vec{E} \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 x^2} \hat{i}$$

que concuerda con el campo de una carga puntual

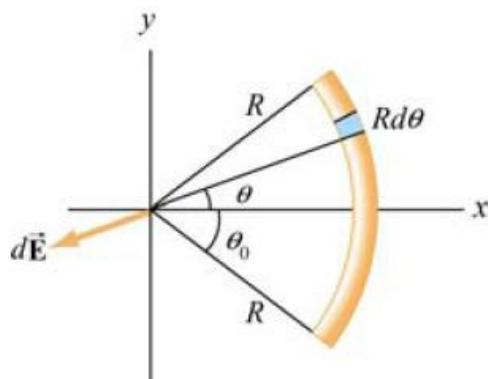
Problema

Una barra delgada con densidad de carga uniforme λ se dobla con la forma de un arco de círculo de radio R . El arco subiere un ángulo total $2\vartheta_0$, simétrico con respecto al eje x , como se muestra en la figura. ¿Cuál es el campo eléctrico \vec{E} en el origen O? Vea que sucede cuando $\vartheta_0 \rightarrow \pi$



Solución

Considere un elemento diferencial de longitud $dl = Rd\vartheta$, que forma un ángulo ϑ con respecto al eje x . La cantidad de carga que contiene este elemento es $dq = \lambda dl = \lambda R d\vartheta$



Su contribución al campo eléctrico en O es

$$d\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \hat{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{R^2} (-\cos \vartheta \hat{i} - \sin \vartheta \hat{j}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda d\vartheta}{R} (-\cos \vartheta \hat{i} - \sin \vartheta \hat{j})$$

Integrando para ϑ entre $-\vartheta_0$ y ϑ_0 , se obtiene

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R} \int_{-\vartheta_0}^{\vartheta_0} d\vartheta (-\cos \vartheta \hat{i} - \sin \vartheta \hat{j})$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R} (-\sin \vartheta \hat{i} + \cos \vartheta \hat{j}) \Big|_{-\vartheta_0}^{\vartheta_0} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda \sin \vartheta_0}{R} \hat{i}$$

Vemos que el campo eléctrico solo tiene componente en el eje x , lo que concuerda con la simetría del problema.

Si tomamos el límite cuando $\theta_0 \rightarrow \pi$, el arco se transforma en un anillo circular. Ya que $\sin \theta = 0$, la ecuación anterior implica que el campo eléctrico en el centro de un anillo de carga es nulo. Esto se esperaría por argumentos de simetría. (Comparar además con el campo de un anillo de carga calculado en este capítulo)

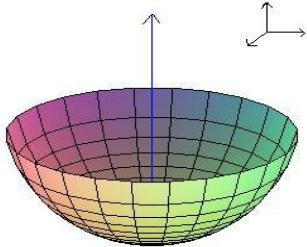
Por otro lado, para ángulos muy pequeños, $\sin \vartheta_0 \approx \vartheta_0$, recuperamos el caso de una carga puntual

$$\vec{E} \approx -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda\theta_0 \hat{i}}{R} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda\vartheta_0 R \hat{i}}{R^2} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} \hat{i}$$

Donde la carga total del arco es $Q = \lambda l = \lambda(2R\vartheta_0)$

Problema

Un recipiente hemisférico no conductor de radio interior a tiene una carga total Q repartida uniformemente en su superficie interior. Encuentre el campo eléctrico en el centro de curvatura



Solución

Tomamos como origen el centro de curvatura de la semiesfera. A partir de esto podemos determinar la contribución de un elemento diferencial de carga en la superficie al campo eléctrico en el eje que pasa por el centro de curvatura, que coincide con la dirección \hat{k} (El campo \vec{E} , por simetría, solo tendrá componente en \hat{k}).

$$d\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \sigma ds'$$

Un elemento diferencial de superficie sobre la esfera está dado por

$$ds = a^2 \sin \vartheta d\vartheta d\phi$$

y como la carga está distribuida uniformemente, la densidad superficial es simplemente

$$\sigma = \frac{Q}{2\pi a^2}$$

Con esto, podemos determinar el campo total integrando sobre toda la superficie

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} a^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_{\pi/2}^{\pi} d\vartheta \sin \vartheta \frac{Q}{2\pi a^2} \frac{(\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$$

Evaluando en $\vec{x} = 0$ obtenemos el campo en el centro de curvatura

$$\vec{E}(0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{Q}{2\pi a^2} \frac{-\vec{x}'}{|-\vec{x}'|^3} a^2 \sin \vartheta d\theta d\phi$$

$$\vec{E}(0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{Q}{2\pi a^2} \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{-\vec{x}'}{|-\vec{x}'|^3} a^2 \sin \vartheta d\theta d\phi$$

El vector \vec{x}' que recorre la superficie está dado por

$$\vec{x}' = a \cos \vartheta \hat{k} + a \sin \vartheta \cos \phi \hat{i} + a \sin \vartheta \sin \phi \hat{j}$$

Por el argumento de simetría, solo interesa la componente según \hat{k} . De todas formas se puede verificar calculando explícitamente las integrales en \hat{i} y \hat{j} . Con esto

$$\vec{E}(0) = \frac{Q}{4\epsilon_0\pi a^2} \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{-a \cos \vartheta}{a^3} a^2 \sin \vartheta d\vartheta \hat{k}$$

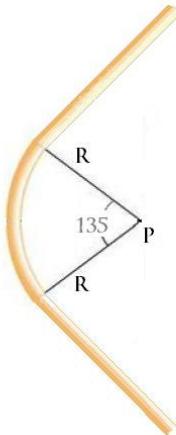
$$\vec{E}(0) = \frac{Q}{4\epsilon_0\pi a^2} \int_{\pi/2}^{\pi} -\cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta \hat{k} = \frac{Q}{8\epsilon_0\pi a^2} \int_{\pi/2}^{\pi} -\sin(2\vartheta) d\vartheta \hat{k}$$

Finalmente el campo en el centro de curvatura es

$$\vec{E}(0) = \frac{Q}{8\epsilon_0\pi a^2} \hat{k}$$

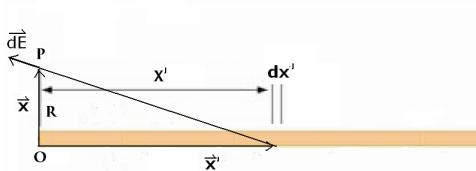
Problema

Considere un alambre muy delgado como el de la figura, éste está compuesto por dos rectas infinitas y un arco de círculo de 135 grados. El alambre tiene una densidad lineal de carga λ constante. Encuentre el campo eléctrico producido en el punto P



Solución

Este problema se resuelve mediante integrales de Coulomb y el principio de superposición. Descomponemos el problema en subproblemas más simples, una distribución de carga lineal y otra en un arco de círculo (ya visto en el problema anterior). Resolvamos entonces el problema de una distribución lineal infinita de carga



Un elemento de longitud dx' a distancia x' del origen genera una contribución al campo en P dada por

$$d\vec{E}(P) = \frac{dx'\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|x' - x'|^3}$$

donde $\vec{x} = R\hat{j}$ es el vector posición del punto P , y $\vec{x}' = x'\hat{i}$ el vector que recorre la distribución de carga (parámetro x'). Por el principio de superposición, el campo eléctrico en P se obtiene sumando sobre toda la distribución

$$\begin{aligned} \vec{E}(P) &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^\infty dx' \frac{R\hat{j} - x'\hat{i}}{(x'^2 + R^2)^{3/2}} \\ \vec{E}(P) &= -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^\infty dx' \frac{x'}{(x'^2 + R^2)^{3/2}} \hat{i} + \frac{R\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^\infty \frac{dx'}{(x'^2 + R^2)^{3/2}} \hat{j} \end{aligned}$$

Calculemos primero la integral

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{dx' x'}{(x'^2 + R^2)^{3/2}}$$

con el trivial cambio de variable $u = x'^2$, $du = 2x'dx'$

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{du}{(u + R^2)^{3/2}} = \frac{1}{2} \int_0^\infty du (u + R^2)^{-3/2} = -2 * \frac{1}{2} (u + R^2)^{-1/2} \Big|_0^\infty$$

$$I_1 = \frac{1}{R}$$

Ahora, obtenemos

$$I_2 = \int_0^\infty \frac{dx'}{(x'^2 + R^2)^{3/2}}$$

y utilizamos la conocida sustitución $x' = R \tan \vartheta$, $dx' = R \sec^2 \vartheta d\vartheta$. Con esto la integral queda de la forma

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{d\vartheta R \sec^2 \vartheta}{(R^2 \tan^2 \vartheta + R^2)^{3/2}} = \int \frac{d\vartheta R \sec^3 \vartheta}{R^3 \sec^3 \vartheta} = \frac{1}{R^2} \int \frac{d\vartheta}{\sec \vartheta} = \frac{1}{R^2} \int d\vartheta \cos \vartheta \\ I &= \frac{1}{R^2} \sin \vartheta \end{aligned}$$

Utilizando que $x'/R = \tan \vartheta$

$$\sin \vartheta = \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + R^2}}$$

de forma que

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{R^2} \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + R^2}} \Big|_0^\infty = \frac{1}{R^2} \lim_{x' \rightarrow \infty} \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + R^2}} \\ I_2 &= \frac{1}{R^2} \lim_{x' \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1^2 + (R/x')^2}} = \frac{1}{R^2} \end{aligned}$$

Luego el campo eléctrico debido al alambre en el punto P es

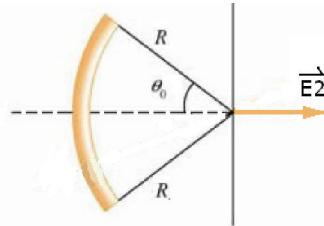
$$\vec{E}_1(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{-\lambda}{R} \hat{i} + \frac{\lambda}{R} \hat{j} \right)$$

$$\vec{E}_1(P) = \frac{\lambda\sqrt{2}}{4\pi\epsilon_0 R} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (-\hat{i} + \hat{j}) \right)$$

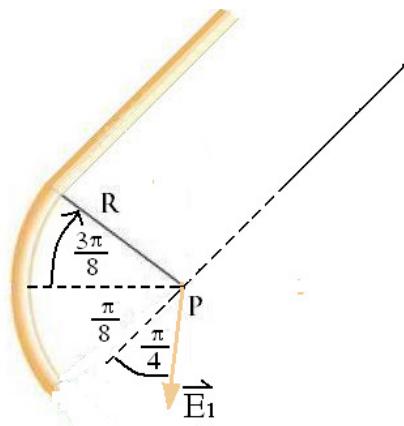


La contribución del sector de arco de círculo ya fue obtenida en un problema anterior, luego es inmediato que

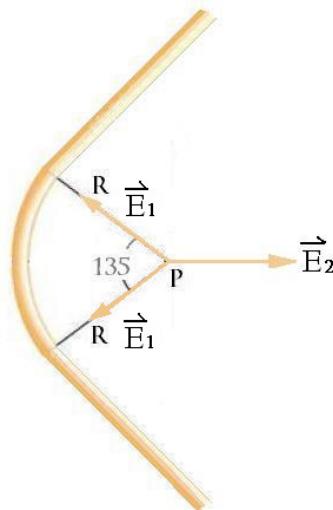
$$\vec{E}_2(P) = \frac{2\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} \sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) \hat{i}$$



Finalmente, el campo total en P se obtiene por superposición. Veamos que ocurre con el campo que produce el segmento rectilíneo superior



El campo \vec{E}_1 en P forma un ángulo de $3\pi/8$ con la horizontal. De esta forma, la superposición de los 3 campos es como sigue



$$\vec{E}(P) = \left(| \vec{E}_2 | - 2 | \vec{E}_1 | \cos \left(\frac{3\pi}{8} \right) \right) \hat{i}$$

$$\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2\lambda}{R} \sin \left(\frac{3\pi}{8} \right) - 2 \frac{\lambda}{R} \sqrt{2} \cos \left(\frac{3\pi}{8} \right) \right) \hat{i}$$

$$\vec{E}(P) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \left(\sin \left(\frac{3\pi}{8} \right) - \sqrt{2} \cos \left(\frac{3\pi}{8} \right) \right) \hat{i}$$

Problema

Se pide calcular el campo eléctrico a distancia r del centro de una distribución uniforme de carga ρ_0 localizada dentro de una esfera de radio R , mediante la integral de Coulomb, o sea, calcule

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V d^3x' \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$$

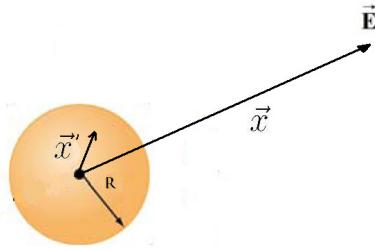
puesto que

$$\rho(\vec{x}') = \begin{cases} \rho_0 & \text{si } |\vec{x}'| \leq R \\ 0 & \text{si } |\vec{x}'| > R \end{cases}$$

para $r > R$

Solución

Ubiquemos el centro de la esfera en el origen



Sea \vec{x} un punto a distancia r del origen

$$\vec{x} = r\hat{r}$$

y \vec{x}' un punto dentro de la distribución de carga

$$\vec{r}' = r'\hat{r}'$$

El campo eléctrico está dado por la **integral de Coulomb** sobre la distribución de carga

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V d^3x' \rho(\vec{x}') \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} = \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V d^3x' \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$$

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^\pi d\vartheta' \sin\vartheta' \int_0^R dr' r'^2 \frac{\hat{r}r - \hat{r}'r'}{|\hat{r}r - \hat{r}'r'|^3}$$

De la simetría de la distribución de carga, es claro que el campo eléctrico será sólo función de la distancia r y su dirección será radial, es decir

$$\vec{E}(\vec{x}) = E(r)\hat{r}$$

esto nos permite además orientar el vector \vec{x} según la dirección \hat{k} , de forma que

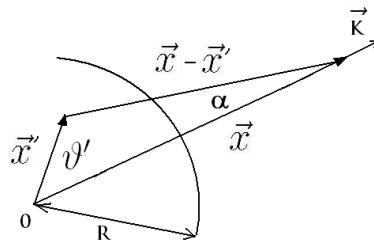
$$|\hat{r}r - \hat{r}'r'| = (r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\vartheta')^{1/2}$$

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^\pi d\vartheta' \sin\vartheta' \int_0^R dr' r'^2 \frac{\hat{r}r - \hat{r}'r}{(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\vartheta')^{3/2}} = E(r)\hat{r}$$

$$E(r) = \hat{r} \cdot \vec{E} = \frac{2\pi\rho_0}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^\pi d\vartheta' \sin\vartheta' \int_0^R dr' r'^2 \frac{r - r' \cos\vartheta'}{(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\vartheta')^{3/2}}$$

Hasta ahora, esta expresión es absolutamente general. Sin embargo, el valor de la integral dependerá si el punto \vec{x} se encuentra dentro o fuera de la distribución

Campo externo, $r > R$



se tiene

$$r = r' \cos\vartheta' + |\vec{x} - \vec{x}'| \cos\alpha$$

Sea $s = |\vec{x} - \vec{x}'|$, luego

$$\frac{r - r' \cos\vartheta'}{(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\vartheta')^{3/2}} = \frac{s \cos\alpha}{s^3} = \frac{\cos\alpha}{s^2}$$

de la relación

$$r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\vartheta' = s^2$$

se puede obtener para $\cos\vartheta'$

$$\cos\vartheta' = \frac{r^2 + r'^2 - s^2}{2rr'}$$

y utilizando el teorema del coseno para r'

$$r^2 + s^2 - 2rs \cos\alpha = r'^2$$

de aquí obtenemos que

$$\cos\alpha = \frac{r^2 + s^2 - r'^2}{2rs}$$

Por último

$$\frac{\partial}{\partial s} \cos\vartheta' = -\sin\vartheta' \frac{d\vartheta'}{ds} = -\frac{2s}{2rr'} = -\frac{s}{rr'}$$

Luego

$$\begin{aligned}
& \int_0^R dr' \int_0^\pi d\vartheta' \sin \vartheta' r'^2 \frac{r - r' \cos \vartheta'}{(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \vartheta')^{3/2}} \\
&= \int_0^R dr' \int_{r-r'}^{r+r'} ds \frac{s}{rr'} r'^2 \frac{r^2 + s^2 - r'^2}{2rs^3} = \int_0^R dr' \int_{r-r'}^{r+r'} ds \frac{r'}{2r^2} \left(1 + \frac{r^2 - r'^2}{s^2} \right) \\
&= \frac{1}{2r^2} \int_0^R dr' r' \int_{r-r'}^{r+r'} ds \left(1 + \frac{r^2 - r'^2}{s^2} \right) \\
&\text{y} \\
& \int_{r-r'}^{r+r'} ds \left(1 + \frac{r^2 - r'^2}{s^2} \right) = \int_{r-r'}^{r+r'} ds + (r^2 - r'^2) \int_{r-r'}^{r+r'} \frac{ds}{s^2} \\
&= (r + r') - (r - r') + \frac{r^2 - r'^2}{-2 + 1} \left(\frac{1}{r + r'} - \frac{1}{r - r'} \right) \\
&= 2r' - (r^2 - r'^2) \frac{(r - r') - (r + r')}{r^2 - r'^2} = 4r'
\end{aligned}$$

Así

$$\frac{1}{2r^2} \int_0^R dr' r' \int_{r-r'}^{r+r'} ds \left(1 + \frac{r^2 - r'^2}{s^2} \right) = \frac{2}{r^2} \int_0^R dr' r'^2 = \frac{2R^3}{3r^2}$$

de forma que

$$E(r) = \frac{2\pi\rho_0}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^\pi d\vartheta' \sin \vartheta' \int_0^R dr' r'^2 \frac{r - r' \cos \vartheta'}{(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \vartheta')^{3/2}} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}$$

Así, para $r > R$

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} \hat{r}$$

si $Q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_0$ es la carga total de la esfera, entonces

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \hat{r}$$

es decir, fuera de la esfera, el campo eléctrico es igual al campo de una carga puntual de carga total Q ubicada en el origen

La integral de Coulomb para $r < R$ es levemente más compleja, y para calcularla resulta útil manejar los conceptos sobre integrales de ángulo sólido. El valor pedagógico de este cálculo no es espantar al lector del estudio de la electrostática, sino de mostrar explícitamente que, aunque la geometría del problema es muy sencilla, la integral para el campo eléctrico no lo es. Esto por supuesto motiva a desarrollar más herramientas matemáticas para el cálculo de campos eléctricos, que en muchos casos facilitarán la vida (Comparar en el próximo capítulo con el cálculo mediante la Ley de Gauss). De todas formas, integrar bien es un arte en muchos casos, muy util

3.3. Apéndice Matemático sobre la Delta de Dirac

En cursos de Electrodinámica, es muy utilizada la delta de Dirac $\delta(x)$, que satisface

$$\delta(x) = 0, x \neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x) = 1$$

Semejante función no existe en el análisis ordinario. La $\delta(x)$ de Dirac es una **función generalizada** (o distribución de Schwarz).

Funciones Generalizadas

Utilizaremos funciones complejas $f(x)$ de cuadrado integrable bajo el producto interno dado por

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} dx f^*(x)g(x)$$

Sea

$$\{g_n(x), n = 1, 2, 3, \dots\}$$

una sucesión de funciones de cuadrado integrable, esto es

$$(g_n, g_n) = \int_{-\infty}^{\infty} dx [g_n(x)]^2 < \infty$$

Llamaremos **función de prueba** cualquier función $f(x)$ de cuadrado integrable

$$(f, f) = \int_{-\infty}^{\infty} dx [f(x)]^2 < \infty$$

Definimos la **Función Generalizada $g(x)$** asociada a la sucesión $\{g_n(x)\}$ como

$$g(x) \doteq \lim_{n \rightarrow \infty} \{g_n(x)\}$$

Este símbolo se define mediante el límite de las integrales, es decir, $g(x)$ es una función generalizada asociada a la sucesión $\{g_n(x)\}$ si

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx g(x) f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx g_n(x) f(x)$$

para cualquier función de prueba $f(x)$

Nota 1 Por la desigualdad de Schwarz

$$(g_n, f)^2 \leq (g_n, g_n)(f, f) < \infty$$

vemos que toda sucesión de funciones de cuadrado integrable define una función generalizada

Nota 2 En rigor, las funciones generalizadas están definidas detrás de la integral, no es necesario que la sucesión sea convergente en el sentido ordinario, esto quiere decir que no es necesario que se tenga

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = g(x)$$

para que la función generalizada exista. $g(x)$ existe rigurosamente en el límite de las integrales

3.3.1. Delta de Dirac $\delta(x)$

El ejemplo mas ilustre y sobresaliente de función generalizada es la delta de dirac, que será fundamental para el desarollo de muchas teorías de la física, así como del Análisis de Señales (Disciplina de la Ingeniería Eléctrica). Existen varias sucesiones que definen a la delta de Dirac, comenzaremos con una sucesión de la forma

$$\delta_n(x) = \begin{cases} 0 & x < -1/n \\ n/2 & -1/n < x < 1/n \\ 0 & x > 1/n \end{cases}$$

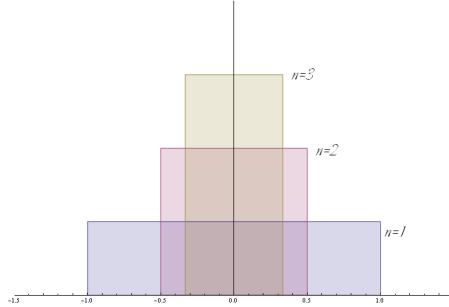


Fig. 3.4: Primeras 3 funciones dadas por la sucesión $\delta_n(x)$

Notar que a medida que aumenta n , la función se asemeja a un rectángulo cada vez más angosto en torno al origen y de mayor amplitud. Sin embargo, siempre el área bajo $\delta_n(x)$ es uno. Físicamente usaremos la delta de Dirac para modelar distribuciones de carga que son nulas excepto en un punto del espacio

Veamos que en efecto $\delta_n(x)$ define una sucesión de funciones de cuadrado integrable

$$(\delta_n(x), \delta_n(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} dx [\delta_n(x)]^2 = \int_{-1/n}^{1/n} dx \left(\frac{n}{2}\right)^2 = \left(\frac{n}{2}\right)^2 \left(\frac{2}{n}\right) = \frac{n}{2}$$

Además

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta_n(x) = \int_{-1/n}^{1/n} dx \left(\frac{n}{2}\right) = \frac{n}{2} \cdot \frac{2}{n} = 1$$

Veamos que ocurre con

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta_n(x) f(x)$$

donde $f(x)$ es cualquier función de cuadrado integrable. Se tiene que

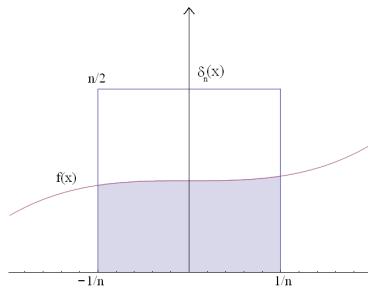


Fig. 3.5: Utilizando el teorema del valor medio integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta_n(x) f(x) = \frac{n}{2} \int_{-1/n}^{1/n} dx f(x) = \frac{n}{2} \frac{2}{n} f_n = f_n$$

donde f_n es el valor de la función para algún x entre $-1/n < x < 1/n$. De esta forma, es claro que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta_n(x) f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f(0)$$

En resumen, la sucesión $\delta_n(x)$ define la función generalizada $\delta(x)$, llamada **delta de Dirac**, cuyas propiedades fundamentales son

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x) = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x) f(x) = f(0)$$

$$\delta(x) = 0, x \neq 0$$

Del mismo modo, podemos interpretar $\delta(x - x_o)$ en base a

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x - x_0) = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x - x_0) f(x) = f(x_o)$$

$$\delta(x - x_0) = 0, x \neq x_0$$

Nota

No existe ninguna función ordinaria con éstas propiedades, pero sí existe una función generalizada! Ahora que se tiene en claro el significado de las integrales recién mencionadas, se puede tratar la delta de Dirac como una función ordinaria, sin olvidar el significado real de ésta. Físicamente, la Delta puede representar una señal o **Impulso** de gran amplitud y de extensión infinitamente pequeña. Por ejemplo, $\delta(t - t_o)$ puede representar un sonido o una fuerza de gran amplitud que ocurre en el instante $t = t_o$, y de extensión prácticamente nula en el tiempo (Un aplauso o el impulso que actúa sobre una pelota cuando rebota contra una pared). En electricidad y magnetismo, $\rho = q\delta(x - x_o)\delta(y - y_o)\delta(z - z_o)$ representará la densidad volumétrica de una carga puntual q ubicada en (x_o, y_o, z_o) , es decir, es nula en todo el espacio excepto en el punto (x_o, y_o, z_o)

Igualdad de Funciones Generalizadas

Dos funciones generalizadas

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \{g_n(x)\}$$

$$h(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \{h_n(x)\}$$

son iguales si y sólo si, con cualquier función $f(x)$ se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx [g(x) - h(x)] f(x) = 0$$

Es decir

$$g(x) \doteq h(x) \iff \int_{-\infty}^{\infty} dx [g(x) - h(x)] f(x) = 0$$

Anteriormente mostramos como una sucesión de funciones rectangulares ($\delta_n(x)$) definen a $\delta(x)$. De igual forma, se puede construir la delta de Dirac con una sucesión de Gaussianas

$$h_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 x^2}$$

de forma que

$$\delta(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \{h_n(x)\}$$

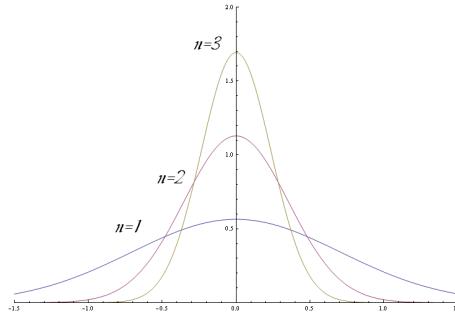


Fig. 3.6: Construcción de $\delta(x)$ mediante una sucesión de Gaussianas

Este tipo de funciones nos es familiar, sabemos que siempre una distribución Gaussiana tiene como integral total 1 (es una distribución de Probabilidad). Para demostrar que esta sucesión define igualmente a la delta basta con demostrar que

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx \{ \delta_n(x) - \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 x^2} \} f(x) = 0$$

3.4. Propiedades de la delta de Dirac

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x) f(x) = f(0)$$

$$\delta(x) f(x) = f(0) \delta(x)$$

$$\delta(-x) = \delta(x)$$

$$\delta(ax) = \frac{\delta(x)}{|a|}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx' \delta'(x) f(x) = -f'(0)$$

$$\delta(x - x') = 0, x \neq x'$$

$$\int_a^b dx' \delta(x - x') = 1, a < x < b$$

$$\delta(x - x') = \delta(x' - x)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx' \delta(x - x') f(x') = f(x)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx'' \delta(x'' - x') \delta(x'' - x) = \delta(x' - x)$$

$$\delta(f(x)) = \sum_{i=1}^N \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x)|_{x=x_i}}$$

donde x_i son los ceros simples de $f(x)$

Delta de Dirac en 3 dimensiones

Se define

$$\delta(\vec{x} - \vec{x}') = \delta(x - x') \delta(y - y') \delta(z - z')$$

la cual cumple

$$\iiint_V d^3x' \delta(\vec{x} - \vec{x}') = \begin{cases} 1 & \text{si } \vec{x} \in V \\ 0 & \text{si } \vec{x} \notin V \end{cases}$$

$$\iint_{R^3} d^3x' \delta(\vec{x} - \vec{x}') = 1$$

$$\iiint_{R^3} d^3x' \delta(\vec{x} - \vec{x}') f(\vec{x}') = f(\vec{x})$$



Fig. 3.7: Paul Dirac

Paul Dirac(1902-1984) Físico Inglés. Se graduó de Ingeniero Eléctrico en 1921, posteriormente estudió matemáticas y fue recibido en la Universidad de Cambridge. En 1926 desarrolló una versión de la mecánica cuántica en la que unía el trabajo previo de Werner Heisenberg y de Erwin Schrödinger en un único modelo matemático que asocia cantidades medibles con operadores que actúan en el espacio vectorial de Hilbert y describe el estado físico del sistema. Por este trabajo recibió un doctorado en física por Cambridge. En 1928, trabajando en los spines no relativistas de Pauli, halló la ecuación de Dirac, una ecuación relativista que describe al electrón. Este trabajo permitió a Dirac predecir la existencia del positrón, la antipartícula del electrón

Problema

Muestre que una distribución discreta de cargas q_i , $i = 1, 2, \dots, N$ ubicada en los puntos \vec{x}_i , $i = 1, 2, \dots, N$ es consistente con una distribución volumétrica de carga

$$\rho(\vec{x}) = \sum_{i=1}^N q_i \delta(\vec{x} - \vec{x}_i)$$

Solución

Para ver que la distribución de carga se puede escribir de esta forma, se debe verificar que el campo eléctrico que genera es el correcto. En efecto

$$\vec{E}(\vec{x}) = \iiint_{R^3} d^3x' \rho(\vec{x}') \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$$

$$\vec{E}(\vec{x}) = \iiint_{R^3} d^3x' \sum_{i=1}^N q_i \delta(\vec{x} - \vec{x}_i) \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$$

Si la distribución es finita (N es un número finito) podemos intercambiar la integral con la suma (y nos aseguramos que no se espante ningún matemático)

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{x}) &= \sum_{i=1}^N q_i \iiint_{R^3} d^3x' \delta(\vec{x} - \vec{x}_i) \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \\ \vec{E}(\vec{x}) &= \sum_{i=1}^N q_i \frac{\vec{x} - \vec{x}_i}{|\vec{x} - \vec{x}_i|^3} \end{aligned}$$

que es el campo correcto generado por la distribución de carga

Problema

Demuestre la propiedad

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|\frac{df}{dx}|_{x=x_i}}$$

donde x_i son los ceros simples de $f(x)$

Solución

Sea la sucesión de funciones de cuadrado integrable

$$\delta_n(x) = \begin{cases} 0 & x < -1/n \\ n/2 & -1/n < x < 1/n \\ 0 & x > 1/n \end{cases}$$

$\delta(x)$ es la función generalizada asociada a la sucesión $\delta_n(x)$

$$\delta(x) \doteq \lim_{n \rightarrow \infty} \{\delta_n(x)\}$$

Ahora usaremos el hecho de que dos funciones generalizadas

$$g(x) \doteq \lim_{n \rightarrow \infty} \{g_n(x)\}$$

$$h(x) \doteq \lim_{n \rightarrow \infty} \{h_n(x)\}$$

son iguales si y solo si , con cualquier función de prueba $f(x)$ se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx (g(x) - h(x)) f(x) = 0$$

Se define la función generalizada

$$g(x) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|\frac{df}{dx}|_{x=x_i}}$$

donde x_i son los ceros simples de f . Por supuesto

$$g(x) \doteq \lim_{n \rightarrow \infty} \{g_n(x)\}$$

con

$$g_n(x) = \sum_i \frac{\delta_n(x - x_i)}{|\frac{df}{dx}|_{x=x_i}}$$

Sea $y(x)$ una función de prueba

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx g_n(x) y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \sum_i \frac{\delta_n(x - x_i)}{|\frac{df}{dx}|_{x=x_i}} y(x)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx g_n(x) y(x) = \sum_i \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\delta_n(x - x_i)}{|\frac{df}{dx}|_{x=x_i}} y(x) = \sum_i \int_{x_{i-1/n}}^{x_{i+1/n}} dx \frac{n/2}{|\frac{df}{dx}|_{x=x_i}} y(x)$$

Por el teorema del valor medio integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx g_n(x) y(x) = \sum_i \frac{n/2}{|\frac{df}{dx}|_{x=x^*}} (2/n) y(x^*)$$

con $x^* \in [-1/n + x_i, 1/n + x_i]$. Con esto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx g_n(x) y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx g(x) y(x) = \sum_i \frac{y(x_i)}{\left| \frac{df}{dx} \right|_{x=x_i}}$$

Ahora, veamos que ocurre con la función generalizada

$$h(x) \doteq \lim_{n \rightarrow \infty} \{h_n(x)\}$$

con

$$h_n(x) = \delta_n[f(x)]$$

$$h_n(x) = \begin{cases} 0 & f(x) < -1/n \\ n/2 & -1/n \leq f(x) \leq 1/n \\ 0 & f(x) > 1/n \end{cases}$$

sea $I_j = [x_{1j}, x_{2j}]$, $j = 1, 2, \dots$ tal que $\forall x \in I_j$, $-1/n \leq f(x) \leq 1/n$ ($x_{2j} \geq x_{1j}$) y tal que

$$I_j \bigcap I_i = \emptyset$$

$\forall i \neq j$ (intervalos disjuntos). Así, por el teorema del valor medio integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx h_n(x) y(x) = \sum_i \int_{x_{1i}}^{x_{2i}} dx \frac{n}{2} y(x) = \sum_i \frac{n}{2} y(x_i^*) (x_{2i} - x_{1i})$$

con $x_i^* \in I_i$. Además, está garantizada la existencia de un $x'_i \in I_i$ tal que

$$\left| \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x'_i} = \frac{|2/n|}{x_{2i} - x_{1i}} = \frac{2/n}{x_{2i} - x_{1i}}$$

Luego

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx h_n(x) y(x) = \frac{(2/n)(2/n)y(x_i^*)}{\left| \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x'_i}}$$

Si $n \rightarrow \infty$, $I_j = x_j$ tal que $f(x_j) = 0$. Así

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx h_n(x) y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx h(x) y(x) = \frac{y(x_i)}{\left| \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_i}}$$

Por lo tanto, se ha demostrado la igualdad entre las funciones generalizadas

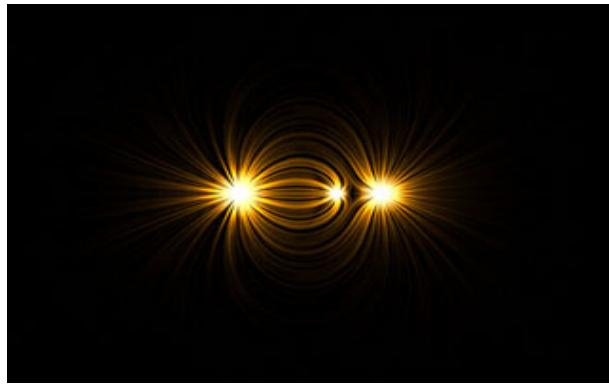
$$\delta[f(x)] = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{\left| \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_i}}$$

Capítulo 4

Ley de Gauss

En el capítulo anterior hemos visto las leyes empíricas fundamentales de la electrostática en el espacio vacío (sin un medio material presente), las cuales se pueden resumir en lo siguiente

- 1) Las cargas eléctricas estáticas son **fuentes de campos eléctricos**, los cuales actúan sobre otras cargas



- 2) El campo de una carga puntual está dado por la **Ley de Coulomb**, esto es, su magnitud es proporcional a la magnitud de la carga y decrece según el inverso del cuadrado de la distancia
- 3) Si hay más de una carga presente, el campo total será la suma vectorial de los campos debido a cada carga individual (**Principio de Superposición**)

Estas leyes son toda la electrostática! Si combinamos la ley de Coulomb y el principio de superposición, no necesitamos (en teoría) saber nada más. A partir de estas leyes vimos además que si se tiene una distribución continua de carga encerrada en un volumen V , el campo eléctrico en un punto \vec{x} se obtiene evaluando la integral de Coulomb

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{d^3x' \rho(\vec{x}') (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$$

Más adelante no utilizaremos demasiado ésta fórmula, la escribimos sólo para enfatizar el hecho de que hemos resuelto completamente el problema de la electrostática en que **conocemos** exactamente la distribución espacial de todas las cargas. Es decir, conocemos $\rho(\vec{x}')$ en todo el espacio.

Problema que hemos resuelto: Dadas las cargas, ¿cómo son los campos?
Nuestra respuesta es : Resuelva esta integral

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{d^3x' \rho(\vec{x}') (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$$

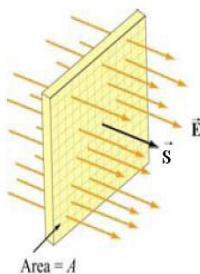
Así que aparentemente no hay nada más que resolver, todo se trata de calcular integrales en 3 dimensiones. (que en la práctica pueden ser nada de sencillas). Con las integrales de Coulomb podemos encontrar de forma relativamente sencilla los campos producidos por un plano de carga, de una línea de carga, de una cáscara esférica de carga, o de alguna otra distribución más o menos simple.

El gran problema es, que en muchas situaciones reales de la electrostática, la distribución es más compleja, o peor aún, no conocemos inicialmente cómo están distribuidas las cargas, luego las cosas se nos complican. Las posiciones de las cargas pueden depender del campo eléctrico, y el campo eléctrico a su vez dependerá de la posición de las cargas. Por ejemplo, veremos más adelante que si acercamos un cuerpo cargado a un conductor (es un material que cumple ciertas propiedades), los electrones en el conductor se moverán hasta alcanzar un equilibrio electrostático. La densidad de carga ρ puede ser conocida en parte, (la carga que hemos acercado), pero habrá otra parte debida a las cargas que se mueven en el conductor que definitivamente no conocemos inicialmente. Y para calcular la integral de Coulomb, toda la distribución de carga se debe conocer.

Luego, deberemos introducir otras leyes y herramientas matemáticas necesarias para resolver los problemas de Electrostática, y veremos que la situación no siempre es tan fácil como se podría pensar

4.1. Ley de Gauss de la Electrostática

Comensaremos por definir una cantidad escalar llamada **flujo de un campo vectorial**.

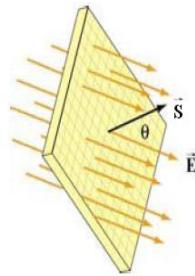


Considere la superficie plana de la figura. Se define $\vec{S} = S\hat{n}$ como el vector de área, cuya magnitud es el área de la superficie, S , y apunta en la dirección normal \hat{n} (perpendicular en todo punto a la superficie). Si la superficie se encuentra sumergida en un campo eléctrico uniforme \vec{E} que apunta siempre en la misma dirección de \hat{n} (perpendicular a la superficie S), el flujo sobre la superficie es la proyección de \vec{E} sobre el vector \vec{S}

$$\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{S} = \vec{E} \cdot \hat{n}S = ES$$

Ahora, si el campo eléctrico sigue siendo uniforme pero forma un ángulo ϑ con \hat{n} , el flujo será

$$\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{S} = E S \cos\theta$$

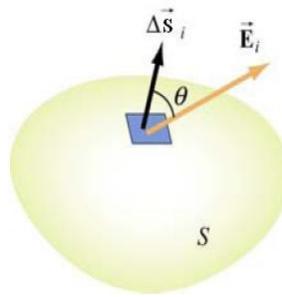


Es decir, el flujo de un campo vectorial sobre una superficie mide en cierta forma la componente normal a la superficie. Notar que según la definición del vector normal \hat{n} , el flujo eléctrico es positivo si las líneas de campo eléctrico están saliendo a través de la superficie, y será negativo si las líneas entran a través de la superficie.

Generalización

Hemos definido el flujo del campo eléctrico sobre una superficie muy simple (plana). Además hemos supuesto que el campo es uniforme (magnitud y dirección constantes). En general, una superficie S puede ser curva, y el campo eléctrico \vec{E} puede variar sobre la superficie (tanto en magnitud como en dirección).

Nos resultará de particular interés aquellas superficies que son **cerradas**. Una superficie cerrada es aquella que envuelve completamente a un volumen (es el contorno de un volumen). Para calcular el flujo del campo sobre una superficie cerrada, se divide la superficie en una suma de elementos de área infinitesimales, $\Delta\vec{S}_i = \Delta S_i \hat{n}_i$, como se ve en la figura.



El flujo a través de $\Delta\vec{S}_i$ es

$$\Delta\Phi_E = \vec{E}_i \cdot \Delta\vec{S}_i = E_i \Delta S_i \cos\theta$$

El flujo total a través de la superficie se obtiene sumando sobre todos los elementos de superficie. (A la Riemann) Tomando el límite cuando $\Delta S_i \rightarrow 0$ se obtiene la **integral de flujo**

$$\Delta\Phi_E = \lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \sum \vec{E}_i \cdot \Delta\vec{S}_i = \iint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{E}(\vec{x})$$

La **ley de Gauss** establece que el flujo eléctrico a través de una superficie cerrada es proporcional a la carga encerrada por ella. Más concretamente

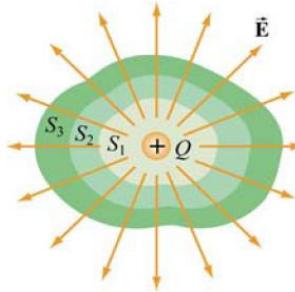
$$\Phi_E = \iint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') = \frac{q_{enc}}{\epsilon_0}$$

o, escribiendo de forma explícita la carga encerrada por S

$$\oint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{V(S)} d^3x' \rho(\vec{x}')$$

Esta ley es consecuencia directa de la Ley de Coulomb y la geometría Euclídea. Notar que campos eléctricos creados por cargas fuera de la superficie no contribuyen al flujo total. Es decir, el flujo sobre una superficie cerrada sólo depende de la carga encerrada por ella.

La forma de la superficie puede ser elegida arbitrariamente. Para las superficies de la figura, el mismo resultado se obtiene para el flujo eléctrico ($\Phi_E = Q/\epsilon_0$).



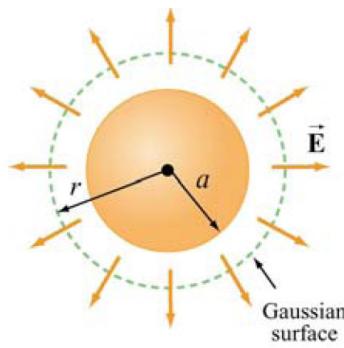
La ley de Gauss es extremadamente útil en muchos casos. Hay que notar, que a partir de la Ley de Gauss es posible recuper la Ley de Coulomb, es decir, conociendo la ley de Gauss uno podría determinar la forma de los campos. Hay que notar además, que **hay casos en los cuales esta ley no es práctica**, es útil sólo en problemas donde la integral de flujo es simple de calcular.

Ejemplo: Campo de una distribución esférica homogénea de carga

Tal como en el capítulo 1, se desea obtener el campo eléctrico de una distribución de carga

$$\rho(\vec{x}') = \begin{cases} \rho_0 & \text{si } |\vec{x}'| \leq R \\ 0 & \text{si } |\vec{x}'| > R \end{cases}$$

donde el origen del sistema de coordenadas coincide con el centro de la distribución de carga. Una forma de resolver esto es evaluando la integral de Coulomb (no muy recomendable). Otra, es considerando la evidente simetría esférica del campo eléctrico, es claro que éste sólo puede depender de la distancia r al origen. Además, su dirección debe coincidir con la dirección radial \hat{r} . De esta forma, para obtener el campo exterior, escogemos una superficie Gaussiana esférica de radio $r > R$, como se muestra en la figura



El flujo del campo eléctrico sobre esta superficie es

$$\Phi = \oint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') = \oint_S dS \hat{r} \cdot E(r) \hat{r} = E(r) \oint_S dS$$

$$\Phi = E(r)4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

donde Q es la carga total de la distribución

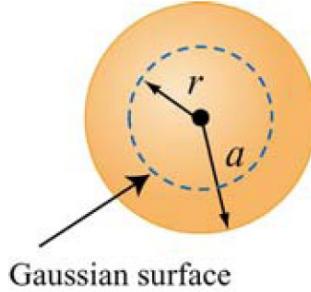
$$\vec{E} = E(r)\hat{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

es decir, igual al de una carga puntual Q en el origen. En términos de la densidad ρ_0

$$Q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_0$$

$$\vec{E} = E(r)\hat{r} = \frac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

Mismo resultado obtenido en el capítulo anterior (ahora de forma mucho más simple). Ahora, para el campo interno, nuevamente escogemos una superficie Gaussiana de radio $r < R$



Nuevamente el flujo es

$$\Phi = \iint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') = E(r)4\pi r^2 = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$$

donde q_{in} es la carga **encerrada** por la superficie S , en este caso

$$q_{in} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0$$

de forma que

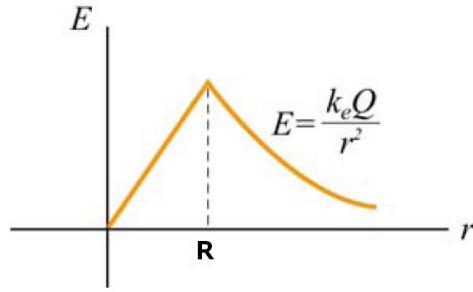
$$E(r)4\pi r^2 = \frac{4\pi r^3 \rho_0}{3\varepsilon_0}$$

$$E(r) = \frac{r\rho_0}{3\varepsilon_0}$$

es decir, el campo eléctrico en el interior de la distribución es lineal en r . Finalmente

$$\vec{E}(\vec{x}) = \begin{cases} \frac{r\rho_0}{3\varepsilon_0}\hat{r} & \text{si } |\vec{x}| \leq R \\ \frac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\hat{r} & \text{si } |\vec{x}| > R \end{cases}$$

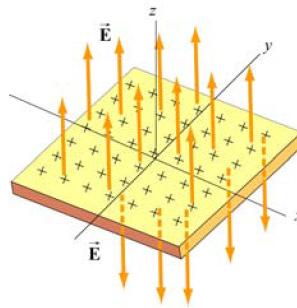
Notar que el campo es continuo en $|x| = R$



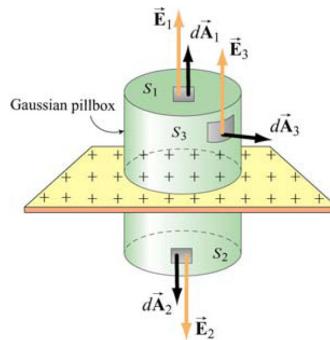
pero no es diferenciable en dicho punto!

Ejemplo: Plano infinito de carga

Consideremos un plano infinito en $X - Y$ con densidad superficial de carga uniforme σ . Se desea determinar el campo eléctrico en todo el espacio



Debido a que la carga está distribuida uniformemente en la superficie, el campo eléctrico \vec{E} debe ser perpendicular al plano, $\vec{E} = E\hat{k}$. Además, la magnitud del campo es constante en planos paralelos al plano de carga. Elegimos como superficie Gaussiana un cilindro (llamado por muchos autores como caja de píldoras)



el flujo sobre esta superficie es

$$\Phi = \iint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') = \iint d\vec{S}_1 \cdot \vec{E}_1 + \iint d\vec{S}_2 \cdot \vec{E}_2 + \iint d\vec{S}_3 \cdot \vec{E}_3$$

donde se ha dividido la superficie cerrada en la superficies S_1 y S_2 (tapas), y en S_3 (manto). Claramente el flujo sobre este último es cero, pues el campo es perpendicular en todo punto al vector normal a S_3 . Con esto

$$\Phi = \iint_S d\vec{S} \cdot \vec{E} = \iint d\vec{S}_1 \cdot \vec{E}_1 + \iint d\vec{S}_2 \cdot \vec{E}_2$$

S_1 y S_2 están a la misma distancia del plano infinito, luego, en ambas superficies la magnitud del campo debe ser la misma, digamos, E , luego

$$\Phi = \iint_S d\vec{S} \cdot \vec{E} = E \left(\iint dS_1 + \iint dS_2 \right) = 2AE$$

donde A es la superficie total de S_1 y S_2 . Por la ley de Gauss, el flujo del campo eléctrico es

$$\Phi = 2AE = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$$

donde la carga encerrada por esta superficie es

$$q_{in} = \sigma A$$

de forma que

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

en notación vectorial

$$\vec{E}(\vec{x}) = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \hat{k} & \text{si } z > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \hat{k} & \text{si } z < 0 \end{cases}$$

notar que el campo tiene una discontinuidad en $z = 0$

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} \vec{E}(z) - \lim_{z \rightarrow 0^-} \vec{E}(z) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Veremos que el campo eléctrico siempre es discontinuo al atravesar una superficie cargada

Problema

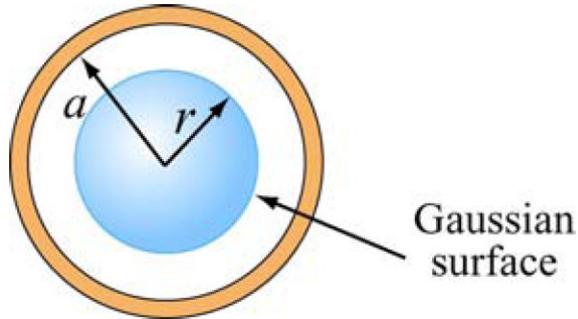
Se tiene una cáscara esférica de radio a y de carga Q distribuida uniformemente sobre su superficie. Encuentre el campo eléctrico en todo el espacio

Solución

Por la simetría esférica de la distribución de carga, y utilizando un sistema de coordenadas cuyo origen coincide con el centro de la distribución, se tiene que el campo eléctrico debe ser de la forma

$$\vec{E} = E(r)\hat{r}$$

Para $r < a$, elegimos una superficie Gaussiana esférica de radio r , como se muestra en la figura



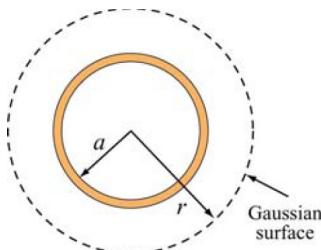
de la ley de Gauss

$$\iint_S d\vec{S} \cdot \vec{E} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$$

Es claro que en este caso no hay carga encerrada por la superficie, de forma que

$$\iint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') = E(r)4\pi r^2 = 0 \rightarrow E(r) = 0$$

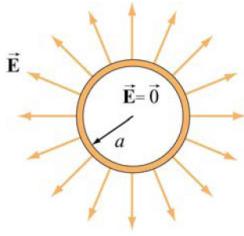
Para $r > a$, nuevamente elegimos una superficie Gaussiana esférica de radio r



$$\iint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') = 4\pi r^2 E(r) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

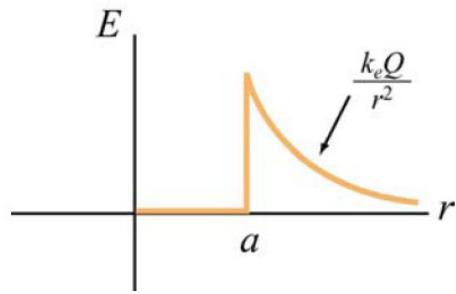
$$\vec{E} = E(r)\hat{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r}$$

es decir, para $r > a$ el campo es igual al de una carga puntual Q en el origen.



$$\vec{E}(\vec{x}) = \begin{cases} \vec{0} & \text{si } |\vec{x}| < a \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} & \text{si } |\vec{x}| > a \end{cases}$$

El campo es discontinuo en $r = a$ (siempre lo es al atravesar una superficie cargada)



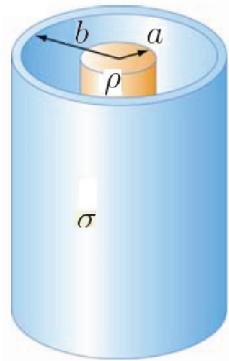
Notar que

$$\lim_{r \rightarrow a+} E(r) - \lim_{r \rightarrow a-} E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

donde σ es la densidad superficial de carga. Notar que se obtuvo lo mismo en la interfaz de un plano cargado (En efecto, es un resultado general)

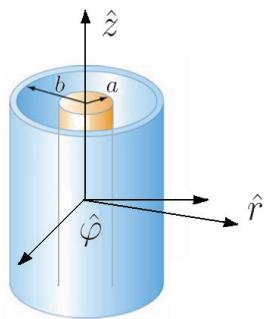
Problema

Considera un cable coaxial muy largo, el cable está compuesto por un cilindro sólido interior, de radio a que lleva una densidad de carga volumétrica ρ (constante) y por un cilindro exterior hueco de radio b ($b > a$) que lleva una densidad de carga superficial σ , esta densidad es tal que el cable es eléctricamente neutro. Encuentra el campo eléctrico producido por el cable en todo el espacio



Solución

Establecemos un sistema de coordenadas cilíndricas en el centro del cable



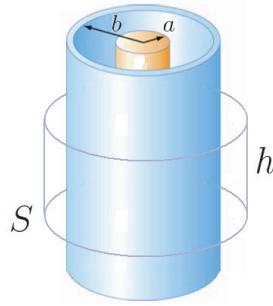
Distinguimos tres regiones, I , II y III dadas por $r > b$, $a < r < b$ y $r < a$ respectivamente. Por simetría, el campo (de existir) en la región I debe ser radial, y su magnitud únicamente función de r (La figura posee una clara simetría azimutal, es decir, es invariante ante una rotación del ángulo polar φ). Por ley de Gauss

$$\iint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{int}$$

donde S es cualquier superficie cerrada y Q_{int} la carga encerrada por ésta

$$Q_{int} = \iiint_{V(S)} d^3x' \rho(\vec{x}')$$

Debemos encontrar una superficie con las siguientes características: $\vec{E}(\vec{x}') // \hat{n}(\vec{x}')$ y $|\vec{E}(\vec{x}')|$ constante $\forall \vec{x}' \in S$. Dada la simetría del problema usamos como superficie un cilindro de radio $r > b$ y altura h



Luego

$$\iint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \iint_{Manto} d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') + \iint_{Tapas} d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}')$$

Para todo \vec{x}' en el manto, $d\vec{S}(\vec{x}') = dS(\vec{x}')\hat{n}(\vec{x}') = rd\varphi dz\hat{r}(\varphi)$, y $\vec{E}(\vec{x}') = E(r)\hat{r}(\varphi)$, de forma que

$$\iint_{Manto} d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') = E(r) \iint_{Manto} dS(\vec{x}') = 2\pi rhE(r)$$

Por otro lado, para todo \vec{x}' en las tapa superior, $d\vec{S}(\vec{x}') = rd\varphi dr\hat{z}$, y en la tapa inferior $d\vec{S}(\vec{x}') = -rd\varphi dr\hat{z}$, mientras que $\vec{E}(\vec{x}') = E(r)\hat{r}(\varphi) \perp d\vec{S}(\vec{x}')$, luego

$$\iint_{Tapas} d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') = 0$$

con esto

$$\iint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}) = E(r)2\pi rh$$

pero como el cable es neutro, $Q_{int} = 0$. Luego

$$E(r)2\pi rh = 0 \rightarrow E(r) = 0, r > b$$

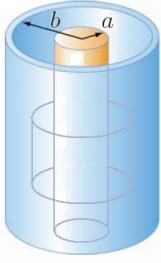
Notar que

$$Q_{int} = \pi a^2 h \rho + \sigma 2\pi b h = 0$$

luego

$$\sigma = -\frac{\rho a^2}{2b}$$

En la región II : $a < r < b$, la simetría nuevamente implica la naturaleza radial del campo eléctrico (al igual que su dependencia en r y no en φ). Nuevamente utilizamos como superficie cerrada un cilindro de radio r y altura h



$$\oint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{int}$$

Por los mismos argumentos utilizados anteriormente, la integral de flujo se reduce a

$$\oint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}) = E(r) 2\pi r h$$

y

$$Q_{int} = \iiint_{V(S)} d^3x' \rho(\vec{x}') = \rho \iiint_{V(S)} d^3x' = \rho \pi a^2 h$$

entonces

$$E(r) 2\pi r h = \rho \frac{\pi a^2 h}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{a^2 \rho}{2\epsilon_0 r} \hat{r}$$

si $r \in [a, b]$

Por último, para la región *III*: $r < a$, se escoge nuevamente un cilindro de radio r y altura h . Los mismos argumentos de simetría son válidos aquí para determinar el campo eléctrico. Resulta

$$\oint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{int}$$

y

$$\oint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}) = E(r) 2\pi r h$$

$$Q_{int} = \iiint_{V(S)} d^3x' \rho(\vec{x}') = \rho \iiint_{V(S)} d^3x' = \rho \pi r^2 h$$

entonces

$$E(r) 2\pi r h = \rho \frac{\pi r^2 h}{\epsilon_0}$$

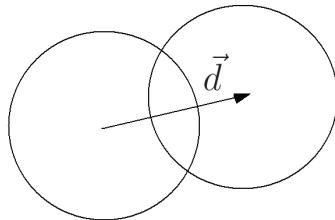
$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{\rho r}{2\epsilon_0} \hat{r}$$

En resumen (notar discontinuidad al atravesar la superficie cargada $r = b$)

$$\vec{E}(\vec{x}) = \begin{cases} \frac{\rho r}{2\epsilon_0} & \text{si } 0 \leq r < a \\ \frac{a^2 \rho}{2\epsilon_0 r} & \text{si } a < r < b \\ 0 & \text{si } b < r \end{cases}$$

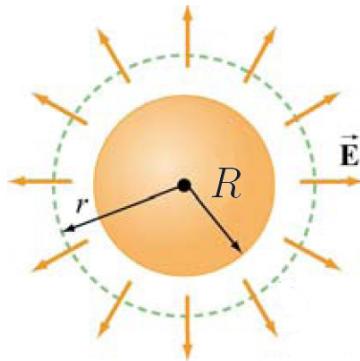
Problema

Considere dos esferas no concéntricas de radio R . La primera de ellas lleva una densidad volumétrica de carga ρ y la segunda $-\rho$. Los centros de las esferas están a distancia menor que $2R$. si \vec{d} es el vector que va del centro de la esfera positiva al centro de la negativa, demuestre que el campo eléctrico en la intersección de las esferas es constante, y encuentre su valor



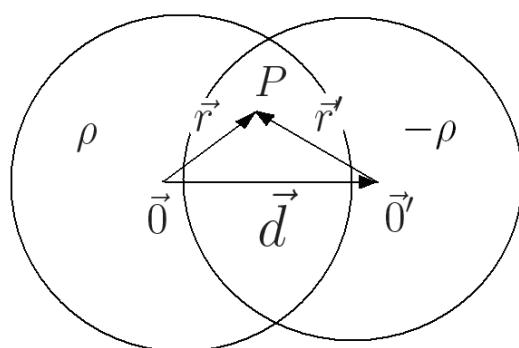
Solución

Este problema se resuelve por superposición y recordando la forma del campo eléctrico generado por una distribución homogénea y esférica de carga (resuelto anteriormente)



$$\vec{E}(\vec{x}) = \begin{cases} \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \hat{r} & \text{si } r \leq R \\ \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \hat{r} & \text{si } r > R \end{cases}$$

donde r es la distancia al centro de la distribución. Ahora, sea P un punto arbitrario dentro de la región de la intersección



El campo en P producido por la distribución de carga positiva es

$$\vec{E}_1 = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r}$$

y el de la distribución de carga negativa

$$\vec{E}_2 = \frac{-\rho}{3\epsilon_0} \vec{r'}$$

Por el principio de superposición, el campo eléctrico en P está dado por

$$\vec{E}(P) = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r} + \frac{-\rho}{3\epsilon_0} \vec{r'}$$

Pero

$$\vec{d} + \vec{r'} = \vec{r}$$

de forma que

$$\vec{r'} = \vec{r} - \vec{d}$$

$$\vec{E}(P) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r} + \frac{-\rho}{3\epsilon_0} (\vec{r} - \vec{d})$$

$$\vec{E}(P) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{d}$$

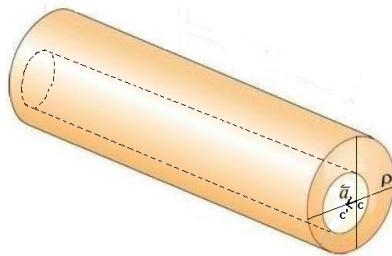
P fue escogido de manera arbitraria, luego, para todo \vec{x} dentro de la distribución, el campo eléctrico es uniforme y está dado por

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{d}$$

notar que es paralelo a la dirección que une ambos centros

Problema

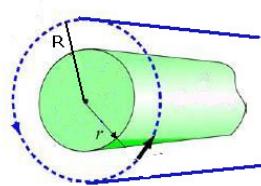
Se tiene un cilindro de radio R muy largo y con densidad de carga homogénea ρ . Se ha suprimido un cilindro con eje paralelo con el mismo largo y radio $R/2$. El vector que une el centro del cilindro con el centro de la cavidad es \vec{a} para una sección transversal. Se pide obtener la expresión del campo eléctrico en un punto cualquiera de la cavidad que no pertenezca a la recta que une los centros del cilindro y de la cavidad



Solución

Este problema se puede resolver de forma muy simple utilizando el principio de superposición. Evidentemente podemos considerar el problema del cilindro lleno con densidad ρ , y superponer un cilindro menor con densidad $-\rho$. Primero, debemos encontrar una expresión para el campo eléctrico al interior de un cilindro muy largo de radio R .

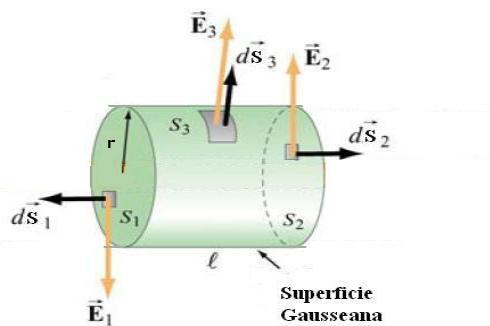
Debido a la simetría, es evidente que el campo eléctrico al interior del cilindro debe ser radial y constante a una cierta distancia r del centro.



Luego, utilizamos como superficie de Gauss un cilindro de radio r y largo L .

$$\iint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0}$$

Ahora, notemos que el cilindro lo podemos dividir en 3 superficies



Luego la ley de Gauss queda

$$\iint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') = \iint_S d\vec{S}_1 \cdot \vec{E}_1 + \iint_S d\vec{S}_2 \cdot \vec{E}_2 + \iint_S d\vec{S}_3 \cdot \vec{E}_3$$

Notar que en todos los puntos de la superficie S_1 el campo eléctrico es perpendicular al vector normal. Lo mismo sucede con la superficie S_2 , luego, las dos primeras integrales de flujo son nulas. Se tiene entonces

$$\begin{aligned} \iint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') &= \iint_S d\vec{S}_3 \cdot \vec{E}_3 = \iint_S E_r \hat{r} \cdot dS_3 \hat{r} \\ E(r) \iint_S dS_3 &= E(r) 2\pi r L \end{aligned}$$

Ahora, la carga encerrada por la superficie de Gauss es

$$Q_{in} = \iiint_{V(S)} d^3x' \rho(\vec{x}')$$

donde $V(S)$ es el volumen encerrado por S . Como ρ es constante,

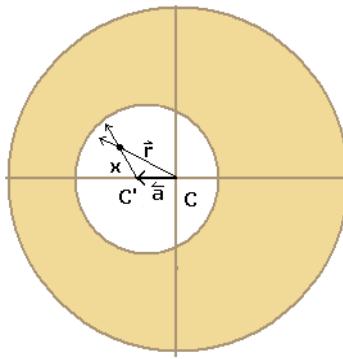
$$Q_{in} = \rho \iiint_V d^3x' = \rho \pi r^2 L$$

Luego la ley de Gauss queda

$$E(r) 2\pi r L = \rho \pi r^2 L$$

$$E(r) = \frac{\rho r}{2}$$

Ahora, eligiendo un punto P dentro de la cavidad, tendremos que el campo total será la suma vectorial del campo eléctrico debido a un cilindro homogéneo de carga y del campo debido a un cilindro homogéneo de carga negativa, tal como indica la figura



$$\vec{E}_1 = \frac{\rho r}{2} \hat{r}$$

$$\vec{E}_2 = -\frac{\rho x}{2} \hat{r}'$$

donde

$$\hat{r}' = \frac{(\vec{r} - \vec{a})}{x} = \frac{(r\hat{r} - \vec{a})}{x}$$

Sumando ambos campos

$$\vec{E} = \frac{\rho r}{2} \hat{r} - \frac{\rho x}{2} \frac{(r\hat{r} - \vec{a})}{x}$$

$$\vec{E} = \frac{\rho r}{2} \hat{r} - \frac{\rho r \hat{r}}{2} + \frac{\rho \vec{a}}{2}$$

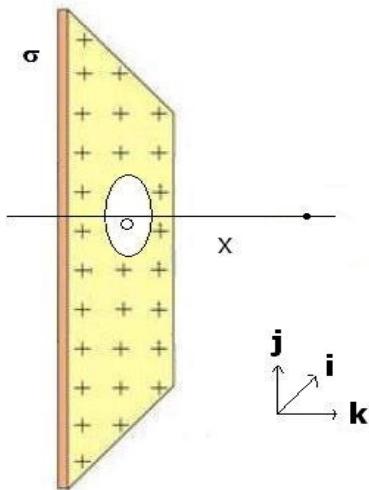
$$\vec{E} = \frac{\rho \vec{a}}{2}$$

El campo en todo punto de la cavidad es uniforme y paralelo al vector \vec{a}

Problema

Considere un plano infinito de carga con densidad superficial $\sigma > 0$. Se practica un orificio circular de radio R .

- Calcule el campo eléctrico en cualquier punto de abscisa x perteneciente al eje del orificio
- A lo largo del eje del orificio se coloca una línea de carga de largo a , densidad lineal $\lambda > 0$ y cuyo punto más próximo se encuentra a distancia μ del centro del orificio. Calcule la fuerza de repulsión que experimenta la línea de carga.

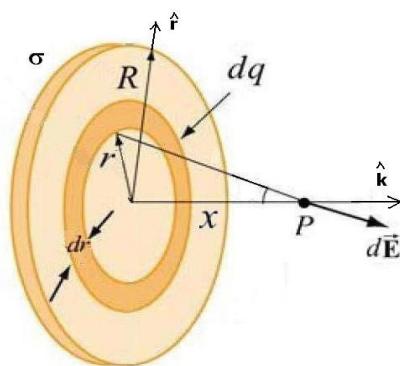


Solución

Una forma natural de solucionar este problema es utilizando el principio de superposición. Esto es, considerar al plano con un orificio como la suma de un plano completo con un disco de densidad superficial $-\sigma$. Ya se vió que el campo debido a un plano infinito de carga es homogéneo y está dado por

$$\vec{E}_1 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{k}$$

Ahora, para calcular el campo en el eje de un disco, de radio R y densidad σ



Un elemento de superficie del disco está dado por $dA = r dr d\phi$, que tiene asociado un elemento diferencial de carga, dado por $dq = \sigma dA = \sigma r dr d\phi$.

Así, el campo eléctrico en P debido a este elemento de superficie será

$$d\vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq(\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$$

donde $\vec{x} = x\hat{k}$, $\vec{x}' = r(\cos\phi\hat{i} + \sin\phi\hat{j})$ así

$$|\vec{x} - \vec{x}'| = (r^2 + x^2)^{1/2}$$

$$\vec{x} - \vec{x}' = x\hat{k} - r(\cos\phi\hat{i} + \sin\phi\hat{j})$$

Con esto la contribución al campo total en P debido al elemento de superficie es

$$d\vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma r dr d\phi (x\hat{k} - r\hat{r})}{(r^2 + x^2)^{3/2}}$$

Así, el campo eléctrico total en P debido al disco completo será

$$\vec{E}_2 = \frac{\sigma x}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R dr \frac{r}{(r^2 + x^2)^{3/2}} \hat{k} - \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\phi (\cos\phi\hat{i} + \sin\phi\hat{j}) \int_0^R dr \frac{r^2}{(r^2 + x^2)^{3/2}}$$

La segunda integral es 0, y esto se puede mostrar calculándola directamente o usando el argumento de simetría, ya que es evidente que el campo eléctrico resultante en el eje solo tendrá componente en \hat{k} . Sea $u = r^2 + x^2$, así, $du = 2rdr$, con esto

$$\vec{E}_2 = 2\pi \frac{\sigma x}{4\pi\epsilon_0} \int_{x^2}^{R^2+x^2} \frac{du}{2u^{3/2}} \hat{k}$$

Donde el factor 2π sale de integrar $d\phi$ entre 0 y 2π . Finalmente

$$\vec{E}_2 = \frac{\sigma x}{4\epsilon_0} - 2u^{-1/2} \Big|_{x^2}^{x^2+R^2} \hat{k} = -\frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{R^2 + x^2}} + \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \frac{1}{x} \hat{k}$$

$$\vec{E}_2 = \frac{-\sigma x + \sigma\sqrt{R^2 + x^2}}{2\epsilon_0\sqrt{R^2 + x^2}} \hat{k}$$

$$\vec{E}_2 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right) \hat{k}$$

Notar que si $R \rightarrow \infty$ se recupera el campo de un plano infinito

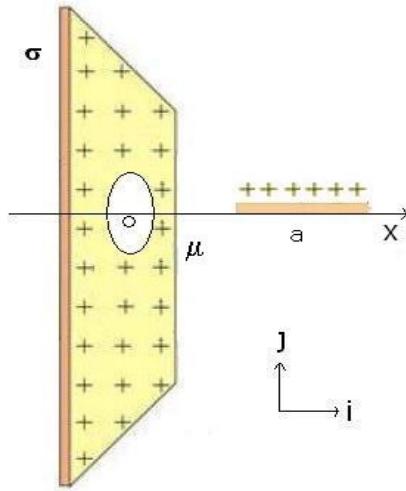
$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{k}$$

Finalmente el campo eléctrico total en P , será la suma de \vec{E}_1 y $-\vec{E}_2$, ya que el disco tiene densidad de carga $-\sigma$

$$\vec{E}(P) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} - 1 \right) \hat{k}$$

$$\vec{E}(P) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} \hat{k}$$

b)



Para calcular la fuerza sobre el alambre de carga, bastará con tomar un elemento diferencial de longitud dx y obtener la fuerza electrostática que actúa sobre éste

$$d\vec{F} = dq\vec{E}(x) = \lambda dx \vec{E}(x) = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \frac{\lambda}{\sqrt{R^2 + x^2}} dx \hat{k}$$

Con lo que la fuerza total sobre la línea de carga será

$$F = \int_{\mu}^{\mu+a} dx \left(\frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \frac{\lambda}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right) \hat{k}$$

Sea $z = R^2 + x^2$, con lo que $dz = 2xdx$. Finalmente

$$\vec{F} = \frac{\lambda\sigma}{4\epsilon_0} \int_{R^2+\mu}^{R^2+(\mu+a)^2} \frac{dz}{\sqrt{z}} \hat{i} = \frac{\sigma\lambda}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{R^2 + (\mu + a)^2} - \sqrt{R^2 + \mu^2} \right) \hat{k}$$

Problema

Consideré la siguiente distribución volumétrica de carga en coordenadas esféricas

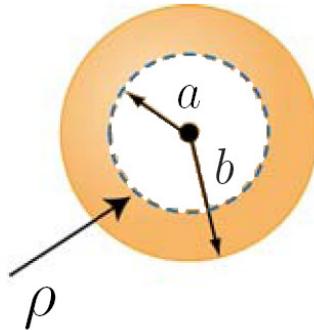
$$\rho(r) = \frac{k}{r^2}, a \leq r \leq b$$

Encuentre el campo eléctrico en todo el espacio

Solución

Se tiene la distribución de carga dada por

$$\rho(r) = \frac{k}{r^2}, a \leq r \leq b$$



Consideremos las distribuciones auxiliares

$$\rho_1(r) = \frac{k}{r^2}, 0 \leq r \leq b$$

$$\rho_2(r) = -\frac{k}{r^2}, 0 \leq r \leq a$$

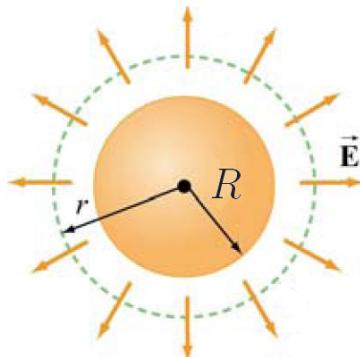
Es fácil ver que

$$\rho(r) = \rho_1(r) + \rho_2(r)$$

Luego, podemos calcular por separado ambos campos eléctricos para luego superponerlos. Consideremos entonces, el problema

$$\rho' = \frac{k'}{r^2}, 0 \leq r \leq R$$

Sea la región del espacio en que $r > R$. Dada la simetría esférica de la distribución, escogemos como superficie Gaussiana S una esfera concéntrica al origen y de radio $r > R$



El flujo a través de S será

$$\oint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') = 4\pi r^2$$

La carga encerrada por esta superficie es

$$Q_{int} = \iiint_{V(S)} d^3x' \rho(\vec{x}') = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta \int_0^R dr r^2 \frac{k'}{r^2} = 4\pi R k'$$

Por ley de Gauss

$$E(r) 4\pi r^2 = \frac{4\pi R k'}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E}(r) = \frac{Rk'}{\epsilon_0 r^2} \hat{r}, r > R$$

Ahora, para $r < R$, nuevamente se utiliza una superficie esférica de radio r y se resuelve en forma análoga a la anterior, lo único que varía es la carga encerrada

$$\oint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') = 4\pi r^2$$

esta vez la carga encerrada es la carga contenida en todo el volumen de la superficie de Gauss

$$Q = \iiint_{S(V)} d^3x' \rho(\vec{x}') = 4\pi r k'$$

entonces

$$E(r) 4\pi r^2 = \frac{4\pi r k'}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E}(r) = \frac{k'}{\epsilon_0 r} \hat{r}$$

Ahora, superponemos los campos generados por ρ_1 y ρ_2 . Si $r > b > a$

$$\vec{E} = \frac{bk}{\epsilon_0 r^2} \hat{r} + \frac{(-k)a}{\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

$$\vec{E} = \frac{k(b-a)}{\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

Si $a < r < b$

$$\vec{E}(r) = \frac{k}{\epsilon_0 r} \hat{r} + \frac{(-k)a}{\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

$$\vec{E}(r) = \left(\frac{k}{\epsilon_0 r} - \frac{ak}{\epsilon_0 r^2} \right) \hat{r}$$

Por último, para

$$\vec{E}(r) = \left(\frac{k}{\epsilon_0 r} - \frac{k}{\epsilon_0 r} \right) \hat{r}$$

$$\vec{E}(r) = 0$$

En resumen

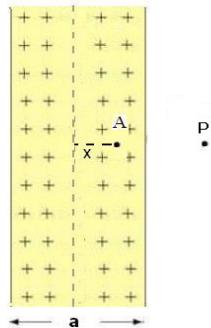
$$\vec{E}(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r < a \\ \left(\frac{k}{\epsilon_0 r} - \frac{ak}{\epsilon_0 r^2} \right) \hat{r} & \text{si } a < r < b \\ \frac{k(b-a)}{\epsilon_0 r^2} \hat{r} & \text{si } r > b > a \end{cases}$$

Notar que este problema se podría haber resuelto fácilmente utilizando directamente la ley de Gauss. Sin embargo, utilizar el principio de superposición facilita mucho el cálculo en algunos otros casos

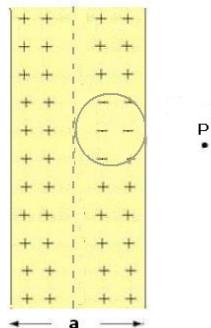
Problema

Dos planos infinitos y paralelos, a distancia a uno del otro, delimitan una región del espacio que contiene una distribución continua y uniforme de carga eléctrica cuya densidad volumétrica es ρ constante.

- a) Calcular el campo eléctrico en el punto A a distancia x del plano central y el campo en un punto exterior P a distancia r del plano central



- b) Ahora en la distribución de carga anterior se reemplaza una esfera como en la figura por una distribución con carga de densidad uniforme $-\rho$. Calcular el campo en el centro de la esfera , y en un punto P exterior a distancia x del plano central



Solución

Para encontrar el campo eléctrico al interior de la distribución, podemos utilizar la Ley de Gauss. Notar que como la región esta limitada por planos infinitos, por un argumento de simetría el campo \vec{E} solo tendrá componente en la dirección \hat{i} .

Notar además, que para $x > 0$, el campo tendrá dirección \hat{x} , mientras que si $x < 0$, el campo tendrá dirección $-\hat{x}$. Utilizando un cilindro como superficie de Gauss, de radio x , se tiene

$$\iint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$$

En este caso sólo habrá flujo a través de las tapas del cilindro, puesto que el campo es horizontal y perpendicular a la normal del cilindro sobre el manto. Luego

$$\iint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') = E(x)2S$$

donde S es el área de cada tapa. Ahora, la carga encerrada por este cilindro será simplemente

$$q_{in} = \rho V = \rho 2xS$$

Con esto

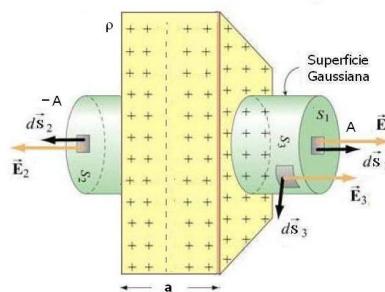
$$2SE(x) = \frac{\rho 2xS}{\epsilon_0}$$

$$E(x) = \frac{\rho x}{\epsilon_0}$$

Finalmente, para $|x| < a/2$

$$\vec{E} = \frac{\rho x \hat{i}}{\epsilon_0}$$

Ahora, para obtener el campo en un punto exterior a distancia $r > a/2$ del plano central, volvemos a utilizar la ley de Gauss, como se aprecia en la figura



Nuevamente sólo habrá flujo por S_1 y S_2 , luego

$$\begin{aligned} \iint_S d\vec{S}'(\vec{x}') \cdot d\vec{E}(\vec{x}') &= E(r) \left(\iint_{S_1} dS_1 + \iint_{S_2} dS_2 \right) \\ \iint_S d\vec{S} \cdot \vec{E} &= E(r) 2S \end{aligned}$$

la carga encerrada por el cilindro será

$$q_{in} = \rho a S$$

Luego

$$E(r) 2S = \frac{\rho a S}{\epsilon_0}$$

de donde se obtiene, para $|r| > a/2$

$$\vec{E} = \frac{\rho a}{2\epsilon_0} \hat{i}$$

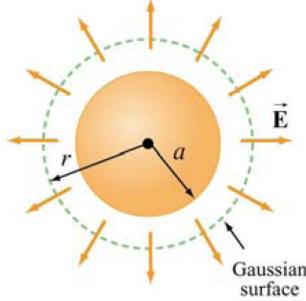
Notar que no depende de la distancia al plano central.

b) Por el principio de superposición, este problema equivale a considerar la distribución de carga de la parte a) más una esfera de densidad volumétrica de carga -2ρ .

El campo en el centro de la esfera, debido a la esfera misma es nulo, por simetría. Así, el campo total en el centro será, simplemente $\vec{E}(a/4)$ donde \vec{E} es el campo interior calculado anteriormente.

$$\vec{E}_{centro} = \frac{\rho a}{4\epsilon_0} \hat{i}$$

Ahora, para obtener el campo en el punto P, calculemos primero el campo debido a la esfera de carga usando la Ley de Gauss,



$$\begin{aligned}\iint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') &= \frac{q_{in}}{\epsilon_0} \\ \iint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') &= \iint_S dS \hat{r} \cdot E(r) \hat{r} = E(r) \iint_S dS \\ \iint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') &= E(r) 4\pi r^2\end{aligned}$$

y la carga encerrada por la superficie de Gauss es

$$q_{in} = -2\rho \frac{4\pi(a/4)^3}{3} = -\rho \frac{\pi a^3}{24}$$

Con esto

$$E(r) = -\frac{\rho a^3}{96r^2\epsilon_0}$$

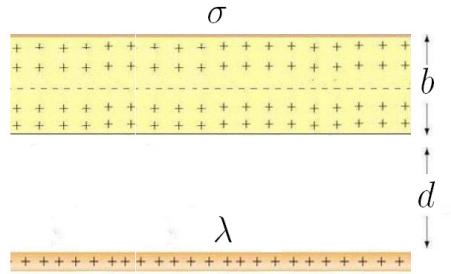
Esto corresponde al campo debido a la esfera, donde r es la distancia entre el punto P y el centro de la esfera. En este caso, el centro de la esfera se encuentra en $x = a/4$, con lo que el campo total en P sera

$$\vec{E}(P) = \frac{\rho a}{2\epsilon_0} \hat{i} - \frac{\rho a^3}{96\epsilon_0(x - a/4)^2} \hat{i}$$

con $|x| > a/2$

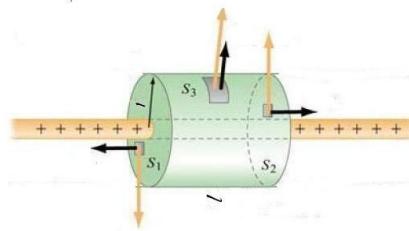
Problema

Calcule la fuerza por unidad de largo que se ejercen una huincha muy larga de ancho b y densidad de carga σ y un alambre igualmente largo con densidad lineal de carga λ , puesto en el mismo plano que la huincha a distancia d del borde inferior, como muestra la figura



Solución

Podemos optar por calcular la fuerza que ejerce la distribución lineal de carga sobre la distribución plana, o viceversa. Utilizaremos la primera opción, y para ello necesitamos obtener el campo eléctrico generado por la distribución lineal. Esto ya ha sido resuelto anteriormente con ley de Gauss, considerando la simetría cilíndrica del campo eléctrico en presencia de una distribución linal infinita de carga



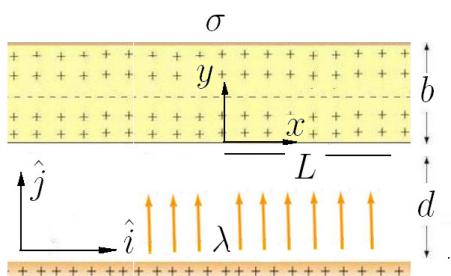
Si la superficie Gaussiana es un cilindro de radio r y largo h , y utilizando coordenadas cilíndricas

$$\iint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') = \int_0^{2\pi} d\varphi r \int_0^h dz \hat{r}(\varphi) \cdot \vec{E}(r) \hat{r}(\varphi) = 2\pi r h E(r) = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}$$

y entonces

$$\vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{r}$$

De esta forma, en el plano que contiene a ambas distribuciones, y definiendo las direcciones \hat{i}, \hat{j} (como se indica en la figura)



el campo eléctrico generado por la distribución lineal tiene la forma

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{j}$$

donde r es la distancia vertical entre \vec{x} y el alambre. Fijando el origen de coordenadas según lo indicado en la figura, calculemos la fuerza que se ejerce sobre una porción de largo L de la distribución plana de carga con densidad σ . Un elemento de área de coordenadas (x, y) posee una carga dada por

$$dq(x, y) = \sigma dx dy$$

y el campo eléctrico en dicho punto debido a la distribución lineal es

$$\vec{E}(x, y) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0(d + y)} \hat{j}$$

Luego, la fuerza que se ejerce sobre este elemento de área es

$$d\vec{F}(x, y) = dx dy \sigma \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0(d + y)} \hat{j}$$

consideremos la distribución dada por $0 \leq x \leq L$, $0 \leq y \leq b$. La fuerza neta sobre esta porción es

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \int_0^L dx \int_0^b \frac{\sigma\lambda}{2\pi\epsilon_0(d + y)} \hat{j} \\ \vec{F} &= \frac{\sigma\lambda L}{2\pi\epsilon_0} \int_0^b \frac{1}{d + y} \hat{j} = \frac{\sigma\lambda L}{2\pi\epsilon_0} \ln(d + y) \Big|_0^b \hat{j} \\ \vec{F} &= \frac{\sigma\lambda L}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{d + b}{d} \right) \hat{j} \end{aligned}$$

y la fuerza por unidad de largo es

$$\frac{\vec{F}}{L} = \frac{\sigma\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{d + b}{d} \right) \hat{j}$$

Capítulo 5

El potencial Electrostático

Vimos anteriormente que el campo Electrostático generado por una distribución de carga se escribe en su forma más general como una integral de Coulomb

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{R^3} d^3x' \rho(\vec{x}') \frac{(\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$$

Hemos establecido además una relación interesante entre el flujo del campo sobre una superficie cerrada y la carga encerrada por ésta (Ley de Gauss). Esta relación es consistente con la ley de Coulomb y establece que el flujo del campo eléctrico sobre cualquier superficie cerrada S es

$$\oint_S d\vec{S}' \cdot \vec{E}(\vec{x}') = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{V(S)} d^3x' \rho(\vec{x}')$$

Ahora, veremos una segunda ley muy importante en electrostática, y para enunciarla demostraremos el siguiente lema

$$\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = -\frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$$

Demostración

Esta es trivial considerando que

$$|\vec{x} - \vec{x}'| = ((x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2)^{1/2}$$

y

$$\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \hat{k}$$

veamos que ocurre con la componente según \hat{i}

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \hat{i} = -\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|^2} \frac{\partial}{\partial x} |\vec{x} - \vec{x}'| \hat{i}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \hat{i} = -\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|^2} \frac{1}{2} ((x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2)^{-1/2} 2(x - x') \hat{i}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \hat{i} = -\frac{x - x'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \hat{i}$$

El cálculo es análogo para las demás componentes, y se demuestra que

$$\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = -\frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$$

¿Qué tendrá que ver esto con electrostática? No es difícil reconocer el parecido del campo vectorial

$$\frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$$

con el campo electrostático, puesto que en su forma más general puede ser escrito como

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{R^3} d^3x' \rho(\vec{x}') \frac{(\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$$

Utilizando el lema recién demostrado, esto se reescribe como

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{x}) &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{R^3} d^3x' \rho(\vec{x}') \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \\ \vec{E}(\vec{x}) &= -\vec{\nabla} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{R^3} d^3x' \rho(\vec{x}') \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \end{aligned}$$

Se obtiene que el campo eléctrico es menos el gradiente de un campo escalar. Se define el **potencial electrostático** de una distribución de cargas como

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{R^3} d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

y el campo eléctrico cumple

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla} \phi(\vec{x})$$

Notar que es inmediato que el potencial de una carga puntual ubicada en \vec{x}' estará dado por

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

Potencial de una distribución discreta

Supongamos que se tiene una distribución discreta de cargas q_j , $j = 1, 2, \dots, N$ ubicadas en las posiciones \vec{x}_j , $j = 1, 2, \dots, N$. El potencial de ésta distribución se puede obtener fácilmente a partir del potencial de una sola carga utilizando el principio de superposición

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\vec{x} - \vec{x}_i|}$$

por supuesto, esto es consistente con la densidad de carga en términos de la delta de Dirac

$$\rho(\vec{x}) = \sum_{i=1}^N q_i \delta(\vec{x} - \vec{x}_i)$$

en efecto, de la definición para el potencial

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{R^3} d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{R^3} d^3x' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \sum_{i=1}^N q_i \delta(\vec{x}' - \vec{x}_i)$$

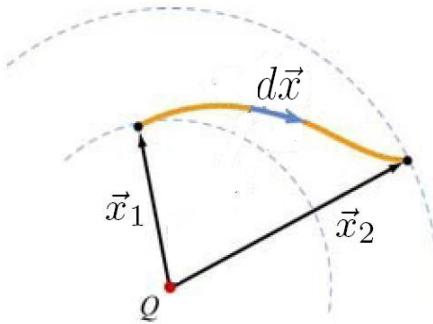
$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i \iiint_{R^3} d^3x' \frac{\delta(\vec{x}' - \vec{x}_i)}{|\vec{x} - \vec{x}_i|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\vec{x} - \vec{x}_i|}$$

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\vec{x} - \vec{x}_i|}$$

5.1. Interpretación Física del Potencial

Supongamos que se tiene una distribución de carga en el espacio, ésta generará un campo eléctrico $\vec{E}(\vec{x})$. Consideremos el trabajo efectuado **contra** las fuerzas del campo al trasladar cuasiestáticamente una carga puntual q desde un punto \vec{x}_1 hasta el punto \vec{x}_2 , siguiendo una trayectoria cualquiera Γ . Por cuasiestáticamente, se entiende que no se altera la energía cinética al mover a la carga. Esto se puede lograr exclusivamente si la **fuerza neta** sobre la carga es cero (recordar Teorema del Trabajo). De esta forma, debemos ejercer una fuerza de igual magnitud y contraria a la fuerza electrostática que actúa sobre la carga. Esto es

$$W = - \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} d\vec{x} \cdot q \vec{E}(\vec{x})$$



Podría ser que este trabajo dependiera de la trayectoria utilizada para ir desde \vec{x}_1 hasta \vec{x}_2 . Sin embargo, como

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{x})$$

$$W = - \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} d\vec{x} \cdot q \vec{E}(\vec{x}) = q \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} d\vec{x} \cdot \vec{\nabla}\phi(\vec{x})$$

Utilizando la parametrización de la curva Γ : $\vec{x} = \vec{x}(l')$, donde $l \in [0, l]$

$$W = q \int_0^l dl' \frac{d\vec{x}}{dl'} \cdot \vec{\nabla}\phi(\vec{x}(l'))$$

$$W = q \int_0^l dl' \frac{d\phi(\vec{x}(l'))}{dl'} = q \int_{\phi_1}^{\phi_2} d\phi = q (\phi_2 - \phi_1)$$

Finalmente hemos obtenido

$$W = -q \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} d\vec{x} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = q (\phi_2 - \phi_1)$$

Independiente de la curva Γ !

Si tomamos una carga unitaria, $q = 1$, la interpretación de éste resultado es como sigue:

El trabajo necesario para mover una carga unitaria quasiestáticamente desde el punto x_1 hasta el punto x_2 contra el campo eléctrico es igual a la diferencia de potencial entre x_2 y x_1

Ahora, notemos que

$$\int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} d\vec{x} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = -(\phi_2 - \phi_1)$$

Por lo tanto, sobre una trayectoria cerrada

$$\oint d\vec{x} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = 0$$

el campo eléctrico es **conservativo**. Obsérvese que este resultado físico es consecuencia de Coulomb y la geometría Euclídea

Notar que $U(\vec{x}) = q\phi(\vec{x})$ es la **Energía Potencial** de una carga q en la posición \vec{x} . En efecto, la fuerza asociada a esta interacción es

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U(\vec{x}) = q\vec{E}(\vec{x})$$

Otro enfoque para la electrostática

La introducción del campo escalar ϕ presenta muchas ventajas para resolver matemáticamente el problema de la electrostática. Como vimos, si **conocemos** la distribución de carga, es decir, conocemos explícitamente $\rho(\vec{x})$, podemos calcular el campo resolviendo las integrales de Coulomb. Sin embargo, como ya se dijo anteriormente, éstas integrales pueden ser complicadas, un método alternativo sería resolver las integrales de Coulomb para el potencial

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{R^3} \frac{d^3x' \rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

Notar que calcular esta integral es notoriamente más simple que calcular la integral para el campo eléctrico. En primer lugar, no aparece ninguna cantidad vectorial. En segundo lugar, el potencial sólo depende del inverso de la distancia a la fuente, en cambio el campo eléctrico depende del cuadrado de la distancia. Notemos que una vez obtenido el potencial en todo el espacio, determinar el campo eléctrico es muy sencillo, sólo basta con evaluar $\vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{x})$, y todos sabemos que derivar es mucho más sencillo que integrar.

Ahora, aún no hemos dicho nada sobre qué hacer cuando la distribución de carga no es conocida, eso lo veremos más adelante, pero justamente el potencial electrostático es una herramienta muy poderosa a la hora de resolver ese tipo de problemas más complejos.

5.2. Energía Potencial de una distribución de carga discreta

El trabajo necesario para traer una carga q cuasiestáticamente desde el infinito hasta un punto \vec{x} es, simplemente

$$W = q\phi(\vec{x})$$

suponiendo que el potencial en el infinito es cero (Esto se cumple si, por ejemplo, toda la carga está localizada dentro de un volumen finito). Luego, esta carga ha adquirido una energía potencial igual a $U(\vec{x}) = q\phi(\vec{x})$. De la misma forma, una distribución de carga tiene una energía potencial asociada, ya que un trabajo se debe realizar para mantener la distribución en su lugar.

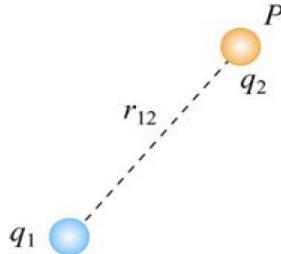
Calculemos la energía potencial de un sistema electrostático de cargas puntuales. Para ello inicialmente traemos una carga q_1 hasta un punto cualquiera \vec{x}_1 . El trabajo necesario para esto es nulo, ya que inicialmente no existe un campo eléctrico alguno que ejerza una fuerza sobre q_1 . Con esto

$$W_1 = 0$$

y el sistema en este estado posee una energía potencial igual a

$$U = W_1 = 0$$

Ahora, para traer una carga q_2 hasta un punto \vec{x}_2 , como se aprecia en la figura



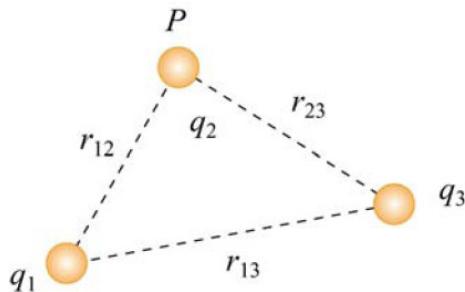
se requiere hacer un trabajo igual a

$$W_2 = \phi(x_2)q_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|} q_2$$

Con esta configuración, el sistema tiene asociada una energía potencial dada por

$$U = W_1 + W_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|} q_2$$

Ahora, para traer una tercera carga q_3 , como se ve en la figura



el trabajo necesario será

$$W_3 = q_3 \phi(\vec{x}_3) = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_3|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_3|} \right) q_3$$

En síntesis, el trabajo necesario para formar esta configuración de 3 cargas a distancias r_{12} , r_{13} , r_{23} es

$$U = W_1 + W_2 + W_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_{13}} q_3 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_{23}} q_3 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_{12}} q_2$$

Y es igual a la energía potencial total de esta configuración, que se puede reescribir como

$$U = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_2 q_1}{r_{21}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_3 q_1}{r_{31}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} + \frac{q_3 q_2}{r_{32}} \right)$$

$$U = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_{21}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_3}{r_{31}} \right) q_1 + \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_{12}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_3}{r_{32}} \right) q_2 + \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_{13}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_{23}} \right) q_3 \right)$$

$$U = \frac{1}{2} (\phi(\vec{x}_1) q_1 + \phi(\vec{x}_2) q_2 + \phi(\vec{x}_3) q_3)$$

Donde $\phi(\vec{x}_i)$ no es más que el potencial en la posición de la carga i debido a las demás cargas. En general, para un sistema de N cargas, se tiene que la energía potencial asociada al sistema es

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \phi(\vec{x}_i)$$

Esto se puede extender al caso continuo, donde la energía potencial de una distribución continua de carga es, equivalentemente

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V \phi(\vec{x}') dq(\vec{x}') = \frac{1}{2} \iiint_V d^3 x' \rho(\vec{x}') \phi(\vec{x}')$$

5.3. El dipolo Eléctrico

Definiremos una cantidad absolutamente general asociada con una distribución de cargas $\rho(\vec{x})$, llamada **Momento Dipolar**

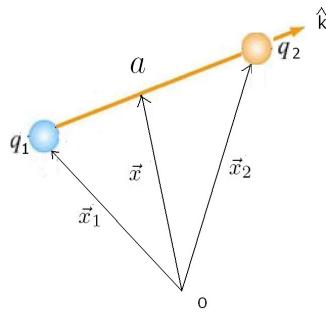
$$\vec{p} = \iiint_V d^3x' \vec{x}' \rho(\vec{x}')$$

donde V es un volumen que contiene todas las cargas. Notar en primer lugar que \vec{p} es un vector constante que dependerá de la forma en que están distribuidas las cargas. De cierta forma, es una suma de las posiciones ponderadas por sus respectivas cargas. El momento dipolar de una distribución discreta de N cargas es, por supuesto

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^N \vec{x}_i q_i$$

Dipolo Eléctrico

Estudiemos ahora un cierto tipo muy particular de distribución de carga. Primeramente, imaginemos 2 cargas cualquiera q_1, q_2 separadas una distancia a , como muestra la figura



El momento dipolar está dado por

$$\vec{p} = q_1 \vec{x}_1 + q_2 \vec{x}_2$$

Definamos además, el vector \vec{x} como el vector posición del punto medio entre q_1 y q_2 , y la dirección \hat{k} que apunta desde q_1 hacia q_2 . De esta forma, es claro que

$$\vec{x}_1 = \vec{x} - \frac{a}{2} \hat{k}$$

$$\vec{x}_2 = \vec{x} + \frac{a}{2} \hat{k}$$

luego

$$\vec{p} = q_1 \left(\vec{x} - \frac{a}{2} \hat{k} \right) + q_2 \left(\vec{x} + \frac{a}{2} \hat{k} \right)$$

$$\vec{p} = (q_1 + q_2) \vec{x} + \frac{a(q_2 - q_1)}{2} \hat{k}$$

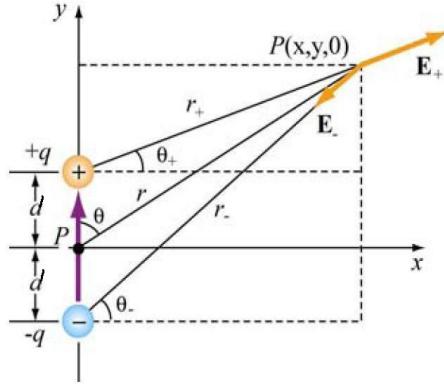
Ahora, consideremos que ambas cargas son iguales en magnitud, pero de signo opuesto. Digamos $q_2 = q$, $q_1 = -q$. Esto es lo que se conoce como **dipolo eléctrico** y entonces

$$\vec{p} = qa\hat{k}$$

En resumen, para un dipolo eléctrico, el momento dipolar es un vector de magnitud qa y su dirección va siempre desde la carga negativa hacia la carga positiva. Esta configuración es muy importante en electrostática.

5.4. Campo de un Dipolo

Calculemos el potencial eléctrico en un punto P debido a un dipolo. Para ello consideremos un dipolo en el eje vertical, como se muestra en la figura.



Por el principio de superposición, el potencial en el punto P está dado por

$$\phi(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_+} - \frac{q}{r_-} \right)$$

Donde, por el teorema del coseno

$$r_+^2 = r^2 + d^2 - 2dr \cos \vartheta$$

$$r_-^2 = r^2 + d^2 + 2dr \cos \vartheta$$

$$r_+ = r \sqrt{1 + (d/r)^2 - 2(d/r) \cos \vartheta}$$

Para el límite en que $d \ll r$, se puede desarrollar en series de Taylor

$$\frac{1}{r_+} = \frac{1}{r} \left(1 + (d/r)^2 - 2(d/r) \cos \vartheta \right)^{-1/2} = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{1}{2}(d/r)^2 + (d/r) \cos \vartheta + \dots \right)$$

Conservaremos los términos hasta segundo orden en d/r , como en la expansión $(1+x)^n \approx 1 + nx + n(n-1)/2x^2$, cuando $x \ll 1$

$$\frac{1}{r_+} \approx \frac{1}{r} \left(1 - \frac{1}{2}(d/r)^2 + (d/r) \cos \vartheta \right)$$

De forma análoga

$$\frac{1}{r_-} \approx \frac{1}{r} \left(1 - \frac{1}{2}(d/r)^2 - (d/r) \cos \vartheta \right)$$

Con esto, el potencial en P puede aproximarse por

$$\phi(P) \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \frac{2d \cos \vartheta}{r}$$

Si $a = 2d$ es la separación entre las cargas del dipolo

$$\phi(P) \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \frac{a \cos \vartheta}{r} = \frac{p \cos \vartheta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Donde $\vec{p} = aq\hat{j}$ es justamente el momento dipolar eléctrico. Notar entonces que el potencial eléctrico debido a un **dipolo microscópico** ($a \ll r$) queda absolutamente determinado por su momento dipolar \vec{p} y disminuye según el cuadrado de la distancia (es un potencial más débil que el de una carga puntual). Escribiéndolo en su forma más general posible

$$\phi(\vec{x}) = \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{x}}{4\pi\epsilon_0 |\vec{x}|^3}$$

Notar que existe una clara simetría azimutal, pues el potencial no depende del ángulo polar φ

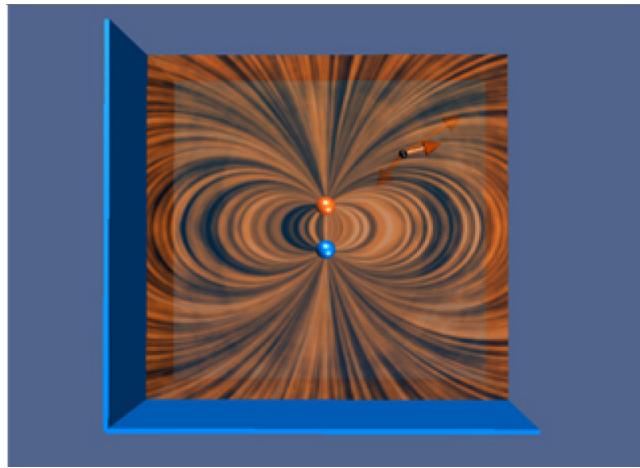


Fig. 5.1: Un dipolo eléctrico y sus líneas de campo eléctrico

Podemos obtener el campo eléctrico como el antigradiente del potencial

$$\vec{\nabla}f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \vartheta}\hat{\vartheta} + \frac{1}{r \sin \phi}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\phi}$$

El campo eléctrico sólo tendrá componentes en las direcciones \hat{r} y $\hat{\theta}$.

$$E_r = -\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{p \cos \vartheta}{2\pi\epsilon_0 r^3}$$

$$E_\vartheta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} = \frac{p \sin \vartheta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

Así

$$\vec{E} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \vartheta \hat{r} + \sin \vartheta \hat{\vartheta})$$

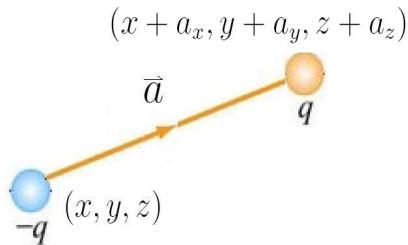
El campo eléctrico debido a un dipolo microscópico disminuye según el inverso del **cubo** de la distancia. Notar que un dipolo microscópico corresponde a un dipolo visto desde muy lejos. Lo interesante es que si bien es eléctricamente neutro, produce un campo eléctrico, y también interactúa con campos eléctricos externos. La explicación de ésto es que, si bien un

dipolo es neutro en su totalidad, posee una deformación eléctrica (cargas positivas y negativas concentradas en distintos puntos del espacio).

El dipolo es importante en el estudio de la electrostática. Recordemos que hasta ahora las leyes que hemos establecido son válidas en el vacío (en la ausencia de un medio material). ¿Cómo se verán afectados los campos en un medio material?. El punto clave está en que la materia está compuesta de moléculas, que si bien son eléctricamente neutras, poseen una deformación eléctrica, y por lo tanto, un momento dipolar. Es por ésto que la materia se puede modelar como una suma de muchos dipolos microscópicos, que generan campos eléctricos e interactúan ante la presencia de un campo externo.

5.5. Energía potencial de un dipolo

Supongamos un dipolo sumergido en un campo electrostático



La energía potencial asociada al dipolo será

$$U = -q\phi(\vec{x}) + q\phi(\vec{x} + \vec{a})$$

Podemos desarrollar $\phi(\vec{x} + \vec{a})$ en serie de Taylor (hasta primer orden)

$$\phi(\vec{x} + \vec{a}) = \phi(x, y, z) + \frac{\partial\phi(x, y, z)}{\partial x}a_x + \frac{\partial\phi(x, y, z)}{\partial y}a_y + \frac{\partial\phi(x, y, z)}{\partial z}a_z$$

$$\phi(\vec{x} + \vec{a}) = \phi(\vec{x}) + \vec{\nabla}\phi(\vec{x}) \cdot \vec{a}$$

de forma que

$$U = q\vec{a} \cdot \vec{\nabla}\phi(\vec{x})$$

$$U = \vec{p} \cdot \nabla\phi(\vec{x})$$

o, equivalentemente

$$U = -\vec{p} \cdot \vec{E}(\vec{x})$$

5.6. Fuerza sobre un dipolo situado en un campo externo

El hecho de que el campo electrostático (y por lo tanto, la fuerza electrostática) sea conservativo, nos permite obtener la fuerza que siente un dipolo inmerso en un campo eléctrico externo \vec{E} , como el antigradiente de la energía potencial, esto es

$$\vec{F}=-\vec{\nabla}U$$

$$\vec{F}=\vec{\nabla}\left(\vec{p}\cdot\vec{E}(\vec{x})\right)$$

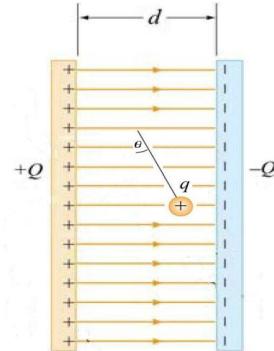
$$\vec{F}=(\vec{p}\cdot\vec{\nabla})\vec{E}(\vec{x})$$

$$83\,$$

Problema

Un pequeño objeto de masa m tiene una carga q y está suspendido por un hilo entre dos planos infinitos verticales de densidad σ y $-\sigma$. La separación entre planos es d . Si el hilo forma un ángulo ϑ con la vertical.

- ¿Cuánto vale σ ?
- ¿Cuál será la diferencia de potencial entre los planos?



Solución

a) Como se tienen 2 planos infinitos de carga, con densidad σ y $-\sigma$ respectivamente, se tendrá que el campo eléctrico es nulo fuera de la región entre planos y será uniforme como indica la figura para la región limitada por ambos. Esto es fácil de ver utilizando el principio de superposición. Si elegimos un eje horizontal, digamos, \hat{x} , y el origen sobre el plano de la izquierda, tendremos que el campo debido al plano cargado positivamente es

$$\vec{E}_1(\vec{x}) = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{i} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{i} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

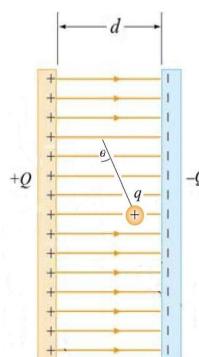
Ahora, para el plano cargado negativamente

$$\vec{E}_2(\vec{x}) = \begin{cases} -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{i} & \text{si } x > d \\ \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{i} & \text{si } x < d \end{cases}$$

El campo eléctrico total se obtiene de la suma de ambos campos, luego, es fácil ver que

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{i}$$

para la región entre planos, y es nulo fuera de ella.



Ahora, la esfera está en equilibrio, por lo que

$$F_x = -T \sin \vartheta + F_e = 0$$

En que F_e es la fuerza eléctrostática que actúa sobre la esfera.

$$F_y = T \cos \vartheta - mg = 0$$

El balance de fuerzas en el eje vertical entrega $T = mg / \cos \vartheta$. Así

$$-mgtg\vartheta + qE = 0$$

De esta forma

$$\vec{E} = \frac{mgtg\vartheta}{q} \hat{i}$$

Igualando, se obtiene que

$$\frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{mgtg\vartheta}{q}$$

de donde la densidad superficial de carga está dada por

$$\sigma = \frac{mg\epsilon_0 tg\vartheta}{q}$$

b) La diferencia de potencial entre los planos se puede obtener integrando el campo eléctrico sobre una trayectoria cualquiera entre la placa izquierda y la placa derecha. Por supuesto, elegimos una trayectoria horizontal, de manera que el campo es paralelo en todo instante a la curva

$$\phi(0) - \phi(d) = - \int_d^0 d\vec{x} \cdot \vec{E} = \int_0^d \frac{mgtg\vartheta}{q} dx = \frac{mgtg\vartheta d}{q}$$

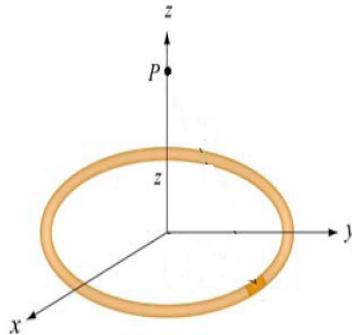
Ensayemos la interpretación física del potencial. Sabemos que si tomamos una carga unitaria y la ponemos en algún punto sobre el plano izquierdo, ésta sentirá una fuerza hacia la derecha, luego, si la soltamos, esta acelerará hasta pegarse al plano derecho. ¿Qué trabajo habrá que hacer para impedir que la carga acelere, y entonces, viaje desde 0 hasta d con velocidad constante? Justamente será

$$\phi_d - \phi_0 = - \frac{mgtg\vartheta d}{q}$$

. El signo negativo se debe a que deberíamos ejercer una fuerza contraria al movimiento de desplazamiento.

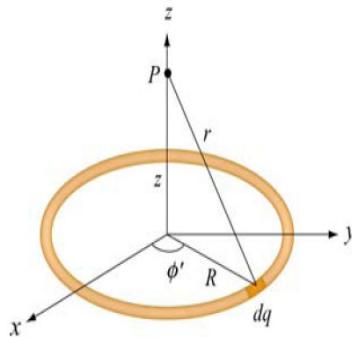
Problema

Consideré un anillo de radio R uniformemente cargado con densidad λ . ¿Cuál es el potencial electrostático a una distancia z sobre el eje del anillo?. En seguida, calcule el potencial en el eje de un anillo de radio interior a y radio exterior b y densidad σ .



Solución

Tomemos un elemento infinitesimal de longitud en el anillo $dl = Rd\phi'$, como se aprecia en la figura



Este elemento posee una carga

$$dq = d\phi' R \lambda$$

Su contribución al potencial en P es

$$d\phi(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{d\phi' R \lambda}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

Luego, el potencial debido al anillo completo está dado por

$$\phi(P) = \int_0^{2\pi} \frac{d\phi'}{4\pi\epsilon_0} \frac{R\lambda}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

$$\phi(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi R \lambda}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

notar que $Q = 2\pi R \lambda$ es la carga total del anillo, luego

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

Es fácil ver que si $z \gg R$, se tiene el potencial de una carga puntual

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{|z|}$$

Ahora, el campo eléctrico en el punto P se puede obtener a partir del potencial como

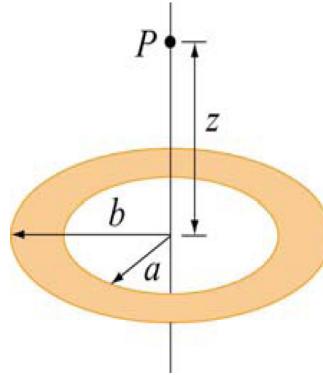
$$\vec{E}(P) = -\vec{\nabla}\phi(P)$$

Sin embargo, para evaluar $\vec{\nabla}\phi$ es necesario conocer $\phi(x, y, z)$. Aún así, veamos que sucede con

$$\begin{aligned} -\frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{k} \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2z\pi R\lambda}{(R^2 + z^2)^{3/2}}\hat{k} = \vec{E}(P) \end{aligned}$$

y se recupera el resultado obtenido anteriormente para el campo en el eje. ¿Qué nos dice esto acerca de las derivadas parciales con respecto a x e y del potencial en un punto de la forma $(0, 0, z)$?

Ahora, para obtener el potencial de un disco de radios a y b , simplemente se considera la superposición de anillos infinitesimales



Tomamos un anillo de radio r y ancho infinitesimal dr , sabemos que el potencial en el eje está dado por

$$d\phi(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ}{\sqrt{r^2 + z^2}}$$

donde $dQ = \sigma 2\pi r dr$ es la carga que contiene ese anillo

Luego

$$d\phi(P) = \frac{2\pi\sigma}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{\sqrt{r^2 + z^2}}$$

Y el potencial es

$$\phi(P) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_a^b \frac{dr}{\sqrt{r^2 + z^2}}$$

Sea $u = r^2 + z^2$, con esto $du = 2rdr$, y por lo tanto

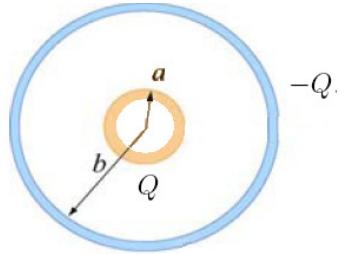
$$\int \frac{dr}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^{1/2}} = u^{1/2} = \sqrt{r^2 + z^2}$$

Finalmente

$$\phi(P) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{b^2 + z^2} - \sqrt{a^2 + z^2} \right)$$

Problema

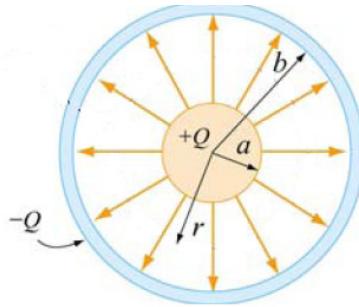
Considera dos cascarones esféricos de radios a y b ($a < b$), el cascarón interior tiene densidad superficial de carga constante Q y el exterior $-Q$. Encuentre la diferencia de potencial entre el cascarón b y el a



Solución

El campo eléctrico en todo el espacio (de existir) es esféricamente simétrico. Lo mismo sucede con el potencial, que será constante en una superficie esférica. Lo que se pide es

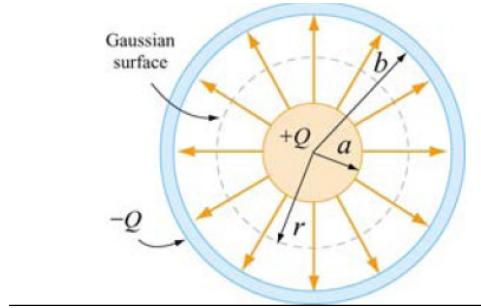
$$\Delta V = \phi(b) - \phi(a)$$



Se debe evaluar entonces

$$\phi(b) - \phi(a) = - \int_a^b d\vec{x} \cdot \vec{E}(\vec{x})$$

Para evaluar la integral, claramente debemos encontrar $\vec{E}(\vec{x})$ y elegir un camino desde a a b . Utilizamos una superficie Gaussiana S esférica de radio r , con $a < r < b$, como muestra la figura



Por ley de Gauss

$$\oint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') = E(r)4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Luego, en la región entre los dos cascarones

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

Dada la forma del campo, resulta inteligente elegir un camino radial

$$\Gamma : \vec{x} = r\hat{r}$$

$$r : a \rightarrow b$$

Luego

$$d\vec{x} = dr\hat{r}$$

y

$$d\vec{x} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = dr \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Entonces

$$\phi(b) - \phi(a) = - \int_a^b \frac{dr Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{dr}{r^2}$$

$$\phi(b) - \phi(a) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{dr}{r^2} = - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \Big|_a^b$$

$$\Delta V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right)$$

Notar que

$$\phi(b) - \phi(a) < 0 \rightarrow \phi(b) < \phi(a)$$

Es decir, cuesta más trabajo llevar una carga a a que a b desde el infinito

Problema

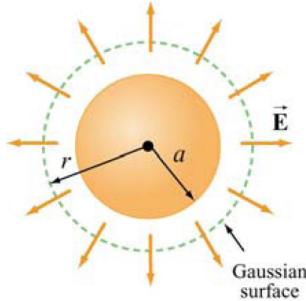
Consideré la siguiente distribución de carga en coordenadas polares esféricas

$$\rho(r) = Cr^\lambda, r < a$$

Encuentre $\phi(r)$ tomando como punto de referencia el infinito

Solución

Encontremos primero el campo eléctrico. Se tiene una distribución esféricamente simétrica de carga (la densidad sólo es función de la variable r). Por lo mismo, podemos encontrar el campo por ley de Gauss, utilizando una superficie esférica de radio $r > a$ concéntrica al centro de la distribución



$$\oint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') = 4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

la carga encerrada por S está dada por la siguiente integral

$$Q_{int} = \iiint_{V(S)} d^3x' \rho(\vec{x}') = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \int_0^a dr r^2 \sin \vartheta C r^\lambda$$

$$Q_{int} = \frac{4\pi C}{\lambda + 3} a^{\lambda+3} = Q$$

luego

$$\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}, r > a$$

Si ahora se utiliza una superficie esférica de radio $r < a$, la carga interior será

$$q_{int} = \frac{4\pi C}{\lambda + 3} r^{\lambda+3}$$

Luego, el campo interior tiene la forma

$$\vec{E}(r) = \frac{C}{\lambda + 3} r^{\lambda+1} \hat{r}$$

Para evaluar $\phi(r)$ debemos calcular

$$\phi(r) = - \int_r^\infty d\vec{x} \cdot \vec{E}(\vec{x})$$

Hay que tener cuidado al realizar este cálculo si $r > a$ o $r < a$.

i) Potencial exterior $r > a$

$$\phi(r) = - \int_r^\infty d\vec{x} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \int_r^\infty d\vec{x} \cdot \vec{E}(\vec{x})$$

Por comodidad elegimos un camino radial

$$\vec{x} = r'\hat{r}$$

$$r' : r \rightarrow \infty$$

$$d\vec{x} = dr'\hat{r}$$

Luego

$$d\vec{x} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = dr' \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r'^2}$$

$$\phi(r) = \int_r^\infty \frac{dr' Q}{4\pi\epsilon_0 r'^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r'} \right) \Big|_r^\infty$$

entonces

$$\phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}, r \geq a$$

$$\phi(r) = \frac{Ca^{\lambda+3}}{(\lambda+3)\epsilon_0 r}, r \geq a$$

ii) Si $r < a$

$$\phi(r) = \int_r^\infty d\vec{x} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \int_r^a d\vec{x} \cdot \vec{E} + \int_a^\infty d\vec{x} \cdot \vec{E}(\vec{x})$$

la segunda integral se obtiene al evaluar $\phi(r) \Big|_{r=a}$ con $\phi(r)$ el potencial exterior encontrado anteriormente. La primera integral resulta (tomando un camino radial)

$$\vec{x} = r'\hat{r}$$

$$r' : r \rightarrow a$$

$$d\vec{x} = dr'\hat{r}$$

$$\vec{E} \cdot \vec{x} = dr' \frac{C}{\lambda+3} r'^{\lambda+1}$$

$$\int_r^a d\vec{x} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \frac{C}{\lambda+3} \int_r^a dr' r'^{\lambda+1} = \frac{C}{\lambda+3} \frac{r'^{\lambda+2}}{\lambda+2} \Big|_r^a$$

$$\int_r^a d\vec{x} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \frac{Ca^{\lambda+2}}{(\lambda+3)(\lambda+2)} - \frac{Cr^{\lambda+2}}{(\lambda+3)(\lambda+2)} = \frac{C}{\lambda^2+5\lambda+6} (a^{\lambda+2} - r^{\lambda+2})$$

la segunda integral es

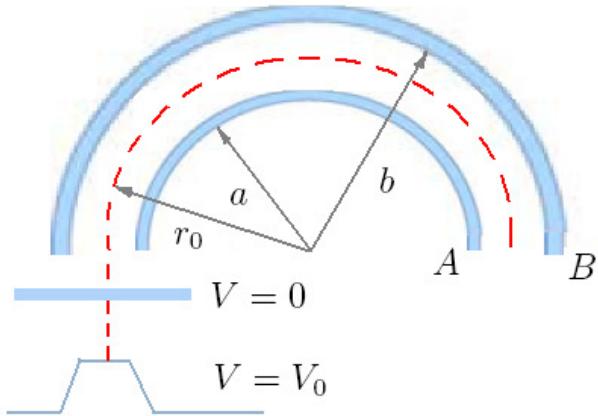
$$\int_a^\infty d\vec{x} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \frac{C}{\epsilon_0 a} \frac{a^{\lambda+2}}{\lambda+3} = \frac{Ca^{\lambda+1}}{\epsilon_0(\lambda+3)}$$

Finalmente, para $r < a$

$$\phi(r) = \frac{Ca^{\lambda+1}}{\epsilon_0(\lambda+3)} + \frac{C}{\lambda^2 + 5\lambda + 6} (a^{\lambda+2} - r^{\lambda+2})$$

Problema

Iones de carga q son acelerados desde el reposo hasta una diferencia de potencial ΔV_0 , para luego entrar a una región entre dos electrodos cilíndricos muy largos A y B , de radios a y b respectivamente ($a < b$). El ión recorre media circunferencia de radio r_0 describiendo una trayectoria circular. Despreciando los efectos de borde y asumiendo que los cilindros son muy largos en comparación al espacio que los separa, encuentre la diferencia de potencial ΔV_{BA}



Solución

Primero debemos encontrar la velocidad con la que los iones ingresan a la región entre cilindros. Éstos son acelerados a partir del reposo desde una región a potencial $\phi = V_0$ hasta una región a potencial $\phi = 0$. La energía inicial está dada por

$$E_1 = qV_0$$

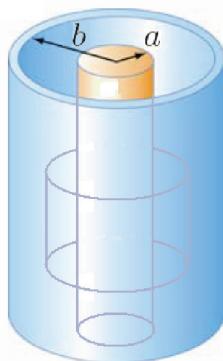
la energía final (justo antes de ingresar entre los electrodos)

$$E_2 = \frac{1}{2}mv^2$$

Por conservación de la energía

$$E_1 = E_2 \rightarrow v^2 = \frac{2qV_0}{m}$$

Ahora, dentro de la región entre cilindros existe un campo eléctrico radial que se puede obtener con la ley de Gauss



Utilizando una superficie cilíndrica de radio r ($a < r < b$) y altura h , se tiene

$$\iint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') = 2\pi rhE(r) = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$$

donde la carga encerrada por la superficie S es

$$q_{in} = \sigma 2\pi ha$$

σ es la densidad superficial de carga sobre el cilindro de radio a . De aquí

$$2\pi rhE(r) = \frac{\sigma h 2\pi a}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E}(r) = \frac{\sigma a}{\epsilon_0 r} \hat{r}$$

En particular

$$\vec{E}(r_0) = \frac{\sigma a}{\epsilon_0 r_0} \hat{r}$$

Este campo es por supuesto el responsable de la fuerza que siente un ión (en dirección radial), y que permite la trayectoria circular. El equilibrio de fuerzas en la dirección radial sobre un Ión de carga q es

$$q\vec{E}(r_0) = q \frac{\sigma a}{\epsilon_0 r_0} \hat{r} = -m \frac{v^2}{r_0} \hat{r}$$

de donde

$$q \frac{\sigma a}{\epsilon_0 r_0} = -m \frac{2qV_0}{mr_0}$$

la densidad superficial de carga sobre el cilindro A resulta ser

$$\sigma = -\frac{2\epsilon_0 V_0}{a}$$

y el campo eléctrico queda, para r , $a < r < b$

$$\vec{E}(r) = \frac{\sigma a}{\epsilon_0 r} \hat{r} = -\frac{2\epsilon_0 V_0}{a} \frac{a}{\epsilon_0 r} \hat{r}$$

$$\vec{E}(r) = -2 \frac{V_0}{r} \hat{r}$$

La diferencia de potencial entre los cilindros es

$$\Delta V = \phi(b) - \phi(a) = - \int_a^b d\vec{x} \cdot \vec{E}(\vec{x})$$

tomando un camino radial

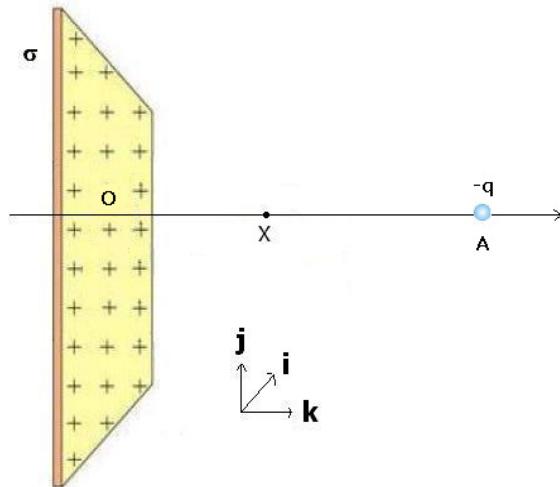
$$\Delta V = - \int_a^b dr \cdot \vec{E}(r) = - \int_a^b dr \left(-\frac{2V_0}{r} \right) = 2V_0 \int_a^b \frac{dr}{r}$$

$$\Delta V = \phi(b) - \phi(a) = 2V_0 \ln(b/a)$$

Problema

Un plano infinito y uniforme de carga eléctrica con densidad σ pasa por un punto O . Por O hay una recta OX que es perpendicular al plano. A distancia a de O se encuentra una carga eléctrica puntual $-q$.

- Calcule el potencial eléctrico resultante en un punto $P(x)$ cualquiera entre A y O
- Una partícula de masa m y carga eléctrica $-e$ se libera desde el punto medio entre O y A . ¿Con qué velocidad choca contra el plano de carga?



Solución

Para calcular el potencial en el eje \hat{x} podemos primero calcular el campo eléctrico. Naturalmente, éste se puede obtener fácilmente por superposición. Sea \vec{E}_1 el campo eléctrico debido al plano infinito, sabemos que éste es uniforme y no depende de la distancia al plano. Para $x > 0$ es

$$\vec{E}_1(x) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{i}$$

Podemos obtener el potencial asociado al plano integrando el campo eléctrico sobre una trayectoria horizontal que pasa por Ox , entre $\vec{x}_1 = x\hat{i}$ y $\vec{x}_2 = R\hat{i}$ ($R > x$)

$$\begin{aligned}\phi_1(x) - \phi_1(R) &= \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} d\vec{x}' \cdot \vec{E}(\vec{x}') = \int_x^R dx' \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \\ \phi_1(x) &= \phi_1(R) + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} R - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} x\end{aligned}$$

El potencial en un punto x debido a la carga puntual $-q$ está dado por

$$\phi_2(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-q}{|a-x|}$$

por el principio de superposición

$$\phi(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-q}{|a-x|} + \phi_1(R) + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} R - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} x$$

b) Si colocamos una partícula de masa m y carga $-e$, ésta sentirá una fuerza que la acelerará en la dirección $-\hat{i}$. En teoría, una vez que se mueve la carga ocurren fenómenos complejos que no estamos considerando en el caso estático. Suponiendo que podemos despreciar estos efectos, y utilizar las leyes estáticas, la energía debe conservarse (campo electrostático es conservativo)

$$U(a/2) = U(0) + \frac{1}{2}mv_f^2$$

$$-e\phi(a/2) = -e\phi(0) + \frac{1}{2}mv_f^2$$

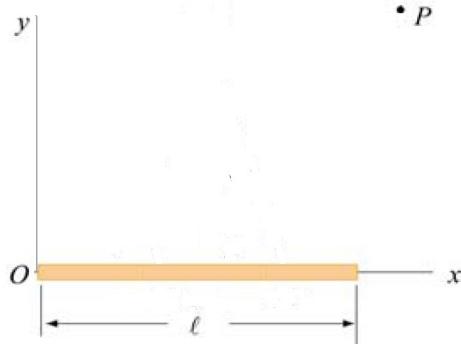
$$v_f^2 = \frac{2e}{m} (\phi(0) - \phi(a/2))$$

$$v_f^2 = \frac{2e}{m} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-q}{a} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-2q}{a} + \frac{\sigma}{4\epsilon_0} a \right)$$

$$v_f^2 = \frac{2e}{m} \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{\sigma a}{4\epsilon_0} \right)$$

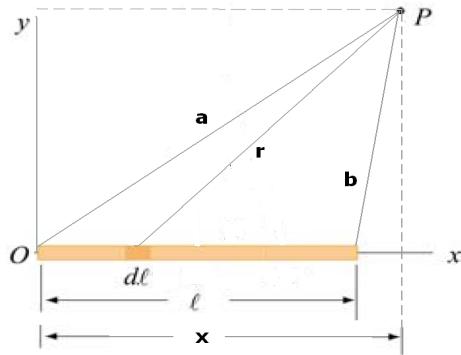
Problema

Una varilla delgada de longitud L tiene una carga uniforme definida por su densidad lineal λ . Calcular el potencial en un punto cualquiera del espacio que lo rodea



Solución

Sea P un punto de coordenadas (x, y) . Tomemos un elemento diferencial de longitud en la barra, a una distancia l del origen, como se aprecia en la figura



La contribución de este elemento infinitesimal al potencial en P es

$$d\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dl\lambda}{r}$$

y $r = \sqrt{(x - l)^2 + y^2}$. Con esto

$$\phi(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^L \frac{dl\lambda}{\sqrt{(x - l)^2 + y^2}}$$

Sea $t = x - l$, con lo que $dt = -dl$, así

$$\phi(P) = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_x^{x-L} \frac{dt\lambda}{\sqrt{t^2 + y^2}}$$

Aquí es inmediato que se usa la sustitución $t = y \tan \vartheta$, luego $dt = y \sec^2 \vartheta d\vartheta$. Con esto tenemos

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + y^2}} = \int \frac{d\vartheta \sec^2 \vartheta y}{\sqrt{y^2(1 + \tan^2 \vartheta)}} = \int d\vartheta \sec \vartheta$$

Y esta integral es muy familiar y vale

$$\int d\vartheta \sec \vartheta = \ln(\sec \vartheta + \tan \vartheta)$$

$$\text{Ahora, } \tan\vartheta = \frac{t}{y} \text{ y } \sec\vartheta = \frac{\sqrt{t^2+y^2}}{y}$$

Con todo esto, tenemos

$$\begin{aligned}\phi(P) &= -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} (\ln(t + \sqrt{t^2 + y^2})) \Big|_x^{x-L} \\ \phi(P) &= -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left(\ln(x + \sqrt{x^2 + y^2}) - \ln(x - L + \sqrt{(x - L)^2 + y^2}) \right)\end{aligned}$$

Finalmente

$$\phi(P) = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{(x - L + \sqrt{(x - L)^2 + y^2})} \right)$$

y llamando

$$\begin{aligned}a &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ b &= \sqrt{(x - L)^2 + y^2}\end{aligned}$$

$$\phi(P) = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{x + a}{(x - L + b)} \right)$$

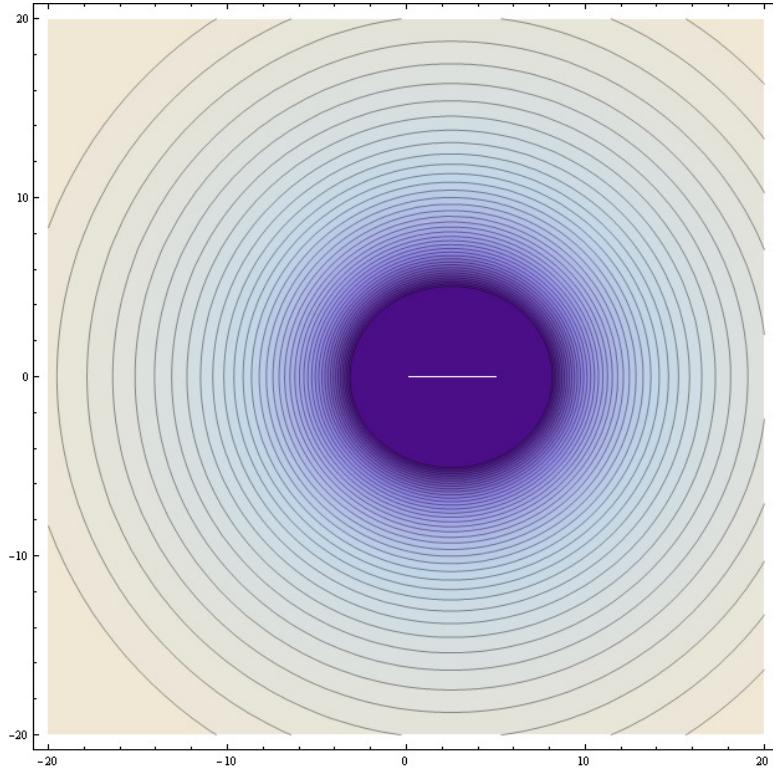


Fig. 5.2: La figura muestra las curvas equipotenciales del alambre de carga

Problema

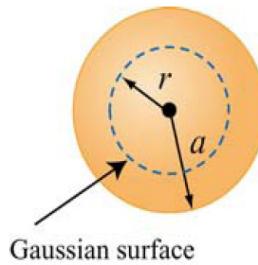
Encuentre el potencial dentro y fuera de una esfera sólida cargada uniformemente cuyo radio es R y su carga total es Q . Use infinito como punto de referencia.

Solución

Para encontrar el potencial en todo el espacio, se puede determinar primeramente el campo eléctrico debido a la distribución esférica de carga. Considerando el origen en el centro de la esfera, por argumentos de simetría es fácil ver que el campo eléctrico debe ser radial y su magnitud una función de la distancia r al origen.

Campo interior

Ahora, para el campo interior, se elige una superficie de Gauss esférica y de radio $r < R$, como se aprecia en la figura



Luego, utilizamos la ley de Gauss para obtener el campo eléctrico

$$\iint_S d\vec{S} \cdot \vec{E}(r) = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$$

donde $\vec{E} = E(r)\hat{r}$ y $d\vec{S} = dS\hat{r}$, luego la integral de flujo del campo eléctrico es, simplemente

$$\iint_S d\vec{S} \cdot \vec{E}(r) = \iint_S dSE(r)\hat{r} \cdot \hat{r} = \iint_S dSE(r)$$

Como en la superficie S el radio r es constante

$$\iint_S dSE(r) = E(r) \iint_S dS = E(r)4\pi r^2$$

Por otra parte, la carga encerrada por la superficie de Gauss es

$$q_{in} = \iiint_{V(S)} d^3x' \rho(\vec{x}')$$

como la esfera está cargada uniformemente, su densidad volumétrica de carga es

$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{3Q}{4\pi R^3}$$

De esta forma, y considerando $d^3x' = r^2 \sin\vartheta dr d\vartheta d\phi$

$$q_{in} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\vartheta \sin\vartheta \int_0^r dr r^2 \rho$$

$$q_{in} = 4\pi\rho \int_0^r dr r^2 = 4\pi\rho \frac{1}{3}r^3 = \frac{Qr^3}{R^3}$$

Finalmente, la ley de Gauss queda

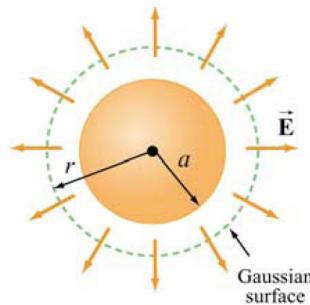
$$E(r)4\pi r^2 = \frac{Qr^3}{\epsilon_0 R^3}$$

de donde, para $r < R$

$$E(r) = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$

Campo exterior

Ahora, para obtener el campo exterior, se construye una superficie de Gauss esférica y ahora de radio $r > R$



El flujo eléctrico sobre esta superficie es, de manera análoga al caso anterior

$$\oint_S d\vec{S} \cdot \vec{E} = E(r)4\pi r^2$$

mientras que la carga encerrada en este caso está dada por

$$q_{in} = Q$$

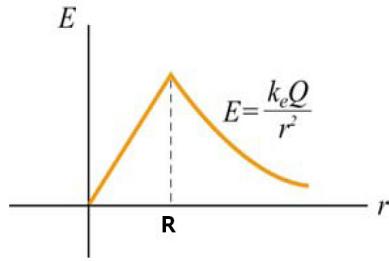
Con esto

$$E(r)4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

En resumen, se tiene

$$\vec{E}(\vec{x}) = \begin{cases} \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} \hat{r} & \text{si } |\vec{x}| \leq R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} & \text{si } |\vec{x}| > R \end{cases}$$



Notar que el campo es continuo al atravesar un volumen cargado, pero no es diferenciable

Potencial exterior

Ahora, para obtener el potencial electrostático, calculamos la integral de línea

$$\phi(r) = - \int_{\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

a lo largo de una trayectoria radial. Luego $d\vec{r} = dr \hat{r}$, así, para $r > R$

$$\begin{aligned} \phi(r) &= - \int_{\infty}^r E(r) dr \\ \phi(r) &= - \int_{\infty}^r dr \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^r dr \frac{1}{r^2} \\ \phi(r) &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \end{aligned}$$

Potencial interior

Ahora, para $r < R$, tenemos

$$\begin{aligned} \phi(r) &= - \int_{\infty}^R dr E(r) - \int_R^r dr E(r) \\ \phi(r) &= - \int_{\infty}^R dr \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} - \int_R^r dr \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} \\ \phi(r) &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \int_R^r dr r \\ \phi(r) &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{Q(R^2 - r^2)}{8\pi\epsilon_0 R^3} \\ \phi(r) &= \frac{Q(3R^2 - r^2)}{8\pi\epsilon_0 R^3} \end{aligned}$$

$$\phi(r) = \begin{cases} \frac{Q(3R^2 - r^2)}{8\pi\epsilon_0 R^3} & \text{si } r \leq R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} & \text{si } r > R \end{cases}$$

Problema

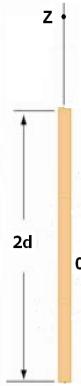
Un alambre cuya densidad lineal de carga es λ se extiende en el eje z desde $z = -d$ hasta $z = d$.

- Calcule el potencial en un punto $z > d$ sobre el eje del alambre
- Cuál es el cambio de energía potencial de un electrón si se mueve de $z = 4d$ hasta $z = 3d$?
- Si el electrón parte del reposo desde $z = 4d$, cuál es su velocidad en $z = 3d$?

Observación: No considere efectos gravitacionales

Solución Problema 2

- Tomamos un elemento diferencial de longitud dl a una distancia l del origen:



El potencial a una distancia $z > d$ sobre el eje del alambre debido a este elemento infinitesimal de carga está dado por

$$d\phi(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{(z-l)}$$

donde $dq = dl\lambda$

$$\begin{aligned} d\phi(z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{(z-l)} \\ d\phi(z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dl\lambda}{(z-l)} \end{aligned}$$

con esto, el potencial total está dado por

$$\phi(z) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-d}^d \frac{dl}{(z-l)}$$

sea $u = z - l$, luego $du = -dl$

$$\begin{aligned} \phi(z) &= -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{z+d}^{z-d} \frac{du}{u} \\ \phi(z) &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{z+d}{z-d} \right) \end{aligned}$$

b) Un electrón se mueve desde $z = 4d$ hasta $z = 3d$, luego, su cambio en energía potencial está dado por

$$\Delta U = U(4d) - U(3d) = -e(\phi(4d) - \phi(3d)) = e\phi(3d) - e\phi(4d)$$

$$\Delta U = e \left(\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln 2 - \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{5}{3} \right) \right)$$

$$\Delta U = e \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{6}{5} \right)$$

c) Por conservación de la energía

$$U(4d) + K(4d) = U(3d) + K(3d)$$

como el electrón parte del reposo, $K(4d) = 0$, luego

$$U(4d) = U(3d) + K(3d)$$

$$U(4d) - U(3d) = K(3d)$$

luego, el cambio de energía potencial calculado en la parte b) es equivalente a la energía cinética que adquiere el electrón

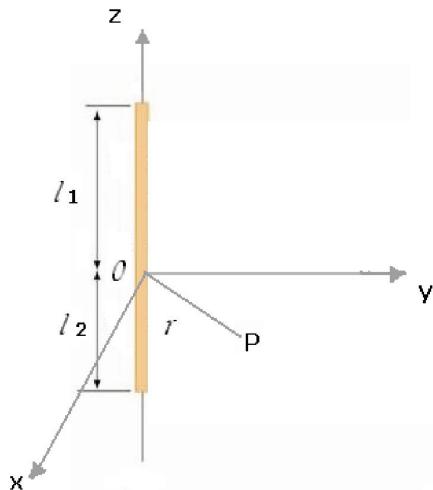
$$K(3d) = \Delta U = e \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{6}{5} \right)$$

$$\frac{mv^2}{2} = e \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{6}{5} \right)$$

$$v = \sqrt{e \frac{2\lambda}{4\pi\epsilon_0 m} \ln \left(\frac{6}{5} \right)}$$

Problema

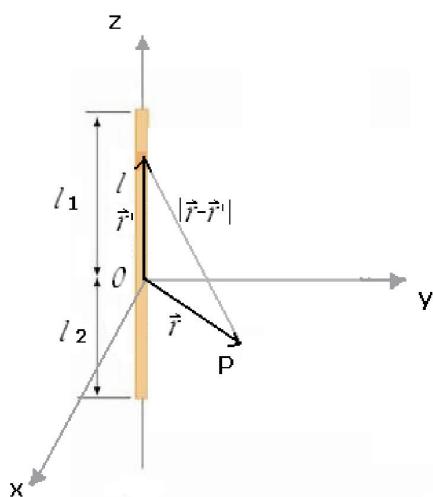
Se tiene una distribución rectilínea de carga de densidad λ homogénea. Un punto P está a una distancia r de la distribución, y su proyección sobre la recta de carga está a las distancias l_1 y l_2 de sus extremos.



- Calcule el campo eléctrico en P
- Vea que sucede cuando r es mucho mayor que l_1 y l_2
- Haga una aproximación para los casos en que r es mucho menor que l_1 y l_2 . ¿Qué ocurre cuando l_1 y l_2 tienden a infinito? Compruebe su resultado con Ley de Gauss
- Obtenga el potencial en el punto P debido a un alambre infinito de carga

Solución

- Tomemos un elemento diferencial de longitud, a una distancia l del origen, como se aprecia en la figura



De la Ley de Coulomb, este elemento diferencial de carga crea un campo eléctrico en P que está dado por

$$d\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq(\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$$

En este caso, tenemos

$$\vec{x} = r\hat{r}$$

donde \hat{r} es el vector radial en coordenadas cilíndricas que apunta desde el origen hasta el punto P . Además

$$\vec{x}' = l\hat{k}$$

Luego

$$\vec{x} - \vec{x}' = r\hat{r} - l\hat{k}$$

$$| \vec{r} - \vec{r}' | = \sqrt{r^2 + l^2}$$

De esta forma , la contribución del elemento diferencial al campo es

$$d\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl(r\hat{r} - l\hat{k})}{(r^2 + l^2)^{3/2}}$$

Utilizando el principio de superposición, el campo total en P será la suma de todas las contribuciones infinitesimales de la distribución, esto es

$$\vec{E}(P) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left(r\hat{r} \int_{-l_2}^{l_1} \frac{dl}{(l^2 + r^2)^{3/2}} - \hat{k} \int_{-l_2}^{l_1} \frac{l dl}{(l^2 + r^2)^{3/2}} \right)$$

Ahora, la integral

$$\int \frac{l dl}{(r^2 + l^2)^{3/2}}$$

se resuelve con la sustitución $u = r^2 + l^2$, luego $du = 2l dl$, con esto

$$\int \frac{l dl}{(r^2 + l^2)^{3/2}} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^{3/2}} = -\frac{1}{u^{1/2}} = -\frac{1}{\sqrt{r^2 + l^2}}$$

y la integral

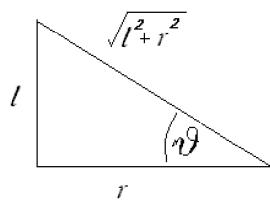
$$\int \frac{dl}{(r^2 + l^2)^{3/2}}$$

se resuelve con la sustitución trigonométrica $l = rtan\vartheta$, así $dl = rsec^2\vartheta d\vartheta$

$$\int \frac{dl}{(r^2 + l^2)^{3/2}} = \int \frac{d\vartheta rsec^2\vartheta}{(r^2 + r^2tan^2\vartheta)^{3/2}} = \int \frac{d\vartheta rsec^2\vartheta}{r^3 sec^3\vartheta}$$

$$\int \frac{l dl}{(r^2 + l^2)^{3/2}} = \int \frac{d\vartheta}{r^2 sec\vartheta} = \frac{1}{r^2} sin\vartheta$$

Ahora, de la figura vemos que $sin\vartheta = \frac{l}{\sqrt{r^2 + l^2}}$



luego

$$\int \frac{ldl}{(r^2 + l^2)^{3/2}} = \frac{1}{r^2} \frac{l}{\sqrt{r^2 + l^2}}$$

Con esto, el campo total en P es

$$\vec{E}(P) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left(r\hat{r} \frac{1}{r^2} \frac{l}{\sqrt{r^2 + l^2}} \Big|_{-l_2}^{l_1} + \hat{k} \frac{1}{\sqrt{r^2 + l^2}} \Big|_{-l_2}^{l_1} \right)$$

$$\vec{E}(P) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} \hat{r} \left(\frac{l_1}{\sqrt{r^2 + l_1^2}} + \frac{l_2}{\sqrt{r^2 + l_2^2}} \right) + \hat{k} \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + l_1^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + l_2^2}} \right) \right)$$

b) En el límite cuando $r \gg l_1$ y $r \gg l_2$, se tiene que (a cero orden)

$$\sqrt{r^2 + l_1^2} \approx \sqrt{r^2 + l_2^2} \approx r$$

Luego el campo queda

$$\vec{E}(P) \approx \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} \hat{r} \left(\frac{l_1}{r} + \frac{l_2}{r} \right) + \hat{k} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r} \right) \right)$$

$$\vec{E}(P) \approx \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} \frac{l_1 + l_2}{r} \hat{r}$$

pero $\lambda(l_1 + l_2)$ no es más que la carga total contenida en la distribución, digamos, q , luego el campo toma la forma

$$\vec{E} \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

que es el campo de una carga puntual

c) Ahora, en el límite cuando $l_1 \gg r$ y $l_2 \gg r$, se tiene que

$$\sqrt{r^2 + l_1^2} \approx l_1$$

$$\sqrt{r^2 + l_2^2} \approx l_2$$

y el campo queda

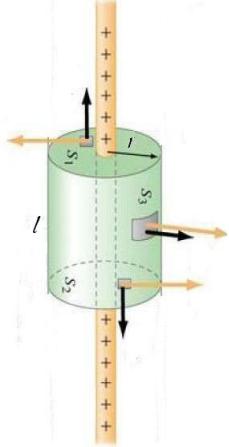
$$\vec{E}(P) \approx \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2}{r} \hat{r} + \hat{k} \left(\frac{1}{l_1} - \frac{1}{l_2} \right) \right)$$

y si $l_1 \rightarrow \infty$, $l_2 \rightarrow \infty$, se tiene

$$\vec{E}(P) \approx \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{r}$$

que es el campo eléctrico de un alambre infinito de carga.

Comprobemos este último resultado con la Ley de Gauss. Tomando como superficie Gaussiana un cilindro de radio r y cuyo eje de simetría coincide con el de la distribución lineal de carga



Es claro que debido a que la distribución es infinita, el campo posee una simetría cilíndrica, luego el campo es radial y depende únicamente de la distancia r . Con esto, no hay flujo por las tapas del cilindro, y en el manto el campo eléctrico es siempre normal a la superficie y de magnitud constante, luego

$$\iint_S d\vec{S} \cdot d\vec{E} = \iint_{mant} dS \hat{r} E(r) \hat{r} = E(r) \iint_{mant} dS = E(r) 2\pi r l$$

la carga encerrada por este cilindro es $q_{in} = \lambda l$, luego

$$E(r) 2\pi r l = \frac{\lambda l}{\epsilon_0}$$

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0}$$

El mismo resultado obtenido anteriormente

d) El campo del alambre infinito está dado por

$$\vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0} \hat{r}$$

Sabemos que en electrostática se cumple

$$\vec{E}(r) = -\vec{\nabla}\phi(r)$$

Debido a la simetría, el potencial será sólo función de r , luego

$$\vec{\nabla}\phi(r) = \frac{d\phi}{dr} \hat{r}$$

con esto

$$V(r) = - \int dr E(r) + C$$

$$V(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r + C$$

Donde C es una constante arbitraria. Notar que el potencial diverge en el infinito, ésto debido a que la carga eléctrica total **no es finita**. (Sólo en esos casos podemos fijar el potencial igual a cero en infinito)

Notar que las superficies equipotenciales son cilindros de radio r , y que para $r = 1$

$$\phi(1) = C$$

Luego la constante C no es más que el potencial de todos los puntos que están sobre el manto de cilindro de radio unitario! Así

$$\phi(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r + V(1)$$

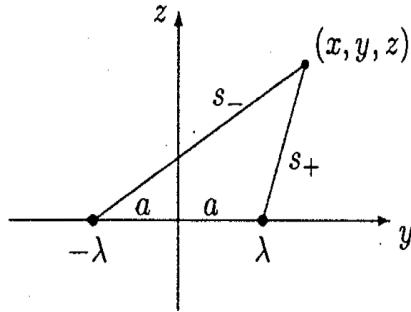
Problema

Dos cables infinitos paralelos al eje X poseen densidad de carga uniforme λ y $-\lambda$. Ellos están a distancia a del origen.

- Encuentre el potencial en un punto (x, y, z) usando el origen como punto de referencia.
- Demuestre que las superficies equipotenciales son cilindros circulares

Solución

a) Tenemos dos alambres infinitos cada uno a distancia a del origen, como se aprecia en la figura (notar que el eje X sale de la página)



Por el principio de superposición, el potencial total en el punto P será la suma de los potenciales debidos a cada distribución individual. El potencial debido al alambre de densidad λ es

$$\phi_1(P) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln s_+ + C_1$$

y el potencial debido al alambre de densidad $-\lambda$ es

$$\phi_2(P) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln s_- + C_2$$

Ahora, como nos piden que la referencia sea el origen, las constantes C_1 y C_2 deben satisfacer

$$\phi_1(a) = 0 = \phi_2(a)$$

Con esto

$$\phi_1(a) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln a + C_1 = 0 \rightarrow C_1 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln a$$

$$\phi_2(a) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln a + C_2 = 0 \rightarrow C_2 = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln a$$

Notar que $C_1 + C_2 = 0$.

El potencial en el punto P es

$$\phi(P) = \phi_1(P) + \phi_2(P) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln s_+ + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln s_-$$

Si $P = (x, y, z)$, entonces

$$s_+ = \sqrt{(y-a)^2 + z^2}$$

$$s_+ = \sqrt{(y+a)^2 + z^2}$$

Finalmente, el potencial es

$$\phi(P) = +\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(\sqrt{(y+a)^2 + z^2}) - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(\sqrt{(y-a)^2 + z^2})$$

$$\phi(P) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{\sqrt{(y+a)^2 + z^2}}{\sqrt{(y-a)^2 + z^2}} \right)$$

$$\phi(P) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{(y+a)^2 + z^2}{(y-a)^2 + z^2} \right)$$

b) Las superficies equipotenciales están dadas por

$$\frac{(y+a)^2 + z^2}{(y-a)^2 + z^2} = k$$

donde k es una constante. Esto equivale a

$$(y+a)^2 + z^2 = k((y-a)^2 + z^2)$$

$$y^2 + 2ay + a^2 + z^2 = k(y^2 - 2ay + a^2 + z^2)$$

O equivalentemente

$$y^2(k-1) + z^2(k-1) + a^2(k-1) - 2ay(k+1) = 0$$

Dividiendo por $k-1$

$$y^2 + z^2 + a^2 - 2ay \frac{k+1}{k-1} = 0$$

Notar que la ecuación de una circunferencia con centro en y_0 y radio R es

$$(y - y_0^2) + z^2 = R^2$$

$$y^2 + z^2 - 2yy_0 + (y_0^2 - R^2) = 0$$

De aquí es claro que en planos perpendiculares a los alambres, las equipotenciales son circunferencias con

$$y_0 = a \frac{k+1}{k-1}$$

Despejando se obtiene que

$$R = \frac{2a\sqrt{k}}{|k - 1|}$$

En definitiva las superficies equipotenciales son cilindros

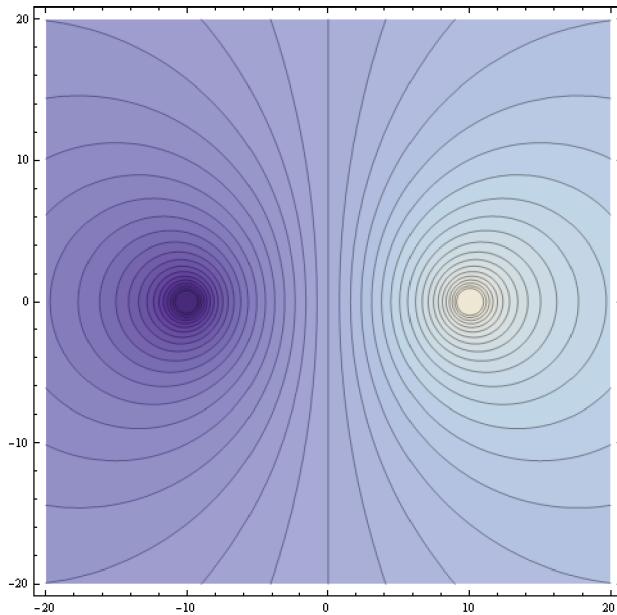
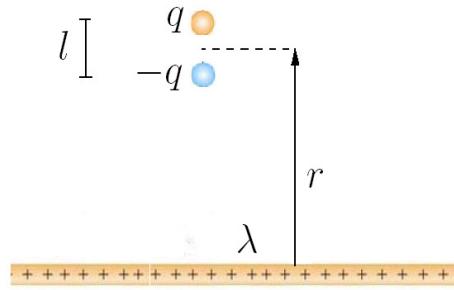


Fig. 5.3: Equipotenciales en plano $y - z$ son curvas circulares

Problema

Un dipolo con momento dipolar \vec{p} se localiza a una distancia r de una barra muy delgada con largo infinito y homogéneamente cargada con densidad lineal de carga $\lambda > 0$. Asuma que el dipolo está orientado con el campo eléctrico debido a la barra cargada como muestra la figura



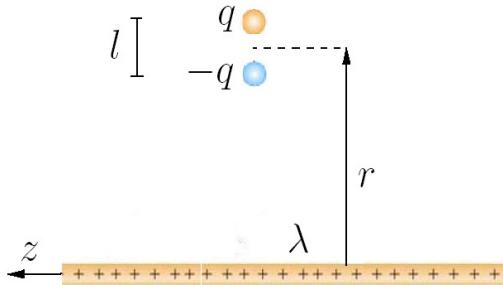
- Suponiendo que la separación fija l entre las cargas que conforman el dipolo es tal que $l \ll r$, determine la fuerza sobre el dipolo, a primer orden en l/r
- Partiendo de la respuesta del inciso anterior, demuestre que la fuerza sobre el dipolo puede ser escrita como

$$\vec{F}(\vec{x}) = (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}(\vec{x})$$

(válido para un dipolo puntual)

Solución

Ya fue obtenido anteriormente el campo eléctrico de una distribución lineal de carga muy larga y de densidad λ . Definiendo un sistema de coordenadas cilíndricas, donde el eje z coincide con el eje de la barra, como se ve en la figura



El campo eléctrico creado por la barra está dado por

$$\vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{r}$$

La fuerza sobre el dipolo está dada por

$$\vec{F} = q\vec{E}(r + l/2) - q\vec{E}(r - l/2) = q(E(r + l/2) - E(r - l/2)) \hat{r}$$

$$\vec{F} = \frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r + l/2} - \frac{1}{r - l/2} \right) \hat{r}$$

$$\vec{F} = \frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \left(\frac{1}{1 + \frac{l}{2r}} - \frac{1}{1 - \frac{l}{2r}} \right) \hat{r}$$

$$\vec{F} = \frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \left(\left(1 + \frac{l}{2r}\right)^{-1} - \left(1 - \frac{l}{2r}\right)^{-1} \right) \hat{r}$$

Recordar la expansión a primer orden de $(1+x)^n$, buena aproximación cuando $x \ll 1$

$$(1+x)^n \approx 1 + nx$$

De esta forma, la fuerza se puede aproximar (en primer orden de l/r)

$$\vec{F} \approx \frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \left(1 - \frac{l}{2r} - \left(1 + \frac{l}{2r}\right) \right) \hat{r}$$

$$\vec{F} \approx \frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \left(-\frac{l}{r} \right) \hat{r}$$

$$\vec{F} \approx \frac{-ql\lambda}{2\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} = \frac{-p\lambda}{2\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

donde p es la magnitud del momento dipolar del dipolo

b) Notar que si $l \ll r$, se espera obtener para la fuerza el resultado que se obtuvo para el dipolo puntual

$$\vec{F}(\vec{x}) = \left(\vec{p} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{E}(\vec{x})$$

Utilizando coordenadas cilíndricas, y recordando la naturaleza radial del campo eléctrico

$$\vec{F}(r) = \left(\vec{p} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{E}(r) = \left(p\hat{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \hat{r} \right) \vec{E}(r)$$

$$\vec{F}(r) = \left(p \frac{\partial}{\partial r} \right) \vec{E}(r) = p \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \right) \hat{r}$$

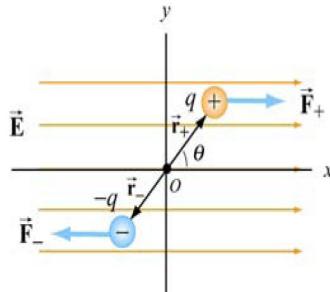
$$\vec{F}(r) = -p \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

que es el mismo resultado que se obtuvo en la parte anterior

Problema

Consideré un dipolo de momento dipolar \vec{p} formando un ángulo ϑ con la horizontal. Suponga que existe un campo eléctrico externo uniforme dado por $\vec{E} = E\hat{x}$.

- Calcule la fuerza total y explícitamente el torque que se ejerce sobre el dipolo
- ¿Qué ocurre si el campo no es uniforme?



Solución

Como se aprecia en la figura, se tiene que la fuerza total sobre el dipolo será

$$\vec{F} = \vec{F}_+ + \vec{F}_-$$

$$\vec{F} = qE\hat{i} - qE\hat{i} = \vec{0}$$

La fuerza neta sobre el dipolo en un campo externo uniforme es nula. Calculemos ahora el torque que se ejerce sobre el dipolo, con respecto a su centro de masa(origen)

$$\vec{\tau} = \vec{r}_+ \times \vec{F}_+ + \vec{r}_- \times \vec{F}_-$$

$$\vec{\tau} = (a \cos \vartheta \hat{i} + a \sin \vartheta \hat{j}) \times qE\hat{i} + (-a \cos \vartheta \hat{i} - a \sin \vartheta \hat{j}) \times -qE\hat{i}$$

$$\vec{\tau} = a \sin \vartheta \hat{j} \times qE\hat{i} + a \sin \vartheta \hat{j} \times qE\hat{i}$$

$$\vec{\tau} = 2a \sin \vartheta \hat{j} \times qE\hat{i} = -2aq \sin \vartheta E\hat{k}$$

Existe un torque sobre el dipolo, a pesar que la fuerza neta sobre él es nula! La dirección del torque es según $-\hat{k}$ (hacia dentro de la página). Es decir, el dipolo tiende a girar en el sentido del reloj de forma que el dipolo se alinea con respecto al campo. (Deja de haber torque cuando \vec{p} y \vec{E} son paralelos). Ahora, la magnitud del momento dipolar es

$$p = 2aq$$

Luego, se puede reescribir

$$\vec{\tau} = -pE \sin \vartheta \hat{k}$$

Escrito en forma más general, se tiene

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$$

que es consistente con la expresión general para el torque sobre un dipolo de momento dipolar \vec{p} situado en un campo eléctrico \vec{E} .

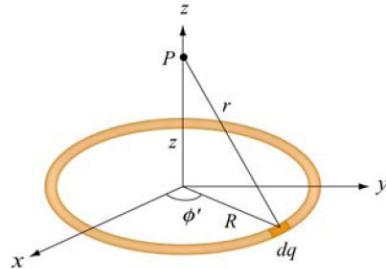
b) Si el campo externo no es uniforme, seguirá existiendo un torque sobre el dipolo hasta que éste esté alineado con respecto al campo eléctrico. Eso sí, la fuerza neta sobre el dipolo no necesariamente será nula , por lo que además de girar, se desplazará hacia donde el campo eléctrico sea más intenso.

Problema

Se tiene dos anillos coaxiales de radio R cargados uniformemente (cargas totales q_1 y q_2 desconocidas) y separados una distancia $2a$. El trabajo necesario para traer una carga q desde el infinito hasta el centro de cada uno de los anillos es W_1 y W_2 respectivamente. Calcule las cargas totales q_1 y q_2

Solución

Resolvamos primero el problema auxiliar del potencial en el eje de un anillo con carga q y radio R



El potencial está dado por

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{\Gamma} \frac{dx' \lambda}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

interesa obtener el potencial para $\vec{x} = z\hat{k}$. La parametrización de la distribución de carga está dada por

$$\begin{aligned}\vec{x}' &= R\hat{r}(\vartheta) \\ \hat{r}(\vartheta) &= \cos \vartheta \hat{i} + \sin \vartheta \hat{j} \\ dx' &= R d\vartheta \\ \vartheta &: 0 \rightarrow 2\pi\end{aligned}$$

Luego

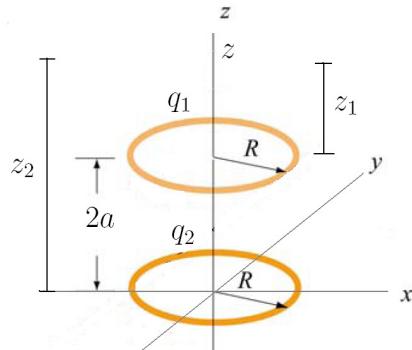
$$\phi(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\vartheta \frac{\lambda R}{\sqrt{z^2 + R^2}} = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0 \sqrt{z^2 + R^2}}$$

y la densidad lineal es

$$\lambda = \frac{q}{2\pi R}$$

$$\phi(z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{z^2 + R^2}}$$

Consideremos ahora dos anillos separados una distancia $2a$



El potencial sobre un punto a distancia z del origen es

$$\phi(z) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0\sqrt{z_1^2 + R^2}} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0\sqrt{z_2^2 + R^2}}$$

donde

$$z_2 = z$$

$$z_1 = z - 2a$$

$$\phi(z) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0\sqrt{(z-2a)^2 + R^2}} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0\sqrt{z^2 + R^2}}$$

Además se tiene

$$W_1 = q\phi(2a) = q \left(\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0\sqrt{4a^2 + R^2}} \right)$$

$$W_2 = q\phi(0) = q \left(\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0\sqrt{4a^2 + R^2}} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R} \right)$$

De aquí se puede resolver para q_1 y q_2

$$q_1 = \frac{\pi\epsilon_0 R \sqrt{4a^2 + R^2} (W_1 \sqrt{4a^2 + R^2} - W_2 R)}{qa^2}$$

$$q_2 = \frac{\pi\epsilon_0 R \sqrt{4a^2 + R^2} (W_2 \sqrt{4a^2 + R^2} - W_1 R)}{qa^2}$$

Problema

Muestre que la energía potencial almacenada en una esfera sólida cargada uniformemente con carga Q y de radio R es

$$U = \frac{3}{5} \left(\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R} \right)$$

Solución

De la forma general para la energía potencial de una distribución de carga

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V d^3x' \rho(\vec{x}') \phi(\vec{x}')$$

Utilizando coordenadas esféricas

$$U = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \sin\vartheta \int_0^R dr r^2 \rho(r, \varphi, \vartheta) \phi(r, \varphi, \vartheta)$$

la densidad de carga es constante

$$\rho(r, \varphi, \vartheta) = \frac{Q}{4/3\pi R^3} = \frac{3Q}{4\pi R^3}$$

y el potencial interior fue calculado anteriormente

$$\phi(r, \varphi, \vartheta) = \phi(r) = \frac{Q(3R^2 - r^2)}{8\pi\epsilon_0 R^3}$$

con esto

$$U = 4\pi \frac{3Q}{8\pi R^3} \int_0^R dr r^2 \frac{Q(3R^2 - r^2)}{8\pi\epsilon_0 R^3}$$

$$U = \frac{3Q^2}{16\pi\epsilon_0 R^6} \int_0^R dr r^2 (3R^2 - r^2) = \frac{3Q^2}{16\pi\epsilon_0 R^6} \left(R^5 - \frac{R^5}{5} \right)$$

$$U = \frac{3Q^2}{16\pi\epsilon_0 R^6} \times \frac{4}{5} R^5 = \frac{3}{5} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R}$$

Problema

Una distribución de fuentes localizadas en un volumen V se define como

$$\rho = \begin{cases} \rho(\vec{x}) & \text{si } \vec{x} \in V \\ 0 & \text{si } \vec{x} \notin V \end{cases}$$

Demuestre que en primera aproximación en la magnitud de V (diámetro máximo), el campo eléctrico distante debido a fuentes localizadas en V , puede descomponerse en

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q(V) \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} (\vec{p}(V) \cdot \vec{\nabla}) \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3}$$

donde

$$q(V) = \iiint_V d^3x' \rho(\vec{x}')$$

es la carga total de la distribución, y

$$\vec{p}(V) = \iiint_V d^3x' \rho(\vec{x}') \vec{x}'$$

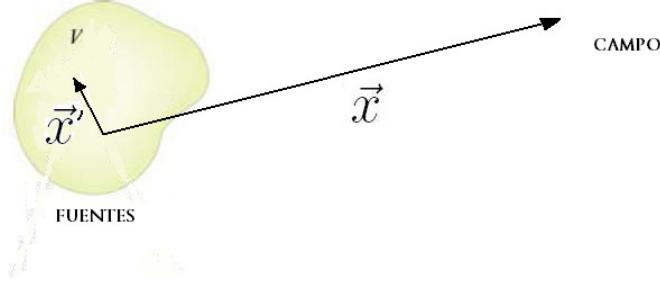
es el momento dipolar de la distribución

Solución

Pondremos el origen $\vec{0} \in V$, con lo que por campo distante estamos pensando en

$$|\vec{x}| \gg |\vec{x}'|, \vec{x}' \in V$$

es decir, la distancia a la distribución es mucho mayor que las dimensiones de ésta



El campo está dado por la integral de Coulomb

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{R^3} d^3x' \rho(\vec{x}') \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V d^3x' \rho(\vec{x}') \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$$

Ahora, utilizaremos la siguiente expansión en Taylor

$$\vec{f}(\vec{x} - \vec{x}') = \vec{f}(\vec{x}) - (\vec{x}' \cdot \vec{\nabla}) \vec{f}(\vec{x}) + O(2)$$

de forma que

$$\frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3} - (\vec{x}' \cdot \vec{\nabla}) \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3} + O(2)$$

Así

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V d^3x' \rho(\vec{x}') \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$$

$$\vec{E}(\vec{x}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V d^3x' \rho(\vec{x}') \left\{ \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3} - (\vec{x}' \cdot \vec{\nabla}) \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3} \right\}$$

definiendo

$$q(V) = \iiint_V d^3x' \rho(\vec{x}')$$

$$\vec{p}(V) = \iiint_V d^3x' \rho(\vec{x}') \vec{x}'$$

queda

$$\vec{E}(\vec{x}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q(V) \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} (\vec{p}(V) \cdot \vec{\nabla}) \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3}$$

Notar que el primer término corresponde al campo creado por una carga puntual $q(V)$ en el origen. Por supuesto ésta sería la aproximación a cero orden del campo, en donde esperamos obtener la ley de Coulomb. El segundo término de esta expansión, equivale al campo eléctrico generado por un dipolo puntual $\vec{p}(V)$ en el origen.

Esta expansión del campo se conoce como **Expansión Multipolar**, y se verá con más detalle un poco más adelante (de hecho, en la próxima página).

5.7. Expansión Multipolar

Consideraremos una fuente localizada caracterizada por la siguiente densidad de carga

$$\rho = \begin{cases} \rho(\vec{x}) & \text{si } \vec{x} \in V \\ 0 & \text{si } \vec{x} \notin V \end{cases}$$

El potencial está dado por

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

donde

$$|\vec{x} - \vec{x}'| = \{\vec{x}^2 + \vec{x}'^2 - 2\vec{x} \cdot \vec{x}'\}^{1/2}$$

entonces

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{1}{|\vec{x}|} \left\{ 1 + \frac{\vec{x}'^2}{\vec{x}^2} - 2\frac{\vec{x} \cdot \vec{x}'}{\vec{x}^2} \right\}^{-1/2}$$

Recordando la expansión en taylor

$$(1+z)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}\frac{3}{4}z^2 + O(3)$$

y la expansión hasta segundo orden es

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} &\approx \frac{1}{|\vec{x}|} \left\{ \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\vec{x}'^2}{\vec{x}^2} - 2\frac{\vec{x} \cdot \vec{x}'}{\vec{x}^2} \right) + \frac{3}{8} \left(\frac{\vec{x}'^2}{\vec{x}^2} - 2\frac{\vec{x} \cdot \vec{x}'}{\vec{x}^2} \right)^2 \right\} \right. \\ &= \frac{1}{|\vec{x}|} \left\{ 1 + \frac{\vec{x} \cdot \vec{x}'}{\vec{x}^2} - \frac{1}{2}\frac{\vec{x}'^2}{\vec{x}^2} + \frac{3}{8} \left[\left(\frac{\vec{x}'^2}{\vec{x}^2} \right)^2 + 4 \left(\frac{\vec{x} \cdot \vec{x}'}{\vec{x}^2} \right)^2 - 4\frac{(\vec{x} \cdot \vec{x}')\vec{x}'^2}{\vec{x}^4} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{|\vec{x}|} \left\{ 1 + \frac{\vec{x} \cdot \vec{x}'}{\vec{x}^2} - \frac{1}{2}\frac{\vec{x}'^2}{\vec{x}^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{\vec{x} \cdot \vec{x}'}{\vec{x}^2} \right)^2 + O \left[\left(\frac{|\vec{x}'|}{|\vec{x}|} \right)^3 \right] \right\} \end{aligned}$$

Con esto, la expansión del potencial electrostático a segundo orden es

$$\begin{aligned} \phi(\vec{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{x}|} \iiint_V d^3x' \rho(\vec{x}') + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3} \cdot \iiint_V d^3x' \rho(\vec{x}') \vec{x}' \\ &+ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \frac{x_i x_j}{|\vec{x}|^5} \iiint_V d^3x' \left\{ 3x'_i x'_j - \delta_{ij} |\vec{x}'|^2 \right\} \rho(\vec{x}') + \dots \end{aligned}$$

Se define el momento monopolar (escalar)

$$q = \iiint_V d^3x' \rho(\vec{x}')$$

que es la carga total de la distribución. Además

$$\vec{p} = \iiint_V d^3x' \rho(\vec{x}') \vec{x}'$$

es el momento dipolar (vector) de la distribución.

$$\vec{Q} = \iiint_V d^3x' \rho(\vec{x}') \left\{ 3\vec{x}' \cdot \vec{x}'^T - \vec{I} (\vec{x}'^T \cdot \vec{x}') \right\}$$

es el momento cuadripolar (tensor)

$$Q_{ij} = \iiint_V d^3x' \rho(\vec{x}') \left\{ 3x'_i x'_j - \delta_{ij} |\vec{x}'|^2 \right\}$$

la expansión queda

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{|\vec{x}|} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{x}}{|\vec{x}|^3} + \frac{1}{2} \frac{\vec{x}^T \cdot \vec{Q} \cdot \vec{x}}{|\vec{x}|^5} + \dots \right)$$

Expandir el potencial de una distribución en términos de sus momentos (monopolar, dipolar, cuadripolar, etc) es muy útil en el estudio de radiación

Capítulo 6

Las dos leyes fundamentales de la Electrostática

Hasta ahora se han establecido los principios fundamentales en el estudio de la electrostática. Éstos son la ley de Coulomb (que proviene de un estudio empírico de las fuerzas entre cargas), y el principio de superposición. Hemos visto que éstos principios tienen como consecuencia un par de leyes que ha simplificado mucho el estudio de los campos para ciertos casos particulares. Éstas son la ley de Gauss

$$\iint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V d^3x \rho(\vec{x})$$

y la ley de circulación del campo eléctrico

$$\oint_{\Gamma} d\vec{x} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = 0$$

Éstas dos ecuaciones integrales entregan información global acerca del campo. Sin embargo, es posible llevarlas a su forma más simple en un par de ecuaciones **diferenciales** para el campo electrostático.

A partir de la ley de Gauss, y utilizando el teorema de la divergencia, se obtiene

$$\begin{aligned} \iint_S d\vec{S} \cdot \vec{E}(\vec{x}) &= \iiint_V d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V d^3x \rho(\vec{x}) \\ \iiint_V d^3x \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{x}) - \frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0} \right) &= 0 \end{aligned}$$

esto es independiente del volumen V de integración. Consecuencia de esto es que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0}$$

Del mismo modo, a partir de la ley de circulación y utilizando el teorema de Stokes

$$\oint_{\Gamma} d\vec{x} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \iint_{S(\Gamma)} d\vec{S}(\vec{x}) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{x})) = 0$$

para cualquier superficie cuyo contorno sea Γ . De aquí se desprende que

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{x}) = 0$$

En resumen, las dos leyes integrales fundamentales del campo electrostático tienen una formulación equivalente en dos ecuaciones diferenciales para el campo

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0}$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{x}) = 0$$

La primera de ellas relaciona la divergencia del campo electrostático en cada punto con la densidad de carga. La segunda establece que el campo eléctrico es conservativo o irrotacional. Éstas ecuaciones son las dos primeras **Ecuaciones de Maxwell** en el vacío y para campos estáticos. Veremos que éstas contienen absolutamente toda la teoría de la electrostática, es decir, basta con ellas para determinar completamente el campo eléctrico. Lo que hemos hecho aquí es encontrar expresiones matemáticas simples que resumen absolutamente todo el conocimiento empírico sobre la teoría del campo eléctrico estático.

Problema

Demuestre el siguiente teorema

$$\vec{\nabla}^2 \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = -4\pi\delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

Solución

Sea $V(S)$ un volumen en R^3 y $S = \partial V$ su contorno. Sea además una carga puntual q en el punto \vec{x}' , es sabido que el campo electrostático creado por esta carga es

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$$

La ley de Gauss establece

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \iint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V d^3x q \delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

o equivalentemente

$$\iint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} = 4\pi \iiint_V d^3x \delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

Utilizando el teorema de la divergencia

$$\iint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} = \iiint_V d^3x \vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$$

y recordando que

$$\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = -\frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$$

$$\iint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} = -\iiint_V d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

$$\iint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} = -\iiint_V d^3x \vec{\nabla}^2 \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = 4\pi \iiint_V d^3x \delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

luego

$$\iiint_V d^3x \left(\vec{\nabla}^2 \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + 4\pi\delta(\vec{x} - \vec{x}') \right)$$

Finalmente

$$\vec{\nabla}^2 \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = -4\pi\delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

6.1. Completitud de la teoría Electrostática

6.1.1. Descomposición de Helmholtz

Sea $\vec{A}(\vec{x})$ un campo vectorial tal que

$$\oint_{S(\infty)} d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \frac{\vec{A}(\vec{x}')}{|\vec{x}' - \vec{x}|} = 0$$

definamos los campos

$$\vec{A}_L(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \iiint_{R^3} d^3x' \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{A}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

$$\vec{A}_T(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \iiint_{R^3} d^3x' \frac{\vec{A}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

entonces se cumple

$$1) \vec{A}(\vec{x}) = \vec{A}_L(\vec{x}) + \vec{A}_T(\vec{x})$$

$$2) \vec{\nabla} \times \vec{A}_L(\vec{x}) = 0$$

$$3) \vec{\nabla} \cdot \vec{A}_T(\vec{x}) = 0$$

$\vec{A}_L(\vec{x})$ se llama **parte longitudinal** (irrotacional) de \vec{A}
 $\vec{A}_T(\vec{x})$ se llama **parte transversal** (solenoidal) de \vec{A}

Demostración del teorema de Helmholtz

1) Utilizando la identidad

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{f}g) = g\vec{\nabla} \cdot \vec{f} + \vec{f} \cdot \vec{\nabla}g$$

se tiene

$$\vec{\nabla}' \cdot \frac{\vec{A}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{A}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \vec{A}(\vec{x}') \cdot \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

de forma que

$$\iiint_{R^3} d^3x' \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{A}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \iiint_{R^3} d^3x' \vec{\nabla}' \cdot \frac{\vec{A}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} - \iiint_{R^3} d^3x' \vec{A}(\vec{x}') \cdot \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

$$\iiint_{R^3} d^3x' \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{A}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \oint_{S(\infty)} d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \frac{\vec{A}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \iiint_{R^3} d^3x' \vec{A}(\vec{x}') \cdot \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

en este último paso hemos utilizado el teorema de la divergencia y el hecho que

$$\vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = -\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

utilizando la hipótesis del teorema

$$\iiint_{R^3} d^3x' \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{A}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \iiint_{R^3} d^3x' \vec{A}(\vec{x}') \cdot \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \vec{\nabla} \cdot \iiint_{R^3} d^3x' \frac{\vec{A}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

por lo tanto

$$4\pi \vec{A}_L(\vec{x}) = -\vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \iiint_{R^3} d^3x' \frac{\vec{A}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

Ahora ocupamos la siguiente identidad (muy utilizada en teoría electromagnética)

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{f} = \vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \vec{f} - \vec{\nabla}^2 \vec{f}$$

$$4\pi \vec{A}_L(\vec{x}) = -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \iiint_{R^3} d^3x' \frac{\vec{A}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} - \vec{\nabla}^2 \iiint_{R^3} d^3x' \frac{\vec{A}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

$$4\pi \vec{A}_L(\vec{x}) = -4\pi \vec{A}_T(\vec{x}) - \iiint_{R^3} d^3x' \vec{A}(\vec{x}') \vec{\nabla}^2 \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

por último, utilizando el teorema

$$\vec{\nabla}^2 \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = -4\pi \delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

$$4\pi (\vec{A}_L(\vec{x}) + \vec{A}_T(\vec{x})) = 4\pi \iiint_{R^3} d^3x' \vec{A}(\vec{x}') \delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

y se demuestra que

$$\vec{A}(\vec{x}) = \vec{A}_L(\vec{x}) + \vec{A}_T(\vec{x})$$

$$b) - 4\pi \vec{\nabla} \times \vec{A}_L(\vec{x}) = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \iiint_{R^3} d^3x' \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{A}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \vec{0}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A}_L(\vec{x}) = 0$$

$$c) 4\pi \vec{\nabla} \cdot \vec{A}_T(\vec{x}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \iiint_{R^3} d^3x' \frac{\vec{A}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_T(\vec{x}) = 0$$

Observación

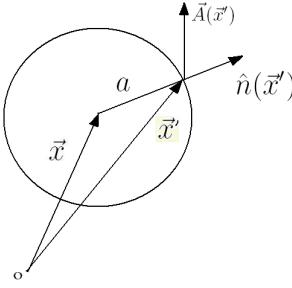
La validez del teorema de Helmholtz es

$$\iint_{S(\infty)} d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \frac{\vec{A}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = 0$$

Podemos escoger esta superficie como una esfera centrada en \vec{x} y de radio a , con $a \rightarrow \infty$

$$\iint_{S(\infty)} d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \frac{\vec{A}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \lim_{a \rightarrow \infty} \iint_{S(\vec{x}, a)} dS(\vec{x}') \frac{\hat{n}(\vec{x}') \cdot \vec{A}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

sobre la superficie



$$\vec{x}' - \vec{x} = a\hat{n}(\vec{x}')$$

$$|\vec{x} - \vec{x}'| = a$$

$$dS(\vec{x}') = a^2 d\Omega(\vec{x})$$

donde $d\Omega(\vec{x}) = \sin^2 \vartheta d\vartheta d\phi$ es el elemento de ángulo sólido con vértice en \vec{x}

$$\left\| \iint_{S(\infty)} d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \frac{\vec{A}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right\| \leq \int_0^{4\pi} d\Omega(\vec{x}) \lim_{a \rightarrow \infty} a^2 \frac{|\hat{n}(\vec{x}') \cdot \vec{A}(\vec{x}')|}{a}$$

$$\begin{aligned} \left\| \iint_{S(\infty)} d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \frac{\vec{A}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right\| &\leq \int_0^{4\pi} d\Omega(\vec{x}) \lim_{a \rightarrow \infty} a |\hat{n}(\vec{x}') \cdot \vec{A}(\vec{x}')| = \int_0^{4\pi} d\Omega \lim_{|\vec{x}'| \rightarrow \infty} |\vec{x} - \vec{x}'| |\vec{A}(\vec{x}')| \\ &= \int_0^{4\pi} d\Omega \lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} |\vec{x}'| |\vec{A}(\vec{x}')| \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} |\vec{x}| |\vec{A}(\vec{x})| = 0 \rightarrow \iint_{S(\infty)} d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \frac{\vec{A}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = 0$$

A continuación, demostraremos dos teoremas que nos permitirán escribir el teorema de Helmholtz de una forma más conveniente

Teorema 1

$$\iiint_V d^3x \vec{\nabla} \psi(\vec{x}) = \iint_{S(V)} d\vec{S}(\vec{x}) \psi(\vec{x})$$

Demostración

Ustamos el teorema de la divergencia

$$\iiint_V d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{x}) = \iint_{S(V)} d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{A}(\vec{x})$$

con $\vec{A}(\vec{x}) = \vec{B}\psi(\vec{x})$, con \vec{B} un vector constante arbitrario

$$\iiint_V d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{B}\psi(\vec{x}) = \iiint_V d^3x \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \psi(\vec{x}) = \vec{B} \cdot \iiint_V d^3x \vec{\nabla} \psi(\vec{x})$$

$$\iiint_V d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{B}\psi(\vec{x}) = \iint_{S(V)} d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{B}\psi(\vec{x}) = \vec{B} \cdot \iint_{S(V)} d\vec{S}(\vec{x}) \psi(\vec{x})$$

$$\vec{B} \cdot \left\{ \iiint_V d^3x \vec{\nabla} \psi(\vec{x}) - \iint_{S(V)} d\vec{S}(\vec{x}) \psi(\vec{x}) \right\} = 0$$

como \vec{B} fue escogido de forma arbitraria

$$\iiint_V d^3x \vec{\nabla} \psi(\vec{x}) = \oint_{S(V)} d\vec{S}(\vec{x}) \psi(\vec{x})$$

Teorema 2

$$\iiint_V d^3x \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x}) = \oint_{S(V)} d\vec{S}(\vec{x}) \times \vec{A}(\vec{x})$$

Demostración

$$\iiint_V d^3x (\vec{\nabla} \times \vec{A})_a = \iiint_V d^3x \epsilon_{abc} \vec{\nabla}_b A_c = \epsilon_{abc} \iiint_V d^3x \vec{\nabla}_b A_c$$

pero del teorema anterior

$$\iiint_V d^3x \vec{\nabla}_a \psi = \oint_{S(V)} dS_a \psi$$

así

$$\begin{aligned} \iiint_V d^3x (\vec{\nabla} \times \vec{A})_a &= \epsilon_{abc} \oint_{S(V)} dS_b A_c = \oint_{S(V)} \epsilon_{abc} dS_b A_c \\ &= \oint_{S(V)} (d\vec{S} \times \vec{A})_a \end{aligned}$$

Con este teorema, podemos escribir la parte transversal de $\vec{A}(\vec{x})$ como

$$\vec{A}_T(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \times \iiint_{R^3} d^3x' \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{A}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

En efecto, consideremos

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \iiint_{R^3} d^3x' \frac{\vec{A}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} &= - \iiint_{R^3} d^3x' \vec{A}(\vec{x}') \times \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \\ \iiint_{R^3} d^3x' \vec{A}(\vec{x}') \times \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} &= \iiint_{R^3} d^3x' \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{A}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} - \iiint_{R^3} d^3x' \vec{\nabla}' \times \frac{\vec{A}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \\ \iiint_{R^3} d^3x' \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{A}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} - \oint_{S(\infty)} d\vec{S}(\vec{x}') \times \frac{\vec{A}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} & \end{aligned}$$

pero si se cumple la hipótesis del teorema de Helmholtz

$$\lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} |\vec{x}| |\vec{A}(\vec{x})| = 0 \rightarrow \oint_{S(\infty)} d\vec{S}(\vec{x}') \times \frac{\vec{A}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \vec{0}$$

luego

$$\vec{\nabla} \times \iiint_{R^3} d^3x' \frac{\vec{A}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \iiint_{R^3} d^3x' \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{A}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

y entonces

$$\vec{A}_T(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \iiint_{R^3} d^3x' \frac{\vec{A}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

$$\vec{A}_T(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \times \iiint_{R^3} d^3x' \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{A}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

6.1.2. Teorema de Helmholtz, segunda forma

Si \vec{A} es un campo vectorial tal que

$$\lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} |\vec{x}| \|\vec{A}(\vec{x})\| = 0$$

entonces

$$\vec{A}(\vec{x}) = \vec{A}_L(\vec{x}) + \vec{A}_T(\vec{x})$$

con

$$\vec{A}_L(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \iiint_{R^3} d^3x' \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{A}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

$$\vec{A}_T(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \times \iiint_{R^3} d^3x' \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{A}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

donde

$$\vec{\nabla} \times \vec{A}_L(\vec{x}) = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_T(\vec{x}) = 0$$

6.1.3. Corolario del Teorema de Helmholtz

Dadas la divergencia

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{x}) = 4\pi D(\vec{x})$$

y el rotor

$$\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x}) = 4\pi \vec{R}(\vec{x})$$

de un campo vectorial $\vec{A}(\vec{x})$, sobre todo el espacio, entonces ese campo vectorial está completamente **determinado** en todos los puntos del espacio mediante la siguiente representación integral-diferencial

$$\vec{A}(\vec{x}) = -\vec{\nabla} \iiint_{R^3} d^3x' \frac{D(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \vec{\nabla} \times \iiint_{R^3} d^3x' \frac{\vec{R}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

Observación: las funciones $D(\vec{x})$ y $\vec{R}(\vec{x})$ nos son dadas, son las **fuentes** del campo $\vec{A}(\vec{x})$.
Pero

$$\{D, \vec{R}\} = \{D, R_x, R_y, R_z\}$$

son 4 funciones, mientras que

$$\{\vec{A}\} = \{A_x, A_y, A_z\}$$

son 3 funciones. Sin embargo, no hay sobredeterminación pues

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 4\pi \vec{\nabla} \cdot \vec{R} = 0$$

luego \vec{R} debe ser solenoidal

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{R}(\vec{x}) = 0$$

esto agrega 1 condición. Con esto, la construcción de Helmholtz define un problema bien determinado

6.2. Completitud de la Electrostática

Hemos encontrado que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{x}) = \vec{0}$$

El teorema de Helmholtz nos dice que , dadas la divergencia y el rotor del campo eléctrico, este esta absolutamente determinado por la forma integral

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{\nabla} \iiint_{R^3} d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

y la electrostática es una teoría **completa**: el conjunto de ecuaciones diferenciales que representan las leyes fundamentales de la teoría es suficiente para determinar completamente el campo electrostático

Problema

La descomposición de Helmholtz requiere que

$$\lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} |\vec{x}| \|\vec{A}(\vec{x})\| = 0$$

demuestre que

$$\iiint_{R^3} d^3x' \left\{ |D(\vec{x}')| + |\vec{R}(\vec{x}')| \right\} < \infty$$

es condición suficiente para la validez de la representación integro-diferencial de Helmholtz

Solución

$$\vec{A}(\vec{x}) = -\vec{\nabla} \iiint_{R^3} d^3x' \frac{D(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \vec{\nabla} \times \iiint_{R^3} d^3x' \frac{\vec{R}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

Entonces

$$\begin{aligned} |\vec{x}| \|\vec{A}(\vec{x})\| &= |\vec{x}| \left\| -\vec{\nabla} \iiint_{R^3} d^3x' \frac{D(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \vec{\nabla} \times \iiint_{R^3} d^3x' \frac{\vec{R}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right\| \\ &\leq |\vec{x}| \iiint_{R^3} d^3x' \left\| D(\vec{x}') \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right\| + |\vec{x}| \iiint_{R^3} d^3x' \left\| \vec{R}(\vec{x}') \times \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right\| \\ &\leq |\vec{x}| \iiint_{R^3} d^3x' |D(\vec{x}')| \left\| \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \right\| + |\vec{x}| \iiint_{R^3} d^3x' |\vec{R}(\vec{x}')| \left\| \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \right\| \\ &= \iiint_{R^3} d^3x' \frac{|\vec{x}|}{|\vec{x} - \vec{x}'|^2} \left\{ |D(\vec{x}')| + |\vec{R}(\vec{x}')| \right\} \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} \lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} |\vec{x}| \|\vec{A}(\vec{x})\| &\leq \lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} \iiint_{R^3} d^3x' \frac{|\vec{x}|}{|\vec{x} - \vec{x}'|^2} \left\{ |D(\vec{x}')| + |\vec{R}(\vec{x}')| \right\} \\ &= \iiint_{R^3} d^3x' \left\{ |D(\vec{x}')| + |\vec{R}(\vec{x}')| \right\} \lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} \frac{|\vec{x}|}{|\vec{x} - \vec{x}'|^2} \\ &= \lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} \frac{1}{|\vec{x}|} \iiint_{R^3} d^3x' \left\{ |D(\vec{x}')| + |\vec{R}(\vec{x}')| \right\} = 0 \end{aligned}$$

si

$$0 < \iiint_{R^3} d^3x' \left\{ |D(\vec{x}')| + |\vec{R}(\vec{x}')| \right\} < \infty$$

Problema

Demuestre que si

$$\lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} |\vec{x}| \|D(\vec{x})\| = 0$$

y

$$\lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} |\vec{x}| \|\vec{R}(\vec{x})\| = 0$$

entonces la representación de Helmholtz puede escribirse

$$\vec{A}(\vec{x}) = - \iiint_{R^3} d^3x' \frac{\vec{\nabla}' D(\vec{x}') - \vec{\nabla}' \times \vec{R}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

Solución

De la representación de Helmholtz

$$\vec{A}(\vec{x}) = -\vec{\nabla} \iiint_{R^3} d^3x' \frac{D(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \vec{\nabla} \iiint_{R^3} d^3x' \frac{\vec{R}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

$$\vec{A}(\vec{x}) = \iiint_{R^3} d^3x' D(\vec{x}') \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \iiint_{R^3} d^3x' \vec{R}(\vec{x}') \times \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

$$\vec{A}(\vec{x}) = - \iiint_{R^3} d^3x' \frac{\vec{\nabla}' D(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \iiint_{R^3} d^3x' \vec{\nabla}' \frac{D(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \iiint_{R^3} d^3x' \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{R}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} - \iiint_{R^3} d^3x' \vec{\nabla}' \times \frac{\vec{R}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

$$\vec{A}(\vec{x}) = - \iiint_{R^3} d^3x' \frac{\vec{\nabla}' \cdot D(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \oint_{S(\infty)} d\vec{S}(\vec{x}') \frac{D(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \iiint_{R^3} d^3x' \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{R}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} - \oint_{S(\infty)} d\vec{S}(\vec{x}') \times \frac{\vec{R}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

$$\vec{A}(\vec{x}) = - \iiint_{R^3} d^3x' \frac{\vec{\nabla}' D(\vec{x}') - \vec{\nabla}' \times \vec{R}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

En efecto

$$\lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} |\vec{x}| \|D(\vec{x})\| = 0 \rightarrow \oint_{S(\infty)} d\vec{S}(\vec{x}') \frac{D(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = 0$$

$$\lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} |\vec{x}| \|\vec{R}(\vec{x})\| = 0 \rightarrow \oint_{S(\infty)} d\vec{S}(\vec{x}') \times \frac{\vec{R}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = 0$$

6.3. Apéndice: Descomposición de Helmholtz en un volumen finito

Se demuestra que cualquier campo vectorial $\vec{A}(\vec{x})$ satisface idénticamente la siguiente relación

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{x}) &= -\frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \iiint_V d^3x' \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{A}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \times \iiint_V d^3x' \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{A}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \\ &+ \frac{1}{4\pi} \iint_{S(V)} \left(d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \frac{\vec{x}' - \vec{x}}{|\vec{x}' - \vec{x}|^3} \right) \vec{A}(\vec{x}') + \frac{1}{4\pi} \iint_{S(V)} \left(d\vec{S}(\vec{x}') \times \frac{\vec{x}' - \vec{x}}{|\vec{x}' - \vec{x}|^3} \right) \times \vec{A}(\vec{x}')\end{aligned}$$

donde V es cualquier región cerrada, $\delta V = S(V)$ es su frontera, y $\vec{x} \in V$

Demostración

Tenemos

$$\begin{aligned}\iiint_V d^3x' \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{A}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} &= - \iiint_V d^3x' \vec{A}(\vec{x}') \cdot \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \iiint_V d^3x' \vec{\nabla}' \cdot \frac{\vec{A}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \\ \iiint_V d^3x' \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{A}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} &= \iiint_V d^3x' \vec{A}(\vec{x}') \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \iint_{S(V)} d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \frac{\vec{A}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \\ \iiint_V d^3x' \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{A}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} &= \vec{\nabla} \cdot \iiint_V d^3x' \frac{\vec{A}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \iint_{S(V)} d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \frac{\vec{A}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}\end{aligned}$$

con esto

$$\vec{\nabla} \iiint_V d^3x' \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{A}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \iiint_V d^3x' \frac{\vec{A}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \vec{\nabla} \iint_{S(V)} d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \frac{\vec{A}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

y utilizando la identidad

$$\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} + \vec{\nabla}^2 \vec{A}$$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \iiint_V d^3x' \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{A}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} &= \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \iiint_V d^3x' \frac{\vec{A}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \vec{\nabla}^2 \iiint_V d^3x' \frac{\vec{A}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \iint_{S(V)} d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{A}(\vec{x}') \nabla \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \\ &= \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \iiint_V d^3x' \frac{\vec{A}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \iiint_V d^3x' \vec{A}(\vec{x}') \vec{\nabla}^2 \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} - \iint_{S(V)} d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{A}(\vec{x}') \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \\ &= \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \iiint_V d^3x' \frac{\vec{A}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} - 4\pi \iiint_V d^3x' \vec{A}(\vec{x}') \delta(\vec{x}' - \vec{x}) + \iint_{S(V)} d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{A}(\vec{x}') \frac{\vec{x}' - \vec{x}'}{|\vec{x}' - \vec{x}|^3}\end{aligned}$$

Luego si $\vec{x} \in V$

$$\vec{A}(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \iiint_V d^3x' \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{A}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \iiint_V d^3x' \frac{\vec{A}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \frac{1}{4\pi} \iint_{S(V)} d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{A}(\vec{x}') \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$$

Ahora bien

$$\vec{\nabla} \times \iiint_V d^3x' \frac{\vec{A}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = - \iiint_V d^3x' \vec{A}(\vec{x}') \times \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \iiint_V d^3x' \vec{A}(\vec{x}') \times \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

$$\vec{\nabla} \times \iiint_V d^3x' \frac{\vec{A}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \iiint_V d^3x' \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{A}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} - \iiint_V d^3x' \vec{\nabla}' \times \frac{\vec{A}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

$$\vec{\nabla} \times \iiint_V d^3x' \frac{\vec{A}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \iiint_V d^3x' \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{A}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} - \oint_{S(V)} d\vec{S}(\vec{x}') \times \frac{\vec{A}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

Luego

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \iiint_V d^3x' \frac{\vec{A}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \vec{\nabla} \times \iiint_V d^3x' \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{A}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} - \vec{\nabla} \times \oint_{S(V)} d\vec{S}(\vec{x}') \times \frac{\vec{A}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \iiint_V d^3x' \frac{\vec{A}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \vec{\nabla} \times \iiint_V d^3x' \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{A}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \oint_{S(V)} (d\vec{S}(\vec{x}') \times \vec{A}(\vec{x}')) \times \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \iiint_V d^3x' \frac{\vec{A}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \vec{\nabla} \times \iiint_V d^3x' \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{A}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \oint_{S(V)} (d\vec{S}(\vec{x}') \times \vec{A}(\vec{x}')) \times \frac{\vec{x}' - \vec{x}}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

Así

$$\vec{A}(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \iiint_V d^3x' \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{A}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \times \iiint_V d^3x' \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{A}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \oint_{S(V)} (d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{A}(\vec{x}')) \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} + \frac{1}{4\pi} \oint_{S(V)} (d\vec{S}(\vec{x}') \times \vec{A}(\vec{x}')) \times \frac{\vec{x}' - \vec{x}}{|\vec{x}' - \vec{x}|^3}$$

Por otra parte

$$(\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C} + (\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C} - \vec{C} \times (\vec{A} \times \vec{B})$$

$$(\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C} + (\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C} - (\vec{C} \cdot \vec{B}) \vec{A} + (\vec{C} \cdot \vec{A}) \vec{B}$$

$$(\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C} + (\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = (\vec{B} \cdot \vec{A}) \vec{C} - (\vec{B} \cdot \vec{C}) \vec{A} + (\vec{C} \cdot \vec{A}) \vec{B}$$

$$(\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C} + (\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = \vec{B} \times (\vec{C} \times \vec{A}) + (\vec{C} \cdot \vec{A}) \vec{B}$$

$$(\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C} + (\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = (\vec{A} \times \vec{C}) \times \vec{B} + (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B}$$

luego

$$(\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C} + (\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} + (\vec{A} \times \vec{C}) \times \vec{B}$$

Finalmente

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{x}) = & -\frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \iiint_V d^3x' \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{A}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \times \iiint_V d^3x' \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{A}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \\ & + \frac{1}{4\pi} \oint_{S(V)} \left(d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \frac{\vec{x}' - \vec{x}}{|\vec{x}' - \vec{x}|^3} \right) \vec{A}(\vec{x}') + \frac{1}{4\pi} \oint_{S(V)} \left(d\vec{S}(\vec{x}') \times \frac{\vec{x}' - \vec{x}}{|\vec{x}' - \vec{x}|^3} \right) \times \vec{A}(\vec{x}') \end{aligned}$$

Vemos que $\vec{A}(\vec{x})$ está determinado por

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{x}) &= 4\pi D(\vec{x}) \\ \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x}) &= 4\pi \vec{R}(\vec{x}) \end{aligned}$$

para $\vec{x} \in V$

$$\vec{A}(\vec{x}) = \vec{A}_H(\vec{x})$$

para $\vec{x} \in S(V)$

Parte II

Conductores, Ecuaciones de Poisson y Laplace

Capítulo 7

Conductores

Hasta aquí hemos terminado con los problemas donde la distribución de carga es conocida desde el comienzo. (Integrales de Coulomb). Hasta ahora han sido problemas sin mayores complicaciones que calcular correctamente las integrales. Ahora atacaremos otro tipo de problemas, la determinación de los campos cerca de conductores.

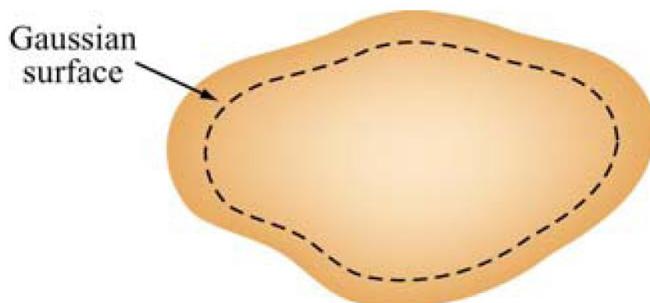
La materia se puede clasificar gruesamente en conductores y aislantes (o dieléctricos). Un material dieléctrico posee electrones fuertemente ligados a los átomos, de manera que ante la presencia de un campo eléctrico las partículas cargadas pueden cambiar sus posiciones ligeramente, pero se mantienen ligadas a sus moléculas. Por otro lado, un material conductor (como un metal) es aquél que en su interior posee un gran número de electrones libres, y éstos se pueden mover libremente en el conductor, responden a campos eléctricos casi infinitesimales y continúan su movimiento mientras experimentan un campo. Esta corriente de electrones debe estar constantemente provista de fuentes externas de energía, o sino el movimiento de los electrones se detendrá cuando cancelen el efecto de la fuente que produce el campo original (se alcanza un equilibrio estático).

Campo eléctrostático dentro de un conductor es nulo

En electrostática, no consideramos fuentes continuas de corriente, de manera que los electrones se moverán hasta que se arreglen de forma que produzcan un campo eléctrico nulo en cualquier parte dentro del conductor (esto suele pasar en una fracción de segundo). Si quedara algún campo dentro del conductor, este campo movería más electrones, luego la única solución electrostática es que el campo es cero en cualquier punto interior del conductor.

La carga en un conductor se distribuye en su superficie

Consecuencia directa de la propiedad anterior es que la carga en un conductor debe distribuirse en su superficie. De la ley de gauss, es evidente que si existiera una carga neta al interior del conductor, el flujo eléctrico sobre la superficie de la figura sería distinto de cero, y por lo tanto, existiría un campo eléctrico en su interior.



$$\iint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') = 0 \rightarrow q_{in} = 0$$

Notar que como el campo eléctrico es cero en el interior de un conductor, entonces

$$-\vec{\nabla}\phi = 0$$

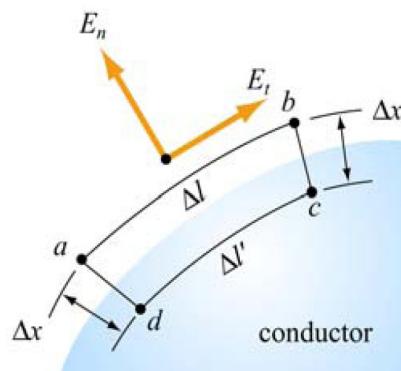
Esto significa que al interior de un conductor el potencial es **constante**.

La dificultad que se presenta cuando hay conductores presentes es evidente. Suponga que estamos en la situación en que se carga un conductor con una carga Q . Ahora no estamos en condiciones de saber exactamente dónde están las cargas, sólo sabemos que ellas se van a distribuir sobre toda la superficie. ¿Cómo podemos determinar la forma en que se distribuyen las cargas? Veremos que ellas se deben distribuir de forma que que la superficie del conductor forme una **equipotencial**. Si la superficie de un conductor no fuera equipotencial, entonces habría un campo eléctrico distinto de cero en el interior del conductor, y las cargas en el conductor se seguirán moviendo hasta que finalmente el campo en su interior se anula. (y se alcance nuevamente un estado de equilibrio electrostático)

Componente tangencial de \vec{E} en la superficie de un conductor es cero

Consideré la integral de línea sobre el camino cerrado de la figura

$$\oint d\vec{x} \cdot \vec{E}$$



Como el campo eléctrico es conservativo, la integral de línea sobre el camino cerrado $abcd$ es cero.

$$\oint_{abcd} d\vec{x} \cdot \vec{E} = E_t(\Delta l) - E_n(\Delta x') + 0(\Delta l) + E_n(\Delta x) = 0$$

donde E_n y E_t son las componentes normal y tangencial del campo eléctrico, respectivamente, y hemos escogido el segmento ab paralelo a E_t en todos los puntos.

En el límite cuando $\Delta x' \rightarrow 0$ y $\Delta x \rightarrow 0$, se tiene

$$E_t \Delta l = 0$$

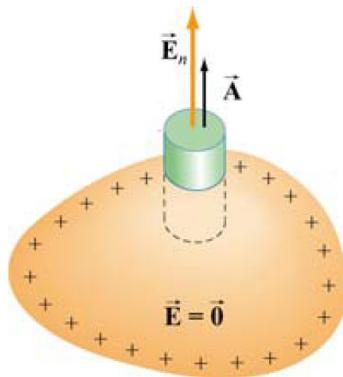
Como Δl es una longitud finita, se concluye que la componente tangencial del campo eléctrico sobre la superficie de un conductor es cero. Esto es algo sumamente importante, ya que consecuencia de ésto es que un conductor en equilibrio electrostático es una **Superficie equipotencial**. Mostrar esto ahora resulta evidente, considere 2 puntos A y B sobre la superficie de un conductor, y calcule la diferencia de potencial entre estos dos puntos

$$\phi_B - \phi_A = - \int_A^B d\vec{x} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = 0$$

ya que \vec{E} sólo tiene componente normal a la curva. Luego, los puntos A y B se encuentran al mismo potencial

El campo \vec{E} es normal a la superficie de un conductor

Si la componente tangencial del campo fuera distinta de cero, las cargas entonces se moverían hasta que ésta componente desaparezca. Luego, en un conductor en equilibrio, sólo sobrevive la componente normal del campo eléctrico. Para obtener el campo eléctrico sobre la superficie de un conductor, considere la superficie de Gauss de la figura



De la ley de Gauss obtenemos

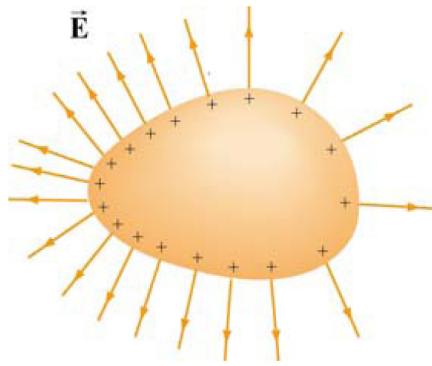
$$\iint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') = E_n A + 0A = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

de aquí

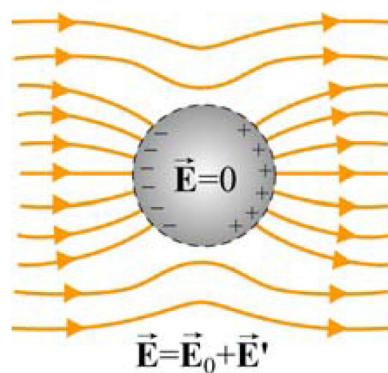
$$E_n = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Es decir, el campo eléctrico justo sobre la superficie de un conductor es normal a ella y su magnitud está directamente relacionada con la densidad superficial de carga sobre el punto del conductor. Éstas consecuencias son absolutamente generales. Notar que ésto nos permite determinar la densidad superficial de carga sobre un conductor, sin embargo, ! se requiere conocer el campo eléctrico ! ¿Cómo podemos determinar el campo eléctrico sin conocer primeramente la densidad de carga en el conductor?. Veremos más adelante que esto es posible al resolver la ecuación diferencial que satisface el potencial electrostático

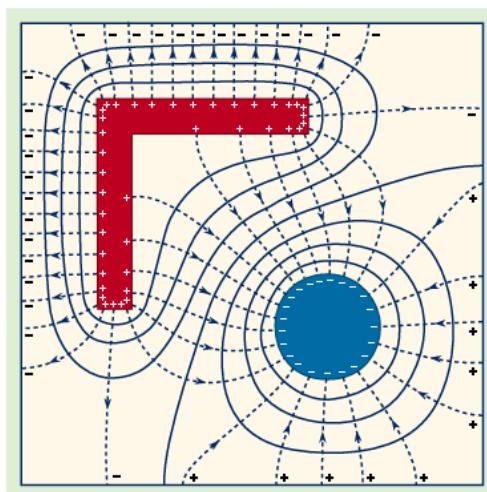
Como conclusión, el campo eléctrico cerca de un conductor tiene la forma de la figura



Como ejemplo, considere un campo uniforme en la dirección horizontal en una región del espacio. Imaginemos que colocamos una esfera conductora en este campo uniforme. Cargas sobre el conductor se moverán y distribuirán hasta alcanzar un equilibrio electrostático, es decir, hasta que el campo en su interior se anule y la componente tangencial del campo sobre la superficie también, de manera que todas las cargas se encuentren en equilibrio en su superficie. La situación de equilibrio será tal como muestra la figura



Es decir, el campo eléctrico se ve deformado cerca de la esfera conductora, de manera que líneas de campo sean normales en su superficie. El potencial electrostático sobre la superficie esférica es una constante. Otro ejemplo de líneas de campo y superficies equipotenciales se aprecia en la siguiente figura, donde dos conductores se encuentran cercanos



Una aplicación interesante es que la energía potencial de un conductor es muy simple de calcular. Esto se debe a que en un conductor toda la carga se concentra en la superficie, y que sobre ella el potencial es constante. Luego, la energía potencial asociada a un conductor de carga Q y potencial V está dada por

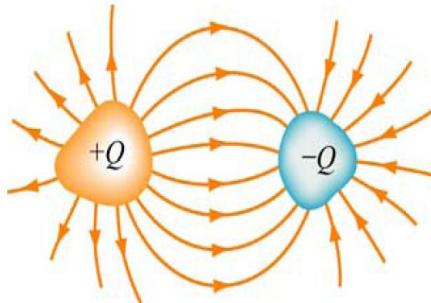
$$U = \frac{1}{2} \iint_S \phi(\vec{x}') dq(\vec{x}') = \frac{1}{2} \phi \iint_S dq(\vec{x}') = \frac{1}{2} \phi \iint_S \sigma(\vec{x}') dS(\vec{x}') = \frac{1}{2} \phi Q$$

La energía potencial de un conductor con carga Q y a potencial ϕ está dada por

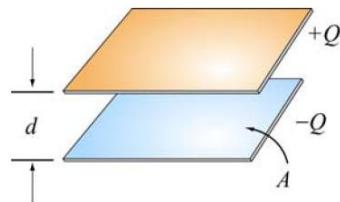
$$U = \frac{1}{2} \phi Q$$

7.1. Condensadores

Un condensador es un dispositivo capaz de acumular carga eléctrica. Éstos pueden variar en tamaño y forma, pero su configuración básica consiste en 2 conductores cargados con cargas iguales y opuestas. Los condensadores son de gran importancia en electrónica, y entre sus aplicaciones más conocidas están el almacenamiento de energía eléctrica, amortiguamiento de los cambios de voltaje cuando se conectan a resistencias, filtros de frecuencias, reguladores de tensión y muchas más.



Cuando se encuentran descargados, la carga en ambos conductores es cero. Durante el proceso de carga, una carga Q se mueve desde un conductor a otro, dándole a uno una carga neta $+Q$ y al otro una carga neta $-Q$. Una diferencia de potencial entre ambos ΔV se crea, con el conductor cargado positivamente a un potencial más alto que el conductor cargado negativamente. Notar que aunque esté cargado o descargado, la carga total del condensador como un todo es cero. El ejemplo más simple de un condensador consiste de 2 placas conductoras de área A , paralelas entre sí, separadas a una distancia d



La carga Q almacenada en un condensador es linealmente proporcional a la diferencia de potencial entre los conductores $|\Delta V|$. Así

$$Q = C|\Delta V|$$

Donde C es una constante positiva llamada **capacidad**. Físicamente, es una medida de la capacidad de almacenar carga eléctrica en sus conductores para una diferencia de potencial dada ΔV . La unidad de capacidad es C/V (Coulomb/Volt), también conocida como F (Farad).

El Farad es una unidad muy grande, condensadores típicos no poseen una capacidad superior a $1 \mu \text{ F}$.

7.2. Ecuaciones de Poisson y Laplace

Dadas las ecuaciones fundamentales de la electrostática

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{x}) = 0$$

Interesa encontrar una formulación matemática equivalente de este problema. Efectivamente, uno podría relacionar ambas ecuaciones, y obtener una única ecuación general que permita solucionar cualquier problema electrostático. De la segunda ecuación, se desprende que

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{x}) = 0 \rightarrow \vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{x})$$

Utilizando ésto en la primera ecuación

$$\vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla}\phi(\vec{x})) = \frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0}$$

Se obtiene la **Ecuación de Poisson**

$$\vec{\nabla}^2\phi(\vec{x}) = -\frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0}$$

Donde el operador $\vec{\nabla}^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$ es el conocido **Laplaciano**. Con esto, hemos logrado reducir aún más el problema de la electrostática, y todo consiste en encontrar un campo escalar que satisfaga la ecuación de Poisson en una región del espacio con las condiciones de borde adecuadas. Una vez resuelta esta ecuación, se puede obtener el campo como $\vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{x})$ y luego todo el problema estará completo.

La ecuación de Poisson es una ecuación diferencial parcial, que en coordenadas cartesianas equivale a

$$\frac{\partial^2\phi(x,y,z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi(x,y,z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi(x,y,z)}{\partial z^2} = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(x,y,z)$$

En regiones del espacio libres de carga ($\rho(\vec{x}) = 0$), se debe resolver la **Ecuación de Laplace** con condiciones de borde adecuadas

$$\vec{\nabla}^2\phi(\vec{x}) = 0$$

Las ecuaciones de Poisson y Laplace aparecen en diversas ramas de la física, como en gravitación, dinámica de fluidos, propagación del calor, etc

Evidentemente, resolver las ecuaciones de Poisson o Laplace puede resultar analíticamente muy complejo, sin embargo existen casos donde la simetría permite resolver éstas ecuaciones sin mayor dificultad. En electrostática existen varios métodos para resolver problemas Poisson - Laplace, algunos de ellos son

Método de las imágenes

Expansión del potencial en polinomios ortogonales

Funciones complejas analíticas, que resuelven Laplace en 2 dimensiones

Método de las funciones de Green

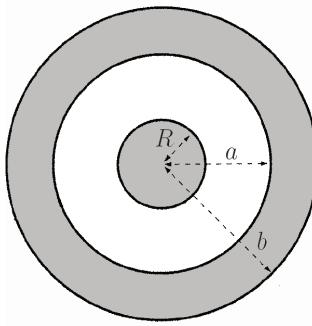
Métodos numéricos

Algunos de estos métodos serán desarrollados en detalle en capítulos siguientes

Problema

Una esfera de metal de radio R y carga q está rodeada por un cascarón esférico metálico de radio interior a y radio exterior b . El cascarón no tiene carga neta

- Encuentre la densidad superficial de carga en cada superficie
- Encuentre el potencial en el centro utilizando infinito como punto de referencia
- Si la esfera exterior se conecta a tierra bajando su potencial a cero (igual que en infinito), ¿Cómo cambian las respuestas anteriores?

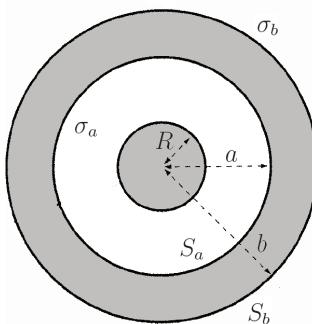


Solución

- Como la esfera de radio R es metálica (conductora), toda la carga debe estar concentrada en su superficie. Dada la simetría esférica del problema, esta distribución de carga debe ser uniforme, es decir

$$\sigma_R = \frac{q}{4\pi R^2}$$

Ahora, el cascarón es eléctricamente neutro, sin embargo en sus superficies (S_a y S_b) se induce carga de forma que el campo eléctrico en su interior sea nulo



Debe tenerse que $\vec{E}(\vec{x}) = \vec{0}$ para $a < r < b$. Tomando una superficie Gaussiana esférica de radio r , $a < r < b$

$$\oint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') = 0$$

ya que $\vec{E}(\vec{x})$ es nulo en todos los puntos interiores del cascarón. Por otro lado

$$\oint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

luego $Q_{int} = 0$, donde

$$Q_{int} = q + \sigma_a 4\pi a^2 = 0$$

y se obtiene la densidad superficial de carga en la superficie interior del cascarón

$$\sigma_a = -\frac{q}{4\pi a^2}$$

Como el cascarón es neutro, debe tenerse que

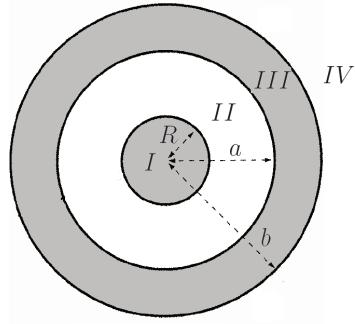
$$\sigma_a 4\pi a^2 + \sigma_b 4\pi b^2 = 0$$

$$-q + \sigma_b 4\pi b^2 = 0$$

$$\sigma_b = \frac{q}{4\pi b^2}$$

Es decir, sobre la superficie interna se induce una carga total $-q$, y sobre la superficie externa, por supuesto, q .

b) Distinguimos 4 regiones, como se indica en la figura



Como las regiones I y III están contenidas en el interior de un conductor

$$\vec{E}(\vec{x}) = 0, \vec{x} \in I, \vec{x} \in III$$

Para encontrar el campo eléctrico en las regiones II , y IV , utilizamos la ley de Gauss. Tomando una superficie esférica de radio r con $R < r < a$ (región II), se tiene

$$\iint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') = 4\pi r^2 E(r) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E}(r) = \frac{q}{4\pi r^2 \epsilon_0} \hat{r}, R < r < a$$

Del mismo modo, para una superficie esférica de radio r , con $r > b$ (región IV), se tiene

$$\iint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') = 4\pi r^2 E(r) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E}(r) = \frac{q}{4\pi r^2 \epsilon_0} \hat{r}, b < r$$

Con esto, podemos calcular el potencial en el origen

$$\phi(0) = \int_0^\infty d\vec{x}' \cdot \vec{E}(\vec{x}')$$

tomando, por supuesto, un camino radial

$$\vec{x}' = r\hat{r}$$

$$d\vec{x}' = dr\hat{r}$$

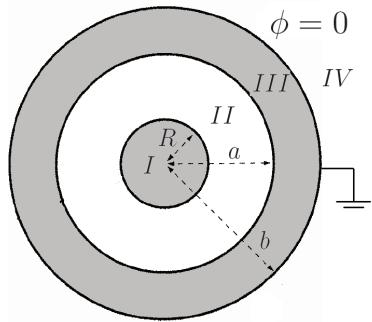
$$r \in [r, \infty]$$

$$\phi(0) = \int_0^\infty dr\hat{r} \cdot \vec{E}(r)\hat{r} = \int_0^\infty dr E(r)$$

$$\phi(0) = \int_0^R dr E(r) + \int_R^a dr E(r) + \int_a^b dr E(r) + \int_b^\infty dr E(r)$$

$$\phi(0) = \int_R^a \frac{dr q}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \int_b^\infty \frac{dr q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{R} - \frac{1}{a} \right)$$

c) Ahora, se tiene



Al igual que antes debe tenerse que $\vec{E}(\vec{x}) = 0$ para $\vec{x} \in III$ (interior de un conductor). Esto simplemente se traduce en

$$q + \sigma_a 4\pi a^2 = 0$$

(por ley de Gauss). Es decir, al igual que antes

$$\sigma_a = -\frac{q}{4\pi a^2}$$

Además el potencial ahora es nulo sobre la superficie exterior S_b , esto quiere decir que

$$\phi(b) = \int_b^\infty d\vec{x}' \cdot \vec{E}(\vec{x}') = 0$$

para cualquier camino entre b y el infinito. Por supuesto, esto requiere que

$$\vec{E}(\vec{x}') = 0 \forall \vec{x}' \in IV$$

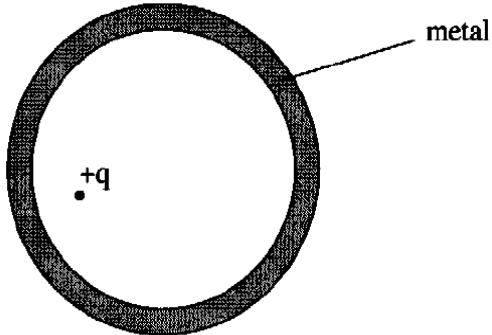
Notar que esto implica que la carga encerrada por una superficie Gaussiana contenida en IV necesariamente es cero. Es decir, el cascarón ya no es un objeto eléctricamente neutro (se debe inducir una carga neta en él, igual a $-q$).

$$q + \sigma_a 4\pi a^2 + \sigma_b 4\pi b^2 = q - q + \sigma_b 4\pi b^2 = 0$$

$$\sigma_b = 0$$

Problema

Una esfera metálica se encuentra inicialmente descargada. Ahora imagine que una carga positiva q es colocada en algún lugar (no necesariamente al medio) dentro de la esfera y sin tocar las paredes.



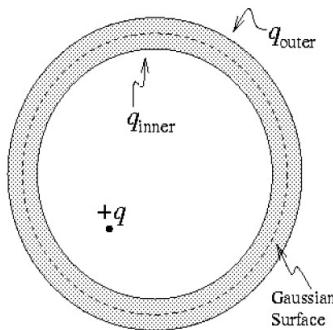
- ¿Qué carga se induce en la pared interior y exterior de la esfera? Indicar cualitativamente la concentración de densidad de carga inducida. Describir cómo son las líneas de campo eléctrico dentro y fuera de la esfera
- Suponga que se mueve la carga q dentro de la cavidad. ¿Cambia la distribución en la superficie exterior de la esfera?
- Ahora se coloca la carga q en contacto con la superficie interior de la esfera. ¿Cómo queda la distribución de carga en la superficie interior y exterior?
- ¿Qué sucede si ahora se acerca otra carga q' cerca de la superficie exterior del conductor?

Solución

a) La carga q en el interior de la esfera metálica inducirá una separación de carga en el metal. Sea q_{int} la carga total inducida en la superficie interior, y q_{out} la carga total inducida en la superficie exterior. Debido a que la esfera inicialmente se encuentra descargada, la ley de conservación de la carga indica que se debe tener

$$q_{in} + q_{out} = 0$$

¿Cuánto vale q_{int} ? Tomemos una superficie Gaussiana contenida enteramente dentro del cascarón esférico como se muestra en la figura



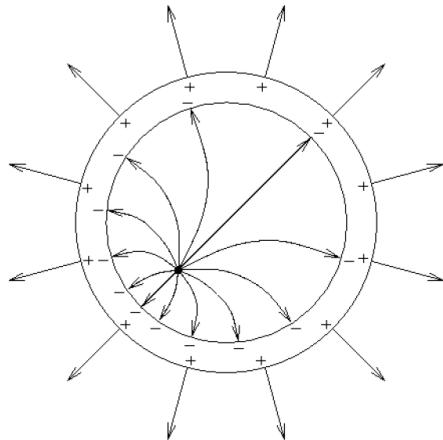
La carga total encerrada por esta superficie es

$$q_{enc} = q_{int} + q$$

Pero, debido a que el campo eléctrico \vec{E} es cero en el interior de metal, la ley de Gauss indica

$$\iint d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \frac{(q_{int} + q)}{\epsilon_0} = 0$$

De esta forma $q_{int} = -q$, y entonces $q_{out} = q$. La distribución de éstas cargas y sus respectivas líneas de campo son como se aprecia en la siguiente figura



La carga negativa en la superficie interna se concentra mayoritariamente en la parte de la esfera más cercana a la carga q . En contraste, la carga positiva de la superficie exterior se distribuye uniformemente sobre la superficie exterior. Ésto último debido a que la esfera metálica es una superficie equipotencial, y la única forma de que esto suceda es que el campo sea radial y uniforme sobre la superficie exterior

El campo eléctrico fuera de la esfera es

$$\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

tal como si la carga q se encontrara en el centro del conductor

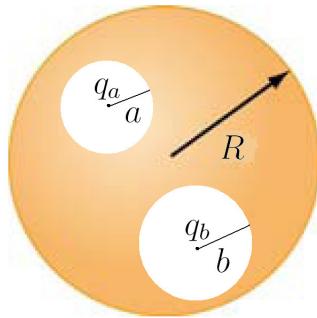
b) La distribución de carga en el exterior no cambia al mover la carga q en el interior, por la misma razón anterior. Por supuesto, la carga inducida en el interior de la superficie si se vuelve a distribuir en la medida que movemos q , para asegurar que el campo en su interior siga siendo nulo $\vec{E} = 0$. Esto resulta interesante, pues desde el exterior del conductor podríamos saber cuanta carga se encuentra en el interior, pero no podremos asegurar en qué posición se encuentra.

c) Cuando la carga q toca la superficie interior, la carga inducida $-q$ se concentrará enteramente en el punto de contacto y cancelará la carga q .

d) Si se acerca ahora otra carga q' al exterior de la esfera, entonces la carga se distribuirá en la superficie exterior de forma de ser una equipotencial. La distribución de carga al interior no cambia debido a la presencia de una carga en el exterior. En otras palabras, si una cavidad está encerrada en un conductor, ninguna distribución estática de carga en el exterior podrá producir campos dentro. Este principio se conoce como shielding, y explica el por qué los aparatos eléctricos se encuentran en cubiertas metálicas. .

Problema

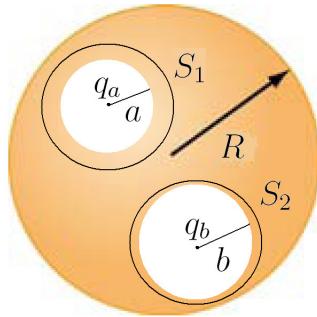
Dos cavidades esféricas, de radios a y b están contenidas en el interior de una esfera conductora neutra de radio R . En el centro de cada cavidad hay una carga puntual q_a y q_b



- Encuentre las densidades de carga superficiales
- ¿Cuál es el campo eléctrico fuera del conductor?
- ¿Cuál es el campo dentro de cada cavidad?

Solución

a) Sobre las superficies S_a y S_b en cada cavidad se inducirá carga de forma anular el efecto de las cargas puntuales en el interior del conductor. Sean dos superficies S_1 y S_2 como se muestra en la figura



Como S_1 está contenida en el interior del conductor

$$\iint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') = 0 = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

se obtiene

$$Q_{int} = 0 = q_a + \sigma_a 4\pi a^2 = 0$$

se obtiene la densidad superficial de carga inducida en la cavidad

$$\sigma_a = \frac{-q_a}{4\pi a^2}$$

Del mismo modo, y utilizando la ley de Gauss con la superficie S_2 , se obtiene

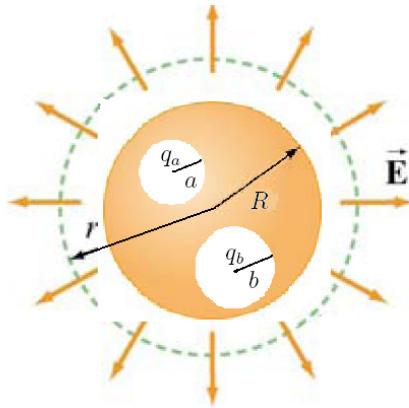
$$\sigma_b = -\frac{q_b}{4\pi b^2}$$

Como el conductor es neutro, se inducirá carga en la superficie exterior, de forma que

$$-q_a - q_b + \sigma_R 4\pi R^2 = 0$$

$$\sigma_R = \frac{q_a + q_b}{4\pi R^2}$$

b) El efecto de las cargas puntuales q_a y q_b es anulado mediante las cargas inducidas en las cavidades. Con esto, el campo exterior posee una simetría esférica, y se puede obtener por la ley de Gauss



$$\oint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') = 4\pi r^2 E(r) = \frac{q_a + q_b}{\epsilon_0}$$

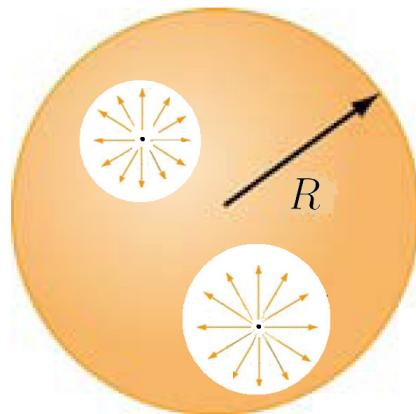
$$\vec{E}(r) = \frac{q_a + q_b}{4\pi r^2 \epsilon_0} \hat{r}, r > R$$

c) Dentro de la cavidad a , el campo es simplemente el de la carga puntual q_a

$$\vec{E}_a = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r_a^2} q_a \hat{r}_a$$

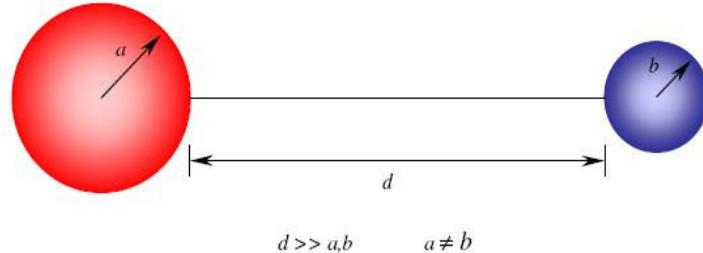
donde r_a es la distancia desde un punto interior a la cavidad a a la carga puntual q_a . Del mismo modo, dentro de la cavidad b

$$\vec{E}_b = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r_b^2} q_b \hat{r}_b$$



Problema

Un sistema de dos esferas de radio a y b (con $a > b$) conductoras cargadas posee una carga total Q . Si ellas están separadas por una gran distancia y se les conecta con un alambre conductor de dimensiones despreciables, calcule la carga total sobre cada esfera y la magnitud aproximada del campo eléctrico sobre la superficie de cada una.



Solución

Sabemos lo siguiente: Cada esfera tiene una carga desconocida, pero su suma sí lo es

$$Q_A + Q_B = Q$$

Notemos que el sistema entero es un conductor, y por lo tanto, es un equipotencial. Además, como las esferas están separadas por una gran distancia, entonces el campo producido por una afecta de manera despreciable el campo de la otra. En la vecindad exterior de A , el campo es de la forma

$$\vec{E}_A = \frac{Q_A}{4\pi\epsilon_0 r_A^2} \hat{r}_A$$

y en la vecindad de B es de la forma

$$\vec{E}_B = \frac{Q_B}{4\pi\epsilon_0 r_B^2} \hat{r}_B$$

Ahora usemos el hecho que el sistema completo es un conductor, y por lo tanto $\phi(a) - \phi(b) = 0$

$$\phi(a) = - \int_{\infty}^a \vec{E}_A \cdot d\vec{l} = \frac{Q_A}{4\pi a \epsilon_0}$$

$$\phi(b) = - \int_{\infty}^b \vec{E}_A \cdot d\vec{l} = \frac{Q_B}{4\pi b \epsilon_0}$$

De donde

$$\frac{Q_A}{4\pi\epsilon_0 a} = \frac{Q_B}{4\pi\epsilon_0 b}$$

Lo que equivale a

$$Q_A = Q_B \frac{a}{b}$$

y usando que $Q = Q_A + Q_B$

$$Q_A = \frac{aQ}{a+b}$$

$$Q_B = \frac{bQ}{a+b}$$

Con esto, el campo eléctrico sobre la superficie de la esfera A tiene como magnitud

$$E_A = \frac{aQ}{4\pi\epsilon_0(a+b)a^2}$$

$$E_A = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(a+b)a}$$

y para la esfera B

$$\vec{E}_B = \frac{bQ}{4\pi\epsilon_0(a+b)b^2}$$

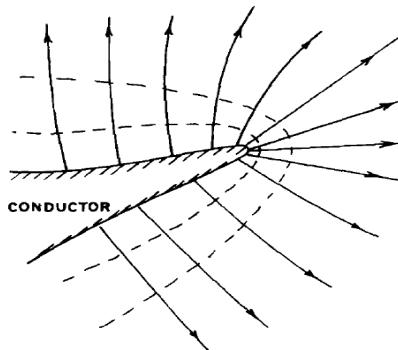
$$\vec{E}_B = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(a+b)b}$$

De esta forma,

$$\frac{E_A}{E_B} = \frac{b}{a} < 1$$

Es decir, el campo eléctrico sobre la esfera de radio menor es mayor que el campo sobre la esfera de radio mayor. Los campos están en proporción inversa de los radios.

Éste es un efecto muy conocido, y ocurre cuando se carga un conductor que no es esférico, por ejemplo, alguno que tenga una punta o un lado muy puntiagudo, como el de la figura

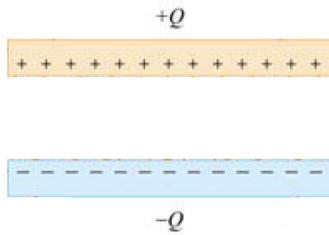


Entonces una cantidad relativamente pequeña de carga acumulada en la punta puede generar una densidad superficial de carga muy grande, y como consecuencia, un mayor campo justo afuera. Este resultado es técnicamente muy importante, por que por ejemplo el aire se vuelve conductor si el campo es demasiado grande.

Lo que sucede es que un ion cerca de la punta es acelerado por este campo intenso, y si el campo es lo suficientemente grande, el ion puede obtener suficiente energía cinética antes que golpee otro atomo y entonces podrá arrancar otro electrón de éste atomo. Como resultado, se producen más y más iones. Este movimiento constituye una descarga. Si se desea cargar entonces un conductor a un potencial alto y que no se produzcan descargas sobre él en el aire, hay que asegurarse que la superficie sea suave, de forma que no hayan partes donde el campo sea anormalmente alto

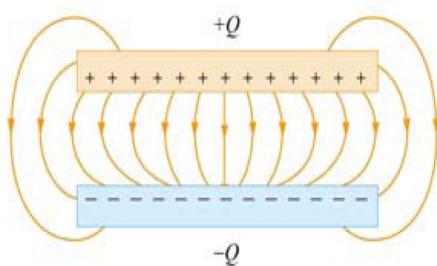
Problema

Considera dos placas metálicas conductoras de igual área A y separadas una distancia d . La placa superior posee carga $+Q$ mientras que la placa inferior tiene carga $-Q$. Encontrar la capacidad del sistema



Solución

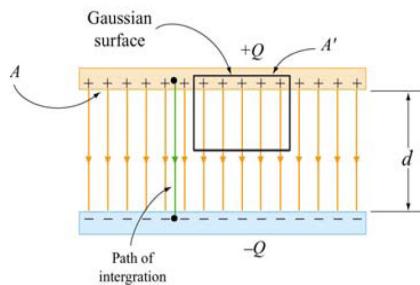
Para encontrar la capacidad C , primero debemos conocer la forma del campo eléctrico en el interior del condensador (y luego determinar la diferencia de potencial entre placas). Por supuesto que un condensador real tiene un largo finito, luego, las líneas de campo cerca del borde de las placas se deforman, y el campo no está contenido totalmente entre las placas. En la figura se aprecian las líneas de campo considerando el efecto de los bordes



De todas formas, ignoraremos éste tipo de efectos asumiendo una situación ideal, en donde las líneas de campo son rectas. En el límite cuando las placas tienen largo infinito (o bien un largo mucho mayor que la separación), el campo tendrá simetría plana y entonces podemos usar la ley de Gauss para determinar su magnitud

$$\oint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$$

Elegimos una superficie de Gauss con forma de caja, de área A' , tal como muestra la figura



Como el campo en el interior del conductor es nulo, sólo hay flujo sobre una de las tapas, de esta forma la ley de Gauss queda

$$\oint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') = EA' = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A'}{\epsilon_0}$$

de donde el campo eléctrico al interior del condensador tiene magnitud igual a

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Ahora, la diferencia de potencial entre las placas del condensador se obtiene integrando el campo sobre una curva que va desde la placa positiva hasta la placa negativa. Por supuesto elegimos una trayectoria paralela en todo instante al campo

$$\Delta V = \phi_- - \phi_+ = - \int_+^- \vec{E} \cdot d\vec{l} = -Ed$$

Para obtener la capacidad, el término relevante es el valor absoluto de esta diferencia de potencial, digamos

$$|\Delta V| = Ed$$

De esta forma, la capacidad de un condensador plano está dada por

$$C = \frac{Q}{|\Delta V|} = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

Claramente depende únicamente de la geometría del condensador, y aumenta linealmente con el área de las placas. Mientras mayor área, mayor capacidad de almacenar carga tiene para una misma diferencia de potencial entre sus placas. Además es inversamente proporcional a la distancia d entre placas, esto debido a que mientras menor es la distancia, menor es la diferencia de potencial entre ambas para una carga fija Q .

Ahora, si tenemos un condensador plano de área cuadrada y de lado 10 cm, tendremos $A = 0,1 \times 0,1 = 0,01 \text{ m}^2$

Suponiendo un ancho $d = 1 \text{ cm}$, tenemos que la capacidad vale

$$C = \frac{9 \times 10^{-12} \times 0,01}{0,01}$$

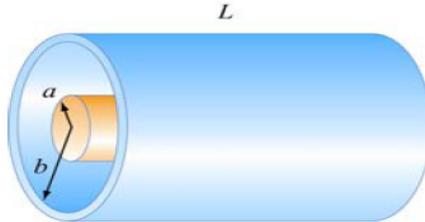
$$C = 9 \times 10^{-12} \text{ F}$$

Como ejemplo, si al condensador se aplica una diferencia de potencial de 1,5 Volts (pila 2A), será capaz de almacenar una carga igual a

$$Q = C\Delta V = 1,5 \times 9 \times 10^{-12} = 1,35 \times 10^{-11}$$

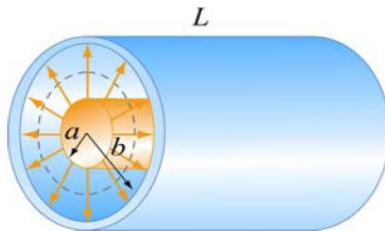
Problema

Considera un cilindro sólido de radio a rodeado por una cáscara cilíndrica de radio interior b . La longitud de ambos cilindros es L y consideramos que este largo es mucho mayor que las dimensiones de $b-a$, la separación entre cilindros, de manera que se puede despreciar los efectos de borde. El condensador se carga de forma que el cilindro interior posea carga Q y el exterior carga $-Q$. ¿Cuál es la capacidad?



Solución

Para obtener la capacidad debemos primero obtener el campo eléctrico en cualquier parte en la región entre ambos conductores. Debido a la simetría cilíndrica del sistema, elegimos por supuesto una superficie Gaussiana como un cilindro coaxial con longitud $l < L$ y radio r donde $a < r < b$. Usando la ley de gauss, tenemos



$$\iint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') = \iint_S E(r)\hat{r} \cdot dS\hat{r} = E(r)2\pi rl$$

Ahora, notar que por la simetría, para que los cilindros sean equipotenciales, el campo debe ser radial a sus superficies, y luego, deben tener una densidad superficial de carga uniforme σ . La carga encerrada por el cilindro de Gauss es, simplemente

$$q_{in} = \frac{2\pi al\sigma}{\epsilon_0}$$

Con esto,

$$E(r) = \frac{a\sigma}{\epsilon_0 r}$$

Notar que el campo eléctrico es diferente de cero únicamente en la region $a < r < b$. Para $r < a$ la carga encerrada es $q_{enc} = 0$ ya que la carga neta del conductor de radio a debe ubicarse sobre su superficie. Del mismo modo, para $r > b$, la carga total encerrada es 0, debido a que un condensador en su totalidad es neutro, es decir, cualquier superficie que encierre completamente al condensador encierra una carga total igual a cero.

La diferencia de potencial está dada por

$$\Delta V = \phi_b - \phi_a = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_a^b E_r dr$$

$$\phi_b - \phi_a = - \frac{a\sigma}{\epsilon_0} \int_a^b \frac{dr}{r} = - \frac{a\sigma}{\epsilon_0} \ln \left(\frac{b}{a} \right)$$

donde el camino de integración tiene la dirección radial del campo eléctrico. Como era de esperarse, el conductor exterior con carga negativa tiene menor potencial. De esta forma tenemos

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\sigma 2\pi a L \epsilon_0}{a \sigma \ln(\frac{b}{a})} = \frac{2\pi \epsilon_0 L}{\ln(b/a)}$$

Claramente sólo función de los factores geométricos. Consideremos un condensador cilíndrico de largo $L = 5$ cm

$b = 0,5$ cm, $a = 0,1$ cm

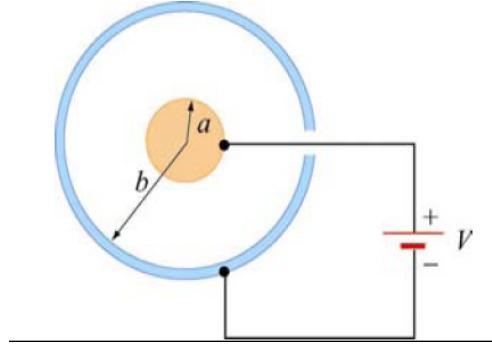
$$C = \frac{2\pi 9 \times 10^{-12} \times 0,05}{\ln(5)} = 1,75 * 10^{-12} F$$

Si conectamos una batería de 5 Volt a este condensador, se almacenará una carga de

$$Q = C \Delta V = 8,784 \times 10^{-12} C$$

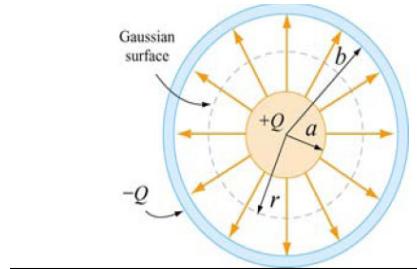
Problema

Considere un condensador esférico, que consiste de 2 esferas concéntricas de radios a y b . La cáscara interior posee carga Q distribuida uniformemente sobre su superficie, y la esfera exterior posee una carga igual pero opuesta $-Q$. Cuál es la capacidad de esta configuración?



Solución

El campo eléctrico sólo es distinto de cero en la región $a < r < b$. Usando la ley de Gauss con una superficie esférica y de radio r como se muestra en la figura



$$\iint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') = E_r A = E_r 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

de donde

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

La diferencia de potencial entre las dos cáscaras conductoras es

$$\Delta V = \phi_b - \phi_a = - \int_a^b d\vec{l} \cdot \vec{E}$$

$$\phi_b - \phi_a = - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{dr}{r^2} = - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{b-a}{ab} \right)$$

de donde obtenemos

$$C = \frac{Q}{|\Delta V|} = 4\pi\epsilon_0 \left(\frac{ab}{b-a} \right)$$

Ahora, para un conductor esférico aislado, también se puede hablar de capacidad, ésta se obtiene teniendo el radio b a infinito, luego, la capacidad de la esfera conductora de radio a es

$$C_a = \lim_{b \rightarrow \infty} C = 4\pi\epsilon_0 \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{ab}{b-a} \right) = 4\pi\epsilon_0 \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{a}{\left(1 - \frac{a}{b}\right)} = 4\pi\epsilon_0 a$$

Luego, para una esfera conductora de radio R , su capacidad es

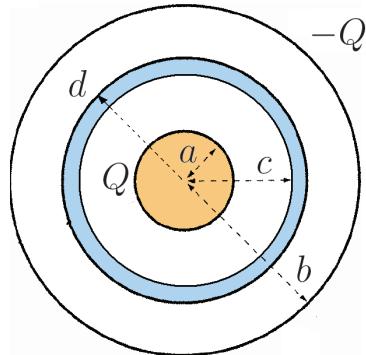
$$C = 4\pi\epsilon_0 R$$

Este resultado también se podría obtener considerando que una esfera de radio R con carga Q uniformemente distribuida sobre su superficie posee un potencial $\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$, usando infinito como referencia para el potencial, esto da

$$C = \frac{Q}{|\Delta V|} = \frac{Q}{Q/4\pi\epsilon_0 R} = 4\pi\epsilon_0 R$$

Problema

Consideré un conductor esférico de radio a dentro de otro de radio b . En el espacio entre ambos conductores se introduce un cascarón esférico (concéntrico) conductor de radios interno y externo c y d , respectivamente. Si el conductor de radio a tiene carga Q y el exterior de radio b tiene $-Q$, discuta que ocurre con la capacidad al introducir el cascarón

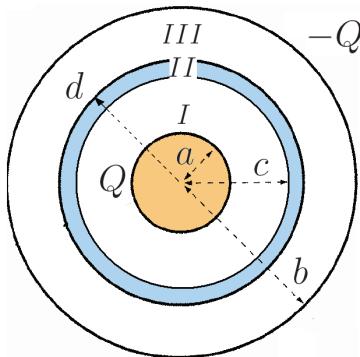


Solución

En el problema anterior se obtuvo que la capacidad de un condensador esférico está dada por

$$C = \frac{Q}{|\Delta V|} = 4\pi\epsilon_0 \left(\frac{ab}{b-a} \right)$$

Veamos que ocurre cuando se introduce un conductor neutro entre a y b . Distinguimos 3 regiones, como se indica en la figura



Claramente el campo (de existir) en todo el espacio presenta una dependencia radial. Por ley de Gauss, utilizando una superficie esférica de radio r , con $a < r < c$

$$\oint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') = E(r)4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}, a < r < c$$

Para la región II , dada por $c < r < d$

$$\vec{E}(\vec{x}) = 0, \forall \vec{x} \in II$$

pues corresponde al interior de un conductor. En consecuencia, se induce una carga $-Q$ sobre la superficie interna del cascarón. Dado que éste es neutro, sobre su superficie exterior se induce carga Q . Para la región III , exactamente el mismo resultado encontrado en la región I

se obtiene para el campo eléctrico $\vec{E}(r)$, $d < r < b$. Vemos que este conductor altera el campo eléctrico en el interior (con respecto al caso en que no está), donde la única diferencia es que se anula para cierta región interior, claramente disminuyendo la diferencia de potencial entre el conductor de radio a y el conductor de radio b , en consecuencia, aumentará la capacidad del sistema. En efecto

$$\Delta V = \phi_a - \phi_b = \int_a^b d\vec{x} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \int_a^b d\vec{r} \cdot \vec{E}(r)$$

donde se ha utilizado un camino radial para calcular la integral de línea, dada la naturaleza del campo

$$\Delta V = \int_a^c d\vec{r} \cdot \vec{E}(r) + \int_c^d d\vec{r} \cdot \vec{E}(r) + \int_d^b d\vec{r} \cdot \vec{E}(r)$$

y como $\vec{E}(r) = 0 \forall c < r < d$

$$\Delta V = \int_a^c d\vec{r} \cdot \vec{E}(r) + \int_d^b d\vec{r} \cdot \vec{E}(r)$$

$$\Delta V = \int_a^c dr \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \int_d^b dr \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$\Delta V = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c} + \frac{1}{d} - \frac{1}{b} \right) \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}$$

$$\Delta V = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{d} - \frac{1}{c} \right) \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}$$

Pero $c < d$, entonces

$$\frac{1}{c} > \frac{1}{d} \Rightarrow \frac{1}{d} - \frac{1}{c} < 0$$

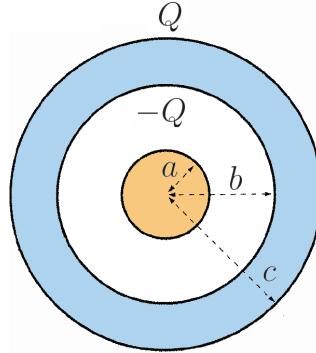
En consecuencia, la diferencia de potencial entre el conductor interior y exterior disminuye en comparación al caso en que no está el cascarón. De esta forma

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

es mayor que el del condensador esférico original

Problema

Tres cáscaras esféricas conductoras concéntricas muy delgadas poseen radios a, b , y c , respectivamente, siendo $a < b < c$. Inicialmente la cáscara interior está descargada, la del medio posee una carga total negativa $-Q$ y la externa una carga total positiva Q



- Encuentre el potencial electrostático en cada una de las cáscaras conductoras
- Si las cáscaras interior y exterior son conectadas mediante un alambre conductor muy delgado que está aislado al pasar por la cáscara central, ¿Cuál es ahora el potencial eléctrico de cada una de las cáscaras? ¿Cuál es la carga en cada una de las esferas?

Solución

Distinguimos naturalmente tres regiones del espacio, dadas por $I : r < a$, $II : a < r < b$, $III : b < r < c$, $IV : r > c$. En cada una de ellas el campo eléctrico posee dirección radial y su magnitud depende únicamente de la distancia r al centro del conductor interno. Utilizando la ley de Gauss para la región $I : r < a$

$$\iint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') = 0, \forall S \in I$$

pues $\vec{E}(\vec{x}) = 0 \forall \vec{x} \in I$ (interior de un conductor). Para la región II

$$\iint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = 0$$

pues la cáscara de radio a se encuentra inicialmente descargada. De esta forma, el campo eléctrico también es nulo en esta región, $\vec{E}(\vec{x}) = 0 \forall \vec{x} \in II$. Del mismo modo, utilizando una superficie esférica de radio r , con $b < r < c$

$$\begin{aligned} \iint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') &= 4\pi r^2 E(r) = \frac{-Q}{\epsilon_0} \\ \vec{E}(r) &= \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \end{aligned}$$

Por último, para $r > c$

$$\iint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') = 0, \forall S \in IV$$

pues la carga encerrada por cualquier superficie contenida en la región IV es cero. En resumen

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r < b \\ \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} & \text{si } b < r < c \\ 0 & \text{si } r > c \end{cases}$$

El potencial en la cáscara exterior es

$$\phi(c) = \int_c^\infty d\vec{x}' \cdot \vec{E}(\vec{x})$$

tomando por supuesto un camino radial $\vec{x}' = r\hat{r}$, $d\vec{x}' = dr\hat{r}$, $r \in (c, \infty)$

$$\phi(c) = \int_c^\infty dr\hat{r} \cdot \vec{E}(r) = 0$$

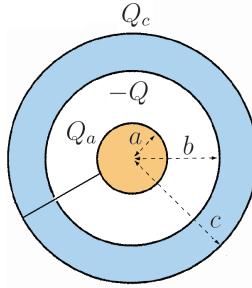
El potencial en la cáscara de radio b es

$$\begin{aligned}\phi(b) &= \int_b^\infty dr\hat{r} \cdot E(r)\hat{r} = \int_b^c dr \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \\ \phi(b) &= -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_b^c \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \Big|_b^c \\ \phi(b) &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{b-c}{bc} \right)\end{aligned}$$

por último, el potencial en $r = a$ es

$$\begin{aligned}\phi(a) &= \int_a^\infty dr\hat{r} \cdot E(r)\hat{r} = \int_a^b dr E(r) + \int_b^c dr E(r) + \int_c^\infty dr E(r) \\ \phi(a) &= \int_b^c dr E(r) = \phi(b) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{b-c}{bc} \right)\end{aligned}$$

b) Ahora se tiene la siguiente configuración



Los conductores de radio a y c se encuentran unidas al mismo potencial. De esta forma, la carga contenida inicialmente en estos dos conductores se distribuirá, donde por supuesto se debe tener

$$Q_a + Q_c = Q$$

Definiendo las mismas regiones anteriores, nuevamente se tiene

$$\vec{E}(\vec{x}) = 0, \forall \vec{x} \in I$$

$$\vec{E}(\vec{x}) = 0, \forall \vec{x} \in IV$$

(región I es el interior de un conductor y la carga total del sistema sigue siendo nula). El campo en la región II se obtiene con la ley de Gauss (superficie esférica de radio r , $a < r < b$)

$$\iint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') = E(r) 4\pi r^2 = \frac{Q_a}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E}(r) = \frac{Q_a}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

y del mismo modo, tomando una superficie esférica de radio r , $b < r < c$

$$\iint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') = E(r) 4\pi r^2 = \frac{-Q + Q_a}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E}(r) = \frac{Q_a - Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

El potencial en $r = c$ es, por supuesto, nulo

$$\phi(c) = \int_c^\infty dr E(r) = 0$$

además

$$\begin{aligned}\phi(b) &= \int_b^\infty dr E(r) = \int_b^c dr E(r) = \int_b^c dr \frac{Q_a - Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \\ \phi(b) &= \frac{Q_a - Q}{4\pi\epsilon_0} \int_b^c dr \frac{1}{r^2} = \frac{Q_a - Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{c-b}{bc} \right)\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\phi(a) &= \int_a^\infty dr E(r) = \int_a^b dr E(r) + \phi(b) \\ \phi(a) &= \phi(b) + \int_a^b dr \frac{Q_a}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \phi(b) + \frac{Q_a}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{b-a}{ab} \right)\end{aligned}$$

pero las cargas inducidas en a y c deben ser tal que

$$\phi(a) = \phi(c) = 0$$

luego

$$\phi(a) = \frac{Q_a - Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{c-b}{bc} \right) + \frac{Q_a}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{b-a}{ab} \right) = 0$$

$$\phi(a) = (Q_a - Q) \frac{c-b}{bc} + Q_a \frac{b-a}{ab} = 0$$

$$Q_a \left(\frac{c-b}{bc} + \frac{b-a}{ab} \right) = Q \frac{c-b}{bc}$$

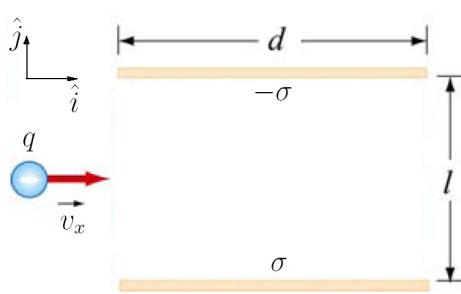
$$Q_a \left(\frac{ac-ab+bc-ac}{abc} \right) = Q \frac{c-b}{bc} \rightarrow Q_a \left(\frac{b(c-a)}{a} \right) = Q(c-b)$$

Finalmente

$$Q_a = Q \frac{a(c-b)}{b(c-a)}$$

Problema

Considera un condensador de placas paralelas cargadas con densidades σ y $-\sigma$, como muestra la figura. Se arroja una carga q horizontalmente por el espacio entre las placas con velocidad v_x . Encuentre la trayectoria seguida por la partícula cargada y el ángulo que forma su vector velocidad con la horizontal al momento de salir, considerando que l es lo suficientemente grande como para que la carga no choque con alguna de las placas. Considera además que en todo instante la carga q siente una fuerza electrostática



Solución

El campo eléctrico en la región entre placas, despreciando efectos de borde y considerando $d \gg l$ está dado por

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{j} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{j}$$

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{j}$$

Así, la fuerza electrostática que siente la carga q está dada por

$$\vec{F} = q \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{j}$$

Notar que estrictamente esto es válido únicamente cuando q está quieta, sin embargo consideraremos que esta fuerza de interacción se mantiene a medida que la carga se mueve. De la segunda ley de Newton

$$\vec{a} = \frac{1}{m} \vec{F} = \frac{q\sigma}{m\epsilon_0} \hat{j}$$

De esta forma, la cinemática de la carga está descrita por

$$x(t) = v_x t$$

$$y(t) = \frac{1}{2} \frac{q\sigma}{m\epsilon_0} t^2$$

y las velocidades

$$V_x(t) = v_x$$

$$V_y(t) = at = \frac{q\sigma}{m\epsilon_0} t$$

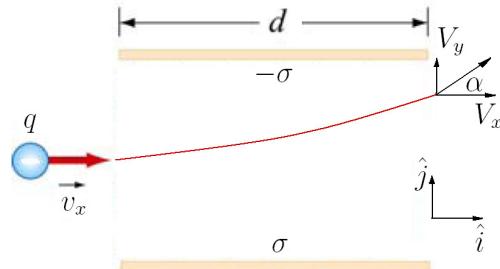
donde el origen coincide con la posición inicial de la carga la momento de ingresar a la región. Para obtener la trayectoria, utilizamos

$$t = \frac{x(t)}{v_x}$$

y entonces

$$y(x) = \frac{1}{2} \frac{q\sigma}{m\epsilon_0} \frac{x^2}{v_x^2}$$

la trayectoria es una parábola en el plano $x - y$



El tiempo que demora la carga en llegar al extremo derecho es

$$t_d = \frac{d}{v_x}$$

con esto, la velocidad vertical en el momento en que sale es

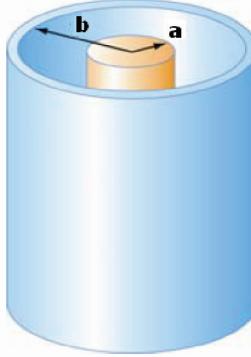
$$V_y(t_d) = at_d = \frac{q\sigma}{m\epsilon_0} \frac{d}{v_x}$$

y el ángulo α está dado por

$$\begin{aligned} \alpha &= \tan^{-1} \left(\frac{V_y(t_d)}{V_x(t_d)} \right) \\ \alpha &= \tan^{-1} \left(\frac{q\sigma d}{m\epsilon_0 v_x^2} \right) \end{aligned}$$

Problema

Dos cilindros muy largos y concéntricos, de radios a y b , con $b > a$, se encuentran inicialmente descargados. La región entre ambos se llena con una densidad homogénea de carga ρ , y luego cada uno de los cilindros se conectan a tierra. Calcule, resolviendo la ecuación de Poisson, el potencial y el campo eléctrico en la región interior.



Solución

En la región interior a ambos cilindros, es decir $a < r < b$, el potencial satisface la ecuación de Poisson

$$\vec{\nabla}^2 \phi(\vec{x}) = -\frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0}$$

Si usamos coordenadas cilíndricas, el potencial podría depender de ϑ , r y z . Sin embargo, de la simetría del problema es evidente que

$$\frac{\partial \phi}{\partial \varphi} = 0$$

con lo que $\phi = \phi(r, z)$. Además, debido a que la longitud de los cilindros es mucho mayor a $(b-a)$, el potencial también debe ser simétrico con respecto a z . De esta forma, podemos despreciar efectos de borde y considerar que el potencial es sólo una función radial de la forma $\phi = \phi(r)$

Ahora, el Laplaciano en coordenadas cilíndricas para una función que sólo depende de r es

$$\vec{\nabla}^2 \phi(r) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right)$$

De esta forma, la ecuación de Poisson se transforma en

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Equivalentemente

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = -\frac{r\rho}{\epsilon_0}$$

Luego

$$r \frac{\partial \phi}{\partial r} = - \int dr \frac{r\rho}{\epsilon_0} + C$$

$$r \frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{r^2 \rho}{2\epsilon_0} + C$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{r\rho}{2\epsilon_0} + \frac{C}{r}$$

Finalmente

$$\begin{aligned}\phi(r) &= - \int dr \frac{r\rho}{2\epsilon_0} + \int dr \frac{C}{r} \\ \phi(r) &= -\frac{r^2\rho}{4\epsilon_0} + C \ln r + A\end{aligned}$$

Esta es la solución general de la ecuación de Poisson para un potencial de simetría cilíndrica, dependencia radial, y densidad de carga constante. Ahora debemos imponer las condiciones de borde adecuadas para que la solución sea única (Problema Poisson-Dirichlet)

Tenemos $\phi(a) = 0$ Equivale a imponer que la superficie cilíndrica de radio a es una equipotencial conectada a tierra. Luego

$$\phi(a) = -\frac{a^2\rho}{4\epsilon_0} + C \ln a + A = 0$$

Además, $\phi(b) = 0$, con esto

$$\phi(b) = -\frac{b^2\rho}{4\epsilon_0} + C \ln b + A = 0$$

Restando ambas ecuaciones, obtenemos

$$0 = C(\ln a - \ln b) + \frac{(b^2 - a^2)\rho}{4\epsilon_0}$$

De donde obtenemos la constante C

$$C = \frac{(a^2 - b^2)\rho}{4\epsilon_0 \ln(a/b)}$$

De la primera condición despejamos A

$$\begin{aligned}A &= \frac{a^2\rho}{4\epsilon_0} - \ln a \frac{(a^2 - b^2)\rho}{4\epsilon_0 \ln(a/b)} \\ A &= \frac{a^2 \ln(a/b)\rho - \ln a (a^2 - b^2)\rho}{4\epsilon_0 \ln(a/b)} \\ A &= \frac{\rho(b^2 \ln a - a^2 \ln b)}{4\epsilon_0 \ln(a/b)}\end{aligned}$$

Con esto, la solución del potencial para $a < r < b$ es

$$\phi(r) = -\frac{r^2\rho}{4\epsilon_0} + \frac{(a^2 - b^2)\rho}{4\epsilon_0 \ln(a/b)} \ln r + \frac{\rho(b^2 \ln a - a^2 \ln b)}{4\epsilon_0 \ln(a/b)}$$

Hermoso resultado. Ahora, para obtener el campo eléctrico, usamos el hecho

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{x})$$

el operador gradiente en coordenadas cilíndricas para una función que sólo depende de r es

$$\vec{\nabla}\phi(r) = \frac{\partial\phi(r)}{\partial r} \hat{r}$$

de manera que

$$\vec{E}(r) = -\frac{\partial \phi}{\partial r} \hat{r}$$

$$\vec{E}(r) = \left(\frac{r\rho}{2\epsilon_0} - \frac{(a^2 - b^2)\rho}{4\epsilon_0 r \ln(a/b)} \right) \hat{r}$$

que es el campo eléctrico para $a < r < b$. Para $r < a$ es claro que el campo \vec{E} es nulo, ya que no hay carga encerrada por el conductor interior.

Calculemos las densidades de cargas sobre los conductores. Para el conductor interior, tenemos que el campo eléctrico sobre su superficie tiene magnitud

$$E(a) = \frac{a\rho}{2\epsilon_0} - \frac{(a^2 - b^2)\rho}{4\epsilon_0 a \ln(a/b)}$$

La densidad de carga sobre la superficie de un conductor se relaciona con el campo eléctrico según

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Con esto la densidad de carga será

$$\sigma_1 = \epsilon_0 \left(\frac{a\rho}{2\epsilon_0} - \frac{(a^2 - b^2)\rho}{4\epsilon_0 a \ln(a/b)} \right)$$

El campo eléctrico en la superficie del conductor exterior tiene magnitud

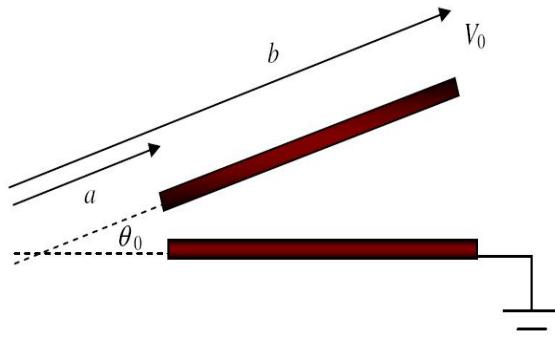
$$E(b) = \frac{b\rho}{2\epsilon_0} - \frac{(a^2 - b^2)\rho}{4\epsilon_0 b \ln(a/b)}$$

y la densidad de carga será

$$\sigma_2 = \epsilon_0 \left(\frac{b\rho}{2\epsilon_0} - \frac{(a^2 - b^2)\rho}{4\epsilon_0 b \ln(a/b)} \right)$$

Problema

Consideré el siguiente dispositivo



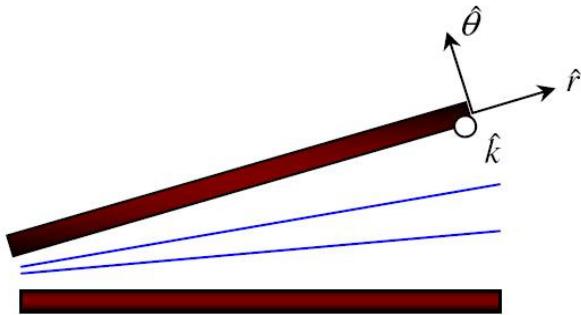
a) Determine el potencial y el campo eléctrico entre las placas.

b) Determine la capacidad por unidad de largo.

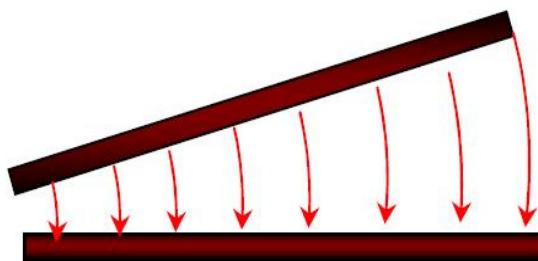
Desprecie los efectos de borde.

Solución

a) Sabemos que las líneas equipotenciales deben respetar la geometría del dispositivo. De esta forma, las equipotenciales serán rectas radiales, es decir



Por lo tanto, las líneas de campo, al ser perpendiculares a las equipotenciales, deben seguir la dirección $\hat{\theta}$, es decir, son arcos concéntricos.



Si suponemos que el dispositivo es muy largo en la dirección Z, entonces se puede suponer que

$$\vec{E} = E(r, \vartheta) \hat{\vartheta}$$

Pero

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi(r, \vartheta) = -\frac{\partial\phi}{\partial r} \hat{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial \vartheta} \hat{\vartheta}$$

Como el campo tiene dirección $\hat{\theta}$, $\frac{\partial \phi}{\partial r} = 0$

Luego, se tiene que el potencial sólo depende de ϑ , lo cual era de esperarse.

Planteamos la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas:

$$\vec{\nabla}^2 \phi = 0 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \vartheta^2} = 0$$

$$\phi(\vartheta) = A\vartheta + B$$

Pero la placa inferior está conectada a tierra

$$\phi(0) = 0 \rightarrow B = 0$$

$$\phi(\vartheta_0) = \phi_0 \rightarrow A = \frac{\phi_0}{\vartheta_0}$$

Finalmente

$$\phi(\vartheta) = \frac{\phi_0}{\vartheta_0} \vartheta$$

$$\vec{E}(r, \vartheta) = -\frac{1}{r} \frac{\phi_0}{\vartheta_0} \hat{\vartheta}$$

b) Calculemos la capacidad por unidad de largo.

$$C = \frac{Q}{V}$$

La carga por unidad de largo, Q , de una de las placas puede calcularse a partir de la densidad de carga σ que aparece en cada placa del condensador. Su valor puede determinarse directamente del campo eléctrico

$$\vec{E} \cdot \hat{n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

De donde obtenemos

$$\sigma = \frac{\epsilon_0}{r} \frac{V_0}{\theta_0}$$

Así, el valor de Q es

$$Q = 1 \int_a^b \sigma(r) dr = \int_a^b \frac{\epsilon_0}{r} \frac{\phi_0}{\vartheta_0} dr = \epsilon_0 \frac{\phi_0}{\vartheta_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Finalmente

$$C = \frac{\epsilon_0}{\vartheta_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

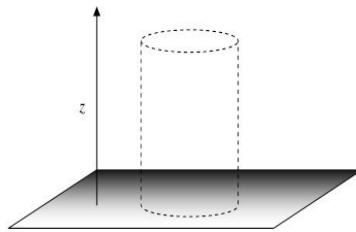
Problema

El campo eléctrico sobre la superficie de la Tierra está dado por la expresión

$$\vec{E}(z) = -(ae^{-\alpha z} + be^{-\beta z})\hat{k}$$

Con $\alpha, \beta > 0$, y z la altura desde la superficie de la tierra.

- a) Determine la densidad de carga
- b) Calcule la cantidad total de carga contenida en una columna vertical de sección S que se extiende teóricamente desde $x=0$ hasta $x = \infty$



Solución

- a) Para obtener la densidad de carga, utilizamos la forma diferencial de la ley de Gauss

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0}$$

En este caso

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

Las componentes de \vec{E} en x e y son nulas, así

$$\alpha ae^{-\alpha z} + \beta be^{-\beta z} = \frac{\rho(z)}{\epsilon_0}$$

Finalmente

$$\rho(z) = \epsilon_0(\alpha ae^{-\alpha z} + \beta be^{-\beta z})$$

- b) La carga total contenida en una columna vertical de sección S será

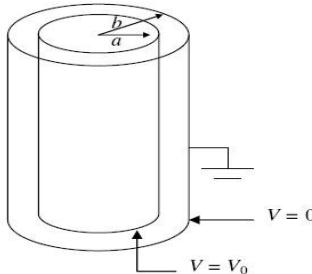
$$Q = \iiint \rho(z) d^3x = S \int_0^\infty \rho(z) dz = S \int_0^\infty \epsilon_0(\alpha ae^{-\alpha z} + \beta be^{-\beta z}) dz$$

$$Q = S\epsilon_0(a + b)$$

Problema

Se tienen dos cilindros conductores coaxiales, uno de radio a y el otro de radio b , conectados a una diferencia de potencial V_0 .

Calcule $\rho(\vec{x})$, $\vec{E}(\vec{x})$ y $\phi(\vec{x})$ en todo el espacio y σ en cada superficie.



Solución

Utilizaremos la ecuación de Laplace, esto es

$$\vec{\nabla}^2 \phi(r) = 0$$

El laplaciano en coordenadas cilíndricas es

$$\vec{\nabla}^2 \phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

Si suponemos que el par de conductores cilíndricos es mucho más alto que su radio, entonces se puede afirmar que el potencial no debe depender de la coordenada z , y por lo tanto $\frac{\partial V}{\partial z} = 0$. Así mismo, como las características de los conductores no varían con el ángulo ϕ , también debe cumplirse que $\frac{\partial V}{\partial \phi} = 0$.

De esta forma la ecuación diferencial que debemos resolver es

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = 0$$

Con condiciones de borde

$$\phi(a) = V_0, \phi(b) = 0$$

Esta ecuación se puede resolver integrándola directamente

$$\phi(r) = A \ln r + B$$

Esta solución general más las condiciones de borde nos entregan un sistema lineal de ecuaciones

$$A \ln(a) + B = V_0$$

$$A \ln(b) + B = 0$$

De donde obtenemos

$$A = \frac{V_0}{\ln(a/b)}$$

$$B = -\frac{V_0}{\ln(a/b)} \ln b$$

Y el potencial entre las placas conductoras es

$$\phi(r) = \frac{V_0}{\ln(a/b)} \ln(r/b)$$

Válida solo entre $a < r < b$

El campo eléctrico se puede calcular como $\vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{x})$, es decir

$$E(r) = -\frac{\partial\phi(r)}{\partial r} = \frac{V_0}{\ln(b/a)} \frac{1}{r}, a < r < b$$

$$\vec{E}(r) = \frac{V_0}{\ln(b/a)} \frac{1}{r} \hat{r}, a < r < b$$

La densidad de carga es $\rho(r) = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$, pero

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r} \right) = 0$$

Con lo que $\rho(r) = 0$, es decir, no hay densidad de carga entre los conductores.

Para determinar las densidades de carga superficial en cada conductor hay que usar el hecho de que el campo en la superficie de un conductor cumple

$$\vec{E} \cdot \hat{n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

De esta forma, para el conductor a

$$\sigma_a = \epsilon_0 \frac{V_0}{a \ln(b/a)}$$

Y para el conductor b

$$\sigma_b = -\epsilon_0 \frac{V_0}{b \ln(b/a)}$$

Todo el desarrollo anterior es válido para $a < r < b$.

En el cilindro interno, ($r < a$)

$$\vec{E}(r) = 0$$

ya que dentro de un conductor en equilibrio electrostático el campo eléctrico es siempre nulo. De esta forma

$$\phi(r) = V_0$$

$$\rho(r) = 0$$

Ahora, si $r > b$, para calcular el campo utilizamos

$$\phi(b) - \phi(\infty) = \int_{\infty}^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{\infty}^b dr E(r)$$

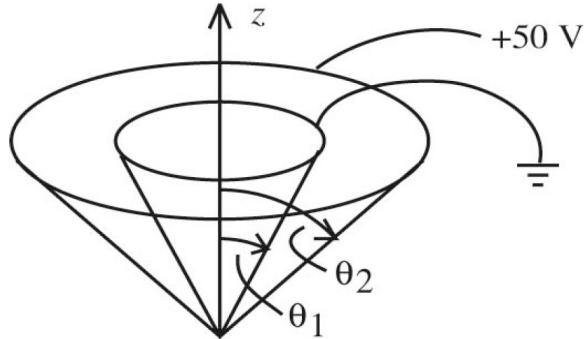
Pero $\phi(b) = 0$, con lo que

$$E(r) = 0$$

Si el campo es 0, entonces $\phi = cte = \phi(b) = 0$, y $\rho(r) = 0$

Problema

Dos conos conductores concéntricos, cuyas ecuaciones en coordenadas esféricas son $\vartheta_1 = \pi/6$, y $\vartheta_2 = \pi/4$ respectivamente, se muestran en la figura. Los conos son de extensión infinita y en $r = 0$ están separados por una distancia infinitesimal. Si el cono interior está a un potencial de 0 V, y el exterior a 50 V, determinar el potencial y el campo eléctrico \vec{E} en la región interior a ambos conductores



Solución

Sea V la región delimitada por $\vartheta_1 < \vartheta < \vartheta_2$. Si no hay densidad de carga libre en V , el potencial satisface la ecuación de Laplace en V

$$\vec{\nabla}^2 \phi = 0$$

Dada la geometría del problema, es conveniente utilizar coordenadas esféricas

$$\vec{\nabla}^2 \phi(r, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2}$$

El problema posee una clara simetría azimutal (el potencial claramente no depende del ángulo polar φ). Además, debe existir una independencia en la coordenada r , pues la extensión de los conos es infinita. De esta forma, el potencial debe ser únicamente función de ϑ , y se debe resolver

$$\vec{\nabla}^2 \phi(r, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} \right) = 0$$

Equivalentemente

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} \right) = 0$$

$$\sin \vartheta \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} = C_1$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} = C_1 \csc \vartheta$$

$$\phi(\vartheta) = C_1 \int \frac{d\vartheta}{\sin \vartheta} + C_2$$

Además

$$\int \frac{d\vartheta}{\sin \vartheta} = \ln (\tan \vartheta/2) + C$$

En efecto

$$\frac{d}{d\vartheta} (\ln(\tan \vartheta/2) + C) = \frac{1}{\tan \vartheta/2} \sec^2 \vartheta/2 \frac{1}{2} = \frac{1}{2 \cos \vartheta/2 \sin \vartheta/2} = \frac{1}{\sin \vartheta}$$

con esto

$$\phi(\vartheta) = C_1 \ln(\tan \vartheta/2) + C_2$$

Debemos imponer las condiciones de borde en las superficies conductoras. Se tiene

$$\phi(\vartheta_1) = 0$$

$$\phi(\pi/6) = C_1 \ln(\tan \pi/12) + C_2 = 0$$

Además

$$\phi(\vartheta_2) = 50$$

$$\phi(\pi/4) = C_1 \ln(\tan \pi/8) + C_2 = 50$$

Resolviendo el sistema para C_1 y C_2

$$50 = C_1 (\ln(\tan \pi/8) - \ln(\tan \pi/12))$$

$$50 = C_1 \ln \left(\frac{\tan \pi/8}{\tan \pi/12} \right)$$

$$C_1 = \frac{50}{\ln \left(\frac{\tan \pi/8}{\tan \pi/12} \right)}$$

y

$$C_2 = -C_1 \ln(\tan \pi/12)$$

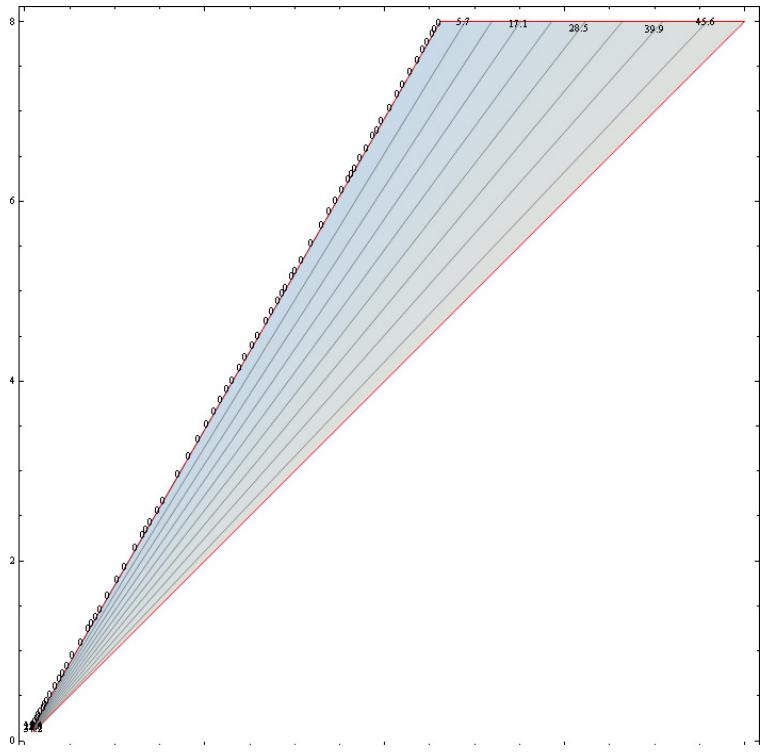
Evaluando

$$C_1 = 114,78834$$

$$C_2 = 151,171411$$

y la solución es

$$\phi(\vartheta) = 114,78834 \ln(\tan \vartheta/2) + 151,171411$$



Para encontrar el campo eléctrico, utilizamos que

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{x})$$

En coordenadas esféricas, y considerando que ϕ solo depende de ϑ

$$\vec{E}(r, \vartheta) = -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} \hat{\vartheta}$$

$$\vec{E}(r, \vartheta) = -\frac{1}{r} \frac{114,78834}{2 \sin \vartheta} \hat{\vartheta}$$

7.3. Almacenamiento de Energía en un condensador

Los condensadores se suelen utilizar para el almacenamiento de energía eléctrica. La cantidad de energía almacenada se puede pensar como el trabajo necesario para cargar al condensador, así, durante el proceso de carga, una fuente de voltaje realiza el trabajo para mover cargas desde una placa a la otra.



Imaginemos que el condensador está inicialmente descargado. En cada placa del condensador hay muchas cargas negativas y positivas, pero están en equilibrio, por lo que la carga total en ambas es cero, y por consiguiente no existe ningún campo eléctrico entre ellas.

Comencemos extrayendo una carga positiva $+dq$ de la placa inferior, llevándola hasta la superior. Al hacer esto, la placa de abajo queda con carga neta $-dq$. Se repite este proceso una y otra vez, de esta manera cargamos el condensador y creamos un campo eléctrico donde no había inicialmente.

Supongamos que la cantidad de carga en la placa superior en un instante dado es $+q$, y la diferencia de potencial correspondiente es $\Delta V = q/C$. Para traer otro elemento de carga $+dq$ a la placa superior, el trabajo necesario será $dU = \Delta V dq$ (Recordar la interpretación física del potencial!). Si al final del proceso la carga en cada placa es de Q (en módulo), entonces el trabajo realizado (energía entregada al sistema) durante el proceso es

$$U = \int_O^Q dU = \int_0^Q dq \Delta V = \int_0^Q dq \frac{q}{C} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

Esto es igual a la energía potencial eléctrica almacenada en un condensador

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} Q \Delta V = \frac{1}{2} C \Delta V^2$$

7.4. Fuerzas entre conductores cargados

Pensemos ahora en una aplicación directa de esta idea de energía electrostática. ¿Cuál será la fuerza entre las placas de un condensador cargado? Evidentemente debe existir una fuerza, ya que ambas placas están cargadas con cargas de signo opuesto. Esta fuerza es fácil de obtener usando el resultado para la energía electrostática de un condensador, usando el principio de trabajo virtual.

Usemos este método para determinar la fuerza entre las placas de un condensador de placas paralelas. Si imaginamos que el espacio entre las placas es incrementado una pequeña cantidad, digamos Δz , entonces el trabajo mecánico realizado para moverlas será

$$W = F \Delta z$$

donde F es la fuerza entre las placas. Este trabajo debe ser igual al cambio en la energía electrostática del condensador. Notando que

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

El cambio en la energía (**si la carga permanece constante**) es

$$\Delta U = \frac{1}{2} Q^2 \Delta \left(\frac{1}{C} \right)$$

Luego, se tiene

$$F \Delta z = \frac{Q^2}{2} \Delta \left(\frac{1}{C} \right)$$

Esto se puede reescribir como

$$F \Delta z = -\frac{Q^2}{2C^2} \Delta C$$

Esta fuerza, por supuesto, resulta de la atracción de las cargas en las placas, pero vemos que no nos tenemos que preocupar en detalle sobre como están distribuidas, lo único que necesitamos conocer es la capacidad C . En el límite cuando $\Delta z \rightarrow 0$

$$F = -\frac{Q^2}{2C^2} \frac{dC}{dz} = -\left(\frac{dU}{dz} \right) \Big|_{Q=cte}$$

En general

$$\vec{F} = -\left(\vec{\nabla} U \right) \Big|_{Q=cte}$$

Notar que para éste cálculo hemos asumido que la carga en el condensador permanece constante (es decir el condensador se encuentra aislado y no está eléctricamente conectado a otros objetos, de forma que la carga total no cambia). Supongamos que en vez de eso hubieramos imaginado que el condensador es mantenido a una diferencia de potencial constante y utilizamos el desplazamiento virtual. Entonces habríamos tenido

$$U = \frac{1}{2} CV^2$$

y entonces

$$F \Delta z = \frac{1}{2} V^2 \Delta C$$

que en el límite equivale a

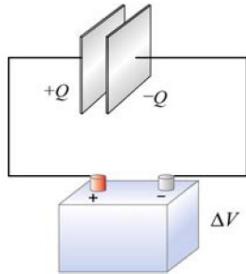
$$F = \frac{1}{2} V^2 \frac{dC}{dz} = \left(\frac{dU}{dt} \right) \Big|_{V=cte}$$

En general

$$\vec{F} = \left(\vec{\nabla} U \right) \Big|_{V=cte}$$

7.5. Condensadores en circuitos eléctricos

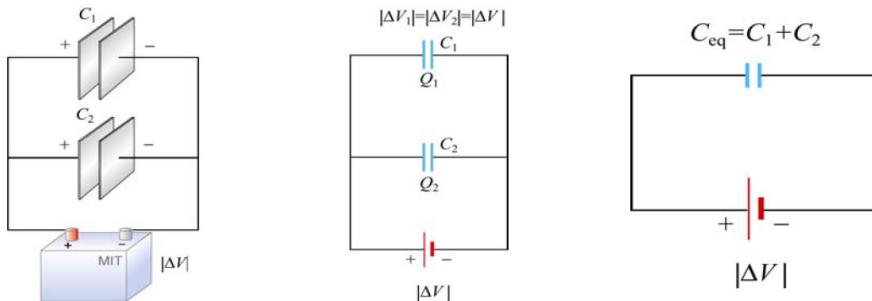
Un condensador se puede cargar al conectar sus terminales a una batería, que mantiene una diferencia de potencial ΔV entre sus placas.



La conexión resulta de compartir cargas entre los terminales y las placas. Por ejemplo, si la placa se conecta al terminal positivo, adquirirá carga positiva. Esto produce una reducción momentánea de carga en los terminales, y por lo tanto decrece el potencial entre éstos. Luego, reacciones químicas dentro de la batería transfieren más carga desde un terminal al otro para compensar la pérdida y mantener el voltaje en su nivel inicial. La batería se puede pensar entonces como una bomba de carga que trae carga Q de una placa a la otra

7.5.1. Conexión en paralelo

Si tenemos dos condensadores, de capacidad C_1 y C_2 y con cargas Q_1 y Q_2 y se conectan en paralelo, como en la figura



Las placas izquierdas de cada condensador son conectadas al terminal positivo de la batería y están al mismo potencial que la terminal positiva. De forma similar, las placas derechas están conectadas al terminal negativo y poseen el mismo potencial de éste. La diferencia de potencial entre las placas de ambos condensadores es la misma, luego

$$C_1 = \frac{Q_1}{|\Delta V|}$$

$$C_2 = \frac{Q_2}{|\Delta V|}$$

Estos condensadores se pueden ver como un condensador equivalente de capacidad equivalente C_{eq} , con una carga Q administrada por la batería. Debe tenerse que

$$Q = Q_1 + Q_2 = C_1 |\Delta V| + C_2 |\Delta V| = (C_1 + C_2) |\Delta V|$$

de forma que

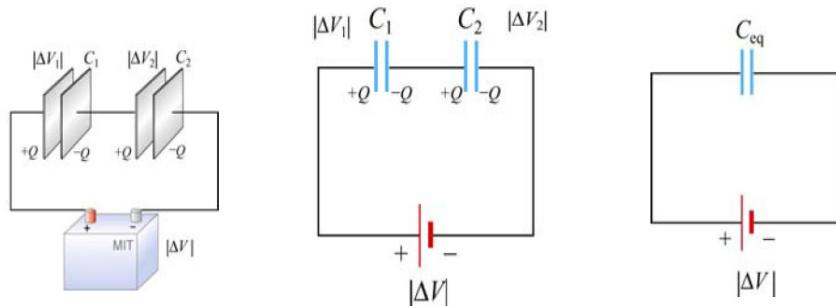
$$C_{eq} = \frac{Q}{|\Delta V|} = C_1 + C_2$$

Luego, condensadores conectados en paralelo suman su capacidad, en general

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_N = \sum_{i=1}^N C_i$$

7.5.2. Conexión en serie

Supongamos que tenemos dos condensadores inicialmente descargados C_1 y C_2 conectados en serie. Una diferencia de potencial $|\Delta V|$ se aplica entre ambos condensadores. La placa izquierda del condensador 1 está conectada al terminal positivo y se carga positivamente con $+Q$, mientras que la placa derecha del condensador 2 se conecta al terminal negativo y se carga negativamente con $-Q$. ¿Qué sucede con las placas interiores? Ellas estaban inicialmente descargadas, ahora ambas placas exteriores tienen cargas iguales pero opuestas. De esta forma la placa derecha del condensador 1 adquirirá carga $-Q$ y la placa izquierda del condensador 2 $+Q$



Las diferencias de potencial en los condensadores son

$$|\Delta V_1| = \frac{Q}{C_1}$$

$$|\Delta V_2| = \frac{Q}{C_2}$$

respectivamente. Vemos que la diferencia de potencial ΔV es simplemente la suma de las diferencias individuales en cada condensador

$$|\Delta V| = |\Delta V_1| + |\Delta V_2|$$

Estos dos condensadores se pueden reemplazar por un único condensador equivalente

$$C_{eq} = \frac{Q}{|\Delta V|}$$

Luego

$$\frac{Q}{C_{eq}} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2}$$

y la capacidad equivalente para dos condensadores en serie está dada por

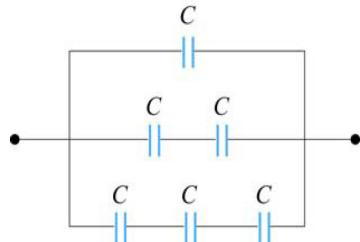
$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

En general

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_N} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i}$$

Problema

Considere la configuración de la figura. Encuentre la capacidad equivalente asumiendo que todos los condensadores tienen la misma capacidad C



Solución

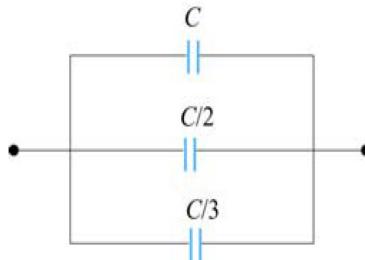
Para los condensadores conectados en serie, la capacidad equivalente esta dada por

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i}$$

Por otro lado, para los condensadores conectados en paralelo, la capacidad equivalente es

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + \dots + C_N = \sum_{i=1}^N C_i$$

Con esto, se obtiene el siguiente circuito equivalente

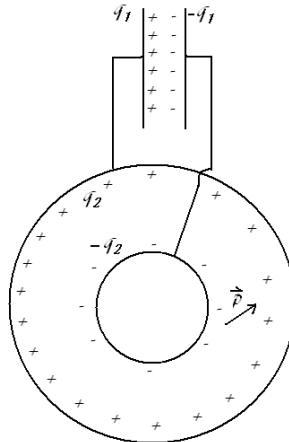


Notar que ahora tenemos 3 condensadores en paralelo. La capacidad equivalente es

$$C_{eq} = C\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{11}{6}C$$

Problema

Se tiene un condensador plano con capacidad C_1 y un condensador esférico con capacidad C_2 . El primero tiene cargas eléctricas q_1 y $-q_1$ y el segundo tiene cargas eléctricas q_2 y $-q_2$. Luego se conectan ambos condensadores como lo muestra la figura



- Obtenga las nuevas cargas $q'_1, -q'_1, q'_2, -q'_2$ una vez obtenido el equilibrio eléctrico
- ¿Cuánto vale la pérdida de energía potencial eléctrica?
- Según su sentido físico ¿dónde se pierde dicha energía?
- Se coloca un dipolo eléctrico \vec{p} entre las dos esferas del condensador eléctrico. ¿Qué sucede con él?

Solución

- Por conservación de la carga eléctrica, al conectar ambos condensadores, la carga total sólo debe distribuirse, luego

$$q_1 + q_2 = q'_1 + q'_2$$

Al producirse el equilibrio eléctrico, los conductores unidos quedan a un mismo potencial, digamos V , luego la diferencia de potencial entre sus terminales es común para ambos condensadores (están conectados en paralelo), esto es

$$\begin{aligned} q'_1 &= C_1 V \\ q'_2 &= C_2 V \end{aligned}$$

Luego

$$\frac{q'_1}{q'_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

Con esto

$$q'_1 = \frac{C_1(q_1 + q_2)}{C_1 + C_2}$$

$$q'_2 = \frac{C_2(q_1 + q_2)}{C_1 + C_2}$$

- La energía inicial está dada por

$$U_i = \frac{1}{2} \frac{q_1^2}{C_1} + \frac{1}{2} \frac{q_2^2}{C_2}$$

Y la energía final por

$$U_f = \frac{1}{2} \frac{q_1'^2}{C_1} + \frac{1}{2} \frac{q_2'^2}{C_2}$$

La diferencia de energía es

$$\begin{aligned} U_i - U_f &= \frac{1}{2} \left(\frac{q_1^2}{C_1} + \frac{q_2^2}{C_2} - \frac{q_1'^2}{C_1} - \frac{q_2'^2}{C_2} \right) \\ U_i - U_f &= \frac{1}{2} \left(\frac{q_1^2}{C_1} + \frac{q_2^2}{C_2} - \frac{C_1(q_1 + q_2)^2}{(C_1 + C_2)^2} - \frac{C_2(q_1 + q_2)^2}{(C_1 + C_2)^2} \right) \\ U_i - U_f &= \frac{1}{2} \left(\frac{q_1^2}{C_1} + \frac{q_2^2}{C_2} - \frac{(q_1 + q_2)^2}{C_1 + C_2} \right) \end{aligned}$$

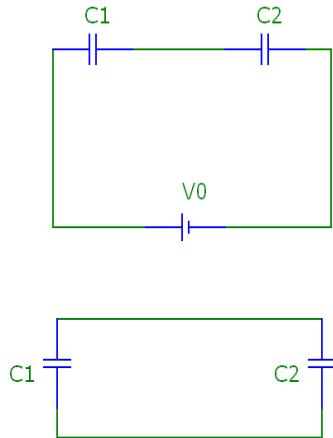
$$U_i - U_f = \frac{1}{2} \frac{(q_1 C_2 - q_2 C_1)^2}{C_1 C_2 (C_1 + C_2)}$$

Esta es la pérdida de energía

- c) La pérdida de energía se produce debido a que al conectar ambos condensadores, se produce una redistribución de carga en ellos (y entonces en un intervalo de tiempo breve circula una corriente eléctrica en los conductores). La energía que se pierde corresponde a la energía disipada en forma de calor en los conductores
- d) El dipolo gira para orientarse en el sentido del campo eléctrico entre ambas cáscaras esféricas. Además, como el campo no es uniforme en esta región, el dipolo se desplaza hacia donde el campo eléctrico es más intenso, es decir, hacia la cáscara negativa

Problema

Hay dos condensadores con capacidades C_1 y C_2 conectados a una batería de potencial V_o . A continuación se desconectan de la batería y se unen como en la figura de abajo



Calcular la nueva diferencia de potencial entre las placas en función de C_1 , C_2 y V_o

Solución

Se tiene que inicialmente C_1 y C_2 están conectados en serie, luego su capacidad equivalente es

$$\frac{1}{C_{eq1}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Con esto

$$C_{eq1} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

Si Q_1 es la carga almacenada por el sistema (igual en cada condensador), entonces

$$C_{eq1} = \frac{Q_1}{V_o}$$

$$Q_1 = C_{eq1} V_o = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} V_o$$

Ahora, los condensadores se conectan en paralelo, por lo que en esta situación la capacidad equivalente es

$$C_{eq2} = \frac{2Q_1}{V}$$

Ojo! El factor 2 se debe a que inicialmente la carga total es $2Q_1$ (en cada condensador inicialmente se almacena carga Q_1). V es la nueva diferencia de potencial en los condensadores. Ademas se tiene que

$$C_{eq2} = C_1 + C_2$$

Así

$$C_1 + C_2 = 2 \left(\frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \right) V_o \frac{1}{V}$$

de aquí obtenemos que

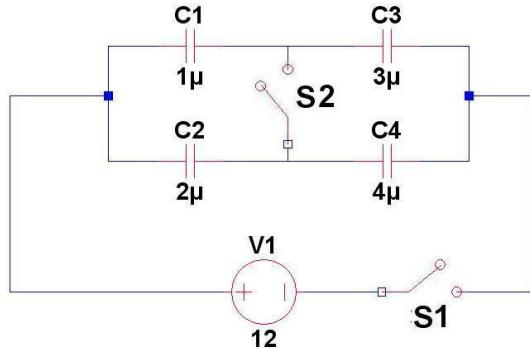
$$V = 2 \left(\frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \right) \left(V_o \frac{1}{C_1 + C_2} \right)$$

Finalmente

$$V = 2 \frac{C_1 C_2}{(C_1 + C_2)^2} V_o$$

Problema

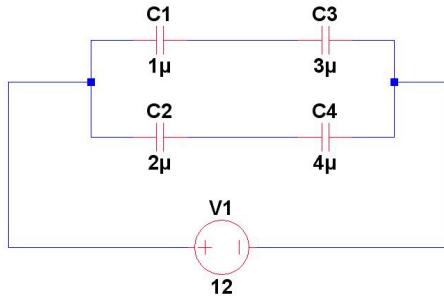
Se tiene un circuito como el que se muestra en la figura.



- Encontrar la carga de cada condensador cuando se cierra el interruptor S1.
- Cuando se cierra también el interruptor S2

Solución

- Cuando sólo se cierra el interruptor 1, se tiene



En este caso, C_1 y C_3 están en serie, así como también C_2 y C_4 .

La capacidad equivalente entre C_1 y C_3 está dada por

$$\frac{1}{C_{eq1}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_3} = 1 + \frac{1}{3}\mu = \frac{4}{3}(\mu F)^{-1}$$

Con lo que

$$C_{eq1} = \frac{3}{4}\mu F$$

Del mismo modo, para la capacidad equivalente entre C_2 y C_4

$$\frac{1}{C_{eq2}} = \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(\mu F)^{-1} = \frac{3}{4}(\mu F)^{-1}$$

Así

$$C_{eq2} = \frac{4}{3}\mu F$$

Por último, C_{eq1} y C_{eq2} están en paralelo, por lo que la capacidad total será

$$C_{eq} = C_{eq1} + C_{eq2} = \frac{3}{4} + \frac{4}{3} = \frac{25}{12}\mu F$$

Con esto podemos determinar la carga total suministrada por la fuente, dada por

$$Q = \Delta V C = 12 \frac{25}{12} \mu F = 25 \mu C$$

Ahora, sea Q_i la carga acumulada por el condensador i . Se tiene que $Q_1 = Q_3$, $Q_2 = Q_4$, ya que se encuentran en serie. Sea V_i la diferencia de potencial entre los terminales del condensador i . Así

$$Q_1 = 1 \mu V_1$$

$$Q_2 = 2 \mu V_2$$

$$Q_3 = 3 \mu V_3 = Q_1$$

$$Q_4 = 4 \mu V_4 = Q_2$$

Además, los voltajes están relacionados según

$$12 = V_1 + V_3 = V_2 + V_4$$

Resolviendo este sistema, se tiene

$$Q_1 = V_1, Q_2 = 2V_2, Q_1 = 36 - 3V_1, Q_2 = 48 - 4V_2$$

Así,

$$V_1 = 36 - 3V_1, 2V_2 = 48 - 4V_2$$

De donde se obtiene finalmente

$$V_1 = 9V, V_2 = 8V, V_3 = 3V, V_4 = 4V$$

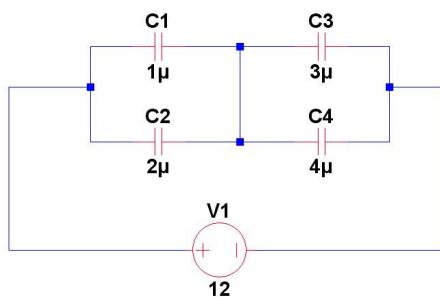
Por último

$$Q_1 = 9 \mu C$$

$$, Q_2 = 16 \mu C, Q_3 = 9 \mu C, Q_4 = 16 \mu C$$

Se comprueba que $Q_1 + Q_2 = Q_3 + Q_4 = 25 \mu C = Q$

b) Ahora se tiene lo siguiente



Aquí, se tiene a los condensadores C_1 y C_2 en paralelo, lo mismo sucede con C_3 y C_4

$$C_{eq1} = C_1 + C_2 = 3\mu F$$

$$C_{eq2} = C_3 + C_4 = 7\mu F$$

Y estos dos se encuentran en serie, por lo que

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{7}(\mu F)^{-1} = \frac{10}{21}(\mu F)^{-1}$$

Así

$$C_{eq} = \frac{21}{10}\mu F$$

Y la carga suministrada por la fuente será

$$Q = \frac{21}{10}V = \frac{21 \cdot 12}{10} = \frac{126}{5} = 25,2\mu C$$

Además, se tiene $V_1 = V_2$, $V_3 = V_4$, ya que se encuentran en paralelo. Así

$$V_1 = \frac{1\mu}{Q_1} = V_2 = \frac{2\mu}{Q_2}$$

$$V_3 = \frac{3\mu}{Q_3} = V_4 = \frac{4\mu}{Q_4}$$

Con esto

$$2Q_1 = Q_2$$

$$4Q_3 = 3Q_4$$

También debe tenerse que

$$Q_1 + Q_2 = Q_3 + Q_4 = 25,2\mu C$$

Así

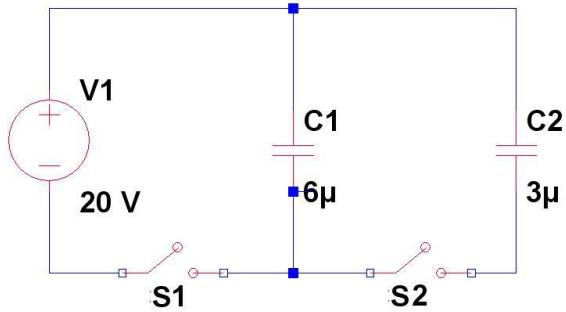
$$2Q_1 = Q_2 = 25,2 - Q_1 \rightarrow Q_1 = 8,4\mu C$$

$$Q_3 = 25,2 - Q_4 = 25,2 - \frac{4}{3}Q_3 \rightarrow Q_3 = 10,8\mu C$$

$$Q_4 = \frac{4}{3}Q_3 = 14,4\mu C$$

Problema

Consideré el circuito de la figura



Primero se carga C_1 cerrando el interruptor S_1 . Después este interruptor es abierto, y el condensador cargado se conecta al otro condensador descargado cerrando al interruptor S_2 . Calcule la carga final en cada uno de los condensadores

Solución

Al cerrar el interruptor S_1 , se conecta el condensador C_1 a los terminales de la fuente de voltaje, luego éste acumula una carga igual a

$$Q = CV = 6\mu 20 = 120\mu(C)$$

Ahora, se abre el interruptor S_1 y se cierra el interruptor S_2 , es decir, se desconecta la fuente de voltaje y se conectan ambos condensadores en paralelo. Básicamente lo que ocurre aquí es una redistribución de la carga almacenada.

Sea Q_1 la carga final en el condensador 1 , y Q_2 la carga final en el condensador 2. Se sabe que la carga total debe conservarse, es decir

$$Q = Q_1 + Q_2 = 120\mu(C)$$

Y en cada condensador se tiene

$$Q_1 = 6\mu V_1$$

$$Q_2 = 3\mu V_2$$

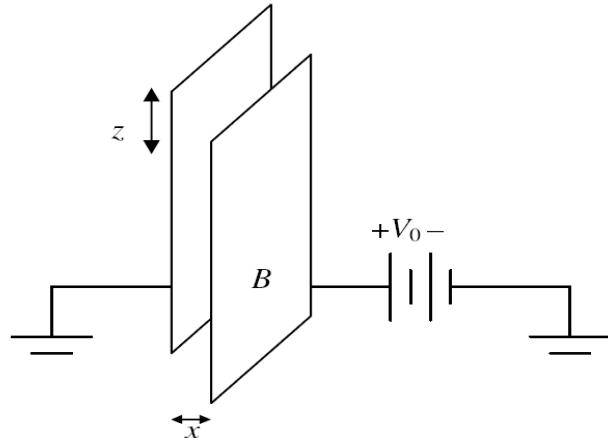
Como están en paralelo, $V_1 = V_2$, así

$$\frac{Q_1}{6\mu} = \frac{Q_2}{3\mu} \rightarrow \frac{Q_1}{Q_2} = 2$$

De donde se obtiene, $Q_1 = 80\mu$ (C), y $Q_2 = 40\mu$

Problema

Dos placas conductoras cuadradas de lado a se disponen con sus caras paralelas y muy próximas entre sí. La distancia entre las placas es x , como se indica en la figura. Calcule la fuerza sobre la placa B en las direcciones x y z cuando la diferencia de potencial entre las placas es V_0



Solución

La energía almacenada en el condensador es

$$U = \frac{1}{2}CV_o^2$$

donde la capacidad está dada por

$$C(x, z) = \frac{\epsilon_0 A}{x} = \frac{\epsilon_0 a(a - z)}{x}$$

De esta forma

$$\vec{F} = \vec{\nabla}U = \frac{dU}{dx}\hat{i} + \frac{dU}{dz}\hat{k}$$

$$\vec{F} = -\frac{1}{2}V_o^2 \left(\frac{\epsilon_0(a - z)a}{x^2}\hat{i} + \frac{\epsilon_0 a}{x}\hat{k} \right)$$

$$\vec{F} = -\frac{1}{2}V_o^2 \frac{\epsilon_0(a - z)a}{x}\hat{i} - \frac{1}{2}V_o^2 \frac{\epsilon_0 a}{x}\hat{k}$$

Capítulo 8

Ecuaciones de Poisson y Laplace

Hemos concluído nuestra revisión de la electrostática demostrando que la teoría es completa. En efecto, hemos visto que la conducta de un campo electrostático queda totalmente descrita por dos ecuaciones diferenciales de primer orden, las cuales son consecuencia de la ley de Coulomb y el principio de superposición

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0}$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{x}) = \vec{0}$$

Ahora comenzaremos un estudio sobre la teoría del potencial. Esta nos brindará las herramientas matemáticas necesarias para resolver los problemas electrostáticos que se nos presentan en la práctica. Notar que la teoría electrostática ya está competente (es una teoría de estructura muy simple, en efecto): solamente nos falta ampliar nuestra capacidad de aplicarla

8.1. Ecuaciones de Poisson y Laplace

La segunda ecuación

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{x}) = 0$$

es equivalente a

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{x})$$

Combinada con la primera, se obtiene una ecuación diferencial de segundo orden

$$\vec{\nabla}^2\phi(\vec{x}) = -\frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0}$$

Esta es la ecuación de Poisson. En regiones libres de cargas tenemos

$$\vec{\nabla}^2\phi(\vec{x}) = 0$$

la ecuación de Laplace.

Interpretación del teorema fundamental

$$\vec{\nabla}^2 \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = -4\pi\delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

Esta es la ecuación de Poisson para una carga $q = 4\pi\epsilon_0$ puntual localizada en el punto \vec{x}' . (Ecuación singular de Poisson). Hemos establecido que

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{x})$$

a partir de la ley de Coulomb

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{R^3} d^3x' \rho(\vec{x}') \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$$

utilizando el siguiente argumento

$$\frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} = -\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{R^3} d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

Ahora lo vamos a demostrar directamente

Teorema

$$\phi(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{R^3} d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

es la solución de la ecuación de Poisson con condiciones de contorno adecuadas en el infinito, es decir

$$\left. \begin{aligned} \vec{\nabla}^2 \phi(\vec{x}) &= -\frac{\rho(\vec{x}')}{\epsilon_0} \\ C.C.S(\infty) \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \phi(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{R^3} d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

Demostración

1) Sea

$$\phi(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{R^3} d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

Luego

$$\vec{\nabla}^2 \phi(\vec{x}) = \vec{\nabla}^2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{R^3} d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

$$\vec{\nabla}^2 \phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{R^3} d^3x' \rho(\vec{x}') \vec{\nabla}^2 \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = -\frac{4\pi}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{R^3} d^3x' \rho(\vec{x}') \delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

$$\vec{\nabla}^2 \phi(\vec{x}) = -\frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0}$$

2) Sea

$$\vec{\nabla}^2 \phi(\vec{x}) = -\frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0}$$

$$\frac{\vec{\nabla}'^2 \phi(\vec{x}')}{\vec{x} - \vec{x}'} = -\frac{\rho(\vec{x}')}{\epsilon_0 |\vec{x} - \vec{x}'|}$$

con esto

$$\iiint_{R^3} d^3x' \frac{\vec{\nabla}'^2 \phi(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = -\frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{R^3} d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

pero

$$\begin{aligned} & \iiint_{R^3} d^3x' \frac{\vec{\nabla}'^2 \phi(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \iiint_{R^3} d^3x' \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{\nabla}' \phi(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \\ &= - \iiint_{R^3} d^3x' \left\{ \vec{\nabla}' \phi(\vec{x}') \right\} \cdot \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \iiint_{R^3} d^3x' \vec{\nabla}' \cdot \frac{\vec{\nabla}' \phi(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \\ &= \iiint_{R^3} d^3x' \phi(\vec{x}') \vec{\nabla}' \cdot \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} - \iiint_{R^3} d^3x' \vec{\nabla}' \cdot \left[\phi(\vec{x}') \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right] + \oint_{S(\infty)} d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \frac{\vec{\nabla}' \phi(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \\ &= \iiint_{R^3} d^3x' \phi(\vec{x}') \vec{\nabla}'^2 \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \oint_{S(\infty)} d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \phi(\vec{x}') - \oint_{S(\infty)} d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \frac{\vec{E}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \end{aligned}$$

Ahora supondremos que las condiciones de borde son apropiadas (y que entonces las integrales de superficie son nulas)

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{R^3} d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} &= -4\pi \iiint_{R^3} d^3x' \phi(\vec{x}') \delta(\vec{x} - \vec{x}') = -4\pi \phi(\vec{x}) \\ \phi(\vec{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{R^3} d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \end{aligned}$$

8.1.1. Acerca de las condiciones en el infinito

Veremos que

$$\lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} \phi(\vec{x}) = 0 \Rightarrow \oint_{S(\infty)} d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \phi(\vec{x}') = 0$$

$$\lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} |\vec{x}| |\vec{\nabla} \phi(\vec{x})| = 0 \Rightarrow \oint_{S(\infty)} d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \frac{\vec{E}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

la segunda de ellas ya se discutió en el teorema de completitud de Helmholtz. Lo que se hace es escoger como superficie de integración una esfera centrada en \vec{x} y de radio $a = |\vec{x} - \vec{x}'| \rightarrow \infty$

$$\oint_{S(\infty)} d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \phi(\vec{x}') = \lim_{a \rightarrow \infty} \oint_{S(a)} d\Omega(\hat{n}) \phi(\vec{x} + a\hat{n}) = \oint_0^{4\pi} d\Omega(\hat{n}) \lim_{a \rightarrow \infty} \phi(\vec{x}')$$

luego debe tenerse que

$$\lim_{|\vec{x}-\vec{x}'| \rightarrow \infty} \phi(\vec{x}') = 0 \Rightarrow \lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} \phi(\vec{x}) = 0$$

del mismo modo

$$\begin{aligned} \iint_{S(\infty)} d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \frac{\vec{E}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} &= \lim_{a \rightarrow \infty} \iint_{S(a)} d\Omega(\hat{n}) a\hat{n} \cdot \vec{E}(\vec{x} + a\hat{n}) \\ &= \oint_0^{4\pi} d\Omega(\hat{n}) \lim_{a \rightarrow \infty} a\hat{n} \cdot \vec{E}(\vec{x} + a\hat{n}) \end{aligned}$$

luego basta tener

$$\lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} \vec{x} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = 0$$

y

$$\lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} \vec{x} \cdot \vec{E}(\vec{x}) \leq \lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} |\vec{x}| \cdot |\vec{E}(\vec{x})|$$

8.1.2. Corolario: Condición de validez para $\rho(\vec{x})$

De la condición necesaria para el potencial

$$\lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} \phi(\vec{x}) = 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} \iiint_{R^3} d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} &= \iiint_{R^3} d^3x' \rho(\vec{x}') \lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \\ &= \iiint_{R^3} d^3x' \rho(\vec{x}') \lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} \frac{1}{|\vec{x}|} = \lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} \frac{1}{|\vec{x}|} \iiint_{R^3} d^3x' \rho(\vec{x}') = 0 \end{aligned}$$

si

$$-\infty < \iint_{R^3} d^3x' \rho(\vec{x}') < \infty$$

Basta que la carga total de las fuentes sea **finita** (razonable!)

Luego, como corolario

$$\left. \vec{\nabla}^2 \phi(\vec{x}) = -\frac{\rho(\vec{x}')}{\epsilon_0} \right\} \Rightarrow \phi(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{R^3} d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

Pero en la práctica, éste no es el problema de contorno típico de la electrostática

Nota sobre el potencial en el infinito

Es bien sabido que a la función potencial siempre es posible sumarle una constante arbitraria finita, ya que, obviamente, semejante adición no modifica en nada el campo electrostático que ese potencial determina. Sumarle una constante al potencial equivale a cambiar arbitrariamente su valor en el infinito. Sin embargo, pareciera concluirse de nuestro análisis previo que el valor del potencial en el infinito está perfectamente determinado por la naturaleza de las fuentes

cargadas. Esta situación, **aparentemente** paradojal, merece ser estudiada con cierto cuidado. Sea

$$\left. \begin{aligned} \vec{\nabla}^2 \phi(\vec{x}) &= -\frac{\rho(\vec{x}')}{\epsilon_0} \\ \iiint_{R^3} d^3x' |\rho(\vec{x}')| &< \infty \end{aligned} \right\}$$

Luego

$$\begin{aligned} \phi(\vec{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{R^3} d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \\ \lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} \rho(\vec{x}) &= 0 \\ \lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} |\vec{x}| |\vec{\nabla} \phi(\vec{x})| &= 0 \end{aligned}$$

Transformemos este potencial

$$\phi(\vec{x}) \rightarrow \psi(\vec{x}) = \phi(\vec{x}) + \psi_\infty$$

Se tiene ahora

a)

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}^2 \psi(\vec{x}) &= \vec{\nabla}^2 [\phi(\vec{x}) + \psi_\infty] = \vec{\nabla}^2 \phi(\vec{x}) \\ \vec{\nabla}^2 \psi(\vec{x}) &= -\frac{\rho(\vec{x}')}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

b)

$$\psi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{R^3} d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \psi_\infty$$

c) $\lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} \psi(\vec{x}) = \lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} (\phi(\vec{x}) + \psi_\infty) = \lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} \phi(\vec{x}) + \psi_\infty$

$$\lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} \psi(\vec{x}) = \psi_\infty$$

d) $\psi(\vec{x}) = \vec{\nabla} [\phi(\vec{x}) + \psi_\infty] = \vec{\nabla} \phi(\vec{x})$

$$\lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} |\vec{x}| |\vec{\nabla} \psi(\vec{x})| = 0$$

Veamos ahora si todo ésto es consistente

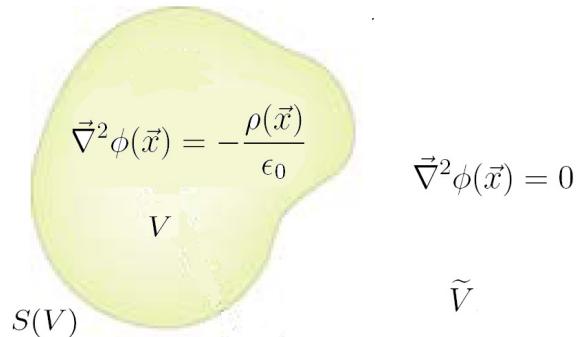
$$\begin{aligned} \iiint_{R^3} d^3x' \frac{\vec{\nabla}'^2 \psi(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} &= -4\pi \iiint_{R^3} d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \\ -4\pi \iiint_{R^3} d^3x' \psi(\vec{x}') \delta(\vec{x} - \vec{x}') &+ \oint_{S(\infty)} d\Omega(\vec{x}', \vec{x}) \psi(\vec{x}') + \oint_{S(\infty)} d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \frac{\vec{\nabla}' \psi(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \\ &= -4\pi \psi(\vec{x}) + 4\pi \psi_\infty + 0 \end{aligned}$$

luego hay consistencia y no hay paradoja alguna!

8.2. Ecuación Integral de Poisson: Teoremas de Green

A) Problemas simples de la electrostática

Los problemas formalmente más simples de la electrostática consisten en calcular $\phi(\vec{x})$ para todos los puntos del espacio, habiéndose dado la distribución de las fuentes eléctricas $\rho(\vec{x})$ (por lo general, localizadas dentro de una región V), sin condiciones de contorno prescritas para $\phi(\vec{x})$ o $\vec{E}(\vec{x})$ en el infinito



la solución de estos problemas simples es, formalmente, inmediata

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{x})$$

B) Problemas de contorno

Pero, por lo general, los problemas prácticos de la electrostática se refieren a regiones (finitas o infinitas) que solamente abarcan una porción del espacio, con o sin cargas en su interior, y con **condiciones de contorno** preseñadas en las superficies que las limitan. (Por ejemplo, esta superficie de contorno puede representar un conductor a un potencial fijo). La solución formal de éstos problemas de contorno no es tan sencilla. Para manejar los problemas de contorno necesitaremos nuevas herramientas matemáticas que procedemos a construir

8.3. Teoremas de Green

A partir del teorema de la divergencia

$$\iiint_V d^3x' \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \iint_{S(V)} d\vec{S} \cdot \vec{A}$$

y utilizamos un campo vectorial de la forma

$$\vec{A} = \phi \vec{\nabla} \psi$$

con ϕ, ψ , dos campos escalares. Recordar que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot (\phi \vec{\nabla} \psi) = \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{\nabla} \psi + \phi \vec{\nabla}^2 \psi$$

$$\iiint_V d^3x' (\vec{\nabla}\phi \cdot \vec{\nabla}\psi + \phi \vec{\nabla}^2\psi) = \oint_{S(V)} d\vec{S} \cdot \vec{\nabla}\psi \phi$$

Se obtiene la **Primera Identidad de Green**

$$\iiint_V d^3x' (\vec{\nabla}\phi \cdot \vec{\nabla}\psi + \phi \vec{\nabla}^2\psi) = \oint_{S(V)} dS \phi \frac{\partial\psi}{\partial n}$$

donde

$$\hat{n} \cdot \vec{\nabla}\psi = \frac{\partial\psi}{\partial n}$$

es la derivada direccional de ψ en la dirección normal a $S(V)$

Ahora, también es posible escoger $\vec{A} = \psi \vec{\nabla}\phi$, y obtenemos el siguiente par de identidades de Green

$$\begin{aligned} \iiint_V d^3x' (\vec{\nabla}\phi \cdot \vec{\nabla}\psi + \phi \vec{\nabla}^2\psi) &= \oint_{S(V)} dS \phi \frac{\partial\psi}{\partial n} \\ \iiint_V d^3x' (\vec{\nabla}\psi \cdot \vec{\nabla}\phi + \phi \vec{\nabla}^2\phi) &= \oint_{S(V)} dS \psi \frac{\partial\phi}{\partial n} \end{aligned}$$

Restándolas, obtenemos el **Teorema de Green**

$$\iiint_V d^3x \left\{ \phi \vec{\nabla}^2\psi - \psi \vec{\nabla}^2\phi \right\} = \oint_{S(V)} ds \left\{ \phi \frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial\phi}{\partial n} \right\}$$

8.3.1. Ecuación Integral de Poisson

Usaremos el teorema de Green para transformar la ecuación de Poisson en una ecuación integral en la región de interés. Elijamos

$$\psi(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

Sea

$$\vec{\nabla}'^2\phi(\vec{x}') = -\frac{\rho(\vec{x}')}{\epsilon_0}$$

$$\vec{\nabla}'^2\psi(\vec{x}, \vec{x}') = -4\pi\delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

Luego, integrando sobre la región de interés V

$$\begin{aligned} \iiint_V d^3x' \left\{ \phi(\vec{x}') \vec{\nabla}'^2\psi(\vec{x}, \vec{x}') - \psi(\vec{x}, \vec{x}') \vec{\nabla}'^2\phi(\vec{x}') \right\} &= -4\pi \iiint_V d^3x' \left\{ \phi(\vec{x}') \delta(\vec{x} - \vec{x}') - \frac{\rho(\vec{x}')}{4\pi\epsilon_0 |\vec{x} - \vec{x}'|} \right\} \\ &= \oint_{S(V)} dS(\vec{x}') \left\{ \phi(\vec{x}') \frac{\partial\psi(\vec{x}, \vec{x}')}{\partial n'} - \psi(\vec{x}, \vec{x}') \frac{\partial\phi(\vec{x}')}{\partial n'} \right\} \\ &= \oint_{S(V)} dS(\vec{x}') \left\{ \phi(\vec{x}') \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} - \frac{\frac{\partial\phi(\vec{x}')}{\partial n'}}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right\} \end{aligned}$$

Se obtiene la ecuación integral de Poisson

$$\phi(\vec{x}) \iiint_V d^3x' \delta(\vec{x} - \vec{x}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \frac{1}{4\pi} \oint_{S(V)} dS(\vec{x}') \left\{ \frac{\frac{\partial\phi(\vec{x}')}{\partial n'}}{|\vec{x} - \vec{x}'|} - \phi(\vec{x}') \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right\}$$

Consideremos $\vec{x} \in V$

$$\begin{aligned} \vec{x} \in V \rightarrow \iiint_V d^3x' \delta(\vec{x} - \vec{x}') &= 1 \\ dS(\vec{x}') \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} &= dS(\vec{x}') \hat{n}(\vec{x}') \cdot \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \\ dS(\vec{x}') \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} &= -d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \frac{\vec{x}' - \vec{x}}{|\vec{x}' - \vec{x}|^3} \\ dS(\vec{x}') \frac{\partial\phi(\vec{x}')}{\partial n'} &= d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{\nabla}' \phi(\vec{x}') \end{aligned}$$

y entonces la ecuación interior es

$$\phi(\vec{x}) = \iiint_V d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \frac{1}{4\pi} \oint_{S(V)} \frac{d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{\nabla}' \phi(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \frac{1}{4\pi} \oint_{S(V)} d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \frac{\vec{x}' - \vec{x}}{|\vec{x}' - \vec{x}|^3} \phi(\vec{x}')$$

Primera Observación

Si $V = R^3$, $S(V) \rightarrow S(\infty)$

$$\oint_{S(V)} d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \frac{\vec{x}' - \vec{x}}{|\vec{x}' - \vec{x}|^3} \phi(\vec{x}') \rightarrow \int_0^{4\pi} d\Omega(\hat{x}) \lim_{|\vec{x}'| \rightarrow \infty} \phi(\vec{x}')$$

y también

$$\begin{aligned} \left| \oint_{S(V)} \frac{d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{\nabla}' \phi(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right| &\leq \oint_{S(V)} dS(\vec{x}') \frac{|\vec{\nabla}' \phi(\vec{x}')|}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \\ &= \oint_{S(V)} \frac{dS(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^2} |\vec{x} - \vec{x}'| |\vec{\nabla}' \phi(\vec{x}')| \rightarrow \int_0^{4\pi} d\Omega(\hat{x}) \lim_{|\vec{x}'| \rightarrow \infty} |\vec{x} - \vec{x}'| |\vec{\nabla}' \phi(\vec{x}')| \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} \lim_{|\vec{x}'| \rightarrow \infty} \phi(\vec{x}') &= 0 \Rightarrow \oint_{S(\infty)} d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \frac{\vec{x}' - \vec{x}}{|\vec{x}' - \vec{x}|^3} \phi(\vec{x}') = 0 \\ \lim_{|\vec{x}'| \rightarrow \infty} |\vec{x}'| |\vec{\nabla}' \phi(\vec{x}')| &= 0 \Rightarrow \oint_{S(\infty)} \frac{d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{\nabla}' \phi(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \end{aligned}$$

y entonces

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{R^3} d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

esto impone sobre ρ las condiciones de consistencia dadas que ya conocemos

$$\iiint_{R^3} d^3x' |\rho(\vec{x}')| < \infty$$

Segunda observación

Si la región de interés V está libre de cargas

$$\vec{x} \in V : \rho(\vec{x}) = 0$$

entonces, se obtiene la **ecuación integral de Laplace**

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S(V)} dS(\vec{x}') \left\{ \frac{\frac{\partial \phi(\vec{x}')}{\partial n'}}{|\vec{x} - \vec{x}'|} - \phi(\vec{x}') \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right\}$$

8.4. Condiciones de Contorno: Unicidad de las soluciones

A) Los problemas de contorno en electrostática son de la forma

$$\vec{x} \in V : \vec{\nabla}^2 \phi(\vec{x}) = -\frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0}$$

$$\vec{x} \in S(V) : \text{Condiciones de contorno para } \phi \text{ o para } \frac{\partial \phi}{\partial n}$$

o bien

$$\vec{x} \in V : \vec{\nabla}^2 \phi(\vec{x}) = 0$$

$$\vec{x} \in S(V) : \text{Condiciones de contorno para } \phi \text{ o para } \frac{\partial \phi}{\partial n}$$

Surge la cuestión sobre cuáles son las condiciones de contorno adecuadas para que dentro del volumen de interés V la solución sea matemáticamente única, y físicamente razonable. La experiencia física nos hace esperar que un problema único de potencial se obtiene:

a) Especificando el potencial $\phi(\vec{x})$ sobre una superficie cerrada $S(V)$ que limita la región de interés V (problema de Dirichlet)

$$\vec{x} \in S(V) : \phi(\vec{x}) = \phi_D(\vec{x})$$

b) Especificando el campo eléctrico $\vec{E}(\vec{x})$ sobre el contorno cerrado $S(V)$ de la región de interés V (problema Neumann)

$$\vec{x} \in S(V) : \vec{E}(\vec{x}) = \vec{E}_N(\vec{x})$$

En efecto vamos a demostrar que tanto el problema de Dirichlet como el problema de Neumann dan origen a una solución única

8.4.1. Unicidad para problemas de contorno Dirichlet

El problema Poisson Dirichlet tiene la siguiente forma

$$\vec{x} \in V : \vec{\nabla}^2 \phi(\vec{x}) = -\frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0}$$

$$\vec{x} \in S(V) : \phi(\vec{x}) = \phi_D(\vec{x})$$

Sean $\phi_1(x)$ y $\phi_2(x)$ dos soluciones de este problema. Se define

$$\psi(\vec{x}) = \phi_2(\vec{x}) - \phi_1(\vec{x})$$

Evidentemente $\psi(\vec{x})$ es solución de la ecuación de Laplace con condiciones de contorno Dirichlet Homogéneas

$$\vec{x} \in V : \vec{\nabla}^2 \psi(\vec{x}) = 0$$

$$\vec{x} \in S(V) : \psi(\vec{x}) = 0$$

Usemos la primera identidad de Green

$$\iiint_V d^3x \left\{ \vec{\nabla} \psi \cdot \vec{\nabla} \psi + \psi \vec{\nabla}^2 \psi \right\} = \oint_{S(V)} dS \psi \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$$

$$\iiint_V d^3x \vec{\nabla} \psi \cdot \vec{\nabla} \psi = \iiint_V d^3x |\vec{\nabla} \psi|^2 = 0$$

Pero

$$|\vec{\nabla} \psi| \geq 0$$

$$\iiint_V d^3x |\vec{\nabla} \psi|^2 = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \psi(\vec{x}) = \vec{0}, \vec{x} \in V$$

Luego $\psi(\vec{x})$ es constante para $\vec{x} \in V$. Pero entonces, como

$$\psi(\vec{x}) = 0, \vec{x} \in S(V)$$

se tiene

$$\psi(\vec{x}) = 0, \vec{x} \in V$$

y por lo tanto

$$\psi(\vec{x}) = \phi_2(\vec{x}) - \phi_1(\vec{x}) = 0, \vec{x} \in V$$

Luego, para $\vec{x} \in V$

$$\phi_2(\vec{x}) = \phi_1(\vec{x})$$

Obsérvese el importante resultado

$$\begin{cases} \vec{x} \in V : \vec{\nabla}^2 \psi(\vec{x}) = 0 \\ \vec{x} \in S(V) : \psi(\vec{x}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \psi(\vec{x}) = 0, \vec{x} \in V$$

y también

$$\begin{cases} \vec{\nabla}^2 \psi(\vec{x}) = 0 \\ \vec{x} \in S(\infty) : \psi(\vec{x}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \psi(\vec{x}) = 0, \forall x$$

8.4.2. Unicidad para condiciones de contorno de Neumann

El problema Poisson-Neumann tiene la forma

$$\vec{x} \in V : \vec{\nabla}^2 \phi(\vec{x}) = -\frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0}$$

$$\vec{x} \in S(V) : \frac{\partial \phi(\vec{x})}{\partial n} = -E_N(\vec{x})$$

El desarrollo es análogo al caso anterior. Sean

$$\phi_1(\vec{x}), \phi_2(\vec{x})$$

dos soluciones del problema Poisson-Neuman en V . Definimos

$$\psi(\vec{x}) = \phi_2(\vec{x}) - \phi_1(\vec{x})$$

Entonces $\psi(\vec{x})$ es solución de la ecuación de Laplace con condiciones de contorno de Neumann Homogéneas

$$\vec{x} \in V : \vec{\nabla}^2 \psi(\vec{x}) = 0$$

$$\vec{x} \in S(V) : \frac{\partial \phi(\vec{x})}{\partial n} = 0$$

Ahora

$$\iiint_V d^3x |\vec{\nabla} \psi|^2 = \iint_{S(V)} dS \psi \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$$

luego

$$\vec{\nabla} \psi = \vec{0}$$

y $\psi(\vec{x})$ es constante para $\vec{x} \in V$. Pero ahora

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0, \vec{x} \in S(V)$$

Por lo tanto

$$\psi(\vec{x}) = C, \vec{x} \in S(V)$$

luego

$$\phi_2(\vec{x}) = \phi_1(\vec{x}) + C, \vec{x} \in V$$

Observemos que

$$\left. \begin{aligned} \vec{x} \in V : \vec{\nabla}^2 \psi(\vec{x}) &= 0 \\ \vec{x} \in S(V) : \frac{\partial \psi(\vec{x})}{\partial n} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \psi(\vec{x}) = C, \vec{x} \in V$$

La constante aditiva C es arbitraria y carece de importancia física pues no altera al campo eléctrico $\vec{E}(\vec{x})$

8.4.3. Condiciones de Contorno de Cauchy

Un problema Poisson-Cauchy tendría la siguiente forma

$$\vec{x} \in V : \vec{\nabla}^2 \phi(\vec{x}) = -\frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0}$$

$$\vec{x} \in S(V) \begin{cases} \phi(\vec{x}) = \phi_C(\vec{x}) \\ \frac{\partial \phi(\vec{x})}{\partial n} = -E_C(\vec{x}) \end{cases}$$

Pero este problema lo podemos desglosar

$$\left. \begin{array}{l} \vec{x} \in V : \vec{\nabla}^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \vec{x} \in S : \phi = \phi_C \end{array} \right\} \Rightarrow \phi(\vec{x}) = \phi_D(\vec{x}), \vec{x} \in V$$

Este problema de Poisson Dirichlet posee solución única!

$$\left. \begin{array}{l} \vec{x} \in V : \vec{\nabla}^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \vec{x} \in S : \frac{\partial \phi}{\partial n} = -E_C \end{array} \right\} \Rightarrow \phi(\vec{x}) = \phi_N(\vec{x}), \vec{x} \in V$$

Este problema de Poisson Neumann también posee solución única. Los datos de Cauchy son $\{\phi_C, E_C\}$ sobre S . (Ambas son funciones arbitrarias). Al resolver el problema Poisson Dirichlet obtenemos una solución ϕ_D , haciendo caso omiso del dato E_C , al resolver el problema Poisson Neumann obtenemos ϕ_N , haciendo caso omiso de ϕ_C . Es obvio que, en general, resultará

$$\vec{x} \in S(V) : \begin{cases} \frac{\partial \phi_D(\vec{x})}{\partial n} \neq \frac{\partial \phi_N(\vec{x})}{\partial n} = -E_C(\vec{x}) \\ \phi_N(\vec{x}) \neq \phi_D(\vec{x}) = \phi_C(\vec{x}) \end{cases}$$

Luego **no hay consistencia**: no existe, en general, solución de la ecuación de Poisson con condiciones de contorno de Cauchy sobre una superficie cerrada

8.5. Funciones de Green: Solución formal a los problemas de contorno

El problema típico en electrostática es resolver un problema de contorno de la forma

$$\vec{x} \in V : \vec{\nabla}^2 \phi(\vec{x}) = -\frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0}$$

$$\vec{x} \in V : \vec{\nabla}^2 \phi(\vec{x}) = 0$$

con condiciones de borde de Dirichlet

$$\vec{x} \in S(V) : \phi = \phi_D$$

o de Neumann

$$\vec{x} \in S(V) : \frac{\partial \phi}{\partial n} = -E_N$$

la solución de este problema es única.

Una carga puntual (positiva) $4\pi\epsilon_0$ ubicada en el punto \vec{x} se representa por la densidad de carga singular

$$\rho(\vec{x}') = 4\pi\epsilon_0 \delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

y su potencial en el punto \vec{x}' es

$$\psi(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

Obsérvese que el rol de \vec{x} y \vec{x}' puede invertirse. Este potencial unitario satisface la ecuación de Poisson singular

$$\vec{\nabla}'^2 \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = -4\pi\delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

Vamos a generalizar esta idea

8.6. Funciones de Green $G(\vec{x}, \vec{x}')$

En general, son aquellas funciones que satisfacen la ecuación de Poisson singular

$$\vec{\nabla}'^2 G(\vec{x}', \vec{x}) = -4\pi\delta(\vec{x}, \vec{x}'), \vec{x}' \in V$$

Sea $L(\vec{x}', \vec{x})$ una solución de la ecuación de Laplace en el interior de una región V , $\vec{x}' \in V$

$$\vec{\nabla}'^2 L(\vec{x}', \vec{x}) = 0$$

entonces podemos considerar

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + L(\vec{x}, \vec{x}')$$

Esta es una función de Green dentro de la región V . Consideremos la estructura

$$\begin{aligned} \vec{x}' &\in V \\ \vec{\nabla}'^2 \phi(\vec{x}') &= -\frac{\rho(\vec{x}')}{\epsilon_0} \\ \vec{\nabla}'^2 G(\vec{x}', \vec{x}) &= -4\pi\delta(\vec{x} - \vec{x}') \\ G(\vec{x}', \vec{x}) &= \frac{1}{|\vec{x}' - \vec{x}|} + L(\vec{x}', \vec{x}) \\ \vec{\nabla}'^2 L(\vec{x}, \vec{x}') &= 0 \end{aligned}$$

Entonces, usando la segunda identidad de Green

$$\iiint_V d^3x' \left\{ G(\vec{x}', \vec{x}) \vec{\nabla}'^2 \phi(\vec{x}') - \phi(\vec{x}') \vec{\nabla}'^2 G(\vec{x}', \vec{x}) \right\} = \iint_{S(V)} dS(\vec{x}') \left\{ G(\vec{x}', \vec{x}) \frac{\partial \phi(\vec{x}')}{\partial n'} - \phi(\vec{x}') \frac{\partial G(\vec{x}', \vec{x})}{\partial n'} \right\}$$

para $\vec{x} \in V$, resulta

$$\begin{aligned} \iiint_V d^3x' \left\{ -\frac{1}{\epsilon_0} G(\vec{x}', \vec{x}) \rho(\vec{x}') + 4\pi\phi(\vec{x}') \delta(\vec{x}' - \vec{x}) \right\} &= -\frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V d^3x' \rho(\vec{x}') G(\vec{x}', \vec{x}) + 4\pi\phi(\vec{x}) \\ &= \iint_{S(V)} dS(\vec{x}') \left\{ G(\vec{x}', \vec{x}) \frac{\partial \phi(\vec{x}')}{\partial n'} - \phi(\vec{x}') \frac{\partial G(\vec{x}', \vec{x})}{\partial n'} \right\} \end{aligned}$$

o sea, con $\vec{x} \in V$ en general se tiene

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V d^3x' \rho(\vec{x}') G(\vec{x}', \vec{x}) + \frac{1}{4\pi} \oint_{S(V)} dS(\vec{x}') \frac{\partial \phi(\vec{x}')}{\partial n'} G(\vec{x}', \vec{x}) - \frac{1}{4\pi} \oint_{S(V)} dS(\vec{x}') \phi(\vec{x}') \frac{\partial G(\vec{x}', \vec{x})}{\partial n'}$$

Aplicemos este resultado a los problemas de contorno de Dirichlet y de Neumann

8.6.1. Solución formal del problema Dirichlet

Hay que resolver

$$\begin{cases} \vec{x} \in V : \vec{\nabla}^2 \phi(\vec{x}) = -\frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0} \\ \vec{x} \in S(V) : \phi(\vec{x}) = \phi_D(\vec{x}) \end{cases}$$

Resolvamos entonces

$$\vec{x} \in V \begin{cases} \vec{x}' \in V : \vec{\nabla}'^2 G_D(\vec{x}', \vec{x}) = -4\pi\delta(\vec{x}' - \vec{x}) \\ \vec{x}' \in S(V) : G_D(\vec{x}', \vec{x}) = 0 \end{cases}$$

o sea, resolvamos el problema

$$\vec{x} \in V \begin{cases} \vec{x}' \in V : \vec{\nabla}'^2 L_D(\vec{x}', \vec{x}) = 0 \\ \vec{x}' \in S(V) : L_D(\vec{x}', \vec{x}) = -\frac{1}{|\vec{x}' - \vec{x}|} \end{cases}$$

y hacemos

$$G_D(\vec{x}', \vec{x}) = \frac{1}{|\vec{x}' - \vec{x}|} + L_D(\vec{x}', \vec{x})$$

$G_D(\vec{x}', \vec{x})$ es la función de Green del problema Dirichlet. La solución formal es

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V d^3x' \rho(\vec{x}') G_D(\vec{x}, \vec{x}') - \frac{1}{4\pi} \oint_{S(V)} dS(\vec{x}') \phi_D(\vec{x}') \frac{\partial G_D(\vec{x}', \vec{x})}{\partial n'}$$

8.6.2. Solución formal del problema de Neumann

Hay que resolver

$$\begin{cases} \vec{x} \in V : \vec{\nabla}^2 \phi(\vec{x}) = -\frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0} \\ \vec{x} \in S(V) : \frac{\partial \phi(\vec{x})}{\partial n} = -E_N(\vec{x}) \end{cases}$$

Resultaría ventajoso resolver

$$\vec{x} \in V \begin{cases} \vec{x}' \in V : \vec{\nabla}'^2 G_N(\vec{x}', \vec{x}) = -4\pi\delta(\vec{x}' - \vec{x}) \\ \vec{x}' \in S(V) : \frac{\partial G_N(\vec{x}', \vec{x})}{\partial n'} = 0 \end{cases}$$

pero ésto es, en general, **imposible**. En efecto, el teorema de Gauss nos da

$$\iiint_V d^3x' \vec{\nabla}'^2 G_N(\vec{x}', \vec{x}) = \iiint_V d^3x' \vec{\nabla}' \cdot \vec{\nabla}' G_N(\vec{x}', \vec{x})$$

$$\begin{aligned}
&= \oint_{S(V)} d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{\nabla}' G_N(\vec{x}', \vec{x}) = \oint_{S(V)} dS(\vec{x}') \frac{\partial}{\partial n'} G_N(\vec{x}', \vec{x}) \\
&= -4\pi \iiint_V d^3x' \delta(\vec{x}' - \vec{x}) = -4\pi
\end{aligned}$$

luego

$$\oint_{S(V)} dS(\vec{x}') \frac{\partial}{\partial n'} G_N(\vec{x}', \vec{x}) = -4\pi$$

ahora bien, puesto que

$$\oint_{S(V)} dS(\vec{x}') = S$$

con S el área total de $S(V)$, la condición de contorno más simple es

$$\vec{x}' \in S(V) : \frac{\partial G_N(\vec{x}', \vec{x})}{\partial n'} = -\frac{4\pi}{S}$$

Luego, debemos resolver

$$\vec{x} \in V \left\{ \begin{array}{l} \vec{x}' \in V : \vec{\nabla}'^2 G_N(\vec{x}', \vec{x}) = -4\pi \delta(\vec{x}' - \vec{x}) \\ \vec{x}' \in S(V) : \frac{\partial G_N(\vec{x}', \vec{x})}{\partial n'} = -\frac{4\pi}{S} \end{array} \right.$$

o sea, resolvemos

$$\vec{x} \in V \left\{ \begin{array}{l} \vec{x}' \in V : \vec{\nabla}'^2 L_N(\vec{x}', \vec{x}) = 0 \\ \vec{x}' \in S(V) : \frac{\partial L_N(\vec{x}', \vec{x})}{\partial n'} = -\frac{4\pi}{S} - \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{|\vec{x}' - \vec{x}|} \end{array} \right.$$

puesto que

$$G_N(\vec{x}', \vec{x}) = \frac{1}{|\vec{x}' - \vec{x}|} + L_N(\vec{x}', \vec{x})$$

la solución formal del problema de Neumann es

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V d^3x' \rho(\vec{x}') G_N(\vec{x}', \vec{x}) - \frac{1}{4\pi} \oint_{S(V)} dS(\vec{x}') E_N(\vec{x}') G_N(\vec{x}', \vec{x}) + \langle \phi \rangle_S$$

donde $\langle \phi \rangle_S$ es el valor medio del potencial sobre toda la superficie $S(V)$

$$\langle \phi \rangle_S = \frac{1}{S} \oint_{S(V)} dS(\vec{x}) \phi(\vec{x})$$

La presencia de este término es un inconveniente. Pero no afecta \vec{E} en V

Problema

El promedio temporal del potencial de un átomo de hidrógeno neutro es dado por

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \frac{e^{-\alpha r}}{r} \left(1 + \frac{\alpha r}{2}\right)$$

donde q es la magnitud de la carga del electrón y $\alpha = a_0/2$, siendo a_0 el radio de Bohr. Encuentre la distribución de cargas (continua y discreta) correspondiente a este potencial e interprete físicamente su resultado

Solución

$$\vec{\nabla}^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

En coordenadas esféricas, el operador laplaciano es

$$\vec{\nabla}^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{1}{r^2} \vec{\nabla}^2(\vartheta, \phi)$$

Sea

$$\begin{aligned} \psi(r) &= \frac{1}{r} \\ f(r) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q e^{-\alpha r} \left(1 + \frac{\alpha r}{2}\right) \end{aligned}$$

o sea

$$\phi(r) = \frac{f(r)}{r}$$

y utilizamos la identidad

$$\vec{\nabla}^2 \psi f = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \psi f = \vec{\nabla} \cdot \left(\psi \vec{\nabla} f + f \vec{\nabla} \psi \right)$$

$$\vec{\nabla}^2 \psi f = \psi \vec{\nabla}^2 f + f \vec{\nabla}^2 \psi + 2 \vec{\nabla} \psi \cdot \vec{\nabla} f$$

$$r = |\vec{x}| \begin{cases} \vec{\nabla}^2 \psi = \vec{\nabla}^2 \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\vec{x}) \\ \vec{\nabla} \psi = \vec{\nabla} \frac{1}{r} = -\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3} = -\frac{\hat{r}}{r^2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}^2 f(r) &= \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r f(r) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r f' + f) \\ &= \frac{1}{r} (r f'' + 2f') = f'' + \frac{2}{r} f' \end{aligned}$$

y

$$2 \vec{\nabla} \psi \cdot \vec{\nabla} f = -\frac{2}{r^2} \hat{r} \cdot \vec{\nabla} f = -\frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} f = -\frac{2}{r^2} f'$$

con todo esto

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}^2 \phi &= \frac{1}{r} f'' + \frac{2}{r^2} f' - 4\pi f(r) \delta(\vec{x}) - \frac{2}{r^2} f' \\ &= -4\pi f(0) \delta(\vec{x}) + \frac{1}{r} \frac{d^2 f(r)}{dr^2} \end{aligned}$$

y

$$f(0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}$$

$$f' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q e^{-\alpha r} \left(\frac{\alpha}{2} - \alpha \left(1 + \frac{\alpha r}{2} \right) \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q e^{-\alpha r} \left(\frac{\alpha}{2} - \alpha - \frac{\alpha^2 r}{2} \right)$$

$$f' = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\alpha q}{2} e^{-\alpha r} (1 + \alpha r)$$

$$f'' = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\alpha q}{2} e^{-\alpha r} (\alpha - \alpha(1 + \alpha r))$$

$$f'' = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\alpha q}{2} e^{-\alpha r} (\alpha - \alpha - \alpha^2 r)$$

$$f'' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\alpha^3 q}{2} r e^{-\alpha r}$$

finalmente

$$\vec{\nabla}^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} = -\frac{q}{\epsilon_0} \delta(\vec{x}) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\alpha^3}{2} e^{-\alpha r}$$

Luego

$$\rho(\vec{x}) = q\delta(\vec{x}) - \frac{q\alpha^3}{8\pi} e^{-\alpha r}$$

La interpretación física es la siguiente

$$q\delta(\vec{x})$$

representa al protón en el origen. Mientras que

$$-\frac{q\alpha^3}{8\pi} e^{-\alpha r}$$

es la densidad (media-temporal) de la nube orbital electrónica

Problema: Teorema del valor medio

Demuestre que para un espacio sin cargas, el potencial electrostático en cualquier punto es igual al potencial promedio sobre cualquier esfera centrada en ese punto

Solución

Utilizaremos el teorema de Green

$$\iiint_V d^3x \left(\phi \vec{\nabla}^2 \psi - \psi \vec{\nabla}^2 \phi \right) = \iint_{\delta V} ds \left(\hat{n} \cdot \vec{\nabla} \psi \phi - \psi \hat{n} \cdot \vec{\nabla} \phi \right)$$

En electrostática, el potencial escalar satisface

$$\vec{\nabla}^2 \phi(\vec{x}) = -\frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0}$$

y se define la función de Green-Dirichlet

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}^2 G_D(\vec{x}, \vec{x}') &= -4\pi \delta(\vec{x} - \vec{x}'), \vec{x}, \vec{x}' \in V \\ \vec{G}_D(\vec{x}, \vec{x}') &= 0, \vec{x}' \in \delta V \end{aligned}$$

del teorema de Green

$$\begin{aligned} \iiint_V d^3x' \left(\phi' \vec{\nabla}'^2 G_D(\vec{x}, \vec{x}') - G_D(\vec{x}, \vec{x}') \vec{\nabla}'^2 \phi' \right) &= \iint_{\delta V} ds' \left(\phi' \hat{n}' \cdot \vec{\nabla}' G_D(\vec{x}, \vec{x}') - G_D(\vec{x}, \vec{x}') \hat{n}' \cdot \vec{\nabla}' \phi' \right) \\ - \iiint_V d^3x' 4\pi \delta(\vec{x} - \vec{x}') \phi' + \iiint_V d^3x' G_D(\vec{x}, \vec{x}') \frac{\rho(\vec{x}')}{\epsilon_0} &= \iint_{\delta V} ds' \phi' \hat{n}' \cdot \vec{\nabla}' G_D(\vec{x}, \vec{x}') \\ \phi(\vec{x}) &= \frac{1}{\pi \epsilon_0} \iiint_V d^3x' G_D(\vec{x}, \vec{x}') \rho(\vec{x}') - \frac{1}{4\pi} \iint_{\delta V} dS(\vec{x}') \phi(\vec{x}') \hat{n}(\vec{x}') \cdot \vec{\nabla}' G_D(\vec{x}, \vec{x}') \end{aligned}$$

ahora, si V es una región libre de cargas

$$\phi(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\delta V} dS(\vec{x}') \phi(\vec{x}') \hat{n}(\vec{x}') \cdot \vec{\nabla}' G_D(\vec{x}, \vec{x}')$$

Escogemos ahora V como una esfera de radio a centrada en \vec{x} , de forma que la función de Green queda

$$G_D(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} - \frac{1}{a}$$

de esta forma

$$\vec{\nabla}' G_D(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$$

Luego, para $\vec{x}' \in S(V)$

$$\hat{n}(\vec{x}') \cdot \vec{\nabla}' G_D(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{\vec{x}' - \vec{x}}{|\vec{x}' - \vec{x}|} \cdot \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} = -\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|^2} = -\frac{1}{a^2}$$

Así

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi a^2} \iint_{\delta V} dS(\vec{x}') \phi(\vec{x}') = \overline{\phi(\vec{x}, a)}$$

con $V : \epsilon(\vec{x}, a)$

Observación

La única condición sobre la esfera es que ella quede totalmente contenida en el vacío

Problema

Demuestre el siguiente corolario del teorema del valor medio. El campo electrostático en el vacío satisface idénticamente las siguientes relaciones

$$\oint_{S(\vec{x})} \frac{d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = 0$$

$$\iiint_{V(\vec{x})} d^3x' \vec{E}(\vec{x}') \cdot \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} = 0$$

donde S es la superficie de una esfera de radio arbitrario con centro en \vec{x} , y $V(S)$ es su volumen

Solución

En el espacio vacío de cargas

$$\vec{\nabla}^2 \phi(\vec{x}) = 0$$

Utilizando el teorema de Green con

$$\psi(\vec{x}', \vec{x}) = \frac{1}{|\vec{x}' - \vec{x}|}$$

$$\begin{aligned} \iiint_{V(\vec{x})} d^3x' \left\{ \frac{\vec{\nabla}'^2 \phi(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} - \phi(\vec{x}') \vec{\nabla}'^2 \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right\} &= 4\pi \iiint_{V(\vec{x})} d^3x' \phi(\vec{x}') \delta(\vec{x} - \vec{x}') = 4\pi \phi(\vec{x}) \\ &= \oint_{S(\vec{x})} dS(\vec{x}') \left\{ \frac{\frac{\partial \phi(\vec{x}')}{\partial n'}}{|\vec{x} - \vec{x}'|} - \phi(\vec{x}') \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right\} \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} \phi(\vec{x}) &= -\frac{1}{4\pi} \iint_{S(\vec{x})} \left[d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right] \phi(\vec{x}') + \frac{1}{4\pi} \iint_{S(\vec{x})} \frac{d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{\nabla}' \phi(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \\ \phi(\vec{x}) &= \frac{1}{4\pi} \iint_{S(\vec{x})} d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \frac{\vec{x}' - \vec{x}}{|\vec{x}' - \vec{x}|^3} \phi(\vec{x}') - \frac{1}{4\pi} \iint_{S(\vec{x})} \frac{d\vec{S}(\vec{x}') \cdot E(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \\ \phi(\vec{x}) &= \frac{1}{4\pi a^2} \iint_{S(\vec{x})} dS(\vec{x}') \phi(\vec{x}') - \frac{1}{4\pi} \iint_{S(\vec{x})} \frac{d\vec{S}(\vec{x}') \cdot E(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \end{aligned}$$

donde $a = |\vec{x} - \vec{x}'|$ es el radio de la esfera. (Independiente de \vec{x}').

Por el teorema del valor medio

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi a^2} \iint_{S(\vec{x})} dS(\vec{x}') \phi(\vec{x}')$$

Luego

$$\iint_{S(\vec{x})} \frac{d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = 0$$

Además

$$\begin{aligned}
& \iint_{S(\vec{x})} d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \frac{\vec{E}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \iiint_{V(S)} d^3x' \vec{\nabla}' \cdot \frac{\vec{E}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \\
&= \iiint_{V(S)} d^3x' \left\{ \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{E}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \vec{E}(\vec{x}') \cdot \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right\} \\
&= \iiint_{V(S)} d^3x' \left\{ \frac{\rho(\vec{x}')}{\epsilon_0 |\vec{x} - \vec{x}'|} + \vec{E}(\vec{x}') \cdot \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \right\} \\
&= - \iiint_{V(S)} d^3x' \vec{E}(\vec{x}') \cdot \frac{\vec{x}' - \vec{x}}{|\vec{x}' - \vec{x}|^3} = 0
\end{aligned}$$

Problema

Demuestre que el campo electrostático en el vacío satisface idénticamente la siguiente relación

$$\vec{\nabla} \cdot \iiint_{V(\vec{x})} d^3x' \frac{\vec{E}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = 0$$

donde $V(\vec{x})$ es el volumen de una esfera de radio arbitrario y centro en \vec{x}

Solución

Sabemos que, en el vacío

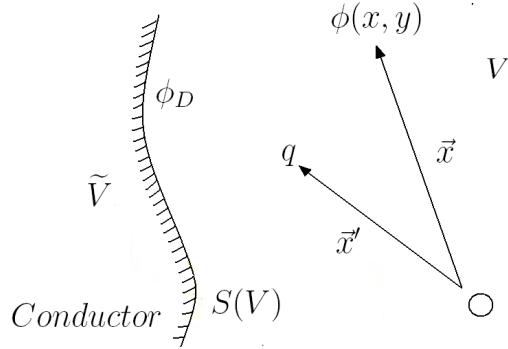
$$\begin{aligned} & \iiint_{V(\vec{x})} d^3x' \vec{E}(\vec{x}') \cdot \frac{\vec{x}' - \vec{x}}{|\vec{x}' - \vec{x}'|^3} = 0 \\ 0 &= \iiint_{V(\vec{x})} d^3x' \vec{E}(\vec{x}') \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \iiint_{V(\vec{x})} d^3x' \vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{E}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \\ 0 &= \vec{\nabla} \cdot \iiint_{V(\vec{x})} d^3x' \frac{\vec{E}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \end{aligned}$$

Capítulo 9

Solución de la Ecuación de Poisson y Laplace

9.1. Método de las Imágenes

La solución formal de los problemas de contorno en electrostática se logra mediante el método de las **Funciones de Green**. En los problemas prácticos no siempre es fácil descubrir o calcular la función de Green correcta. Para ello se usan algunas técnicas especiales, como el método de las imágenes o la expansión en funciones ortogonales. El método de las imágenes se usa en problemas de una o más cargas puntuales en presencia de superficies de frontera, se trata de **conductores** conectados a tierra o mantenidos a un potencial fijo. Este método de las imágenes nos ayuda a encontrar la función de Green adecuada en los problemas de contorno Dirichlet con $\phi_D = cte$



Se trata de resolver el siguiente problema Dirichlet

$$\vec{x}' \in V : \begin{cases} \vec{x} \in V : \vec{\nabla}^2 \phi(\vec{x}, \vec{x}') = -\frac{q\delta(\vec{x}-\vec{x}')}{\epsilon_0} \\ \vec{x} \in S(V) : \phi(\vec{x}, \vec{x}') = \phi_D \end{cases}$$

Bajo condiciones geométricas favorables (simetría) es posible infrerir que un número pequeño de cargas puntuales, de magnitud apropiada, y ubicadas adecuadamente en la región externa \tilde{V} , pueden simular las condiciones de contorno requeridas, estas son las cargas **imágenes**
Sean

V : región interior

\tilde{V} : región externa (conductor)

$q'_i = q'_i(q, \vec{x}') =$ carga imagen

$\vec{x}'_i = \vec{x}'_i(q, \vec{x}') =$ posición de la imagen

Además debe tenerse que

$$\vec{x}'_i(q, \vec{x}') \in \tilde{V}$$

Las cargas imágenes deben ser externas a la región de interés V , de manera que su potencial sea una solución de la ecuación de Laplace en V . En efecto

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}^2 \phi(\vec{x}, \vec{x}') &= -\frac{q\delta(\vec{x} - \vec{x}')}{\epsilon_0} \\ \vec{\nabla}^2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q'_i}{|\vec{x} - \vec{x}'_i|} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i q'_i \vec{\nabla}^2 \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'_i|} \\ &= -\frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i \delta(\vec{x} - \vec{x}'_i) = 0 \end{aligned}$$

Luego

$$\delta(\vec{x} - \vec{x}'_i) = 0, \forall \vec{x} \in V$$

Carga puntual q ubicada frente a un conductor plano a potencial cero, y de extensión infinita

9.2. Funciones Ortogonales y Expansiones

Una técnica muy poderosa de la física matemática es la representación de soluciones físicas mediante expansiones en términos de funciones ortogonales. En cada problema se elige un particular conjunto de funciones ortogonales adaptadas a la simetría del sistema. Revisemos las propiedades más generales de las funciones ortogonales y veamos su uso en la representación de funciones mediante series

Sea ξ una variable real independiente, de rango

$$a \leq \xi \leq b$$

y $\{u_n(\xi)\}$ un conjunto infinito numerable de funciones complejas definidas en (a, b) , con $n = 1, 2, \dots$ tales que

1. Todas ellas son de cuadrado integrable en (a, b)

$$\int_a^b d\xi |u_n(\xi)|^2 \leq \infty$$

donde

$$|u_n(\xi)|^2 = u_n^*(\xi)u_n(\xi)$$

2. Además satisfacen la condición de ortogonalidad en (a, b)

$$m \neq n \rightarrow \int_a^b d\xi u_m^*(\xi)u_n(\xi) = 0$$

Normalización

Sea

$$N_n = \int_a^b d\xi | u_n(\xi) |^2$$

$$0 < N_n < \infty$$

Definamos

$$\hat{u}_n(\xi) = \frac{1}{\sqrt{N_n}} u_n(\xi)$$

Entonces el conjunto

$$\{\hat{u}_n(\xi), n = 1, 2, \dots\}$$

es un conjunto de **funciones ortonormales** en (a, b) . La condición de ortonormalidad es

$$\int_a^b d\xi \hat{u}_n^*(\xi) \hat{u}_n(\xi) = \delta_{mn}$$

Expansión

Sea $f(\xi)$ una función arbitraria, en general compleja, de cuadrado integrable en (a, b)

$$\int_a^b d\xi | f(\xi) |^2 < \infty$$

Supongamos que, dado el número natural N , la serie finita

$$f_N(\xi) = \sum_{n=1}^N a_n \hat{u}_n(\xi)$$

sea una representación aproximada de la función $f(\xi)$ en (a, b) . Si modificamos los coeficientes a_n , $n = 1, 2, \dots, N$, modificamos la bondad de la aproximación. Surge entonces el problema de ajustar los coeficientes de tal manera que la aproximación sea óptima. Luego requerimos que el **error cuadrático medio** M_N sea mínimo

$$M_N = \int_a^b d\xi | f(\xi) - f_N(\xi) |^2$$

Se tiene

$$M_N = \int_a^b d\xi | f(\xi) - \sum_{n=1}^N a_n \hat{u}_n(\xi) |^2$$

$$M_N = \int_a^b d\xi \left[f^*(\xi) - \sum_{n=1}^N a_n^* \hat{u}_n^*(\xi) \right] \left[f(\xi) - \sum_{m=1}^N a_m \hat{u}_m(\xi) \right]$$

$$M_N = \int_a^b d\xi | f(\xi) |^2 - \sum_{m=1}^N a_m \int_a^b d\xi f^*(\xi) \hat{u}_m(\xi) - \sum_{n=1}^N a_n^* \int_a^b d\xi f(\xi) \hat{u}_n^*(\xi) + \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N a_n^* a_m \int_a^b d\xi \hat{u}_n^*(\xi) \hat{u}_m(\xi)$$

Utilizando la ortonormalidad

$$M_N = \int_a^b d\xi |f(\xi)|^2 - \sum_{m=1}^N a_m \int_a^b d\xi f^*(\xi) \hat{u}_m(\xi) - \sum_{n=1}^N a_n^* \int_a^b d\xi f(\xi) \hat{u}_n(\xi) + \sum_{n=1}^N a_n^* a_n$$

Entonces, la condición para el mínimo es

$$\frac{\partial M_N}{\partial a_k^*} = - \int_a^b d\xi \hat{u}_k^*(\xi) f(\xi) + a_k = 0$$

$$\frac{\partial M_N}{\partial a_k} = - \int_a^b d\xi \hat{u}_k(\xi) f^*(\xi) + a_k^* = 0$$

Luego, los **mejores coeficientes** de la representación aproximada son

$$a_n = \int_a^b d\xi \hat{u}_n^*(\xi) f(\xi)$$

se llaman los **coeficientes de Fourier** de la expansión

Compleitud

El conjunto de funciones ortonormales $\{\hat{u}_n(\xi)\}$ es completo en (a, b) si, para cualquier función $f(\xi)$ de cuadrado integrable en (a, b) , existe un número natural $N_0[f]$ tal que, dado $\epsilon > 0$ arbitrario, se tiene

$$N > N_0[f] \rightarrow M_N[f] < \epsilon$$

o sea que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} M_N[f] = 0, \forall f$$

siendo M_N el error cuadrático medio mínimo

Convergencia en la media

Si el conjunto de funciones ortonormales $\{\hat{u}_n(\xi)\}$ es completo en (a, b) entonces se puede demostrar que la representación en serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \hat{u}_n(\xi) = S[f]$$

con

$$a_n = \int_a^b d\xi \hat{u}_n^*(\xi) f(\xi)$$

$$S[f] = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(\xi) \int_a^b d\xi' \hat{u}_n^*(\xi') f(\xi')$$

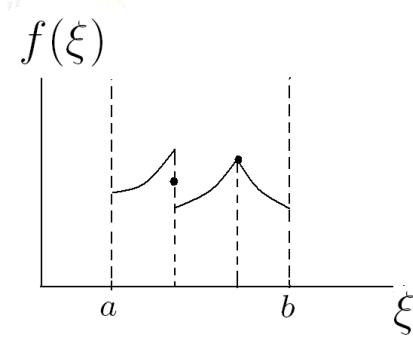
converge en la media a $f(\xi)$ en (a, b) . Vale decir que siendo $f(\xi)$ una función acotada y continua a trazos en (a, b) (por lo tanto de cuadrado integrable) se tiene

1. En todo punto de continuidad

$$S[f] = f(\xi)$$

2. En un punto de discontinuidad ordinaria

$$S[f] = \frac{f(\xi + 0) + f(\xi - 0)}{2}$$



Para todos los conjuntos de funciones ortonormales que suelen usarse en física se ha demostrado su completitud

Relación de completitud

$$\begin{aligned} f(\xi) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \hat{u}_n(\xi) \\ f(\xi) &= \sum_{n=1}^{\infty} \hat{u}_n(\xi) \int_a^b d\xi' \hat{u}_n^*(\xi') f(\xi') \\ f(\xi) &= \int_a^b d\xi' f(\xi') \sum_{n=1}^{\infty} \hat{u}_n^*(\xi') \hat{u}_n(\xi) \end{aligned}$$

por otro lado

$$f(\xi) = \int_a^b d\xi' f(\xi') \delta(\xi' - \xi), \forall f$$

Luego, la suma total de los términos bilineales $\hat{u}_n^*(\xi) \hat{u}_n(\xi)$ debe darnos una representación de la delta de Dirac

$$\sum_{n=1}^{\infty} \hat{u}_n^*(\xi') \hat{u}_n(\xi) = \delta(\xi' - \xi)$$

También vemos que, necesariamente

$$\sum_{n=1}^N \hat{u}_n^*(\xi') \hat{u}_n(\xi) = \sum_{n=1}^N \hat{u}_n^*(\xi) \hat{u}_n(\xi')$$

es real, y que

$$\sum_{n=1}^N \hat{u}_n^*(a) \hat{u}_n(b) = 0, a \neq b$$

Luego, un conjunto de funciones ortonormales completo queda caracterizado por

$$\int_a^b d\xi \hat{u}_m^*(\xi) \hat{u}_n(\xi) = \delta_{mn}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \hat{u}_n^*(\xi) \hat{u}_n(\xi') = \delta(\xi - \xi')$$

Identidad de Parseval

Sea

$$f(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \hat{u}_n(\xi)$$

Consideremos

$$\begin{aligned} \int_a^b d\xi |f(\xi)|^2 &= \int_a^b d\xi \sum_{m=1}^{\infty} a_m^* \hat{u}_m^*(\xi) \sum_{n=1}^{\infty} a_n \hat{u}_n(\xi) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_m^* a_n \int_a^b d\xi \hat{u}_m^*(\xi) \hat{u}_n(\xi) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_m^* a_n \delta_{mn} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^* a_n \end{aligned}$$

Luego

$$\int_a^b d\xi |f(\xi)|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$$

Teorema de Multiplicación

Sean

$$\begin{aligned} f(\xi) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \hat{u}_n(\xi) \\ g(\xi) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \hat{u}_n(\xi) \\ \int_a^b d\xi f^*(\xi) g(\xi) &= \int_a^b d\xi \sum_{m=1}^{\infty} a_m^* \hat{u}_m^*(\xi) \sum_{n=1}^{\infty} b_n \hat{u}_n(\xi) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_m^* b_n \int_a^b d\xi \hat{u}_m^*(\xi) \hat{u}_n(\xi) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_m^* b_n \delta_{mn} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^* b_n \end{aligned}$$

Con esto

$$(f, g) = \int_a^b d\xi f^*(\xi) g(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^* b_n$$

Caso bidimensional

Sea

$$f = f(\xi, \eta)$$

$$a \leq \xi \leq b, c \leq \eta \leq d$$

Elegimos dos conjuntos completos ortonormales

$$\{\hat{u}_n(\xi)\} \rightarrow \begin{cases} \int_a^b d\xi \hat{u}_m^*(\xi) \hat{u}_n(\xi) = \delta_{mn} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \hat{u}_n^*(\xi) \hat{u}_n(\xi') = \delta(\xi - \xi') \end{cases}$$

$$\{\hat{v}_n(\eta)\} \rightarrow \begin{cases} \int_c^d d\eta \hat{v}_m^*(\eta) \hat{v}_n(\eta) = \delta_{mn} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \hat{v}_n^*(\eta) \hat{v}_n(\eta') = \delta(\eta - \eta') \end{cases}$$

entonces el conjunto (producto tensorial)

$$\{\hat{u}_m(\xi) \hat{v}_n(\eta)\} = \{\hat{w}_{m,n}(\xi, \eta)\}$$

satisface

$$\int_a^b \int_c^d d\xi d\eta \hat{u}_k^*(\xi) \hat{v}_l^*(\eta) \hat{u}_m(\xi) \hat{v}_n(\eta) = \delta_{km} \delta_{ln}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \hat{u}_m^*(\xi) \hat{v}_n^*(\eta) \hat{u}_m(\xi') \hat{v}_n(\eta') = \delta(\xi - \xi') \delta(\eta - \eta')$$

Luego cualquier función $f(\xi, \eta)$ de cuadrado integrable en $(a, b) \times (c, d)$ se puede representar como

$$f(\xi, \eta) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \hat{u}_m(\xi) \hat{v}_n(\eta)$$

$$a_{mn} = \int_a^b \int_c^d d\xi d\eta \hat{u}_m^*(\xi) \hat{v}_n^*(\eta) f(\xi, \eta)$$

9.3. Series de Fourier

9.3.1. Condiciones de Dirichlet

Sea la función $f(x)$ que satisface las siguientes condiciones (de Dirichlet)

- (1) $f(x)$ está definida en $a < x < a + T$
- (2) $f(x)$ y $f'(x)$ son continuas a trazos (seccionalmente continuas) en $a < x < a + T$
- (3) $f(x)$ es periódica con período T en $-\infty < x < \infty$

$$f(x) = f(x + T)$$

Observación: la función $f(x)$ se puede definir a partir de una función acotada $F(x)$ definida en $-\infty < x < \infty$ siendo $F(x)$ y $F'(x)$ continuas a trazos en $a < x < a + T$. En efecto

$$f(x) = \begin{cases} F(x) & \text{si } a < x < a + T \\ f(x + T) & \text{si } -\infty < x < a \end{cases}$$

Teorema de la serie de Fourier

Si $f(x)$ satisface las condiciones de Dirichlet en $a < x < T$ entonces

(1) En todo punto de continuidad

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) + B_n \sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) \right)$$

(2) En un punto de discontinuidad ordinaria

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) + B_n \sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) \right)$$

donde

$$A_n = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} dx \cos\left(\frac{n2\pi x}{T}\right) f(x)$$

$$B_n = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} dx \sin\left(\frac{n2\pi x}{T}\right) f(x)$$

para $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Las condiciones de Dirichlet son suficientes (pero no necesarias) para la convergencia en la media de la serie de Fourier. Sin perder generalidad, si $f(x)$ satisface las condiciones de Dirichlet en $-T/2 < x < T/2$ se tiene

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) + B_n \sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) \right)$$

$$A_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dx \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) f(x)$$

$$B_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dx \sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) f(x)$$

Relaciones de ortogonalidad

$$\int_{-T/2}^{T/2} dx \cos\left(\frac{2\pi mx}{T}\right) \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) = \frac{T}{2} \delta_{mn}$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} dx \sin\left(\frac{2\pi mx}{T}\right) \sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) = \frac{T}{2} \delta_{mn}$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} dx \sin\left(\frac{2\pi mx}{T}\right) \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) = 0$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} dx \cos\left(\frac{2\pi mx}{T}\right) = \int_{-T/2}^{T/2} dx \sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) = 0$$

9.4. Ecuación de Laplace en Coordenadas Rectangulares

$$\vec{\nabla}^2 \phi(\vec{x}) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi(x, y, z) = 0$$

utilizamos el método de separación de variables

$$\phi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$$

Se tiene entonces

$$\frac{1}{\phi} \vec{\nabla}^2 \phi = \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0$$

luego

$$\begin{aligned} \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} &= -\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} - \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -\alpha^2 \\ \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} &= \alpha^2 - \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -\beta^2 \\ \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} &= \alpha^2 + \beta^2 = -\gamma^2 \end{aligned}$$

Resulta

$$\begin{aligned} \frac{d^2 X}{dx^2} + \alpha^2 X &= 0 \\ \frac{d^2 Y}{dy^2} + \beta^2 Y &= 0 \\ \frac{d^2 Z}{dz^2} + \gamma^2 Z &= 0 \end{aligned}$$

con

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$$

Consideremos

$$\begin{aligned} X(x) &= e^{\pm i \alpha x} \\ Y(y) &= e^{\pm i \beta y} \\ Z(z) &= e^{\pm i \gamma z} \end{aligned}$$

pero

$$\gamma^2 = -(\alpha^2 + \beta^2) = i^2 (\alpha^2 + \beta^2)$$

$$\gamma = \pm i \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

$$\phi_{\alpha\beta}(x, y, z) = e^{\pm i \alpha x \pm i \beta y \pm \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} z}$$

es un conjunto de soluciones linealmente independientes de la ecuación de Laplace. La ecuación de Laplace es lineal y homogénea, luego, por superposición

$$\phi(x, y, z) = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} A_{\alpha\beta}^{+} e^{i(\alpha x + \beta y) + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} z} + \sum_{\alpha} \sum_{\beta} A_{\alpha\beta}^{-} e^{i(\alpha x + \beta y) - \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} z}$$

es también una solución de la ecuación de Laplace. Las constantes $\alpha, \beta, A_{\alpha\beta}^{+}, A_{\alpha\beta}^{-}$ están a nuestra disposición. Ellas se determinan mediante las condiciones de contorno

9.4.1. Problema en 2 dimensiones

En ciertos problemas, la simetría permite establecer que el potencial es sólo función de dos variables, digamos x e y . En este caso se debe resolver

$$\vec{\nabla}^2 \phi(\vec{x}) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \phi(x, y) = 0$$

La lógica es la misma, utilizando el método de separación de variables

$$\phi(x, y, z) = X(x)Y(y)$$

Se tiene entonces

$$\frac{1}{\phi} \vec{\nabla}^2 \phi = \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = 0$$

luego

$$\begin{aligned} \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} &= -\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -\alpha^2 \\ \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} &= \alpha^2 \end{aligned}$$

Resulta

$$\begin{aligned} \frac{d^2 X}{dx^2} + \alpha^2 X &= 0 \\ \frac{d^2 Y}{dy^2} - \alpha^2 Y &= 0 \end{aligned}$$

Las soluciones son de la forma

$$\begin{aligned} X(x) &= e^{\pm i\alpha x} \\ Y(y) &= e^{\pm \alpha y} \end{aligned}$$

La solución general de la ecuación de Laplace está dada por la familia de funciones

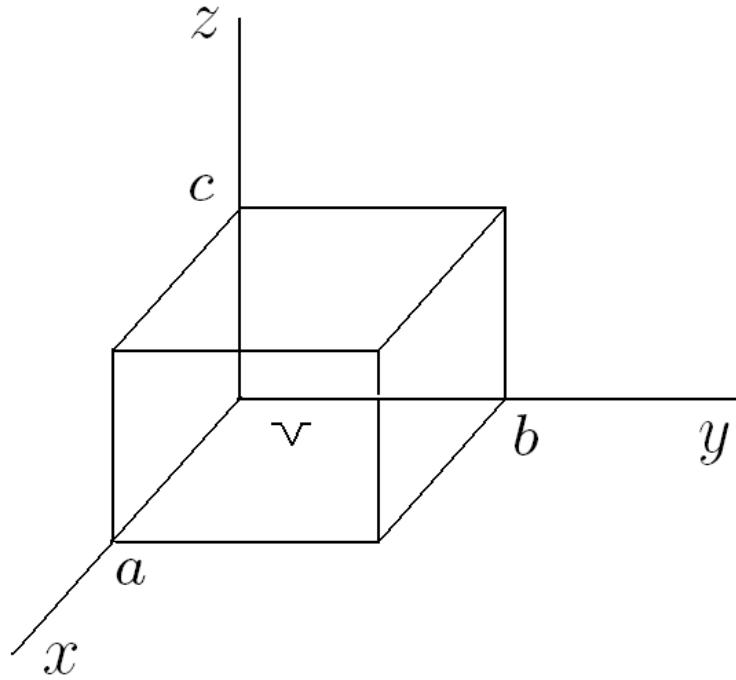
$$X(x) = A_\alpha \cos(\alpha x) + B_\alpha \sin(\alpha x)$$

$$Y(y) = C_\alpha e^{\alpha y} + D_\alpha e^{-\alpha y}$$

con $A_\alpha, B_\alpha, C_\alpha, D_\alpha$ constantes reales.

Problema

Potencial en una Caja



Resolver

$$\vec{x} \in V : \vec{\nabla}^2 \phi(\vec{x}) = 0$$

$$\vec{x} \in S(V) : \begin{cases} \phi(0, y, z) = 0 \\ \phi(a, y, z) = 0 \\ \phi(x, 0, z) = 0 \\ \phi(x, b, z) = 0 \\ \phi(x, y, 0) = 0 \\ \phi(x, y, c) = \phi_D(x, y) \end{cases}$$

Solución

$$\phi(x, y, z) = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \left(A_{\alpha\beta}^+ e^{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}z} + A_{\alpha\beta}^- e^{-\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}z} \right) e^{i(\alpha x + \beta y)}$$

Esto se puede reescribir como

$$\phi(x, y, z) = \sum_{\alpha \geq 0} \sum_{\beta} \left(A_{\alpha\beta}^+ e^{i\alpha x} + A_{-\alpha\beta}^+ e^{-i\alpha x} \right) e^{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}z} e^{i\beta y} + \left(A_{\alpha\beta}^- e^{i\alpha x} + A_{-\alpha\beta}^- e^{-i\alpha x} \right) e^{-\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}z} e^{i\beta y}$$

Se tiene

$$\phi(0, y, z) = 0 \rightarrow A_{\alpha\beta}^{\pm} + A_{-\alpha\beta}^{\pm} = 0$$

Luego

$$\phi(x, y, z) = \sum_{\alpha \geq 0} \sum_{\beta} \left(A_{\alpha\beta}^+ (e^{i\alpha x} - e^{-i\alpha x}) \right) e^{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}z} e^{i\beta y} + \left(A_{\alpha\beta}^- (e^{i\alpha x} - e^{-i\alpha x}) \right) e^{-\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}z} e^{i\beta y}$$

Además

$$\phi(a, y, z) = 0 \rightarrow e^{i\alpha a} - e^{-i\alpha a} = 2i \sin \alpha a = 0$$

Esto limita los valores posibles que puede tomar α

$$a\alpha = m\pi \rightarrow m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\alpha = \frac{m\pi}{a} \rightarrow m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Así

$$\phi(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\beta} 2i \sin \left(\frac{m\pi}{a} x \right) e^{i\beta y} \left(A_{m\beta}^+ e^{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} z} + A_{m\beta}^- e^{-\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} z} \right)$$

y se puede escribir como

$$\phi(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\beta \geq 0} 2i \sin \left(\frac{m\pi}{a} x \right) \left((A_{m\beta}^+ e^{i\beta y} + A_{m-\beta}^+ e^{-i\beta y}) e^{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} z} + (A_{m\beta}^- e^{i\beta y} + A_{m-\beta}^- e^{-i\beta y}) e^{-\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} z} \right)$$

Se cumple además

$$\phi(x, 0, z) = 0 \rightarrow A_{\alpha\beta}^{\pm} + A_{\alpha-\beta}^{\pm} = 0$$

$$\phi(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\beta \geq 0} 2i \sin \left(\frac{m\pi}{a} x \right) \left(A_{m\beta}^+ 2i \sin(\beta y) e^{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} z} + A_{m\beta}^- 2i \sin(\beta y) e^{-\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} z} \right)$$

y

$$\phi(x, b, z) = 0 \rightarrow 2i \sin \beta b = 0$$

Esto limita los valores posibles que puede tomar β

$$b\beta = n\pi \rightarrow n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\beta = \frac{n\pi}{b} \rightarrow n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

En resumen, α y β satisfacen

$$\alpha = \frac{m\pi}{a}, \beta = \frac{n\pi}{b}$$

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \pi \sqrt{\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2} = \gamma_{mn}$$

$$m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

y la solución general queda

$$\phi(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (2i)^2 (A_{mn}^+ e^{\gamma_{mn} z} + A_{mn}^- e^{-\gamma_{mn} z}) \sin \left(\frac{\pi m x}{a} \right) \sin \left(\frac{n\pi y}{b} \right)$$

El potencial también debe ser nulo en $z = 0$

$$(2i)^2 (A_{mn}^+ + A_{mn}^-) \sin\left(\frac{\pi mx}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi ny}{b}\right) = 0$$

$$A_{mn}^+ + A_{mn}^- = 0$$

Sea

$$\frac{1}{2} A_{mn} = (2i)^2 A_{mn}^+ = -(2i)^2 A_{mn}^-$$

luego

$$\begin{aligned} (2i)^2 (A_{mn}^+ e^{\gamma_{mn} z} + A_{mn}^- e^{-\gamma_{mn} z}) &= \frac{1}{2} A_{mn} (e^{\gamma_{mn} z} - e^{-\gamma_{mn} z}) \\ &= A_{mn} \sinh \gamma_{mn} z \end{aligned}$$

Con todo esto, la solución toma la forma

$$\phi(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin\left(\frac{\pi mx}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sinh \gamma_{mn} z$$

Por último, la condición en $z = c$ entrega

$$\phi(x, y, c) = \phi_D(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (A_{mn} \sinh \gamma_{mn}) \sin\left(\frac{\pi mx}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) c$$

Esta es una **doble serie de Fourier**

$$\begin{aligned} f(\xi) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{\pi n \xi}{L}\right) \\ B_n &= \frac{2}{L} \int_0^L d\xi \sin\left(\frac{\pi n \xi}{L}\right) f(\xi) \end{aligned}$$

Luego la solución del problema es

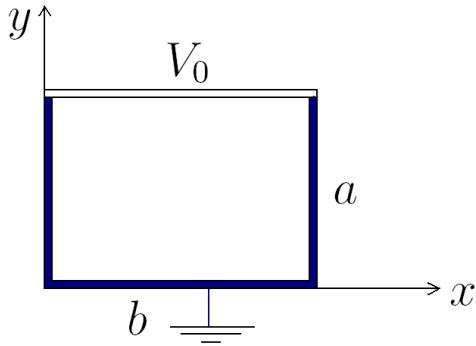
$$\phi(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin\left(\frac{\pi mx}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sinh \gamma_{mn} z$$

con

$$\begin{aligned} A_{mn} &= \frac{4}{ab \sinh \gamma_{mn} c} \int_0^a dx \int_0^b dy \sin\left(\frac{\pi mx}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi ny}{b}\right) \phi_D(x, y) \\ \gamma_{mn} &= \pi \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} \end{aligned}$$

Problema

Determinar el potencial en la región que comprende el interior de una caja rectangular de longitud infinita, cuya sección transversal se aprecia en la figura



Solución

Dado que la longitud de la caja es muy larga, el potencial tendrá la misma forma para cualquier sección transversal. Se debe resolver entonces la ecuación de Laplace

$$\vec{\nabla}^2 \phi(x, y) = 0$$

con las condiciones de borde

$$\vec{x} \in S(V) : \begin{cases} \phi(0, y) = 0 \\ \phi(b, y) = 0 \\ \phi(x, 0) = 0 \\ \phi(x, a) = V_0 \end{cases}$$

La solución general de la ecuación de Laplace es

$$\phi(x, y) = X(x)Y(y)$$

donde $X(x)$ e $Y(y)$ pertenecen a las familias de funciones

$$X(x) = A_\alpha \cos(\alpha x) + B_\alpha \sin(\alpha x)$$

$$Y(y) = C_\alpha e^{\alpha y} + D_\alpha e^{-\alpha y}$$

Para cualquier α real, $\phi(x, y)$ es solución de la ecuación de Laplace. Sin embargo, las condiciones de borde limitarán los valores posibles de α . En efecto, debe cumplirse que

$$\phi(0, y) = 0 \rightarrow X(0) = 0$$

de forma que

$$A_\alpha = 0$$

es decir

$$X(x) = B_\alpha \sin(\alpha x)$$

Además, debe tenerse

$$\phi(b, y) = 0 \rightarrow B_\alpha \sin(\alpha b) = 0$$

es decir

$$\alpha b = n\pi, n = 0, 1, 2, \dots$$

luego

$$\alpha = \frac{n\pi}{b}, n = 0, 1, 2, \dots$$

Es decir, la familia de funciones que satisfacen la ecuación de Laplace y cumplen con $\phi(0, y) = \phi(b, y) = 0$ está dada por

$$\begin{aligned}\phi(x, y) &= X(x)Y(y) \\ X(x) &= \sin\left(\frac{n\pi}{b}x\right), n = 0, 1, 2, \dots \\ Y(y) &= A_n e^{\frac{n\pi}{b}y} + B_n e^{-\frac{n\pi}{b}y}, n = 0, 1, 2, \dots\end{aligned}$$

La solución general toma la forma

$$\phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{b}x\right) (A_n e^{\frac{n\pi}{b}y} + B_n e^{-\frac{n\pi}{b}y})$$

además se tiene $\phi(x, 0) = 0$

$$\phi(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{b}x\right) (A_n + B_n) = 0$$

Luego

$$A_n = -B_n$$

y entonces

$$\begin{aligned}\phi(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{b}x\right) A_n (e^{\frac{n\pi}{b}y} - e^{-\frac{n\pi}{b}y}) \\ \phi(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{b}x\right) 2A_n \sinh\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \\ \phi(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi}{b}x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\end{aligned}$$

Donde $C_n = 2A_n$. Por último, la condición de borde $\phi(x, a) = V_0$ entrega

$$\begin{aligned}\phi(x, a) &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi}{b}x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{b}a\right) = V_0 \\ V_0 &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi}{b}x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{b}a\right)\end{aligned}$$

¿Cómo podemos encontrar los C_n ? La clave está en notar que esta es una expansión en series de Fourier. Si $F : [-b, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de cuadrado integrable en $[-b, b]$, admite una expansión en series

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi}{b}x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{b}x\right)$$

con

$$B_n = \frac{1}{b} \int_{-b}^b dx F(x) \sin\left(\frac{n\pi}{b}x\right), n = 0, 1, 2, \dots$$

$$A_n = \frac{1}{b} \int_{-b}^b dx F(x) \cos\left(\frac{n\pi}{b}x\right), n = 0, 1, 2\dots$$

En particular, si F es una función impar sobre $[-b, b]$, $A_n = 0 \forall n$, y entonces

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{b}x\right)$$

con

$$B_n = \frac{2}{b} \int_0^b dx F(x) \sin\left(\frac{n\pi}{b}x\right), n = 0, 1, 2\dots$$

Interpretemos ahora el resultado que hemos obtenido

$$V_0 = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi}{b}x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{b}a\right) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{b}x\right)$$

Es justamente la expansión en serie de Fourier de V_0 . Entonces

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2}{b} \int_0^b dx V_0 \sin\left(\frac{n\pi}{b}x\right) = \frac{2V_0}{b} \int_0^b dx \sin\left(\frac{n\pi}{b}x\right) \\ B_n &= -\frac{2V_0}{b} \frac{b}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{b}x\right) \Big|_0^b = 2 \frac{V_0}{n\pi} (1 - \cos(n\pi)) \end{aligned}$$

Notar que $B_n = 0$ para n impar, mientras que $B_n = 4 \frac{V_0}{n\pi}$ para n par. Además,

$$B_n = C_n \sinh\left(\frac{n\pi}{b}a\right) \rightarrow C_n = \frac{B_n}{\sinh\left(\frac{n\pi}{b}a\right)}$$

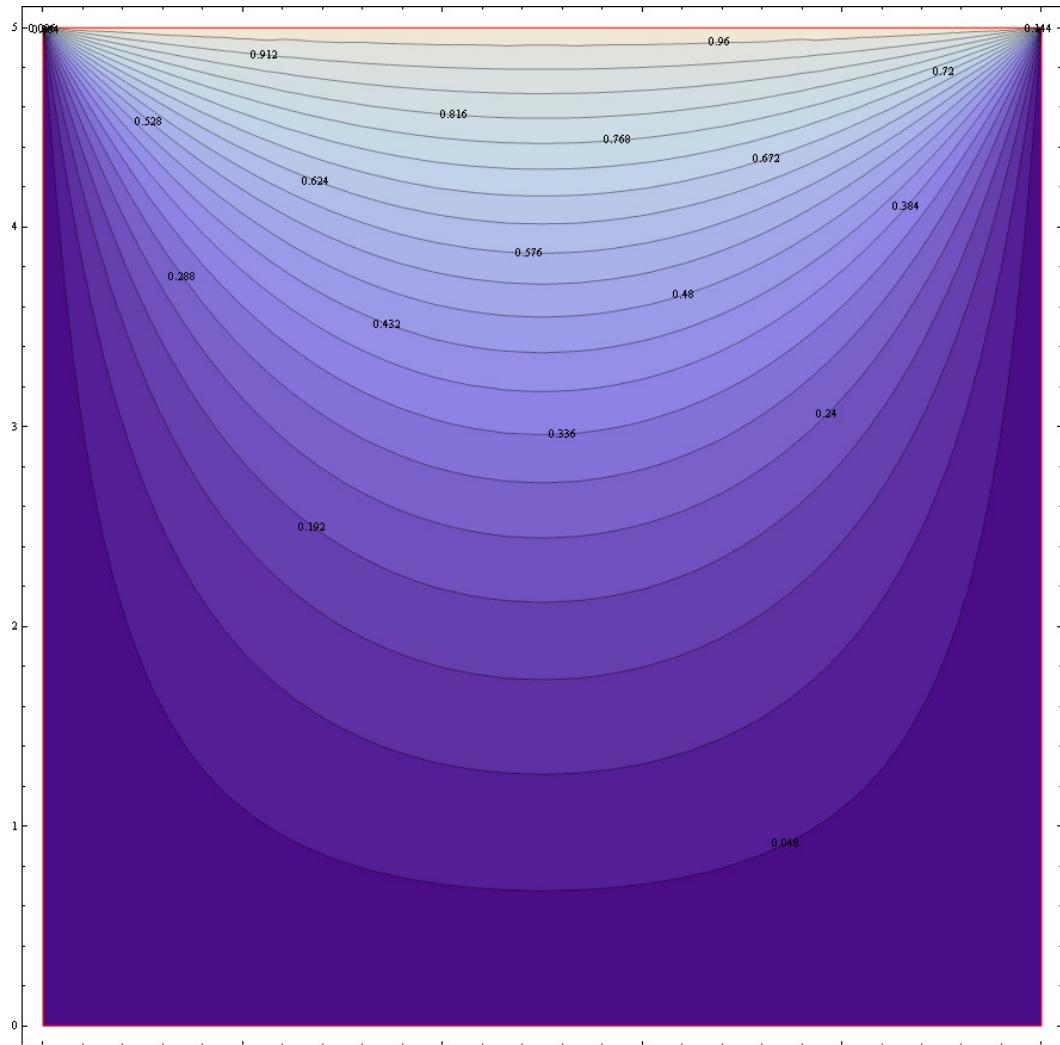
Luego

$$\begin{aligned} C_n &= 0, n \text{ par} \\ C_n &= \frac{4V_0}{n\pi \sinh\left(\frac{n\pi}{b}a\right)}, n \text{ impar} \end{aligned}$$

y la solución para el potencial queda

$$\phi(x, y) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1) \sinh\left(\frac{(2n-1)\pi a}{b}\right)} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{b}\right) \sinh\left(\frac{(2n-1)\pi y}{b}\right)$$

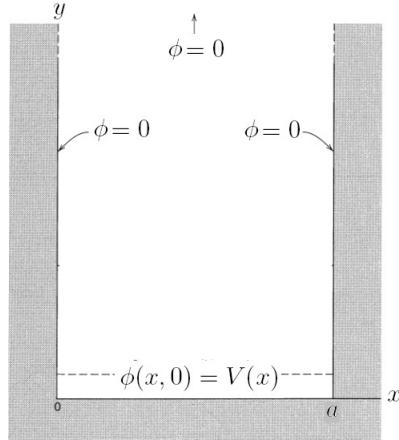
La siguiente figura es un gráfico de las curvas de nivel para $a = b = 5$ y $V_0 = 1$ [V]



Problema

Encuentre el potencial para la región $0 \leq x \leq a, y \geq 0$, con las condiciones de borde de Dirichlet

$$\vec{x} \in S(V) : \begin{cases} \phi(0, y) = 0 \\ \phi(a, y) = 0 \\ \lim_{y \rightarrow \infty} \phi(x, y) = 0 \\ \phi(x, 0) = V(x) \end{cases}$$



Solución

El potencial en V satisface la ecuación de Laplace

$$\vec{\nabla}^2 \phi(x, y) = 0$$

cuya solución está dada por

$$\phi(x, y) = X(x)Y(y)$$

donde

$$X(x) = A_\alpha \cos(\alpha x) + B_\alpha \sin(\alpha x)$$

$$Y(y) = C_\alpha e^{\alpha y} + D_\alpha e^{-\alpha y}$$

La condición de borde $\phi(0, y) = 0$ implica

$$X(0) = A_\alpha = 0 \rightarrow X(x) = B_\alpha \sin(\alpha x)$$

Además, debe tenerse

$$\phi(a, y) = 0 \rightarrow X(a) = 0$$

$$\sin(\alpha a) = 0$$

Entonces

$$\alpha = \frac{n\pi}{a}, n = 0, 1, 2, \dots$$

Entonces la solución toma la forma

$$\phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \left(A_n e^{\frac{n\pi}{a}y} + B_n e^{-\frac{n\pi}{a}y}\right)$$

La condición en el infinito es

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \phi(x, y) = 0$$

de forma que $A_n = 0, \forall n = 0, 1, 2, \dots$

$$\phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) e^{-\frac{n\pi}{a}y}$$

Por último, la condición $\phi(x, 0) = V(x)$ es

$$\phi(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) = V(x)$$

Ahora, consideremos $F(x), -a \leq x \leq x$. Si $F(x)$ es cuadrado integrable en $[-a, a]$, entonces existe su serie de Fourier

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

donde

$$A_n = \frac{1}{a} \int_{-a}^a dx F(x) \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right), n = 0, 1, 2, \dots$$

$$C_n = \frac{1}{a} \int_{-a}^a dx F(x) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right), n = 0, 1, 2, \dots$$

Si $F(x)$ es impar, entonces $A_n = 0 \forall n$, de forma que

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

con

$$C_n = \frac{2}{a} \int_0^a dx F(x) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right), n = 1, 2, \dots$$

Con esto,

$$\phi(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) = V(x)$$

corresponde a la expansión en serie de Fourier de $V(x), -a < x < a$, con $V(-x) = -V(x)$ (por supuesto que físicamente sólo interesa $V(x)$ para $0 \leq x \leq a$). Así, la solución del problema es

$$\phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) e^{-\frac{n\pi}{a}y}$$

con

$$B_n = \frac{2}{a} \int_0^a dx V(x) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right), n = 1, 2, \dots$$

Supongamos que $\phi(x, 0) = V(x) = V_0$ (constante). Luego

$$B_n = \frac{2V_0}{a} \int_0^a dx \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) = -\frac{2V_0}{a} \frac{a}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \Big|_0^a, n = 1, 2, 3, \dots$$

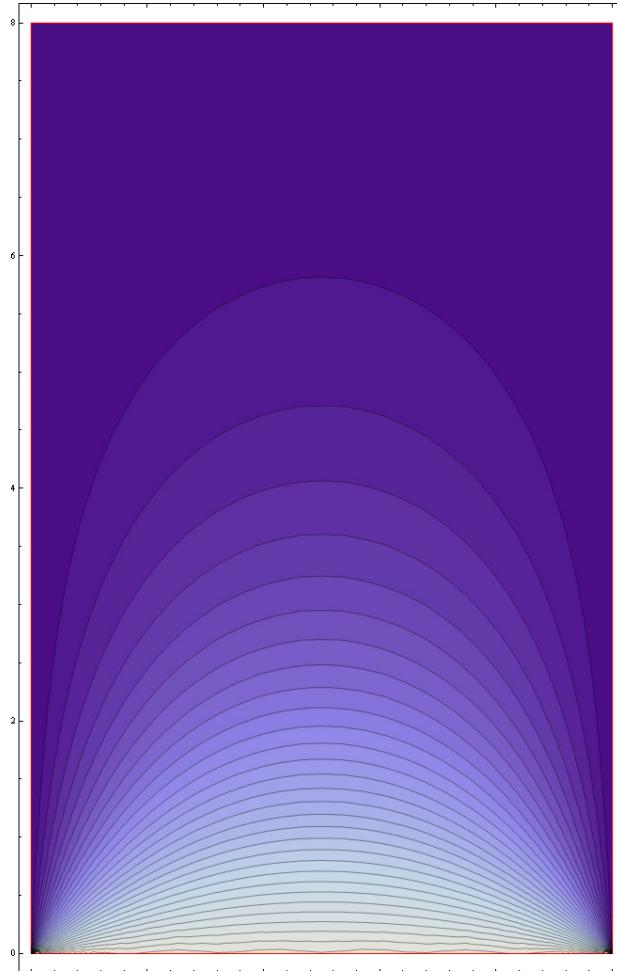
$$B_n = \frac{2V_0}{n\pi} (1 - \cos(n\pi)), n = 1, 2, 3\dots$$

$$B_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ par} \\ \frac{4V_0}{n\pi} & \text{si } n \text{ impar} \end{cases}$$

Finalmente

$$\phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4V_0}{(2n-1)\pi} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{a}x\right) e^{-\frac{(2n-1)\pi}{a}y}$$

El gráfico muestra la solución para $V_0 = 0,1$, $a = 5$, y tomando 50 términos en la serie



9.5. Ecuación de Laplace en coordenadas Cilíndricas

9.5.1. Problema bidimensional

Supongamos un problema de Laplace plano, en donde la geometría del problema permite que sea más favorable utilizar coordenadas polares

$$\vec{\nabla}^2 \phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} = 0$$

Utilizando el método de separación de variables, es decir

$$\phi(r, \varphi) = R(r)\Psi(\varphi)$$

De forma que

$$\vec{\nabla}^2 \phi = \Psi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) + R(r) \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi(\varphi)}{\partial \varphi^2} = 0$$

Multiplicando por $\frac{r^2}{\phi}$ (si ϕ nunca es cero)

$$\frac{r}{R(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) + \frac{1}{\Psi} \frac{\partial^2 \Psi(\varphi)}{\partial \varphi^2} = 0$$

o, equivalentemente

$$\frac{r}{R(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) = -\frac{1}{\Psi(\varphi)} \frac{\partial^2 \Psi(\varphi)}{\partial \varphi^2}$$

La única forma de que esto último sea posible es que ambas expresiones sean una constante

$$\frac{r}{R(r)} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR(r)}{dr} \right) = -\frac{1}{\Psi(\varphi)} \frac{\partial^2 \Psi(\varphi)}{\partial \varphi^2} = \alpha^2$$

de forma que

$$\begin{aligned} \frac{r}{R(r)} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR(r)}{dr} \right) &= \alpha^2 \\ \frac{1}{\Psi(\varphi)} \frac{d^2 \Psi(\varphi)}{d\varphi^2} &= -\alpha^2 \end{aligned}$$

1. Primer caso, $\alpha \neq 0$

La solución para Ψ es inmediata

$$\Psi(\varphi) = e^{\pm i\alpha\varphi}$$

y para $R(r)$, con $\alpha \neq 0$

$$\frac{r}{R(r)} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR(r)}{dr} \right) = \frac{r}{R(r)} \left(\frac{dR(r)}{dr} + r \frac{d^2 R(r)}{dr^2} \right) = \alpha^2$$

$$r \frac{dR(r)}{dr} + r^2 \frac{d^2 R(r)}{dr^2} = R(r)\alpha^2$$

Esta ecuación pertenece al tipo Cauchy, la solución es de la forma

$$R(r) = r^a$$

En efecto, es solución si

$$\begin{aligned} rar^{a-1} + r^2 a(a-1)r^{a-2} &= r^a \alpha^2 \\ ar^a + a(a-1)r^a &= r^a \alpha^2 \end{aligned}$$

$$a + a(a-1) = \alpha^2 \rightarrow a^2 = \alpha^2$$

Entonces

$$a = \pm\alpha$$

y la solución para $R(r)$, con $\alpha \neq 0$ es

$$R(r) = A_\alpha r^\alpha + B_\alpha r^{-\alpha}$$

2. Segundo caso, $\alpha = 0$

Aquí,

$$\frac{r}{R(r)} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR(r)}{dr} \right) = 0$$

luego

$$\left(r \frac{dR(r)}{dr} \right) = 0 \rightarrow R(r) = a_0 + b_0 \ln r$$

y

$$\frac{1}{\Psi(\varphi)} \frac{d^2\Psi(\varphi)}{d\varphi^2} = 0$$

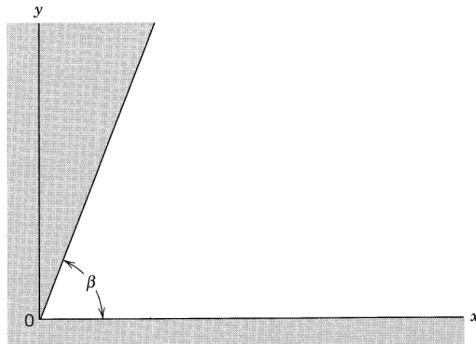
$$\Psi(\varphi) = A_0 + B_0 \varphi$$

Finalmente, la solución general a la ecuación de Laplace en coordenadas polares es la familia de soluciones

$$\phi(r, \varphi) = (a_0 + b_0 \ln r) (A_0 + B_0 \varphi) + (A_\alpha r^\alpha + B_\alpha r^{-\alpha}) (C_\alpha \sin(\alpha\varphi) + D_\alpha \cos(\alpha\varphi))$$

Problema

Determine el potencial electrostático al interior de la región limitada por un conductor de extensión infinita cuya forma se muestra en la figura. El conductor se encuentra a potencial V



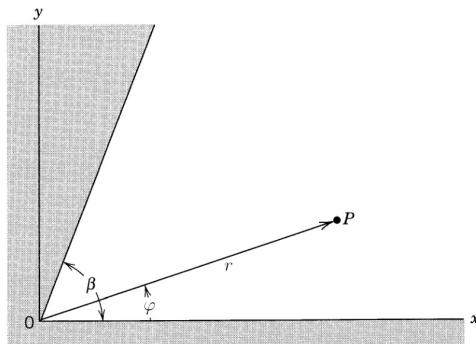
Solución

Dada la geometría, es natural utilizar coordenadas polares para resolver este problema. Si en la región $\Omega : 0 \leq \varphi \leq \beta$ no hay carga, entonces el potencial satisface

$$\vec{\nabla}^2 \phi = 0, \text{ en } \Omega$$

La solución general de la ecuación de Laplace en coordenadas polares está dada por

$$\phi(r, \varphi) = (a_0 + b_0 \ln r) (A_0 + B_0 \varphi) + (A_\alpha r^\alpha + B_\alpha r^{-\alpha}) (\sin(C_\alpha \alpha \varphi) + D_\alpha \cos(\alpha \varphi))$$



El potencial debe ser finito en el origen $r = 0$, de forma que $B_\alpha = 0, \forall \alpha$, igualmente $b_0 = 0$. La solución que nos interesa toma la forma

$$\phi(r, \varphi) = (A_0 + B_0 \varphi) + A_\alpha r^\alpha (\sin(\alpha \varphi) + D_\alpha \cos(\alpha \varphi))$$

La condición de borde $\phi(r, 0) = V$ implica

$$\phi(r, 0) = A_0 + A_\alpha r^\alpha D_\alpha = V$$

Lo cual se cumple para todo r si $A_0 = V, D_\alpha = 0$. Así

$$\phi(r, \varphi) = (V + B_0 \varphi) + A_\alpha r^\alpha \sin(\alpha \varphi)$$

Además, la condición de borde en $\varphi = \beta$ entrega

$$\phi(r, \beta) = (V + B_0 \beta) + A_\alpha r^\alpha \sin(\alpha \beta) = V$$

$$B_0\beta + A_\alpha r^\alpha \sin(\alpha\beta) = 0$$

lo cual se cumple para todo r si

$$\begin{aligned} B_0 &= 0 \\ \sin(\alpha\beta) &= 0 \rightarrow \alpha = \frac{n\pi}{\beta}, n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Finalmente, la solución queda

$$\phi(r, \varphi) = V + \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n \sin\left(\frac{n\pi}{\beta}\varphi\right)$$

9.6. Ecuación de Laplace en Coordenadas Esféricas

$$\vec{\nabla}^2 \phi(r, \vartheta, \varphi) = 0$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2}$$

Notar que

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r}$$

y

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\phi) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} + \phi \right) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r}$$

luego

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r$$

Así, la ecuación de Laplace queda de la forma

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\phi) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} = 0$$

supongamos

$$\phi(r, \vartheta, \varphi) = \frac{R(r)}{r} \Theta(\vartheta) \Phi(\varphi)$$

resulta

$$\frac{\Theta \Phi}{r} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{R \Phi}{r^3 \sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{d\Theta}{d\vartheta} \right) + \frac{R \Theta}{r^3 \sin^2 \vartheta} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = 0$$

$$\frac{r^2 \sin^2 \vartheta}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{\sin \vartheta}{\Theta} \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{d\Theta}{d\vartheta} \right) = -\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = m^2$$

La ecuación para Φ es inmediata

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + m^2 \Phi = 0$$

cuya solución es

$$\Phi(\varphi) = e^{\pm im\varphi}$$

Es evidente que esta función debe ser periódica

$$\Phi(\varphi \pm 2\pi) = \Phi(\varphi)$$

es decir

$$e^{\pm im(\varphi+2\pi)} = e^{\pm i2\pi m} e^{\pm im\varphi} = e^{\pm im\varphi}$$

$$e^{\pm i2\pi m} = \cos(2\pi m) \pm i \sin(2\pi m) = 1$$

luego $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$\Phi_m(\varphi) = e^{im\varphi}$$

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Con esto

$$\frac{r^2}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} = -\frac{1}{\Theta \sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{d\Theta}{d\vartheta} \right) + \frac{m^2}{\Phi \sin^2 \vartheta} = l(l+1)$$

Luego

$$\frac{d^2 R}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} R = 0$$

Esta ecuación pertenece al tipo Cauchy

$$x^2 y''(x) + \alpha x y'(x) + \beta y(x) = 0$$

cuya solución es de la forma

$$y(x) = x^a \rightarrow y'(x) = ax^{a-1} \rightarrow y''(x) = a(a-1)x^{a-2}$$

luego

$$a(a-1)x^a + \alpha ax^a + \beta x^a = 0$$

$$a^2 + (\alpha - 1)a + \beta = 0$$

$$a = \begin{cases} a_1 = \frac{(1-\alpha)+\sqrt{(1-\alpha)^2-4\beta}}{2} \\ a_2 = \frac{(1-\alpha)-\sqrt{(1-\alpha)^2-4\beta}}{2} \end{cases}$$

Por superposición , tenemos que la solución general es

$$y(x) = Ax^{a_1} + Bx^{a_2}$$

En nuestro caso

$$R(r) = r^a$$

$$a^2 - a - l(l+1) = 0$$

$$a = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4l(l+1)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4l + 4l^2}}{2}$$

$$a = \frac{1 \pm \sqrt{(2l+1)^2}}{2} = \frac{1 \pm (2l+1)}{2} = \begin{cases} l+1 \\ -l \end{cases}$$

Luego

$$R_l(r) = A_l r^{l+1} + B_l r^{-l}$$

Nos queda únicamente la ecuación para Θ

$$\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{d\Theta}{d\vartheta} \right) + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \vartheta} \right) \Theta = 0$$

Sea $\mu = \cos \vartheta$, $0 \leq \vartheta \leq \pi \rightarrow -1 \leq \mu \leq 1$

$$P(\mu) = \Theta(\vartheta)$$

$$\frac{d\Theta}{d\vartheta} = \frac{d\mu}{d\vartheta} \frac{dP}{d\mu} = -\sin \vartheta \frac{dP}{d\mu}$$

$$\frac{d}{d\mu} = -\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta}$$

Luego la ecuación es

$$\frac{d}{d\mu} \left((1 - \mu^2) \frac{dP}{d\mu} \right) + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{1 - \mu^2} \right) P = 0$$

Esta es la ecuación generalizada de Legendre, sus soluciones se llaman **funciones asociadas de Legendre**. Estudiaremos primero la ecuación ordinaria de Legendre

$$m = 0$$

Esto equivale a resolver el problema de Laplace para casos en que existe simetría azimutal (es decir, donde el potencial no depende de la variable φ). En este caso

$$\frac{d}{d\mu} (1 - \mu^2) \frac{dP}{d\mu} + l(l+1)P(\mu) = 0$$

Las soluciones deben ser monovalentes, finitas, y continuas en $-1 \leq \mu \leq 1$. Estos son los **polinomios de Legendre**

9.7. Problemas de Contorno con Simetría Azimutal

Para problemas con simetría esférica y simetría azimutal (es decir, el potencial no depende de φ)

$$\phi = \phi(r, \vartheta) = \frac{R(r)}{r} \Theta(\vartheta)$$

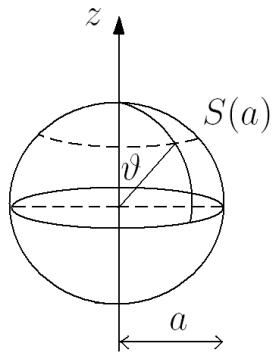
La solución general a la ecuación de Laplace queda en términos de potencias de r y polinomios de Legendre

$$\phi(r, \vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}) P_l(\cos \vartheta)$$

$$A_l, B_l$$

se determinan usando las condiciones de contorno

Problema :Potencial en una esfera



El problema a resolver es

$$\vec{x} \in S(a) : \phi(\vec{x}) = \phi_D(\vartheta)$$

$$\vec{x} \in V : \vec{\nabla}^2 \phi(\vec{x}) = 0$$

a) Problema interno ($r \leq a$)

Se requiere que $\phi(|\vec{x}| = 0)$ sea finito, de forma que $B_l = 0$ ($l = 0, 1, 2, \dots$)

$$\phi(r, \vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \vartheta)$$

La condición de contorno es

$$\phi(a, \vartheta) = \phi_D(\vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l a^l P_l(\cos \vartheta)$$

es una serie de Legendre. Luego

$$A_l = \frac{2l+1}{2a^l} \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta P_l(\cos \vartheta) \phi_D(\vartheta)$$

b) Problema externo ($r \geq a$)

Se debe tener

$$\lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} \phi(\vec{x}) = 0$$

con lo que

$$A_l = 0, l = 0, 1, 2, \dots$$

luego

$$\phi(r, \vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \vartheta)$$

el potencial debe ser continuo en el contorno, por lo que

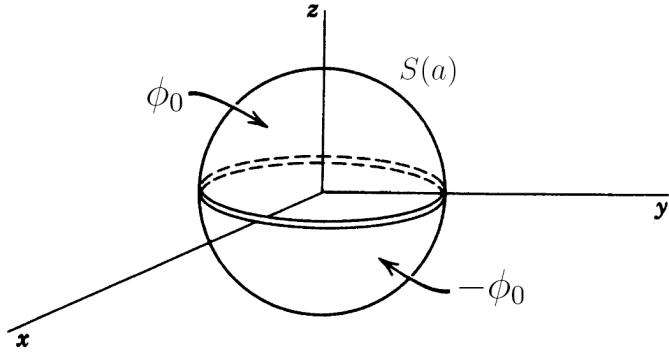
$$\phi(a, \vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{a^{l+1}} P_l(\cos \vartheta) = \phi_D(\vartheta)$$

de donde

$$B_l = \frac{2l+1}{2} a^{l+1} \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta P_l(\cos \vartheta) \phi_D(\vartheta)$$

Problema

Se tiene una esfera conductora cuyos hemisferios se encuentran a distinto potencial



$$\phi_D(\vartheta) = \begin{cases} \phi_0 & \text{si } 0 \leq \vartheta \leq \pi/2 \\ -\phi_0 & \text{si } \pi/2 \leq \vartheta \leq \pi \end{cases}$$

Encontrar el potencial electrostático en el interior de la esfera, y la densidad superficial de cargas

Solución

Se trata de un problema con simetría azimutal donde el potencial satisface la ecuación de Laplace excepto en el contorno $r = a$. Para el problema interno, el potencial es de la forma

$$\phi(r, \vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \vartheta)$$

(se ha exigido que debe ser finito en $r = 0$). Además se cumple

$$\phi(a, \vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l a^l P_l(\cos \vartheta) = \phi_D$$

de donde se obtiene

$$A_l = \frac{2l+1}{2a^l} \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta P_l(\cos \vartheta) \phi_D(\vartheta)$$

$$A_l = \frac{2l+1}{2a^l} \left(\int_0^{\pi/2} d\vartheta \sin \vartheta P_l(\cos \vartheta) \phi_0 - \int_{\pi/2}^\pi d\vartheta \sin \vartheta P_l(\cos \vartheta) \phi_0 \right)$$

$$A_l = \phi_0 \frac{2l+1}{2a^l} \left\{ \int_0^{\pi/2} d\vartheta \sin \vartheta P_l(\cos \vartheta) - \int_{\pi/2}^\pi d\vartheta \sin \vartheta P_l(\cos \vartheta) \right\}$$

$$A_l = -\phi_0 \frac{2l+1}{2a^l} \left\{ \int_1^0 d\mu P_l(\mu) - \int_0^{-1} d\mu P_l(\mu) \right\}$$

$$A_l = \phi_0 \frac{2l+1}{2a^l} \left\{ \int_0^1 d\mu P_l(\mu) - \int_{-1}^0 d\mu P_l(\mu) \right\}$$

Si l es par, $P_l(\mu) = P_l(-\mu)$, mientras que si l es impar, $P_l(\mu) = -P_l(-\mu)$. Luego, $A_l = 0$ para l par, y

$$A_l = (2l+1) \frac{\phi_0}{a^l} \int_0^1 d\mu P_l(\mu)$$

para l impar. Además, se tiene que para $l = 2n - 1$, $n = 1, 2, 3\dots$

$$\int_0^1 d\mu P_{2n-1}(\mu) = (-1)^{n+1} \frac{(2n-3)!!}{2^n n!}$$

Luego

$$\phi_{r,\vartheta} = \phi_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(4n-1)(2n-3)!!}{a^{2n-1} 2^n n!} r^{2n-1} P_{2n-1}(\cos \vartheta)$$

Con esto es posible encontrar la densidad superficial de cargas, puesto que

$$\sigma(\vartheta) = \epsilon_0 \vec{E}(a, \vartheta) \cdot \hat{r} = -\epsilon_0 \vec{\nabla} \phi(r, \vartheta) \Big|_{r=a} \cdot \hat{r}$$

$$\sigma(\vartheta) = -\epsilon_0 \frac{\partial \phi(r, \vartheta)}{\partial r} \Big|_{r=a}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \phi_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(4n-1)(2n-1)!!}{a^{2n-1} 2^n n!} r^{2n-2} P_{2n-1}(\cos \vartheta)$$

luego

$$\sigma(\vartheta) = \epsilon_0 \frac{\phi_0}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+2}(4n-1)(2n-1)!!}{2^n n!} P_{2n-1}(\cos \vartheta)$$

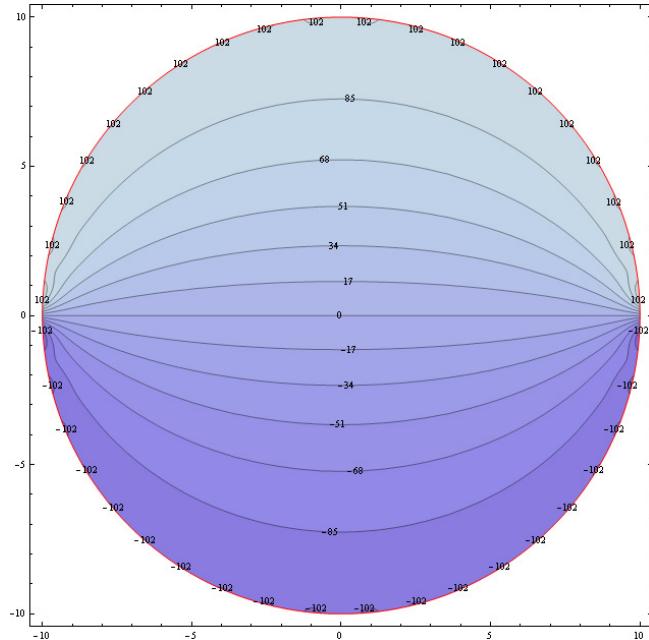


Fig. 9.1: Equipotenciales para $\phi_0 = 100$ [V] y usando 10 términos en la expansión

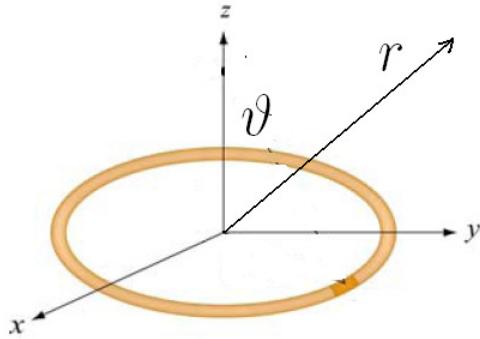
Problema

Encuentre el potencial en todo el espacio de un anillo de radio R cargado con carga Q uniforme

Solución

El potencial en todo el espacio (excepto sobre el anillo) cumple

$$\vec{\nabla}^2 \phi(\vec{x}) = 0$$



Ya fue resuelto anteriormente el valor del potencial sobre el eje z

$$\phi(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\sqrt{z^2 + R^2}}$$

Es claro que el problema posee una simetría azimutal (el potencial no depende del ángulo polar φ). Con esto

$$\phi(r, \vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}) P_l(\cos \vartheta)$$

Se deben imponer las condiciones de contorno adecuadas. Como conocemos el potencial sobre el eje z , es decir para $\vartheta = 0$

$$\phi(r, 0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\sqrt{r^2 + R^2}}$$

$$\phi(r, 0) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(r^2 + R^2)^{1/2}} = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}) P_l(1) = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + B_l r^{-(l+1)})$$

pues $P_l(1) = 1$ para todo $l = 0, 1, 2, \dots$

$$\phi(r, 0) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(r^2 + R^2)^{1/2}} = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + B_l r^{-(l+1)})$$

Separamos en dos casos

1) $r > R$

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r \left(1 + \left(\frac{R}{r}\right)^2\right)^{1/2}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \left(1 + \left(\frac{R}{r}\right)^2\right)^{-1/2}$$

Como $R/r < 1$, la expansión en serie de potencias de $(1 + (R/r)^2)^{-1/2}$ converge, y está dada por

$$\left(1 + \left(\frac{R}{r}\right)^2\right)^{-1/2} = (1+x)^{-1/2} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{d^l}{dx^l} f(x) \Big|_{x=0} \frac{x^l}{l!}$$

con

$$f(x) = (1+x)^{-1/2}$$

se tiene

$$\begin{aligned} f(x) \Big|_{x=0} &= 1 \\ f'(x) \Big|_{x=0} &= -\frac{1}{2} \\ f''(x) \Big|_{x=0} &= \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{3}{2}\right) \\ f'''(x) \Big|_{x=0} &= -\left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{5}{2}\right) \\ f^4(x) \Big|_{x=0} &= \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{5}{2}\right) \left(\frac{7}{2}\right) \end{aligned}$$

En general

$$f^l(x) \Big|_{x=0} = \frac{(-1)^l (2l-1)!!}{2^l}$$

de forma que

$$\left(1 + \left(\frac{R}{r}\right)^2\right)^{-1/2} = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{(l-1)!!}{2^l l!} \left(\frac{R}{r}\right)^{2l}$$

Entonces

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r \left(1 + \left(\frac{R}{r}\right)^2\right)^{1/2}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{(l-1)!!}{2^l l!} \frac{R^{2l}}{r^{2l+1}}$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{(l-1)!!}{2^l l!} \frac{R^{2l}}{r^{2l+1}}$$

Por supuesto que debe tenerse

$$\lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} \phi(\vec{x}) = 0$$

por lo que

$$A_l = 0, \forall l$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} B_l r^{-(l+1)} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{(l-1)!!}{2^l l!} \frac{R^{2l}}{r^{2l+1}}$$

de aquí se obtiene que $B_l = 0$ para l impar, luego

$$\sum_{l=0}^{\infty} B_{2l} r^{-(2l+1)} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{(l-1)!!}{2^l l!} \frac{R^{2l}}{r^{2l+1}}$$

$$B_{2l} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-1)^l}{2^l} \frac{(2l-1)!!}{l!} R^{2l}$$

y entonces el potencial queda, para $r > R$

$$\phi(r, \vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-1)^l}{2^l} \frac{(2l-1)!!}{l!} R^{2l} r^{-(2l+1)} P_{2l}(\cos \vartheta)$$

2) caso en que $r < R$

Aquí el potencial será de la forma

$$\phi(r, \vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} (C_l r^l + D_l r^{-(l+1)}) P_l(\cos \vartheta)$$

Se requiere que el potencial sea finito, luego $D_l = 0$ para todo $l = 0, 1, 2, \dots$ la condición de contorno en el eje z , $z > 0$ entrega

$$\phi(r, 0) = \sum_{l=0}^{\infty} C_l r^l = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R (1 + (r/R)^2)^{-1/2}}$$

Como $r/R < 1$, está garantizada la convergencia de la serie de potencias de

$$(1 + (r/R)^2)^{-1/2}$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} C_l r^l = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{(2l-1)!!}{2^l l!} \frac{r^{2l}}{R^{2l}}$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} C_l r^l = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{(2l-1)!!}{2^l l!} \frac{r^{2l}}{R^{2l+1}}$$

de aquí es inmediato que $C_l = 0$ para l impar

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{\infty} C_{2l} r^{2l} &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{(2l-1)!!}{2^l l!} \frac{r^{2l}}{R^{2l+1}} \\ C_{2l} &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} (-1)^l \frac{(2l-1)!!}{2^l l! R^{2l+1}} \end{aligned}$$

Finalmente, el potencial está dado por

$$\phi(r, \vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} (-1)^l \frac{(2l-1)!!}{2^l l! R^{2l+1}} r^l P_{2l}(\cos \vartheta), r < R$$

$$\phi(r, \vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-1)^l}{2^l} \frac{(2l-1)!!}{l!} R^{2l} r^{-(2l+1)} P_{2l}(\cos \vartheta), \quad r > R$$

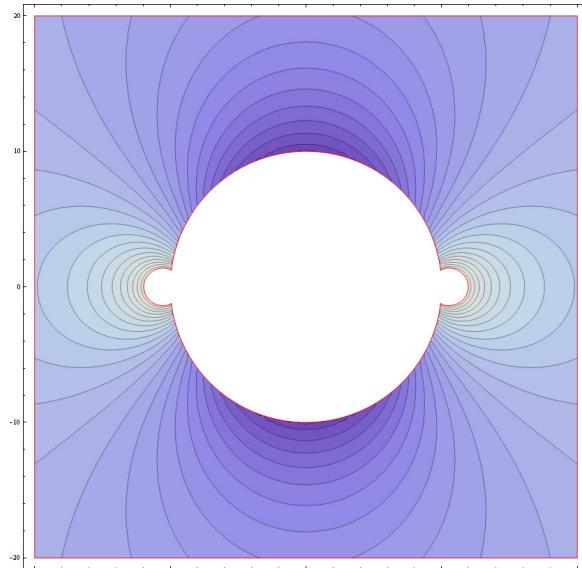


Fig. 9.2: La figura muestra la solución para $r > R$, tomando 40 términos

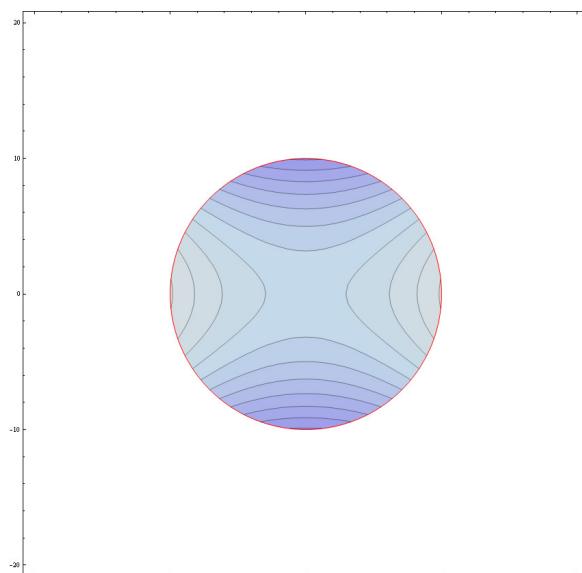


Fig. 9.3: La figura muestra la solución para $r < R$

Parte III

El campo en medios materiales

Capítulo 10

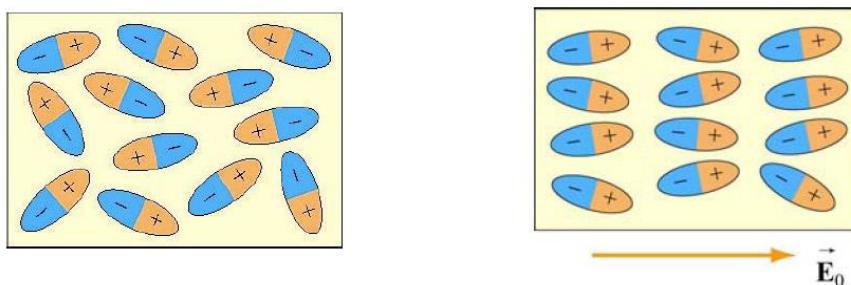
Dieléctricos

10.1. El campo en medios Dieléctricos

Aquí comenzamos a discutir otra de las propiedades interesantes de la materia bajo la influencia de un campo eléctrico. Anteriormente consideramos el comportamiento de los conductores, en donde hay cargas libres para moverse en respuesta a un campo eléctrico de forma de cancelar el campo en el interior del conductor. Ahora discutiremos qué sucede con los aislantes, materiales que no conducen electricidad. Uno podría creer primeramente que no debería haber efecto alguno, sin embargo, usando un condensador de placas paralelas, **Faraday** descubrió que ésto no es así. Sus experimentos mostraron que la capacidad aumenta en un factor κ que depende únicamente de la naturaleza del material aislante. Éstos materiales también son llamados dieléctricos, el factor κ es una propiedad del dieléctrico (y se llama constante dieléctrica). La constante dieléctrica del vacío es, por supuesto, 1. A continuación se derivará el comportamiento de un dieléctrico en un campo externo y se aplicará al cálculo de capacidades con dieléctricos.

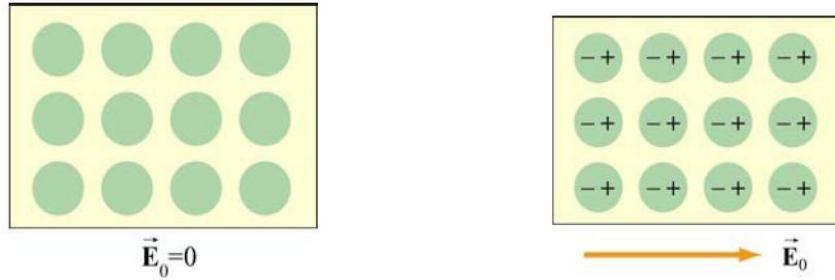
Todos los medios materiales se componen de moléculas, las que a su vez se componen de entes cargados (núcleos atómicos y electrones), y las moléculas de los dieléctricos son, de hecho, afectadas por la presencia de un campo eléctrico externo. El campo eléctrico produce una fuerza que se ejerce sobre cada partícula cargada, empujando las partículas positivas en la dirección del campo, y las negativas en sentido opuesto, de modo que las partes positivas y negativas de cada molécula se desplazan de sus posiciones de equilibrio, sin embargo estas cargas moleculares no están libres para moverse muy lejos o ser extraídas del material (lo que sí ocurre en conductores).

El efecto total, desde el punto de vista macroscópico, se visualiza como un desplazamiento de toda la carga positiva en el dieléctrico en relación a la carga negativa (Se produce una colección de dipolos!). A esto se le llama **polarización**. Existen 2 tipos de dieléctricos, unos son los dieléctricos polares, que tienen momentos dipolares permanentes. Un ejemplo de este tipo de dieléctrico es el agua.



La orientación de las moléculas polares ante la ausencia de un campo es totalmente aleatoria. Cuando un campo \vec{E}_0 es aplicado, un torque causa que las moléculas se alinien en la dirección de \vec{E}_0 . (ver último problema de ayudantía 9)

El otro tipo de dieléctrico son los no polares, que no poseen momentos dipolares permanentes, pero que de igual forma se polarizan ante un campo eléctrico externo. Las moléculas polarizadas son como dipolos y se alinean en la dirección del campo.



La figura ilustra la orientación de las moléculas no polares con y sin campo externo \vec{E}_0 . En ambos tipos de dieléctricos, ante la presencia de un campo eléctrico externo, se produce una polarización. Un dieléctrico polarizado, aun cuando sea eléctricamente neutro en promedio, produce un campo eléctrico en los puntos exteriores e interiores al dieléctrico.

10.1.1. Polarización

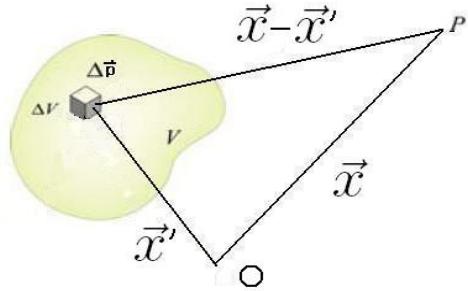
Vimos que si un medio se polariza, se efectúa una separación de cargas positivas y negativas, y un elemento de volumen se caracterizará entonces por un momento dipolar eléctrico, $\Delta\vec{p}$. Se define \vec{P} , el momento dipolar eléctrico por unidad de volumen

$$\vec{P} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta v}$$

Estrictamente, \vec{P} debe definirse como el límite de esta cantidad a medida que Δv se hace muy pequeño desde el punto de vista macroscópico. De esta forma, \vec{P} se convierte en una función puntual $\vec{P}(x, y, z)$, llamada Polarización del medio (Es, de hecho, un campo vectorial). Sus dimensiones son carga por unidad de área.

10.1.2. Campo de un Medio Dieléctrico

Consideremos un pedazo finito de dieléctrico polarizado, es decir, que se caracterize en cada punto \vec{x}' por su polarización $\vec{P}(\vec{x}')$. La polarización da origen a un campo eléctrico. Para encontrarlo, encontraremos primero el potencial en un punto P .



Cada elemento de volumen d^3x' se comporta como un dipolo microscópico, y entonces se caracteriza por un momento dipolar $\Delta\vec{p}(\vec{x}') = \vec{P}(\vec{x}')d^3x'$, y como la distancia entre \vec{x} y d^3x' es grande comparada con las dimensiones de d^3x' , el potencial en \vec{x} será

$$d\phi(\vec{x}) = \frac{\Delta\vec{p}(\vec{x}') \cdot (\vec{x} - \vec{x}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{x} - \vec{x}'|^3} = \frac{\vec{P}(\vec{x}') \cdot (\vec{x} - \vec{x}')d^3x'}{4\pi\epsilon_0|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$$

(Recordar el potencial de un dipolo!). El potencial en el punto \vec{x} se obtiene sumando las contribuciones de todas las partes del dieléctrico, luego

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{d^3x' \vec{P}(\vec{x}') \cdot (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$$

Esta integral puede evaluarse directamente si se conoce la forma funcional de $\vec{P}(\vec{x}')$. En la práctica eso no se hace, resulta ventajoso desarrollar aún más esta expresión. Usando la ya conocida identidad

$$\vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$$

El potencial queda

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V d^3x' \vec{P}(\vec{x}') \cdot \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

El siguiente paso consiste en utilizar la siguiente identidad

$$\vec{\nabla}' \cdot (f \vec{F}) = f \vec{\nabla}' \cdot \vec{F} + \vec{F} \cdot \vec{\nabla}' f$$

Donde f es cualquier función escalar y \vec{F} un campo vectorial. Con esto, si utilizamos $f = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$ y $\vec{F} = \vec{P}(\vec{x}')$

$$\vec{P}(\vec{x}') \cdot \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \vec{\nabla}' \cdot \frac{\vec{P}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} - \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{x}')$$

Con esto

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V d^3x' \vec{\nabla}' \cdot \frac{\vec{P}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V d^3x' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{x}')$$

La primera integral puede transformarse en una integral sobre una superficie cerrada mediante el teorema de la divergencia, obteniendo

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \frac{\vec{P}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V d^3x' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{x}')$$

O, equivalentemente

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S dS(\vec{x}') \frac{\vec{P}(\vec{x}') \cdot \hat{n}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V d^3x' \frac{-\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

Las cantidades $\vec{P}(\vec{x}) \cdot \hat{n}(\vec{x})$ y $-\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{x})$ son dos funciones escalares obtenidas a partir de la polarización $\vec{P}(\vec{x})$. Es conveniente asignar a estas cantidades símbolos especiales, y como tienen dimensiones de carga por unidad de área y carga por unidad de volumen, respectivamente, escribiremos

$$\sigma(\vec{x}) = \vec{P}(\vec{x}) \cdot \hat{n}(\vec{x})$$

$$\rho(\vec{x}) = -\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{x})$$

Y llamaremos a σ y ρ **densidades de carga de polarización**. La densidad superficial de carga de polarización está dada por la componente de polarización normal a la superficie, y la densidad volumétrica de carga de polarización es una medida de la no uniformidad de la polarización dentro del material.

En resumen, el potencial debido al material dieléctrico es, finalmente

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S dS(\vec{x}') \frac{\sigma(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

De esta expresión es evidente que proviene de una distribución de carga. En otras palabras, el material dieléctrico se ha sustituido por una distribución adecuada de carga de polarización. El campo eléctrico se obtiene usando el hecho $\vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{x})$

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S dS(\vec{x}') \frac{\sigma(\vec{x}')(\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')(\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$$

Notemos que la carga de polarización total de un cuerpo dieléctrico es

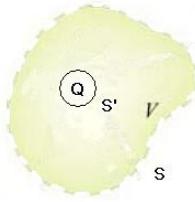
$$Q_p = \iiint_V d^3x' (-\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{x}')) + \iint_{S(V)} dS(\vec{x}') \vec{P}(\vec{x}') \cdot \hat{n}(\vec{x}')$$

Utilizando el teorema de la divergencia, es evidente que $Q_p = 0$, (como debe ser!) Esto concuerda con que un dieléctrico, como un todo, es eléctricamente neutro.

10.2. Ley de Gauss en un Dieléctrico, Desplazamiento Eléctrico

Es sabido que una de las leyes fundamentales de la electrostática es la ley de Gauss. Esta ley dice que el flujo eléctrico a través de cualquier superficie cerrada es proporcional a la carga total encerrada por la superficie. Al aplicar la ley de Gauss a una región que contiene cargas

libres dentro de un dieléctrico, hay que tener cuidado en incluir todas las cargas dentro de la superficie gaussiana, tanto la **carga de polarización** como la carga libre



Consideremos una superficie S cerrada imaginaria colocada dentro de un medio dieléctrico. Consideremos cierta cantidad de carga libre Q , contenida en el volumen limitado por S' . La ley de Gauss entrega

$$\begin{aligned} \iint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') &= \frac{Q}{\epsilon_0} + \frac{1}{\epsilon_0} \iint_{S'} dS(\vec{x}') \sigma(\vec{x}') + \frac{1}{\epsilon_0} \iiint d^3x' \rho(\vec{x}') \\ \iint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') &= \frac{Q}{\epsilon_0} + \frac{1}{\epsilon_0} \iint_{S'} d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{P}(\vec{x}') - \frac{1}{\epsilon_0} \iiint d^3x' \vec{\nabla}' \vec{P}(\vec{x}') \\ &= \frac{Q}{\epsilon_0} + \frac{1}{\epsilon_0} \iint_{S'} d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{P}(\vec{x}') - \frac{1}{\epsilon_0} \iint_{S+S'} d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{P}(\vec{x}') \end{aligned}$$

Así

$$\iint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') = \frac{Q}{\epsilon_0} - \frac{1}{\epsilon_0} \iint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{P}(\vec{x}')$$

Equivalentemente

$$\begin{aligned} \epsilon_0 \iint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') &= Q - \iint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{P}(\vec{x}') \\ \iint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot (\epsilon_0 \vec{E}(\vec{x}') + \vec{P}(\vec{x}')) &= Q \end{aligned}$$

Se define el **Desplazamiento eléctrico** como

$$\vec{D}(\vec{x}) = \epsilon_0 \vec{E}(\vec{x}) + \vec{P}(\vec{x})$$

La ley de Gauss, en términos de \vec{D} queda

$$\iint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{D}(\vec{x}') = Q = \iiint_{S(V)} d^3x' \rho_{libre}(\vec{x}')$$

Esta es la **Ley de Gauss generalizada a un dieléctrico**, notar que Q representa únicamente la carga libre, es decir, toda la información sobre la polarización del medio se encuentra contenida en $\vec{D}(\vec{x}')$. Notar que si no hay dieléctrico (espacio vacío), se tiene $\vec{P}(\vec{x}) = 0$, $\vec{D}(\vec{x}) = \epsilon_0 \vec{E}(\vec{x})$ y

$$\epsilon_0 \iint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') = Q$$

que es la ley de Gauss usual para el vacío.

10.3. Forma diferencial de la Ley de Gauss General

A partir de la ley de Gauss

$$\oint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{D}(\vec{x}') = \iiint_{V(S)} d^3x' \rho(\vec{x}')$$

Aquí, $\rho(\vec{x}')$ representa la densidad volumétrica de carga libre. Utilizando el teorema de la divergencia

$$\iiint_{V(S)} d^3x' \vec{\nabla} \cdot \vec{D}(\vec{x}') = \iint_{V(S)} d^3x' \rho(\vec{x}')$$

De donde se obtiene la forma diferencial de la ley de Gauss general

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D}(\vec{x}') = \rho(\vec{x}')$$

Esta es la primera ecuación de Maxwell reescrita para un medio material. Notar que la definición del vector \vec{D} tiene la ventaja de conservar como fuentes únicamente las cargas **libres**. El efecto de las cargas de polarización están contenidas en \vec{D} .

10.4. Susceptibilidad Eléctrica y constante Dieléctrica

Para la mayoría de los materiales, $\vec{P}(\vec{x})$ se anula cuando $\vec{E}(\vec{x})$ se anula. Como éste es el comportamiento más común, nos limitaremos a los materiales de este tipo. Además, si el material es isotrópico, la polarización deberá tener el mismo sentido que el campo eléctrico que la provoca. Esto se resume en

$$\vec{P}(\vec{x}) = \chi(E) \vec{E}(\vec{x})$$

Donde la cantidad escalar $\chi(E)$ se llama **susceptibilidad** eléctrica del material. Así, una expresión para $\vec{D}(\vec{x})$ en medios isotrópicos sería

$$\vec{D}(\vec{x}) = (\epsilon_0 + \chi(E)) \vec{E}(\vec{x}) = \epsilon(E) \vec{E}(\vec{x})$$

Donde $\epsilon(E) = \epsilon_0 + \chi(E)$ es la **permitividad del material**. Experimentalmente χ y ϵ son independientes del campo eléctrico para campos no muy intensos. En otras palabras, χ y ϵ pasan a ser constantes características del material. Materiales de este tipo se llaman **dielecéticos lineales**, y se tiene

$$\vec{P}(\vec{x}) = \chi \vec{E}(\vec{x})$$

$$\vec{D}(\vec{x}) = \epsilon \vec{E}(\vec{x})$$

Es más conveniente trabajar con una cantidad adimensional, κ , definida por

$$\kappa = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \epsilon_r$$

Esta constante se llama **constante dieléctrica**, de manera que

$$\vec{D}(\vec{x}) = \epsilon \vec{E}(\vec{x}) = \epsilon_0 \kappa \vec{E}(\vec{x})$$

Notar que κ es siempre mayor que 1, excepto en el vacío, donde $\kappa = 1$. La primera ecuación de Maxwell en este tipo de medios queda

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon} = \frac{\rho(\vec{x})}{\kappa\epsilon_0}$$

Eso significa que en un medio dieléctrico, **el campo eléctrico es debilitado por un factor κ** .

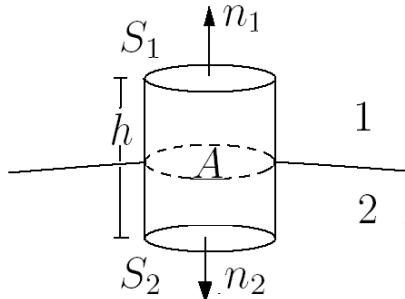
10.5. Condiciones de borde en la frontera

Las condiciones que deben satisfacer el campo eléctrico en una zona interfacial que separa dos medios dieléctricos se deducen a partir de las leyes diferenciales

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D}(\vec{x}) = \rho(\vec{x})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{x}) = 0$$

En cualquier zona interfacial entre dos medios se puede construir una superficie cilíndrica como se muestra en la figura



Integrando la ley de Gauss general sobre el volumen limitado por el cilindro se obtiene

$$\begin{aligned} \iiint_V d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{D}(\vec{x}) &= \iiint_V d^3x \rho(\vec{x}) \\ \iint_{V(S)} d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{D}(\vec{x}) &= \iint_V d^3x \rho(\vec{x}) \end{aligned}$$

si $h \rightarrow 0$, entonces

$$(D_{1n} - D_{2n}) A = \sigma A$$

donde A es la superficie de las tapas, y σ es la densidad superficial de carga en la frontera que divide a los dos medios. Así, la componente normal del campo $\vec{D}(\vec{x})$ es discontinua al atravesar una superficie cargada

$$D_{1n} - D_{2n} = \sigma$$

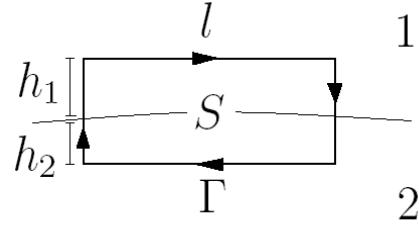
o, equivalentemente para medios lineales

$$\epsilon_1 E_{1n} - \epsilon_2 E_{2n} = \sigma$$

Ahora veremos que la componente tangencial del campo eléctrico es continua. A partir de la ecuación

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{x}) = 0$$

Integremos esta ecuación sobre una superficie plana rectangular como la de la figura



El contorno de S es el camino Γ indicado en la figura. Utilizando el teorema de Stokes

$$\iint_S d\vec{S}(\hat{x}) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{x})) = \oint_{\Gamma} d\vec{x} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = 0$$

En el caso en que $h_1 \rightarrow 0$, $h_2 \rightarrow 0$

$$lE_{1t} - lE_{2t} = 0$$

De aquí se deduce que la componente **tangencial** de $\vec{E}(\vec{x})$ debe ser continua al atravesar una interfaz entre dos medios

$$lE_{1t} = lE_{2t}$$

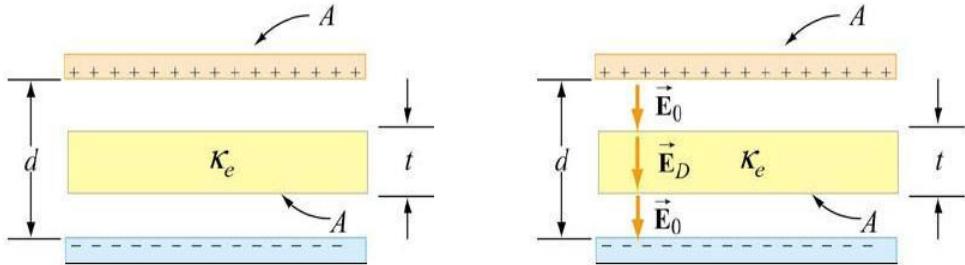
En resumen, al atravesar una interfaz entre dos medios (1 y 2), los campos $\vec{E}(\vec{x})$ y $\vec{D}(\vec{x})$ satisfacen

$$E_{1t} = E_{2t}$$

$$D_{1n} - D_{2n} = \sigma$$

10.5.1. Condensadores con Dieléctricos

Un material no conductor, ancho t , área A y constante dieléctrica κ se inserta en el espacio entre placas de un condensador con distancia d entre placas, carga Q y área A . No es necesario que el dieléctrico esté en la mitad del espacio entre placas



Para encontrar la capacitancia, calculemos primero la diferencia de potencial entre placas. Ya se vió que en ausencia de dieléctrico, el campo eléctrico entre las placas está dado por $E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 A}$, y entonces $E_D = \frac{E_0}{\kappa}$. El potencial se puede encontrar integrando el campo eléctrico sobre una curva vertical desde la placa superior a la inferior

$$\Delta\phi = - \int_{+}^{-} dx E = -phi_0 + phi_D = -E_0(d - t) - E_D t = -\frac{Q}{A\epsilon_0}(d - t) - \frac{Q}{A\epsilon_0\kappa}t$$

$$\Delta\phi = -\frac{Q}{A\epsilon_0}(d - t(1 - \frac{1}{\kappa}))$$

Con esto se obtiene

$$C = \frac{Q}{|\Delta V|} = \frac{\epsilon_0 A}{d - t(1 - \frac{1}{\kappa})}$$

Notemos algunos límites, por ejemplo cuando $t \rightarrow 0$, es decir, cuando el ancho del dieléctrico tiende a cero, se obtiene $C = \epsilon_0 \frac{A}{d} = C_0$, que es la capacidad esperada para cuando no hay dieléctrico.

Cuando $\kappa = 1$, nuevamente se obtiene $C = \frac{\epsilon_0 A}{d} = C_0$, ya que al ser $\kappa = 1$, el dieléctrico es simplemente vacío.

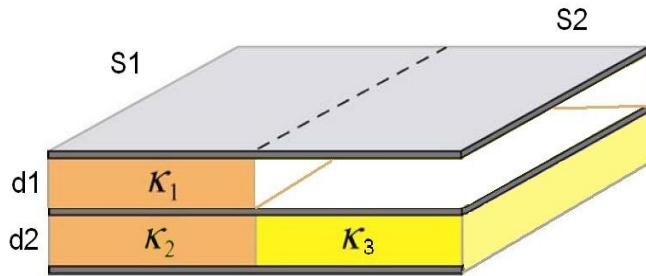
En el límite cuando $t \rightarrow d$, el espacio está totalmente lleno de dieléctrico, y se tiene

$$C = \frac{\kappa\epsilon_0 A}{d} = \kappa C_0$$

Es decir, un condensador lleno de dieléctrico aumenta su capacidad en el factor κ !

Problema

Calcular la capacidad del condensador de la figura



Solución

El problema se puede tratar como 2 condensadores en paralelo, uno formado por los dieléctricos de constante κ_1 y κ_2 , y el otro formado por dieléctrico de constante κ_3 y vacío.

El primer condensador (C_1), se puede ver como 2 condensadores en serie, llenos de los dieléctricos 1 y 2, así

$$\frac{1}{C_1} = \frac{1}{C'_1} + \frac{1}{C''_1}$$

Con

$$C'_1 = \frac{\kappa_1 \epsilon_0 S_1}{d_1}$$

$$C''_1 = \frac{\kappa_2 \epsilon_0 S_1}{d_2}$$

$$\frac{1}{C_1} = \frac{d_1}{\kappa_1 \epsilon_0 S_1} + \frac{d_2}{\kappa_2 \epsilon_0 S_1}$$

De donde se obtiene

$$C_1 = \frac{\kappa_1 \kappa_2 \epsilon_0 S_1}{d_1 \kappa_2 + d_2 \kappa_1}$$

Para el condensador C_2 , se procede de manera similar, esto es

$$\frac{1}{C_2} = \frac{1}{C'_2} + \frac{1}{C''_2}$$

Donde

$$C'_2 = \frac{\epsilon_0 S_2}{d_1}$$

$$C''_2 = \frac{\kappa_3 \epsilon_0 S_2}{d_2}$$

Donde se obtiene

$$C_2 = \frac{\kappa_3 \epsilon_0 S_2}{d_1 \kappa_3 + d_2}$$

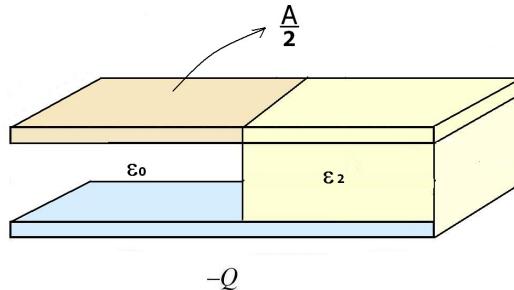
Finalmente, como C_1 y C_2 están en paralelo, la capacidad total será

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\kappa_1 \kappa_2 \epsilon_0 S_1}{d_1 \kappa_2 + d_2 \kappa_1} + \frac{\kappa_3 \epsilon_0 S_2}{d_1 \kappa_3 + d_2}$$

Problema

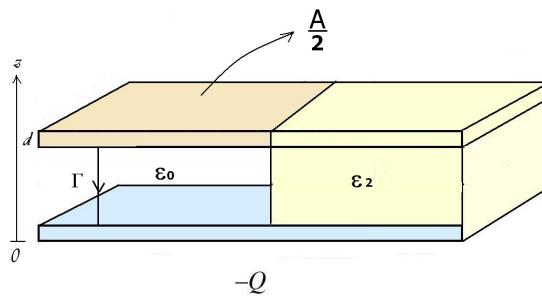
Se tiene un condensador plano de área A en el vacío, y se carga con una batería. El condensador obtiene una carga Q . Luego, se desconecta de la batería y se llena la mitad del espacio entre placas con un dieléctrico de permitividad ϵ_2 . Calcular

- la nueva diferencia de potencial entre las placas
- las densidades superficiales de carga en cada placa
- las densidades de carga de polarización del dieléctrico



Solución

Sea el origen en un punto sobre la placa inferior. Se define el eje z como vertical y positivo hacia arriba. Si escogemos un camino de integración Γ como una línea recta vertical desde la placa superior hasta la inferior



podemos obtener la diferencia de potencial entre las placas como

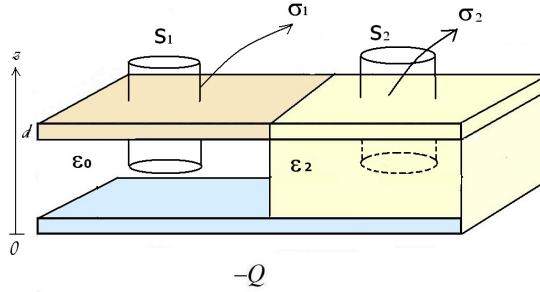
$$\phi_d - \phi_0 = V = \int_{\Gamma} d\vec{x} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \int_d^0 d\vec{x} \cdot \vec{E}(\vec{x})$$

Despreciando efectos de borde, el campo debe ser uniforme en la región interior, y además apunta según $-\hat{k}$. Ojo con la parametrización! se tiene $l = d - t$, con $t = 0 \dots d$. De esta forma $dl = -dt$ y $d\vec{l} = dt\hat{k}$, luego

$$V = \int_d^0 d\vec{x} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = -E \int_d^0 dt = Ed$$

Luego $E = \frac{V}{d}$

La curva Γ fue escogida de manera arbitraria, y se podría haber escogido en la mitad donde se encuentra el dieléctrico, sin embargo la diferencia de potencial entre las placas debe ser la misma para ambos caminos de integración. Lo que esto significa es que el campo eléctrico debe ser igual tanto en el vacío como en la región con dieléctrico. La única forma de que esto sea posible es que se distribuyan densidades de carga superficial en los conductores, digamos σ_1 y σ_2 no necesariamente iguales entre sí.



ahora, sabemos que en la región 1

$$D_1 = \epsilon_1 E = \epsilon_0 \frac{V}{d}$$

y para la región 2

$$D_2 = \epsilon_2 E = \epsilon \frac{V}{d}$$

Además, utilizando la ley de Gauss con las superficies S_1 y S_2 de la figura:

$$\oint_S d\vec{S} \cdot \vec{D}_1 = D_1 S = \sigma_1 S$$

luego

$$D_1 = \sigma_1 = \epsilon_0 \frac{V}{d}$$

Equivalente, para la región 2 se obtiene de forma análoga

$$D_2 = \sigma_2 = \epsilon \frac{V}{d}$$

Además, como la carga Q en la placa superior sólo se distribuye, la ley de continuidad establece

$$(\sigma_1 + \sigma_2) \frac{A}{2} = Q = (\epsilon + \epsilon_0) \frac{V}{d} \frac{A}{2} = Q$$

de aquí obtenemos la diferencia de potencial entre las placas del condensador

$$V = \frac{2Qd}{A(\epsilon + \epsilon_0)}$$

Notar que si $\epsilon = \epsilon_0$ (y entonces el material dieléctrico es el vacío) el potencial es simplemente el potencial inicial

$$V = \frac{Qd}{A\epsilon_0} = \frac{Q}{C} = V_o$$

b) Las densidades de carga superficial están dadas por

$$\sigma_1 = \epsilon_0 \frac{V}{d} = \frac{\epsilon_0 2Q}{A(\epsilon + \epsilon_0)}$$

$$\sigma_2 = \epsilon \frac{V}{d} = \frac{\epsilon 2Q}{A(\epsilon + \epsilon_0)}$$

Notar que

$$\sigma_1 \frac{A}{2} + \sigma_2 \frac{A}{2} = Q$$

c) Calculemos ahora las densidades de polarización. Necesitamos encontrar σ_P y ρ_P en el material dieléctrico. Tenemos que

$$\rho_P = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\chi \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$$

Ahora, en todos los puntos en el dieléctrico no hay densidad de carga libre, luego, de la primera ecuación de Maxwell

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho = 0$$

y como $\vec{D} = \epsilon \vec{E} \rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$

Esto es válido en todos los puntos interiores al dieléctrico. Con esto

$$\rho_P = 0$$

Ahora, para obtener la densidad de carga superficial, se tiene

$$\sigma_P = \vec{P} \cdot \hat{n}$$

donde \hat{n} es la normal a la superficie del dieléctrico.

Recordar que

$$D = \epsilon E = \epsilon_0 E + P$$

Luego

$$(\epsilon - \epsilon_0) E = P$$

Ahora, en la superficie superior del dieléctrico se tiene $\hat{n} = \hat{k}$ y

$$\vec{E} = -\frac{2Q}{A(\epsilon + \epsilon_0)} \hat{k}$$

Luego

$$\sigma_P = -\frac{2Q}{A(\epsilon + \epsilon_0)} (\epsilon - \epsilon_0)$$

Y la densidad en la placa inferior será, simplemente

$$-\sigma_P = \frac{2Q}{A(\epsilon + \epsilon_0)} (\epsilon - \epsilon_0)$$

se verifica que la carga total de polarización es cero

Problema

Una esfera de radio R con carga libre q está sumergida en un medio dieléctrico homogéneo de constante κ y de extensión teóricamente infinita. Calcular

- Los vectores campo eléctrico y polarización a distancia r de la carga puntual
- La densidad de carga de polarización

Solución

a) Debido a que \vec{E} , \vec{D} y \vec{P} son todos paralelos entre sí en cada punto, y por la simetría esférica, la naturaleza radial del campo no cambia por la presencia del medio dieléctrico. Además, estos vectores pueden depender sólo de la distancia al centro de la esfera y no de alguna coordenada angular.

Usando la ley de gauss general, con una superficie esférica de radio r ($r > R$) concéntrica a la esfera de carga q

$$\begin{aligned} \iint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{D}(\vec{x}') &= q \\ \iint_S dSD(r) &= q \rightarrow D(r) \iint_S dS(\vec{x}') = q \end{aligned}$$

Con lo que

$$4\pi r^2 D(r) = q$$

$$\vec{D}(r) = \frac{q}{4\pi r^2} \hat{r}$$

El campo eléctrico y la polarización pueden evaluarse con bastante facilidad al conocer \vec{D}

$$\vec{D}(r) = \kappa\epsilon_0 \vec{E}(r) \rightarrow \vec{E}(r) = \frac{q}{4\pi\kappa\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

además

$$\vec{D}(\vec{x}) = \epsilon_0 \vec{E}(\vec{x}) + \vec{P}(\vec{x})$$

$$\begin{aligned} \vec{P}(r) &= (\epsilon - \epsilon_0) \vec{E}(r) = \frac{q}{4\pi r^2} \hat{r} - \epsilon_0 \frac{q}{4\pi\kappa\epsilon_0 r^2} \hat{r} = \frac{q}{4\pi r^2} \left(1 - \frac{1}{\kappa}\right) \hat{r} = \\ &\vec{P}(r) = \frac{q(\kappa - 1)}{4\pi\kappa r^2} \hat{r} \end{aligned}$$

b) Claramente el dieléctrico ha debilitado la magnitud del campo eléctrico (en comparación al espacio vacío). El campo eléctrico es originado por toda la carga, la de polarización y la carga libre. La carga libre es sólo la carga de la esfera q . Sin embargo, la carga de polarización se forma de dos contribuciones, una densidad volumétrica $\rho_P(\vec{x}) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}(\vec{x})$ y una densidad superficial $\sigma_P(\vec{x}) = \vec{P}(\vec{x}) \cdot \hat{n}(\vec{x})$ sobre la superficie del dieléctrico en contacto con la carga puntual.

Es claro que en todos los puntos del dieléctrico

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = 0$$

y entonces

$$\rho_P(\vec{x}) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}(\vec{x}) = 0$$

Usando que

$$\vec{P}(r) = \frac{q(\kappa - 1)}{4\pi\kappa r^2} \hat{r}$$

La densidad superficial será

$$\sigma = \vec{P} \cdot \hat{n} = \vec{P}(R) \cdot -\hat{r} = -\frac{(\kappa - 1)q}{4\pi\kappa R^2}$$

y la carga superficial es

$$Q_S = \iint_S dS(\vec{x}') \sigma(\vec{x}') = -4\pi R^2 \frac{(\kappa - 1)q}{4\pi\kappa R^2}$$

$$Q_S = -\frac{(\kappa - 1)q}{\kappa}$$

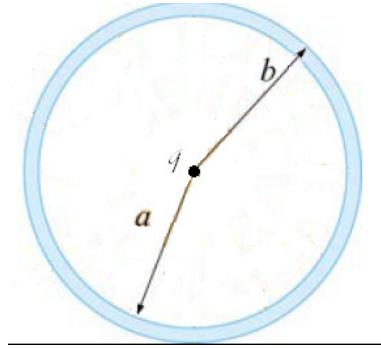
Notar que la carga total será

$$Q = Q_{libre} + Q_S = q - \frac{(\kappa - 1)q}{\kappa} = \frac{q}{\kappa}$$

Otra forma de ver como campo eléctrico es menor en un factor κ , la carga se ve debilitada por este factor de lo que sería si no hubiera un medio dieléctrico.

Problema

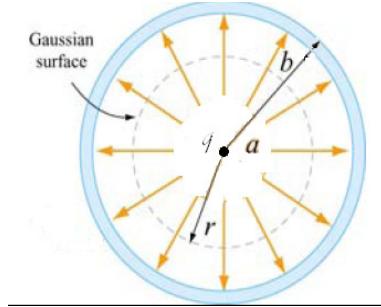
Considere una cáscara esférica dieléctrica de radio interior a , radio exterior b y permitividad ϵ . Se coloca una carga puntual q en su centro. Calcule el campo eléctrico en todo el espacio y las densidades de carga de polarización



Solución

Tomando una superficie gaussiana esférica arbitraria de radio $r > 0$ concentrática con la carga libre q , se tiene

$$\oint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{D}(\vec{x}') = 4\pi r^2 D(r) = q_{in} = q$$



Con esto

$$\vec{D}(r) = \frac{q}{4\pi r^2} \hat{r}$$

para todo $r > 0$. Ahora, podemos obtener el campo eléctrico como sigue. En la región $r < a$, se tiene

$$\vec{E}_I(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

para $a < r < b$

$$\vec{E}_{II}(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

y para $r > b$

$$\vec{E}_{III}(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

Notar que el campo se debilita en la región interior del cascarón dieléctrico. Ahora,

$$\rho_P = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}(\vec{x}) = -\vec{\nabla} \cdot (\epsilon - \epsilon_0) \vec{E}_r = 0$$

Ahora, sea σ_{in} la densidad superficial de polarización en la cáscara interior y σ_{ext} la densidad superficial de polarización en la cáscara exterior

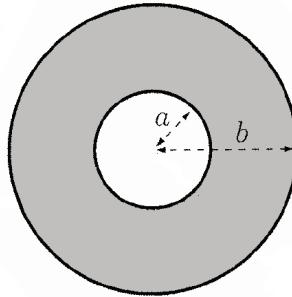
$$\sigma_{in} = (\epsilon - \epsilon_0) \vec{E}_{II}(a) \cdot (-\hat{r}) = -\frac{q(\epsilon - \epsilon_0)}{4\pi\epsilon a^2}$$

$$\sigma_{ext} = (\epsilon - \epsilon_0) \vec{E}_{II}(b) \cdot (\hat{r}) = \frac{q(\epsilon - \epsilon_0)}{4\pi\epsilon b^2}$$

se verifica que la carga total de polarización es cero

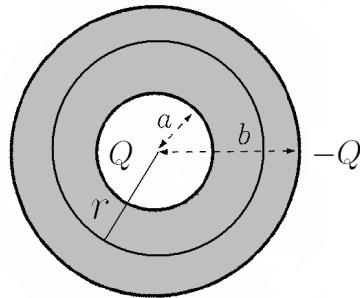
Problema

Se tiene un condensador esférico de radio interno a y externo b , el cual está lleno de un dieléctrico que tiene una constante dieléctrica κ . ¿Cuál es la capacitancia de este condensador? Si el condensador está cargado con una carga Q , encuentre la energía almacenada en él



Solución

Supongamos que el condensador tiene almacenada una carga Q , es decir, la pared $r = a$ está cargada con carga Q , mientras que la pared $r = b$ se encuentra cargada con carga $-Q$. Se puede determinar la capacitancia al determinar la diferencia de potencial entre estas superficies. Utilizando la ley de Gauss general, con una superficie esférica de radio r , con $a \leq r \leq b$



$$\iint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{D}(\vec{x}) = Q$$

dada la simetría radial, $\vec{D}(\vec{x}) = D(r)\hat{r}$ y entonces

$$\iint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{D}(\vec{x}) = 4\pi D(r)r^2 = Q$$

de esta forma

$$\vec{D}(\vec{x}) = \frac{Q}{4\pi r^2}\hat{r}, a \leq r \leq b$$

Si el dieléctrico es lineal, homogéneo e isotrópico, entonces

$$\vec{D}(\vec{x}) = \epsilon_0 \kappa \vec{E}(\vec{x})$$

donde κ es la constante dieléctrica del material. Luego

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \kappa r^2}\hat{r}, a \leq r \leq b$$

Ahora, la diferencia de potencial entre los extremos del condensador es

$$\Delta V = \phi(a) - \phi(b) = \int_a^b d\vec{x} \cdot \vec{E}(\vec{x})$$

tomando un camino radial de la forma $\vec{x} = r\hat{r}$, $a \leq r \leq b$, entonces $d\vec{x} = dr\hat{r}$

$$\Delta V = \int_a^b \frac{drQ}{4\pi\epsilon_0\kappa r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\kappa} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

Finalmente

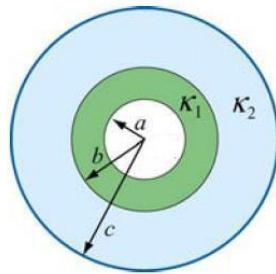
$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{4\pi\epsilon_0\kappa(b-a)}{ab}$$

Es decir, es κ veces la capacidad de un condensador esférico en vacío

$$C = \kappa C_0 > C_0$$

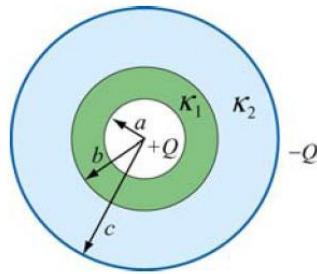
Problema

Considera una esfera conductora de radio interior a y radio exterior c . El espacio entre las 2 superficies es llenado con 2 dieléctricos distintos, de manera que la constante dieléctrica es κ_1 entre a y b , y κ_2 entre b y c . Determine la capacitancia del sistema



Solución

Para encontrar la capacitancia, podemos suponer que el condensador se encuentra cargado con una carga Q , en este estado, habrá una cierta diferencia de potencial entre $r = a$ y $r = c$. La relación entre esta diferencial de potencial y la carga almacenada nos permitirá encontrar la capacidad



Para encontrar $\Delta V = \phi(a) - \phi(c)$ necesitamos determinar el campo eléctrico en la región $\Omega : a \leq r \leq c$. Para ello, utilizamos la ley de Gauss general, para una superficie esférica de radio r contenida en Ω

$$\oint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{D}(\vec{x}) = 4\pi r^2 D(r)$$

esto último dada la clara simetría esférica del problema. Por la ley de Gauss

$$\oint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{D}(\vec{x}) = Q$$

De aquí es posible obtener el campo de desplazamiento eléctrico en Ω

$$\vec{D}(r) = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{r}, a \leq r \leq c$$

Suponiendo que los dieléctricos involucrados son lineales, homogéneos e isotrópicos, se tendrá

$$\vec{D}(\vec{x}) = \epsilon_0 \kappa \vec{E}(\vec{x})$$

donde κ es la constante dieléctrica.

Así, para la región I ($a \leq r \leq b$)

$$\epsilon_0 \kappa_1 \vec{E}(\vec{x}) = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{r}, a \leq r \leq b$$

Despejando

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \kappa_1 r^2} \hat{r}, a \leq r \leq b$$

Análogamente, para la región II ($b \leq r \leq c$)

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \kappa_2 r^2} \hat{r}, b \leq r \leq c$$

Con esto

$$\Delta V = \phi(a) - \phi(c) = \int_a^c d\vec{x} \cdot \vec{E}(\vec{x})$$

tomando un camino radial de la forma $\vec{x} = r\hat{r}$ (para algun valor del ángulo ϑ), entonces $d\vec{x} = dr\hat{r}$

$$\Delta V = \int_a^b \frac{dr Q}{4\pi \epsilon_0 \kappa_1 r^2} + \int_b^c \frac{dr Q}{4\pi \epsilon_0 \kappa_2 r^2}$$

Luego

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = 4\pi \epsilon_0 \left(\frac{ab}{\kappa_1(b-a)} + \frac{\kappa_2 bc}{c-b} \right)$$

Otra forma de resolver el sistema es notando que el condensador equivale a dos condensadores esféricos en serie. Recordando que la capacidad equivalente para un condensador esférico de radio interior r_1 y radio exterior r_2 , lleno de un dieléctrico lineal de constante κ está dado por

$$C = 4\pi \epsilon_0 k \left(\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \right)$$

Con lo que la capacidad equivalente del sistema está dada por

$$\frac{1}{C} = \frac{(b-a)}{4\pi \epsilon_0 \kappa_1 ab} + \frac{(c-b)}{4\pi \epsilon_0 \kappa_2 bc} = \frac{\kappa_2 c(b-a) + \kappa_1 a(c-b)}{4\pi \epsilon_0 \kappa_1 \kappa_2 abc}$$

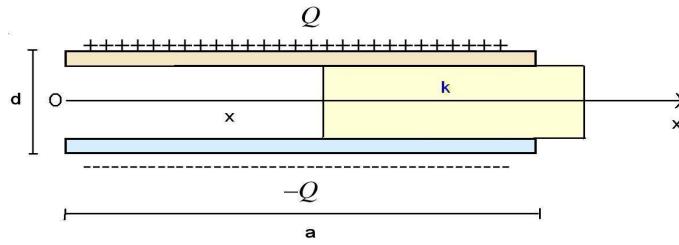
Así

$$C = \frac{4\pi \epsilon_0 k_1 k_2 abc}{k_2 c(b-a) + k_1 a(c-b)}$$

que es el mismo resultado obtenido anteriormente

Problema

Se tiene un condensador plano con placas cuadradas de largo a , distancia d entre placas, y una carga total Q . Calcular la fuerza que se ejerce sobre un material dieléctrico cuando se encuentra a una distancia x del punto O

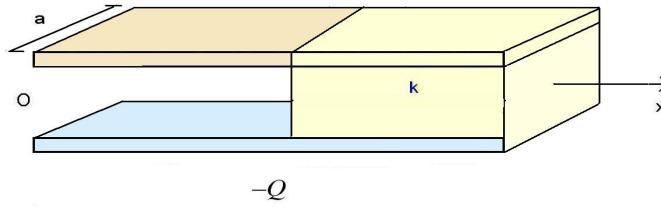


Solución

La energía potencial asociada a esta configuración es

$$U(x) = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C(x)}$$

Notar que es función de x , puesto que la capacidad total del condensador es función de x . El sistema se puede ver como dos condensadores en paralelo



$$C_{eq} = C_1 + C_2 = \frac{\epsilon_0 ax}{d} + \frac{\kappa \epsilon_0 a(a-x)}{d}$$

$$C_{eq} = \frac{\epsilon_0 a(x + \kappa(a-x))}{d}$$

Con esto, la energía potencial eléctrica almacenada es

$$U(x) = \frac{1}{2} \frac{dQ^2}{\epsilon_0 a(x + \kappa(a-x))}$$

Y la fuerza que se ejerce sobre el dieléctrico será

$$\vec{F}_x \hat{i} = -\frac{dU}{dx} \hat{i}$$

$$\vec{F}_x = \frac{Q^2 d}{2\epsilon_0 a} \frac{(1-k)}{(x+k(a-x)^2)} \hat{i}$$

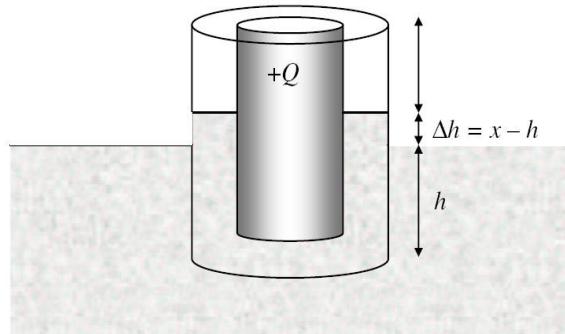
Notar que $(1-k) < 0$, es decir, la fuerza apunta según $-$. Esto significa que la placa dieléctrica es atraída hacia el interior del condensador.

Problema

Un condensador cilíndrico de altura l y cuyos conductores tienen radios a y b ($b > a$), está cargado con una carga Q , es decir, una armadura tiene carga $+Q$ y la otra $-Q$. Entre ellas existe vacío. La armadura es un cilindro metálico macizo.

Este dispositivo se sumerge en un líquido dieléctrico de densidad constante ρ y permitividad ϵ , a una profundidad h .

Determinar la altura x que sube el nivel del líquido que queda dentro del condensador, en relación al líquido externo (basta llegar a la ecuación correspondiente).



Solución

La diferencia de nivel Δh estará dada por el equilibrio entre la fuerza eléctrica sobre el líquido y su peso. Como la carga es constante, entonces

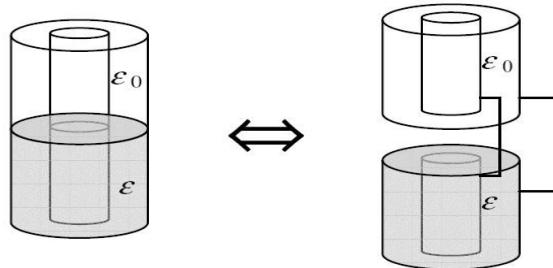
$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C(x)}$$

La fuerza electrostática es

$$F_x \hat{i} = -\frac{\partial U}{\partial x} \hat{i}$$

Con $C(x)$ la capacidad del condensador cuando el agua está a una altura x .

De esta forma, el problema se traduce en determinar la capacidad del condensador en función de la altura x .



La figura muestra que el condensador puede considerarse como dos condensadores conectados en paralelo, uno de altura $l - x$ y otro de altura x . La capacidad total será la suma de las capacidades C_1, C_2 .

Podemos hacer esta suposición (equivalente con 2 condensadores en paralelo) si despreciamos los efectos de borde y la deformación del campo eléctrico cerca de la superficie del líquido.

Para calcular la capacidad del condensador de altura x , supongamos que hay una carga q_2 distribuida en el conductor interno. Así, utilizando un cilindro como superficie de gauss de radio r , concéntrico al conductor interno y contenido en la región con dieléctrico, se tiene

$$\oint d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{D}(\vec{x}') = q_2$$

Si $\vec{D}(r) = D(r)\hat{r}$, se tiene

$$\vec{D}(r) = \frac{q_2}{2\pi rx}\hat{r}$$

De donde

$$\vec{E}(r) = \frac{q_2}{2\pi rx\epsilon}\hat{r}$$

Ahora podemos obtener el potencial entre los conductores como

$$\Delta V = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{q_2}{2\pi\epsilon x} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Con lo que la capacidad para este condensador será

$$C_2 = \frac{2\pi\epsilon x}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

Análogamente se obtiene la capacidad para el condensador superior, que estará dada por

$$C_1 = \frac{2\pi\epsilon_0(l-x)}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

La capacidad total del sistema será la suma de ambas

$$C = C_1 + C_2 = \frac{2\pi}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} (\epsilon x + \epsilon_0(l-x))$$

Y la energía eléctrica será

$$U(x) = \frac{1}{4\pi} \frac{Q^2 \ln(b/a)}{x(\epsilon - \epsilon_0) + \epsilon_0 l}$$

Derivando se obtiene la fuerza que tiende a subir el agua

$$F_x \hat{i} = -\frac{dU}{dx} \hat{i} = \frac{1}{4\pi} \frac{Q^2 \ln(b/a)(\epsilon - \epsilon_0)}{(x(\epsilon - \epsilon_0) + \epsilon_0 l)^2} \hat{i}$$

Y el peso del líquido que es elevado una altura Δh es

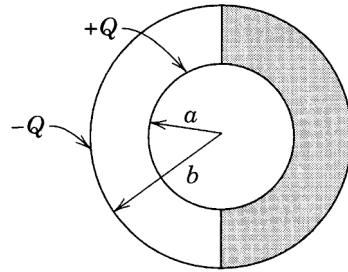
$$W = (x-h)\pi(b^2 - a^2)\rho$$

Finalmente la ecuación para determinar x es

$$(x-h)\pi(b^2 - a^2)\rho = \frac{1}{4\pi} \frac{Q^2 \ln(b/a)(\epsilon_0 - \epsilon)}{(x(\epsilon - \epsilon_0) + \epsilon_0 l)^2}$$

Problema

Dos esferas concéntricas conductoras de radio interior a y exterior b , respectivamente, poseen cargas $\pm Q$ (como se muestra en la figura). La mitad del espacio entre ellas se llena con un dieléctrico (de constante dieléctrica ϵ/ϵ_0)



- Encuentre el campo eléctrico entre las esferas
- Calcule la densidad de carga libre superficial en la esfera interior
- Calcule la densidad de carga de polarización inducida en la superficie del dieléctrico en $r = a$

Solución

a) Sea S una esfera de radio r concéntrica a ambas esferas conductoras, con $a < r < b$. De la ley de Gauss general

$$\oint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{D}(\vec{x}) = Q$$

De la simetría del problema, se deduce una dependencia y dirección radial para el campo de desplazamiento eléctrico (y también para el campo eléctrico)

$$\vec{D}(\vec{x}) = D(r)\hat{r}$$

Sean además S_1 y S_2 los hemisferios dados por

$$S_1 = \{\vec{x} \in S / 0 \leq \varphi \leq \pi\}$$

$$S_2 = \{\vec{x} \in S / \pi \leq \varphi \leq 2\pi\}$$

Notar que $S_1 \cup S_2 = S$

$$\oint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{D}(\vec{x}) = \iint_{S_1} d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{D}(\vec{x}) + \iint_{S_2} d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{D}(\vec{x}) = Q$$

$$\oint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{D}(\vec{x}) = \iint_{S_1} d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \epsilon_0 \kappa \vec{E}(\vec{x}) + \iint_{S_2} d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \epsilon_0 \vec{E}(\vec{x}) = 2\pi r E(r) \epsilon_0 (1 + \kappa)$$

donde κ es la constante dieléctrica de la región asociada al hemisferio S_1 , es decir

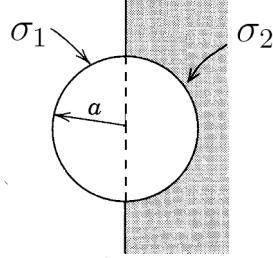
$$\kappa = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$$

Así

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 r^2(1 + \epsilon/\epsilon_0)} \hat{r}, a \leq r \leq b$$

b) Para encontrar la densidad de carga libre en la esfera $r = a$, utilizamos que

$$\vec{D}(\vec{x}) = \frac{\sigma(\vec{x})}{\epsilon(\vec{x})}, \forall \vec{x} \in S_a : \{r = a\}$$



Así

$$\sigma_1 = \epsilon_0 E(a) = \frac{Q\epsilon_0}{2\pi a^2 (\epsilon + \epsilon_0)}$$

$$\sigma_2 = \epsilon E(a) = \frac{Q\epsilon}{2\pi a^2 (\epsilon + \epsilon_0)}$$

c) Para encontrar la densidad de carga inducida en la superficie de dieléctrico con $r = a$, utilizamos la relación

$$\vec{D}(\vec{x}) = \epsilon_0 \vec{E}(\vec{x}) + \vec{P}(\vec{x}) = \epsilon \vec{E}(\vec{x})$$

Así, el vector polarización está dado por

$$\vec{P}(\vec{x}) = (\epsilon - \epsilon_0) \vec{E}(\vec{x})$$

La densidad de carga inducida de polarización en la superficie del dieléctrico con $r = a$ es

$$\sigma_P = \vec{P} \cdot \hat{n} \Big|_{\vec{x} \in S_a}$$

donde \hat{n} es la normal a la superficie S_a que limita al dieléctrico, es decir $\hat{n} = -\hat{r}$

$$\sigma_P = -(\epsilon - \epsilon_0) E(r) \Big|_{r=a}$$

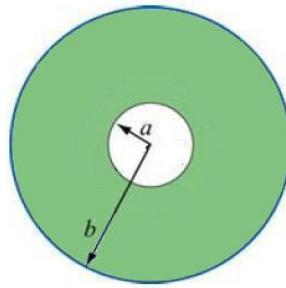
$$\sigma_P = \left(\frac{\epsilon_0 - \epsilon}{\epsilon_0 + \epsilon} \right) \frac{Q}{2\pi a^2}$$

Problema

Un cascarón esférico macizo (radio interno a y externo b) está hecho de un material tal que la polarización en su interior está dada por $\vec{P}(r) = \frac{k}{r}\hat{r}$, donde k es una constante arbitraria y r la distancia al centro. Note que no hay carga libre en este problema. Encuentre de dos maneras distintas el campo eléctrico en todo el espacio

Solución

Una forma natural de resolver este problema consiste en encontrar las densidades de carga de polarización, es decir, ρ_{pol} y σ_{pol}



La divergencia en coordenadas esféricas para una función radial de la forma $\vec{f} = f(r)\hat{r}$ es

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{f} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 f(r))$$

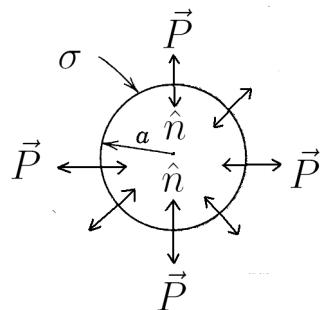
En este caso

$$\begin{aligned} \rho_P &= -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{k}{r} \right) \\ \rho_P &= -\frac{k}{r^2}, r \in (a, b) \end{aligned}$$

Falta obtener además las densidades superficiales de polarización en $r = a$ y $r = b$. Para ello utilizamos que

$$\sigma_P = \vec{P} \cdot \hat{n}$$

donde \hat{n} apunta hacia el exterior de la región de dieléctrico. Para la superficie $r = a$ se tiene



en este caso, $\hat{n} = -\hat{r}$, y entonces

$$\sigma_P \Big|_{r=a} = \frac{k}{a} \hat{r} \cdot (-\hat{r}) = -\frac{k}{a}$$

En $r = b$, la normal exterior a la región de dieléctrico coincide con $\hat{n} = \hat{r}$, de forma que

$$\sigma_P \Big|_{r=b} = \frac{k}{b} \hat{r} \cdot \hat{r} = \frac{k}{b}$$

Dividimos el espacio en dos regiones, dadas por $\{I : a < r < b\}$, $\{II : b < r\}$. Tomando una superficie esférica S de radio r tal que $r > b$, e integrando el flujo del campo eléctrico a través de ella, se tendrá por ley de Gauss

$$\iint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0} = 4\pi r^2 E(r)$$

donde se ha utilizado la clara simetría radial del problema. La carga encerrada por S está dada por

$$Q_{in} = \sigma_a 4\pi a^2 + \sigma_b 4\pi b^2 + \iiint_{V(S)} d^3x \rho_P(\vec{x})$$

La integral de la densidad volumétrica de carga de polarización es como sigue

$$\iiint_{V(S)} d^3x \rho_P(\vec{x}) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta \int_a^b dr r^2 \left(\frac{-k}{r^2} \right) = -4\pi k (b-a)$$

Entonces

$$Q_{in} = -\frac{k}{a} 4\pi a^2 + \frac{k}{b} 4\pi b^2 - 4\pi b (b-a) = 0$$

(Resultado totalmente conocido a estas alturas, pues un dieléctrico es eléctricamente neutro). De esta forma, el campo eléctrico en la región II es nulo

$$\vec{E}(\vec{x}) = \vec{0}, \forall \vec{x} \in II$$

Para la región I , nuevamente utilizando la ley de Gauss con una superficie esférica de radio r , ahora con $a < r < b$

$$\iint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{E}(\vec{x}) = 4\pi r^2 E(r) = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0}$$

donde ahora la carga encerrada por S es

$$Q_{in} = \sigma_a 4\pi a^2 + \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta \int_a^b dr r^2 \left(\frac{-k}{r^2} \right)$$

$$Q_{in} = -4\pi k a + 4\pi k (a-r) = -4\pi k r$$

Luego

$$4\pi r^2 E(r) = -\frac{4\pi k r}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\frac{k}{\epsilon_0 r} \hat{r}, a < r < b$$

Es claro, por ley de Gauss, que $\vec{E}(\vec{x}) = \vec{0}$ si $r < a$

Otra forma de resolver este problema, es utilizando la ley de Gauss para el vector desplazamiento eléctrico. Utilizando una superficie S (cualquiera) contenida en la región II, se tiene

$$\oint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{D}(\vec{x}) = Q_{libre}$$

donde Q_{libre} representa la carga libre encerrada por S . En este caso, $Q_{libre} = 0$ y entonces, por continuidad

$$\vec{D}(\vec{x}) = \vec{0}, \forall \vec{x} \in II$$

Además, en la región II (vacío), la polarización es nula, $\vec{P}(\vec{x}) = \vec{0}, \forall \vec{x} \in II$. Utilizando además

$$\vec{D}(\vec{x}) = \epsilon_0 \vec{E}(\vec{x}) + \vec{P}(\vec{x}) = \vec{0} \rightarrow \vec{E}(\vec{x}) = \vec{0}, \forall \vec{x} \in II$$

Para la región I , se obtiene nuevamente que el campo \vec{D} es nulo

$$\oint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{D}(\vec{x}) = \vec{0}, \forall S \in I$$

$$\vec{D}(\vec{x}) = \vec{0}, \forall \vec{x} \in I$$

entonces

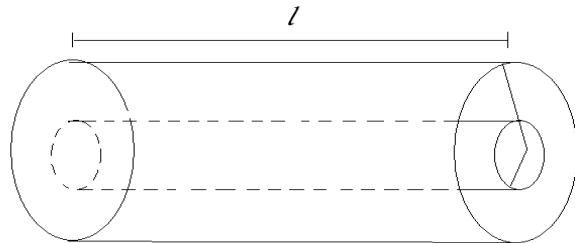
$$\epsilon_0 \vec{E}(\vec{x}) + \vec{P}(\vec{x}) = \vec{0}$$

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \vec{P}(\vec{x}) = -\frac{k}{\epsilon_0 r} \hat{r}$$

y, por supuesto, $\vec{E}(\vec{x}) = \vec{0}$ para $r < a$ por la misma razón ($\vec{D}(\vec{x}) = \vec{P}(\vec{x}) = \vec{0}$ en $r < a$)

Problema

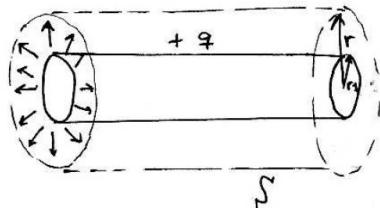
Un cilindro conductor hueco sin espesor, de radio r_1 , y largo l , lleva una carga q uniformemente distribuida. Alrededor de él, otro cilindro conductor hueco sin espesor, coaxial con el anterior, de radio r_2 y mismo largo l , tal como indicado en la figura, lleva una carga $-q$, también uniformemente distribuida. Se llena la región entre los dos cilindros con un material cuya constante dieléctrica es función de la distancia al eje de los cilindros, $\kappa = \kappa(r)$. Considere l mucho mayor que r_1 y r_2



- Encuentre una expresión para $\kappa(r)$ que lleva un campo electrostático radial independiente de la distancia al eje
- Calcule la capacidad del condensador cilíndrico correspondiente
- Calcule la densidad superficial de cargas de polarización en la superficie del material dieléctrico a $r = r_1$ y $r = r_2$, para el $\kappa(r)$ calculado en el ítem a)
- Considerando que, en coordenadas cilíndricas, $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r A_r)$, calcular la densidad volumétrica de cargas de polarización en el dieléctrico
- Calcular la cantidad total de cargas de polarización, incluyéndose cargas en la superficie y en el volumen del dieléctrico
- Calcule la energía potencial electrostática almacenada en el condensador
- Suponiendo que uno puede sacar el material dieléctrico de entre r_1 y r_2 deslizándolo fácilmente sin roce, a lo largo del eje del sistema, calcule el trabajo necesario para remover el dieléctrico de entre las placas del condensador

Solución

Para obtener el campo electrostático en el interior, utilizamos la ley de Gauss general, con una superficie cilíndrica de radio r , con $r_1 < r < r_2$ y largo l



Por simetría, es evidente que \vec{D} es de la forma $\vec{D} = D(r)\hat{r}$, con esto

$$\iint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{D}(\vec{x}') = \iint_S dS(\vec{x}') \hat{r} \cdot D(r) \hat{r} = q$$

$$D(r) 2\pi r l D = q$$

Así

$$\vec{D} = \frac{q}{2\pi r l} \hat{r}$$

además \vec{D} se relaciona con \vec{E} según

$$\vec{D}(\vec{x}) = \epsilon \vec{E}(\vec{x}) = \kappa(r) \epsilon_0 \vec{E}(\vec{x})$$

luego

$$\vec{E}(r) = \frac{q}{2\pi lr\kappa(r)\epsilon_0} \hat{r}$$

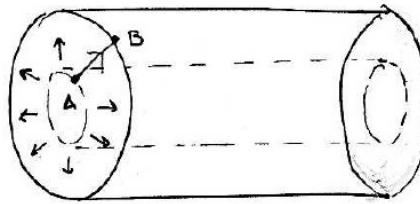
para que \vec{E} no dependa de r , $\kappa(r)$ debe ser de la forma

$$\kappa(r) = \frac{\alpha}{r}$$

Así

$$\vec{E}(r) = \frac{q}{2\pi l\alpha\epsilon_0} \hat{r}$$

b) Calculemos la diferencia de potencial entre las cáscaras cilíndricas



$$\int_A^B d\vec{x} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \phi(A) - \phi(B) = \Delta V$$

$$\int_{r_1}^{r_2} dr \hat{r} \cdot \frac{q}{2\pi l\alpha\epsilon_0} \hat{r} = \frac{q}{2\pi l\alpha\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} dr = \frac{q(r_2 - r_1)}{2\pi l\alpha\epsilon_0}$$

y la capacidad de este condensador es

$$C = \frac{q}{\Delta V} = \frac{2\pi l\alpha\epsilon_0}{r_2 - r_1}$$

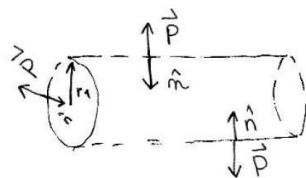
c) La densidad superficial de cargas de polarización está dada por

$$\sigma_P(\vec{x}) = \vec{P}(\vec{x}) \cdot \hat{n}(\vec{x}), \vec{x} \in S$$

y

$$\vec{P} = (\epsilon - \epsilon_0) \vec{E} = \left(\frac{\alpha}{r} - 1 \right) \epsilon_0 \vec{E}$$

sobre la superficie interior



$$\hat{n} = -\hat{r}$$

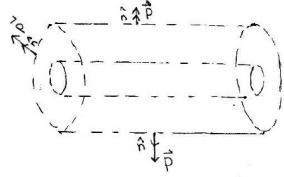
$$\vec{P} = \left(\frac{\alpha}{r_1} - 1 \right) \epsilon_0 \vec{E}$$

$$\vec{P}(\vec{x}) = \left(\frac{\alpha}{r_1} - 1 \right) \frac{q}{2\pi l \alpha} \hat{r}$$

y entonces

$$\sigma_1 = \vec{P} \cdot \hat{n} \Big|_{r=r_1} = \left(\frac{\alpha}{r_1} - 1 \right) \frac{q}{2\pi l \alpha}$$

para la superficie exterior



$$\hat{n} = \hat{r}$$

$$\vec{P} = \left(\frac{\alpha}{r_2} - 1 \right) \epsilon_0 \vec{E}$$

luego

$$\sigma_2 = \vec{P} \cdot \hat{n} \Big|_{r=r_2} = \left(\frac{\alpha}{r_2} - 1 \right) \frac{q}{2\pi l \alpha}$$

d) La densidad volumétrica de carga de polarización es

$$\rho_P = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$$

como

$$\vec{P} = P(r) \hat{r}$$

$$\rho_P = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r P(r) = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \left(\left(\frac{\alpha}{r} - 1 \right) \epsilon_0 \vec{E} \right)$$

$$\rho_P = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(\frac{\alpha - r}{r} \right) \epsilon_0 \frac{q}{2\pi l \alpha \epsilon_0} \right]$$

$$\rho_P = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{(\alpha - r) q}{2\pi l \alpha} \right] = -\frac{1}{r} \left(\frac{-q}{2\pi l \alpha} \right)$$

$$\rho_P = \frac{q}{r 2\pi l \alpha}$$

e) La carga total de polarización es

$$Q_p = \iiint_V d^3x' \rho_P(\vec{x}') + \iint_{S_1} dS(\vec{x}') \sigma_1(\vec{x}') + \iint_{S_2} dS(\vec{x}') \sigma_2(\vec{x}')$$

$$\begin{aligned}\oint_{S_1} dS(\vec{x}') \sigma_1(\vec{x}') &= -\left(\frac{\alpha}{r_1} - 1\right) \frac{q}{2\pi l \alpha} \oint_{S_1} dS(\vec{x}') = -\left(\frac{\alpha}{r_1} - 1\right) \frac{q2\pi r_1 l}{2\pi l \alpha} \\ \oint_{S_1} dS(\vec{x}') \sigma_1(\vec{x}') &= -(\alpha - r_1) \frac{q}{\alpha}\end{aligned}$$

del mismo modo

$$\oint_{S_2} dS(\vec{x}') \sigma_2(\vec{x}') = \sigma_2 \oint_{S_1} dS(\vec{x}') = (\alpha - r_2) \frac{q}{\alpha}$$

por último, recordando que el elemento de volumen en coordenadas cilíndricas es $d^3x' = r dr d\varphi dz$

$$\begin{aligned}\iiint_V d^3x' \rho_P(\vec{x}') &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^l dz \int_{r_1}^{r_2} dr r \frac{q}{2\pi l \alpha r} = \frac{2\pi l q}{2\pi l \alpha} \int_{r_1}^{r_2} dr \\ \iiint_V d^3x' \rho_P(\vec{x}') &= \frac{q}{\alpha} (r_2 - r_1)\end{aligned}$$

Así

$$Q_P = \frac{q}{\alpha} (r_2 - r_1) - (\alpha - r_1) \frac{q}{\alpha} + (\alpha - r_2) \frac{q}{\alpha} = 0$$

Esto siempre se cumple, pues un dieléctrico siempre es eléctricamente neutro, en efecto

$$Q_P = \iiint_V d^3x' - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}(\vec{x}') + \oint_{S(V)} d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{P}(\vec{x}') = 0$$

f) La energía almacenada por el condensador es

$$U = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$$

donde

$$C = \frac{2\pi l \alpha \epsilon_0}{(r_2 - r_1)}$$

así

$$U = \frac{1}{2} \frac{q^2 (r_2 - r_1)}{2\pi l \alpha \epsilon_0}$$

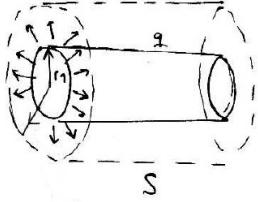
g) Tenemos que la energía inicial es

$$U_i = \frac{1}{2} \frac{q^2 (r_2 - r_1)}{2\pi l \alpha \epsilon_0}$$

y la final

$$U_f = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C_f}$$

donde C_f es la capacidad final (en vacío).



Por ley de Gauss

$$\oint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') = \frac{q}{\epsilon_0} = E 2\pi r l$$

$$\vec{E} = \frac{q}{2\pi r l \epsilon_0} \hat{r}$$

y

$$\Delta V = \int_{r_1}^{r_2} d\vec{x} \cdot \vec{E} = \frac{q}{2\pi l \epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{q}{2\pi l \epsilon_0} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

Así

$$C_f = \frac{q}{\Delta V} = \frac{2\pi l \epsilon_0}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$

y la energía final

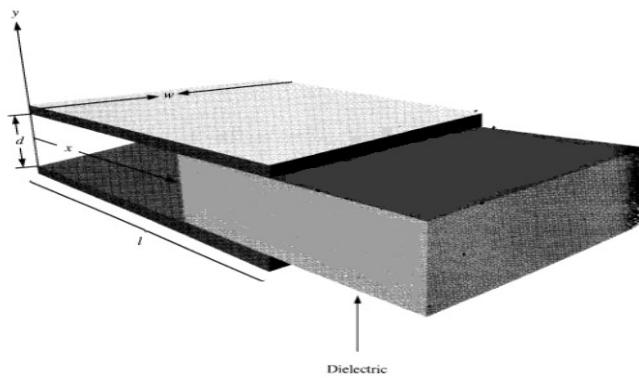
$$U_f = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C_f} = \frac{1}{2} \frac{q^2 \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi l \epsilon_0}$$

Finalmente, el trabajo necesario para remover el dieléctrico es

$$W = U_f - U_i = \frac{1}{2} \frac{q^2}{2\pi l \epsilon_0} \left\{ \frac{r_1 - r_1}{\alpha} - \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \right\}$$

Problema

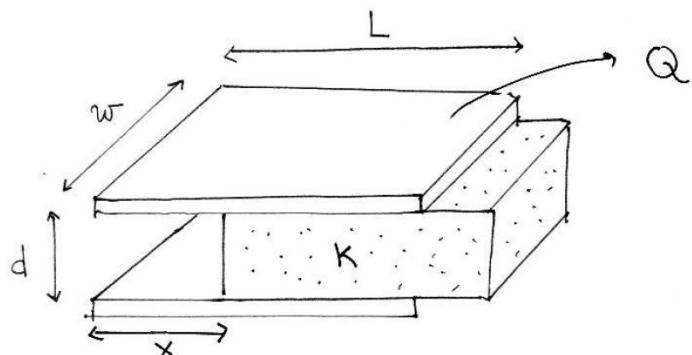
Un condensador de placas paralelas de separación d entre las placas mucho menor que su largo L y ancho w tiene la región entre las placas llenada por un material de constante dieléctrica κ , el que puede deslizar libremente a lo largo de la dirección dada por L , como indicado en la figura. Inicialmente, el dieléctrico llena completamente la región entre las placas, y el condensador está cargado con una carga total Q . Se pide determinar hasta qué distancia x uno tiene que sacar el dieléctrico para que la energía almacenada en él aumente por un factor 2 con respecto a su valor original, si la carga almacenada en el condensador se mantiene constante en el proceso



Solución

Antes de mover el dieléctrico, la capacidad es

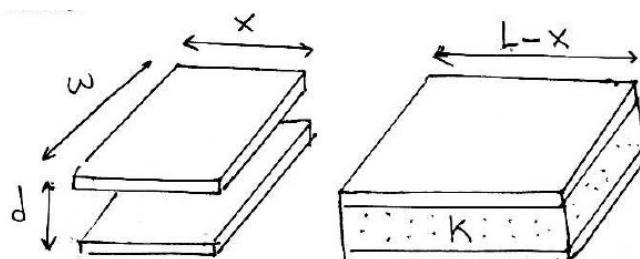
$$C_i = \frac{\kappa\epsilon_0 w L}{d}$$



y la energía inicial es

$$U_i = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_i} = \frac{1}{2} \frac{Q^2 d}{\kappa\epsilon_0 w L}$$

Supongamos que ahora se mueve el dieléctrico hasta una distancia x . Ahora el condensador se puede pensar como dos condensadores en paralelo



la capacidad equivalente es

$$C_{eq} = C_1 + C_2 = \frac{\epsilon_0 w}{d} (x + \kappa(L - x))$$

y la energía final queda

$$U(x) = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_{eq}x} = \frac{1}{2} \frac{Q^2 d}{\epsilon_0 w (x + \kappa(L - x))}$$

se pide que

$$U(x) = 2U_i = \frac{Q^2 d}{\kappa \epsilon_0 w L}$$

Así, x debe cumplir

$$\frac{1}{2} \frac{Q^2 d}{\epsilon_0 w (x + \kappa(L - x))} = \frac{Q^2 d}{\kappa \epsilon_0 w L}$$

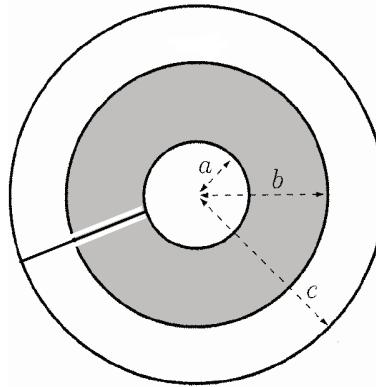
$$2(x + \kappa(L - x)) = \kappa L$$

$$2x - 2\kappa x + 2\kappa L = \kappa L \rightarrow 2x(1 - \kappa) = -\kappa L$$

$$x = \frac{\kappa L}{2(\kappa - 1)}$$

Problema

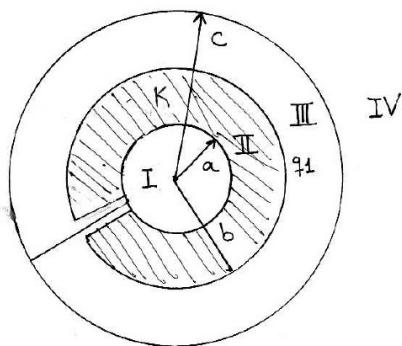
Se tienen tres esferas conductoras concéntricas de radios a , b , y c . El espacio entre las dos primeras está lleno con un dieléctrico de constante κ . Inicialmente la esfera de radio a está descargada y las esferas de radios b y c tienen carga q_1 y q_2 , respectivamente. La esfera interior de radio a se conecta con la esfera de radio c con un cable aislado delgado



- Calcular la carga libre en cada esfera
- Calcular la carga de polarización en la superficie externa y en la superficie interna del dieléctrico

Solución

- Definimos las siguientes regiones



Al conectar las esferas de radio a y c , se distribuirá la carga en ambas de modo que quedan al mismo potencial, luego

$$q_2 = q_A + q_C$$

Además, para la región I

$$r < a \rightarrow \vec{E}(\vec{x}) = \vec{0}$$

pues corresponde al interior de una esfera conductora. Para $a < r < b$ se utiliza la ley de Gauss con una superficie esférica de radio r

$$\iint_{S(r)} d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{D}(\vec{x}') = 4\pi r^2 D(r) = q_A$$

$$\vec{D} = \frac{q_A}{4\pi r^2} \hat{r}$$

y luego

$$\vec{E}(r) = \frac{q_A}{4\pi\kappa\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

Para la región $b < r < c$

$$\begin{aligned} \iint_{S(r)} d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') &= 4\pi r^2 E(r) = \frac{(q_A + q_1)}{\epsilon_0} \\ \vec{E}(r) &= \frac{q_A + q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \end{aligned}$$

Por último, para $r > c$

$$\iint_{S(r)} d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') = 4\pi r^2 E(r) = \frac{q_1 + q_A + q_C}{\epsilon_0}$$

En resumen

$$\vec{E}(\vec{x}) = \begin{cases} \vec{0} & \text{si } 0 < r < a \\ \frac{q_A}{4\pi\kappa\epsilon_0 r^2} \hat{r} & \text{si } a < r < b \\ \frac{q_A + q_1}{4\pi\kappa\epsilon_0 r^2} \hat{r} & \text{si } b < r < c \\ \frac{q_A + q_1 + q_C}{4\pi\kappa\epsilon_0 r^2} \hat{r} & \text{si } c < r \end{cases}$$

El potencial en una esfera de radio a es

$$\phi(a) = \int_a^\infty d\vec{r} \cdot \vec{E} = \int_a^b d\vec{r} \cdot \vec{E}(r) + \int_b^c d\vec{r} \cdot \vec{E}(r) + \int_c^\infty d\vec{r} \cdot \vec{E}(r)$$

donde la última integral corresponde a

$$\int_c^\infty d\vec{r} \cdot \vec{E}(r) = \phi(c) = \phi(a)$$

$$\phi(a) = \frac{q_A}{4\pi\kappa\epsilon_0} \int_a^b \frac{dr}{r^2} + \frac{q_A + q_1}{4\pi\epsilon_0} \int_b^c \frac{dr}{r^2} + \phi(a)$$

luego

$$\frac{q_A}{4\pi\kappa\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) + \frac{q_A + q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right) = 0$$

$$q_A \left(\frac{b-a}{ab} \right) + (q_A + q_1) \left(\frac{c-b}{bc} \right) = 0$$

$$q_A \frac{b-a}{ab} + (q_A + q_1) \frac{c-b}{cb} = 0$$

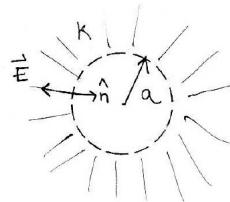
$$q_A \left(\frac{b}{a} - 1 + 1 - \frac{b}{c} \right) = \frac{q_1(b-c)}{c} \rightarrow q_A \frac{b(c-a)}{ac} = q_1 \frac{b-c}{c}$$

Finalmente

$$q_A = \frac{q_1(b-c)a}{b(c-a)}$$

$$q_C = q_2 - q_A = q_2 - \frac{q_1(b-c)a}{b(c-a)}$$

b) Sobre la superficie interna del dieléctrico



$$\sigma_P = \vec{P} \cdot \hat{n}$$

$$\vec{P} = (\epsilon - \epsilon_0) \vec{E}$$

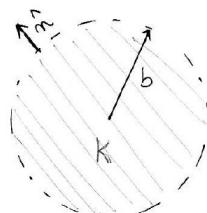
sobre la superficie

$$\vec{E} = \frac{q_A}{4\pi\kappa\epsilon_0 a^2} \hat{r}$$

y $\hat{n} = -\hat{r}$

$$\sigma_a = -\frac{(\epsilon - \epsilon_0) q_A}{4\pi\kappa\epsilon_0 a^2} = -\frac{(\kappa - 1) q_A}{4\pi\kappa a^2}$$

y sobre la superficie externa



$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{q_A}{4\pi\kappa\epsilon_0 b^2} \hat{r} \\ \hat{n} &= \hat{r} \end{aligned}$$

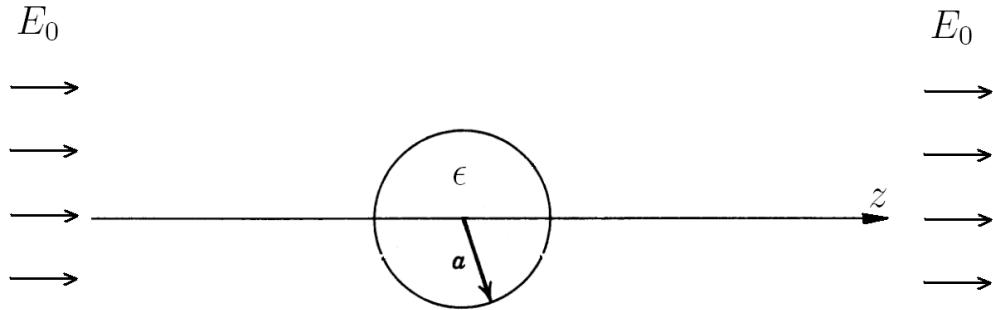
luego

$$\sigma_b = \vec{P} \cdot \hat{n} = (\epsilon - \epsilon_0) \frac{q_A}{4\pi\kappa\epsilon_0 b^2}$$

$$\sigma_b = \frac{(\kappa - 1) q_A}{4\pi\kappa b^2}$$

Problema

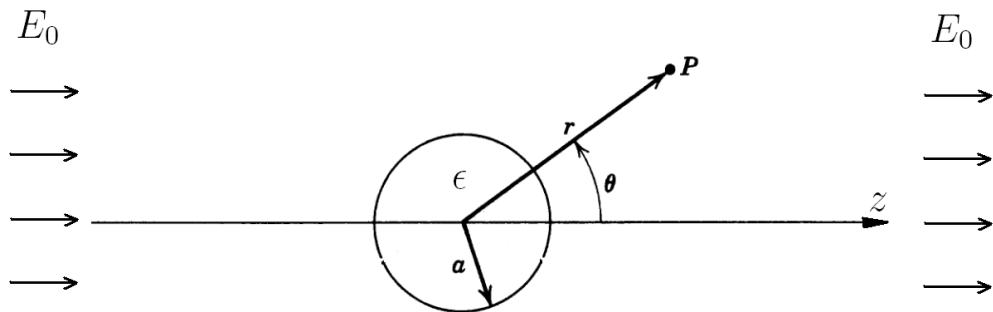
Una esfera dieléctrica de radio a y permitividad ϵ se coloca en un campo eléctrico inicialmente uniforme, como se muestra en la figura



Encuentre el potencial ϕ y el campo eléctrico en todo el espacio

Solución

Dada la simetría esférica del problema, resolveremos el problema en coordenadas esféricas, como se muestra en la figura



Como no hay cargas libres, el potencial electrostático satisface la ecuación de Laplace

$$\vec{\nabla}^2 \phi = 0$$

Dada la simetría azimutal (el potencial no depende del ángulo polar φ), la solución general para $r < a$ y $r > a$ toma la forma

$$\phi_{int} = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \vartheta)$$

$$\phi_{ext} = \sum_{l=0}^{\infty} (B_l r^l P_l + C_l r^{-(l+1)}) P_l(\cos \vartheta)$$

Lejos de la esfera dieléctrica, $\vec{E}(\vec{x}) = E_0 z$, o, equivalentemente

$$\phi_{\infty} = -E_0 z$$

en coordenadas esféricas

$$\phi_{\infty} = -E_0 r \cos \vartheta$$

Es decir

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \phi(r, \vartheta) = \phi_{\infty} = -E_0 r \cos \vartheta$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \phi_{ext} = \sum_{l=0}^{\infty} B_l r^l P_l(\cos \vartheta) = -E_0 r \cos \vartheta$$

De aquí, es claro que

$$B_l = 0, l = 0, 2, 3, 4 \dots$$

y

$$B_1 r \cos \vartheta = -E_0 r \cos \vartheta$$

$$B_1 = -E_0$$

con esto, el potencial exterior toma la forma

$$\phi_{ext} = -E_0 r \cos \vartheta + \sum_{l=0}^{\infty} C_l r^{-(l+1)} P_l(\cos \vartheta)$$

Ahora utilizaremos las condiciones de contorno en la superficie $r = a$. En primer lugar, la componente tangencial del campo eléctrico en $r = a$ debe ser continua

$$\begin{aligned} \vec{E}_{int} \cdot \hat{\vartheta} \Big|_{r=a} &= \vec{E}_{ext} \cdot \hat{\vartheta} \Big|_{r=a} \\ -\vec{\nabla} \phi_{int} \cdot \hat{\vartheta} \Big|_{r=a} &= -\vec{\nabla} \phi_{ext} \cdot \hat{\vartheta} \Big|_{r=a} \\ -\frac{1}{a} \frac{\partial \phi_{int}}{\partial \vartheta} \Big|_{r=a} &= -\frac{1}{a} \frac{\partial \phi_{ext}}{\partial \vartheta} \Big|_{r=a} \end{aligned}$$

de forma equivalente, se puede imponer

$$\begin{aligned} \phi_{int} \Big|_{r=a} &= \phi_{ext} \Big|_{r=a} \\ \sum_{l=0}^{\infty} A_l a^l P_l(\cos \vartheta) &= -E_0 a \cos \vartheta + \sum_{l=0}^{\infty} C_l a^{-(l+1)} P_l(\cos \vartheta) \\ \sum_{l=0}^{\infty} (A_l a^l - C_l a^{-(l+1)}) P_l(\cos \vartheta) &= -E_0 a \cos \vartheta \end{aligned}$$

De aquí, se obtiene

$$A_1 a - \frac{C_1}{a^2} = -E_0 a$$

y para $l \neq 1$

$$A_l a^l - C_l a^{-(l+1)} = 0, l \neq 1$$

Además, si no hay densidad de carga libre en la superficie dieléctrica, la componente normal del campo $\vec{D}(\vec{x})$ es continua

$$\vec{D}_{int} \cdot \hat{r} \Big|_{r=a} = \vec{D}_{ext} \cdot \hat{r} \Big|_{r=a}$$

$$-\epsilon \vec{\nabla} \phi_{int} \cdot \hat{r} \Big|_{r=a} = -\epsilon_0 \vec{\nabla} \phi_{ext} \cdot \hat{r} \Big|_{r=a}$$

$$-\epsilon \frac{\partial \phi_{int}}{\partial r} \Big|_{r=a} = -\epsilon_0 \frac{\partial \phi_{ext}}{\partial r} \Big|_{r=a}$$

$$\epsilon \sum_{l=0}^{\infty} A_l l a^{l-1} P_l(\cos \vartheta) = \epsilon_0 \left(-E_0 \cos \vartheta - (l+1) \sum_{l=0}^{\infty} C_l a^{-(l+2)} P_l(\cos \vartheta) \right)$$

$$\left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0} \right) \sum_{l=0}^{\infty} A_l l a^{l-1} P_l(\cos \vartheta) = -E_0 \cos \vartheta - \sum_{l=0}^{\infty} (l+1) C_l a^{-(l+2)} P_l(\cos \vartheta)$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \left(\left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0} \right) A_l l a^{l-1} + (l+1) C_l a^{-(l+2)} \right) P_l(\cos \vartheta) = -E_0 \cos \vartheta$$

de aquí se obtiene

$$\left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0} \right) A_1 + 2C_1 a^{-3} = -E_0$$

$$\left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0} \right) A_l l a^{l-1} + (l+1) C_l a^{-(l+2)} = 0, l \neq 1$$

En resumen

$$\begin{aligned} A_1 a - \frac{C_1}{a^2} &= -E_0 a \\ A_l a^l - C_l a^{-(l+1)} &= 0, l \neq 1 \\ \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0} \right) A_1 + 2C_1 a^{-3} &= -E_0 \\ \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0} \right) A_l l a^{l-1} + (l+1) C_l a^{-(l+2)} &= 0, l \neq 1 \end{aligned}$$

de la segunda ecuación

$$A_l = C_l \frac{1}{a^{2l+1}}, l \neq 1$$

reemplazando en la cuarta

$$\left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0} \right) C_l \frac{1}{a^{2l+1}} l a^{l-1} + (l+1) C_l a^{-(l+2)} = 0, l \neq 1$$

$$\left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0} \right) C_l \left(\frac{l}{a^{l+2}} + \frac{l+1}{a^{l+2}} \right) = 0, l \neq 1$$

Luego

$$C_l = A_l = 0, l \neq 1$$

Para $l = 1$, de la primera ecuación

$$A_1 = \frac{C_1}{a^3} - E_0$$

reemplazando en la tercera

$$\left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right) \left(\frac{C_1}{a^3} - E_0\right) + 2C_1 a^{-3} = -E_0$$

$$\frac{C_1}{a^3} \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0} + 2\right) = E_0 \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0} - 1\right)$$

Finalmente

$$\begin{aligned} C_1 &= a^3 E_0 \left(\frac{\frac{\epsilon}{\epsilon_0} - 1}{\frac{\epsilon}{\epsilon_0} + 2} \right) \\ A_1 &= E_0 \left(\frac{\frac{\epsilon}{\epsilon_0} - 1}{\frac{\epsilon}{\epsilon_0} + 2} \right) - E_0 \\ A_1 &= E_0 \left(\frac{\frac{\epsilon}{\epsilon_0} - 1 - \frac{\epsilon}{\epsilon_0} - 2}{\frac{\epsilon}{\epsilon_0} + 2} \right) \\ A_1 &= -E_0 \left(\frac{3}{\frac{\epsilon}{\epsilon_0} + 2} \right) \end{aligned}$$

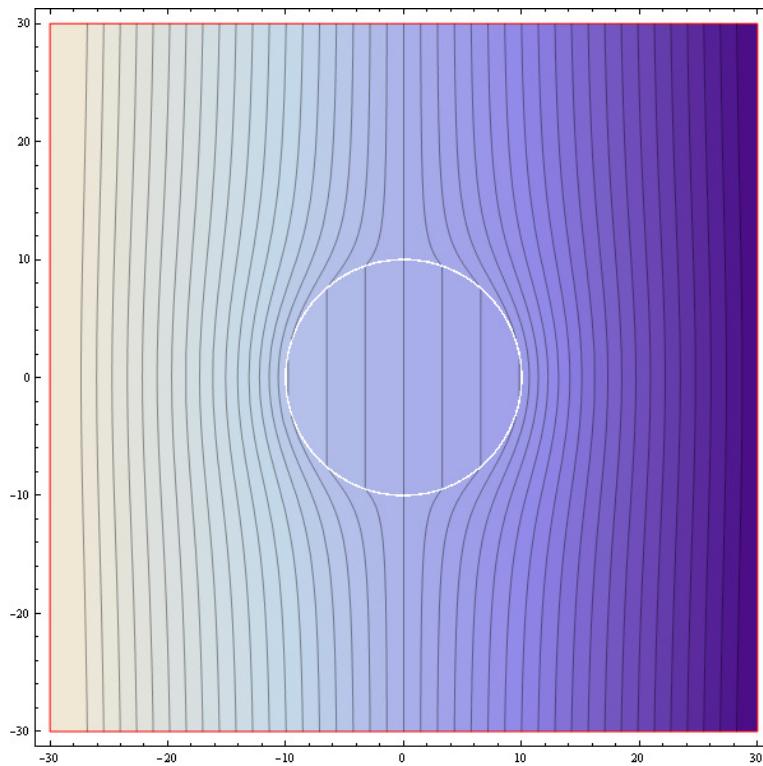
Con esto, se tiene

$$\begin{aligned} \phi_{int} &= -E_0 \left(\frac{3}{\frac{\epsilon}{\epsilon_0} + 2} \right) r \cos \vartheta = -E_0 \left(\frac{3}{\frac{\epsilon}{\epsilon_0} + 2} \right) z \\ \phi_{ext} &= -E_0 r \cos \vartheta + \frac{a^3}{r^2} \cos \vartheta E_0 \left(\frac{\frac{\epsilon}{\epsilon_0} - 1}{\frac{\epsilon}{\epsilon_0} + 2} \right) \end{aligned}$$

Notar que el potencial interior define un campo eléctrico uniforme

$$\vec{E}_{int} = E_0 \left(\frac{3}{\frac{\epsilon}{\epsilon_0} + 2} \right) \hat{z}$$

La figura muestra las equipotenciales para $E_0 = 100$ (V/m), $\epsilon/\epsilon_0 = \epsilon_r = 5$, $a = 10$ (m)

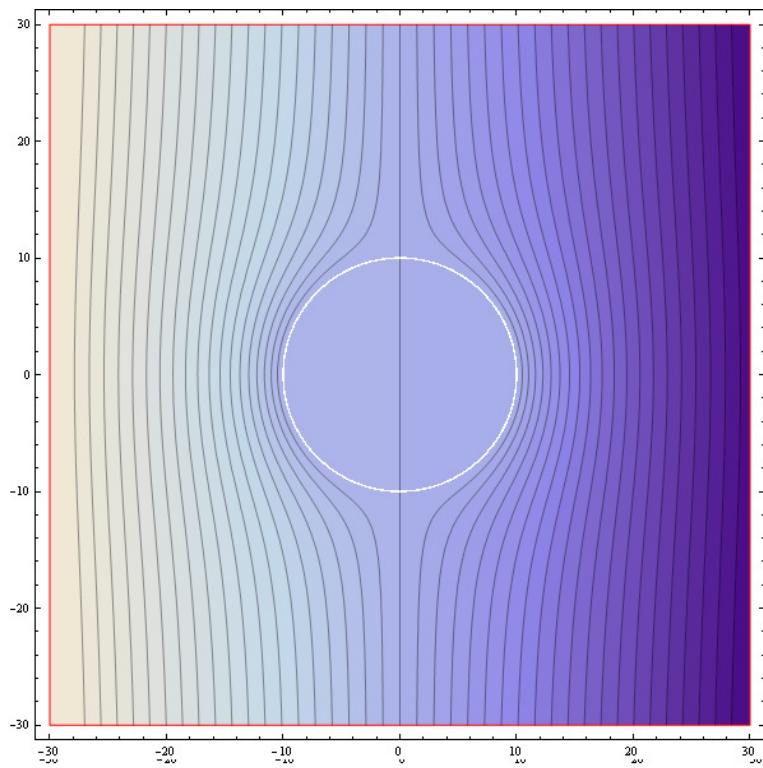


Notar que un dieléctrico con permitividad muy grande se comporta de forma similar a un conductor, en efecto, si $\epsilon \rightarrow 0$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \frac{\rho}{\epsilon} \rightarrow 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{x}) = 0$$

y entonces el campo está forzado a ser nulo en el interior del dieléctrico / conductor. La siguiente figura muestra la solución para $\epsilon_r = 5000$



En este caso, el potencial es prácticamente constante e igual a cero dentro de la esfera

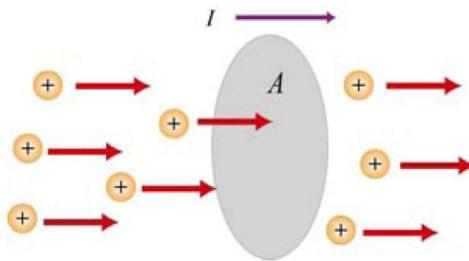
Parte IV

Corrientes Eléctricas

Capítulo 11

Corrientes Eléctricas

Las corrientes eléctricas son flujos de cargas eléctricas. Para ilustrar esto supongamos un conjunto de cargas que se mueven perpendicularmente a una superficie de área A , como se muestra en la figura



La corriente eléctrica se define como la tasa a la cual las cargas atraviesan un área transversal. Si una cantidad de carga ΔQ pasa a través una superficie en un intervalo de tiempo Δt , entonces la corriente promedio I_{avg} está dada por:

$$I_{avg} = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

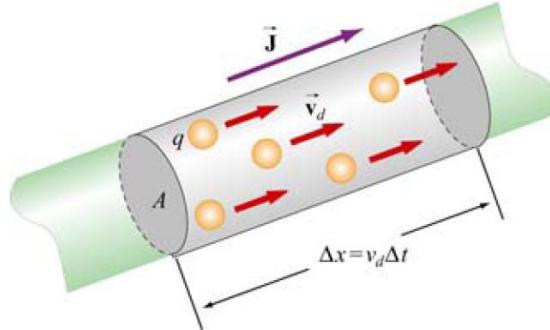
La unidad en S.I. de la corriente es el ampere (A), con $1A = 1\frac{Coulomb}{seg}$. El rango común de corrientes va desde mega-amperes en rayos hasta nano-amperes en células nerviosas. En el límite cuando $\Delta t \rightarrow 0$, la corriente instantánea se define como

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

Ya que el flujo tiene una dirección, hemos introducido implícitamente la convención de que la dirección de la corriente corresponde a la dirección en la cual las cargas positivas se mueven. Las cargas que se mueven dentro de un cable son electrones cargados negativamente que se mueven en dirección opuesta a la corriente. Corrientes eléctricas fluyen en conductores, sólidos (metales, semiconductores), fluidos (electrolitos, ionizados) y gases (ionizados), pero el flujo no es permitido en no conductores o aislantes.

11.1. Densidad de Corriente

Intentaremos ahora relacionar la corriente (una cantidad macroscópica) con el movimiento microscópico de las cargas. Para ello supongamos un conductor de área transversal A , como se muestra en la figura



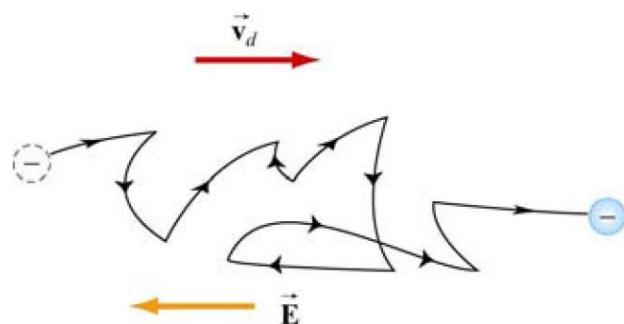
Sea la corriente total a través de una superficie escrita como

$$I = \iint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{J}(\vec{x}')$$

donde $\vec{J}(\vec{x})$ es la densidad de corriente (tiene unidades de A/m^2). Si q es la carga de cada portador, y n es el número de portadores de carga por unidad de volumen, la cantidad de carga total en esta sección es $\Delta Q = q(nA\Delta x)$. Supongamos que las cargas se mueven con velocidad v_d , así, el desplazamiento en un intervalo Δt será $\Delta x = v_d\Delta t$, lo que implica

$$I_{avg} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = nqv_d A$$

La velocidad v_d a la cual el portador de carga se mueve se conoce como velocidad de deriva. Físicamente, v_d es la velocidad promedio de un portador de carga dentro de un conductor cuando un campo eléctrico externo es aplicado. De hecho, un electrón dentro de un conductor no viaja en línea recta, si no que su movimiento es errático, como se ve en la figura



Se tiene entonces que la densidad de carga se puede escribir como

$$\vec{J} = nq\vec{v}_d$$

Vemos entonces que \vec{J} y \vec{v}_d tienen la misma dirección para portadores de carga positiva, y tienen direcciones opuestas para los portadores de carga negativa

11.2. Continuidad de la carga Eléctrica

Consideremos un volumen V determinado por una superficie cerrada S . La carga que entra en el dominio V en 1 segundo será (o equivalentemente, la **corriente** que ingresa a V)

$$I = - \oint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{J}(\vec{x}')$$

Notar que el signo menos es consistente con la definición de flujo (Flujo es positivo cuando las líneas de campo salen a través de la superficie). Por otro lado, la carga total encerrada por este volumen para cierto instante estará dada por

$$Q(t) = \iiint_V d^3x' \rho(\vec{x}', t)$$

Con lo que la corriente será la razón de cambio de esta carga en el tiempo

$$I = \frac{dQ}{dt} = \iiint_V d^3x' \frac{\partial \rho(\vec{x}')}{\partial t}$$

Igualando debe tenerse entonces

$$-\oint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{J}(\vec{x}') = \iiint_V d^3x' \frac{\partial \rho(\vec{x}')}{\partial t}$$

Utilizando el teorema de la divergencia

$$\begin{aligned} - \iiint_V d^3x' \vec{\nabla}' \cdot \vec{J}(\vec{x}') &= \iiint_V d^3x' \frac{\partial \rho(\vec{x}')}{\partial t} \\ \iiint_V d^3x' \left(\vec{\nabla}' \cdot \vec{J}(\vec{x}) + \frac{\partial \rho(\vec{x}')}{\partial t} \right) &= 0 \end{aligned}$$

Esta ley de conservación de la carga simplemente indica que la variación de la carga contenida en un volumen arbitrario V se debe a un flujo de carga a través de su superficie. Como se cumple para todo V , se obtiene la ecuación de continuidad para la carga eléctrica, en su forma diferencial

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{x}, t) + \frac{\partial \rho(\vec{x})}{\partial t} = 0$$

Supongamos que en determinada región del espacio existe una corriente en estado estacionario, es decir, no hay dependencia temporal. Entonces se cumple

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{x}) = 0$$

Cuando existen corrientes estacionarias, la densidad de carga en cada punto es una constante. Es decir, sobre cualquier volumen V , el flujo neto de carga a través de su superficie es cero, lo que es consistente con

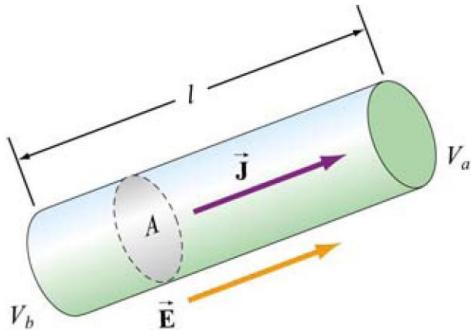
$$\iint_{S(V)} d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{J}(\vec{x}) = \iiint_V d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{x}) = 0$$

11.3. Ley de Ohm

Las corrientes en medios materiales surgen como una respuesta a un campo eléctrico. En algunos materiales, la densidad de corriente depende linealmente del campo eléctrico externo \vec{E} . Esta relación usualmente se expresa como

$$\vec{J}(\vec{x}) = \sigma \vec{E}(\vec{x})$$

Donde σ es la **conductividad** del material. Este podría ser una matriz de coeficientes no constantes (lo que representa a un medio no homogéneo y anisotrópico). Sin embargo, trabajaremos con medios simples, en donde σ es una constante positiva. Esta ecuación se conoce como la ley de Ohm diferencial. Un material que obedece esta relación se dice Ohmico. Veamos un caso particular y muy usual de la ley de Ohm, consideremos un segmento de alambre recto de largo l , área A , y conductividad σ , como se muestra en la figura



Supongamos que una diferencia de potencial $\Delta V = \phi_b - \phi_a$ es aplicada entre los extremos del alambre, generando un campo eléctrico \vec{E} , y como consecuencia, una corriente I . Asumiendo \vec{E} uniforme en el conductor, y apuntando en la dirección longitudinal se tiene

$$\Delta V = \phi_b - \phi_a = - \int_a^b d\vec{x} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = El$$

Si el medio es Ohmico, el módulo de la densidad de corriente se puede escribir como

$$J = \sigma E = \sigma \left(\frac{\Delta V}{l} \right)$$

Por otro lado, $J = I/A$, luego

$$\Delta V = \frac{l}{\sigma} J = \left(\frac{l}{\sigma A} \right) I = RI$$

Donde

$$R = \frac{\Delta V}{I} = \frac{l}{\sigma A}$$

es la **resistencia** del conductor. La famosa ecuación

$$\Delta V = IR$$

Es la versión **macroscópica** de la ley de Ohm. La unidad de R es el Ohm (Ω), donde

$$1\Omega = \frac{1V}{1A}$$

También se suele definir la σ de un material como una propiedad intensiva de éste, que es simplemente el recíproco de la conductividad

$$\rho = \frac{1}{\sigma}$$

con esto la resistencia de un conductor cilíndrico queda

$$R = \frac{\rho l}{A}$$

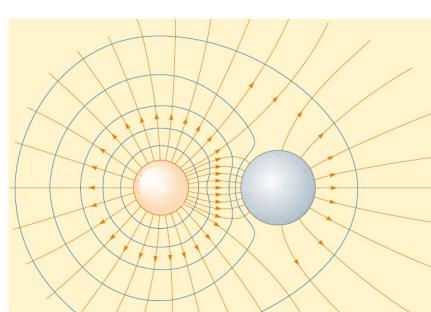
La mayoría de los metales, con buena conductividad y baja resistividad, son ohmicos.

11.3.1. Conexión entre conductores

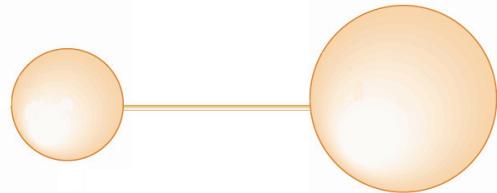
Imaginemos que se tienen 2 conductores perfectos, inicialmente cargados (se encuentran entonces a determinado potencial). La forma de estos dos conductores es absolutamente irrelevante, pero por simpleza y elegancia, en la siguiente figura se ilustran dos conductores esféricos, cargados con carga q_1 y q_2 , respectivamente



Si estos conductores están en el vacío, existirá un campo electrostático. Suponiendo que el conductor con carga q_1 se encuentra a mayor potencial, las líneas de campo se verán (para el caso de los conductores esféricos) así



Si existiera alguna carga libre, ciertamente ésta se movería debido al campo eléctrico que generan los conductores. Sin embargo, en el vacío (ausencia de cargas), simplemente nada ocurre. Ahora, imaginemos que ambos conductores se conectan por algún medio parcialmente conductor (de conductividad finita). La forma puede ser cualquiera, incluso podríamos imaginar en llenar todo el espacio de un material conductor, pero podemos imaginar como caso particular (y simple) un alambre muy delgado



¿Qué ocurre entonces?. Ahora existe un medio entre los conductores que posee cargas libres ! Sin duda éstas se moverán siempre que exista un campo eléctrico, y entonces cargas se moverán desde el conductor a mayor potencial hacia el conductor que está a menor potencial. Como consecuencia de esto, el campo eléctrico en la región entre los conductores se irá debilitando, pues este movimiento de cargas de uno al otro provocará una disminución en la diferencia de potencial entre ambos conductores. En conclusión, la conexión entre 2 conductores mediante un medio de conductividad finita dará origen a una **corriente**. Esta corriente se hará cada vez mas débil, hasta que se alcance un equilibrio en el cual los dos conductores quedan al mismo potencial.

Ahora, pensemos que tenemos un solo conductor, inicialmente cargado con carga Q . Imaginemos que lo conectamos con el infinito mediante algún camino de conductividad finita, por ejemplo un alambre infinito, esto equivale a conectarlo a otro conductor a potencial cero. Lo que sucederá es que toda la carga contenida en el conductor se irá por este camino hacia el infinito, de esta forma, nuestro conductor queda a potencial cero y absolutamente descargado.

11.4. Circuitos Eléctricos

Un circuito es una malla de resistencias, fuentes, condensadores, etc, unidas por medio de conductores perfectos. Un nodo es un punto donde convergen 2 o más conductores. Así, en un nodo se cumple que la suma de las corrientes es cero, esta es la 1 Ley de Kirchhoff, o Ley de Corrientes de Kirchhoff (LCK)

$$\sum_k I_k = 0$$

Notar que esta ecuación es equivalente a la ecuación de continuidad de la carga eléctrica para corrientes continuas (estacionarias)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{x}) = 0$$

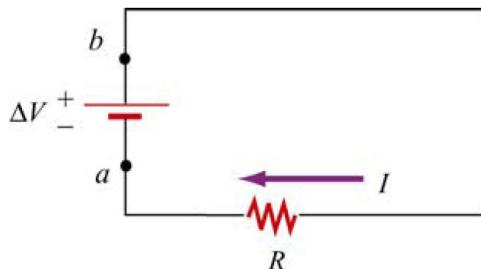
La segunda Ley de Kirchhoff o Ley de Voltajes de Kirchhoff (LVK) dice que la suma de las caídas de potencial en cada camino cerrado suma 0. Notar que esta ley proviene de

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{x}) = 0$$

Debido a esto la integral de línea del campo \vec{E} sobre una curva cerrada (circuito cerrado) es 0.

Energía eléctrica y potencia

Consideremos un circuito consistente en una batería y una resistencia (R). Sea la diferencia de potencial entre los puntos a y b $\Delta V = \phi_b - \phi_a > 0$. Si una carga Δq se mueve a través de la batería, su energía potencial eléctrica aumenta $\Delta U = \Delta q \Delta V$. Por otro lado, si la carga se mueve a través de la resistencia, la energía potencial decrece debido a las colisiones con los átomos de la resistencia. Si despreciamos la resistencia interna de la batería y la de los cables conductores, al volver al punto a , la energía de Δq permanece invariante.



Así, la tasa a la que se disipa energía a través de la resistencia está dada por

$$P = \frac{\Delta U}{\Delta t} = \left(\frac{\Delta q}{\Delta t} \right) \Delta V = I \Delta V$$

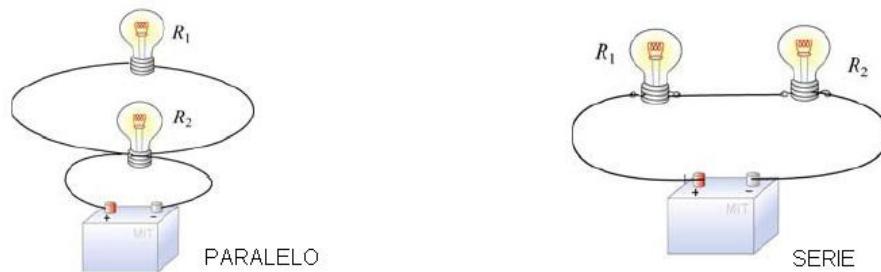
Esta es precisamente la potencia suministrada por la batería. Usando que $\Delta V = IR$, se puede reescribir como

$$P = I^2 R = \frac{(\Delta V)^2}{R}$$

Los circuitos eléctricos conectan fuentes de poder a cargas como resistencias, motores, lámparas, etc. La conexión entre la fuente y la carga se hace soldando con cables conductores, también llamados nodos. Las distintas partes de un circuito pueden estar en serie o en

paralelo, como ya se vió en el caso de los capacitores.

Dos elementos se dicen estar en paralelo cuando son conectados a la misma diferencia de potencial.



Por otro lado, cuando los elementos son conectados uno seguido de otro, tal que la corriente pasa a través de cada elemento sin otros caminos de por medio, los elementos están en serie.

Se pueden tener circuitos cerrados, a través de los cuales fluye corriente, o bien circuitos

abiertos en donde no existen corrientes. Usualmente por accidente, los cables pueden entrar en contacto, causando un corto circuito, esto es, gran parte de la corriente fluirá a través del corto circuito, mientras que una fracción muy pequeña fluirá a través de la carga.

Esto podría quemar un equipo eléctrico como un transformador. Para prevenir el daño, un fusible se conecta en serie. Cuando hay un corto circuito, el fusible aisla la carga del resto del circuito.

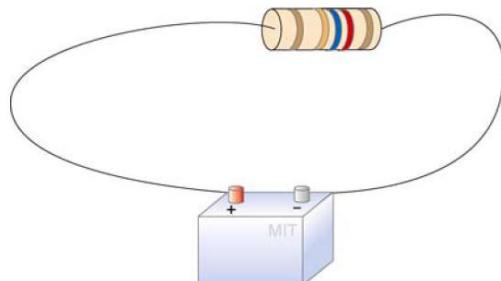
En los circuitos eléctricos, un punto (o un nodo en común) se escoge como tierra. A este punto se le asigna arbitrariamente un voltaje, usualmente cero, y el voltaje V en cualquier otro punto del circuito está definido como la diferencia de potencial entre el punto y la tierra.

Fuerza Electromotriz

Vimos que energía eléctrica debe ser suministrada para mantener una corriente constante en un circuito cerrado. La fuente de energía es llamada comúnmente como la fuerza electromotriz, o f.e.m (ε). Las baterías son ejemplos de fuentes de f.e.m. Se pueden pensar como bombas que mueven cargas desde potenciales bajos a potenciales más altos. Matemáticamente la f.e.m se define como

$$\varepsilon = \frac{dW}{dq} \quad (11.1)$$

Que corresponde al trabajo hecho para mover una unidad de carga en la dirección del potencial más alto. La unidad SI para ε es el volt (V). Considere un circuito simple que consiste en una batería como fuente de f.e.m y una resistencia R , como se muestra en la figura

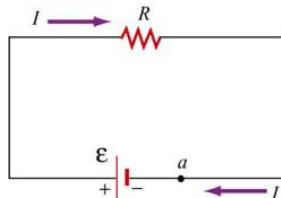


Asumiendo que la batería no posee resistencia interna, la diferencia de potencial ΔV entre los terminales positivo y negativo de la batería es igual a la fem ε . Para establecer una corriente

alrededor del circuito, la batería efectúa un proceso de descarga que convierte energía química en una f.e.m. La corriente I se puede encontrar notando que no hay un trabajo neto al mover una carga q a través de un camino cerrado debido a la naturaleza conservativa de la fuerza electrostática.

$$W = -q \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$$

Sea a el punto de partida



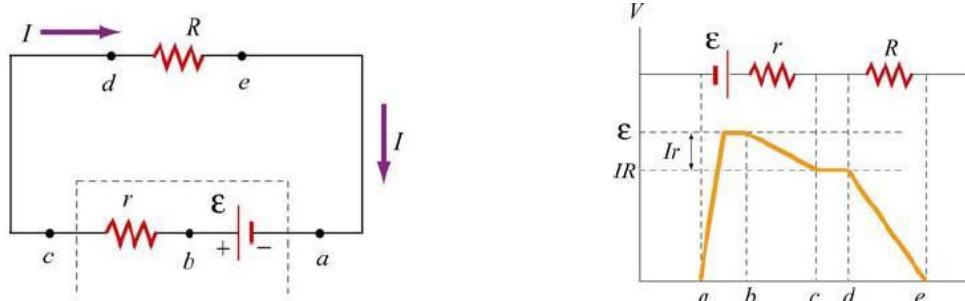
Cuando se atraviesa desde el terminal negativo al positivo, el potencial aumenta en ε . Por otro lado, cuando atravesamos la resistencia, el potencial decrece una cantidad IR , y la energía potencial se convierte en energía térmica en la resistencia. Asumiendo que los cables conectores no poseen resistencias, a través de un camino cerrado, la diferencia de potencial neta es cero

$$\varepsilon - IR = 0$$

Lo que implica

$$I = \frac{\varepsilon}{R}$$

De todas formas, una batería real siempre posee una resistencia interna r



Ahora la diferencia de potencial a través de la batería es

$$\Delta V = \varepsilon - Ir$$

Ya que no hay una diferencia de potencial neta a través de un camino cerrado, tenemos

$$\varepsilon - Ir - IR = 0$$

O bien

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r}$$

De la figura de la derecha vemos el cambio de potencial mientras atravesamos el circuito en el sentido del reloj. Notar que la mayor diferencia de potencial está inmediatamente después de la

batería. El voltaje cae a medida que se atraviesa cada resistencia. Notar también que el voltaje es constante en los cables. Esto se debe a que los cables poseen resistencias extremadamente pequeñas comparadas con las resistencias del circuito.

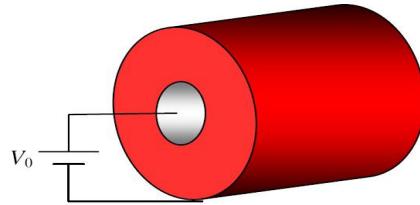
Para una fuente de f.e.m ε , la potencia a la cual la energía se entrega es

$$P = I\varepsilon = I(IR + Ir) = I^2R + I^2r$$

Es decir, la potencia de la fuente es igual a la suma de la potencia disipada en ambas resistencias, la interna y la de carga. Esto es necesario debido a la conservación de la energía.

Problema

El espacio entre dos circuitos conductores de largo L y radios a y b ($b > a$), está lleno de material de conductividad σ . Calcule la intensidad de la corriente por unidad de longitud y la resistencia, cuando la diferencia de potencial entre los conductores es V_0 .



Solución

La diferencia de potencial será responsable de un movimiento de cargas a través del material conductor que se encuentra entre los conductores externos. La conservación de la carga implica

$$\frac{\partial \rho(\vec{x})}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{x}) = 0$$

Para corrientes estacionarias

$$\frac{\partial \rho(\vec{x})}{\partial t} = 0 \rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{x}) = 0$$

Si el medio es Ohmico, $\vec{J}(\vec{x}) = \sigma \vec{E}(\vec{x})$

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{\sigma} \vec{E}(\vec{x}) \right) = 0$$

Si el medio además es homogéneo

$$\frac{1}{\sigma} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = 0 \rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = 0$$

Finalmente

$$\vec{\nabla}^2 \phi = 0$$

Y entonces el potencial satisface la ecuación de Laplace en la región $a < r < b$. La solución en coordenadas cilíndricas (suponiendo que ése depende únicamente de la coordenada radial r) es

$$\phi(r) = A \ln r + B$$

Imponiendo la condición $\phi(a) - \phi(b) = V_0$

$$A = V_0 \ln \frac{b}{a}$$

Así, se obtiene el campo eléctrico

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla} \phi(\vec{x})$$

$$\vec{E}(\vec{x}) = V_0 \ln \frac{b}{a} \frac{1}{r} \hat{r}$$

Utilizando la ley de Ohm, se obtiene la densidad de corriente

$$\vec{J}(\vec{x}) = \sigma \vec{E}(\vec{x}) = \sigma V_0 \ln \frac{b}{ar} \hat{r}$$

La corriente por unidad de largo que fluye a través de los conductores se puede obtener como la integral de flujo de la densidad de corriente sobre una superficie cilíndrica de radio r (y largo unitario). Esta integral resulta simple pues la densidad de corriente tiene magnitud constante a lo largo de esta superficie, y su dirección coincide en todo punto con la normal. El diferencial de área sobre el cilindro es $da = dr d\varphi dz$

$$I = \iint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{J}(\vec{x}) = \int_0^1 dz \int_0^{2\pi} d\varphi r \frac{\sigma V_0}{r} \ln \frac{b}{a}$$

$$I = 2\pi\sigma V_0 \ln \frac{b}{a} [A/m]$$

Así, la resistencia por unidad de longitud es

$$r = \frac{V_0}{I} = \frac{\ln(b/a)}{2\pi\sigma}$$

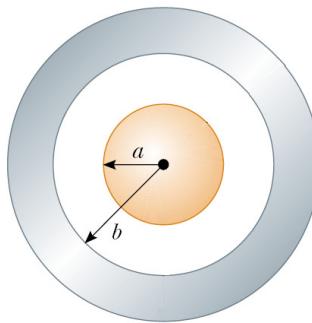
y la resistencia total es

$$R = rL = \frac{L \ln(b/a)}{2\pi\sigma}$$

Problema

Dos esferas metálicas concéntricas, de radios a y b están separadas por un material conductor de conductividad σ constante

- Si estas esferas son mantenidas a una diferencia de potencial V constante, encuentre la corriente que va de una a la otra
- Encuentre la resistencia entre las esferas
- Observe que en este caso se cumple $R = \epsilon_0 C$, donde C es la capacidad. Demuestre esta fórmula para dos conductores cualquiera, separados por un material conductor de conductividad σ constante



Solución

- Al establecer una diferencia de potencial sobre los conductores

$$V = \phi(a) - \phi(b)$$

se inducirán cargas Q y $-Q$ sobre las superficies $r = a$ y $r = b$, respectivamente. El campo eléctrico en la región interior se puede determinar a partir de la ley de Gauss debido a la simetría esférica que éste debe tener

$$\oint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Si S se escoge como una superficie esférica de radio r , se tiene

$$E(r)4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}, a < r < b$$

Por otro lado

$$V = \int_a^b d\vec{x} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \int_a^b \frac{dr Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

donde se ha utilizado un camino radial para evaluar la integral de línea

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

Entonces

$$Q = \frac{V4\pi\epsilon_0}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$$

luego, para $a < r < b$

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{Vab}{(b-a)r^2}\hat{r}$$

Debido a que la zona $a < r < b$ está llena con un material conductor, el campo eléctrico dará origen a un movimiento de cargas (corriente), en donde la densidad está relacionada con el campo \vec{E} mediante la ley de Ohm

$$\vec{J}(\vec{x}) = \sigma \vec{E}(\vec{x}) = \frac{V\sigma ab}{(b-a)r^2}\hat{r}$$

La corriente que fluye entre los conductores se puede obtener integrando sobre una superficie esférica S de radio r , $a < r < b$

$$I = \oint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{J}(\vec{x}) = 4\pi r^2 J(r)$$

Luego

$$I = \frac{4\pi\sigma Vab}{(b-a)}$$

b) La resistencia está dada por

$$R = \frac{V}{I}$$

$$R = \frac{1}{4\pi\sigma} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

c) La capacidad de un condensador esférico es

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{4\pi\epsilon_0 ab}{b-a}$$

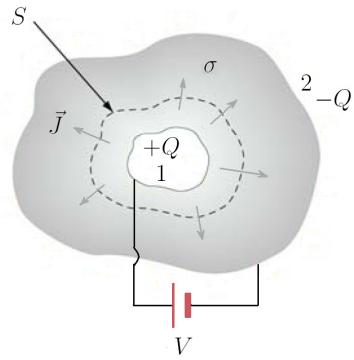
Evaluando

$$\frac{\epsilon_0}{\sigma C} = \frac{\epsilon_0}{\sigma} \frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}{4\pi\epsilon_0} = \frac{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)}{4\pi\sigma}$$

y entonces se tiene

$$\frac{\epsilon_0}{\sigma C} = R$$

Veamos que esto se cumple en el caso general. Sean 1 y 2 dos conductores cualesquiera , separados por un material de conductividad σ



Se tendrá un flujo de corriente dado por

$$I = \iint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{J}(\vec{x})$$

por ley de Ohm

$$\vec{J}(\vec{x}) = \sigma \vec{E}(\vec{x})$$

$$I = \sigma \iint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{E}(\vec{x})$$

por ley de Gauss

$$I = \sigma \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Por otro lado, si C es la capacidad del sistema, se cumple

$$Q = CV$$

entonces

$$I = \frac{\sigma CV}{\epsilon_0}$$

$$V = \frac{\epsilon_0}{\sigma C} I$$

Finalmente se demuestra la relación general

$$R = \frac{\epsilon_0}{\sigma C}$$

Problema

Consideré un conductor perfecto, inicialmente con carga Q_0 , y completamente rodeado por un medio uniforme de conductividad σ y constante dieléctrica ϵ

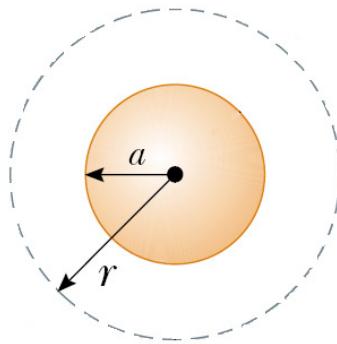
a) Si el conductor es una esfera de radio a , muestre que su carga como función del tiempo es

$$Q(t) = Q_0 e^{-\sigma t / \epsilon}$$

b) Muestre que el resultado anterior es válido independientemente de la forma del conductor

Solución

a) Sea $Q(t)$ la carga sobre la superficie esférica al instante t . Ésta generará un campo eléctrico esféricamente simétrico



$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \frac{Q(t)}{4\pi\epsilon r^2} \hat{r}$$

al ser el medio circundante un conductor de conductividad σ , se tendrá una densidad de corriente como respuesta a este campo

$$\vec{J}(\vec{x}, t) = \sigma \vec{E}(\vec{x}) = \frac{\sigma Q(t)}{4\pi\epsilon r^2} \hat{r}$$

Esta es una corriente que fluye isotrópicamente de forma radial. La corriente se obtiene de integrar $\vec{J}(\vec{x})$ sobre una superficie cerrada que contenga a la esfera conductora, en particular se puede evaluar tomando una esfera concéntrica de radio $r > a$

$$I(t) = \iint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{J}(\vec{x}, t) = \frac{\sigma Q(t)}{\epsilon}$$

Por otro lado, la carga total contenida en el volumen encerrado por S es

$$Q(t) = \iiint_V d^3x \rho(\vec{x}, t)$$

Por la continuidad de la carga

$$\frac{dQ(t)}{dt} = I(t)$$

$$\frac{dQ(t)}{dt} = \frac{\sigma Q(t)}{\epsilon}$$

cuya solución es

$$Q(t) = Q_0 e^{-t\sigma/\epsilon}$$

b) El resultado anterior es independiente de la forma de los conductores. En efecto, sea S una superficie cerrada que contenga completamente al conductor. La corriente que se genera está dada por

$$I = \iint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{J}(\vec{x})$$

Si el medio es ohmico

$$I = \sigma \iint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{E}(\vec{x})$$

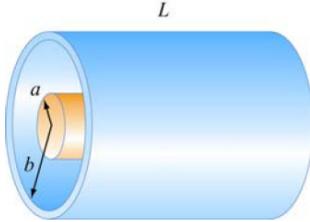
y utilizando la ley de Gauss

$$I = \sigma \frac{Q(t)}{\epsilon} = \frac{dQ(t)}{dt}$$

y se obtiene la misma ecuación diferencial para la carga contenida en el conductor

Problema

Dos cilindros coaxiales (radios a y b) de largo L están separados por un material de conductividad $\sigma(r) = \frac{k}{r}$ donde k es una constante arbitraria y r la distancia al eje (común) de los cilindros. Encuentre la resistencia entre los cilindros. Observe que al ser la conductividad función de la posición, la densidad de carga en el material conductor no es cero y el campo E no varía como $1/r$. Recuerde que una corriente estacionaria I tiene el mismo valor para cualquier superficie cilíndrica



Solución

Supongamos que se establece una diferencia de potencial $\Delta V > 0$ entre los conductores $r = a$ y $r = b$. Usaremos el hecho de que la corriente que fluye entre los cilindros está dada por la integral

$$I = \iint_S dS(\vec{x}) \hat{n}(\vec{x}) \cdot \vec{J}(\vec{x})$$

Donde S es un cilindro concéntrico a los conductores, de radio r y largo L . Además, por simetría cilíndrica, $\vec{J} = J(r)\hat{r}$

$$I = 2\pi r L J(r)$$

luego la densidad de corriente es

$$\vec{J}(\vec{x}) = \frac{I}{2\pi r L} \hat{r}$$

Si $\vec{E} = E(r)\hat{r}$ (por simetría), se tiene por ley de Ohm

$$\vec{J}(\vec{x}) = \sigma(r) \vec{E}(r)$$

luego

$$E(r) = \frac{r}{k} \frac{I}{2\pi r L}$$

con esto, la diferencia de potencial entre los conductores es

$$\Delta V = \int_a^b d\vec{x} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \frac{I}{2\pi L k} (b - a)$$

Entonces

$$R = \frac{\Delta V}{I} = \frac{b - a}{2\pi k L}$$

Problema

Se sabe que la atmósfera tiene una conductividad (causada principalmente por los rayos cósmicos) que depende de la altura de la siguiente manera

$$\sigma(z) = \left(3 + \frac{z^2}{3}\right) 10^{-14} [\Omega]^{-1}$$

donde z es la distancia vertical sobre el suelo. Se ha encontrado además, un campo eléctrico vertical, dirigido hacia el suelo, que en la superficie de la tierra vale

$$\vec{E} = -100\hat{k}$$

Suponga el siguiente modelo de la atmósfera: imagine una capa conductora paralela a la superficie; situada a una distancia de 15 km sobre el nivel del suelo. Entre esta capa y la tierra se encuentra la atmósfera, con la conductividad y el campo eléctrico indicados arriba. El radio de la tierra es $R_T = 6400$ km.

- a) Calcule el campo eléctrico y el potencial en función de la altura z
- b) Calcule la corriente total que fluye entre la capa superior conductora y la tierra

Solución

- a) Sabemos que en corriente continua (o estacionaria) se cumple que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{x}) = 0$$

Además, se sabe que la dirección del campo eléctrico es según z y, por razones de simetría no debe depender de las coordenadas x e y . Eso se traduce en

$$\vec{\nabla} \cdot (\sigma(z)E(z)) = \frac{d}{dz}(\sigma(z)E(z)) = 0$$

$$\sigma(z)E(z) = A$$

El valor de esta constante se puede obtener evaluando en $z=0$

$$A = \sigma(0)E(0) = -3 \times 10^{-12}$$

De esta forma, el campo eléctrico en la atmósfera es

$$\vec{E}(\vec{x}) = -3 \times 10^{-12} \frac{1}{(3 + \frac{z^2}{3})10^{-14}} \hat{k} = \frac{-300}{3 + \frac{z^2}{3}} \hat{k}$$

Fijando el valor del potencial en la tierra como 0, entonces

$$\phi(z) = \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} d\vec{x} \cdot \vec{E}(\vec{x})$$

donde \vec{x}_2 es cualquier punto a altura z , y \vec{x}_1 es un punto sobre la superficie. Escogiendo una curva vertical, se tiene

$$\phi(z) = \int_0^z dz \frac{300}{3 + \frac{z^2}{3}} = 900 \int_0^z dz \left(\frac{1}{3 + z^2} \right) = 900 \operatorname{Arctg} \left(\frac{z}{3} \right)$$

b) La densidad de corriente se obtiene usando la ley de Ohm, esto es

$$\vec{J}(\vec{x}) = \sigma(z)\vec{E}(\vec{x}) = -\left(3 + \frac{z^2}{3}\right)10^{-14} \frac{300}{3 + \frac{z^2}{3}} \hat{k} = -3 \times 10^{-12} [A/m^2] \hat{k}$$

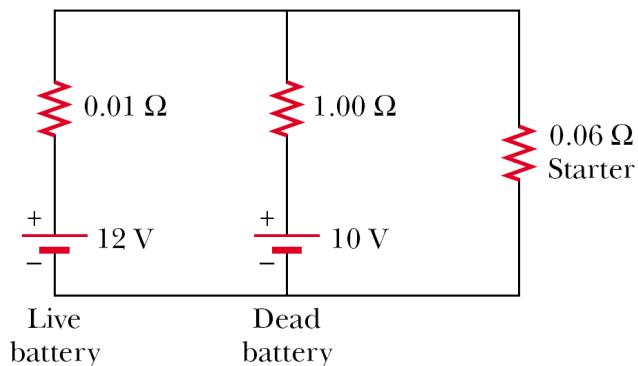
La corriente será

$$I = \iint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{J}(\vec{x}') = -3 \times 10^{-12} S = -3 * 10^{-12} 4\pi R_T^2$$

$$I = 122,88 [A]$$

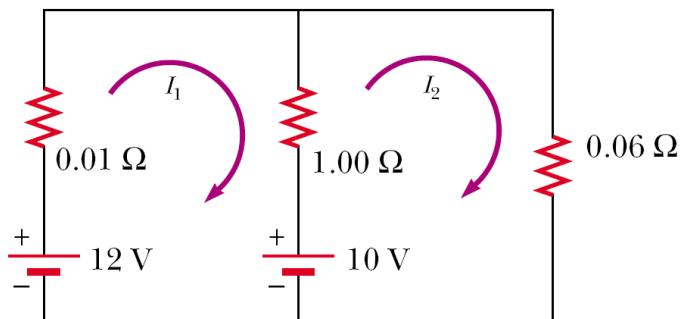
Problema

Una batería descargada se carga conectándola a la batería cargada de otro automóvil mediante cables para corriente. Determine la corriente del motor de arranque y en la batería descargada



Solución

Se utiliza la Ley de Voltajes de Kirchhoff (LVK) para cada malla, esto es



Para la malla 1

$$-12 + 0,01I_1 + 1(I_1 - I_2) + 10 = 0$$

y en la malla 2

$$-10 + 1(I_2 - I_1) + 0,06I_2 = 0$$

De la primera ecuación se obtiene

$$I_2 = 1,01I_1 - 2$$

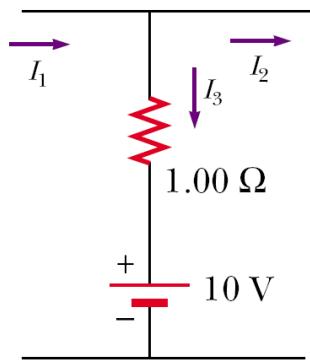
Reemplazando

$$0,0706I_1 - 2,02 = 10 \rightarrow I_1 = 170,25A$$

Con esto

$$I_2 = 1,01 * I_1 - 2 = 169,95A$$

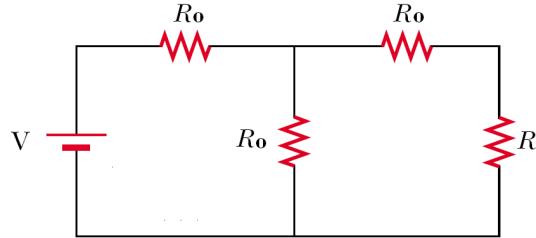
I_2 es la corriente a través del motor de arranque, mientras que la corriente a través de la batería descargada será, según nuestra convención



$$I_3 = I_1 - I_2 = 170,25 - 169,95 = 0,2975A$$

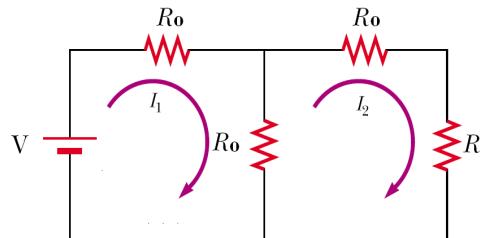
Problema

En el circuito de la figura la batería tiene una FEM de valor V . Encuentre la resistencia R que debe colocarse entre los terminales A y B para que en ella se disipe la máxima potencia



Solución

Resolviendo el problema con mallas



Para la malla 1

$$-V + I_1 R_0 + R_0(I_1 - I_2) = 0$$

Para la malla 2

$$R_0(I_2 - I_1) + R_0 I_2 + R I_2$$

De la primera ecuación se obtiene

$$I_1 = \frac{V + I_2 R_0}{2R_0}$$

Reemplazando en la ecuación de la malla 2

$$(2R_0 + R)I_2 = R_0 I_1 = R_0 \frac{V + I_2 R_0}{2R_0}$$

$$(3R_0 + 2R)I_2 = V \rightarrow I_2 = \frac{V}{3R_0 + 2R}$$

Teniendo la corriente que pasa por la resistencia R , la potencia que ésta consume se puede obtener como

$$P = V_R I_R = (I_R R) I_R = I_R^2 R$$

Así

$$P = \frac{V^2}{(3R_0 + 2R)^2} R$$

Para encontrar el valor de R que maximice esta potencia consumida, bastará con resolver

$$\frac{dP(R)}{dR} = 0$$

Esto es

$$\frac{dP}{dR} = \frac{V^2}{(3R_0 + 2R)^2} - \frac{4RV^2}{(3R_0 + 2R)^3} = \frac{3V^2R_0 + 2V^2R - 4RV^2}{(3R_0 + 2R)^3}$$

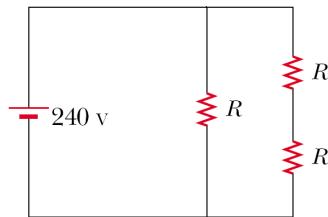
$$\frac{3V^2R_0 - 2V^2R}{(3R_0 + 2R)^3} = 0 \rightarrow 3V^2R_0 - 2V^2R = 0$$

Así, la resistencia R que maximiza la potencia consumida es

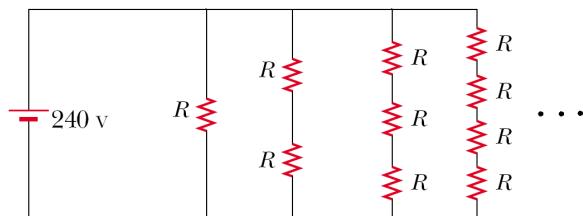
$$R = \frac{3}{2}R_0$$

Problema

La fuente $V_1 = 240$ (V) está conectada a tres resistencias iguales según la figura

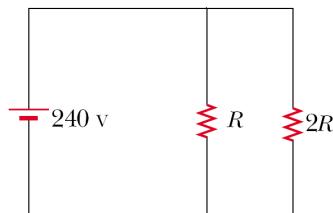


- Determine R si la fuente de voltaje entrega 1920(W) al conjunto de resistencias
- Si al circuito en paralelo, se le agregan más resistencias en paralelo, siguiendo una secuencia de $3R$ en serie, $4R$ en serie, hasta llegar a NR en serie, calcule la potencia suministrada por la fuente de voltaje cuando N tiende a Infinito



Solución

- El circuito se puede reducir considerando que hay 2 resistencias en serie, cuya resistencia equivalente será la suma de ambas, así, el circuito queda



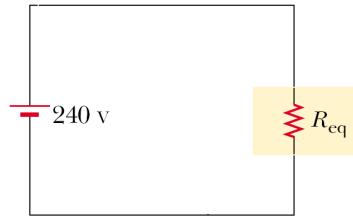
Estas 2 resistencias ahora se encuentran en paralelo, por lo que se puede obtener un R_{eq} de todo el circuito

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{2R} = \frac{3}{2R}$$

Con lo que

$$R_{eq} = \frac{2}{3}R$$

Con esto, el circuito equivale a



La potencia generada por este circuito será la misma que consume R_{eq} , esto es

$$P = V_{R_{eq}} I_{R_{eq}} = V I_{R_{eq}} = V \left(\frac{V}{R_{eq}} \right) = 1920W$$

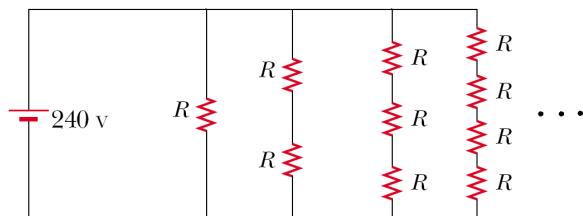
De aquí se obtiene

$$R_{eq} = \frac{V^2}{P} = \frac{240^2}{1920} = 30\Omega$$

Finalmente se obtiene R usando que

$$R_{eq} = \frac{2}{3}R \rightarrow R = \frac{3}{2}R_{eq} = 45\Omega$$

b)



En este caso, se puede obtener una resistencia equivalente según

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{2R} + \dots + \frac{1}{NR}$$

Así, se puede obtener la potencia que debe entregar la fuente para un cierto valor de N

$$P_N = \frac{V^2}{R_{eq}} = V^2 \sum_{k=1}^N \frac{1}{kR}$$

Así, para obtener la potencia cuando N tiende a infinito, bastará con obtener el siguiente límite (si existe)

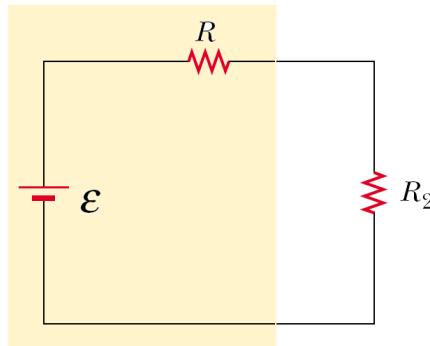
$$P_{N \rightarrow \infty} = \lim_{N \rightarrow \infty} P_N = V^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{kR}$$

Pero esta serie diverge, es decir, la potencia necesaria sería infinita. Esto es lógico ya que la fuente tendría que alimentar un número infinito de resistencias.

Problema

Una batería tiene una f.e.m ε y una resistencia interna R . Una resistencia de carga R_2 se conecta a los terminales de la batería.

- Determine el valor de R_2 tal que la diferencia de potencial aplicada a los terminales sea máxima.
- Determine el valor de R_2 para obtener una corriente máxima en el circuito.
- Determine el valor de R_2 para que la potencia consumida por ésta sea la máxima posible



Solución

- Primero determinamos la corriente a través del circuito

$$-\varepsilon + IR + IR_2 = 0 \rightarrow I = \frac{\varepsilon}{R + R_2}$$

Así, la diferencia de potencial entre los extremos de la batería es

$$V = IR_2 = \frac{R_2\varepsilon}{R + R_2} = \frac{\varepsilon}{1 + \frac{R}{R_2}}$$

La diferencia de potencial entre los terminales será máxima cuando $R_2 \rightarrow \infty$ y valdrá ε , que es el valor de la fem.

- Teníamos que

$$I = \frac{\varepsilon}{R + R_2}$$

Luego, la corriente será máxima si $R_2 = 0$, y equivale a cortocircuitar los terminales de la batería

- La potencia consumida por R_2 está dada por

$$P = VI = \frac{R_2\varepsilon}{R + R_2} \cdot \frac{\varepsilon}{R + R_2} = \frac{R_2\varepsilon^2}{(R + R_2)^2}$$

Para encontrar el valor de R_2 que maximiza esta potencia resolvemos

$$\frac{dP}{dR_2} = \frac{\varepsilon^2(R + R_2)^2 - 2(R + R_2)R_2\varepsilon^2}{(R + R_2)^4} = 0$$

Así

$$(R + R_2)^2 - 2(R + R_2)R_2 = 0 \rightarrow R_2 + R - 2R_2 = 0$$

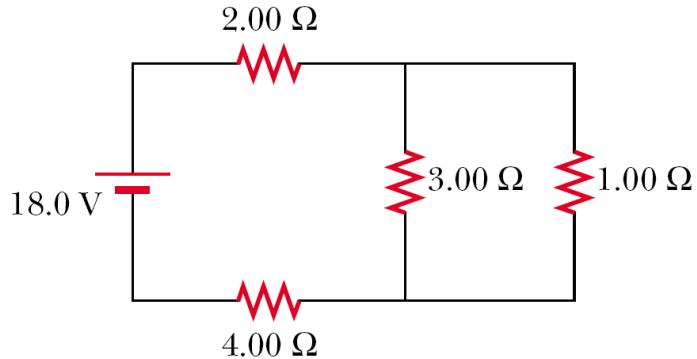
Luego, la potencia será máxima si

$$R_2 = R$$

es decir, se debe colocar una resistencia igual a la resistencia interna de la batería

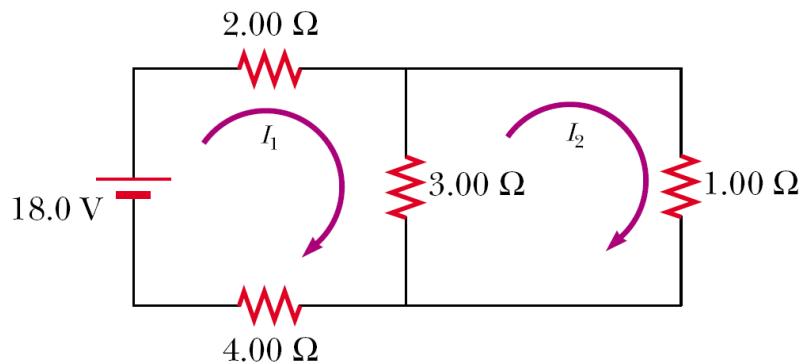
Problema

Calcule la potencia entregada a cada resistencia en el circuito de la figura



Solución

Se resuelve el circuito mediante LVK



Para la malla 1

$$-18 + 2I_1 + 3(I_1 - I_2) + 4I_1 = 0 \rightarrow 9I_1 - 3I_2 = 18$$

en la malla 2

$$3(I_2 - I_1) + 1I_2 = 0 \rightarrow 4I_2 = 3I_1$$

Resolviendo

$$9I_1 - \frac{9}{4}I_1 = 18 \rightarrow I_1 = 2,6A$$

$$I_2 = \frac{3}{4}I_1 = 2A$$

Teniendo las corrientes que circulan por el circuito, podemos obtener la potencia que consume cada resistencia, usando que $P = VI = I^2R$

$$P_{2\Omega} = 2I_1^2 = 13,52W$$

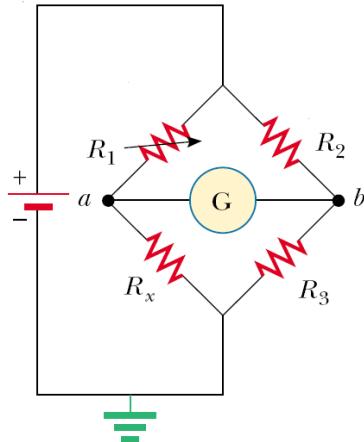
$$P_{4\Omega} = 4I_1^2 = 27,04W$$

$$P_{3\Omega} = 3(I_1 - I_2)^2 = 1,08W$$

$$P_{1\Omega} = 1I_2^2 = 4W$$

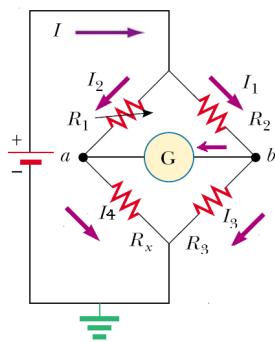
Problema

El circuito de la figura es llamado Puente de Wheatstone y se usa para calibrar resistencias. El dispositivo está formado por 3 resistencias, de las cuales 2 son ajustables, y un galvanómetro (dispositivo que sirve para medir corrientes). Para realizar la medida, se ajustan las resistencias variables R_1 y R_2 hasta que el galvanómetro marque cero. Exprese el valor de R_x en función de las otras 3 resistencias. Modele el galvanómetro como una resistencia R_G .



Solución

Definamos las corrientes que circulan por el circuito



Se obtienen las relaciones inmediatas

$$I = I_1 + I_2$$

$$I_1 = I_3 + I_g$$

$$I = I_4 + I_3$$

$$I_4 = I_2 + I_g$$

Cuando la corriente que pasa por el galvanómetro es nula, se tiene

$$I_1 = I_3$$

$$I_2 = I_4$$

Además, utilizando la ley de voltajes de Kirchhoff

$$-V + I_2 R_2 + I_4 R_x = 0$$

$$-V + I_1 R_1 + I_3 R_3 = 0$$

$$I_1R_1 - I_2R_2 = 0$$

De esta última ecuación, se obtiene

$$I_2 = I_1 \frac{R_1}{R_2}$$

Además, igualando el valor de V

$$I_2R_2 + I_4R_x = I_1R_1 + I_3R_3$$

$$I_2R_2 + I_2R_x = I_1R_1 + I_1R_3$$

$$I_1 \frac{R_1}{R_2} (R_2 + R_x) = I_1(R_1 + R_3)$$

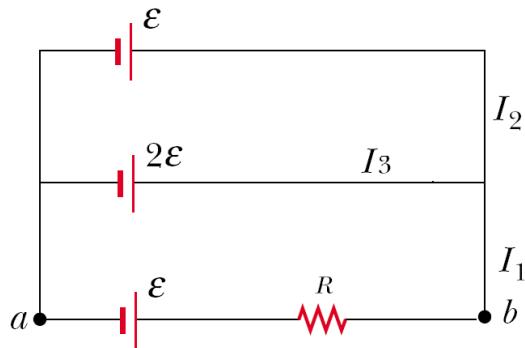
$$R_x = \frac{R_2}{R_1}(R_1 + R_3) - R_2 = \frac{R_2R_3}{R_1}$$

Finalmente

$$R_x = \frac{R_2R_3}{R_1}$$

Problema

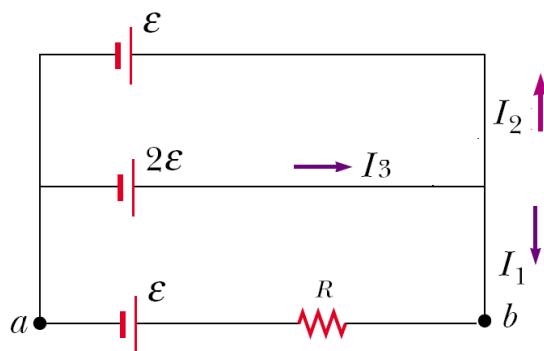
En el circuito de la figura, la batería de más arriba y la de más abajo tienen la misma f.e.m igual a ε . La del medio tiene 2ε . Las resistencias interiores de las baterías son iguales a r . Existe una sola resistencia exterior R (ubicada como se ve en el dibujo). Designe las corrientes por I_1 , I_2 , I_3 , como se ve en el dibujo



- Calcule las tres corrientes en valor y signo.
- Suponga que el punto a del circuito está conectado a tierra y calcule en tal caso el potencial que tiene el punto b

Solución

Definimos un sentido arbitrario para las corrientes I_1 , I_2 e I_3 , como se ve en la figura



Resolvemos el circuito con la ley de voltajes de Kirchhoff (LVK). La ecuación para la malla 2 es

$$\varepsilon + rI_2 - 2\varepsilon + (I_2 + I_1)r = 0$$

$$-\varepsilon + 2rI_2 + rI_1 = 0$$

Para la malla 1

$$-2\varepsilon + (I_1 + I_2)r + I_1R + \varepsilon + I_1r = 0$$

$$-\varepsilon + I_2r + I_1(R + 2r) = 0$$

De la primera ecuación obtenemos

$$I_2 = \frac{\varepsilon - rI_1}{2r}$$

Así

$$-\varepsilon + \frac{\varepsilon - rI_1}{2} + I_1(R + 2r) = 0$$

$$-2\varepsilon + \varepsilon - rI_1 + 2I_1(R + 2r) = 0$$

Finalmente

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{3r + 2R}$$

y

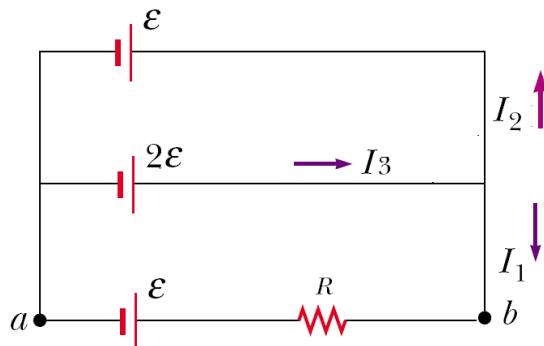
$$I_2 = \frac{\varepsilon}{2r} - \frac{r\varepsilon}{2r(3r + 2R)} = \frac{3r\varepsilon + 2R\varepsilon - r\varepsilon}{2r(3r + 2R)} = \frac{\varepsilon(r + R)}{r(3r + 2R)}$$

Por ultimo, $I_3 = I_1 + I_2$

$$I_3 = \frac{\varepsilon(r + R)}{r(3r + 2R)} + \frac{\varepsilon}{3r + 2R} = \frac{\varepsilon(2r + R)}{r(3r + 2R)}$$

Como los valores obtenidos son todos positivos, los sentidos de las corrientes supuestos inicialmente son todos correctos.

b)



De la figura es claro que

$$V_B - V_A = I_1R + \varepsilon + I_1r = I_1(R + r) + \varepsilon$$

Como A está conectado a tierra, $V_A = 0$

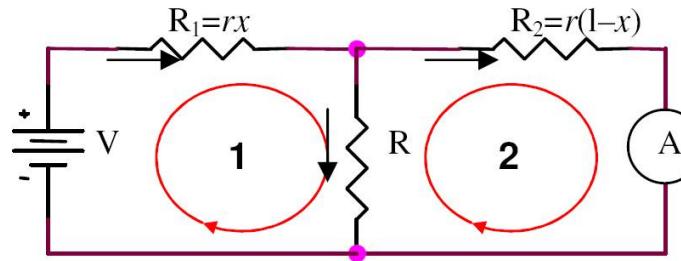
$$V_B = \varepsilon + (R + r)\frac{\varepsilon}{3r + 2R} = \varepsilon + \frac{\varepsilon(R + 2r)}{2R + 3r}$$

Problema

Consideré la línea telegráfica de L metros de longitud, y de resistencia por unidad de largo $r[\Omega/m]$. Esta línea tiene una falla de resistencia R en un punto. Demuestre que la corriente que lee un amperímetro ideal (de resistencia interna 0) conectado a un extremo de la línea es mínima cuando la falla se encuentra en el medio de la distancia entre el transmisor y el receptor.

Solución

Supongamos que la falla está a una distancia x de uno de los extremos. El sistema queda modelado por el siguiente circuito



Sea I_1 la corriente por R_1 , I_2 la corriente por R_2 e I la corriente por R . Es claro que

$$I = I_1 - I_2$$

Ahora, las ecuaciones de malla son las siguientes

$$-V + R_1 I_1 + R(I_1 - I_2) = -V + rxI_1 + R(I_1 - I_2) = 0$$

$$R_2 I_2 + R(I_2 - I_1) = r(l - x)I_2 + R(I_2 - I_1) = 0$$

De la primera ecuación

$$I_1 = \frac{V + RI_2}{R + rx}$$

Reemplazando esto último

$$r(l - x)I_2 + RI_2 - R \frac{V + RI_2}{R + rx} = 0$$

$$RrlI_2 - RxrI_2 + r^2lxI_2 - x^2r^2I_2 + R^2I_2 + RrxI_2 - RV - R^2I_2 = 0$$

$$I_2 = \frac{RV}{Rrl + r^2lx - x^2r^2}$$

$$I_2 = \frac{RV}{Rrl + r^2x(l - x)}$$

Ahora veamos cuando esta corriente es mínima. Esto equivale a encontrar el x tal que el denominador sea máximo

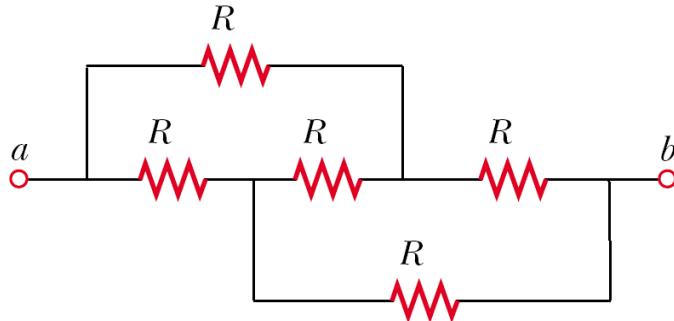
$$\frac{d}{dx} (Rrl + r^2xl - lr^2x^2) = r^2l - 2lr^2x = 0$$

$$r^2x = 2r^2l \rightarrow x = \frac{l}{2}$$

Es decir, la corriente medida es mínima cuando la falla se encuentra en la mitad de la línea

Problema

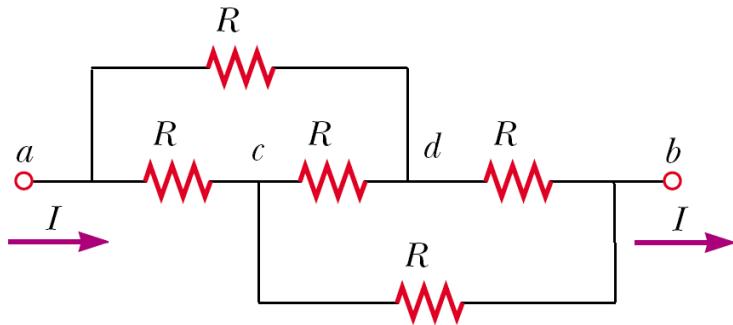
Obtener la resistencia equivalente entre A y B aplicando las leyes de Kirchhoff



Solución

La resistencia equivalente entre a y b se puede obtener al ver la relación entre el voltaje aplicado y la corriente que circula por el circuito. Se tiene

$$V_A - V_B = IR_{eq}$$



LCK para el nodo A

$$I = \frac{(V_A - V_D)}{R} + \frac{(V_A - V_C)}{R} \rightarrow IR = 2V_A - V_C - V_D$$

LCK para el nodo C

$$\frac{V_A - V_C}{R} = \frac{V_C - V_D}{R} + \frac{V_C - V_B}{R} \rightarrow V_A = 3V_C - V_B - V_D$$

Para el nodo D

$$\frac{V_C - V_D}{R} + \frac{V_A - V_D}{R} = \frac{V_D - V_B}{R} \rightarrow 3V_D - V_A - V_C = V_B$$

Y para el nodo B

$$\frac{V_D - V_B}{R} + \frac{V_C - V_B}{R} = I \rightarrow IR = V_C + V_D - 2V_B$$

Resolviendo

$$\begin{aligned}V_B - V_A &= 3V_D - V_A - V_C - 3V_C + V_B + V_D \\V_B - V_A &= 4V_D - V_A - 4V_C + V_B \rightarrow V_D = V_C\end{aligned}$$

Es decir, la corriente entre D y C es cero. Así, el sistema queda

$$IR = 2V_A - 2V_C$$

$$V_A = 2V_C - V_B$$

$$IR = 2V_C - 2V_B$$

Luego

$$\frac{V_A + V_B}{2} = V_C$$

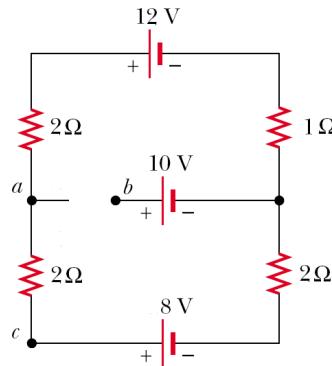
Así

$$IR = V_A - V_B = IR_{eq}$$

Con lo que la resistencia equivalente es R

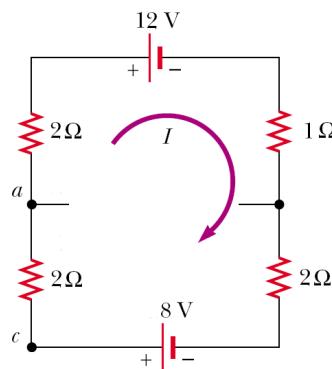
Problema

Calcular la diferencia de potencial entre los puntos a y b . Todas las fem tienen una resistencia interna de 1Ω



Solución

Para resolver este problema basta con notar que solo fluye corriente por la malla exterior, ya que a y b forman un circuito abierto. Aplicando LVK alrededor del circuito se obtiene



$$2I + 2I + 12 + I + I + 2I - 8 + I = 0 \rightarrow 9I = -4$$

$$I = -4/9A$$

Redefinamos I con su sentido correcto, es decir, el contrario al que habíamos supuesto. Así, $I = 4/9$ en el sentido contrareloj.

Para obtener los potenciales en a y b , nos damos como referencia el punto c . Con esto

$$V_a = 2I + V_c = 8/9 + V_c$$

Mientras que

$$V_c - 8 - I - 2I + 10 = V_b$$

$$V_b = V_c - 8 - \frac{12}{9} + 10 = V_c + 0,667$$

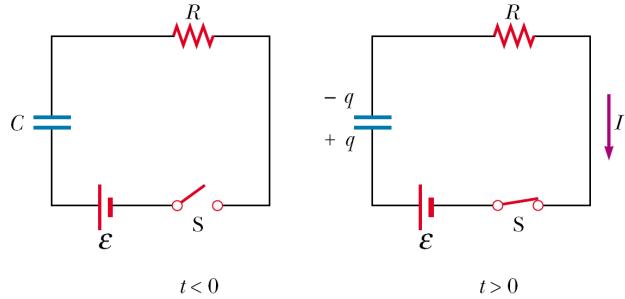
Notar que no existe una caída de potencial a través de la resistencia de 3Ω ya que por ella no pasa corriente. Finalmente

$$V_b - V_a = 0,667 - 0,888 = -0,221V$$

11.5. Circuitos RC

11.5.1. Carga de un condensador

Considere el circuito de la figura. El condensador está conectado a una fuente de voltaje DC (corriente continua) de fem ε . En $t = 0$ el interruptor S se cierra. Supongamos además que el condensador inicialmente está descargado, $q(t = 0) = 0$



En particular, para $t < 0$, no hay voltaje entre los terminales del condensador, así que éste actúa como un corto circuito. Cuando $t = 0$, el interruptor se cierra y la corriente comienza a fluir acorde con

$$I_0 = \frac{\varepsilon}{R}$$

En este instante, la diferencia de potencial entre los terminales de la batería es la misma que la diferencia de potencial a través de la resistencia. Esto inicia la carga del condensador. Mientras éste comienza a cargarse, el voltaje a través de él aumenta en el tiempo

$$V_C(t) = \frac{q(t)}{C}$$

Para la malla utilizamos la ley de voltajes para un circuito cerrado, obteniendo

$$-\varepsilon + V_C(t) + I(t)R = 0$$

$$-\varepsilon + \frac{q}{C} + \frac{dq}{dt}R = 0$$

Debido a que I debe ser la misma en todas las partes del circuito, la corriente a través de la resistencia R es igual a la tasa de incremento de carga en las placas del condensador. El flujo de corriente en el circuito irá decreciendo debido a que la carga presente en el capacitor hace cada vez más difícil poner más carga en él. Una vez que la carga del condensador alcanza su máximo valor Q , la corriente en el circuito caerá a cero. Esto es evidente al reescribir la ecuación de malla como

$$I(t)R = \varepsilon - V_C(t)$$

Así, el capacitor cargado satisface una ecuación diferencial de primer orden que relaciona la tasa de cambio de carga con la carga en el condensador

$$\frac{dq}{dt} = \frac{1}{R} \left(\varepsilon - \frac{q}{C} \right)$$

Esta ecuación la podemos resolver con el método de separación de variables

$$\frac{dq}{\varepsilon - \frac{q}{C}} = \frac{1}{R} dt \rightarrow \frac{dq}{q - C\varepsilon} = -\frac{1}{RC} dt$$

Ahora podemos integrar para obtener

$$\int_0^q \frac{dq}{\varepsilon - \frac{q}{C}} = -\frac{1}{RC} \int_0^t dt$$

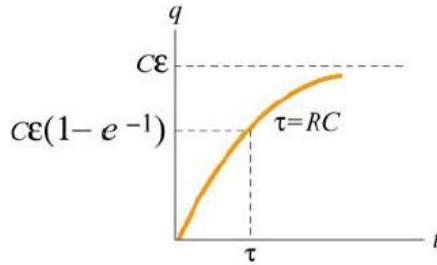
Lo que nos lleva a

$$\ln \left(\frac{q - C\varepsilon}{-C\varepsilon} \right) = -\frac{t}{RC}$$

Finalmente, se obtiene

$$q(t) = C\varepsilon \left(1 - e^{-t/RC} \right) = Q \left(1 - e^{-t/RC} \right)$$

Donde $Q = C\varepsilon$ es la cantidad máxima de carga almacenada por las placas. La independencia temporal de $q(t)$ se grafica en la figura



Teniendo la carga en el condensador, podemos determinar el voltaje a través de éste

$$V_C(t) = \frac{q(t)}{C} = \varepsilon \left(1 - e^{-t/RC} \right)$$

El gráfico del voltaje como función del tiempo tiene la misma forma que la carga a través del condensador. De la figura, vemos que después de un tiempo suficientemente largo la carga acumulada en el condensador tiende a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = C\varepsilon = Q$$

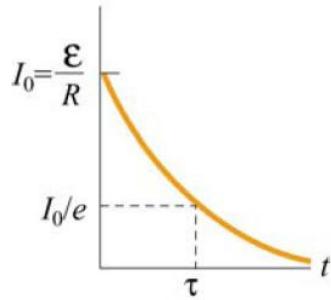
En el límite, el voltaje a través del condensador es igual al voltaje de la fuente y el proceso de carga efectivamente termina

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V_C(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{q(t)}{C} = \frac{Q}{C} = \varepsilon$$

La corriente en el circuito es igual a la razón de cambio de la carga en el condensador

$$I(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{\varepsilon}{R} e^{-t/RC} = I_0 e^{-t/RC}$$

El coeficiente que acompaña a la exponencial es igual a la corriente inicial que fluye a través del circuito cuando el interruptor fue cerrado en $t = 0$. El gráfico de la corriente en función del tiempo es



La corriente en el circuito decrece exponencialmente en el tiempo. Se suele escribir de la siguiente manera

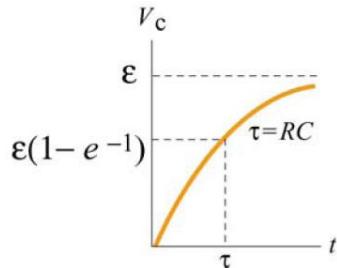
$$I(t) = I_0 e^{-t/\tau}$$

Donde $\tau = RC$ se llama **constante de tiempo**. En efecto, la unidad de τ en SI es el segundo. La constante de tiempo τ es una medida del decaimiento temporal para la función exponencial. Este decaimiento satisface la siguiente propiedad

$$I(t + \tau) = I(t)/e$$

Lo que muestra que después de un tiempo τ la corriente cae por un factor de $e^{-1} = 0,368$, como se ve en el gráfico. Similarmente, el voltaje a través del condensador también se puede expresar en términos de esta constante

$$V_C(t) = \varepsilon (1 - e^{-t/\tau})$$

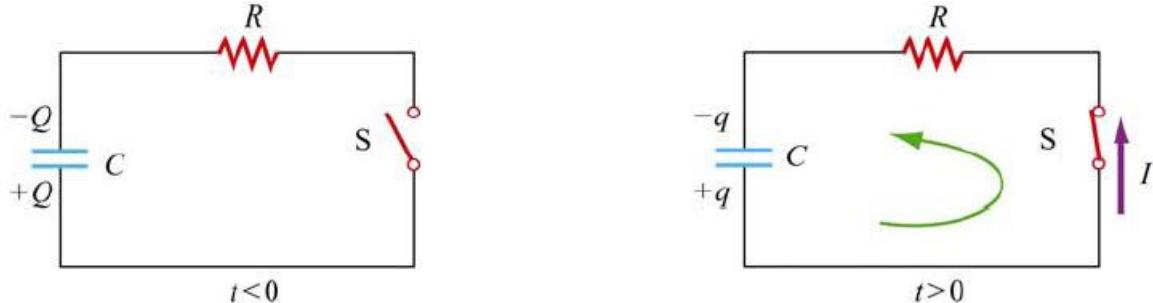


Notar que inicialmente en $t = 0$, $V_C(t = 0) = 0$. Después de un tiempo τ , la diferencia de potencial a través del condensador ha aumentado un factor $(1 - e^{-1}) = 0,632$ de su valor final.

$$V_C(\tau) = \varepsilon (1 - e^{-1}) = 0,632\varepsilon$$

11.5.2. Descarga de un Condensador

Suponga ahora que el condensador ha sido cargado hasta un valor Q . Para $t < 0$, el interruptor está abierto y la diferencia de potencial a través del condensador está dada por $V_C = Q/C$. Por otro lado, la diferencia de potencial a través de la resistencia es cero por que no hay un flujo de cargas, esto es $I = 0$. Ahora supongamos que en $t = 0$ el interruptor se cierra. El condensador comenzará a descargarse



El condensador cargado ahora actúa como una fuente de voltaje para conducir corriente alrededor del circuito. Cuando el condensador se descarga (el flujo de electrones va desde la placa negativa hasta la placa positiva), el voltaje entre sus extremos disminuye. Usando la ley de Kirchhoff para un circuito cerrado

$$\frac{q(t)}{C} - I(t)R = 0$$

Además se cumple

$$I(t) = -\frac{dq(t)}{dt}$$

El signo se debe al hecho de que un flujo de corriente implica una disminución en la diferencia de polaridad de las placas del condensador. Así, la carga satisface la ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{q(t)}{C} + R \frac{dq(t)}{dt} = 0$$

que también se puede resolver mediante el método de separación de variables

$$\frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC} dt$$

$$\int_Q^q \frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC} \int_0^t dt \rightarrow \ln\left(\frac{q}{Q}\right) = -\frac{t}{RC}$$

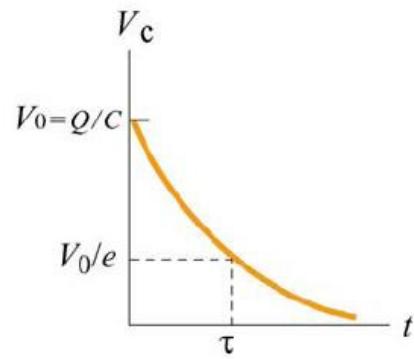
Así

$$q(t) = Q e^{-t/RC}$$

Y el voltaje a través del condensador es

$$V_C(t) = \frac{q(t)}{C} = \left(\frac{Q}{C}\right) e^{-t/RC}$$

El gráfico del voltaje a través del capacitor en función del tiempo

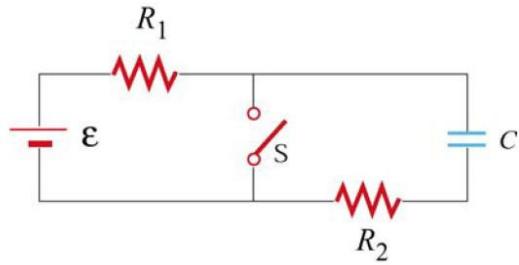


La corriente también decae exponencialmente en el circuito

$$I = -\frac{dq}{dt} = \frac{Q}{RC} e^{-t/RC}$$

Problema

En el circuito de la figura, suponga que el interruptor ha estado abierto por un tiempo muy largo. En $t = 0$ se cierra



- Cual es la constante de tiempo antes de que se cerrara el interruptor?
- Cual es la constante de tiempo después de que se cierra el interruptor?
- Encuentre la corriente a través del interruptor como función del tiempo una vez que el interruptor se ha cerrado.

Solución

- Antes que el interruptor se cerrara, las dos resistencias R_1 y R_2 están en serie con el condensador. Debido a que la resistencia equivalente es $R_{eq} = R_1 + R_2$, la constante de tiempo está dada por

$$\tau = R_{eq}C = (R_1 + R_2)C$$

Y la carga almacenada en el condensador es

$$q(t) = C\varepsilon \left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

- Una vez que el interruptor se cierra, el circuito cerrado a la derecha se vuelve un circuito RC que decae con constante de tiempo $\tau' = R_2C$. La carga comienza a decaer acorde a

$$q'(t) = C\varepsilon e^{-t/\tau'}$$

- La corriente a través del interruptor consiste en 2 fuentes, la corriente constante I_1 del circuito izquierdo, y la corriente que decae I_2 del circuito RC. Las corrientes están dadas por

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{R_1}$$

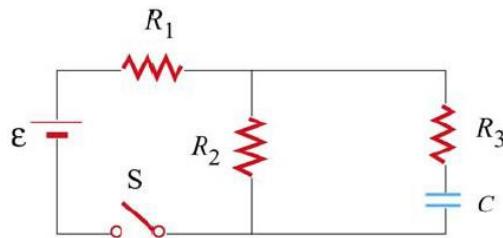
$$I'(t) = \frac{dq'}{dt} = -\frac{C\varepsilon}{\tau'} e^{-t/\tau'} = -\frac{\varepsilon}{R_2} e^{-t/R_2 C}$$

Así, ya que I_1 e I' van en la dirección hacia abajo a través del interruptor, la corriente total será

$$I(t) = I_1 + I'(t) = \frac{\varepsilon}{R_1} + \frac{\varepsilon}{R_2} e^{-t/R_2 C}$$

Problema

Consideré el circuito de la figura. Sea $\varepsilon = 40V$, $R_1 = 8\Omega$, $R_2 = 6\Omega$, $R_3 = 4\Omega$ y $C = 4\mu F$. El condensador inicialmente está descargado

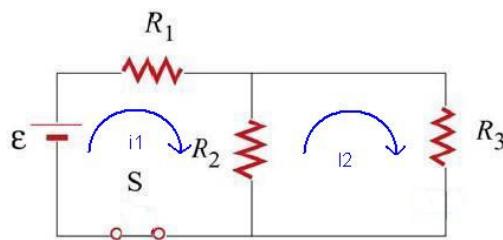


En $t = 0$ el interruptor se cierra.

- Encuentre la corriente a través de cada resistencia inmediatamente después de que el interruptor es cerrado.
- Encuentre la carga final del capacitor.

Solución

a) Inmediatamente después de que el interruptor se cierra, el condensador equivale a un corto circuito, ya que el voltaje en $t = 0$ a través de éste es nulo. Es decir, en el instante justo en que se cierra el interruptor el circuito equivale a



Para la malla 1

$$-\varepsilon + I_1 R_1 + R_2(I_1 - I_2) = 0$$

Para la malla 2

$$R_2(I_2 - I_1) + I_2 R_3 = 0$$

Reemplazando los valores numéricos, se tiene

$$-40 + 8I_1 + 6(I_1 - I_2) = 0 \rightarrow I_1 = \frac{40 + 6I_2}{14}$$

$$6(I_2 - I_1) + 4I_2 = 0 \rightarrow I_2 = \frac{3}{5}I_1$$

Resolviendo este sistema

$$70I_1 = 200 + 18I_1 \rightarrow I_1 = 3,84A$$

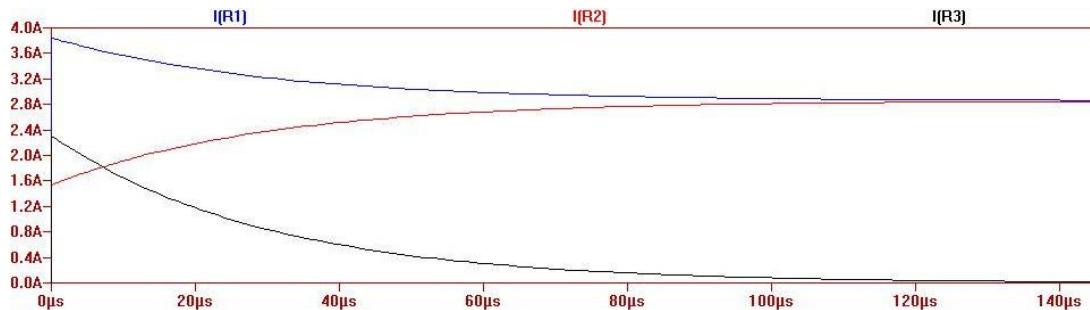
con esto

$$I_2 = 2,3A$$

Finalmente la corriente por R_2 será

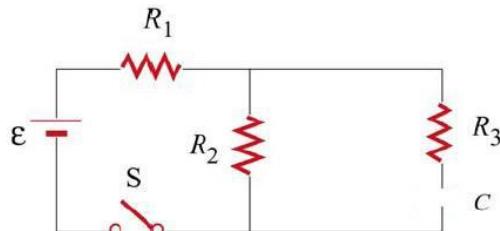
$$I_3 = I_1 - I_2 = 3,84 - 2,3 = 1,54$$

Simulando el circuito, obtenemos las corrientes como función del tiempo



Notar que en $t = 0$ los valores coinciden con los obtenidos recién. Ver también como el circuito llega a un estado estacionario en un margen de tiempo de los $120 \mu s$. Por último, es claro como la corriente I_3 decae rápidamente a cero a medida que el condensador se va cargando.

b) Despues de un tiempo, el condensador se carga totalmente y este pasa a comportarse como un circuito abierto, es decir, a través del condensador no pasa corriente.(y tampoco por R_3)



Así, es fácil notar que el voltaje final a través del condensador será igual al voltaje a través de la resistencia R_2 .

$$-\varepsilon + I(R_1 + R_2) = 0 \rightarrow I = \frac{40}{14} = \frac{20}{7}$$

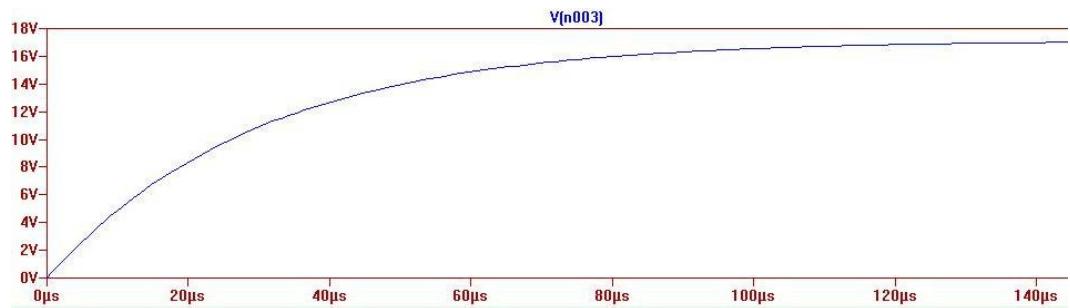
Y el voltaje a través de R_2 será

$$V_{R2} = IR_2 = 6 \frac{20}{7} = 17,14(V) = V_C(t = \infty)$$

Así, la carga final del condensador se puede obtener como

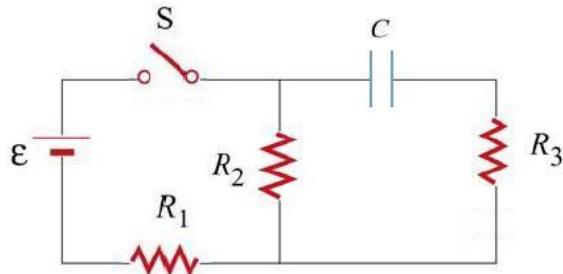
$$Q(t = \infty) = CV_C = 4\mu F * 17,14 = 6,85 * 10^{-5}C$$

El voltaje en el condensador en función del tiempo es



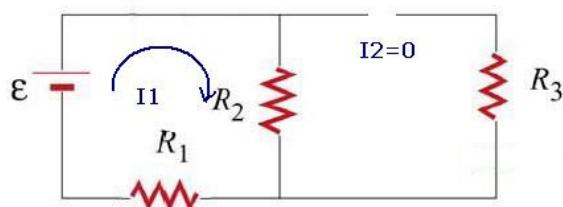
Problema

- En el circuito de la figura, el interruptor se encuentra cerrado durante un tiempo muy largo.
- ¿Cuál es la corriente en cada resistencia?
 - ¿Cuál es la carga en el condensador C?
 - En $t=0$ se abre el interruptor S. Encuentre la corriente que pasa por la resistencia R_2 en función de t .
 - ¿Cuánto tiempo debe pasar para que la carga en C disminuya hasta $4/5$ del valor en $t=0$?



Solución

- El interruptor ha estado cerrado durante un tiempo muy largo, esto significa que el condensador se ha cargado completamente. Cuando esto sucede, el condensador equivale a un circuito abierto, es decir, no pasa corriente a través de él. Bajo estas circunstancias, sólo habrá corriente por la malla 1, así



LVK en malla 1

$$-\varepsilon + I_1 R_2 + I_1 R_1 = 0 \rightarrow I_1 = \frac{V}{R_1 + R_2}$$

Que es la corriente por R_1 y por R_2 , por lo dicho anteriormente, la corriente por R_3 es cero.

b) Para obtener la carga en el condensador, primero debemos obtener el voltaje a través de él, y luego utilizar la relación que relaciona el voltaje con la carga acumulada

$$V_C(t) = Cq(t)$$

Nos interesa la carga final del condensador, esto es

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = \frac{V_C(t \rightarrow \infty)}{C}$$

Como ya vimos, después de un tiempo suficientemente largo no hay corriente por la malla derecha, así, no hay una diferencia de potencial a través de R_3 . Por lo tanto el voltaje en el condensador será igual al voltaje a través de R_2

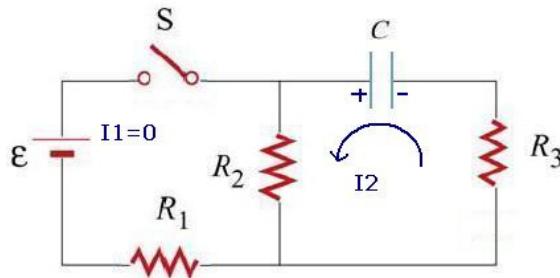
$$\lim_{t \rightarrow \infty} V_C(t) = V_{R_2} = I_1 R_2$$

$$V_C(\infty) = \frac{VR_2}{R_1 + R_2}$$

y así

$$q = CV = \frac{VCR_2}{R_1 + R_2}$$

c) Notemos que al abrir el interruptor, no pasa corriente por la malla 1 y se inicia un proceso de descarga en el condensador.



Si esto no parece evidente, veamos la ecuación de la malla 2

$$I_2 R_3 - V_C(t) + R_2 I_2 = 0$$

$$I_2(R_2 + R_3) = V_C(t) = \frac{q(t)}{C}$$

Notemos que I_2 es positiva, es decir, el sentido que le asignamos es el correcto. Esto significa que cargas positivas están dejando la placa positiva y están llegando a la placa negativa. Es decir, la carga entre las placas va disminuyendo en la medida en que I_2 sea positiva. Esto se traduce en

$$I_2 = -\frac{dq}{dt}$$

Así, obtenemos una ecuación diferencial de primer orden para $q(t)$

$$-\frac{dq}{dt}(R_2 + R_3) = \frac{q(t)}{C}$$

$$\frac{dq}{dt}(R_2 + R_3) + \frac{q(t)}{C} = 0$$

Ecuación homogénea cuya solución es de la forma

$$q(t) = q_0 e^{-t/(C(R_2+R_3))}$$

con q_0 la carga inicial del condensador, calculada anteriormente como

$$q_0 = \frac{R_2 V C}{(R_1 + R_2)}$$

Finalmente,

$$I(t) = -\frac{dq}{dt} = \frac{q_0}{C(R_2 + R_3)} e^{-t/C(R_2+R_3)}$$

d) Para determinar el tiempo que debe pasar para obtener $4/5$ de la carga inicial, resolvemos la ecuación

$$\frac{4}{5}q_0 = q_0 e^{-t/(C(R_2+R_3))}$$

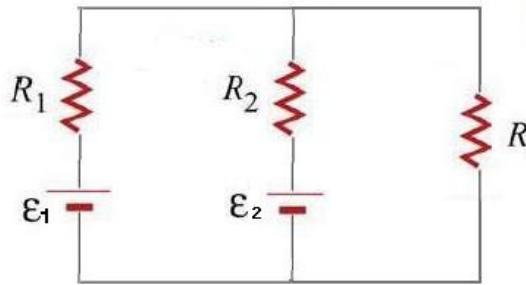
$$\ln(4/5) = -\frac{t}{C(R_2 + R_3)}$$

con lo que

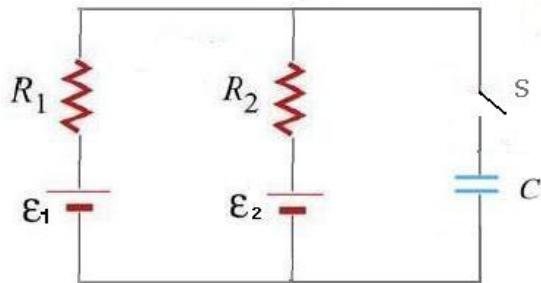
$$t = \ln(5/4)(R_2 + R_3)C$$

Problema

Dos baterías de FEM ε_1 y ε_2 y resistencias R_1 y R_2 se conectan en paralelo con una resistencia R



- Calcule la potencia entregada por cada batería
- Ahora se reemplaza la resistencia R por un interruptor S y un condensador C en serie.

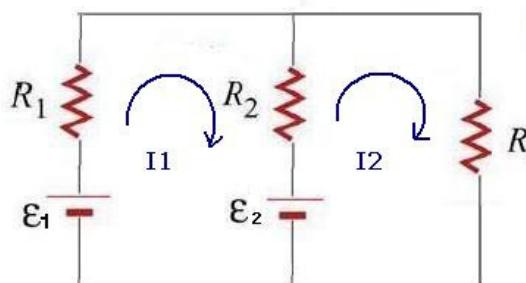


El interruptor se cierra en $t=0$

- Calcule la carga q en el condensador como función del tiempo
- Calcule la corriente en cada resistencia como función del tiempo

Solución

a) Para obtener la potencia entregada por cada batería, debemos conocer la corriente que pasa por cada una, y lo hacemos usando la LVK para las mallas 1 y 2, como se muestra en la figura



Para la malla 1

$$-\varepsilon_1 + I_1 R_1 + R_2(I_1 - I_2) + \varepsilon_2 = 0$$

En la malla 2

$$-\varepsilon_2 + R_2(I_2 - I_1) + I_2 R = 0$$

De la primera ecuación se obtiene

$$I_1 = \frac{R_2 I_2 + \varepsilon_1 - \varepsilon_2}{R_1 + R_2}$$

Reemplazando en la segunda

$$-\varepsilon_2 + I_2(R_2 + R) = I_1 R_2 = \frac{R_2^2 I_2 + R_2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{R_1 + R_2}$$

Así

$$-\varepsilon_2(R_1 + R_2) + I_2(R_2 + R)(R_1 + R_2) = R_2^2 I_2 + R_2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$$

$$-\varepsilon_2(R_1 + R_2) + I_2(R_2 R_1 + R_2^2 + R R_1 + R R_2) = R_2^2 I_2 + R_2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$$

$$I_2(R_2 R_1 + R R_1 + R R_2) = R_2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + \varepsilon_2(R_1 + R_2)$$

$$I_2 = \frac{\varepsilon_1 R_2 + \varepsilon_2 R_1}{R(R_1 + R_2) + R_1 R_2}$$

Y entonces, I_1 está dada por

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{R_2 I_2 + \varepsilon_1 - \varepsilon_2}{R_1 + R_2} = \frac{\varepsilon_1 R_2^2 + \varepsilon_2 R_1 R_2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(R(R_1 + R_2) + R_1 R_2)}{(R(R_1 + R_2) + R_1 R_2)(R_1 + R_2)} \\ I_1 &= \frac{\varepsilon_1 R_2^2 + \varepsilon_2 R_1 R_2 + \varepsilon_1 R R_1 + \varepsilon_1 R_1 R_2 + \varepsilon_1 R R_2 - \varepsilon_2 R R_1 - \varepsilon_2 R R_2 - \varepsilon_2 R_1 R_2}{(R(R_1 + R_2) + R_1 R_2)(R_1 + R_2)} \\ I_1 &= \frac{R(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(R_1 + R_2) + R_2 \varepsilon_1 (R_1 + R_2)}{(R(R_1 + R_2) + R_1 R_2)(R_1 + R_2)} \end{aligned}$$

Finalmente,

$$I_1 = \frac{R(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + R_2 \varepsilon_1}{R(R_1 + R_2) + R_1 R_2}$$

Y la corriente por la fem ε_2 es

$$I_3 = I_1 - I_2 = \frac{R(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + R_2 \varepsilon_1 - \varepsilon_1 R_2 - \varepsilon_2 R_1}{R(R_1 + R_2) + R_1 R_2} = \frac{R(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) - \varepsilon_2 R_1}{R(R_1 + R_2) + R_1 R_2}$$

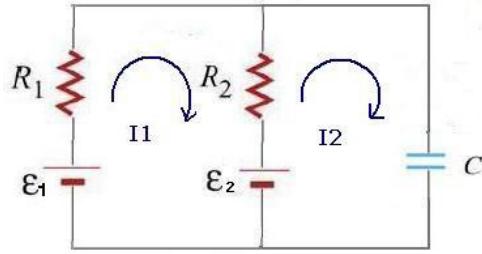
Con esto, la potencia entregada por ε_1 es

$$P_1 = I_1 \varepsilon_1 = \varepsilon_1 \frac{R(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + R_2 \varepsilon_1}{R(R_1 + R_2) + R_1 R_2}$$

Y la potencia entregada por ε_2

$$P_2 = -I_3 \varepsilon_2 = \varepsilon_2 \frac{R(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) + \varepsilon_2 R_1}{R(R_1 + R_2) + R_1 R_2}$$

b)



Aquí, la ecuación de la malla 1 es equivalente al caso anterior, donde se obtuvo

$$I_1 = \frac{R_2 I_2 + \varepsilon_1 - \varepsilon_2}{R_1 + R_2}$$

Para la malla 2

$$-\varepsilon_2 + R_2(I_2 - I_1) + V_C = 0 \rightarrow -\varepsilon_2 + R_2 I_2 - R_2 I_1 + \frac{q}{C} = 0$$

Reemplazando I_1

$$\begin{aligned} -\varepsilon_2 + R_2 I_2 - R_2 \left(\frac{R_2 I_2 + \varepsilon_1 - \varepsilon_2}{R_1 + R_2} \right) + \frac{q}{C} &= 0 \\ -\varepsilon_2 + \frac{R_2^2 I_2 + R_1 R_2 I_2 - R_2^2 I_2 - R_2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{R_1 + R_2} + \frac{q}{C} &= 0 \\ I_2 \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{q}{C} &= \frac{\varepsilon_1 R_2 + \varepsilon_2 R_1}{R_1 + R_2} \end{aligned}$$

Pero $I_2 = dq/dt$

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dt} \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{q}{C} &= \frac{\varepsilon_1 R_2 + \varepsilon_2 R_1}{R_1 + R_2} \\ \frac{dq}{dt} \frac{C R_1 R_2}{R_1 + R_2} + q &= C \frac{\varepsilon_1 R_2 + \varepsilon_2 R_1}{R_1 + R_2} \end{aligned}$$

Sean

$$\tau = \frac{C R_1 R_2}{R_1 + R_2}, A = C \frac{\varepsilon_1 R_2 + \varepsilon_2 R_1}{R_1 + R_2}$$

Entonces

$$\frac{dq}{dt} \tau + q = A$$

Cuya solución es

$$q(t) = A(1 - e^{-t/\tau})$$

Con esto,

$$\begin{aligned} I_2(t) &= \frac{dq(t)}{dt} = \frac{A}{\tau} e^{-t/\tau} \\ I_1(t) &= \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) \frac{A}{\tau} e^{-t/\tau} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{R_1 + R_2} \end{aligned}$$

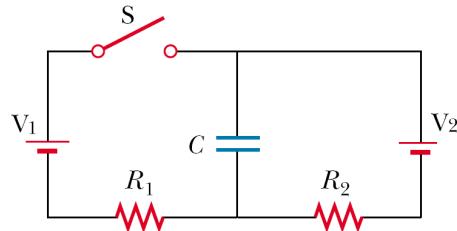
Y la corriente por R_2

$$I_3(t) = I_1(t) - I_2(t) = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2}\right) \frac{A}{\tau} e^{-t/\tau} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{R_1 + R_2} - \frac{A}{\tau} e^{-t/\tau}$$

Problema

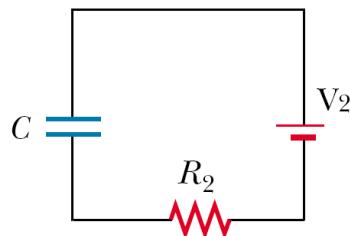
Consideré el circuito de la figura. Inicialmente el circuito ha estado abierto largo tiempo

- Calcule la carga del condensador, con el interruptor abierto
- Si el interruptor se cierra y transcurre mucho tiempo, encuentre la nueva carga del condensador



Solución

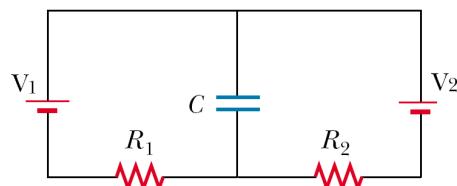
- Antes que se cierre el interruptor, sólo se debe considerar el circuito de la derecha



Si ha pasado mucho tiempo, ha dejado de circular corriente y el condensador está cargado completamente

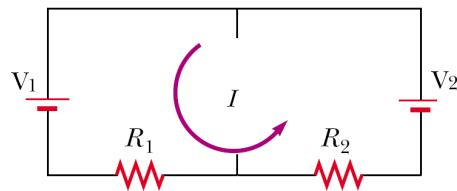
$$Q = CV$$

- Si se cierra el interruptor, el circuito es el siguiente



Como ha pasado mucho tiempo, el condensador está cargado y no hay corriente hacia él.

De esta forma, la corriente circula según



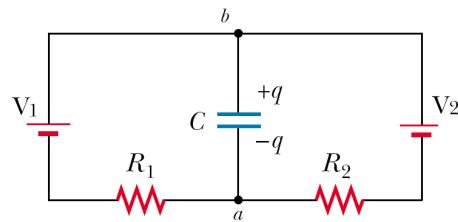
Se tiene

$$V_1 + I(R_1 + R_2) - V_2 = 0$$

Luego

$$I = \frac{V_2 - V_1}{R_1 + R_2}$$

Con esto podemos determinar la diferencia de potencial entre los terminales del condensador



Sea

$$\Delta V = V_b - V_a$$

$$-\Delta V + V_1 + IR_1 = 0$$

Luego

$$\Delta V = \frac{R_1 V_2 + R_2 V_1}{R_1 + R_2}$$

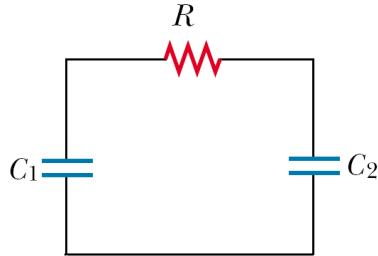
con esto, la carga almacenada en el condensador es

$$Q = C \Delta V$$

$$Q = C \frac{R_1 V_2 + R_2 V_1}{R_1 + R_2}$$

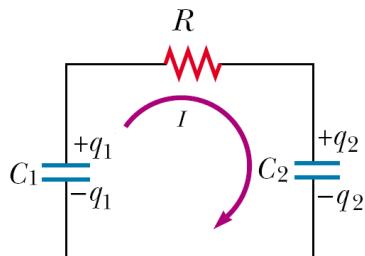
Problema

Inicialmente el condensador de capacidad C_1 tiene carga Q_0 , y el segundo condensador está descargado. Encuentre la pérdida de energía por calor de Joule al conectar ambos condensadores mediante un conductor de resistencia R , como muestra la figura



Solución

Definimos la corriente por el circuito según se muestra en la figura



La ecuación de la malla entrega

$$-V_1 + IR + V_2 = 0$$

donde los voltajes entre los extremos de cada condensador se relacionan con las cargas

$$V_1 = \frac{Q_1}{C_1}$$

$$V_2 = \frac{Q_2}{C_2}$$

La ecuación a resolver es

$$-\frac{Q_1}{C_1} + IR + \frac{Q_2}{C_2} = 0$$

Pero Q_1 , Q_2 e I no son independientes. En efecto

$$I(t) = \frac{dQ_2}{dt} = -\frac{dQ_1}{dt}$$

Notar que esto es consistente con

$$\frac{d}{dt} (Q_1 + Q_2) = 0$$

pues por conservación de la carga

$$Q_1(t) + Q_2(t) = Q_0$$

Luego, derivando una vez con respecto al tiempo

$$-\frac{1}{C_1} \frac{dQ_1}{dt} + \frac{dI(t)}{dt} R + \frac{1}{C_2} \frac{dQ_2}{dt} = 0$$

$$\frac{1}{C_1} I(t) + \frac{dI(t)}{dt} R + \frac{1}{C_2} I(t) = 0$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = -\frac{1}{R} \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) I(t)$$

Finalmente

$$\frac{dI(t)}{dt} = -\frac{1}{R} \left(\frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} \right) I(t)$$

La solución de esta ecuación es

$$I(t) = K e^{-\frac{1}{R} \left(\frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} \right) t}$$

donde K es una constante a determinar. Considerando que el condensador 2 está inicialmente descargado

$$Q_2(0) = 0$$

Se tiene

$$Q_2(t) = \int_0^t d\tau I(\tau) = K \int_0^t d\tau e^{-\frac{1}{R} \left(\frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} \right) \tau}$$

$$Q_2(t) = \frac{K R C_1 C_2}{C_1 + C_2} \left(1 - e^{-\frac{1}{R} \left(\frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} \right) t} \right)$$

La constante K se puede determinar imponiendo que para todo $t \in \mathbb{R}^+$

$$-\frac{Q_1(t)}{C_1} + I(t)R + \frac{Q_2(t)}{C_2} = 0$$

Como $Q_1(t) = Q_0 - Q_2(t)$

$$-\frac{Q_0}{C_1} + \frac{Q_2(t)}{C_1} + I(t)R + \frac{Q_2(t)}{C_2} = 0$$

$$-\frac{Q_0}{C_1} + \left(\frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} \right) Q_2(t) + I(t)R = 0$$

Reemplazando

$$-\frac{Q_0}{C_1} + \left(\frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} \right) K R \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \left(1 - e^{-\frac{1}{R} \left(\frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} \right) t} \right) + R K e^{-\frac{1}{R} \left(\frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} \right) t} = 0$$

$$-\frac{Q_0}{C_1} + K R = 0$$

Luego

$$K = \frac{Q_0}{RC_1}$$

Equivalentemente uno podría haber notado que en $t = 0$, el condensador 2 se comporta como un cortocircuito, y el voltaje inicial en el condensador 1 es

$$V_1(0) = \frac{Q_0}{C_1}$$

de forma que

$$I(0) = \frac{V_1(0)}{R} = \frac{Q_0}{C_1 R}$$

La potencia disipada en la resistencia está dada por

$$P(t) = RI^2(t) = R \frac{Q_0^2}{R^2 C_1^2} e^{-2\frac{(C_1+C_2)}{RC_1C_2}t}$$

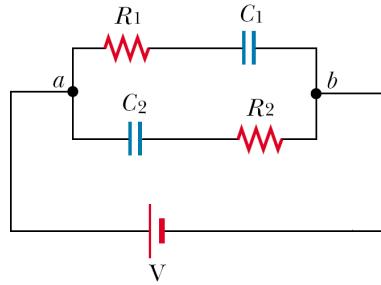
y la energía perdida será

$$-\Delta E = \int_0^\infty dt \frac{Q_0^2}{R C_1^2} e^{-2\frac{(C_1+C_2)}{RC_1C_2}t} = \frac{Q_0^2 C_2}{2 C_1 (C_1 + C_2)}$$

Notar que es independiente de R ! Esta pérdida de energía coincide exactamente con la diferencia de energía almacenada por el sistema antes y después de conectar ambos condensadores

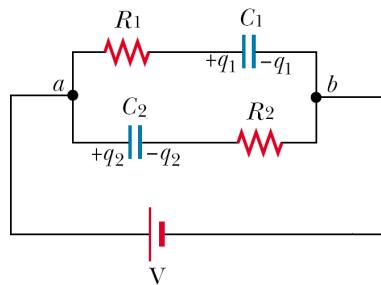
Problema

Encuentre en el circuito de la figura la intensidad de corriente eléctrica por cada rama y la carga en cada condensador al tiempo t . Asuma que inicialmente los condensadores están descargados



Solución

Definimos las corrientes que se indican en la figura, así como las cargas en cada condensador



Por supuesto que debe tenerse

$$I(t) = I_1(t) + I_2(t)$$

Tomando el circuito cerrado que involucra a la fuente, la resistencia R_1 y el condensador C_1 se tiene

$$-V + I_1(t)R_1 + \frac{Q_1}{C_1} = 0$$

Por otro lado, considerando el circuito cerrado que contiene a V , R_2 y C_2

$$-V + I_2R_2 + \frac{Q_2}{C_2} = 0$$

Además se tiene

$$I_1(t) = \frac{dQ_1(t)}{dt}$$

$$I_2(t) = \frac{dQ_2}{dt}$$

De esta forma, y derivando las ecuaciones obtenidas anteriormente

$$\frac{1}{C_1} \frac{dQ_1(t)}{dt} + R_1 \frac{dI_1(t)}{dt} = 0$$

$$\frac{1}{C_1} I_1(t) + R_1 \frac{dI_1(t)}{dt} = 0$$

luego

$$\frac{dI_1(t)}{dt} = -\frac{1}{R_1 C_1} I_1(t)$$

del mismo modo

$$\frac{dI_2(t)}{dt} = -\frac{1}{R_2 C_2} I_2(t)$$

Resolviendo

$$I_1(t) = K_1 e^{-\frac{t}{R_1 C_1}}$$

$$I_2(t) = K_2 e^{-\frac{t}{R_2 C_2}}$$

Las constantes K_1 y K_2 se determinan de forma inmediata al considerar que en $t = 0$ ambos condensadores se comportan como un cortocircuito y entonces

$$I_1(0) = \frac{V}{R_1}$$

$$I_2(0) = \frac{V}{R_2}$$

con esto

$$I_1(t) = \frac{V}{R_1} e^{-\frac{t}{R_1 C_1}}$$

$$Q_1(t) = V C_1 \left(1 - e^{-\frac{t}{R_1 C_1}} \right)$$

$$I_2(t) = \frac{V}{R_2} e^{-\frac{t}{R_2 C_2}}$$

$$Q_2(t) = V C_2 \left(1 - e^{-\frac{t}{R_2 C_2}} \right)$$

Parte V

Magnetostática. Campos variantes en el tiempo

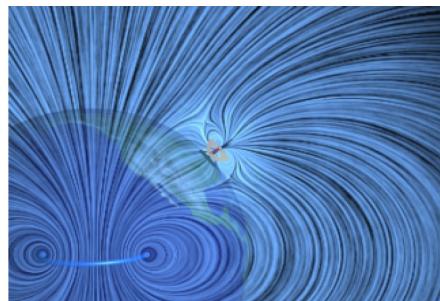
Capítulo 12

Magnetostática

El campo Magnético

Hemos visto que las cargas estáticas son fuentes de campo eléctrico. Además conocemos una ley que nos permite saber cómo es la fuerza que un campo eléctrico ejerce sobre una carga puntual (Ley de Coulomb). Ahora, sucede que si dos cargas se están moviendo, existe una fuerza adicional entre ellas debido a éste movimiento. Ésta fuerza se conoce como **Fuerza Magnética**. Sin embargo, la fuerza magnética entre 2 cargas puntuales en movimiento relativo es muchísimo menos intensa que la fuerza de Coulomb, por lo que se hace prácticamente imposible medir la fuerza magnética entre 2 cargas puntuales. De todas formas, efectos magnéticos se pueden medir al utilizar corrientes eléctricas en conductores (donde existe un número muy grande de electrones en movimiento!)

En resumen, cargas en movimiento generan campos magnéticos (y entonces una corriente eléctrica también), y a su vez, campos magnéticos actúan sobre cargas en movimiento (en consecuencia, un campo magnético ejerce una fuerza sobre un conductor con corriente).



Comenzaremos por el estudio de la **Magnetostática**, es decir, el estudio de campos magnéticos producidos por corrientes **estacionarias**. Con esto queremos decir

$$I = \frac{dq}{dt} = C$$

Recordando la ecuación de continuidad de la carga

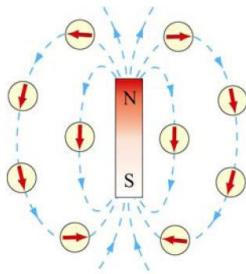
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{x}, t) + \frac{\partial \rho(\vec{x}, t)}{\partial t} = 0$$

La condición de que las corrientes sean estacionarias entrega

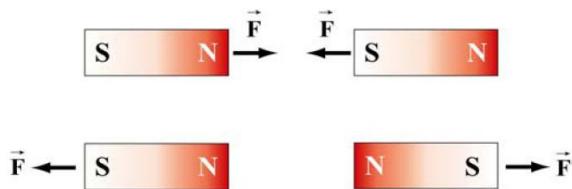
$$\frac{\partial \rho(\vec{x}, t)}{\partial t} = 0 \rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{x}) = 0$$

Más adelante veremos como se relacionan los campos eléctrico y magnético, y encontraremos las leyes fundamentales de la electrodinámica.

Un imán permanente es una fuente natural de campo magnético \vec{B} . Esto se puede verificar al mover un compás cerca de un imán, la aguja del compás se alinearán en la dirección del campo magnético producido por el imán, como se ve en la figura



Es decir, el efecto del imán sobre la aguja es el de un **torque** (Torque de Ampère). Una barra magnética consiste de dos polos, que se designan como norte (N) y sur (S). Esto significa que las líneas de campo emergen desde un polo (norte) y terminan en el opuesto (sur). Veremos que los campos magnéticos siempre tienen esta característica, es decir, las líneas de campo magnético siempre emergen y terminan en la misma fuente del campo. (No se han encontrado **monopolos magnéticos**). Cuando se acercan 2 barras magnéticas, 2 polos iguales se repelen, mientras que polos contrarios se atraerán



Al contrario de las cargas eléctricas, las cuales pueden estar aisladas, los 2 polos magnéticos siempre vienen en pares. Cuando se quiebra un imán, se obtienen 2 nuevos imanes, cada uno con polo norte y sur. En otras palabras, no existen monopolos magnéticos aislados



Se verá más adelante que éste resultado se resume en la tercera ecuación de Maxwell

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{x}) = 0$$

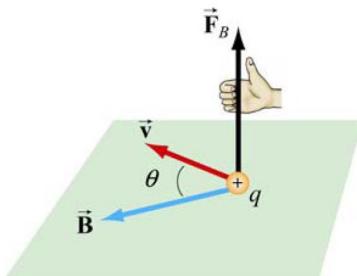
Podría resultar, en principio, misterioso que un material genere campos magnéticos. Lo único que hemos dicho es que cargas en movimiento generan campos magnéticos. Es sabido que una de las fuerzas fundamentales que dan forma a los átomos es la fuerza eléctrica (que atrae al electrón con el protón). El movimiento de electrones en un material genera entonces campos magnéticos. En realidad, tener la visión de un electrón como una partícula que gira en torno al núcleo no es muy correcto, lo que se debe usar a niveles atómicos es la Mecánica Cuántica. El magnetismo en la materia es en general un fenómeno puramente cuántico y que tiene relación con el espín del electron. Al igual que en electrostática vimos que las moléculas de un material dieléctrico son levemente polarizadas ante la presencia de un campo eléctrico, y que entonces un material se caracteriza por una suma de infinitos momentos dipolares, también se puede definir un análogo magnético, el momento magnético. De todas formas, es algo que está presente en todos los átomos. ¿Por qué entonces, no toda la materia presenta esta cualidad de generar un campo magnético medible, como los objetos que hemos llamado **imanes** permanentes? La respuesta es que, si bien cada átomo en un material contribuye generando un campo magnético, la

disposición de los momentos magnéticos puede ser tan aleatoria, que el efecto neto al sumarlos es una cancelación de un campo magnético total. Los imanes son materiales cuyos momentos magnéticos están todos alineados, y por esto es que cada uno contribuye del mismo modo a un campo magnético total que es el que medimos en la cercanía de un imán.

12.1. Fuerza magnética sobre una carga puntual

Aún no hemos establecido una expresión matemática para determinar el campo magnético generado por una distribución de cargas en movimiento. Sin embargo, por el momento podemos asumir que simplemente existe un campo magnético, $\vec{B}(\vec{x})$, en cierta región del espacio. Estudiaremos primero cual es el efecto de un campo magnético sobre una carga puntual q en movimiento, más adelante veremos cómo son creados los campos magnéticos. Consideremos una partícula de carga q , que se mueve con cierta velocidad $\vec{v}(\vec{x})$. Experimentalmente, se obtienen las siguientes observaciones

1. La magnitud de la fuerza magnética $\vec{F}_B(\vec{x})$ ejercida sobre la partícula cargada es proporcional a $|\vec{v}(\vec{x})|$ y a q
2. La magnitud y dirección de $\vec{F}_B(\vec{x})$ depende de $\vec{v}(\vec{x})$ y de $\vec{B}(\vec{x})$
3. La fuerza magnética $\vec{F}_B(\vec{x})$ desaparece cuando $\vec{v}(\vec{x})$ es paralela a $\vec{B}(\vec{x})$. Sin embargo, cuando $\vec{v}(\vec{x})$ forma un ángulo ϑ con $\vec{B}(\vec{x})$, la dirección de $\vec{F}_B(\vec{x})$ es perpendicular al plano formado por $\vec{v}(\vec{x})$ y $\vec{B}(\vec{x})$, y la magnitud de $\vec{F}_B(\vec{x})$ es proporcional a $\sin \vartheta$
4. Cuando la carga cambia de signo, la dirección de la fuerza magnética se invierte



Todas las observaciones anteriores se pueden resumir en la siguiente expresión

$$\vec{F}_B(\vec{x}) = q\vec{v}(\vec{x}) \times \vec{B}(\vec{x})$$

La magnitud de $\vec{F}_B(\vec{x})$ está dada por

$$F_B = |q|vB \sin \theta$$

La unidad en SI para $\vec{B}(\vec{x})$ es el **tesla** $T = 1 \text{ N/Am}$. Notar que $\vec{F}_B(\vec{x})$ es siempre perpendicular a $\vec{v}(\vec{x})$ y $\vec{B}(\vec{x})$, de forma que una fuerza magnética no puede alterar la rapidez de la partícula. (No realiza trabajo sobre ella). En efecto

$$dW(\vec{x}) = \vec{F}_B(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = q(\vec{v}(\vec{x}) \times \vec{B}(\vec{x})) \cdot \vec{v}(\vec{x}) dt = q(\vec{v}(\vec{x}) \times (\vec{v}(\vec{x}) \times \vec{B}(\vec{x}))) dt = 0$$

Si sobre la partícula sólo actúa una fuerza magnética, entonces el trabajo sobre ella es nulo, y entonces su energía cinética es constante. (Luego el módulo de la velocidad es constante). Sin

embargo, la dirección de $\vec{v}(\vec{x})$, sí puede ser alterada por la fuerza magnética. (De lo contrario, el movimiento de una carga en un campo magnético sería extremadamente aburrido, simplemente se movería en una línea recta)

12.2. Movimiento de una carga en un campo eléctrico y magnético uniforme

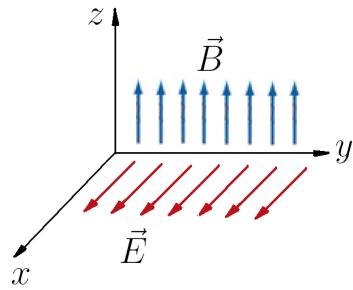
Una partícula de carga q se podría encontrar en una región del espacio en donde existen un campo magnético \vec{B} y un campo eléctrico \vec{E} . Así, sobre ella actuará una fuerza neta igual a

$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right)$$

esta es llamada **fuerza de Lorentz**. Ésto permite acoplar el electromagnetismo clásico con la mecánica, en efecto, la trayectoria de la partícula es la solución de la segunda ley de Newton

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right)$$

Resolvamos el movimiento de una partícula sometida a la fuerza de Lorentz, en un caso **muy particular** y sencillo, como se muestra en la siguiente figura



Es decir, se tienen dos campos uniformes y perpendiculares $\vec{E} = E\hat{i}$, $\vec{B} = B\hat{k}$. Se debe resolver

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right)$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{q}{m} \left(E\hat{i} + \vec{v} \times B\hat{k} \right)$$

La velocidad de la partícula es, simplemente

$$\vec{v} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k}$$

de forma que

$$\frac{d}{dt} \vec{v} = \frac{q}{m} \left(E\hat{i} - \dot{x}B\hat{j} + \dot{y}B\hat{i} \right)$$

De aquí se obtienen las siguientes ecuaciones diferenciales que describen el movimiento de la partícula

$$\begin{aligned}\ddot{z} &= 0 \\ \ddot{y} &= -\frac{qB}{m}\dot{x} \\ \ddot{x} &= \left(\frac{qE}{m} + \dot{y}B\right)\end{aligned}$$

Definiendo $\frac{qB}{m} = w_0$ y $\frac{qE}{m} = w_1$

$$\begin{aligned}\ddot{z} &= 0 \\ \ddot{y} &= -w_0\dot{x} \\ \ddot{x} &= w_1 + w_0\dot{y}\end{aligned}$$

La solución de la primera de ellas es evidente, y está dada por

$$z(t) = z_0 + v_{oz}t$$

es decir, la partícula describe un movimiento uniforme en la dirección z . Las ecuaciones para la velocidad en x y en y están acopladas, y pueden ser escritas de forma matricial como

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \dot{y} \\ \dot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -w_0 \\ w_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{y} \\ \dot{x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ w_1 \end{pmatrix}$$

Es decir, se tiene un sistema de ecuaciones diferenciales no homogéneo de la forma

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \vec{f}$$

Puede ser resuelto fácilmente de la siguiente manera

$$\dot{\vec{x}} - A\vec{x} = \vec{f}$$

$$e^{-At}\dot{\vec{x}} - e^{-At}A\vec{x} = e^{-At}\vec{f} = \frac{d}{dt}(e^{-At}\vec{x})$$

entonces

$$e^{-At}\vec{x} = \vec{x}_0 + \int_0^t d\tau e^{-A\tau}\vec{f}(\tau)$$

Finalmente

$$\vec{x} = e^{At}\vec{x}_0 + \int_0^t d\tau e^{A(t-\tau)}\vec{f}(\tau)$$

La solución homogénea es, simplemente

$$\vec{x}_h = e^{At}\vec{x}_0$$

donde \vec{x}_0 corresponde a $\vec{x}(t = 0)$. Para calcular e^{At} obtenemos los valores propios de A

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & -w_0 \\ w_0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + w_0^2 = 0$$

Están dados por

$$\lambda_1 = iw_0, \lambda_2 = -iw_0$$

Para encontrar e^{At} se puede utilizar el teorema de Caley-Hamilton (o simplemente diagonalizar A)

$$e^{At} = a_0 I + a_1 A$$

donde a_0 y a_1 están dados por

$$\begin{aligned} e^{iw_0 t} &= a_0 + iw_0 a_1 \\ e^{-iw_0 t} &= a_0 - iw_0 a_1 \end{aligned}$$

Resolviendo

$$\begin{aligned} a_0 &= \cos w_0 t \\ a_1 &= \frac{1}{w_0} \sin w_0 t \end{aligned}$$

Con esto

$$\begin{aligned} e^{At} &= \begin{pmatrix} \cos w_0 t & 0 \\ 0 & \cos w_0 t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\sin w_0 t \\ \sin w_0 t & 0 \end{pmatrix} \\ e^{At} &= \begin{pmatrix} \cos w_0 t & -\sin w_0 t \\ \sin w_0 t & \cos w_0 t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y la solución homogénea queda

$$\vec{x}_h(t) = \begin{pmatrix} \dot{y} \\ \dot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{0y} \cos w_0 t - v_{0x} \sin w_0 t \\ v_{0y} \sin w_0 t + v_{0x} \cos w_0 t \end{pmatrix}$$

Además, la solución particular toma la forma

$$\begin{aligned} \vec{x}_p(t) &= \int_0^t d\tau \begin{pmatrix} \cos w_0(t-\tau) & -\sin w_0(t-\tau) \\ \sin w_0(t-\tau) & \cos w_0(t-\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ w_1 \end{pmatrix} \\ \vec{x}_p(t) &= \int_0^t d\tau \begin{pmatrix} w_1 \sin w_0(t-\tau) \\ w_1 \cos w_0(t-\tau) \end{pmatrix} = \frac{w_1}{w_0} \begin{pmatrix} \cos w_0(t-\tau) \\ -\sin w_0(t-\tau) \end{pmatrix} \Big|_0^t \\ \vec{x}_p(t) &= \frac{w_1}{w_0} \begin{pmatrix} 1 - \cos w_0 t \\ \sin w_0 t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Finalmente, se tiene

$$\dot{x} = v_{0y} \sin w_0 t + v_{0x} \cos w_0 t + \frac{w_1}{w_0} \sin w_0 t$$

$$\dot{y} = v_{0y} \cos w_0 t - v_{0x} \sin w_0 t + \frac{w_1}{w_0} (1 - \cos w_0 t)$$

Integrando, se obtiene la cinemática general para la partícula

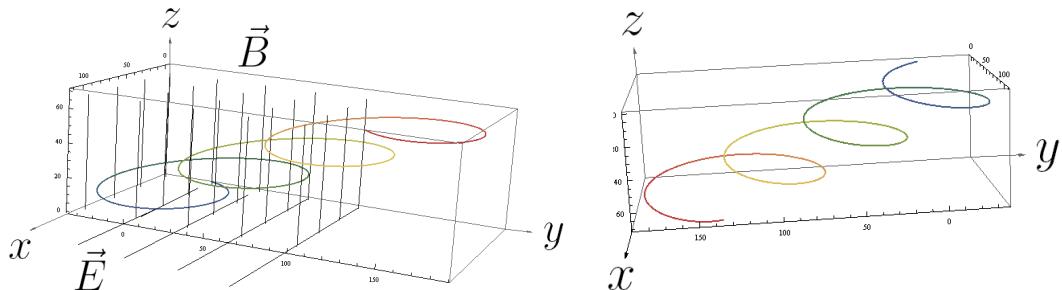
$$x(t) = -\frac{v_{0y}}{w_0} \cos w_0 t + \frac{v_{0x}}{w_0} \sin w_0 t - \frac{w_1}{w_0^2} \cos w_0 t + \frac{v_{0y}}{w_0} + \frac{w_1}{w_0^2} + x_0$$

$$y(t) = \frac{v_{0y}}{w_0} \sin w_0 t + \frac{v_{0x}}{w_0} \cos w_0 t + \frac{w_1}{w_0} \left(t - \frac{1}{w_0} \sin w_0 t \right) - \frac{v_{0x}}{w_0} + y_0$$

$$z(t) = z_0 + v_{0z} t$$

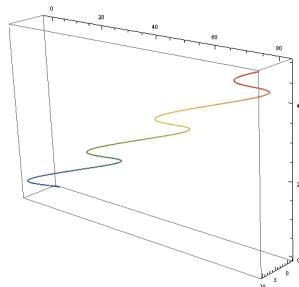
12.2.1. Trayectorias en casos particulares

Resuelta la ecuación de movimiento para la carga sometida a la fuerza de Lorentz, es posible graficar y obtener su trayectoria para distintas condiciones iniciales y magnitudes de los campos. La siguiente figura muestra una solución con $q = 10 \text{ C}$, $B = 110 \text{ T}$, $E = 200 \text{ N/C}$, y $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ (partícula que parte del origen)

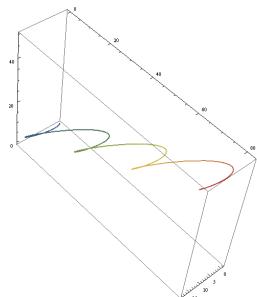


Solución con velocidad inicial en z distinta de cero

El movimiento en la dirección vertical (eje z) es uniforme. Notar que la partícula tiene una cierta velocidad de traslación en la dirección y , y no en la dirección x (dirección del campo eléctrico), como se podría pensar. La razón se debe a que si bien el campo eléctrico ejerce una fuerza según x con un incremento en la velocidad, ambos efectos se traducen en una fuerza magnética $q\vec{v} \times \vec{B}$ intensa en la dirección y . El efecto neto es una traslación general en dicha dirección



Misma solución anterior, ahora con velocidad inicial en x de 1 m/s



Trayectoria con velocidad inicial en y de 1 m/s

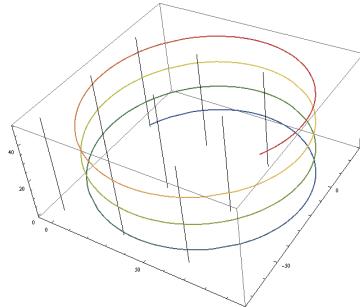
Ahora, ¿qué ocurre si el campo eléctrico es nulo?. Las soluciones quedan de la forma

$$x(t) = -\frac{v_{0y}}{w_0} \cos w_0 t + \frac{v_{0x}}{w_0} \sin w_0 t + \frac{v_{0y}}{w_0} + x_0$$

$$y(t) = \frac{v_{0y}}{w_0} \sin w_0 t + \frac{v_{0x}}{w_0} \cos w_0 t - \frac{v_{0x}}{w_0} + y_0$$

$$z(t) = z_0 + v_{0z}t$$

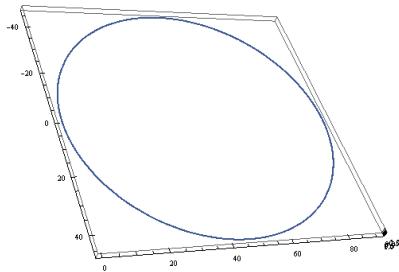
La partícula describe un **movimiento circular** en el plano $x - y$ (¿cuál sería el centro?), como se muestra en la figura



Este movimiento tiene una frecuencia angular de oscilación (constante) dada por

$$w_0 = \frac{qB}{m}$$

En particular, si la velocidad inicial en la dirección z es nula, la trayectoria es definitivamente una circunferencia en el espacio



Así, una partícula en un campo magnético uniforme describe una trayectoria circular en el plano perpendicular al campo magnético. Este movimiento circular es **uniforme** (frecuencia angular constante). Esto último es evidente pues el campo magnético nunca realiza trabajo sobre la partícula (y no modifica su energía cinética). Si v es el módulo de la velocidad, entonces se tiene

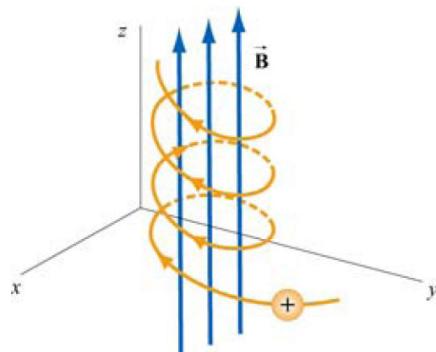
$$v = w_0 R$$

y el radio de la circunferencia descrita está dado por

$$R = \frac{mv}{qB} = \frac{v}{w_0}$$

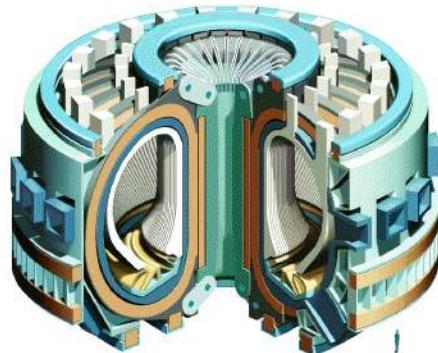
El período de este movimiento circular estará dado por

$$T = \frac{2\pi}{w_0} = \frac{2\pi m}{qB}$$



Trayectoria general de una partícula en un campo magnético uniforme

Hay que notar que estas trayectorias han sido obtenidas a partir de campos extremadamente sencillos (uniformes). Muchísimos efectos interesantes se pueden lograr con campos que varían en el espacio. Uno de ellos consiste en un campo magnético con curvatura en que bajo ciertas condiciones se puede confinar a la partícula en determinadas regiones del espacio (espejos magnéticos). El confinamiento magnético parece ser la solución con más posibilidades de permitir en el futuro la construcción de un reactor de fusión nuclear de potencia con fines comerciales, la idea consiste en confinar un plasma a altas temperaturas lejos de las paredes del reactor, de forma de poder replicar procesos de fusión nuclear (por ejemplo, la fusión de Deuterio-Tritio)



Diseño de confinamiento de plasma utilizado en el International Thermonuclear Experimental Reactor (ITER), en Francia

12.2.2. El descubrimiento del electrón

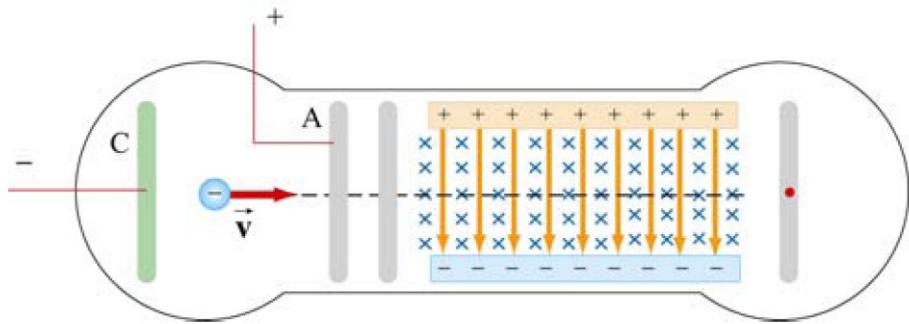
Notar que existe una solución muy particular al movimiento de una partícula bajo la acción de la fuerza de Lorentz cuando los campos son uniformes y perpendiculares. Resulta muy interesante que para un determinado valor de la velocidad \vec{v} una partícula cargada no siente fuerza alguna. En efecto, supongamos una partícula cargada que ingresa a una región con presencia de un campo eléctrico \vec{E} , y un campo magnético \vec{B} , si la velocidad inicial de tal partícula es

$$\vec{v} = \frac{1}{B^2} \vec{E} \times \vec{B}$$

entonces su trayectoria será una línea recta, con velocidad constante y en la dirección de \vec{v} . Esto es fácil de demostrar, pues la fuerza de Lorentz que actúa sobre la carga es

$$\begin{aligned}\vec{F} &= q \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right) = q \left(\vec{E} + \frac{1}{B^2} (\vec{E} \times \vec{B}) \times \vec{B} \right) \\ \vec{F} &= q \left(\vec{E} - \frac{1}{B^2} \vec{B} \times (\vec{E} \times \vec{B}) \right) = q \left(\vec{E} - \frac{1}{B^2} B^2 \vec{E} \right) = \vec{0}\end{aligned}$$

Este fue el principio utilizado por JJ Thompson para medir la razón entre la carga y la masa del electrón



Aparato de Thompson para estudiar la deflexión de partículas cargadas

La palabra *átomo* (que significa indivisible en Griego) fue propuesta por Demócrito, quien vivió en Atenas (460-370 ac). El consideraba inconcebible que los objetos materiales pudiesen ser divididos en partes cada vez más pequeñas, sin límite, y postuló la existencia de partículas elementales, tan pequeñas que no son posibles dividirlas en partes más pequeñas. El distinguió cuatro tipos de átomos, y propuso que toda la materia está conformada por estos objetos indivisibles. Hoy en día, la idea de Demócrito es transferida a partículas más pequeñas aún, que constituyen la estructura interna de los átomos, y se espera que los electrones, protones, y las demás partículas elementales sean realmente indivisibles.

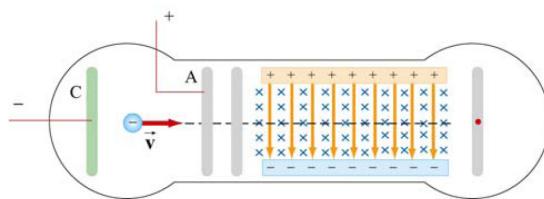
Hacia el siglo 19, la atención de muchos físicos fue puesta en el paso de la electricidad a través de los gases. Se sabía que los gases, siendo muy buenos aislantes eléctricos, a veces podían conducir electricidad al ser sometidos a tensiones muy altas. Sin embargo, Sir Williams Crookes mostró que el paso de la electricidad en gases tomaba una forma muy clara (en efecto, se ven haces de luz) cuando la presión del gas es reducida a una pequeña fracción de una atmósfera

Los tubos de Crookes emitían luz de determinado color dependiendo de la naturaleza del gas, y ellos aún brillan en las calles y ciudades de todo el mundo



Tubo de Crooke. Éste consiste de un ánodo y un cátodo entre los cuales se establece una diferencia de potencial, al interior se tiene gas a baja presión

Al colocar un imán cerca del tubo, Crookes observó la deflección de estos *rayos catódicos*, tal cual sucede con las partículas cargadas. Al mismo tiempo, Jean Perrin en Francia descubrió que al colocar una placa metálica en el camino del haz, ésta adquiría una carga eléctrica negativa. Todo esto parecía indicar que estos rayos se trataban de partículas cargadas negativamente moviéndose a través del gas. Sin embargo, esta idea era opuesta a las observaciones del físico Philipp Lenard, quien habría encontrado que los rayos catódicos eran capaces de traspasar varias pantallas puestas en su camino sin dejar agujeros en ellas. Lenard pensaba que sólo ollas, y no un haz de partículas, podría hacer esto. La tarea de resolver estas contradicciones experimentales, y probar que los rayos catódicos son en efecto un haz de partículas, y encontrar las características físicas de éstas partículas, le fue dada a Joseph John Thompson por el Consejo Supremo del progreso de la ciencia. Thompson fue un físico nacido en Manchester, que a los 40 años era director del famoso laboratorio de Cavendish en Cambridge. Asumiendo que los rayos catódicos son partículas moviéndose a alta velocidad, Thompson decidió medir su masa y su carga, y una parte de esta investigación consistió en observar la deflexión de rayos catódicos en un campo magnético



Los electrones con carga $-e$ y masa m son emitidos del cátodo C y acelerados hacia A . Sea la diferencia de potencial entre C y A $\Delta V = \phi_a - \phi_c$. El cambio en la energía potencial del electrón es igual al trabajo externo realizado para acelerarlo, por conservación de energía, la energía cinética adquirida está dada por

$$\frac{1}{2}mv^2 = e\Delta V$$

y entonces la velocidad que adquieren los electrones al pasar por A es

$$v = \sqrt{\frac{2e\Delta V}{m}}$$

A continuación los electrones entran en una región donde existe un campo eléctrico (hacia abajo en la figura), y un campo magnético perpendicular (hacia adentro de la hoja). Si las partículas ingresan con velocidad

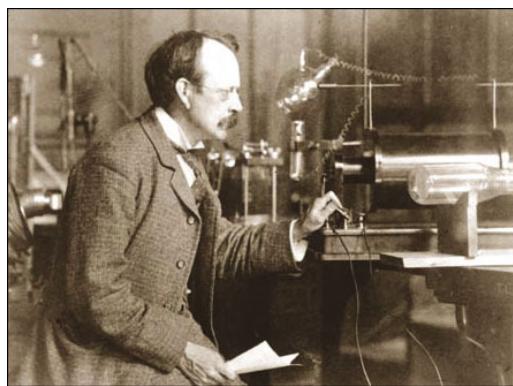
$$\vec{v} = \frac{1}{B^2} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{E}{B} \hat{i}$$

se moverán en una línea recta, y pasarán por un agujero (en rojo) al final del selector de velocidades. Así, se ajusta el valor de ΔV , E y B de forma que las partículas sean detectadas al final del selector de velocidades. Cuando esto sucede, se obtiene

$$\frac{e}{m} = \frac{E^2}{2\Delta V B^2}$$

Al medir E , B y ΔV , se obtiene la razón entre la carga y la masa del electrón. Esta es aproximadamente

$$\frac{e}{m} = 1,7588 \times 10^{11} C/kg$$

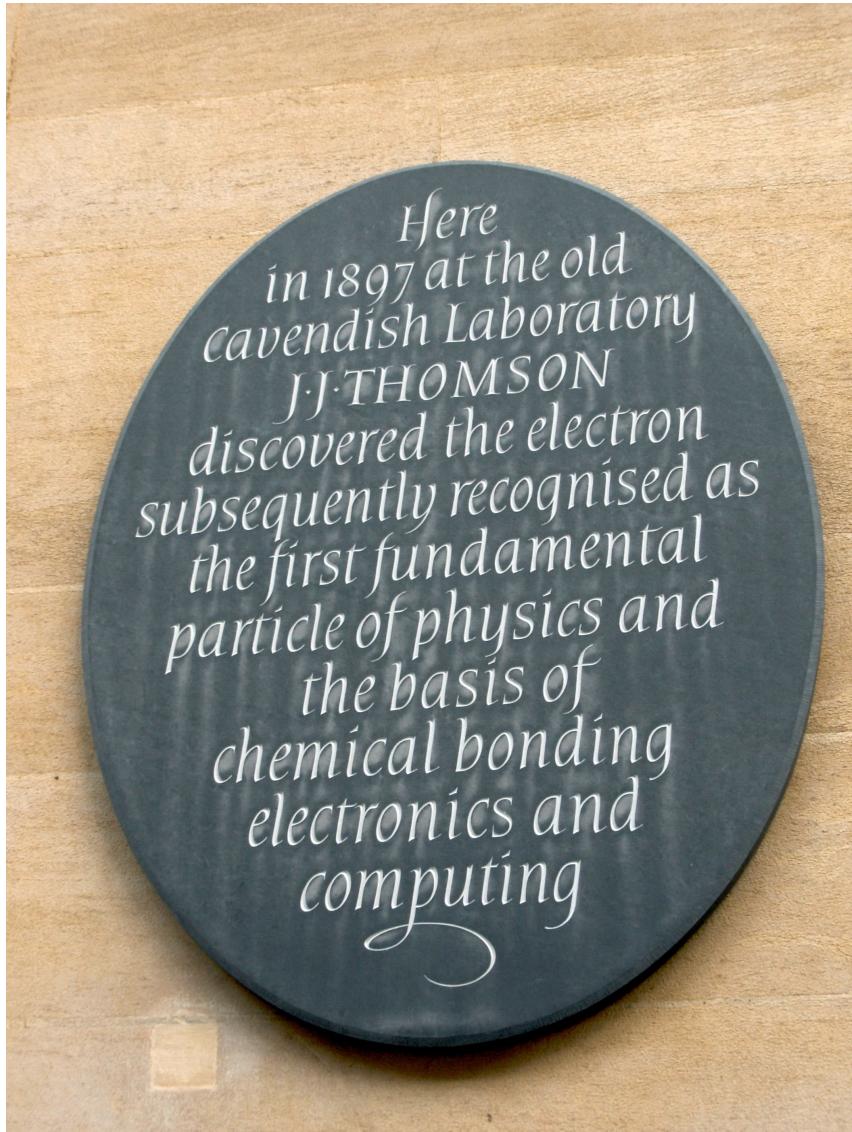


Sir J.J. Thompson y sus aparatos

En esa fecha el valor de e habría sido obtenido experimentalmente gracias a los experimentos de electrólisis de líquidos de Faraday. De todas formas Thompson realizó un experimento especial para medir la carga con gases ionizados. Este método se basó en el descubrimiento de otro físico del laboratorio Cavendish, C.T.R Wilson. Gracias a esto Thompson logró medir el valor de m , usando sus resultados para e/m , obteniendo

$$m = 9,11 \times 10^{-31} kg$$

y esta resultó ser 1840 veces más pequeña que la masa del átomo de Hidrógeno. Ésto fue un gran descubrimiento, una partícula aproximadamente 2 mil veces más liviana que el átomo más liviano! Thompson concluyó que las partículas que conforman los rayos catódicos eran cargas eléctricas, y les llamó electrones. El visualizó el átomo como una esfera de un material masivo cargado positivamente, con pequeños electrones esparcidos estáticamente a través del núcleo



Placa conmemorativa en Cambridge acerca del descubrimiento del electrón. Cortesía de mi amigo Germán Vogel



Fig. 12.1: Joseph John Thompson

Joseph John Thompson(1856-1940) Físico Inglés. En 1870 estudió Ingeniería en la Universidad de Manchester, y se trasladó a Trinity College de Cambridge en 1876. En 1884 se convirtió en profesor de Física en Cavendish. Uno de sus alumnos fue Ernest Rutherford, quién más tarde sería su sucesor en el puesto. Obtuvo el Premio Nobel en 1906, *en reconocimiento de los grandes méritos de sus investigaciones teóricas y experimentales en la conducción de la electricidad generada por los gases*. Fue nombrado caballero en 1908 y nombrado en la Orden del Mérito en 1912. En 1918 fue nombrado Rector del Trinity College de Cambridge, donde permaneció hasta su muerte.

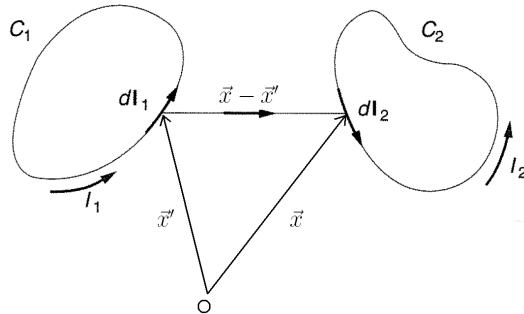
12.3. Ley de Biot-Savart

Hemos descrito rápidamente la fuerza que se ejerce sobre una partícula cargada en un campo magnético. Experimentalmente, resulta mucho más accesible estudiar que ocurre cuando se acercan dos conductores rígidos (es decir, son mantenidos en su posición) con corriente (dado que en ellos hay muchísimos electrones en movimiento, los efectos magnéticos ser amplifican). Consideremos una curva Γ en el espacio, que representa un conductor lineal que lleva una corriente I . Vamos a recorrer esta curva en el **sentido de la corriente**. En el punto $\vec{x} \in \Gamma$, definimos un **elemento de corriente** infinitesimal dado por

$$d\vec{I}(\vec{x}) = Id\vec{x}$$

donde I es la magnitud de la corriente (es una constante) y $d\vec{x}$ es el elemento de línea sobre la curva Γ (Insisto en que su dirección apunta en el sentido de la corriente) .

Sean dos circuitos lineales, Γ_1 y Γ_2 , con corrientes I_1 e I_2 , respectivamente. Ambas curvas serán parametrizadas de forma de ser recorridas en el sentido de sus respectivas corrientes



Tomamos un elemento de corriente en \vec{x}' sobre el circuito 1, y un elemento de corriente en \vec{x} sobre el circuito 2. La fuerza que ejerce el elemento de corriente 1 sobre el elemento de corriente 2 está dada por

$$d\vec{F}_2(\vec{x}) = I_2 d\vec{x} \times \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{I_1 d\vec{x}' \times (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \right)$$

donde $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} (H/m)$ es la **permeabilidad del vacío**. Notar que esta impresionante expresión es mucho más compleja que la ley de Coulomb, primero que nada, implica 2 productos vectoriales. Es importante notar además que la fuerza resultante ya no apunta necesariamente en la dirección que une ambos elementos de línea (No es una fuerza Central). Lo que sí se sigue cumpliendo es que la magnitud de la fuerza decae según el cuadrado de la distancia. Ahora bien, podemos obtener la fuerza que ejerce todo el circuito 1 sobre el elemento de línea 2, utilizando el **principio de superposición**, e integrando como sigue

$$\vec{F}_2 = I_2 d\vec{x} \times \left(\oint_{\Gamma_1} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 d\vec{x}' \times (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \right)$$

Finalmente, la fuerza total sobre el circuito 2 está dada por

$$\vec{F}_2 = \oint_{\Gamma_2} I_2 d\vec{x} \times \left(\oint_{\Gamma_1} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 d\vec{x}' \times (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \right)$$

$$\vec{F}_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{\Gamma_2} \oint_{\Gamma_1} \frac{d\vec{x} \times [d\vec{x}' \times (\vec{x} - \vec{x}')] }{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$$

Aparentemente esta fórmula presenta una simetría y podría pensarse que no se satisface la tercera ley de Newton. Sin embargo, se puede demostrar que esta ley es absolutamente simétrica, de forma que

$$\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$$

La demostración es la siguiente

$$\frac{d\vec{x} \times [d\vec{x}' \times (\vec{x} - \vec{x}')] }{| \vec{x} - \vec{x}' |^3} = \frac{[d\vec{x} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')] d\vec{x}'}{| \vec{x} - \vec{x}' |^3} - \frac{(d\vec{x} \cdot d\vec{x}') (\vec{x} - \vec{x}')}{| \vec{x} - \vec{x}' |^3}$$

$$\frac{d\vec{x}' \times [d\vec{x} \times (\vec{x} - \vec{x}')] }{| \vec{x} - \vec{x}' |^3} = -d\vec{x}' \left(d\vec{x} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{| \vec{x} - \vec{x}' |} \right) - d\vec{x} \cdot d\vec{x}' \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{| \vec{x} - \vec{x}' |^3}$$

El término de la izquierda es una diferencial exacta, de forma que

$$\vec{F}_2 = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{\Gamma_1} d\vec{x}' \oint_{\Gamma_2} d\vec{x} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{| \vec{x} - \vec{x}' |} - \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{\Gamma_2} \oint_{\Gamma_1} d\vec{x} \cdot d\vec{x}' \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{| \vec{x} - \vec{x}' |^3}$$

$$\vec{F}_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{\Gamma_2} \oint_{\Gamma_1} d\vec{x} \cdot d\vec{x}' \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{| \vec{x} - \vec{x}' |^3}$$

Hemos obtenido una identidad para la fuerza que ejerce el circuito 1 sobre el circuito 2 que es totalmente **simétrica**. De aquí es evidente que

$$F_1 = -F_2$$

12.3.1. Campo de un circuito rígido, Biot-Savart

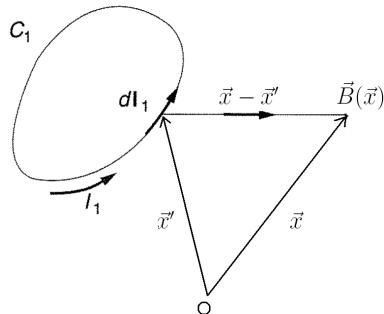
Hemos concluído que la fuerza sobre el circuito 2 es

$$\vec{F}_2 = \oint_{\Gamma_2} I_2 d\vec{x} \times \left(\oint_{\Gamma_1} \frac{\mu_0 I_1 d\vec{x}' \times (\vec{x} - \vec{x}')}{4\pi | \vec{x} - \vec{x}' |^3} \right)$$

es fácil ver que la expresión entre paréntesis no depende en absoluto del circuito 2, es de hecho, un campo vectorial $\vec{B}(\vec{x})$,

$$\vec{F}_2 = \oint_{\Gamma_2} I_2 d\vec{x} \times \vec{B}(\vec{x})$$

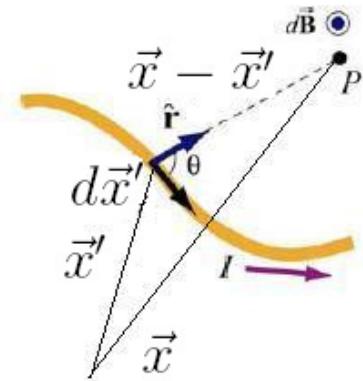
$\vec{B}_{\vec{x}}$ es el **Campo Magnético en \vec{x} debido a la corriente I_1**



Es decir

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma_1} \frac{I_1 d\vec{x}' \times (\vec{x} - \vec{x}')}{| \vec{x} - \vec{x}' |^3}$$

De esto podemos leer que el campo magnético en cualquier punto \vec{x} debido a ésta corriente se puede calcular al sumar las contribuciones infinitesimales $d\vec{B}(\vec{x})$, de pequeños segmentos de conductor $d\vec{x}$



Esta es la **ley de Biot-Savart**, y da una expresión para la contribución al campo magnético de un elemento de corriente $Id\vec{x}$

$$d\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{x}' \times (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$$



Fig. 12.2: Jean Baptiste Biot

Jean Baptiste Biot (1774-1862) Físico y matemático Francés. Estudió la polarización de la luz cuando pasaba a través de soluciones químicas, y las relaciones entre la corriente eléctrica y el magnetismo. La Ley de Biot-Savart describe como se genera el campo magnético mediante una corriente estacionaria y se proporcionó el nombre gracias a su colaboración con Félix Savart. Un cráter en la luna lleva su nombre en honor a sus contribuciones

12.4. Fuerza sobre conductores de corriente

Habíamos obtenido que la fuerza sobre un circuito con corriente I_2 es

$$\vec{F}_2 = \oint_{\Gamma_2} I_2 d\vec{x} \times \vec{B}(\vec{x})$$

Donde $\vec{B}(\vec{x})$ es cualquier campo magnético externo

Esto nos dice que para un conductor de forma arbitraria, la fuerza magnética se puede obtener al sumar sobre las fuerzas actuando sobre pequeños segmentos que constituyen al conductor. Sea un segmento diferencial denotado por $d\vec{x}$

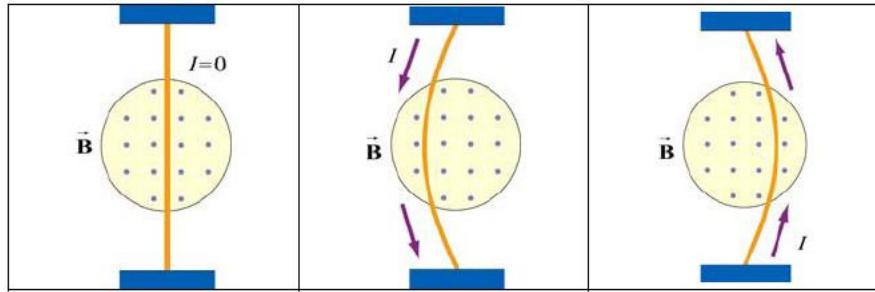
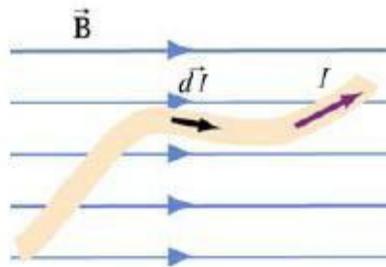


Fig. 12.3: La figura ilustra el efecto de la fuerza magnética sobre conductores



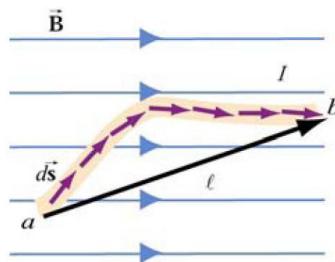
Entonces la fuerza sobre un elemento infinitesimal de un conductor de carga es

$$d\vec{F}_B(\vec{x}) = Id\vec{x} \times \vec{B}(\vec{x})$$

Anteriormente calculamos la fuerza sobre un conductor definido por una curva cerrada. Si se desea encontrar la fuerza sobre un segmento de conductor entonces

$$\vec{F}_B = I \int_a^b d\vec{x} \times \vec{B}(\vec{x})$$

donde a y b representan los extremos del conductor. Como ejemplo, consideremos un conductor curvo que lleva corriente I y sumergido en un campo magnético **uniforme** \vec{B} , como se muestra en la figura



Tenemos entonces que la fuerza sobre este conductor está dada por

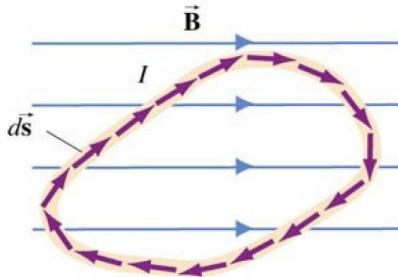
$$\vec{F}_B = I \left(\int_a^b d\vec{x} \right) \times \vec{B}(\vec{x}) = I (\vec{x}_b - \vec{x}_a) \times \vec{B}(\vec{x})$$

Notar que esto se debe a que el campo magnético es uniforme (sólo en este caso!). Sea $\vec{l} = \vec{x}_b - \vec{x}_a$ el vector dirigido desde a hacia b . Con esta notación

$$\vec{F}_B = Id\vec{l} \times \vec{B}$$

Ahora veamos que sucede si el conductor constituye un circuito cerrado de forma arbitraria, entonces la fuerza será

$$\vec{F}_B = I \left(\oint_{\Gamma} d\vec{x} \right) \times \vec{B}$$



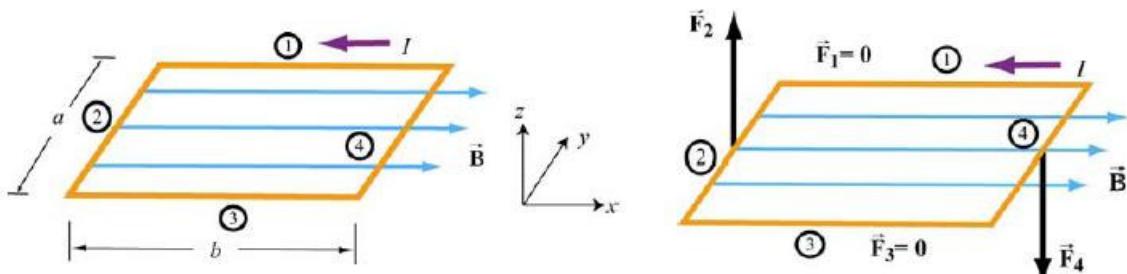
Pero

$$\oint_{\Gamma} d\vec{x} = \vec{0}$$

La fuerza magnética neta sobre un circuito cerrado en un campo magnético **uniforme** es $\vec{F}_B = \vec{0}$

12.5. Torque sobre una espira

Veamos qué sucede cuando colocamos una espira rectangular que lleva corriente estacionaria I en el plano XY , ante la presencia de un campo magnético uniforme $\vec{B}(\vec{x}) = B\hat{i}$ paralelo al plano de la espira



Vemos que las fuerzas magnéticas actuando en los segmentos 1 y 3 son nulas debido a que los vectores $\vec{l}_1 = -b\hat{i}$ y $\vec{l}_3 = b\hat{i}$ son paralelos al campo magnético \vec{B} . Por otro lado, las fuerzas magnéticas actuando en los segmentos 2 y 4 son

$$\vec{F}_2 = I \left(-a\hat{j} \right) \times B\hat{i} = IaB\hat{k}$$

$$\vec{F}_4 = I \left(a\hat{j} \right) \times B\hat{i} = -IaB\hat{k}$$

De aquí es claro que la fuerza neta es 0, algo que era de esperar por lo visto anteriormente. Sin embargo, aun cuando la fuerza neta sobre la espira es nula, las fuerzas \vec{F}_2 y \vec{F}_4 producirán un torque que genera una rotación de la espira con respecto al eje y . El torque con respecto al centro de la espira es

$$\vec{\tau}_c = \left(-b/2\hat{i} \right) \times \vec{F}_2 + \left(b/2\hat{i} \right) \times \vec{F}_4 = (-b/2)\hat{i} \times (IaB\hat{k}) + (b/2\hat{i}) \times (-IaB\hat{k})$$

$$\vec{\tau}_c = \left(\frac{IabB}{2} + \frac{IabB}{2} \right) \hat{j} = IabB\hat{j} = IAB\hat{j}$$

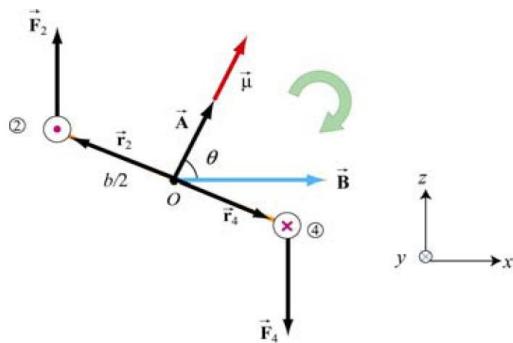
Donde $A = ab$ representa el área de la espira. Es conveniente introducir el vector de área, en este caso constante sobre la superficie limitada por la espira

$$\vec{S} = A\hat{n}$$

con \hat{n} el vector unitario en la dirección normal al plano de la espira. En este caso, tenemos $\hat{n} = \hat{k}$. La expresión para el torque se puede reescribir entonces como

$$\vec{\tau} = I\vec{A} \times \vec{B}$$

Consideremos ahora el caso más general donde la espira (o el vector de área \vec{S}) forma un ángulo ϑ con respecto al campo magnético



De la figura

$$\vec{r}_2 = \frac{b}{2} \left(-\sin \vartheta \hat{i} + \cos \vartheta \hat{k} \right) = -\vec{r}_4$$

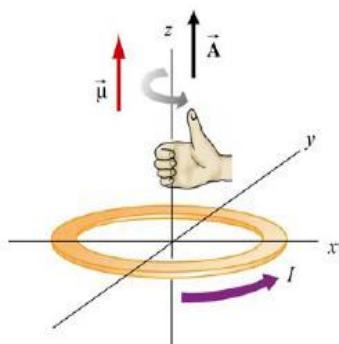
y el torque neto es

$$\hat{\tau}_c = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{r}_4 \times \vec{F}_4 = 2\vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = 2\frac{b}{2} \left(-\sin \vartheta \hat{i} + \cos \vartheta \hat{k} \right) \times (IaB\hat{k})$$

$$\hat{\tau}_c = IabB \sin \vartheta \hat{j} = I\vec{A} \times \vec{B}$$

Se obtiene la misma expresión obtenida anteriormente. Notar que la magnitud del torque es máxima cuando el vector normal a la espira es perpendicular al campo magnético. El torque es nulo cuando la normal a la espira está orientada en la dirección paralela al campo magnético. El vector $I\vec{A}$ es, por definición, el **momento magnético** de la espira

$$\vec{\mu} = I\vec{A}$$



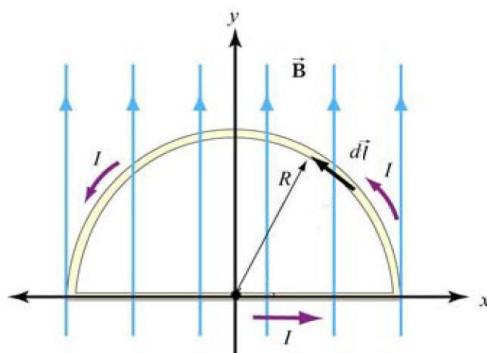
La dirección de $\vec{\mu}$ es la misma que el vector de área \vec{S} (perpendicular al plano de la espira). Con esto, el torque sobre una espira de corriente es

$$\vec{\tau}_c = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

Una espira en un campo magnético uniforme experimenta un torque hasta que su momento magnético esté completamente alineado con el campo magnético. Notar la analogía con el torque que ejerce un campo eléctrico sobre un dipolo. En efecto, es posible definir un momento magnético para una distribución general de corriente en el espacio. Así, cada átomo en un material estará caracterizado por un momento magnético, y el efecto de un campo magnético sobre el material será el de alinear los momentos magnéticos de forma paralela al campo. Estos momentos magnéticos alineados (como sucede en un imán) también generarán un campo magnético

Problema

Consideré el circuito cerrado de la figura que lleva una corriente I en el sentido contrario al reloj. Un campo magnético uniforme apuntando en la dirección \hat{j} es aplicado. Encuentre la fuerza magnética que actúa sobre el elemento rígido y el arco semicircular.



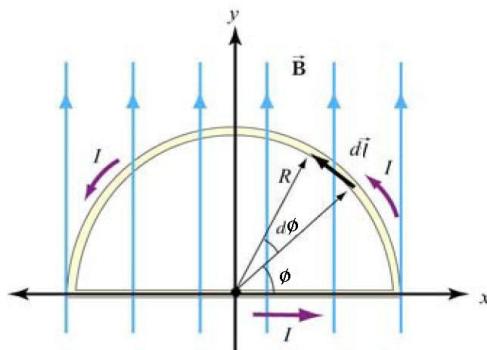
Solución

Tenemos un campo uniforme dado por $\vec{B} = B\hat{j}$, llamemos \vec{F}_1 y \vec{F}_2 a las fuerzas actuando sobre el segmento rígido y la parte semicircular, respectivamente. La fuerza sobre el segmento rígido es

$$\vec{F}_1 = I \left(\int_{-R}^R d\vec{x} \right) \times B\hat{j} = I \left(\int_{-R}^R dx \right) \hat{i} \times B\hat{j} = I 2R \hat{i} \times B\hat{j} = 2IRB\hat{k}$$

Ahora, para calcular \vec{F}_2 , notamos que elemento infinitesimal $d\vec{x}$ en el semicírculo se puede escribir como

$$d\vec{x} = dx\hat{e}_\varphi = R d\varphi (-\sin \varphi \hat{i} + \cos \varphi \hat{j})$$



La fuerza que actúa sobre un elemento $d\vec{x}$ es

$$d\vec{F}_2 = Id\vec{x} \times \vec{B} = IR d\varphi \left(-\sin \varphi \hat{i} + \cos \varphi \hat{j} \right) \times (B\hat{j}) = -IBR d\varphi \sin \varphi \hat{k}$$

Integrando sobre el arco semicircular, tenemos

$$\vec{F}_2 = -IBR \hat{k} \int_0^\pi d\varphi \sin \varphi = -2IBR \hat{k}$$

Así, la fuerza neta que actúa sobre el circuito completo es

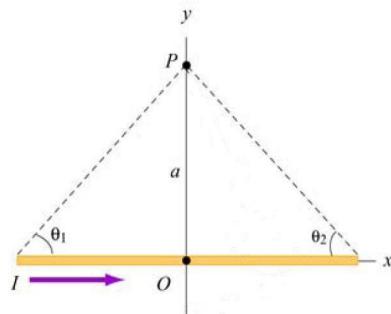
$$\vec{F}_{net} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$$

Consistente con el hecho de que la fuerza sobre un circuito cerrado en un campo magnético uniforme es siempre nula

Problema

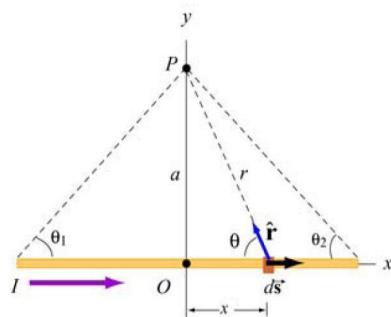
Un alambre delgado y rígido que lleva una corriente I es colocado a lo largo del eje x . Calcular el campo magnético en el punto P . Analice el caso particular en que el alambre es simétrico con respecto al eje y

¿Qué sucede cuando $L \rightarrow \infty$?



Solución

Consideremos un elemento diferencial $d\vec{x}' = dx'\hat{i}$ que lleva una corriente I en la dirección x



Para calcular el campo magnético en el punto P utilizamos la ley de Biot-Savart. Segundo nuestra elección del origen, se tiene $\vec{x} = a\hat{j}$ y $\vec{x}' = x\hat{i}$. Así

$$d\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{x}' \times (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$$

$$\vec{x} - \vec{x}' = a\hat{j} - x\hat{i}$$

y su magnitud es

$$|\vec{x} - \vec{x}'| = \sqrt{a^2 + x^2}$$

Con esto, la contribución al campo queda

$$d\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{dx\hat{i} \times (a\hat{j} - x\hat{i})}{(a^2 + x^2)^{3/2}}$$

$$d\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{adx\hat{k}}{(a^2 + x^2)^{3/2}}$$

Y el campo total en P será

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{-L_1}^{L_2} \frac{adx\hat{k}}{(a^2 + x^2)^{3/2}}$$

Notar además que

$$\tan \vartheta_1 = \frac{a}{L_1} \rightarrow \tan(-\vartheta_1) = -\frac{a}{L_1} \rightarrow -L_1 = a \cot(-\vartheta_1)$$

$$\tan \vartheta_2 = \frac{a}{L_2} \rightarrow L_2 = a \vartheta_2$$

Para resolver esta integral, utilizamos el siguiente gambio

$$x = a \operatorname{ctg} \vartheta \rightarrow dx = -a \csc^2 \vartheta d\vartheta$$

y la integral queda

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{-\vartheta_1}^{\vartheta_2} \frac{d\vartheta a (-a \csc^2 \vartheta) \hat{k}}{(a^2 + a^2 \operatorname{ctg}^2 \vartheta)^{3/2}}$$

Ahora nos comemos a la reina

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi a} I \int_{-\vartheta_1}^{\vartheta_2} \frac{-d\vartheta \csc^2 \vartheta \hat{k}}{(1 + \operatorname{ctg}^2 \vartheta)^{3/2}} = -\frac{\mu_0}{4\pi a} I \int_{-\vartheta_1}^{\vartheta_2} d\vartheta \sin \vartheta \hat{k}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos \vartheta_1 + \cos \vartheta_2) \hat{k}$$

En el caso simétrico en que $\vartheta_2 = \vartheta_1$, y digamos que el largo total es $2L$, entonces

$$\cos \vartheta_1 = \frac{L}{\sqrt{L^2 + a^2}}$$

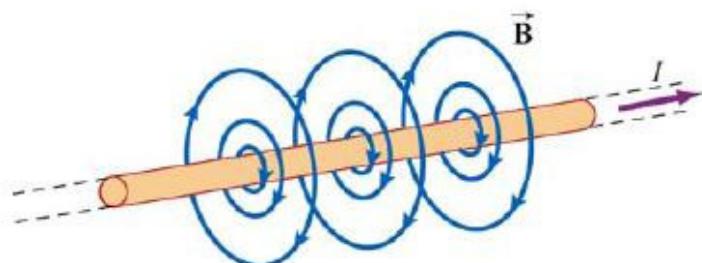
y el campo es

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \frac{L}{\sqrt{L^2 + a^2}} \hat{k}$$

De aquí es claro que si $L \rightarrow \infty$, o , equivalentemente, $\vartheta_1 \rightarrow 0, \vartheta_2 \rightarrow 0$, el campo magnético a una distancia a del conductor es

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \hat{k}$$

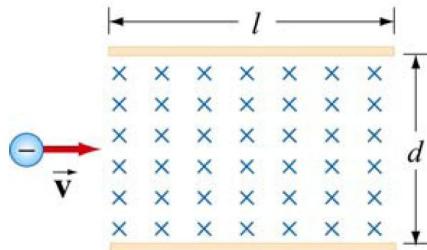
Notemos que en este límite, el sistema posee simetría cilíndrica, y las líneas de campo magnético son circulares. Este resultado se comprobará más adelante con la ley de Ampère



Problema

Se lanza un electrón (carga $-e$) con velocidad inicial \vec{v} en el medio de dos placas entre las cuales existe un campo magnético \vec{B} constante (entrando a la hoja). Ignore todo efecto gravitacional
a) ¿Hacia dónde se deflecta la trayectoria?

b) ¿Cuál es la magnitud de la velocidad si la partícula choca exactamente con el fin de la placa?



Solución

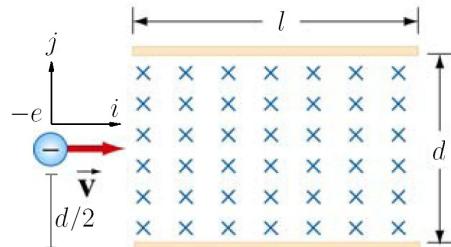
La fuerza de Lorentz es la unión entre el electromagnetismo y la mecánica, y en general una partícula de carga q en presencia de campos \vec{E} y \vec{B} está sometida a una fuerza

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

donde \vec{v} es la velocidad de la partícula. En este caso, $q = -e$, y el campo eléctrico es nulo.
De esta forma

$$\vec{F} = -ev \times \vec{B}$$

Dado que la velocidad inicial con que incide el electrón es perpendicular al campo magnético, la trayectoria será una circunferencia en el plano $x - y$ (siempre y cuando la partícula esté contenida en la región donde existe campo magnético)



Para analizar hacia dónde se deflectará la partícula, basta con analizar qué ocurre en el instante inicial $t = 0$

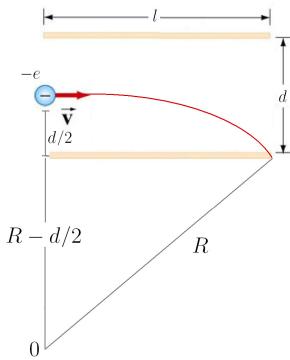
$$\vec{v}(0) \times \vec{B} = v\hat{i} \times -B\hat{k} = vB\hat{j}$$

Luego en $t = 0$ la fuerza es

$$\vec{F}(0) = -evB\hat{j}$$

Es decir, la partícula se deflecta hacia abajo

b) Dado que el electrón impacta con el extremo derecho de la placa inferior, la trayectoria de la partícula es la siguiente



La magnitud de la fuerza magnética sobre el electrón es constante y dada por

$$|\vec{F}| = evB$$

y su dirección es radial (apuntando hacia el centro de curvatura). Por dinámica circular, se tendrá

$$evB = \frac{mv^2}{R}$$

luego

$$R = \frac{mv}{eB}$$

por otro lado, se tiene

$$\begin{aligned} l^2 + \left(R - \frac{d}{2}\right)^2 &= R^2 \\ l^2 + R^2 - Rd + \frac{d^2}{4} &= R^2 \\ R &= \frac{l^2}{d} + \frac{d}{4} \end{aligned}$$

entonces

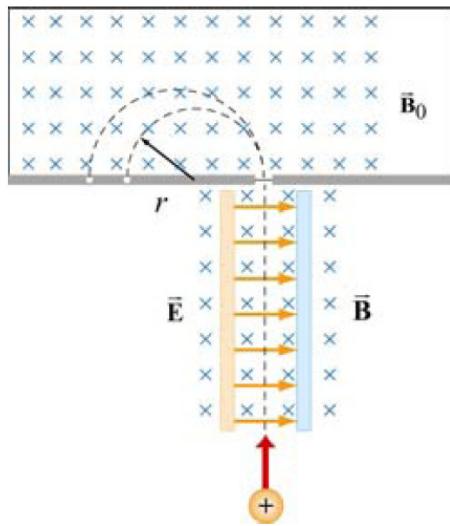
$$\frac{mv}{eB} = \frac{l^2}{d} + \frac{d}{4}$$

y el módulo de la velocidad del electrón resulta ser

$$v = \frac{eB}{m} \left(\frac{l^2}{d} + \frac{d}{4} \right)$$

Problema

En la figura se muestran los componentes esenciales de un espectrómetro de masas. Éste es utilizado para medir la masa de partículas cargadas. En una fuente se produce un ión de masa m y carga q , el cual parte del reposo y es acelerado por una diferencia de potencial ΔV , entrando a un proceso de selección, donde hay un campo magnético \vec{B} uniforme (entrando a la hoja), y un campo eléctrico deflector \vec{E} . Sólo partículas con velocidad \vec{v} constante abandonan el selector (es un selector de velocidades). Las partículas emergentes entran a una segunda región donde existe otro campo magnético \vec{B}_0 (entrando a la hoja), la partícula sigue una trayectoria circular y se estrella en un detector a distancia $2r$ del punto de entrada



- Encuentre la velocidad \vec{v}
- Encuentre el campo \vec{B}
- Finalmente, encuentre la masa m de la partícula

Solución

- La velocidad v con que el ión entra al selector se obtiene por conservación de energía

$$\frac{1}{2}mv^2 = q\Delta V$$

donde el cambio en energía potencial se traduce en un aumento en la energía cinética

$$\vec{v} = \sqrt{\frac{2q\Delta V}{m}} \hat{j}$$

- Para que la velocidad de la partícula permanezca constante y salga a través del selector, se requiere que la fuerza de Lorentz actuando sobre ella sea nula. Se tiene

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

donde $\vec{E} = E\hat{i}$, $\vec{B} = -B\hat{k}$, $\vec{v} = v\hat{j}$

$$qE\hat{i} - qv\hat{j} \times B\hat{k} = 0$$

$$qE\hat{i} - qvB\hat{i} = 0 \rightarrow qE = qvB$$

y entonces

$$B = \frac{E}{v} = E \sqrt{\frac{m}{2q\Delta V}}$$

c) Luego de ingresar a la región de campo magnético \vec{B}_0 , la partícula describe una circunferencia de radio r . La magnitud de la fuerza magnética es qvB_0 . Por dinámica circular

$$qvB_0 = m \frac{v^2}{r}$$

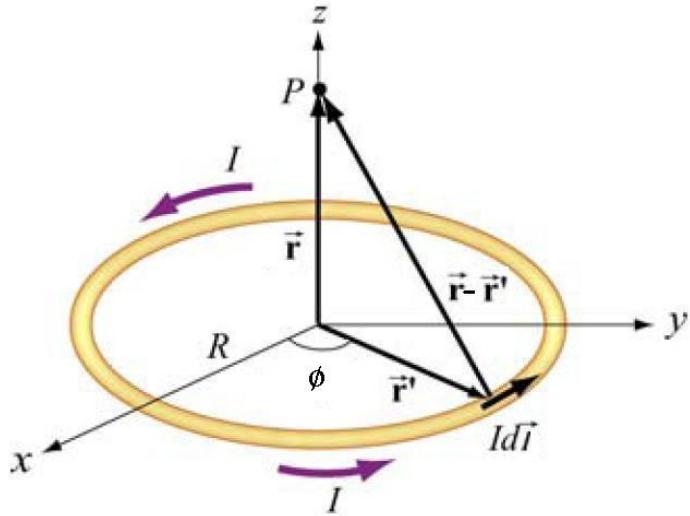
$$qB_0 = \frac{m}{r} \sqrt{\frac{2q\Delta V}{m}}$$

Finalmente

$$m = \frac{qB_0^2 r^2}{2\Delta V}$$

Problema

Consideré una espira circular que lleva corriente I en el sentido indicado por la figura. Calcule el campo magnético a una distancia z en el eje de simetría de la espira



Solución

Utilizando la ley de Biot-Savart para un elemento infinitesimal de la espira

$$d\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{x}' \times (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$$

en este caso, tenemos

$$\vec{x}' = R \left(\cos \phi \hat{i} + \sin \phi \hat{j} \right) = R \hat{r}(\phi)$$

$$d\vec{x}' = Rd\phi \left(-\hat{i} \sin \phi + \hat{j} \cos \phi \right) = Rd\phi \hat{\phi}$$

$$\vec{x} - \vec{x}' = z\hat{k} - \left(R \cos \phi \hat{i} + R \sin \phi \hat{j} \right) = -\hat{i}R \cos \phi - \hat{j}R \sin \phi + \hat{k}z$$

y

$$|\vec{x} - \vec{x}'| = (R^2 + z^2)^{1/2}$$

Así

$$d\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{Rd\phi \left(-\hat{i} \sin \phi + \hat{j} \cos \phi \right) \times \left(-\hat{i}R \cos \phi - \hat{j}R \sin \phi + \hat{k}z \right)}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$d\vec{B}(\vec{x}) = d\phi \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{(R^2 \sin \phi^2 \hat{k} + Rz \sin \phi \hat{j} + R^2 \cos \phi^2 \hat{k} + Rz \cos \phi \hat{i})}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$d\vec{B}(\vec{x}) = d\phi \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{(R^2 \hat{k} + Rz \sin \phi \hat{j} + Rz \cos \phi \hat{i})}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

Con esto

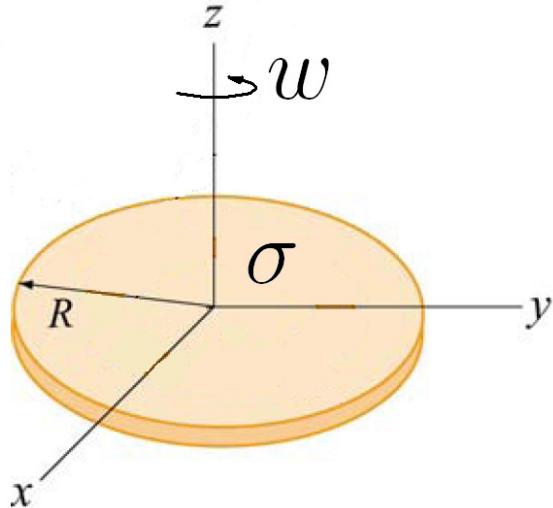
$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \frac{(R^2 \hat{k} + Rz \sin \phi \hat{j} + Rz \cos \phi \hat{i})}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

Las integrales según \hat{i} y \hat{j} son cero, como era de esperarse por argumentos de simetría. Finalmente el campo magnético a una distancia z del anillo es

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \hat{k} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \hat{k}$$

Problema

Considere un disco muy delgado que tiene una densidad de carga superficial σ uniformemente distribuida. El disco se pone a girar a velocidad angular w en torno a su eje. Encuentre el campo magnético en el eje del disco

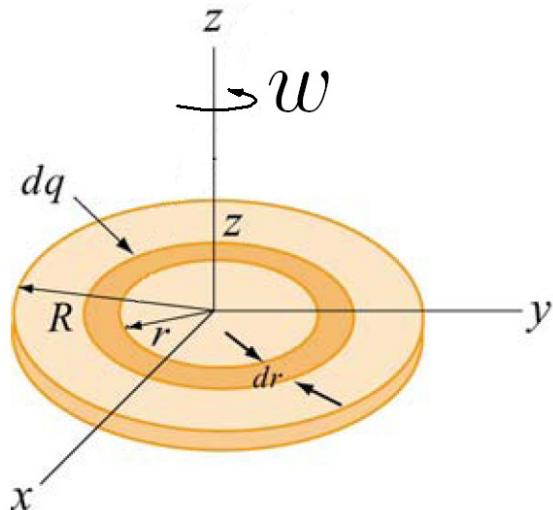


Solución

Se tiene una distribución de carga en movimiento (en efecto es una distribución de corriente), de forma que ésta generará sin duda un campo magnético. Anteriormente se determinó el campo magnético en el eje de un anillo de radio r con corriente I , esto es

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I r^2}{2(z^2 + r^2)^{3/2}}$$

Podemos ver el disco como una superposición de anillos con corriente de ancho infinitesimal dr , de esta forma por el principio de superposición el campo magnético total será la suma de las contribuciones de estos anillos. Veamos que ocurre en la porción de disco comprendida entre r y $r + dr$, con $r \in (0, R)$



La carga contenida en este anillo es

$$dq = \sigma 2\pi r dr$$

la rotación le asocia a este anillo una corriente.

La carga dq da una vuelta completa en un tiempo

$$\Delta t = \frac{2\pi}{w}$$

luego la corriente asociada es

$$dI = \frac{dq}{\Delta t} = \frac{w\sigma 2\pi r dr}{2\pi} = \sigma wr dr$$

el campo magnético a una distancia z sobre el eje del disco generado por este anillo es

$$d\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 dI r^2}{2(z^2 + r^2)^{3/2}} \hat{k} = \frac{dr \mu_0 w \sigma r^3}{2(z^2 + r^2)^{3/2}} \hat{k}$$

Entonces el campo total es

$$\vec{B}(z) = \int_0^R \frac{dr \mu_0 w r^3 \sigma}{2(z^2 + r^2)^{3/2}} \hat{k} = \frac{\mu_0 w \sigma}{2} \int_0^R \frac{dr r^3}{(z^2 + r^2)^{3/2}} \hat{k}$$

Realizando el cambio de variable

$$u^2 = z^2 + r^2, 2udu = 2rdr$$

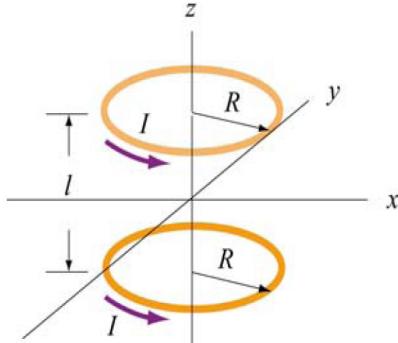
$$\begin{aligned} \int \frac{dr r^3}{(z^2 + r^2)^{3/2}} &= \int \frac{du u(u^2 - z^2)}{u^3} = \int du \left(1 - \frac{z^2}{u^2}\right) \\ \int \frac{dr r^3}{(z^2 + r^2)^{3/2}} &= u + \frac{z^2}{u} = \sqrt{z^2 + r^2} + \frac{z^2}{\sqrt{z^2 + r^2}} \end{aligned}$$

De esta forma

$$\begin{aligned} \vec{B}(z) &= \frac{\mu_0 w \sigma}{2} \left(\sqrt{z^2 + R^2} + \frac{z^2}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right) \Big|_0^R \hat{k} \\ \vec{B}(z) &= \frac{\mu_0 w \sigma}{2} \left(\sqrt{z^2 + R^2} + \frac{z^2}{\sqrt{z^2 + R^2}} - \sqrt{z^2} - \frac{z^2}{\sqrt{z^2}} \right) \hat{k} \\ \vec{B}(z) &= \frac{\mu_0 w \sigma}{2} \left(\sqrt{z^2 + R^2} + \frac{z^2}{\sqrt{z^2 + R^2}} - 2 |z| \right) \hat{k} \\ \vec{B}(z) &= \frac{\mu_0 w \sigma}{2} \left(\frac{2z^2 + R^2}{\sqrt{z^2 + R^2}} - 2 |z| \right) \hat{k} \end{aligned}$$

Problema

Considera dos bobinas de N vueltas de radio R , cada una perpendicular al eje de simetría, con sus centros localizados en $z = l/2$ y $z = -l/2$. Existe una corriente constante I en el mismo sentido en cada bobina, como se muestra en la figura. Encuentre el campo magnético en el eje a una distancia z del centro de una de las bobinas. Verifique que la primera derivada del campo en el punto medio es nula.



Solución

Del problema anterior, tenemos que para una espira circular con corriente I , radio R y a una distancia z de su centro, el campo en el eje de simetría es

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \hat{k}$$

Como una bobina consta de N espiras circulares separadas por una distancia despreciable con respecto a z , podemos utilizar el principio de superposición y obtener el campo provocado por una bobina de N vueltas

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 N I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \hat{k}$$

Ahora, sea un punto en el eje, a una distancia z del origen, el campo provocado por la bobina de abajo es

$$\vec{B}_1(z\hat{k}) = \frac{\mu_0 N I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + (z + l/2)^2)^{3/2}} \hat{k}$$

y el campo generado por la bobina de arriba

$$\vec{B}_2(z\hat{k}) = \frac{\mu_0 N I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + (z - l/2)^2)^{3/2}} \hat{k}$$

Y el campo magnético total, por el principio de superposición

$$\vec{B}(z\hat{k}) = \frac{\mu_0 N I R^2}{2} \left(\frac{1}{(R^2 + (z - l/2)^2)^{3/2}} + \frac{1}{(R^2 + (z + l/2)^2)^{3/2}} \right) \hat{k}$$

Notemos que la primera derivada con respecto a z está dada por

$$\frac{dB}{dz} = \frac{\mu_0 N I R^2}{2} \left(-\frac{3(z - l/2)}{((z - l/2)^2 + R^2)^{5/2}} - \frac{3(z + l/2)}{((z + l/2)^2 + R^2)^{5/2}} \right)$$

Se puede notar de inmediato que en el punto medio $z = 0$ se tiene

$$\frac{dB}{dz} \Big|_{z=0} = 0$$

También se puede demostrar que si la distancia l entre ambas bobinas es R (radio de las espiras), se obtiene que

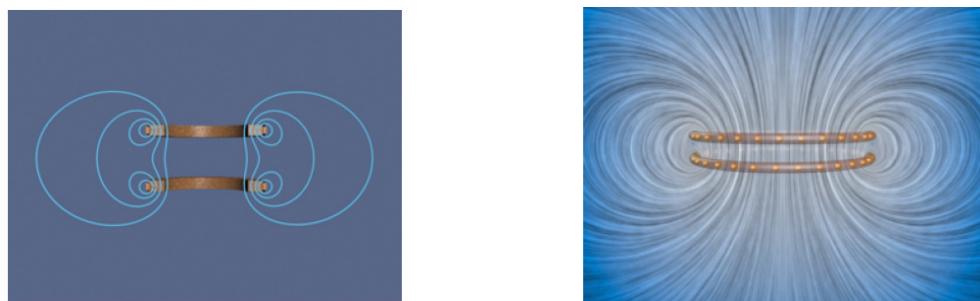
$$\frac{d^2B}{dz^2} \Big|_{z=0} = 0$$

Esta configuración se conoce como *Helmholtz coils* (bobinas de Helmholtz). La gracia es que el campo es aproximadamente uniforme en una pequeña región cercana a $z = 0$. Si se expande en torno a este punto

$$B(z) = B(0) + B'(0)z + \frac{1}{2!}B''(0)z^2 + \frac{1}{3!}B'''(0)z^3 + \dots$$

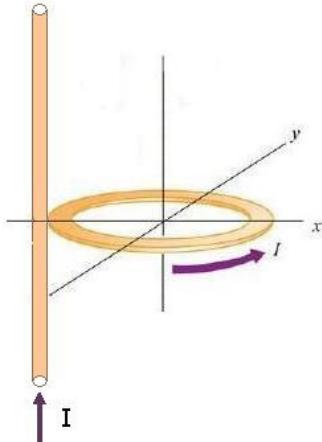
$$B(z) = B(0) + \frac{1}{3!}B'''(0)z^3 + \dots$$

Incluso se puede demostrar que la tercera derivada también es cero en $z = 0$, es decir, el cambio en el campo en el punto medio para pequeñas variaciones de z es del orden de z^4 !!



Problema

Calcule el campo magnético en el centro de la circunferencia de la figura



Solución

Este problema se soluciona fácilmente utilizando el principio de superposición.

En el problema 2 ya se vió que la magnitud del campo eléctrico debido a un alambre rectilíneo muy largo a una distancia a de él es

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

En este caso, según el sentido de la corriente

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \hat{j}$$

Es decir, apunta hacia el fondo de la hoja. Ahora, del problema 3 obtuvimos el campo magnético de un anillo a una distancia z del centro en el eje de simetría está dado por

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2 \hat{k}}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \hat{k}$$

Como interesa el campo en el centro del anillo, $z=0$

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{2R} \hat{k}$$

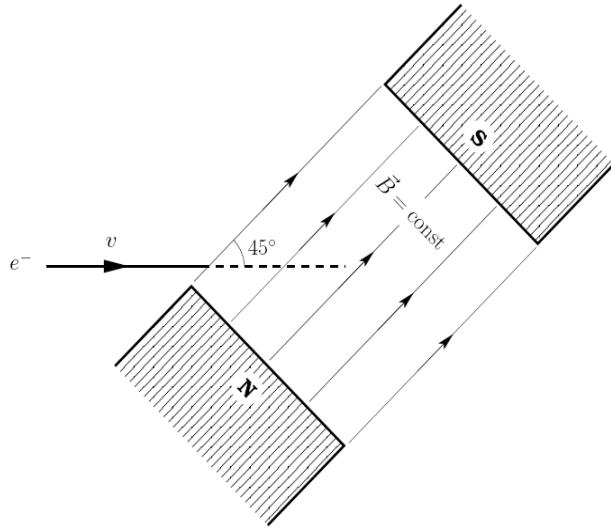
Finalmente, por el principio de superposición, el campo resultante en el centro del anillo es

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \hat{j} + \frac{\mu_0 I}{2R} \hat{k}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2R} \left(\hat{j} + \frac{1}{\pi} \hat{k} \right)$$

Problema

Una partícula de carga q y masa m entra con velocidad v en un campo magnético uniforme B como se muestra en la figura. ¿Cuánto tiempo transcurre entre que la carga ingresa al campo magnético y sale?

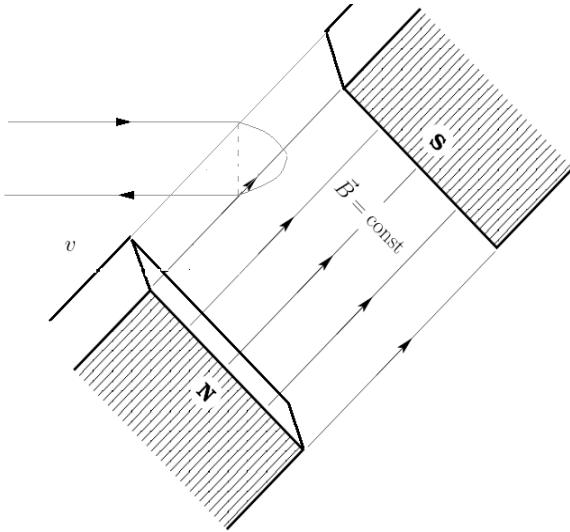


Solución

Es sabido que la fuerza magnética sobre una carga en movimiento q está dada por la fuerza de Lorentz

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

Ésta fuerza es siempre perpendicular a \vec{v} , luego, se sigue que ésta fuerza no ejerce trabajo. Con esto, la energía cinética de la partícula es constante y entonces su rapidez también. La trayectoria que sigue la partícula bajo este campo magnético uniforme es una hélice



Si se observa el movimiento proyectado en un plano perpendicular al campo magnético, la trayectoria describe una semicircunferencia, hasta volver a salir de la región donde se encuentra el campo magnético. Sea R el radio de ésta semicircunferencia, luego podemos determinar el tiempo que demora en salir como

$$T = \frac{2\pi R}{2v'} = \frac{\pi R}{v'}$$

donde v' es la componente de la velocidad que es perpendicular al campo magnético. Ahora debemos determinar R . De la segunda ley de Newton

$$\frac{mv'^2}{R} = F$$

donde F es la magnitud de la fuerza magnética que se ejerce sobre la partícula.

$$F = qvB \sin(\pi/4) = qv'B$$

de esta forma

$$\frac{mv'^2}{R} = qv'B$$

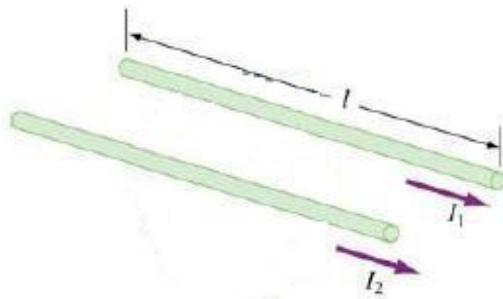
$$R = \frac{mv'}{qB}$$

Finalmente

$$T = \frac{\pi}{v'} \frac{mv'}{qB} = \frac{\pi m}{qB}$$

Problema

Considere dos alambres paralelos separados por una distancia a y que llevan corrientes I_1 e I_2 en la dirección x . Calcule la fuerza entre ambos conductores.



Solución

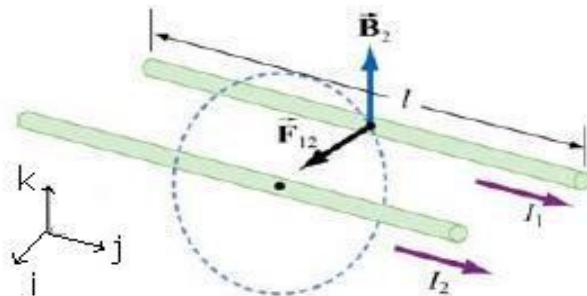
La fuerza magnética \vec{F}_1 , que ejerce el alambre 2 sobre el alambre 1, se puede obtener como

$$\vec{F}_1 = I_1 \int d\vec{l}_1 \times \vec{B}$$

donde \vec{B} es el campo magnético creado por el conductor 2. Usando el resultado del problema 2, para alambres suficientemente largos, las líneas del campo magnético debido a I_2 son círculos concéntricos con el alambre 2, con el campo \vec{B}_2 apuntando en la dirección tangencial. Así, en un punto arbitrario P sobre el alambre 1, tenemos

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{2\pi a} \hat{k}$$

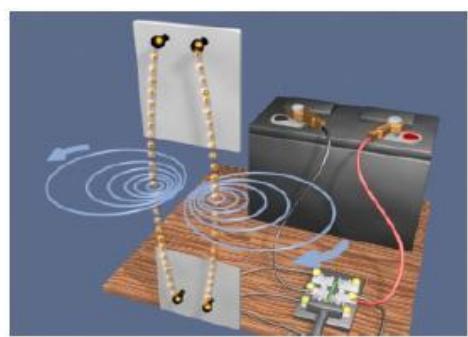
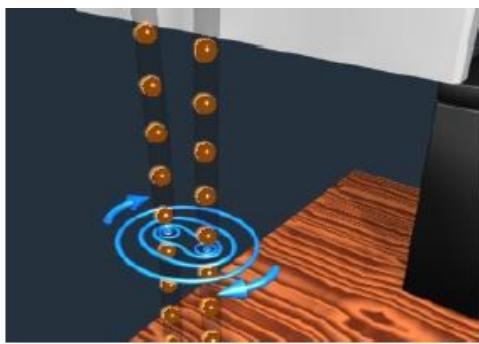
que apunta en dirección perpendicular al alambre 1, como se ve en la figura



Al ser este campo uniforme a lo largo del conductor 1, y siendo éste un alambre rectilíneo, la fuerza que experimenta está dada por

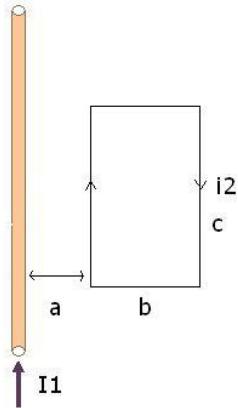
$$\vec{F}_1 = I_1 \vec{l} \times \vec{B}_2 = I_1 l \hat{j} \times \left(\frac{\mu_0 I_2}{2\pi a} \right) \hat{k} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi a} \hat{i}$$

Claramente esta fuerza apunta hacia el conductor 2. Resulta evidente que $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$. De esta forma, 2 cables paralelos que llevan corriente en la misma dirección se atraerán. Por otro lado, si las corrientes fluyen en direcciones opuestas, la fuerza resultante será repulsiva.



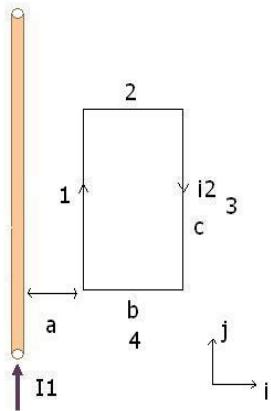
Problema

Calcular la fuerza resultante sobre la espira con corriente I_2



Solución

Para obtener la fuerza total sobre la espira, sumamos las fuerzas sobre las secciones 1,2,3 y 4.



Tenemos

$$\vec{F}_1 = I_2 \int_0^c d\vec{l}_1 \times \vec{B}_1$$

el campo en la sección 1 es uniforme y está dado por

$$\vec{B}_1 = -\frac{\mu_0 I_1}{2\pi a} \hat{k}$$

Así

$$\vec{F}_1 = I_2 \int_0^c dy \hat{j} \times -\frac{\mu_0 I_1}{2\pi a} \hat{k}$$

$$\vec{F}_1 = -\frac{\mu_0 c I_1 I_2}{2\pi a} \hat{j} \times \hat{k}$$

$$\vec{F}_1 = -\frac{\mu_0 c I_1 I_2}{2\pi a} \hat{i}$$

Ahora, para la sección 3

$$\vec{F}_3 = I_2 \int_0^c d\vec{l}_3 \times \vec{B}_3$$

con

$$\vec{B}_3 = -\frac{\mu_0 I_1}{2\pi(a+b)} \hat{k}$$

y entonces

$$\vec{F}_3 = I_2 \int_c^0 dy \hat{j} \times -\frac{\mu_0 I_1}{2\pi(a+b)} \hat{k}$$

y obtenemos

$$\vec{F}_3 = \frac{\mu_0 c I_1 I_2}{2\pi(a+b)} \hat{i}$$

La fuerza sobre la sección 2 será

$$\begin{aligned} \vec{F}_2 &= I_2 \int_0^b d\vec{l}_2 \times \vec{B}_2 \\ \vec{F}_2 &= -I_2 \int_0^b dx \hat{i} \times \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(a+x)} \hat{k} \end{aligned}$$

Notemos que

$$\vec{F}_4 = I_2 \int_b^0 -dx \hat{i} \times \frac{-\mu_0 I_1}{2\pi(a+x)} \hat{k} = -\vec{F}_2$$

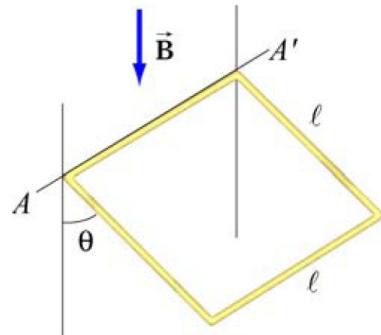
F_2 y F_4 se cancelan, luego, la fuerza total sobre la espira es

$$\left(\frac{\mu_0 c I_1 I_2}{2\pi(a+b)} - \frac{\mu_0 c I_1 I_2}{2\pi a} \right) \hat{i}$$

Notar que en signo es negativo, es decir, la fuerza es atractiva.

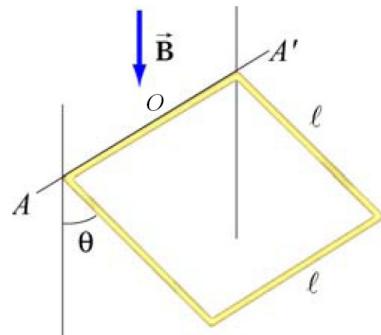
Problema

Un circuito cuadrado rígido de lado L y masa M está pivoteado en torno a uno de sus ejes en presencia de un campo magnético \vec{B} uniforme, y el campo gravitatorio. El circuito lleva una corriente I que es capaz de mantenerlo en equilibrio en un ángulo ϑ . Encuentre el sentido y magnitud de dicha corriente

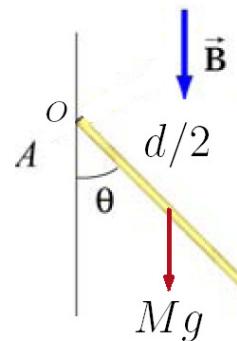


Solución

Para el equilibrio, se requiere que el torque neto sobre la espira con respecto a algún punto de aceleración nula sea cero. Se escoge como origen el punto O ubicado en una de las esquinas de la espira, como se muestra en la figura



Para el torque que ejerce el peso, usamos que la fuerza de gravedad se puede concentrar en el centro de masa



$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \frac{l}{2} (\sin \vartheta \hat{i} - \cos \vartheta \hat{j}) \times -Mg \hat{j}$$

$$\vec{\tau} = -\frac{Mgl}{2} \sin \vartheta \hat{k}$$

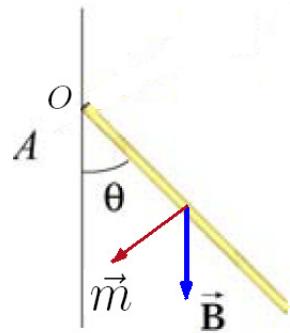
Por otro lado, el torque que ejerce la fuerza magnética es

$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}$$

donde \vec{m} es el momento magnético de la espira

$$\vec{m} = IA\hat{n} = Il^2\hat{n}$$

Requerimos en primer lugar que este torque tenga dirección \hat{k} . Luego \hat{n} debe tener la dirección de \vec{m} en el dibujo



$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B} = Il^2B \cos \vartheta \hat{k}$$

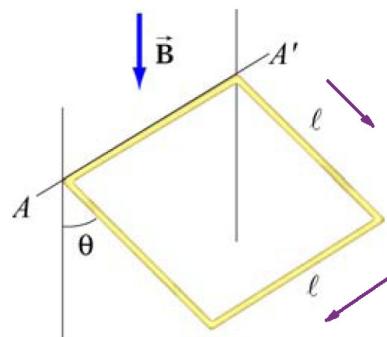
El equilibrio exige entonces

$$Mg \frac{l}{2} \sin \vartheta \hat{k} - Il^2B \cos \vartheta \hat{k} = 0$$

Luego, la corriente I debe ser

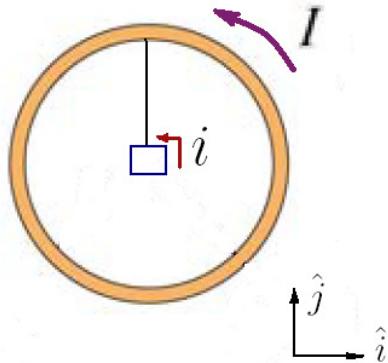
$$I = \frac{Mg \tan \vartheta}{2lB}$$

La dirección debe ser acorde con la dirección del momento magnético, la cual se muestra en la siguiente figura



Problema

Un circuito cuadrado de lado a está suspendido en el centro de un enorme anillo fijo de radio R , con $R \gg a$ por un hilo que ejerce un torque restaurador de magnitud $\tau = k\vartheta$, con ϑ el ángulo de torsión que forman los planos de ambos circuitos. Si por el circuito pequeño circula una corriente i y por el grande I , encuentre en forma aproximada el valor de la constante k de modo que $\vartheta = \pi/2$ sea posición de equilibrio



Solución

Encontramos el campo magnético \vec{B} que la corriente I produce en el centro del anillo (coincidente con el centro de la espira cuadrada). Como $a \ll R$, podemos considerar que el campo es aproximadamente uniforme en una región que contenga a la espira cuadrada. El campo en el centro es fácil de obtener con la ley de Biot-Savart

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\Gamma} d\vec{x}' \times \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

donde Γ es la curva que parametriza al anillo. Se tiene

$$\vec{x} = \vec{0}, \vec{x}' = R\hat{r}(\varphi), d\vec{x}' = Rd\varphi\hat{\varphi}, |\vec{x} - \vec{x}'| = R$$

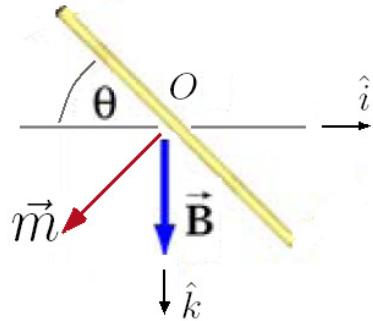
$$\vec{B}(\vec{0}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi R\hat{\varphi} \times \frac{-R\hat{r}(\varphi)}{R^3}$$

$$\vec{B}(\vec{0}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} 2\pi \hat{k} = \frac{\mu_0 I}{2R} \hat{k}$$

El torque del campo magnético sobre la espira está dado por

$$\vec{\tau}_1 = \vec{m} \times \vec{B}$$

El cual dependerá del ángulo que formen los planos de ambos circuitos



De acuerdo a la figura, en tal posición se tendrá un torque magnético dado por

$$\vec{\tau}_1 = \vec{m} \times \vec{B} = ia^2 \frac{\mu_0 I}{2R} \sin \vartheta \hat{j}$$

En $\vartheta = \pi/2$

$$\vec{\tau}_1 = \frac{iIa^2\mu_0}{2R} \hat{j}$$

Por otro lado, se tendrá un torque restaurador

$$\vec{\tau}_2 = -k\vartheta \hat{j}$$

en $\vartheta = \pi/2$

$$\vec{\tau}_2 = -k \frac{\pi}{2} \hat{j}$$

Para que $\vartheta = \pi/2$ sea una posición de equilibrio

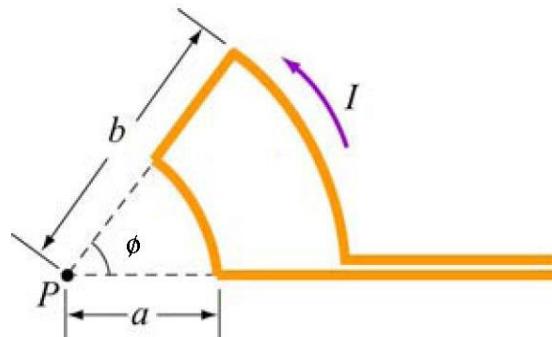
$$\frac{iIa^2\mu_0}{2R} - k \frac{\pi}{2} = 0$$

Luego

$$k = \frac{\mu_0 I a^2}{\pi R}$$

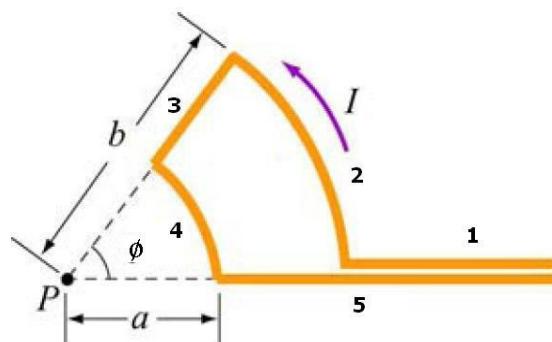
Problema

Considera la espira de corriente formada por segmentos radiales y arcos de circunferencia como se muestra en la figura. Obtenga el campo magnético \vec{B} en el punto P.



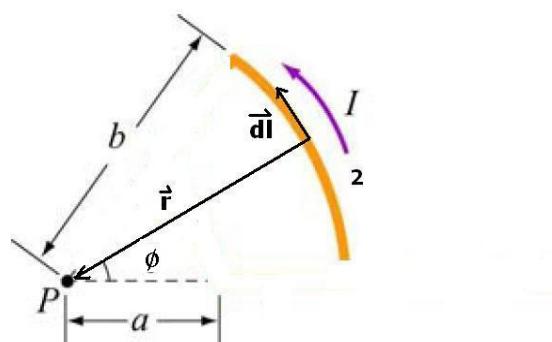
Solución

Para obtener el campo magnético en P, utilizaremos el principio de superposición, notando que el campo total en P será la suma de las contribuciones de las secciones 1,2,3,4 y 5



Si fijamos el origen en P , notamos inmediatamente que las contribuciones de los segmentos 1 y 5 son nulas, ya que en ambos casos el vector $d\vec{x}'$ es paralelo al vector $\vec{x} - \vec{x}'$, con $\vec{x} = \vec{0}$

Para el sector 2



Tenemos

$$d\vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{x}' \times (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$$

Utilizando coordenadas polares

$$d\vec{x}' = bd\phi \left(-\sin \phi \hat{i} + \cos \phi \hat{j} \right)$$

ya que P es el origen, $\vec{x} = 0$, y por último el vector que va desde el origen al elemento diferencial de corriente tiene magnitud b y la dirección del vector unitario radial en polares

$$\vec{x}' = b \left(\cos \phi \hat{i} + \sin \phi \hat{j} \right)$$

Notar que

$$|\vec{x} - \vec{x}'|^3 = |-\vec{x}'|^3 = b^3$$

con esto

$$\begin{aligned} d\vec{B}_2 &= \frac{\mu_0}{4\pi} Ib \frac{d\phi \left(-\sin \phi \hat{i} + \cos \phi \hat{j} \right) \times -b(\cos \phi \hat{i} + \sin \phi \hat{j})}{b^3} \\ d\vec{B}_2 &= \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\phi \left(\sin^2 \phi \hat{k} + \cos^2 \phi \right)}{b} \hat{k} = \frac{\mu_0}{4\pi b} Id\phi \hat{k} \end{aligned}$$

Así, el campo total en P debido al arco exterior es

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi b} I \int_0^\phi d\phi \hat{k} = \frac{\mu_0 \phi}{4\pi b} \hat{k}$$

Ahora, para el arco interior (sección 4) el procedimiento es totalmente análogo, con la diferencia de que la distancia ahora es a , y que la corriente va en el sentido opuesto al del arco exterior

$$\vec{B}_4 = -\frac{\mu_0 \phi}{4\pi a} \hat{k}$$

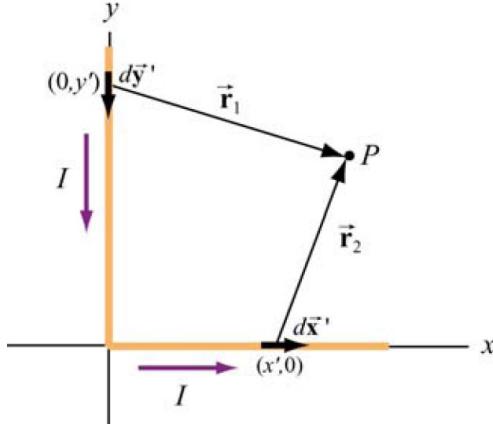
Por último, para la sección 3, es fácil notar que su contribución es nula, ya que en este caso, el vector $d\vec{x}'$ apunta en la dirección contraria al vector unitario radial en coordenadas polares, y a su vez \vec{x}' apunta en la dirección radial, de esta forma, el producto vectorial $d\vec{x}' \times (\vec{x} - \vec{x}')$ es 0 en todo el segmento 3. Resumiendo, solo los segmentos 2 y 4 contribuyen al campo en P , y el campo total será la suma de ambas contribuciones

$$\vec{B} = \vec{B}_2 + \vec{B}_4 = \frac{\mu_0 \phi}{4\pi} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) \hat{k}$$

Problema

Un conductor rectilíneo con corriente I baja por el eje y hasta el origen, y luego continua en dirección horizontal. Muestre que el campo magnético en algún punto (x, y) con $x > 0, y > 0$ está dado por

$$\vec{B}(x, y) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{x}{y\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{y}{x\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \hat{k}$$



Solución

Sea P un punto sobre el plano (x, y) con $x > 0, y > 0$. El campo magnético en P será la superposición del campo creado por la sección vertical y el de la sección horizontal. Sea Γ_1 la curva descrita por

$$\Gamma_1 : \vec{x}' = \vec{x}'(t) = (0, -t), t \in (-\infty, 0)$$

Así $d\vec{x}'(t) = dt(0, -1)$. Es fácil ver que esta curva representa el segmento vertical de conductor, y es recorrido en el sentido de la corriente. El campo magnético en P se obtiene a partir de la ley de Biot-Savart

$$\vec{B}_1(x, y) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Gamma_1} d\vec{x}' I \times \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$$

$$\vec{B}_1(x, y) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^0 -dt \hat{j} \times \frac{(x, y) - (0, -t)}{|(x, y) - (0, -t)|^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^0 -dt \hat{j} \times \frac{x\hat{i} + (y-t)\hat{j}}{(x^2 + (y-t)^2)^{3/2}}$$

$$\vec{B}_1(x, y) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^0 dt \frac{x\hat{k}}{(x^2 + (y-t)^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I x}{4\pi} \hat{k} \int_{-\infty}^0 dt \frac{1}{x^3 \left(1 + \frac{(y-t)^2}{x^2}\right)^{3/2}}$$

La función a integrar es par, luego

$$\vec{B}_1(x, y) = \frac{\mu_0 I}{4\pi x^2} \hat{k} \int_0^\infty dt \frac{1}{\left(1 + \frac{(y-t)^2}{x^2}\right)^{3/2}}$$

Ahora se utiliza la sustitución $\tan \vartheta = \frac{(y-t)}{x}$, $\sec^2 \vartheta d\vartheta = -\frac{dt}{x}$, y entonces

$$\int dt \frac{1}{\left(1 + \frac{(y-t)^2}{x^2}\right)^{3/2}} = -x \int \frac{\sec^2 \vartheta d\vartheta}{(1 + \tan^2 \vartheta)^{3/2}} = -x \int \frac{\sec^2 \vartheta d\vartheta}{\sec^3 \vartheta} = -x \int d\vartheta \cos \vartheta = -x \sin \vartheta$$

Ahora, como $\tan \vartheta = \frac{(y-t)}{x}$, es fácil ver que (es cosa de construir un triángulo rectángulo, con un lado igual a $(y-t)$, y otro igual a x)

$$\sin \vartheta = \frac{(y-t)}{\sqrt{x^2 + (y-t)^2}}$$

de forma que

$$\vec{B}_1(x, y) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi x} \hat{k} \left(\frac{(y-t)}{\sqrt{x^2 + (y-t)^2}} \right) \Big|_0^\infty = -\frac{\mu_0 I}{4\pi x} \hat{k} \left(-1 - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

$$\vec{B}_1(x, y) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(\frac{1}{x} + \frac{y}{x\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \hat{k}$$

Ahora, el segmento horizontal está caracterizado por la curva

$$\Gamma_2 : \vec{x}'(t) = (t, 0)$$

$$d\vec{x}' = (1, 0)dt, t \in (0, \infty)$$

De la ley de Biot-Savart, obtenemos el campo magnético generado por esta sección

$$\vec{B}_2(x, y) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\Gamma_2} d\vec{x}' \times \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{| \vec{x} - \vec{x}' |^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^\infty dt \hat{i} \times \frac{(x-t, y)}{((x-t)^2 + y^2)^{3/2}}$$

$$\vec{B}_2(x, y) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \hat{k} \int_0^\infty dt \frac{y}{((x-t)^2 + y^2)^{3/2}}$$

Esta integral es idéntica a la calculada anteriormente, sólo que intercambiando el rol de x e y

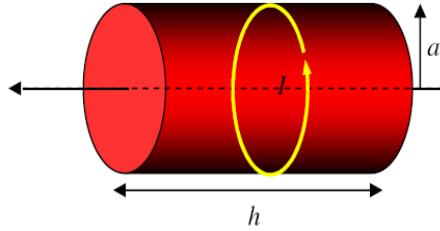
$$\vec{B}_2(x, y) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(\frac{1}{y} + \frac{x}{y\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \hat{k}$$

Finalmente

$$\vec{B}(x, y) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{x}{y\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{y}{x\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \hat{k}$$

Problema

Un cilindro de radio a y largo h tiene una corriente superficial I uniformemente distribuida en el manto. Calcule el campo magnético producido sobre su eje



Solución

El sistema se puede ver como un conjunto de espiras por las cuales circula una corriente infinitesimal dada por

$$\frac{Idz'}{h}$$

puestas una al lado de la otra. Determinemos inicialmente el campo asociado a una espira ubicada a una distancia z' del origen por la cual circula una corriente I . Por la ley de Biot - Savart, el campo magnético originado por un elemento de corriente I es

$$d\vec{B}_{z'} = \frac{\mu_0 dz'}{4\pi h} \frac{Id\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

En este caso $\vec{r} = z\hat{k}$, $\vec{r}' = a\hat{r} + z'\hat{k}$, $d\vec{l} = ad\vartheta\hat{\vartheta}$

$$d\vec{B}_{z'} = \frac{\mu_0 dz'}{4\pi h} \frac{Iad\vartheta\hat{\vartheta} \times (-a\hat{r} + (z - z')\hat{k})}{(a^2 + (z - z')^2)^{3/2}}$$

Integrando la componente según \hat{k} tiene que

$$\vec{B}_{z'} = \frac{\mu_0 dz'}{4\pi h} \int_o^{2\pi} \frac{d\vartheta I a^2 \hat{k}}{(a^2 + (z - z')^2)^{3/2}}$$

Notar que existe una componente según \hat{r} , sin embargo su integral es cero, como se podría esperar por simetría.

$$\vec{B}_{z'} = \frac{\mu_0 dz'}{2h} \frac{Ia^2 \hat{k}}{(a^2 + (z - z')^2)^{3/2}}$$

Este es el aporte de una sola espira, y por lo tanto, puede considerarse como un elemento diferencial de campo magnético. El campo magnético total es

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2h} \int_o^h dz' \frac{Ia^2}{(a^2 + (z - z')^2)^{3/2}} \hat{k}$$

Usando el cambio $z - z' = atanx$, $-dz' = asec^2 x$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2h} \int_{x_1}^{x_2} \frac{-dx I a^2 asec^2 x}{(a^2 + a^2 tan^2 x)^{3/2}} \hat{k} = -\frac{\mu_0 I}{2} \int_{x_1}^{x_2} dx cos x \hat{k}$$

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{2h} (\sin x_2 - \sin x_1) \hat{k}$$

donde

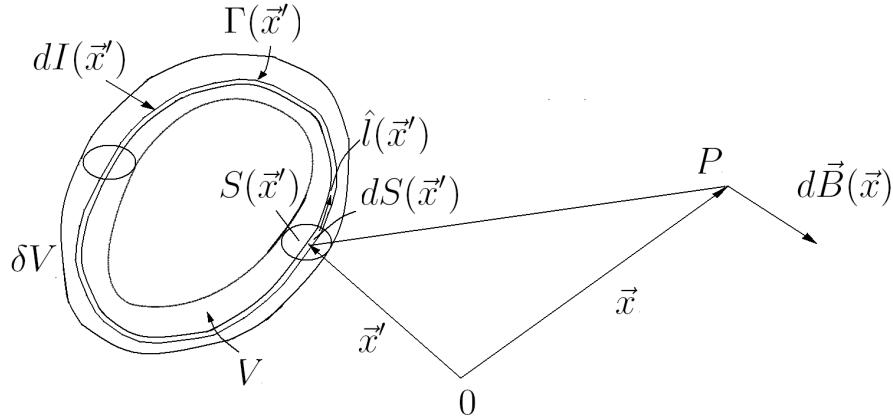
$$\begin{aligned}\sin x_2 &= \frac{z - h}{\sqrt{a^2 + (z - h)^2}} \\ \sin x_1 &= \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}}\end{aligned}$$

Finalmente

$$\vec{B} = -\frac{\mu_o I}{2h} \frac{z - h}{\sqrt{a^2 + (z - h)^2}} \hat{k} + \frac{\mu_o I}{2} \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} \hat{k}$$

12.6. Corrientes estacionarias extensas localizadas

Vamos a generalizar la ley de Biot-Savart para una distribución de corrientes localizadas en un volumen V , como se muestra en la figura



Para calcular el campo magnético en \vec{x} , se utiliza un modelo de anillos Biot-Savart. Sea $\vec{x}' \in V$, y $\Gamma(\vec{x}')$ una curva cerrada de corriente estacionaria, luego

$$d\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} dI(\vec{x}') \oint_{\Gamma(\vec{x}')} d\vec{x}'' \times \frac{\vec{x} - \vec{x}''}{|\vec{x} - \vec{x}''|^3}$$

Además

$$\vec{J}(\vec{x}') = \frac{dI(\vec{x}')}{dS(\vec{x}')} \hat{l}(\vec{x}')$$

luego

$$\vec{J}(\vec{x}') = \left(\frac{dI}{dS} \right) \Big|_{\vec{x}'} \hat{t}(\vec{x}')$$

$$dI(\vec{x}') = dS(\vec{x}') \hat{t}(\vec{x}') \cdot \vec{J}(\vec{x}')$$

con $\hat{t}(\vec{x}')$ el vector unitario tangente a la curva $\Gamma(\vec{x}')$. Así

$$\vec{x}' \in \Gamma(\vec{x}') : dI(\vec{x}') = dS(\vec{x}') J(\vec{x}')$$

Pero

$$\vec{x}'' \in \Gamma(\vec{x}') \rightarrow dI(\vec{x}'') = dI(\vec{x}') = C$$

ya que es un elemento de corriente **estacionaria**. Luego

$$\begin{aligned} d\vec{B}(\vec{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma(\vec{x}')} d\vec{x}'' \times \frac{\vec{x} - \vec{x}''}{|\vec{x} - \vec{x}''|^3} dI(\vec{x}'') \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma(\vec{x}')} dS'' \hat{t}(\vec{x}'') \times \frac{\vec{x} - \vec{x}''}{|\vec{x} - \vec{x}''|^3} dS'' J(\vec{x}'') \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma(\vec{x}')} dS'' \vec{J}(\vec{x}'') \times \frac{\vec{x} - \vec{x}''}{|\vec{x} - \vec{x}''|^3} dS'' \end{aligned}$$

El campo magnético total en \vec{x} será

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint dS'' \oint dS'' \vec{J}(\vec{x}'') \times \frac{\vec{x} - \vec{x}''}{|\vec{x} - \vec{x}''|^3}$$

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V d^3x'' \vec{J}(\vec{x}'') \times \frac{\vec{x} - \vec{x}''}{|\vec{x} - \vec{x}''|^3}$$

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V d^3x' J(\vec{x}') \times \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$$

Este es el campo magnético generado por una distribución de corriente localizada dentro de un volumen V

12.7. Las dos leyes fundamentales de la magnetostática

Hemos obtenido, a partir de la ley de Biot-Savart y el principio de superposición la forma general del campo magnético generado por una distribución de corriente localizada dentro de un volumen V

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V d^3x' \vec{J}(\vec{x}') \times \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$$

Ahora utilizamos el lema

$$\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = -\frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$$

entonces

$$\vec{B}(\vec{x}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V d^3x' \vec{J}(\vec{x}') \times \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \times \iiint_V d^3x' \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

de forma que el campo magnetostático es el rotor de un campo vectorial, que llamaremos **potencial magnético vectorial**

$$\vec{A}(\vec{x}) = \iiint_V d^3x' \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

y

$$\vec{B}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x})$$

De esta forma, la divergencia del campo magnético es siempre nula

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{x}) = 0$$

Además, se tiene

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{x}') = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \iiint_V d^3x' \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{x}') = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \iiint_V d^3x' \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} - \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla}^2 \iiint_V d^3x' \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \iiint_V d^3x' \vec{J}(\vec{x}') \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \mu_0 \iiint_V d^3x' \vec{J}(\vec{x}') \delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

Si $\vec{x} \in V$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{x}') &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \iiint_V d^3x' \vec{J}(\vec{x}') \cdot \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \mu_0 J(\vec{x}) \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \iiint_V d^3x' \vec{\nabla}' \cdot \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V d^3x' \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \mu_0 \vec{J}(\vec{x}) \\ &= \mu_0 \vec{J}(\vec{x}) + \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V d^3x' \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} - \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \oint_{\delta V} \frac{d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}\end{aligned}$$

Pero, si la distribución corriente está localizada dentro de V , no hay flujo de corriente a través de δV , es decir

$$\hat{n}(\vec{x}) \cdot \vec{J}(\vec{x}) = 0, \vec{x} \in \delta V$$

Además, la condición de corriente estacionaria significa

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{x}) = 0, \vec{x} \in V$$

De forma que

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{x}) = \mu_0 \vec{J}(\vec{x})$$

12.8. Leyes fundamentales, forma diferencial

Hemos obtenido las siguientes ecuaciones diferenciales para el campo magnetostático

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{x}) = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{x}) = \mu_0 \vec{J}(\vec{x})$$

Recordar el teorema de Helmholtz! La teoría magnetostática es **completa**. La primera de ellas contiene la información de que nunca han sido observados monopolos magnéticos. Se puede obtener una forma integral, integrando sobre un volumen V

$$\iiint_V d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{x}) = 0$$

utilizando el teorema de la divergencia

$$\oint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{B}(\vec{x}) = 0$$

Es decir, el flujo magnético sobre cualquier superficie cerrada es siempre nulo. La segunda ecuación para el rotor

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{x}) = \mu_0 \vec{J}(\vec{x})$$

es la ley de Ampère, cuya forma integral y aplicaciones serán estudiadas en detalle en el siguiente capítulo

Capítulo 13

Ley de Ampére

Se vió que cargas en movimiento son fuentes de campo magnético. En particular, corrientes estacionarias en un conductor son fuentes de campos magnéticos **estáticos** (no varían en el tiempo). Tal cual la ley de Gauss en electrostática puede ser muy útil en problemas de geometría simple, para campos magnéticos existe un equivalente, que es la **ley integral de Ampère**. Ésta se obtiene a partir de la ecuación para el rotor de $\vec{B}(\vec{x})$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{x}) = \mu_0 \vec{J}(\vec{x})$$

Podemos integrar esta ecuación sobre una superficie S arbitraria

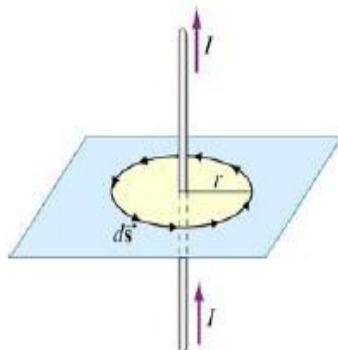
$$\iint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{x})) = \mu_0 \iint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{J}(\vec{x})$$

Y utilizando el teorema de Stokes

$$\oint_{\Gamma(S)} d\vec{x} \cdot \vec{B}(\vec{x}) = \mu_0 \iint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{J}(\vec{x})$$

La integral de línea del campo magnético sobre una curva cerrada Γ (circulación), es proporcional al flujo de corriente sobre cualquier superficie cuyo contorno sea (Γ). Definiendo I_Γ como la corriente que cruza a S , entonces

$$\oint_{\Gamma} d\vec{x} \cdot \vec{B}(\vec{x}) = \mu_0 I_\Gamma$$



Ejemplo conocido es el campo magnético exterior de una distribución cilíndrica de corriente (muy larga), como se ve en la figura. Debido a la simetría, la magnitud del campo magnético debe ser constante a una distancia r del centro del conductor, y su dirección siempre tangente a curvas circulares concéntricas con el conductor. De esta forma

$$\oint_{\Gamma} d\vec{x} \cdot \vec{B}(\vec{x}) = 2\pi r B(r) = \mu_0 I$$

de donde

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

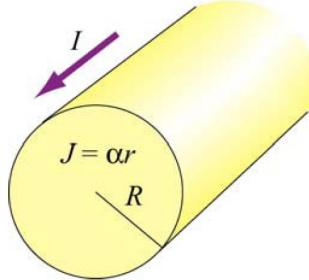
Problemas con simetría cilíndrica son muy sencillos de resolver con la ley de Ampère. El campo interior al conductor se obtiene de la misma forma, pero teniendo en cuenta que en ese caso la corriente encerrada por una trayectoria circular no es I , sino una fracción de ésta

Problema

Consideré un conductor cilíndrico de radio R y de extensión infinita, que lleva una corriente I con una densidad de corriente no uniforme

$$J = \alpha r$$

donde α es una constante (desconocida), y r es la distancia de un punto interior al conductor al eje de simetría. Encuentre el campo magnético en todo el espacio



Solución

Dada la clara simetría cilíndrica, utilizamos la ley de Ampère para resolverlo. Sea Γ una curva circular de radio r , con $0 < r < R$ concéntrica al eje de simetría del conductor. Es claro que la magnitud del campo magnético sólo puede ser función de r , y su dirección tangente en todo punto a la curva Γ . Así, veamos que ocurre con la circulación del campo

$$\oint_{\Gamma} d\vec{x} \cdot \vec{B}(\vec{x})$$

$$\text{con } \vec{x} = r \left(\cos \vartheta \hat{i}, \sin \vartheta \hat{j} \right), d\vec{x} = r d\vartheta \hat{\vartheta}, \vartheta \in [0, 2\pi]$$

$$\oint_{\Gamma} d\vec{x} \cdot \vec{B}(\vec{x}) = \int_0^{2\pi} d\vartheta r \hat{\vartheta} \cdot \vec{B}(r) = 2\pi r B(r)$$

Por la ley de Ampère, la circulación sobre Γ es igual a $\mu_0 I(\Gamma)$ donde $I(\Gamma)$ es la corriente que atraviesa la superficie limitada por Γ . (Escogemos la superficie plana encerrada por Γ). Sea \hat{k} la dirección del eje de simetría del cilindro (coincidente con el sentido de la corriente). Entonces

$$I(\Gamma) = \iint_{\Gamma} d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{J}(\vec{x}) = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^r dr r \hat{k} \cdot \vec{J}(r) \hat{k}$$

$$I(\Gamma) = 2\pi \alpha \int_0^r dr r^2 = \frac{2\pi \alpha r^3}{3}$$

De esta forma

$$2\pi r B(r) = \mu_0 \frac{2\pi \alpha r^3}{3}$$

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 \alpha r^2}{3} \hat{\vartheta}$$

Para encontrar el campo magnético exterior, se utilizan los mismos argumentos de simetría, y se utiliza una nueva curva Γ circular de radio $r > R$. La ley de Ampère en este caso entrega

$$\oint_{\Gamma} d\vec{x} \cdot \vec{B}(\vec{x}) = 2\pi r = \mu_0 I(\Gamma)$$

donde $I(\Gamma)$ es la corriente que atraviesa cualquier superficie de contorno Γ . Por supuesto, escogemos la superficie plana limitada por Γ

$$I(\Gamma) = \iint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{J}(\vec{x}) = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^r dr r \hat{k} \cdot J(r) \hat{k}$$

pero $J(r) = 0, r > R$, luego

$$I(\Gamma) = 2\pi\alpha \int_0^R dr r^2 = \frac{2\pi\alpha R^3}{3}$$

pero es claro que $I(\Gamma) = I$, luego

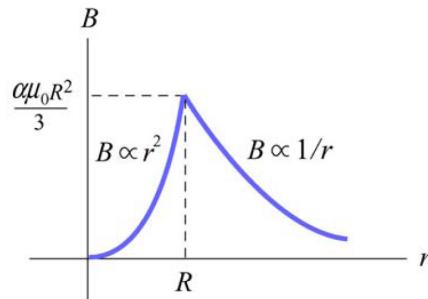
$$\alpha = \frac{3I}{2\pi R^3}$$

y se tiene

$$2\pi r B(r) = \mu_0 I$$

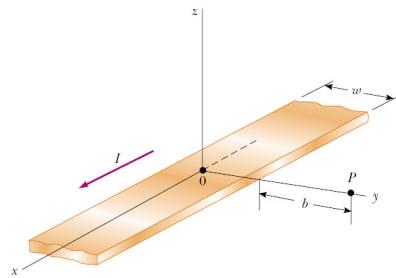
$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\vartheta}, r > R$$

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I r^2}{2\pi R^3} \hat{\vartheta}, r < R$$



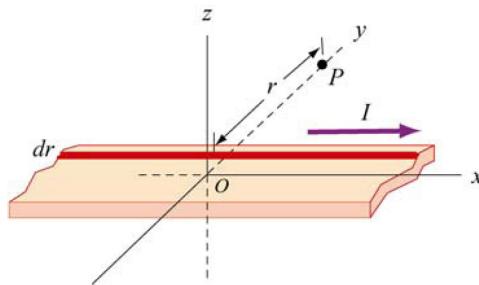
Problema

Considere un conductor plano de ancho w e infinitamente largo, en el plano xy . Éste lleva una corriente I en el sentido de eje x , como se muestra en la figura. Encuentre el campo magnético en un punto P en el plano del conductor, a una distancia s de él



Solución

Considere una sección de conductor de ancho dr , paralela a la dirección de la corriente y a una distancia r de P , como se ilustra en la siguiente figura



La cantidad de corriente contenida en este elemento diferencial está dada por

$$dI = I \left(\frac{dr}{w} \right)$$

Utilizando la ley de Ampère para este elemento de conductor (similar al de un conductor lineal) se obtiene el ya conocido resultado

$$d\vec{B}(P) = \frac{\mu_0 dI}{2\pi r} \hat{k}$$

$$d\vec{B}(P) = \frac{\mu_0 I dr}{2\pi r w} \hat{k}$$

Por el principio de superposición, el campo magnético total se obtiene al integrar sobre el conductor

$$\begin{aligned} \vec{B}(P) &= \int_s^{s+w} dr \frac{\mu_0 I}{2\pi r w} \hat{k} = \frac{\mu_0 I}{2\pi w} \int_s^{s+w} \frac{dr}{r} \hat{k} \\ \vec{B}(P) &= \frac{\mu_0 I}{2\pi w} \ln \left(\frac{s+w}{s} \right) \hat{k} \end{aligned}$$

Notar que en el límite cuando $w \ll s$

$$\ln \frac{s+w}{s} = \ln \left(1 + \frac{w}{s} \right) \approx \frac{1}{s} w$$

y entonces

$$\vec{B}(P) \approx \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \hat{k}$$

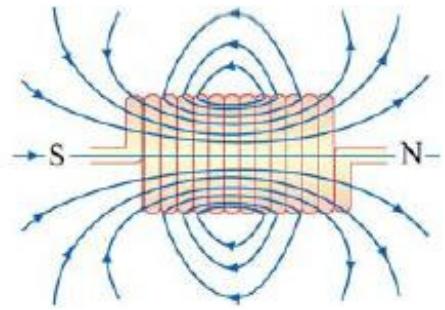
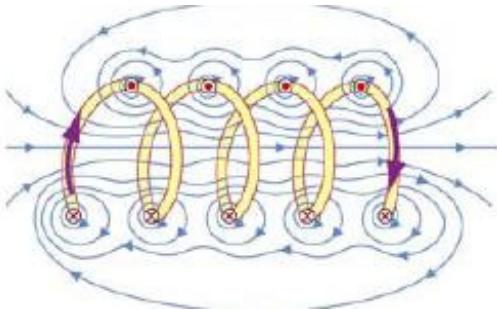
que es el campo a distancia s de un conductor rectilíneo de ancho despreciable, con corriente I

Problema

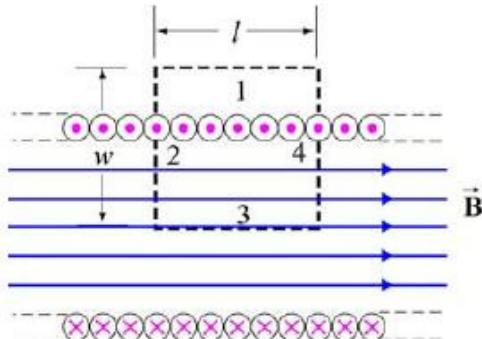
Calcule el campo magnético dentro de un solenoide ideal de largo l , N vueltas y que lleva una corriente estacionaria I .

Solución

Un solenoide es una bobina enrollada en forma helicoidal. La figura muestra las líneas de campo magnético de un solenoide con corriente constante I



Vemos que si las vueltas están muy cercanas espacialmente, el campo magnético resultante dentro del solenoide es parcialmente uniforme, siempre que la longitud del solenoide sea mucho más grande que su diámetro. Para un solenoide ideal, que es infinitamente largo con vueltas infinitamente cercanas, el campo magnético dentro es uniforme y paralelo al eje x , y es nulo fuera del solenoide. Podemos utilizar la ley de Ampère para calcular el campo magnético dentro de un solenoide ideal. Una vista transversal de un solenoide ideal se muestra en la figura



Consideremos el camino rectangular de largo l y ancho w y en sentido contrarreloj. La integral de línea de $\vec{B}(\vec{x})$ a través de este camino es

$$\oint_{1234} d\vec{x} \cdot \vec{B}(\vec{x}) = \int_1 d\vec{x} \cdot \vec{B}(\vec{x}) + \int_2 d\vec{x} \cdot \vec{B}(\vec{x}) + \int_3 d\vec{x} \cdot \vec{B}(\vec{x}) + \int_4 d\vec{x} \cdot \vec{B}(\vec{x})$$

Ahora, la integral sobre 1 es 0, ya que el campo es nulo en el exterior del solenoide. Las integrales sobre 2 y 4 también son nulas, ya que el campo a lo largo de estas trayectorias es perpendicular a $d\vec{x}$. Con esto, podemos estirar el camino cerrado de manera que encierre todo el solenoide, notando que la corriente total que atraviesa la superficie encerrada por la trayectoria es NI , con N el número de vueltas del solenoide

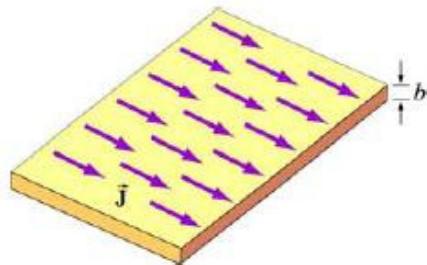
$$\oint_{1234} d\vec{x} \cdot \vec{B}(\vec{x}) = Bl = \mu_0 NI$$

Finalmente

$$B = \frac{\mu_0 NI}{l}$$

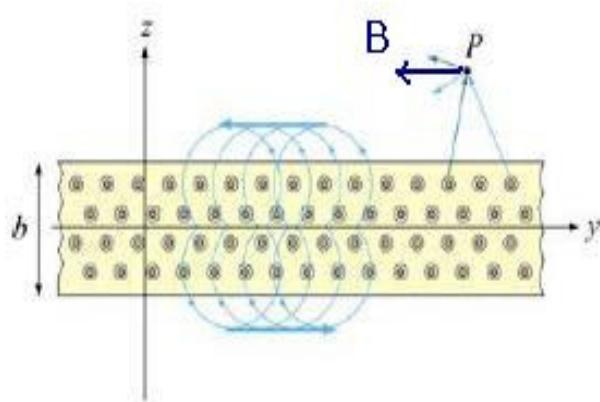
Problema

Considere dos planos infinitos paralelos separados por una distancia b en el plano xy . En la región interior existe una densidad de corriente uniforme $\vec{J} = J_0 \hat{i}$. Encuentre el campo magnético en todo el espacio

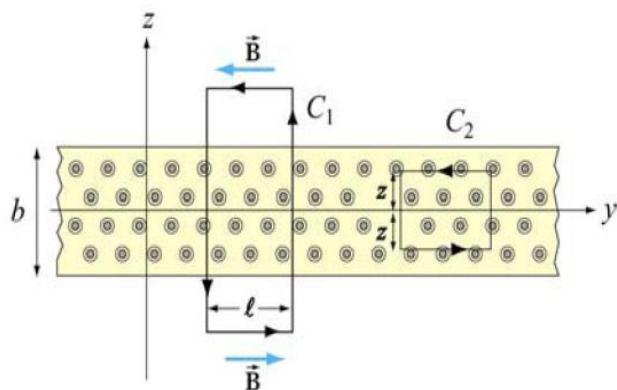


Solución

Podemos pensar la región de corriente como una superposición de conductores paralelos que llevan corrientes en la dirección $+x$. De la figura, y por un argumento de simetría vemos que el campo magnético en un punto P sobre la región apunta en la dirección $-y$



La componente z desaparece después de sumar todas las contribuciones debidas a todos los conductores. Similarmente, se puede mostrar que el campo magnético en un punto dentro de la región apunta en la dirección $+y$, y en un punto inferior a la región también según la dirección $+y$.



Ahora podemos utilizar la ley de Ampère para encontrar el campo magnético debido a esta distribución de corriente. Tomaremos las curvas cerradas que aparecen en la figura. Para el campo exterior, integramos sobre la curva Γ_1 . La corriente que atraviesa la superficie limitada por Γ_1 es

$$I(\Gamma_1) = \iint_S \vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{J}(\vec{x}) = J_0(bl)$$

Notando que en la integral de línea los segmentos verticales no contribuyen ($d\vec{x}$ perpendicular al campo $\vec{B}(\vec{x})$)

$$\oint_{\Gamma_1} d\vec{x} \cdot \vec{B}(\vec{x}) = B2l = \mu_0 I(\Gamma_1) = \mu_0 J_0 bl$$

de donde

$$B = \mu_0 J_0 b / 2$$

Notamos que el campo magnético fuera es uniforme, independiente de la distancia a la región entre ambos planos. Ahora encontremos el campo magnético interior. La corriente total encerrada por el camino cerrado Γ_2 es

$$I(\Gamma_2) = \iint d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{J}(\vec{x}) = J_0 2zl$$

Usando la ley de Ampère,

$$\oint_{\Gamma_2} d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{B}(\vec{x}) = B2l = \mu_0 I(\Gamma_2) = \mu_0 J_0 2zl$$

de donde

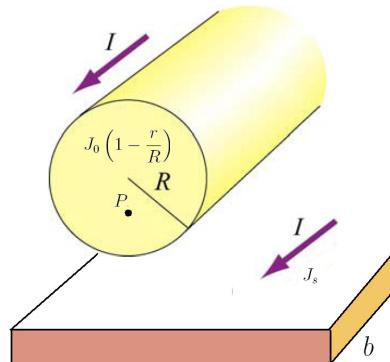
$$B = \mu_0 J_0 z$$

Notemos que en $z=0$ el campo magnético es nulo, como se requiere por simetría. Resumiendo

$$\begin{aligned} \vec{B} &= -\frac{\mu_0 J_0 b}{2} \hat{j}, & z > b/2 \\ \vec{B} &= -\mu_0 J_0 z \hat{j}, & -b/2 < z < b/2 \\ \vec{B} &= \frac{\mu_0 J_0 b}{2} \hat{j}, & z < -b/2 \end{aligned}$$

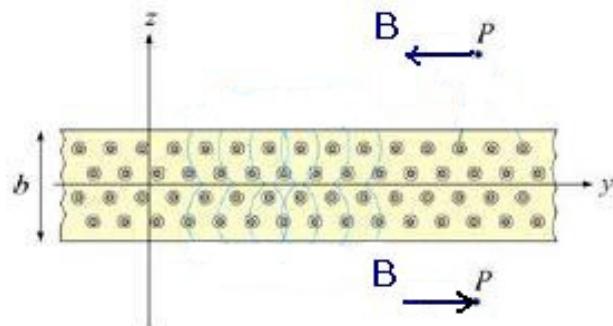
Problema

Se tiene dos corrientes, ambas con igual sentido (en el dibujo, saliendo de la hoja). Una de ellas es una corriente plana e infinita de densidad lineal J_s , y la otra es una corriente cilíndrica infinitamente larga cuya densidad es $J = J_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right)$. Encuentre el valor de J_0 en función de J_s , que hace que el campo magnético resultante en el punto P ubicado a distancia $R/2$ del centro del cilindro sea nulo

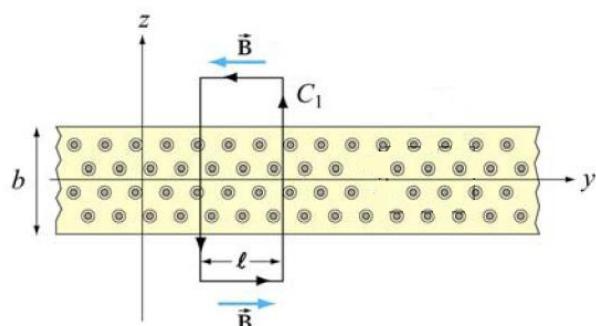


Solución

El campo de la distribución plana de corriente fue obtenido en el problema anterior. De la simetría es claro que su dirección es como se muestra en la figura



y entonces para encontrar su magnitud se utiliza la ley de Ampère, con una curva plana de ancho l

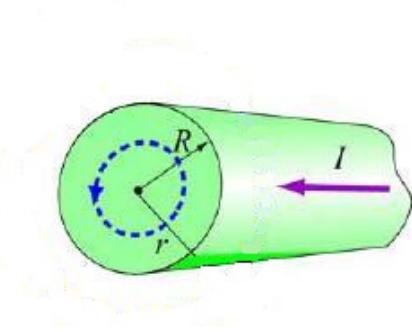


$$\oint_{\Gamma} d\vec{x} \cdot \vec{B}_1(\vec{x}) = 2lB_1 = \mu_0 J_s lb$$

Luego, en la región superior a la distribución plana

$$\vec{B}_1(\vec{x}) = -\frac{\mu_0 J_s b}{2} \hat{j}$$

Para el cilindro, utilizamos nuevamente la ley de Ampère. Dada su extensión infinita, por simetría el campo magnético en su interior debe ser función únicamente de la coordenada radial r , y su dirección es tal que es tangente en todo punto a una curva circular concéntrica al cilindro



$$\oint_{\Gamma} d\vec{x} \cdot \vec{B}_2(\vec{x}) = \mu_0 I_{enc}$$

luego

$$2\pi r B_2(r) = \mu_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^r dr r J_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right)$$

$$2\pi r B_2(r) = \mu_0 J_0 2\pi \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3R}\right)$$

$$\vec{B}_2(\vec{x}) = \mu_0 J_0 \left(\frac{r}{2} - \frac{r^2}{3R}\right) \hat{\varphi}$$

En el punto P , se tendrá la superposición de ambos campos. Notar que en dicho punto, $\hat{\varphi}$ coincide con la dirección \hat{j} , y entonces

$$\vec{B}(P) = \left(\mu_0 J_0 \left(\frac{R}{4} - \frac{R^2}{12R}\right) - \frac{\mu_0 b J_s}{2}\right) \hat{j}$$

para tener un campo magnético nulo, debe tenerse entonces

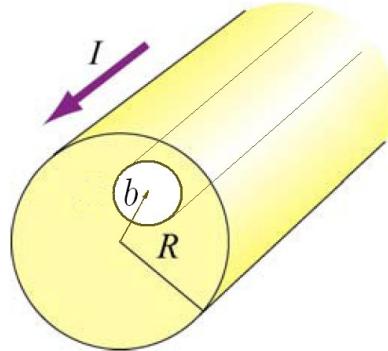
$$J_0 \frac{R}{6} = \frac{b J_s}{2}$$

Finalmente

$$J_0 = \frac{3b J_s}{R}$$

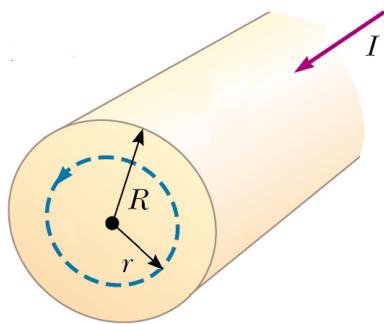
Problema

Un cable de radio R lleva una densidad de corriente $\vec{J} = J_0 \hat{k}$. El cable tiene un hoyo cilíndrico de radio α paralelo al eje del cable, a distancia b de él. Muestre que el campo magnético dentro de la cavidad es uniforme



Solución

Resolvemos el problema por superposición de dos corrientes, una del cilindro completo con densidad de corriente $J_0 \hat{k}$, y otra en la cavidad con densidad $-J_0 \hat{k}$. El campo magnético al interior de un cable con densidad de corriente $\vec{J} = J_0 \hat{k}$ se puede obtener fácilmente con la ley de Ampère



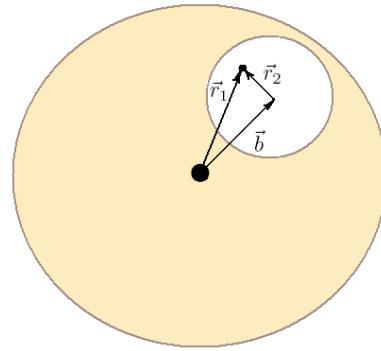
Tomando la curva circular de radio r , y dada la simetría cilíndrica de la distribución de corriente, el campo magnético es constante y tangente sobre la curva. Así

$$\oint_{\Gamma} d\vec{x} \cdot \vec{B}(\vec{x}) = B(r)2\pi r = \mu_0 \iint_{S(\Gamma)} dS(\vec{x}) \hat{k} \cdot J_0 \hat{k}$$

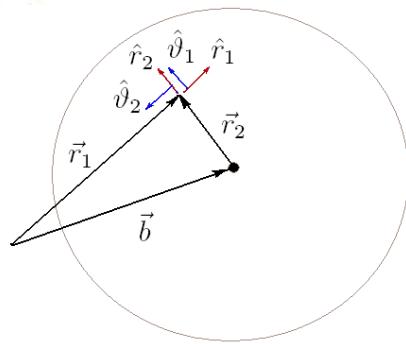
$$B(r)2\pi r = \mu_0 J_0 \pi r^2$$

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 J_0 r}{2} \hat{\vartheta}(r)$$

Sea entonces un punto arbitrario al interior de la cavidad, como muestra la figura



La superposición de los campos magnéticos es la siguiente



$$\vec{B} = \frac{\mu_0 J_0 r_1}{2} \hat{\vartheta}_1 - \frac{\mu_0 J_0 r_2}{2} \hat{\vartheta}_2$$

pero

$$\vartheta_1 = \hat{k} \times \hat{r}_1$$

$$\vartheta_2 = \hat{k} \times \hat{r}_2$$

luego

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 J_0}{2} \left(r_1 \hat{k} \times \hat{r}_1 - r_2 \hat{k} \times \hat{r}_2 \right)$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 J_0}{2} \left(\hat{k} \times \vec{r}_1 - \hat{k} \times \vec{r}_2 \right) = \frac{\mu_0 J_0}{2} \hat{k} \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

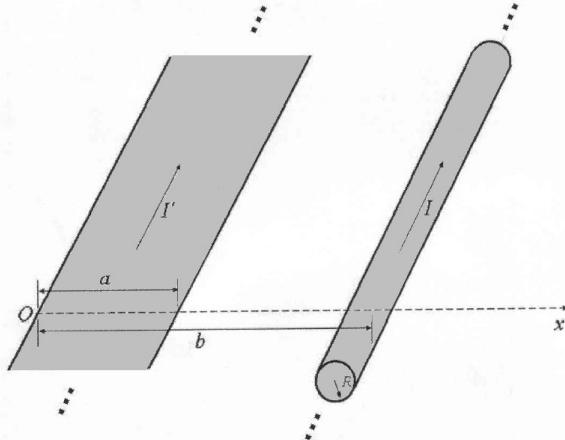
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 J_0}{2} \hat{k} \times \vec{b}$$

el cual es un campo uniforme

Problema

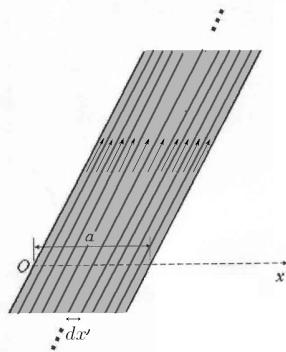
Se tiene un conductor cilíndrico de radio R , muy largo, con corriente I , y un conductor plano también muy largo con corriente superficial I' . Se supone que ambos conductores son paralelos y que el conductor plano y el eje de la corriente cilíndrica son coplanares. Si el plano conductor tiene ancho a , y el eje del cilindro se encuentra a distancia b del origen, encuentre

- El campo magnético sobre el eje x , para $x > a$
- La fuerza de interacción entre ambos conductores por unidad de largo



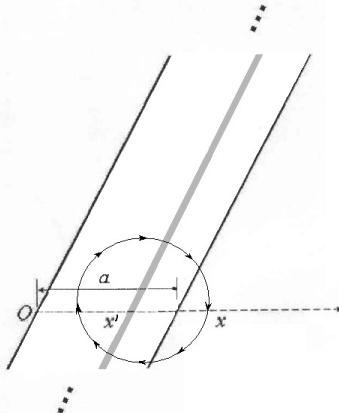
Solución

Resolvemos el problema por superposición. El plano de corriente puede ser visto como una superposición de corrientes lineales muy delgadas, de ancho diferencial dx' , como se muestra en la figura



Nos concentraremos entonces en la porción de plano contenida entre x y $x + dx$. Este alambre lleva una corriente

$$dI = I' \frac{dx}{a}$$



El campo magnético sobre el eje a distancia x del origen (con $x > a$) se puede obtener mediante la ley de Ampère, integrando sobre la curva circular Γ centrada en x' y de radio $x - x'$. La magnitud del campo magnético alrededor de la curva es constante e igual a la magnitud del campo en x

$$\oint_{\Gamma} d\vec{x} \cdot \vec{B}(\vec{x}) = B(x)2\pi(x - x') = \mu_0 I' \frac{dx'}{a}$$

$$\vec{B}(x) = -\frac{\mu_0 I' dx'}{2\pi a(x - x')} \hat{k}$$

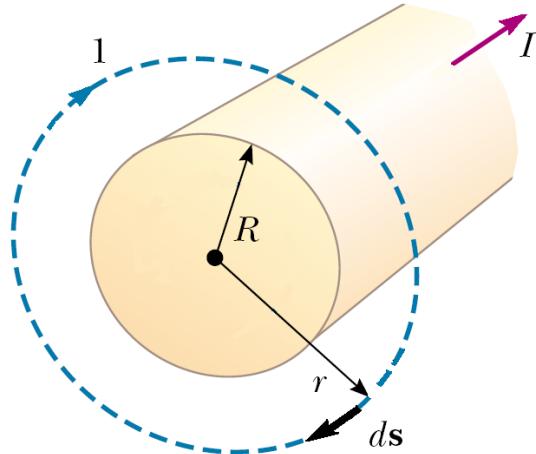
Entonces el campo magnético en x debido a la distribución plana es

$$\vec{B}(x)_1 = -\frac{\mu_0 I'}{2\pi a} \int_0^a \frac{dx'}{x - x'} \hat{k} = -\frac{\mu_0 I'}{2\pi a} \ln(x - x') \Big|_0^a \hat{k}$$

Así, para $x > a$

$$\vec{B}(x)_1 = -\frac{\mu_0 I'}{2\pi a} \ln\left(\frac{x}{x - a}\right) \hat{k}$$

Para el cilindro de radio R , distinguimos dos regiones: dentro y fuera del cilindro. El campo magnético exterior se obtiene de una aplicación inmediata de la ley de Ampère



El sentido de \vec{B} , consistente con la dirección de la corriente, se indica en la figura

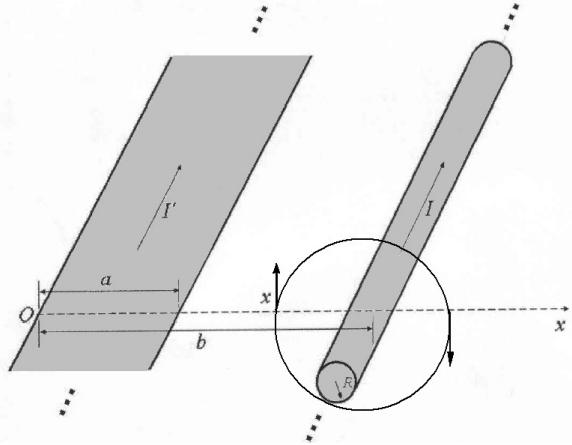
$$\oint_{\Gamma} d\vec{x} \cdot \vec{B}(\vec{x}) = \mu_0 I$$

$$2\pi r B(r) = \mu_0 I$$

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

donde r es la distancia radial con respecto al centro del cilindro. De esta forma, en el punto x , con $a < x < b - R$

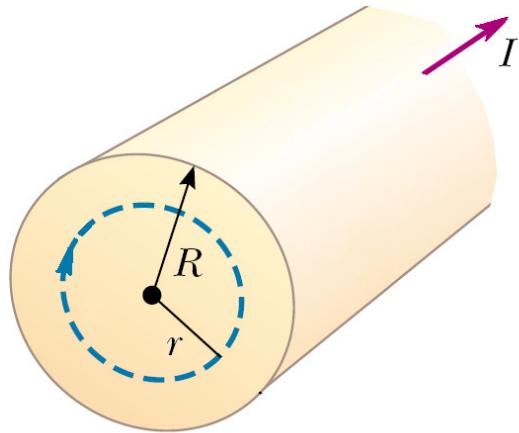
$$\vec{B}_2(x) = \frac{\mu_0 I}{2\pi(b - x)} \hat{k}$$



Para $x > b + R$

$$\vec{B}_2(x) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi(x-b)} \hat{k}$$

Ahora, para el campo al interior del conductor cilíndrico, nuevamente se utiliza la ley de Ampère



$$\oint_{\Gamma} d\vec{x} \cdot \vec{B}(\vec{x}) = B(r)2\pi r = \mu_0 \iint_{S(\Gamma)} dS(\vec{x}) \hat{n}(\vec{x}) \cdot \vec{J}(\vec{x})$$

$$B(r)2\pi r = \mu_0 \iint_{S(\Gamma)} dS(\vec{x}) \hat{j} \cdot \hat{j} = \mu_0 J \pi r^2$$

donde

$$J\pi R^2 = I \rightarrow J = \frac{I}{\pi R^2}$$

$$B(r)2\pi r = \mu_0 \frac{Ir^2}{R^2}$$

$$B(r) = \mu_0 \frac{Ir}{2\pi R^2}$$

Finalmente, tenemos lo siguiente. Para $a < x < b - R$

$$\vec{B}(x) = \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi(b-x)} - \frac{\mu_0 I'}{2\pi a} \ln \frac{x}{x-a} \right) \hat{k}$$

Para $b - R < x < b$

$$\vec{B}(x) = \left(\frac{\mu_0 I(b-x)}{2\pi R^2} - \frac{\mu_0 I'}{2\pi a} \ln \frac{x}{x-a} \right) \hat{k}$$

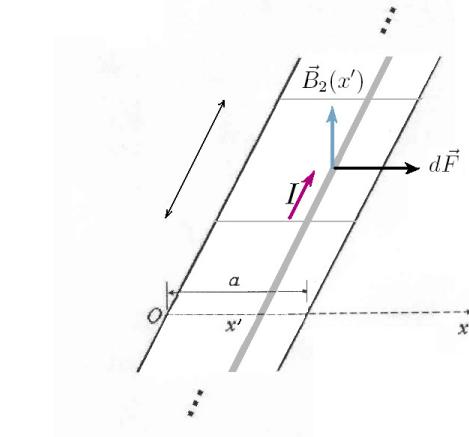
Para $b < x < b + R$

$$\vec{B}(x) = - \left(\frac{\mu_0 I(x-b)}{2\pi R^2} + \frac{\mu_0 I'}{2\pi a} \ln \frac{x}{x-a} \right) \hat{k}$$

Para $b + R < x$

$$\vec{B}(x) = - \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi(x-b)} + \frac{\mu_0 I'}{2\pi a} \ln \frac{x}{x-a} \right) \hat{k}$$

- b) Para calcular la fuerza por unidad de largo que ejerce el cilindro sobre la distribución plana de corriente, calculemos la fuerza que se ejerce sobre el segmento lineal de largo 1, y ancho dx' en la posición x'



La fuerza que actúa sobre este segmento es

$$d\vec{F}(x') = \frac{I' dx'}{a} \hat{j} \times B_2(x') \hat{k} = \frac{I' dx'}{a} \frac{\mu_0 I}{2\pi(b-x)} \hat{j} \times \hat{k}$$

$$d\vec{F}(x') = \frac{I' \mu_0 I dx'}{2\pi a (b-x)} \hat{i}$$

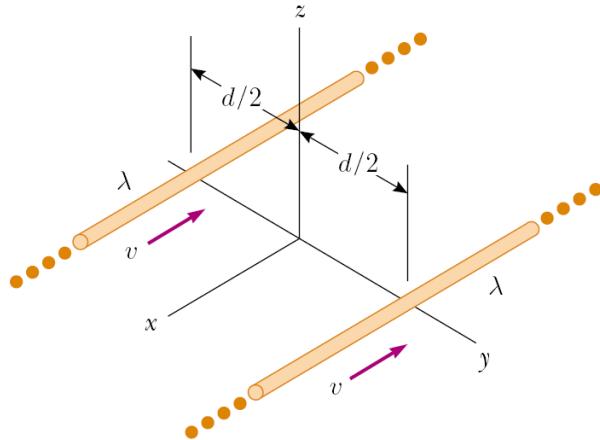
Por superposición, la fuerza neta por unidad de largo que se ejerce sobre el plano es

$$\vec{F} = \int_0^a dx' \frac{\mu_0 II'}{2\pi a (b-x)} \hat{i}$$

$$\vec{F} = \frac{\mu_0 II'}{2\pi a} \ln \left(\frac{b}{b-a} \right) \hat{i}$$

Problema

Suponga que tiene dos cables infinitamente largos con densidad lineal de carga λ , separados por una distancia d , moviéndose a velocidad v constante. Encuentre el valor de v para que la atracción magnética se compense con la repulsión eléctrica. ¿Es razonable este resultado?



Solución

El campo eléctrico generado por el cable izquierdo sobre el cable derecho está dado por

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 d} \hat{j}$$

De esta forma, la fuerza eléctrica por unidad de largo será

$$\vec{F}_L^e = \lambda \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 d} \hat{j} = \frac{\lambda^2}{2\pi\epsilon_0 d} \hat{j}$$

Por otro lado, los alambres en movimiento equivalen a una corriente

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{\lambda dx}{dt} = \lambda v$$

El campo magnético generado por el cable izquierdo sobre el derecho es

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi d} \hat{k} = -\frac{\mu_0 \lambda v}{2\pi d} \hat{k}$$

En este caso, la fuerza magnética por unidad de largo sobre el cable derecho será

$$\vec{F}_L^m = -I \hat{i} \times \left(-\frac{\mu_0 \lambda v}{2\pi d} \hat{k} \right)$$

$$\vec{F}_L^m = -\frac{\mu_0 \lambda^2 v^2}{2\pi d} \hat{j}$$

Para que éstas fuerzas se anulen

$$\vec{F}_L^e + \vec{F}_L^m = 0$$

$$\frac{\lambda^2}{2\pi\epsilon_0 d} = \frac{\mu_0 \lambda^2 v^2}{2\pi d}$$

$$\frac{1}{\epsilon_0} = \mu_0 v^2$$

La velocidad debe ser

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

Evaluando

$$v = \frac{1}{\sqrt{8,85 \times 10^{-12} \times 4\pi 10^{-7}}} = 3 \times 10^8$$

Esta es la velocidad de la luz en el vacío!. Claramente este curioso resultado no es razonable, ya que para tratar problemas con velocidades altas se debe usar la electrodinámica relativista

13.1. Potencial Vectorial

A partir de la ley de Biot-Savart se demostró que el campo magnético satisface la siguiente relación integro-diferencial

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \times \iiint_V d^3x' \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

Es decir, el campo magnético es el rotor de un campo vectorial, cuya forma más general es

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V d^3x' \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \vec{\nabla}\psi(\vec{x})$$

donde ψ es un campo escalar arbitrario (función de Gauge). Sea cual sea el campo ψ , el campo magnético obtenido a partir de $\vec{B}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x})$ es siempre el mismo. Veamos que ocurre con

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V d^3x' \vec{J}(\vec{x}') \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \vec{\nabla}^2\psi = -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V d^3x' \vec{J}(\vec{x}') \cdot \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \vec{\nabla}^2\psi$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{x}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V d^3x' \vec{\nabla}' \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V d^3x' \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \vec{\nabla}^2\psi$$

la condición de corriente estacionaria entrega

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{x}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V d^3x' \vec{\nabla}' \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \vec{\nabla}^2\psi$$

y del teorema de la divergencia

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{x}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \iint d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \vec{\nabla}^2\psi$$

La condición de corriente localizada da

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{x}) = \vec{\nabla}^2\psi$$

Para todo ψ . De esta forma, podemos perfectamente escoger un Gauge tal que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{x}) = 0$$

Este es llamado **Gauge de Coulomb**.

13.2. Ecuación de Poisson y Laplace

Como el campo magnético es de divergencia nula, existe un campo vectorial $\vec{A}(\vec{x})$ tal que

$$\vec{B}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x})$$

Luego

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A}(\vec{x})$$

El potencial puede ser escogido como un campo de divergencia nula (Gauge de Coulomb), luego

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}^2 \vec{A}(\vec{x})$$

Además, de la forma diferencial de la ley de Ampère

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{x}) = \mu_0 \vec{J}(\vec{x})$$

De esta forma, el potencial vectorial bajo el gauge de Coulomb satisface la **ecuación de Poisson**

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A}(\vec{x}) = -\mu_0 \vec{J}(\vec{x})$$

en regiones del espacio libre de corrientes, se obtiene la **ecuación de Laplace**

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A}(\vec{x}) = 0$$

13.3. Expansión Multipolar del campo magnético

Sea una distribución localizada de corriente dentro de un volumen V . El potencial vectorial está dado por

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V d^3x' \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

Veamos que ocurre muy lejos de las fuentes, es decir, analizaremos el caso $|\vec{x}'| \ll |\vec{x}|$

$$|\vec{x} - \vec{x}'|^{-1} = (|\vec{x}|^2 + |\vec{x}'|^2 - 2\vec{x} \cdot \vec{x}')^{-1/2} = \frac{1}{|\vec{x}|} \left(1 + \frac{|\vec{x}'|^2}{|\vec{x}|^2} - \frac{2\vec{x} \cdot \vec{x}'}{|\vec{x}|^2} \right)^{-1/2}$$

La expansión en taylor a primer orden entrega

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \approx \frac{1}{|\vec{x}|} + \frac{\vec{x} \cdot \vec{x}'}{|\vec{x}|^3} - \frac{1}{2} \frac{|\vec{x}'|^2}{|\vec{x}|^3} + \dots$$

Luego, el potencial vectorial lejos de las fuentes tiene la forma

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{|\vec{x}|} \iiint_V d^3x' \vec{J}(\vec{x}') + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{|\vec{x}|^3} \iiint_V d^3x' \vec{J}(\vec{x}') \vec{x}' \cdot \vec{x} + \dots$$

Ahora, la primera integral es nula, para ello demostraremos el siguiente lema: $\forall f, g$

$$\iiint_V d^3x \vec{J}(\vec{x}) \cdot [f(\vec{x}) \vec{\nabla} g(\vec{x}) + g(\vec{x}) \vec{\nabla} f(\vec{x})] = 0$$

la demostración es la siguiente

$$\iiint_V d^3x (\vec{J}(\vec{x}) \cdot \vec{\nabla} fg) = \iiint_V d^3x \vec{\nabla} \cdot (\vec{J}fg) - \iiint_V d^3x f g \vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{x})$$

Usando la condición de corriente estacionaria y el teorema de la divergencia

$$\iiint_V d^3x (\vec{J}(\vec{x}) \cdot \vec{\nabla} fg) = \oint_{\delta V} d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{J}(\vec{x}) fg = 0$$

Tomando $f(\vec{x}) = 1$, $g(\vec{x}) = x$

$$\iiint_V d^3x \vec{J}(\vec{x}) \cdot \vec{\nabla} x = \iiint_V d^3x J_x(\vec{x}) = 0$$

Del mismo modo se puede demostrar que la integral de las componentes en y e z es nula.
Así

$$\iiint_V d^3x \vec{J}(\vec{x}) = \vec{0}$$

En otras palabras, corrientes estacionarias localizadas no generan monopolos magnéticos!.
Mas aún, utilizando el mismo teorema, podemos encontrar una nueva expresión para la segunda integral de la expansión. Tenemos

$$\iiint_V d^3x \vec{J}(\vec{x}) \cdot [f(\vec{x}) \vec{\nabla} g(\vec{x}) + g(\vec{x}) \vec{\nabla} f(\vec{x})] = 0, \forall f, g$$

tomando la componente a -ésima

$$\iiint_V d^3x \vec{J}_a(\vec{x}) \vec{\nabla}_a (fg) = 0$$

tomando $fg = x_b x_c$

$$\begin{aligned} \iiint_V d^3x \vec{J}_a \vec{\nabla} a(x_b x_c) &= \iiint_V d^3x \vec{J}_a (x_b \delta_{ac} + x_{cab}) \\ &= \iiint_V d^3x (J_c x_b + J_b x_c) = 0 \end{aligned}$$

luego

$$\iiint_V d^3x [x_a J_b(\vec{x}) + x_b J_a(\vec{x})] = 0$$

De esta forma, tomando la componente a-ésima de la siguiente integral

$$\left(\iiint_V d^3x' \vec{J}(\vec{x}') \vec{x}' \cdot \vec{x} \right)_a = \iiint_V d^3x' J'_a x'_b x_b = \frac{1}{2} \iiint_V d^3x' (J'_a x'_b - J'_b x'_a) x_b$$

y es fácil verificar que

$$\left(\iiint_V d^3x' \vec{J}(\vec{x}') \vec{x}' \cdot \vec{x} \right)_a = \left(\frac{1}{2} \iiint_V d^3x' [\vec{x} \times (\vec{J}(\vec{x}') \times \vec{x}')] \right)_a$$

Así, se obtiene

$$\vec{A}(\vec{x}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3} \times \iiint_V d^3x' \vec{J}(\vec{x}') \times \vec{x}'$$

Se define el **momento magnético** de una distribución de corriente localizada en V como

$$\begin{aligned} \mu &= \iiint_V d^3x' \vec{x}' \times \vec{J}(\vec{x}') \\ \vec{A}(\vec{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{\mu} \times \vec{x}}{|\vec{x}|^3} \end{aligned}$$

Es decir, el potencial vectorial (y por lo tanto el campo magnético) muy lejos de la fuente está completamente determinado (a primer orden) por el momento magnético de la distribución de carga.

13.4. Magnetismo en la materia

13.4.1. Magnetización

La materia consiste en una colección de momentos magnéticos. En los materiales no magnéticos, estos momentos están alineados de forma arbitraria, así se cancelan unos a otros y no hay un efecto neto de campo magnético debido a este material. Sin embargo, como hemos visto, ante la presencia de un campo magnético externo, los momentos magnéticos en el interior del material se alinearán en la dirección paralela al campo

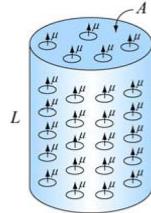
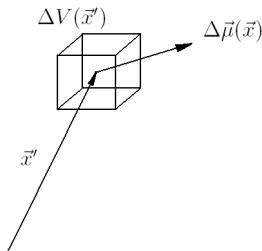


Fig. 13.1: Momentos magnéticos en un material se alinearán en la dirección paralela al campo externo

Estos momentos magnéticos crearán a su vez un campo magnético. Para obtener el efecto de esta magnetización, consideremos un elemento de volumen $\Delta V(\vec{x}')$ ubicado en algún punto interior de material \vec{x}' . Este elemento de volumen estará caracterizado por un momento magnético



$$\Delta \vec{\mu}(\vec{x}') = \sum_{a \in \Delta V(\vec{x}')} \vec{m}_a$$

donde la suma se realiza sobre cada átomo contenido en $\Delta V(\vec{x}')$. Definimos la **magnetización** del material como la densidad de momento magnético por unidad de volumen, esto es

$$\vec{M}(\vec{x}') = \left(\frac{\Delta \mu}{\Delta V} \right) \Big|_{\vec{x}'}$$

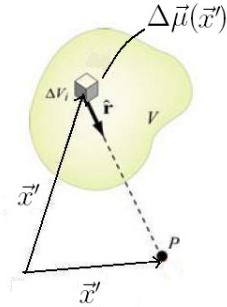
Veamos que ocurre con el campo magnético en un punto \vec{x} fuera del material. El potencial estará dado por

$$\vec{A}(\vec{x}) = \vec{A}_L(\vec{x}) + \vec{A}_M(\vec{x})$$

donde $\vec{A}_L(\vec{x})$ es el potencial magnético del campo externo y $\vec{A}_M(\vec{x})$ el potencial debido a la magnetización del medio.

En $\vec{x}' \in V$ hay un momento magnético dado por

$$\mu(\vec{x}') = \vec{M}(\vec{x}') \Delta V(\vec{x}')$$



El potencial en \vec{x} debido a este momento magnético puntual está dado por

$$\Delta \vec{A}_M(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\Delta \mu(\vec{x}') \times (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$$

El potencial total en \vec{x} debido al material se obtiene al integrar sobre V

$$\vec{A}_M(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V d^3x' \frac{\vec{M}(\vec{x}') \times (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$$

Ahora, se tiene

$$\frac{\vec{M}(\vec{x}') \times (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} = \vec{M}(\vec{x}') \times \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{M}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} - \vec{\nabla}' \times \frac{\vec{M}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

de forma que

$$\vec{A}_M(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_V d^3x' \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{M}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} - \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V d^3x' \vec{\nabla}' \times \left(\frac{\vec{M}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right)$$

Finalmente

$$\vec{A}_M(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V d^3x' \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{M}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} - \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{\delta V} \frac{d\vec{S}(\vec{x}') \times \vec{M}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

Recordando que el potencial magnético de una distribución de corriente libre en un volumen V está dado por

$$\vec{A}(\vec{x}) = \iiint_V d^3x' \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

es inmediato notar que todo sucede como si dentro del material existiera una densidad de corriente estacionaria

$$\vec{J}_M(\vec{x}) = \vec{\nabla} \times \vec{M}(\vec{x})$$

y como si en el contorno del material hubiera una densidad de corriente superficial

$$\vec{\sigma}_M(\vec{x}) = -\hat{n}(\vec{x}) \times \vec{M}(\vec{x})$$

Notar que

$$\vec{\nabla} \times \vec{J}_M(\vec{x}) = 0$$

(como debe ser para una corriente estacionaria), y

$$\hat{n}(\vec{x}) \cdot \sigma_M(\vec{x}) = 0$$

(como debe ocurrir para una corriente localizada). Luego, el efecto de un campo magnético externo sobre un medio material se puede resumir en una distribución de corriente estacionaria y localizada dentro del medio, el potencial en \vec{x} debido a esta corriente de magnetización está dado por

$$\vec{A}_M(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V d^3x' \frac{\vec{J}_M(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{\delta V} dS(\vec{x}') \frac{\sigma_M(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

13.5. Leyes fundamentales en un medio magnetizado

Queremos ver como se pueden reescribir las leyes fundamentales del campo magnético en el interior de un medio material. En todo punto dentro del material, se tendrán una densidad de corriente de carga libre, $\vec{J}_L(\vec{x})$, y una densidad de corriente de magnetización $\vec{J}_M(\vec{x})$. Es decir

$$\vec{J}(\vec{x}) = \vec{J}_L(\vec{x}) + \vec{J}_M(\vec{x})$$

Escribiendo la ecuación rotacional para el campo magnético, se debe incluir por supuesto la densidad de corriente total

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{x}) = \mu_0 \vec{J}(\vec{x}) = \mu_0 \left(\vec{J}_L(\vec{x}) + \vec{\nabla} \times \vec{M}(\vec{x}) \right)$$

Equivalentemente

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{B}(\vec{x})}{\mu_0} - \vec{M}(\vec{x}) \right) = \vec{J}_L(\vec{x})$$

Definimos el campo $\vec{H}(\vec{x}) = \frac{\vec{B}(\vec{x})}{\mu_0} - \vec{M}(\vec{x})$, y entonces

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{x}) = \vec{J}_L(\vec{x})$$

La gracia es que al lado derecho aparece únicamente la densidad de corriente libre. Todo el efecto del medio magnetizado se encuentra contenido en $\vec{H}(\vec{x})$ a través de la densidad de momento magnético $\vec{M}(\vec{x})$. Las ecuaciones fundamentales en un medio magnetizado son, entonces

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{x}) = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{x}) = \vec{J}_L(\vec{x})$$

Notar la total analogía con las leyes fundamentales de la electrostática en un medio

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot D(\vec{x}) &= \rho_L(\vec{x}) \\ \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{x}) &= 0 \end{aligned}$$

donde $\rho_L(\vec{x})$ es la densidad de carga libre. Recordar además que en ciertos materiales lineales, homogéneos e isotrópicos

$$\vec{D}(\vec{x}) = \epsilon \vec{E}(\vec{x}), \epsilon > 0$$

Esto se obtuvo de suponer que los momentos dipolares se alineaban en la dirección del campo eléctrico y que la respuesta era lineal en el campo eléctrico. De esta forma las dos ecuaciones fundamentales de la electrostática podían ser escritas como

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{x}) &= \frac{\rho_L(\vec{x})}{\epsilon} \\ \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{x}) &= 0\end{aligned}$$

donde la única diferencia con las leyes en el vacío es la permitividad ϵ , no necesariamente igual a ϵ_0 . (de hecho, siempre es mayor o igual). Notar que esto implica que el efecto de un medio dieléctrico es el de disminuir la magnitud del campo eléctrico en su interior. En cambio, con el campo magnético, podría suceder que el material aumentara la magnitud del campo magnético total, lo que veremos a continuación

13.6. Relaciones constitutivas del material

Se tiene

$$\vec{H}(\vec{x}) = \frac{\vec{B}(\vec{x})}{\mu_0} - \vec{M}(\vec{x})$$

La magnetización $\vec{M}(\vec{x})$ es, por supuesto, una función del campo magnético

$$\vec{M}(\vec{x}) = \vec{G}(\vec{B}(\vec{x}))$$

En consecuencia

$$\vec{H}(\vec{x}) = \vec{B}(\vec{x}) - \vec{G}(\vec{B}(\vec{x}))$$

o equivalentemente

$$\vec{B}(\vec{x}) = F(\vec{H}(\vec{x}))$$

Si el medio es **lineal**, la relación entre cada componente de \vec{B} y cada componente de \vec{H} es lineal

$$\vec{B}_a(\vec{x}) = F_{ab}(\vec{x})\vec{H}_b(\vec{x})$$

Si el medio es **homogéneo**, entonces la relación entre $\vec{B}(\vec{x})$ y $\vec{H}(\vec{x})$ es la misma en cada punto

$$\vec{B}_a(\vec{x}) = F_{ab}\vec{H}(\vec{x})_b$$

Por último, si el medio es **isotrópico**, $F_{ab} = \mu\delta_{ab}$, o simplemente

$$\vec{B}(\vec{x}) = \mu\vec{H}(\vec{x})$$

donde μ es una constante llamada **permeabilidad magnética** del material.

Con esto las leyes fundamentales quedan de la siguiente manera

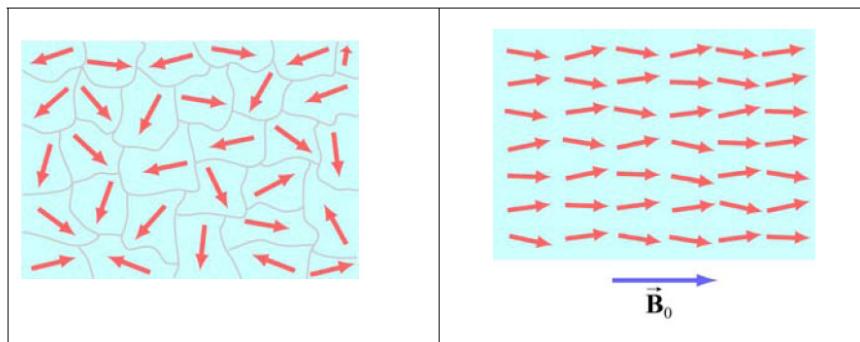
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{x}) = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{x}) = \mu \vec{J}_L(\vec{x})$$

Es decir, la ley de Ampère es exactamente la misma, exceptuando que ahora la permeabilidad no es necesariamente igual a la del vacío. Lo interesante es que para ciertos medios, llamados **paramagnéticos**, $\mu > \mu_0$, y el material magnetizado tiende a aumentar la magnitud del campo magnético. Por el contrario, para medios llamados **diamagnéticos** $\mu < \mu_0$, y la magnitud del campo magnético es debilitada

13.7. Ferromagnetismo

Existe otro tipo de materiales, llamados ferromagnéticos. En ellos existe una interacción fuerte entre momentos magnéticos cercanos. Este tipo de materiales está constituido por dominios, como se ilustra en la figura . Un campo magnético externo tiende a alinear los momentos magnéticos en la dirección paralela al campo externo. La interacción entre los momentos magnéticos vecinos causa un alineamiento mucho más fuerte



El aumento en la magnitud del campo magnético puede ser considerable, de hecho la magnitud el campo magnético en el interior de un material ferromagnético puede ser 10^3 o 10^4 veces mas grande que la del campo externo aplicado. El comportamiento de un material ferromagnético es **no lineal**, de forma que no podemos caracterizarlo por una permeabilidad magnética constante. De hecho, la relación $\vec{B} = F(\vec{H})$ no es monovalente, o dicho de otra forma, depende de la historia previa del material. Este fenómeno es conocido como **histéresis**. En la figura se muestra la variación de la magnetización ante la presencia de un campo magnético externo, partiendo desde *a*

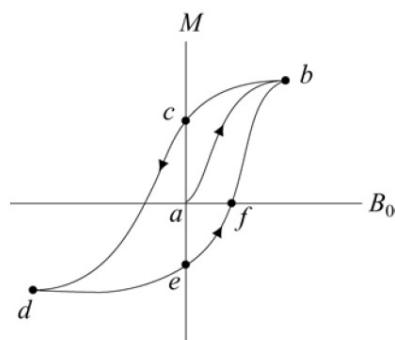


Fig. 13.2: Curva de histéresis

Notar que cuando el campo magnético externo vuelve a ser nulo (*c*), una magnetización sigue presente. Es decir, la fuerte interacción entre momentos magnéticos cercanos puede mantenerlos alineados, incluso cuando un campo magnético externo se reduce a cero. Estos momentos

alineados puede producir campos magnéticos fuertes, sin la necesidad de un campo magnético externo, este es el origen de los imanes permanentes.

Capítulo 14

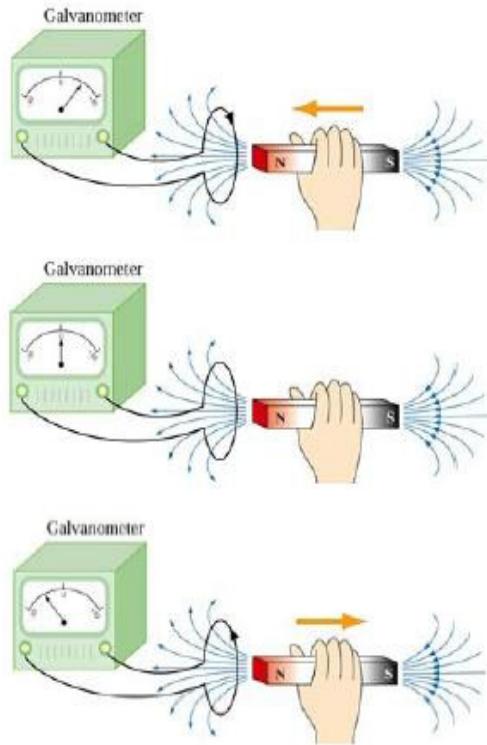
Ley de Inducción de Faraday

Los campos eléctricos y magnéticos que hemos considerado hasta ahora han sido producidos por cargas y corrientes estacionarias. A principios del siglo XIX ya era bien sabido que imponiendo una diferencia de potencial entre dos conductores, el campo eléctrico en el interior originaba una corriente de electrones, que a su vez crea un campo magnético a su alrededor. Era válido entonces preguntarse si un campo eléctrico podía o no ser producido por un campo magnético. Diversos intentos se realizaron, hasta que en 1831, Michael Faraday descubrió que una corriente eléctrica se genera en un conductor cuando éste **se mueve** en la cercanía de un imán. Pero, en su época, tal fenómeno, conocido ahora como **inducción magnética**, no parecía ser más que una simple curiosidad.

El notable físico Richard Feynman contaba en sus cursos de Física en Caltech, que cuando Faraday presentó su descubrimiento a la comunidad científica, alguien le preguntó para qué servía, a lo cual Faraday respondió con otra pregunta: *¿para qué sirve un recién nacido?* Medio siglo después, Tomás Edison tuvo la idea de utilizar el descubrimiento de Faraday para generar corriente eléctrica y distribuirla a través de cables por la ciudad de Nueva York. La primera planta eléctrica de la historia fue inaugurada en 1881, y consistía en unas enormes turbinas de vapor que hacían girar unas grandes bobinas de alambre conductor alrededor de imanes. Debido al efecto Faraday se generaba una corriente eléctrica que se podía transmitir por toda la ciudad. La energía térmica se convertía, así, en **energía eléctrica**. Pocos meses después se inauguró la primera planta hidroeléctrica, en la que el agua de un río hacía girar las bobinas.

Toda la electricidad que consumimos hoy en día se genera gracias al efecto Faraday. Lo único que varía es el mecanismo utilizado para hacer girar una bobina alrededor de un imán: este mecanismo puede ser el flujo del agua en una presa, el funcionamiento de un motor de combustión de petróleo, la presión del vapor de agua calentada por el uranio en una planta nuclear, en otras palabras, Faraday descubrió el principio fundamental de la **conversión electromecánica de la energía** (el recién nacido creció espectacularmente, como diría Feynman).

El experimento de Faraday consiste en una espira conductora y un imán.



Faraday mostró que el galvanómetro no mide ninguna corriente cuando el imán está estacionario con respecto a la espira. Sin embargo, se **induce** una corriente cuando existe un movimiento relativo entre el imán y la espira, en particular, el galvanómetro marca en una dirección cuando el imán se acerca, y en la dirección opuesta cuando el imán se aleja.

14.1. Ley de Inducción

La descripción formal es la siguiente, sea Γ una curva que describe la forma del conductor, entonces

$$\varepsilon_{\Gamma}(t) = \oint_{\Gamma[t]} d\vec{x} \cdot \vec{E}(\vec{x}, t)$$

Es la fuerza electromotriz inducida en Γ . Notar que es una cantidad dinámica que puede evolucionar en el tiempo, ya que ahora aceptaremos que los campos eléctricos y magnéticos puedan variar con el tiempo. Del mismo modo

$$\Phi_B(t) = \iint_{S_{\Gamma}(t)} d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{B}(\vec{x}, t)$$

es el flujo magnético a través de S_{Γ}

El experimento de Faraday muestra que una corriente eléctrica es inducida en la espira al cambiar el flujo magnético que la atraviesa. Se comporta entonces como si estuviera conectada a una fuente de f.e.m. Experimentalmente se encuentra que esta f.e.m inducida depende de la tasa a la que varía el flujo magnético a través de la espira, esto es

$$\varepsilon_{\Gamma} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

La unidad SI del flujo magnético es el Weber (Wb) = 1 $T \cdot m^2$

La ley de Faraday se puede enunciar como sigue: La f.e.m inducida en un circuito cerrado es igual a la tasa negativa de cambio del flujo magnético a través del área encerrada por la espira

El signo menos indica que la corriente inducida en la espira tiende a oponerse a este cambio de flujo. Existen muchas formas de inducir una fem en una espira. Por ejemplo si consideramos un caso particular en donde el campo magnético es uniforme (espacialmente), la espira es plana y su normal forma un ángulo ϑ con el campo magnético, se tiene

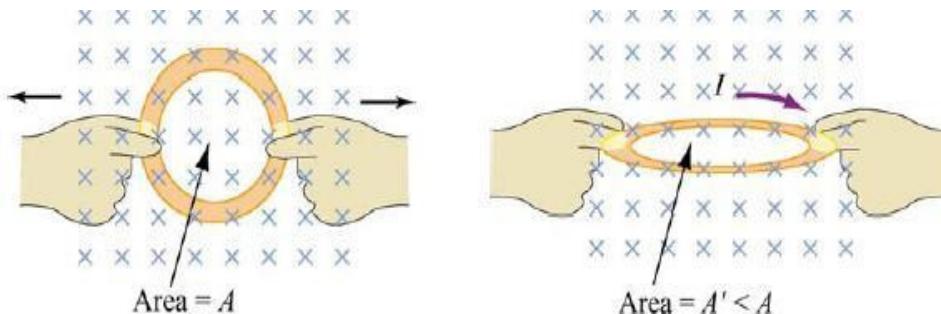
$$\varepsilon = -\frac{d(BS \cos \vartheta)}{dt} = -\left(\frac{dB}{dt}\right) S \cos \vartheta - B \left(\frac{dS}{dt}\right) \cos \vartheta + BS \sin \vartheta \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)$$

A partir de esto, vemos que una f.e.m inducida se puede producir de las siguientes formas

1. Al variar la magnitud de \vec{B} en el tiempo (por ejemplo ocurre cuando en un circuito cercano la corriente varía)



2. Al variar la magnitud de \vec{S} , es decir, el área encerrada por la espira en el tiempo



3. Al variar el ángulo entre \vec{B} y el vector de superficie \vec{S} en el tiempo



Este último es el principio más utilizado en centrales de generación

Es fácil obtener el sentido de la corriente inducida, ya que ésta produce un campo magnético que tiene a oponerse al cambio del flujo magnético que induce dicha corriente. Ésta se conoce como Ley de Lenz. (aunque se deduce completamente de la ley de Inducción!)

Esta ley, que introduce una relación dinámica distante entre $\vec{E}(\vec{x}, t)$ y $\vec{B}(\vec{x}, t)$, variables en el tiempo, sugiere que \vec{E} y \vec{B} son objetos físicos **reales**. **No son intermediarios puramente matemáticos** introducidos para facilitar los cálculos ¹

14.2. Forma diferencial de la ley de Inducción

Consideremos un circuito de prueba Γ fijo, es decir $\Gamma(t) = \Gamma$

$$\varepsilon_{\Gamma(t)} = \oint_{\Gamma} dx \cdot \vec{E}(\vec{x}, t) = -\frac{d}{dt} \iint_{S(\Gamma)} d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{B}(x, t)$$

$$\oint_{\Gamma} dx \cdot \vec{E}(\vec{x}, t) = - \iint_{S(\Gamma)} d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(x, t)$$

Por el teorema de Stokes

$$\iint_{S(\Gamma)} dS(\vec{x}) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{x}, t)) = - \iint_{S(\Gamma)} d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(x, t)$$

válido para todo S (fijo), luego se obtiene la ley diferencial de Faraday

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{x}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(\vec{x}, t) = 0$$

Esta es una de las ecuaciones de Maxwell para campos que varían en el tiempo, y es una generalización para el rotor de $\vec{E}(\vec{x})$, en donde **sólo para casos estáticos** (la primera parte del curso)

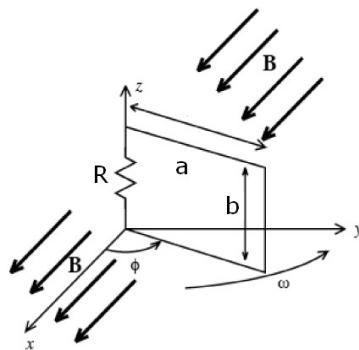
$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{x}) = 0$$

Notar, que sólo en ése caso el campo \vec{E} es conservativo.

¹Hypothesis non fingo de Newton se viene abajo en Electromagnetismo

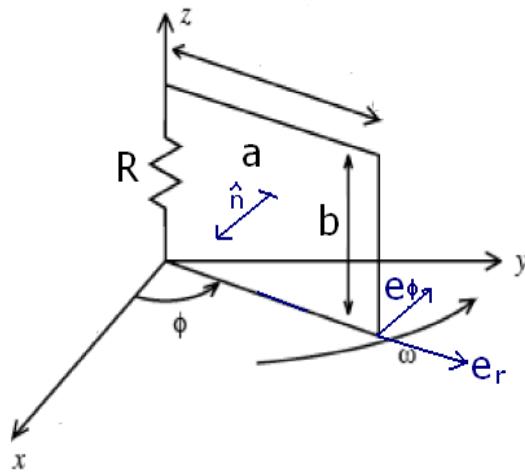
Problema

La espira rectangular de la figura se encuentra sumergida en un campo magnético uniforme $\vec{B} = B\hat{x}$. Si la espira gira con velocidad angular w utilizando el eje z como eje de rotación, y asumiendo que en $t = 0$ la espira se encuentra en el plano $y-z$, determine la fuerza electromotriz inducida y la corriente inducida en la espira



Solución

Definiendo la normal a la espira rectangular como en la figura



Según ésta definición, la normal es en todo instante igual a $-\hat{e}_\phi$, es decir

$$\hat{n} = -(-\sin \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y}) = \sin \phi \hat{x} - \cos \phi \hat{y}$$

De esta forma, y dado que el campo magnético es uniforme, el flujo a través de la espira es

$$\Phi_B = \iint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{B}(\vec{x}) = \vec{B} \cdot \vec{S} = \vec{B} \cdot S\hat{n} = BS \sin \phi$$

Es decir

$$\Phi_B = Bab \sin \phi$$

Tenemos una expresión del flujo magnético a través de la espira en función del ángulo polar ϕ . La idea es obtener el flujo en función del tiempo, para ello observamos que

$$\frac{d\phi}{dt} = w \rightarrow \phi(t) = wt + C$$

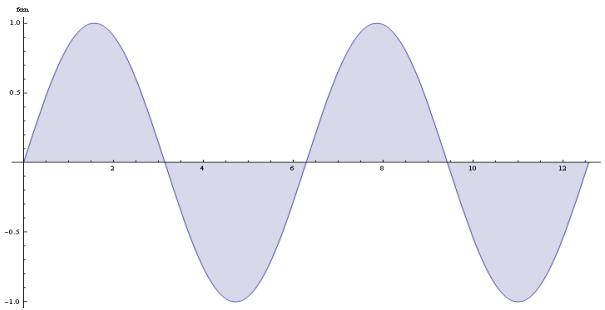
La constante C es fácil de determinar, considerando que en $t = 0$, la espira se ubica en el eje $y-z$, es decir, $\phi_0 = \pi/2$. Así

$$\Phi_B = Bab \sin(wt + \pi/2)$$

A partir de la ley de inducción de Faraday, podemos obtener la magnitud de la fem inducida en la espira

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -Babw \cos(wt + \pi/2)$$

Vemos que la fem es alterna y varía de forma sinusoidal, como se aprecia en la figura



Esta es la forma típica de generación alterna. La tensión que llega a nuestras casas también varía de forma sinusoidal, a una frecuencia de 50 Hz y valor efectivo de 220 Volts.

La magnitud de la corriente es, simplemente

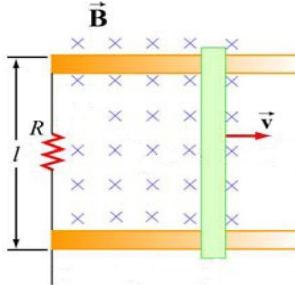
$$I = \frac{|\varepsilon|}{R} = \frac{Babw}{R} \cos(wt + \pi/2)$$

Problema

Considera la disposición que se muestra en la figura. Supongamos que $R = 6\Omega$, $l = 1,2 \text{ m}$ y un campo magnético uniforme de $2,5 \text{ T}$ está dirigido hacia el interior de la página.

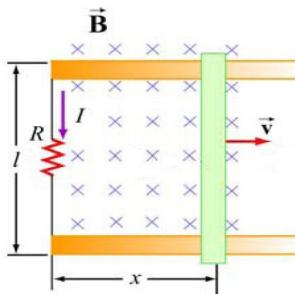
a) ¿A qué rapidez deberá moverse la barra para producir una corriente de $0,5 \text{ A}$ en la resistencia?

b) Calcule la fuerza que se debe ejercer sobre la barra en este caso



Solución

a) Consideremos el circuito cerrado formado por la barra y los rieles.



Definamos al vector de superficie como $\vec{S} = -S\hat{k}$. (Hacia dentro del papel) Supongamos que la barra se encuentra a una distancia x del riel izquierdo, según esto, el flujo magnético sobre la superficie plana encerrada por este circuito es

$$\Phi_B = BA = Blx$$

Ahora, utilizando la ley de Faraday obtenemos que la fem inducida en el circuito

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(Blx) = -Bl\frac{dx}{dt}$$

Pero dx/dt es simplemente la velocidad de la barra, así

$$\varepsilon = -Blv$$

La correspondiente corriente inducida es

$$I = \frac{|\varepsilon|}{R} = \frac{Blv}{R}$$

Y el sentido de ésta se deduce de la ley de Lenz. Notemos que mientras la velocidad de la barra sea positiva (y entonces se mueve hacia la derecha) el flujo magnético aumenta. La ley de Lenz dice que la corriente inducida intentará siempre oponerse al cambio de flujo magnético que la origina. Es decir, el sentido de la corriente será tal que intentará frenar a la barra.

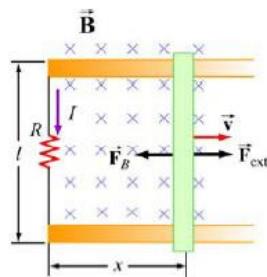
Notar que en la figura anterior se ha supuesto un sentido para la corriente. Éste podría ser correcto o no. Segundo el sentido de la corriente que aparece en la figura, habrá una fuerza magnética sobre la barra en la dirección $-\hat{i}$, que justamente intentará frenar a la barra, por lo tanto ese será el verdadero sentido de la corriente. Despejando

$$v = \frac{RI}{Bl}$$

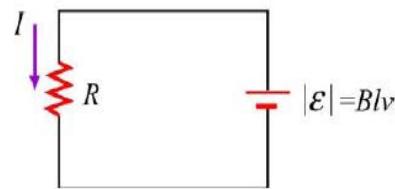
reemplazando los valores numéricos

$$v = \frac{6 \times 0,5}{2,5 \times 1,2} = \frac{3}{3} = 1 \text{ m/s}$$

b) Vemos que sobre la barra actúan dos fuerzas



La fuerza externa es la fuerza que se debe ejercer sobre la barra para que se mueva a velocidad v . La fuerza magnética tiene relación con la corriente inducida que circula por el circuito, cuyo equivalente es



La fuerza magnética que experimenta la barra es simplemente

$$\begin{aligned}\vec{F}_B &= I\vec{L} \times \vec{B} = I(l\hat{j}) \times (-B\hat{k}) \\ \vec{F}_B &= -IlB\hat{i} = -\frac{B^2 l^2 v}{R}\hat{i}\end{aligned}$$

que apunta en la dirección opuesta a \vec{v} . Para que la barra se mueva a velocidad constante, la fuerza neta actuando sobre ella debe ser igual a cero. Así

$$\vec{F}_{\text{ext}} = -\vec{F}_B = \frac{B^2 l^2 v}{R}\hat{i}$$

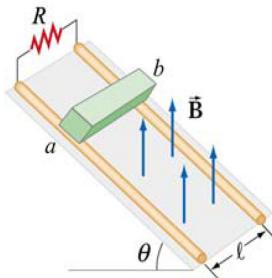
Notar que la potencia entregada por \vec{F}_{ext} es igual a la potencia disipada en la resistencia (consecuencia de la conservación de la energía)

$$P = \vec{F}_{ext} \cdot \vec{v} = F_{ext}v = \frac{B^2l^2v^2}{R}$$

$$P = \frac{(Blv)^2}{R} = \frac{\varepsilon^2}{R} = I^2R$$

Problema

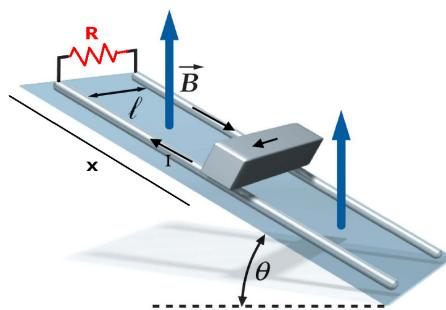
Una barra conductora de masa m y resistencia R desliza entre 2 rieles conductores sin fricción que forman un ángulo ϑ con la horizontal, y están separados una distancia l . Un campo magnético uniforme \vec{B} es aplicado verticalmente. La barra se suelta del reposo y desliza hacia abajo.



- La corriente inducida en la barra. ¿En qué dirección fluye, de a hacia b o de b hacia a ?
- La velocidad terminal de la barra
- Una vez alcanzada la velocidad terminal
- Cual es la corriente inducida?
- A qué tasa se disipa energía en la resistencia?
- Cual es la tasa de trabajo ejercido por la gravedad?

Solución

a) Supongamos que en un instante dado la barra se encuentra a una distancia x del extremo, como se ve en la figura



El circuito formado por los rieles y la barra que desliza encierra una superficie plana cuya normal es

$$\hat{n} = \sin\vartheta\hat{x} + \cos\vartheta\hat{y}$$

Y el flujo a través de esta superficie es

$$\Phi_B = \iint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{B}(\vec{x}) = \vec{B} \cdot S\hat{n} = BS \cos\vartheta = Bxl \cos\vartheta$$

Con esto, la fem inducida en los extremos de la barra es

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -Bl \cos\vartheta \frac{dx}{dt}$$

Así, la corriente inducida está dada por

$$I = \frac{|\varepsilon|}{R} = \frac{Bl}{R} \cos \vartheta \frac{dx}{dt}$$

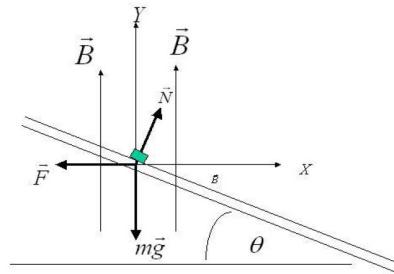
La magnitud de la corriente es tal que se opone al cambio de flujo, es decir, debe ser tal que sobre la barra actúa una fuerza magnética en la dirección $-\hat{x}$.

$$\vec{F}_B = I\vec{L} \times \vec{B} = I\vec{L} \times B\hat{j}$$

De aquí es claro que la corriente debe ir en la dirección \hat{k} (es decir de b hacia a), de forma que

$$\vec{F}_B = IlB\hat{k} \times \hat{j} = -IlB\hat{x}$$

b)



Se tiene además que

$$mg \sin \vartheta - F_B \cos \vartheta = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$mg \sin \vartheta - IlB \cos \vartheta = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

Recordando que

$$I = \frac{Bl}{R} \cos \vartheta \frac{dx}{dt}$$

se tiene

$$mg \sin \vartheta - \frac{l^2 B^2}{R} \cos^2 \vartheta \frac{dx}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$g \sin \vartheta - \frac{l^2 B^2}{mR} \cos^2 \vartheta \frac{dx}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$A - Bv = \frac{dv}{dt}$$

$$dt = \frac{dv}{(A - Bv)}$$

$$t - t_0 = -\frac{\ln(A - Bv)}{B}$$

$$-B(t - t_0) = \ln(A - Bv)$$

Finalmente

$$e^{-B(t-t_0)} = A - Bv$$

$$\frac{A}{B} - \frac{1}{B} e^{-B(t-t_0)} = v$$

Si $t_0 = 0$

$$v(t) = \frac{mRg \sin \vartheta}{l^2 B^2 \cos^2 \vartheta} - \frac{mR}{l^2 B^2 \cos^2 \vartheta} e^{-\frac{l^2 B^2}{mR} \cos^2 \vartheta t}$$

Para encontrar la velocidad terminal, simplemente vemos que ocurre en el límite cuando $t \rightarrow \infty$

$$v_t = \frac{mgRtg\vartheta \sec \vartheta}{l^2 B^2}$$

c) La corriente terminal está dada por

$$I = \frac{Bl}{R} \cos \vartheta v_t = \frac{mgtg\vartheta}{lB}$$

d) El módulo de la fem inducida en esta situación es

$$|\varepsilon| = \frac{mgRtg\vartheta}{lB}$$

la tasa a la cual se disipa energía en la resistencia es la potencia que consume, esta es

$$P = |\varepsilon| I = \frac{m^2 g^2 Rtg^2 \vartheta}{l^2 B^2}$$

e) La tasa de trabajo ejercida por la gravedad es

$$P_g = F_g v_t$$

donde F_g es la componente de la fuerza gravitacional en la dirección del desplazamiento

$$P_g = mg \sin \vartheta v_t = \frac{m^2 g^2 Rtg^2 \vartheta}{l^2 B^2}$$

que es lo mismo que la potencia que disipa la resistencia. Esto debe tenerse por el principio de conservación de la energía

Problema

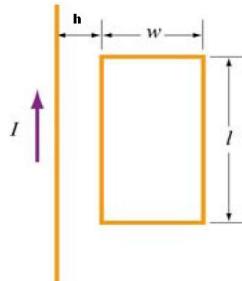
Una espira de alambre en forma de rectángulo de largo l y ancho w , y un alambre recto paralelo al lado l y que lleva una corriente I , yacen sobre una mesa.

La distancia entre el alambre largo y el lado izquierdo de la espira es h .

a) Determine el flujo magnético que atraviesa la espira.

b) Suponga que la corriente es una función del tiempo con $I(t) = a + bt$, con a y b constantes positivas. ¿Cuál es la f.e.m inducida en la espira y la dirección de la corriente inducida?

Solución



Usando la ley de Ampère para el alambre recto se obtiene que el campo a una distancia r de éste está dado por

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{k}$$

Es decir, apunta hacia dentro del papel. Definimos el vector de área como $\vec{S} = -S\hat{k}$ de modo que $\Phi_B > 0$. Para obtener el flujo total, simplemente debemos sumar los flujos sobre todos los pequeños elementos de área de largo l y ancho dr encerrados por la espira

$$\Phi_B = \iint_S d\Phi_B = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$\Phi_B = \frac{\mu_0 Il}{2\pi} \int_h^{h+w} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 Il}{2\pi} (\ln(h+w) - \ln(h))$$

Finalmente

$$\Phi_B = \frac{\mu_0 Il}{2\pi} \ln \left(1 + \frac{w}{h} \right)$$

b) Utilizando la ley de Faraday

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt} \left(\frac{\mu_0 Il}{2\pi} \ln \left(1 + \frac{w}{h} \right) \right)$$

Como las dimensiones de la espira permanecen constantes, lo único que varía en el tiempo es la corriente, y entonces

$$\varepsilon = -\frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \left(1 + \frac{w}{h} \right) \frac{dI}{dt}$$

y sabemos que $dI/dt = b$, así

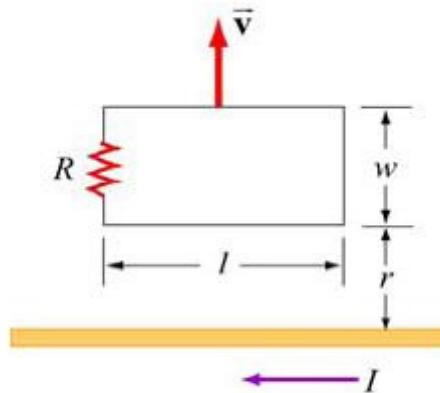
$$\varepsilon = -\frac{\mu_0 lb}{2\pi} \ln \left(1 + \frac{w}{h} \right)$$

Ahora, notemos que el alambre recto de corriente I produce un flujo magnético a través de la espira entrando a la página. Por la ley de Lenz, la corriente inducida en la espira debe fluir en el sentido contrarreloj para así producir un campo magnético saliendo a través de la página para contrarrestar el incremento del flujo hacia adentro.

Problema

Una espira rectangular de dimensiones l y w se mueve con velocidad constante \vec{v} alejándose de un alambre recto infinitamente largo que lleva corriente I en el mismo plano de la espira. Sea la resistencia total de la espira R . ¿Cuál es la corriente en la espira en el instante en que el lado más cercano está a una distancia r del alambre?

Solución



Sabemos que el campo magnético a una distancia x del alambre recto está dado por

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi x} \hat{k}$$

Apuntando hacia dentro del papel debido a la dirección de la corriente. Ahora, el flujo magnético sobre un elemento diferencial de área de largo l y ancho dx en la espira es

$$d\Phi_B = \vec{B} \cdot d\vec{S} = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} l dx$$

donde hemos escogido el vector de superficie apuntando hacia dentro de la página, para que $\Phi_B > 0$. Integrando sobre toda la espira

$$\begin{aligned}\Phi_B &= \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \int_r^{r+w} \frac{dx}{x} \\ \Phi_B &= \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \left(1 + \frac{w}{r} \right)\end{aligned}$$

el mismo resultado del problema anterior. Derivando con respecto a t , obtenemos la fem inducida

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{\mu_0 I l}{2\pi} \frac{d}{dt} \ln \left(\frac{r+w}{r} \right) = -\frac{\mu_0 I l}{2\pi} \left(\frac{1}{r+w} - \frac{1}{r} \right) \frac{dr}{dt}$$

donde dr/dt es simplemente el módulo de la velocidad de la espira

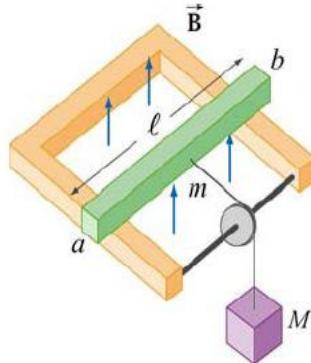
$$\begin{aligned}\varepsilon &= -\frac{\mu_0 I l v}{2\pi} \left(\frac{1}{r+w} - \frac{1}{r} \right) = -\frac{\mu_0 I l v}{2\pi} \left(\frac{r - r - w}{r(r+w)} \right) \\ \varepsilon &= \frac{\mu_0 I l v}{2\pi} \frac{w}{r(r+w)}\end{aligned}$$

Y la corriente inducida será simplemente

$$I = \frac{|\varepsilon|}{R} = \frac{\mu_0 I l v}{2\pi R} \frac{w}{r(r+w)}$$

Problema

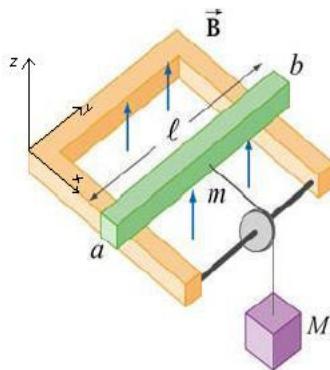
Una barra conductora de masa m y resistencia R es empujada en la dirección horizontal a través de dos rieles sin fricción apartados una distancia l , mediante un hilo de masa despreciable que pasa a través de una polea ideal y que está conectada a un bloque de masa M . Un campo magnético uniforme es aplicado verticalmente hacia arriba. La barra parte del reposo.



- Sea la velocidad de la barra en algún instante igual a v . Encuentre una expresión para la corriente inducida. En qué dirección fluye, de a hacia b o de b hacia a?
- Resuelva la ecuación diferencial para la velocidad de la barra en función del tiempo.

Solución

- Sea nuestro origen de coordenadas la esquina inferior del sistema como se aprecia en la figura



Es una situación muy similar a la del problema 2, si escogemos el vector de superficie $\vec{S} = S\hat{k}$, entonces el flujo a través del circuito será positivo.

Supongamos que cuando la velocidad es v , la barra está a una distancia horizontal x del origen, así

$$\Phi_B = Blx$$

y la fem inducida es

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -Bl \frac{dx}{dt} = -Blv$$

La corriente inducida será

$$I = \frac{|\varepsilon|}{R} = \frac{Blv}{R}$$

- Sea x la coordenada x del centro de masa de la barra en el instante t . El equilibrio de fuerzas para la barra es

$$\sum \vec{F} = T\hat{i} - I\vec{l} \times \vec{B} = T\hat{i} - Il\hat{j} \times B\hat{k} = (T - IlB)\hat{i} = m \frac{dx^2}{dt^2}\hat{i}$$

Para la masa M

$$\sum \vec{F} = Mg - T = M \frac{dy^2}{dt^2}$$

Debemos notar que $dx^2/dt^2 = dy^2/dt^2$, así

$$Mg - M \frac{dy^2}{dt^2} = Mg - M \frac{dx^2}{dt^2} = T$$

Así, el equilibrio de fuerzas para la barra queda

$$(Mg - M \frac{dx^2}{dt^2} - IlB) = m \frac{dx^2}{dt^2}$$

$$Mg - \frac{l^2 B^2}{R} v = (m + M) \frac{dx^2}{dt^2}$$

Por último, hay que notar que $v = dx/dt$, y obtenemos una ecuación diferencial para v

$$\frac{dv}{dt} + \frac{l^2 B^2}{R(M+m)} v - \frac{Mg}{M+m} = 0$$

la solución es de la forma

$$v(t) = Ce^{-\frac{B^2 l^2}{R(M+m)} t} + \frac{MgR}{l^2 B^2}$$

y la condición inicial es que $v(0) = 0$, así

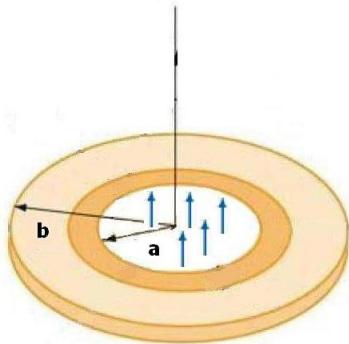
$$C + \frac{MgR}{l^2 B^2} = 0 \rightarrow C = -\frac{MgR}{l^2 B^2}$$

Finalmente

$$v(t) = \frac{MgR}{l^2 B^2} \left(1 - e^{-\frac{B^2 l^2}{R(M+m)} t} \right)$$

Problema

Un disco en cuyo borde se encuentra una carga uniformemente distribuida q , pende de un hilo vertical. En la región $r < a$ existe un campo magnético uniforme $B\hat{k}$. Se desconecta la fuente de campo magnético, disminuyendo éste uniformemente a 0 en un intervalo corto de tiempo. Si el momento de inercia del disco es I , calcule la velocidad angular final de éste.



Solución

Inicialmente, se tiene un flujo constante a través de la región $r < a$ dado por

$$\Phi_{Bi} = B\pi a^2$$

donde hemos elegido la normal a la superficie según la dirección \hat{k} , de manera que $\Phi_B > 0$. Ahora, tomemos la curva C que coincide con el borde del disco, y utilizando la ley de Faraday

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

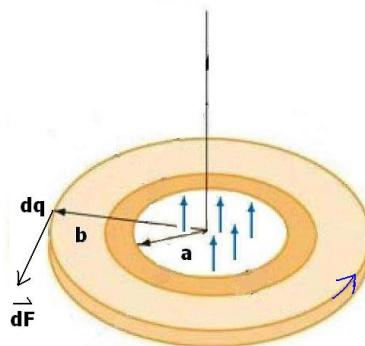
$$E2\pi b = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

lo que se puede reescribir como

$$E2\pi b dt = -d\Phi_B$$

$$E = -\frac{1}{2\pi b} \frac{d\Phi_B}{dt}$$

Este campo eléctrico genera una fuerza sobre cada elemento de carga en el borde del disco



$$d\vec{F} = E\lambda b d\vartheta \hat{\vec{k}}$$

En consecuencia, se produce un diferencial de torque dado por

$$d\vec{\tau} = b\hat{r} \times d\vec{F} = E\lambda b^2 d\vartheta \hat{k}$$

$$d\vec{\tau} = -\frac{1}{2\pi b} \frac{d\Phi_B}{dt} \lambda b^2 d\vartheta \hat{k}$$

$$d\vec{\tau} = -\frac{\lambda b}{2\pi} \frac{d\Phi_B}{dt} d\vartheta \hat{k}$$

El torque total a un tiempo t estará dado por

$$\vec{\tau} = - \int_0^{2\pi} d\vartheta \frac{\lambda b}{2\pi} \frac{d\Phi_B(t)}{dt}$$

$$\vec{\tau} = -\lambda R \frac{d\Phi(t)}{dt}$$

Si \vec{L} es el momento angular del disco con respecto al centro, entonces

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{d\tau}$$

$$-\lambda b \frac{d\Phi_B(t)}{dt} = \frac{dL}{dt}$$

$$-\int_0^{t_f} dt \lambda b \frac{d\Phi_B(t)}{dt} = \int_0^{t_f} dt \frac{dL}{dt}$$

$$-\lambda b (\Phi_B(t_f) - \Phi_B(0)) = L_f - L_i$$

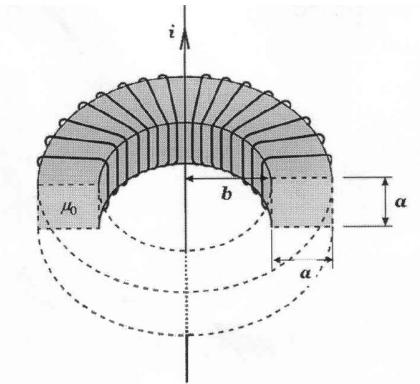
si el disco parte del reposo, $L_i = 0$, y además $\Phi_B(t_f) = 0$

$$\lambda b \pi a^2 B = I w_f$$

$$w_f = \frac{\lambda R \pi a^2 B}{I}$$

Problema

Se considera una bobina con N espiras cuadradas de lado a sin un medio material en el interior. Cada espira está a distancia b de un alambre recto y muy largo que lleva una corriente $I = I_0 \sin wt$, con w constante. Además, todas las espiras cuadradas son coplanares con el alambre recto. Calcule, en función de los datos I_0, w, a, b , la fem inducida entre los terminales de la bobina.

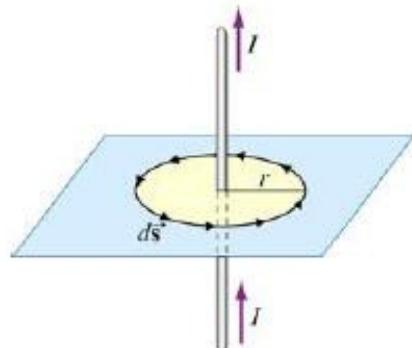


Solución

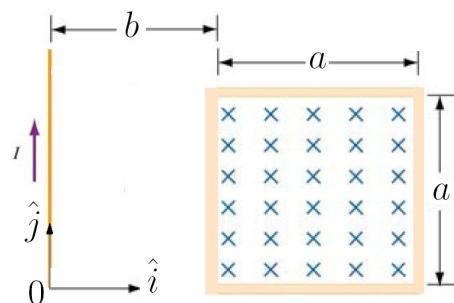
El campo magnético del alambre recto se obtiene fácilmente por la ley de Ampère, pues por la extensión infinita del alambre el campo debe tener una simetría cilíndrica radial, y debe ser tangente a trayectorias que son circunferencias concéntricas al alambre. De esta forma

$$\oint_{\Gamma} d\vec{x} \cdot \vec{B}(\vec{x}) = 2\pi r B(r) = \mu_0 I(t)$$

donde Γ es una circunferencia concéntrica al alambre, de radio r



Calculemos ahora el flujo por una sola espira, como se muestra en la figura



Se tiene

$$\Phi = \iint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{B}(\vec{x})$$

donde S es la superficie plana encerrada por la espira cuadrada. El campo magnético en el plano de la espira está dado por

$$\vec{B}(\vec{x}) = -\frac{\mu_0 I(t)}{2\pi x} \hat{k}$$

Escogiendo la normal unitaria en el sentido $-\hat{k}$, el flujo magnético queda

$$\Phi(t) = \int_0^a dy \int_0^a dx \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi x} = \frac{\mu_0 I(t)a}{2\pi} \ln \left(\frac{a+b}{b} \right)$$

El flujo será el mismo sobre cada una de las N espiras, de forma que el flujo total sobre la bobina es

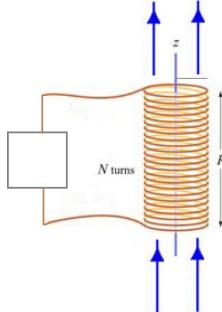
$$\Phi_T(t) = N\Phi(t) = \frac{N\mu_0 I(t)a}{2\pi} \ln \left(\frac{a+b}{b} \right)$$

por la ley de Faraday, se inducirá una fem sobre la bobina dada por

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= -\frac{d\Phi_T(t)}{dt} \\ \varepsilon(t) &= -\frac{N\mu_0 wa}{2\pi} \ln \left(\frac{a+b}{b} \right) \cos wt \end{aligned}$$

Problema

Una bobina circular plana de N vueltas tiene diámetro D y resistencia R . La bobina se orienta con su eje paralelo a un campo magnético $\vec{B} = B\hat{k}$ uniforme, y los extremos de la bobina se conectan a un dispositivo capaz de medir la carga que pasa a través de él. Si la bobina se gira en 180 grados sobre un eje perpendicular al campo magnético, el dispositivo mide una carga Q . Encuentre el valor de B en términos de N, D, R y Q



Solución

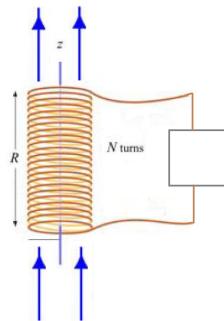
En la situación inicial, el flujo magnético a través de la bobina es constante y está dado por

$$\Phi = N \iint_S dS(\vec{x}) \hat{n}(\vec{x}) \cdot \vec{B}(\vec{x})$$

orientando la normal a la espira según $\hat{n} = \hat{k}$, se tiene

$$\Phi = N \iint_S dS(\vec{x}) \hat{k} \cdot B \hat{k} = NB \iint_S dS(\vec{x}) = NB\pi(D/2)^2$$

La espira se gira en 180 grados, de forma que la situación final es la siguiente



Mientras la espira gira, se induce una fem ε entre sus extremos, ya que el flujo magnético Φ varía. Si se induce una fem, se induce una corriente

$$I(t) = \frac{\varepsilon(t)}{R}$$

y

$$\varepsilon(t) = -\frac{d\Phi(t)}{dt}$$

Supongamos que la espira demora un tiempo T en girar en 180 grados, luego la carga que pasará por el detector es

$$Q = \int_0^T dt I(t) = \int_0^T dt \frac{\varepsilon(t)}{R}$$

$$Q = -\frac{1}{R} \int_0^T dt \frac{d\Phi(t)}{dt} = -\frac{1}{R} (\Phi(T) - \Phi(0))$$

donde

$$\Phi(0) = NB\pi (D/2)^2$$

mientras que

$$\Phi(T) = -NB\pi (D/2)^2$$

luego

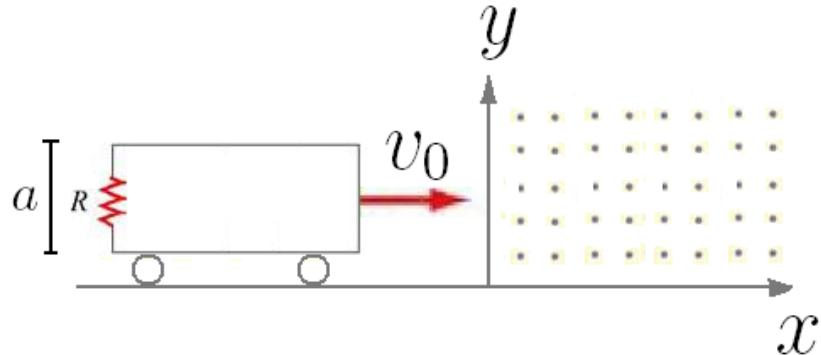
$$Q = \frac{NB\pi D^2}{2R}$$

Finalmente

$$B = \frac{2QR}{\pi ND^2}$$

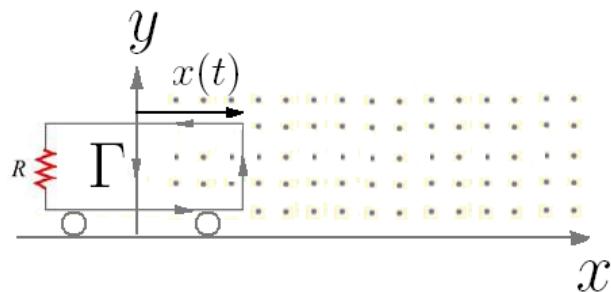
Problema

Un tren de masa m se desplaza inicialmente con velocidad $v_0 \hat{i}$. Ingresa a una región de frenado electromagnético para disminuir la velocidad del tren, en donde existe un campo magnético uniforme, en el sentido que se muestra en la figura. Encuentre la velocidad del tren en función del tiempo. El largo del tren es L



Solución

Analizamos un instante cualquiera cuando el tren ha entrado $x(t) < L$ a la región de campo B



Sea Γ la curva que encierra al área que ha ingresado a la zona de campo magnético, en el sentido indicado por la figura. Así, la normal exterior está dirigida según k , y el flujo a través de la espira es

$$\Phi(t) = \iint_{S(\Gamma)} d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{B}(\vec{x}) = \iint_{S(\Gamma)} dS(\vec{x}) B = aBx(t)$$

por la ley de inducción, habrá una fem inducida en el circuito Γ

$$\varepsilon(t) = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = -aB\dot{x}(t)$$

El signo menos da el sentido de la corriente inducida, como muestra la figura

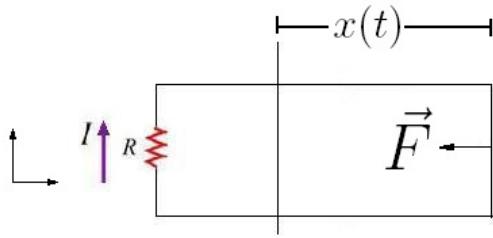


Por ley de mallas, la corriente del circuito en el sentido de la figura está dada por

$$IR = aB\dot{x}(t)$$

$$I = \frac{aB}{R}\dot{x}(t)$$

Por otro lado, en cada segmento del circuito hay una fuerza por unidad de largo dada por $\vec{I} \times \vec{B}$. De la figura es claro que las fuerzas sobre las secciones horizontales se cancelan



$$\vec{F} = -Ia\hat{j} \times B\hat{k} = -IaB\hat{i}$$

De esta forma, la segunda ley de Newton para el tren entrega

$$-IaB = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

pero

$$I(t) = \frac{aB\dot{x}(t)}{R}$$

$$\frac{-(aB)^2\dot{x}(t)}{R} = m\ddot{x}(t), x(t) < L$$

$$\frac{-(aB)^2}{R} \frac{dx(t)}{dt} = m \frac{d^2x(t)}{dt^2}, x(t) < L$$

Resolviendo para $v(t)$

$$\frac{-(aB)^2}{mR}v(t) = \frac{dv(t)}{dt}$$

La solución es

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{(aB)^2}{mR}t}, t < t^*$$

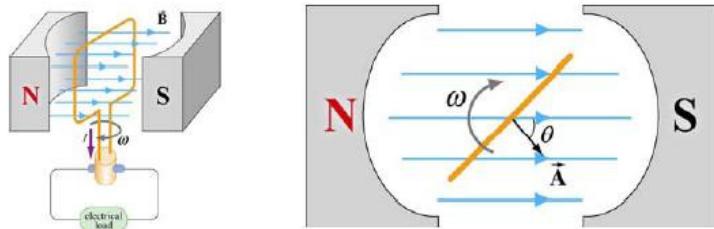
con $x(t^*) < L$. Este tiempo puede ser obtenido mediante $x(t)$

$$x(t) = \frac{v_0 m R}{(aB)^2} \left(1 - e^{-\frac{(aB)^2}{mR}t} \right)$$

la solución es válida para todo t tal que $x(t) < L$. Una vez que el tren ha ingresado completamente a la región de campo magnético, el flujo se mantiene constante, luego no hay fuerzas sobre el tren y se mantendrá con velocidad constante igual a $v(t^*)$

Problema

Consideré un generador que consta de un electroimán que genera un campo magnético constante. Una espira de área A gira con velocidad angular constante w como se ve en la figura. Si los terminales de la espira se conectan a una resistencia R, calcule la potencia consumida por ésta. Calcule además la potencia necesaria para producir el movimiento rotatorio de la espira.



Solución

El flujo magnético que atraviesa la espira es, dado que el campo magnético es uniforme

$$\Phi_B = \vec{B} \cdot d\vec{S} = BA\cos(\vartheta)$$

$$\Phi_B = BA\cos(wt)$$

Así, la tasa a la que varía el flujo magnético es

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = -BAw\sin(wt)$$

Utilizando la ley de Faraday, obtenemos la f.e.m inducida en el circuito

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = BAwsinwt$$

Si el circuito se conecta a una resistencia R, la corriente a través de ésta será

$$I = \frac{|\varepsilon|}{R} = \frac{BAw}{R}\sinwt$$

Notemos que es una corriente alterna, cuya amplitud máxima es

$$I_0 = \frac{BAw}{R}$$

Ahora, la potencia suministrada al circuito eléctrico es

$$P = |\varepsilon|I = \frac{(BAw)^2}{R}\sin^2wt$$

Por otro lado, el torque necesario para producir el movimiento rotatorio de la espira es

$$\tau = \mu B \sin\theta = \mu B \sinwt$$

donde μ es la magnitud del momento magnético de la espira

$$\mu = IA \rightarrow \tau = IAB\sinwt$$

$$\tau = \frac{B^2 A^2 w}{R} \sin^2 wt$$

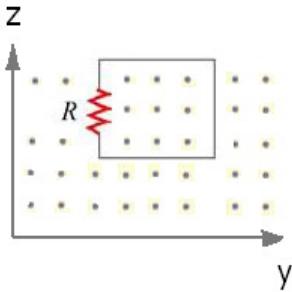
Por último, la potencia mecánica necesaria está dada por

$$P_m = \tau w = \frac{B^2 A^2 w^2}{R} \sin^2 wt$$

Como era de esperarse, la potencia mecánica entregada es igual a la potencia consumida por el circuito.

Problema

Considera una espira rectangular de lado a y masa m , en el plano $y-z$, sumergida en un campo magnético $\vec{B} = (B_0 - \alpha z)\hat{x}$, con $\alpha > 0$. La espira cae en la dirección vertical debido a la gravedad. Encontrar la fem y corriente inducida en función de la velocidad \vec{v} de la espira. ¿Cuál es la velocidad terminal?



Solución

Definiendo la normal a la espira rectangular según $\hat{n} = \hat{x}$, y suponiendo que el extremo inferior se encuentra a una altura z , el flujo magnético a través de la espira está dado por

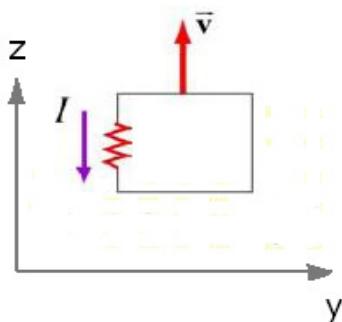
$$\begin{aligned}\Phi_B &= \iint_S d\vec{S} \cdot \vec{B} = \iint_S dy dz B(z) = \int_0^a dy \int_z^{z+a} dz (B_0 - \alpha z) \\ \Phi_B &= a(B_0 z - \frac{\alpha}{2} z^2) \Big|_z^{z+a} = a^2 B_0 - \frac{a\alpha}{2} (z^2 + 2az + a^2 - z^2) \\ \Phi_B &= a^2 B_0 - \frac{\alpha}{2} (2za^2 + a^3) = a^2 (B_0 - \alpha z) - \frac{\alpha a^3}{2}\end{aligned}$$

Con esto, y utilizando la ley de inducción de Faraday, podemos determinar la fem inducida en la espira

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d\Phi_B}{dz} \frac{dz}{dt} = -\dot{z}(-\alpha a^2)$$

$$\varepsilon = v \alpha a^2$$

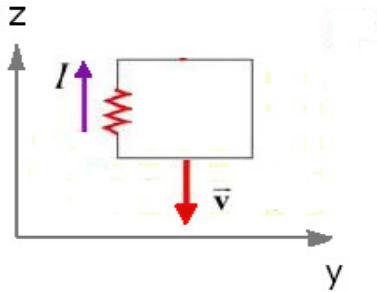
Donde v es la rapidez con que cae la espira. Podemos distinguir dos casos, si la espira sube, entonces $v > 0$ y $\varepsilon > 0$, lo que nos dice que la corriente inducida irá en el sentido contrareloj, como se aprecia en la figura



Otra forma de verlo, es notando que el campo magnético se hace más débil en la medida que aumenta la altura z , de forma que si la espira sube, el flujo disminuye. Así, la corriente inducida debe ir en una dirección tal que el flujo que ésta genere se sume al flujo magnético

externo e intente evitar que el flujo total disminuya

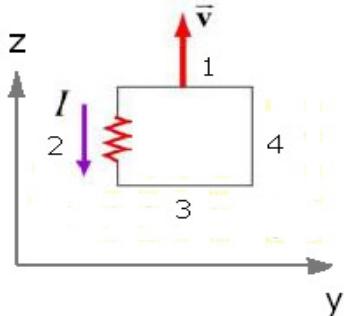
Ahora, el caso de interés (la espira cae por gravedad), implica $v < 0$, de forma que $\varepsilon < 0$ y esto significa que la corriente va en el sentido indicado por la siguiente figura. Otra forma de verlo es notando que si la espira cae, el flujo magnético aumenta, luego la corriente inducida debe generar un flujo magnético opuesto de manera de oponerse a este aumento.



La magnitud de la corriente está dada por

$$I = \frac{|\varepsilon|}{R} = \frac{\alpha a^2 |v|}{R}$$

Ahora, para encontrar la velocidad terminal de la espira, necesitamos encontrar la ecuación de movimiento. Calculemos la fuerza magnética que actúa sobre la espira. Podemos descomponer la fuerza total como la suma de las fuerzas sobre 4 segmentos



Es fácil notar que sobre los segmentos verticales 2 y 4, las fuerzas se anulan (el campo no depende de la coordenada y y la corriente tiene sentido inverso en ambos segmentos). Ahora, la fuerza sobre el segmento 1 es

$$\vec{F}_1 = IaB(z+a)(-\hat{y} \times \hat{x}) = IaB(z+a)\hat{k}$$

Y para el segmento 2

$$\vec{F}_2 = IaB(z)(\hat{y} \times \hat{x}) = -IaB(z)\hat{k}$$

La fuerza total es

$$\vec{F} = Ia(B_o - \alpha(z+a) - B_0 + \alpha z)\hat{k} = -Ia^2\alpha\hat{k}$$

$$\vec{F} = -\frac{\alpha^2 a^4 v}{R}\hat{k}$$

Notar nuevamente que si $v > 0$ (sube), entonces la fuerza intenta hacer caer a la espira. Si por otro lado, la espira cae $v < 0$ y entonces la fuerza magnética es hacia arriba. Finalmente, la ecuación de movimiento es

$$m \frac{dv}{dt} = -\frac{\alpha^2 a^4 v}{R} - mg$$

Para encontrar la velocidad terminal, imponemos $\frac{dv}{dt} = 0$

$$v_t = -R \frac{mg}{\alpha^2 a^4}$$

El signo menos indica que finalmente la espira cae con velocidad constante dada por $|v_t|$

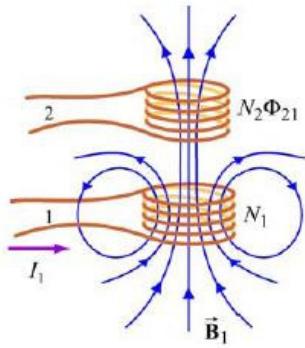
Parte VI

Inductancia y Corriente Alterna

Capítulo 13

Inductancia

A continuación veremos un fenómeno de acoplamiento magnético. Supongamos que tenemos 2 bobinas, cerca una de otra, como se muestra en la figura



La primera de ellas tiene N_1 vueltas y lleva una corriente I_1 , la que da origen a un campo magnético \vec{B}_1 . Debido a que ambas bobinas están cerca, algunas líneas de campo magnético a través de la bobina 1 también pasarán a través de la bobina 2, como se aprecia claramente en la figura. Denotemos por Φ_{21} el flujo magnético total a través de la bobina 2 (que será N_2 veces el flujo a través de una sola vuelta) debido a la corriente I_1 .

Ahora, al variar I_1 en el tiempo, habrá una fem inducida en la bobina 2 debido al cambio de flujo magnético en ella

$$\varepsilon_{21} = -\frac{d\Phi_{21}}{dt} = -\frac{d}{dt} \int \int_{S_2} d\vec{S} \cdot \vec{B}_1$$

Ahora, por regla de la cadena

$$\frac{d\Phi_{21}}{dt} = \frac{d\Phi_{21}}{dI_1} \frac{dI_1}{dt} = M_{21} \frac{dI_1}{dt}$$

Notar que aquí hemos establecido que el flujo sobre 2 es proporcional a la corriente I_1 , es decir, $d\phi_{21}/dI_1 = M_{21}$ donde la constante de proporcionalidad M_{21} se llama **inductancia mutua**, y depende únicamente de la geometría y es una medida de que tan bueno es el acoplamiento magnético.

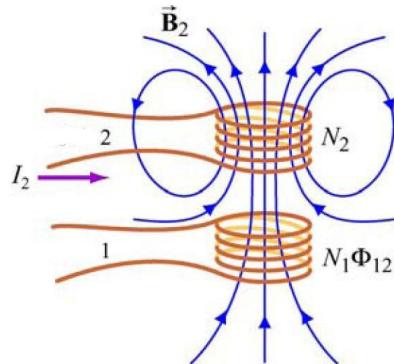
Vemos que es igual a

$$M_{21} = \frac{d\Phi_{21}}{dI_1} = \frac{\Phi_{21}}{I_1}$$

esto último se debe a que los flujos siempre dependen linealmente de las corrientes que los originan. La unidad S.I de la inductancia mutua es el Henry (H).

Análogamente, ahora suponga que existe una corriente I_2 en la segunda bobina y que varía en el tiempo. Así, se induce una fem en la bobina 1 dada por

$$\varepsilon_{12} = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -\frac{d}{dt} \int \int \vec{B}_2 \cdot d\vec{S}_1$$



Este flujo variable en la bobina 1 es proporcional al cambio de corriente en la bobina 2

$$\frac{d\Phi_{12}}{dt} = \frac{d\Phi_{12}}{dI_2} \frac{dI_2}{dt} = M_{12} \frac{dI_2}{dt}$$

donde

$$M_{12} = \frac{d\Phi_{12}}{dI_2} = \frac{\Phi_{12}}{I_2}$$

Utilizando la ley de Ampere y la de Biot-Savart se puede deducir la fórmula de Neumann, y se puede demostrar que ámbas inductancias mutuas son iguales (muy útil!)

$$M_{21} = M_{12} = M$$

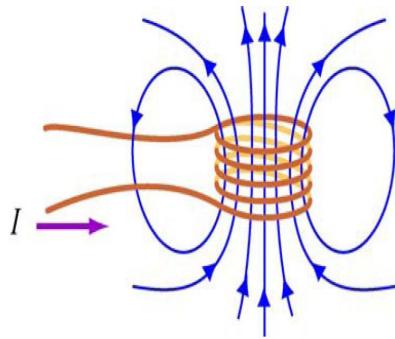
Esto es claro al ver la expresión de la fórmula de Neumann para dos circuitos

$$M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$$

la cual es totalmente simétrica, de manera que el intercambiar los índices por M_{12} no altera el resultado.

Autoinductancia

Considere nuevamente una bobina de N vueltas que lleva una corriente I en el sentido contrarreloj. Si la corriente es constante, entonces el flujo magnético a través de cada vuelta permanecerá constante. Ahora considere que la corriente I varía en el tiempo, luego, de acuerdo a la ley de Faraday-Lenz, una fem inducida aparecerá para oponerse al cambio de flujo.



La corriente inducida irá en el sentido del reloj si $dI/dt > 0$ y contrareloj si $dI/dt < 0$. (Recordar Ley de Lenz!). La propiedad de que su propio campo magnético se opone a cualquier cambio en la corriente es lo que se llama inductancia propia o **autoinductancia**, y la fem generada entre sus terminales se llama fem autoinducida, que se denota por ε_L . Todo elemento de este tipo se denomina Inductancia. Matemáticamente, se tiene

$$\varepsilon_L = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt} \int \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{d\Phi_B}{dI} \frac{dI}{dt} = L \frac{dI}{dt}$$

de manera que

$$\varepsilon_L = -L \frac{dI}{dt}$$

donde L es la autoinductancia,

$$L = \frac{\Phi_B}{I}$$

Físicamente, la autoinductancia es una medida de la resistencia de una inductancia al cambio de corriente, así, mientras más grande es el valor de L , más lenta será la tasa a la cual varía la corriente.

La autoinductancia también se puede pensar (de hecho es equivalente en términos de la fórmula de Neumann) como la inductancia mutua del circuito consigo mismo, es decir, $L = M_{11}$.

Energía almacenada en campos magnéticos

Debido a que una inductancia en un circuito se opone a cualquier cambio en la corriente a través de ella, debe realizarse un trabajo por un agente externo (como una batería) para establecer una corriente en la inductancia. La energía entonces se puede almacenar en ella!. El rol que juega una inductancia en el caso magnético es análogo al de un condensador en el caso eléctrico. La potencia, o tasa a la cual una fem externa trabaja para superar la fem autoinducida en la inductancia (ε_L) y lograr que pase una corriente I a través de ésta es

$$P = \frac{dW_{ext}}{dt} = I\varepsilon_{ext}$$

Si solo una fem externa y la inductancia están presentes, entonces $\varepsilon = -\varepsilon_L$, esto es

$$P = -I\varepsilon_L = IL\frac{dI}{dt}$$

Si la corriente aumenta con $dI/dt > 0$, entonces $P > 0$ lo que significa que la fuente externa está haciendo un trabajo positivo para transferir energía a la inductancia. Entonces, la energía interna U_B de la inductancia aumenta.

Por otro lado, si la corriente decrece $dI/dt < 0$, la fuente externa toma energía de la inductancia, causando una disminución en la energía interna de ésta.

El trabajo total hecho por la fuente externa para aumentar la corriente desde 0 hasta I es

$$W_{ext} = \int dW_{ext} = \int_0^I LIdI = \frac{1}{2}LI^2$$

Esto es igual a la energía magnética almacenada en la inductancia

$$U_B = \frac{1}{2}LI^2$$

esta expresión es análoga a la energía eléctrica almacenada en un condensador

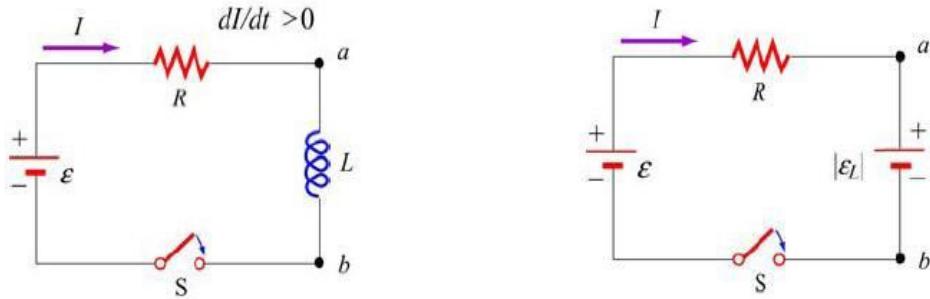
$$U_E = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

Existe una distinción importante entre una inductancia y una resistencia, desde el punto de vista de la energía. Cuando una corriente I pasa a través de una resistencia, energía fluye a través de la resistencia y se disipa en forma de calor, independiente si la corriente es constante o dependiente del tiempo.

Por otro lado, energía fluye en una inductancia solo cuando existe una corriente que varía en el tiempo , con $dI/dt > 0$. La energía no es disipada pero sí almacenada, y es liberada después cuando $dI/dt < 0$

Circuitos RL

Consideremos el circuito RL que se muestra en la figura. En $t=0$, el interruptor es cerrado. Veremos que la corriente no alcanza inmediatamente su máximo valor ε/R . Ésto se debe a la presencia de una fem autoinducida en la inductancia.



Utilizando la ley de voltajes de Kirchhoff

$$-\varepsilon + IR + |\varepsilon_L| = -\varepsilon + IR + L \frac{dI}{dt} = 0$$

se obtiene entonces una ecuación diferencial para la corriente

$$L \frac{dI}{dt} = \varepsilon - IR$$

la que se puede resolver por el método de separación de variables

$$\begin{aligned} L dI &= dt(\varepsilon - IR) \rightarrow \frac{dI}{(\varepsilon - IR)} = \frac{dt}{L} \\ \frac{dI}{(\varepsilon/R - I)} &= \frac{dt}{L/R} \end{aligned}$$

Integrando a ambos lados de la ecuación

$$\ln(I - \varepsilon/R) = -t \frac{R}{L} + C_1$$

así

$$I - \varepsilon/R = C e^{-tR/L}$$

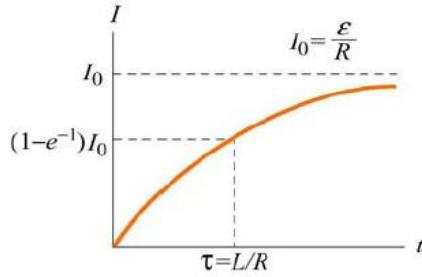
$$I(t) = C e^{-tR/L} + \varepsilon/R$$

Imponiendo la condición $I(0) = 0$, se tiene $C = -\varepsilon/R$

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R} (1 - e^{-tR/L})$$

Se define entonces la constante de tiempo de este circuito como $\tau = L/R$, así

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R}(1 - e^{-t/\tau})$$



Notar que despues de un tiempo suficientemente largo, la corriente llega a su valor de equilibrio ε/R . El hecho de que no alcance este valor de forma inmediata se debe justamente a que la inductancia tiende a oponerse a que la corriente varíe de forma brusca. La constante de tiempo τ es una medida de qué tan rápido se llega al estado de equilibrio, mientras mayor es el valor de L , más tiempo le toma al circuito a llegar a éste estado.

Similarmente, la magnitud de la fem autoinducida se puede obtener como

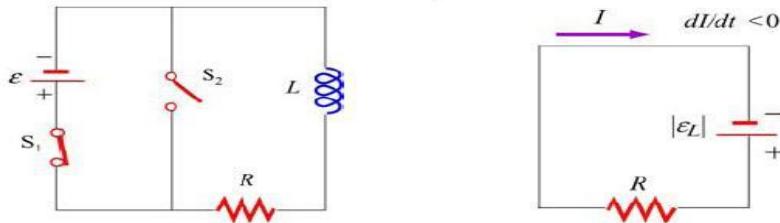
$$|\varepsilon_L| = \left| -L \frac{dI}{dt} \right| = \varepsilon e^{-t/\tau}$$

La cual es máxima cuando $t=0$ y desaparece cuando t tiende a infinito. Esto implica que despues de un largo tiempo desde que el interruptor es cerrado, la autoinducción desaparece y la inductancia sicamente actúa como un alambre conductor conectando 2 partes del circuito. Para verificar que la energía se conserva, basta multiplicar la ecuación de Kirchhoff por I , para obtener

$$I\varepsilon = I^2 R + LI \frac{dI}{dt}$$

Notar que el lado izquierdo representa la potencia entregada por la batería, parte de ésta se disipa en la resistencia ($I^2 R$) y el resto se almacena en la inductancia. La energía disipada por la resistencia es irrecuperable, mientras que la almacenada por la inductancia se puede reutilizar después

Para verificar esto último, considere ahora el circuito RL que se muestra en la figura. El interruptor S_1 ha estado cerrado por un tiempo muy largo tal que la corriente está en equilibrio con valor ε/R . Que ocurre cuando en $t=0$ el interruptor S_1 se cierra y el S_2 se abre?



Sumando las caídas de potencial obtenemos que

$$-\lvert \varepsilon_L \rvert + IR = -L \frac{dI}{dt} + IR = 0$$

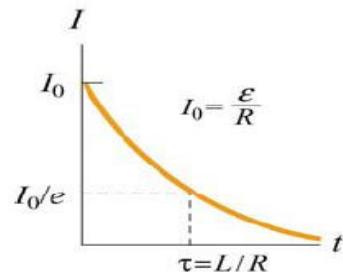
$$L \frac{dI}{dt} = -IR \rightarrow \frac{dI}{I} = -\frac{dt}{L/R}$$

Integrando ambos lados de la ecuación

$$I(t) = Ce^{-t/\tau}$$

Imponiendo la condición $I(0) = \varepsilon/R$

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R} e^{-t/\tau}$$



Es decir, una vez que se desconecta la fuente de energía (batería), la energía almacenada por la inductancia es liberada y entregada a la resistencia, quien disipa esta energía en forma de calor

Circuitos de Corriente Alterna

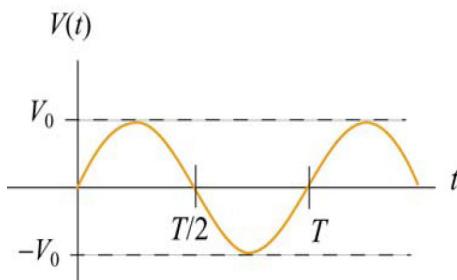
En ayudantías anteriores vimos que un flujo magnético que cambia en el tiempo puede inducir una fem de acuerdo a la ley de Faraday. En particular, si una espira rota con velocidad angular w en la presencia de un campo magnético, la fem inducida varía sinusoidalmente en el tiempo (con frecuencia w) y produce una corriente alterna (AC). Este es el caso típico de generación de energía y de los grandes sistemas de potencia. El símbolo para una fuente de voltaje alterna es



Un ejemplo de fuente AC es

$$V(t) = V_0 \cos wt$$

donde el valor máximo V_0 se llama amplitud. El voltaje varía entre V_0 y $-V_0$. Un gráfico del voltaje como función del tiempo se muestra en la siguiente figura



Es una función periódica en el tiempo. La frecuencia f , definida como $1/T$ donde T es el período, tiene unidades de $1/\text{seg}$ (hertz). Se relaciona con la frecuencia angular según $w = 2\pi f$. En nuestras casas obtenemos $V_0 = 220\sqrt{2}$ y $f = 50$ Hz

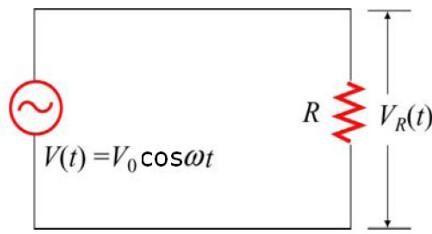
Cuando una fuente de voltaje se conecta a un circuito RLC, después de un tiempo transiente, una corriente alterna comenzará a fluir por el circuito como respuesta a la fuente de voltaje forzante. La corriente será de la forma

$$I(t) = I_0 \cos(wt - \phi)$$

Es decir, oscilará con la **misma frecuencia de la fuente** (esta es una propiedad de los sistemas lineales), con amplitud I_0 y fase ϕ que dependerán de la frecuencia forzante de la fuente. Antes de examinar circuitos RLC complejos, primero consideraremos casos simples donde sólo un elemento se conecta a una fuente de voltaje sinusoidal

Carga puramente resistiva

Consideré un circuito puramente resistivo con una resistencia conectada a un generador AC, como se muestra en la figura



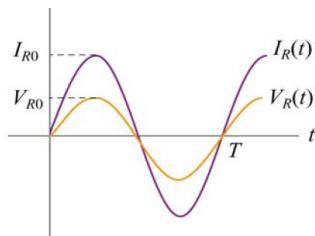
Sumando las caídas de potencial, obtenemos

$$V(t) - V_R(t) = V(t) - I(t)R = 0$$

donde $V_R(t) = I(t)R$ es el voltaje instantáneo a través de la resistencia. La corriente instantánea en la resistencia (y en el circuito) está dada por

$$I(t) = \frac{V_R(t)}{R} = \frac{V_0 \cos \omega t}{R} = I_{R0} \cos \omega t$$

Notamos que $\phi = 0$, lo que significa que $I(t)$ y $V(t)$ están **en fase**, es decir, alcanzan sus valores máximos y mínimos al mismo tiempo.



Ahora, podemos representar voltajes y corrientes con números complejos, así, la fuente que representamos como $V(t) = V_0 \cos(\omega t)$ en forma compleja es, simplemente

$$V(t)^* = V_0 e^{i\omega t} = V_o (\cos \omega t + i \sin \omega t) = \hat{V} e^{i\omega t}$$

donde \hat{V} es el voltaje en forma de **fasor**. En este caso $\hat{V} = V_o$, pero en otras circunstancias podría ser un número complejo. Por supuesto lo que entendemos aquí por voltaje es la parte real de $V^*(t)$. Similarmente las corrientes también las podemos escribir en forma fasorial.

Definimos la **Impedancia** de una resistencia por el número complejo

$$\hat{Z} = R$$

Esto corresponde a la resistencia expresado como fasor. En el caso de una resistencia es por supuesto un número real. De esta forma

$$\frac{\hat{V}}{\hat{Z}} = \hat{I}$$

Esto se cumple de forma general, de modo que al tratar estos problemas con fasores, siempre se cumple que $\hat{V} = \hat{I}\hat{Z}$, lo que simplifica enormemente los cálculos. En este caso en particular

$$\frac{\hat{V}}{R} = \hat{I}$$

$$\hat{I} = \frac{\hat{V}}{R} = \frac{V_0}{R}$$

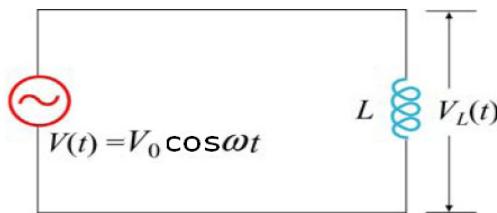
y entonces la corriente es

$$I(t)^* = \hat{I}e^{iwt} = \frac{V_0}{R}e^{iwt}$$

$$I(t) = \frac{V_0}{R} \cos wt$$

Carga puramente inductiva

Considera ahora una carga inductiva que consiste de una inductancia conectada a una fuente AC



Se tiene

$$V(t) - V_L(t) = V(t) - L \frac{dI}{dt} = 0$$

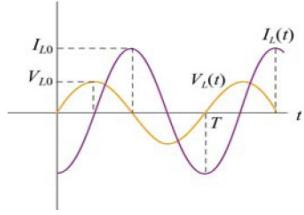
lo que implica

$$\frac{dI}{dt} = \frac{V(t)}{L} = \frac{V_0}{L} \cos \omega t$$

Integrando

$$I_L = \int dI_L = \frac{V_0}{L} \int dt \cos \omega t = \frac{V_0}{wL} \sin \omega t = \frac{V_0}{wL} \cos(\omega t - \pi/2)$$

de aquí vemos que la amplitud del voltaje en la inductancia es $\frac{V_0}{wL} = \frac{V_0}{X_L}$, donde $X_L = wL$ se llama **reactancia inductiva**. Tiene unidades de Ohm (Ω), igual que las resistencias. Sin embargo, a diferencia de una resistencia común, la reactancia depende de la frecuencia. Esto se debe al hecho de que a frecuencias más altas la corriente varía de forma más rápida que a frecuencias bajas. Por otro lado, esta reactancia se anula cuando w tiende a cero. También notamos que $\phi = -\frac{\pi}{2}$, es decir, la corriente está **en atraso** con respecto al voltaje, como se aprecia en la figura



Veamos como se obtiene este resultado de forma inmediata utilizando fasores, todo lo que hay que saber es que la inductancia equivale a una impedancia igual a

$$Z_L = iX_L = iwL$$

De esta forma, el voltaje en la inductancia se relaciona con la corriente a través de ella según

$$\hat{V}_L = \hat{Z}_L \hat{I}$$

es decir, trabajando con fasores es una simple ley de Ohm (entre comillas). Como el voltaje en la inductancia aquí es igual al voltaje de la fuente

$$\hat{V} = \hat{V}_L = iwL\hat{I}$$

Despejando la corriente

$$\hat{I} = \frac{1}{jwL} \hat{V} = -\frac{i}{wL} \hat{V} = \frac{1}{wL} e^{-i\pi/2} \hat{V}$$

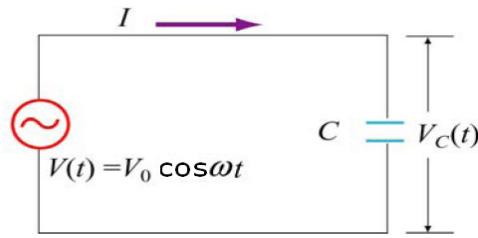
En este caso, $\hat{V} = V_o$, con lo que la corriente en función del tiempo queda

$$I(t)^* = \hat{I} e^{iwt} = \frac{V_o}{wL} e^{i(wt - \pi/2)}$$

tomando la parte real

$$I(t) = \frac{V_o}{wL} \cos(wt - \pi/2)$$

Carga puramente capacitiva



Aquí, nuevamente tenemos

$$V(t) - V_C(t) = V(t) - \frac{Q(t)}{C} = 0$$

$$Q(t) = CV(t) = CV_c(t) = CV_0 \cos \omega t$$

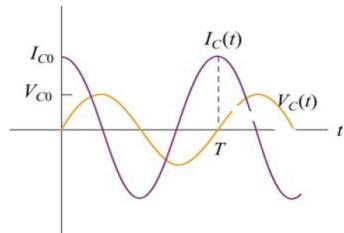
además, la corriente en el circuito está dada por

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = -CwV_0 \sin \omega t = CwV_0 \cos(\omega t + \pi/2) = CwV(t)$$

de aquí encontramos la relación entre la amplitud del voltaje y la amplitud de la corriente a través del condensador

$$V_0 = \frac{1}{Cw} I_0 = X_C I_0$$

donde X_C es la reactancia capacitativa del condensador. Vemos que en este caso la corriente está desfasada en $\phi = -\pi/2$ con respecto al voltaje (es decir, está en **adelanto** con respecto a este)



En términos de fasores, simplemente consideramos la impedancia de un condensador

$$\hat{Z}_C = \frac{1}{jwC}$$

de forma que

$$\hat{V} = \hat{Z}_C \hat{I}$$

despejando la corriente

$$\hat{I} = \frac{\hat{V}}{\hat{Z}_C} = iwCV = iwCV_o = wCV_o e^{i\pi/2}$$

Así

$$I(t)^* = \hat{I} e^{i\omega t} = wCV_o e^{i(\omega t + \pi/2)}$$

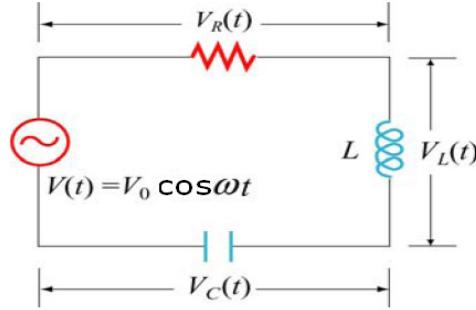
tomando la parte real

$$I(t) = wCV_o \cos(wt + \pi/2)$$

Fácil fácil con fasores!

El circuito resonante RLC

Consideremos ahora el circuito RLC de la figura



Aquí tenemos

$$V(t) - V_R(t) - V_L(t) - V_C(t) = V(t) - IR - L \frac{dI}{dt} - \frac{Q}{C} = 0$$

lo que nos lleva a la siguiente ecuación diferencial

$$L \frac{dI}{dt} + IR + \frac{Q}{C} = V_o \cos wt$$

Asumiendo que el condensador está inicialmente descargado, y considerando $I = \frac{dQ}{dt}$, podemos reescribirla como

$$L \frac{d^2Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = V_o \cos wt$$

Una solución posible es (en régimen permanente)

$$Q(t) = Q_0 \sin(wt + \phi)$$

donde la amplitud y la fase son, respectivamente

$$Q_0 = \frac{V_0/L}{\sqrt{(Rw/L)^2 + (w^2 - \frac{1}{LC})^2}} = \frac{V_0}{w\sqrt{R^2 + (wL - 1/wC)^2}}$$

$$Q_0 = \frac{V_0}{w\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}$$

y

$$\tan \phi = \frac{1}{R}(wL - \frac{1}{wC}) = \frac{X_L - X_R}{R}$$

la correspondiente corriente es

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = I_0 \cos(wt + \phi)$$

con amplitud

$$I_0 = Q_0 w = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}$$

Notar que la corriente tiene la misma amplitud y fase en todos los puntos del circuito RLC. Por otro lado, el voltaje instantáneo a través de cada uno de los 3 elementos tiene diferente amplitud y fase con respecto a la corriente. Habrán notado que resolver los problemas mediante esta forma puede resultar complicado, de forma que indicaré una solución con fasores, y sacarán sus propias conclusiones.

En términos de fasores, podemos ver el circuito como una sola impedancia equivalente, como la resistencia, la inductancia y el condensador se encuentran en serie, tenemos

$$\hat{Z}_{eq} = R + iwL + \frac{1}{iwC} = R + i(wL - \frac{1}{wC})$$

la amplitud de este número complejo es, simplemente

$$\text{mod } Z \quad \text{mod } = \sqrt{R^2 + (wL - \frac{1}{wC})^2}$$

y la fase

$$\phi = \arctan\left(\frac{wL - \frac{1}{wC}}{R}\right)$$

de esta forma, si el voltaje de la fuente es

$$\hat{V} = V_0 \angle 0$$

entonces la corriente a través del circuito es

$$\hat{I} = \frac{\hat{V}}{\hat{Z}} = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (wL - \frac{1}{wC})^2}} \angle \arctan\left(\frac{wL - \frac{1}{wC}}{R}\right)$$

Por último, recordando que

$$I(t)^* = \hat{I} e^{iwt} = |I| e^{i(wt+\phi)}$$

$$I(t) = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (wL - \frac{1}{wC})^2}} \cos(wt + \phi)$$

donde $\phi = \arctan\left(\frac{wL - \frac{1}{wC}}{R}\right)$

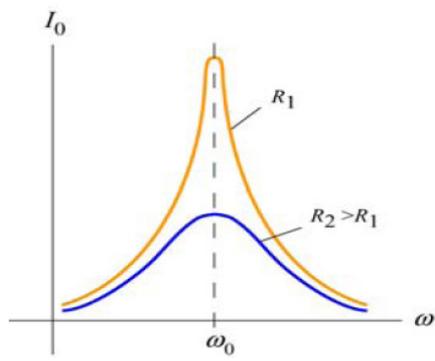
Notar que la amplitud de la corriente $I_0 = \frac{V_0}{Z}$ alcanza un máximo cuando Z es mínimo. Esto ocurre cuando $X_L = X_C$, o $wL = \frac{1}{wC}$, llevando a

$$w_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Este fenómeno en que I_0 alcanza su máximo se llama **Resonancia**, y la frecuencia a la cual ocurre, w_0 , se llama frecuencia de resonancia. En resonancia, la impedancia se transforma en $Z = R$ (puramente resistiva), y la amplitud de la corriente es

$$I_0 = \frac{V_0}{R}$$

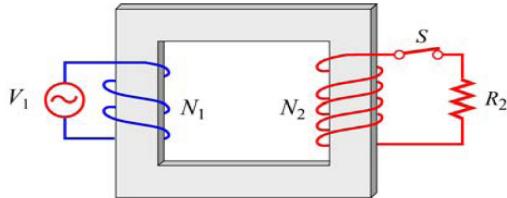
y la fase $\phi = 0$



El circuito resonante es útil en varias aplicaciones, como sintonizadores y tarjetas electrónicas, donde se desea que el circuito responda a señales de un rango de frecuencias limitado.

El transformador

Un transformador es un dispositivo utilizado para aumentar o disminuir el voltaje AC en un circuito. Una típica configuración consiste de 2 bobinas, (primaria y secundaria), enrolladas en un núcleo de hierro, como se muestra en la figura



La bobina primaria, con N_1 vueltas, es conectada a una fuente alterna $V_1(t)$. La secundaria tiene N_2 vueltas y se conecta a una resistencia de carga R_2 . La forma en que funcionan los transformadores se basa en la ley de Faraday, la corriente alterna en el primario induce una fem alterna en la segunda bobina, debido a su inductancia mutua.

En el circuito primario, despreciando la resistencia de la bobina, la ley de Faraday implica

$$V_1 = -N_1 \frac{d\Phi_B}{dt}$$

donde Φ_B es el flujo magnético a través de la bobina primaria. El nucleo de hierro sirve para incrementar el flujo magnético producido por la bobina 1 (el hierro tiene permeabilidad μ mucho mayor a la del vacío) y para asegurar que prácticamente todo el flujo magnético por el primario también atravesase la bobina secundaria. Así, el voltaje inducido en el secundario es

$$V_2 = -N_2 \frac{d\Phi_B}{dt}$$

En un transformador ideal, la pérdida de potencia debida al efecto Joule se puede despreciar, de manera que la potencia administrada a la bobina primaria es transferida completamente a la secundaria

$$I_1 V_1 = I_2 V_2$$

También estamos suponiendo que no hay flujo magnético que escape afuera del núcleo de hierro. Combinando esto obtenemos

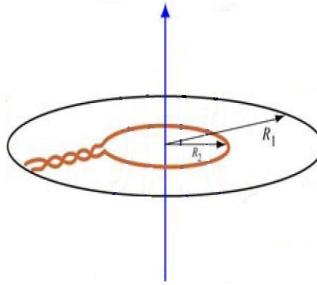
$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1}$$

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{N_1}{N_2}$$

vemos que la razón para los voltajes está completamente determinada por la razón entre el número de vueltas entre el primario y el secundario. El transformador tiene una infinidad de aplicaciones, todos los equipos eléctricos utilizan uno para transformar los 220 V efectivos en el voltaje deseado de operación. Notar que con corriente continua un transformador simplemente no funciona (Es una de las razones de las porqué no se genera en corriente continua).

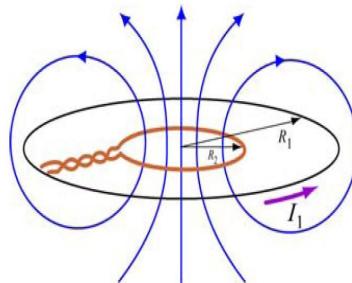
Problema 1

Considere dos espiras coplanares y concéntricas, de radios R_1 y R_2 con $R_1 \gg R_2$. Encuentre la inductancia mutua entre ambas espiras.



Solución

La inductancia mutua se puede obtener suponiendo que por el anillo más grande circula una corriente I_1 , como muestra la figura:



Anteriormente vimos que el campo magnético en el centro de un anillo que lleva corriente I_1 está dado por

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2R_1} \hat{k}$$

Debido a que $R_1 \gg R_2$, aproximamos el campo magnético sobre toda la espira interior por \vec{B}_1 . Así, el flujo a través de la espira interior es

$$\Phi_{21} = \vec{B}_1 \cdot \vec{S}$$

Si definimos la normal a la superficie encerrada por el anillo interior según el eje \hat{k}

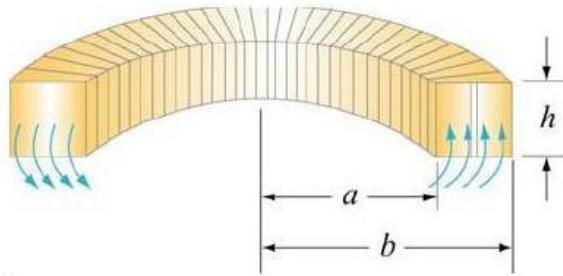
$$\Phi_{21} = B_1 S = \frac{\mu_0 I_1}{2R_1} \pi R_2^2 = \frac{\mu_0 I_1 \pi R_2^2}{2R_1}$$

Finalmente, la inductancia mutua está dada por

$$M = \frac{\Phi_{21}}{I_1} = \frac{\mu_0 \pi R_2^2}{2R_1}$$

Problema 2

Consideré un toroide de N vueltas y de sección rectangular de lado h , radio interior a y radio exterior b .



- Calcule la autoinductancia y discuta que ocurre cuando $a \gg b - a$
- Calcule la energía magnética almacenada en el toroide

Solución

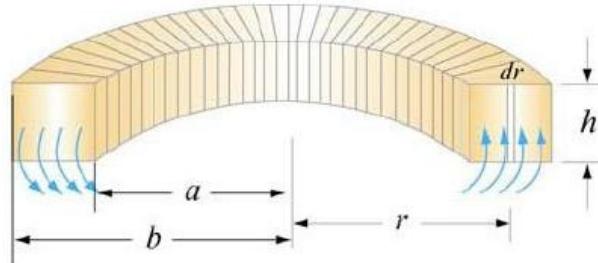
Utilizando la ley de Ampere, el campo magnético se obtiene como

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint B dl = B \oint dl = B(2\pi r) = \mu_0 NI$$

donde se ha integrado el campo sobre una circunferencia de radio r ubicada en el centro del toroide

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$

El flujo magnético sobre una vuelta del toroide se puede obtener al integrar sobre todas las secciones rectangulares, con $dA = h dr$ como elemento diferencial de área



$$\Phi_B = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_a^b \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} h dr = \frac{\mu_0 NI h}{2\pi} \ln(b/a)$$

y el flujo total sobre el toroide será $N\Phi_B$. Con esto, la autoinductancia es

$$L = \frac{N\Phi_B}{I} = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln(b/a)$$

cuando $a \gg b - a$, se tiene

$$\ln(b/a) = \ln\left(1 + \frac{b-a}{a}\right) \approx \frac{b-a}{a}$$

y la autoinductancia es

$$L = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \frac{b-a}{a}$$

recordando que el área de una sección del toroide es $A = h(b - a)$

$$L = \frac{\mu_0 N^2 A}{2\pi a}$$

y con $l = 2\pi a$

$$L = \frac{\mu_0 N^2 A}{l}$$

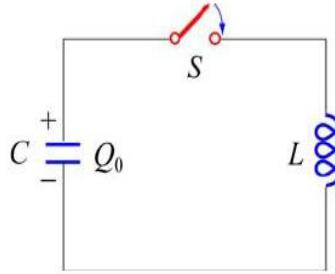
que es justamente la autoinductancia de un solenoide.

b) La energía almacenada en el toroide es simplemente

$$U = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{\mu_0 N^2 I^2 h}{4\pi} \ln(b/a)$$

Problema 3

Consideré el siguiente circuito LC. Suponga que el condensador tiene una carga inicial Q_0 . En $t=0$, el interruptor se cierra.



- Encuentre la ecuación diferencial para la carga en el condensador mediante consideraciones energéticas.
- Utilizando las leyes de Kirchhoff encuentre $I(t)$ y $Q(t)$

Solución

- En ausencia de una resistencia, la energía total se transforma constantemente en energía eléctrica y magnética, esto se llama osilación electromagnética.

La energía total del circuito LC en un instante arbitrario es

$$U = U_C + U_L = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} + \frac{1}{2} L I^2$$

Por el principio de conservación de la energía

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} + \frac{1}{2} L I^2 \right) = 0$$

$$\frac{Q}{C} \frac{dQ}{dt} + L I \frac{dI}{dt} = 0$$

Además, hay que notar que $I = -dQ/dt$

$$-\frac{Q}{C} I + L I \frac{dI}{dt} = 0 \rightarrow -\frac{Q}{C} - L \frac{d^2Q}{dt^2} = 0$$

Finalmente la ecuación diferencial para la carga en el condensador es

$$\frac{Q}{C} + L \frac{d^2Q}{dt^2} = 0$$

b) Utilizando la ley de voltajes de Kirchhoff,

$$-V_C + V_L = -\frac{Q}{C} + L \frac{dI}{dt} = 0$$

y relacionando la corriente con la carga en el condensador

$$\frac{Q}{C} + L \frac{dQ^2}{dt^2} = 0$$

$$\frac{dQ^2}{dt^2} + \frac{Q}{LC} = 0$$

la solución general es de la forma

$$Q(t) = Q_0 \cos(w_0 t + \phi)$$

donde la frecuencia angular w_0 está dada por

$$w_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

La corriente por la inductancia es

$$I(t) = -\frac{dQ}{dt} = w_0 Q_0 \sin(w_0 t + \phi) = I_0 \sin(w_0 t + \phi)$$

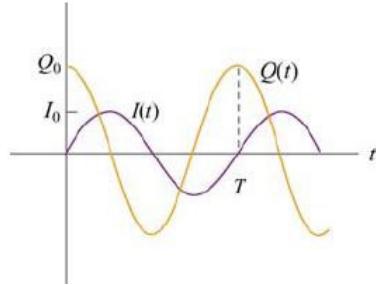
donde $I_0 = w_0 Q_0$. De las condiciones iniciales $Q(0) = Q_0$ e $I(0) = 0$, la fase ϕ es simplemente 0.

Con esto, las soluciones para la carga y la corriente en el circuito LC es

$$Q(t) = Q_0 \cos(w_0 t)$$

$$I(t) = I_0 \sin(w_0 t)$$

la dependencia de $Q(t)$ e $I(t)$ se muestra en la figura:



La energía eléctrica y magnética están dadas por

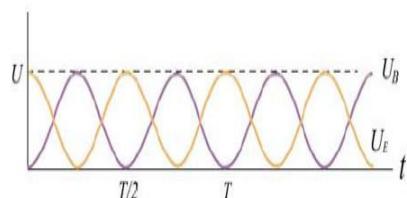
$$U_E = \frac{Q^2(t)}{C} = \left(\frac{Q_0^2}{2C}\right) \cos^2(w_0 t)$$

$$U_L = \frac{1}{2} L I^2(t) = \frac{L I_0^2}{2} \sin^2(w_0 t) = \frac{Q_0^2}{2C} \sin^2(w_0 t)$$

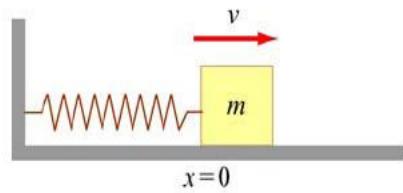
Se ve fácilmente que la energía permanece constante

$$U = \left(\frac{Q_0^2}{2C}\right) \cos^2(w_0 t) + \left(\frac{Q_0^2}{2C}\right) \sin^2(w_0 t) = \frac{Q_0^2}{2C}$$

La oscilación de energía magnética y eléctrica en el tiempo se ve en la figura

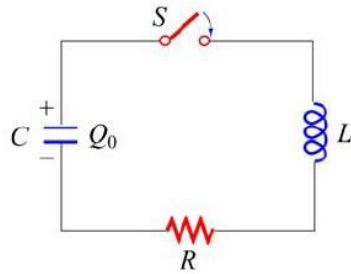


El análogo mecánico de este circuito LC es el sistema masa-resorte



Problema 4

Consideré el circuito RLC en serie, que consta de una resistencia, una inductancia, y un condensador



Mediante consideraciones energéticas encuentre la ecuación diferencial para la carga en el condensador

Solución

La energía en un instante arbitrario t está dada por

$$U = U_E + U_L = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} + \frac{1}{2} L I^2$$

A diferencia del circuito LC, parte de la energía del circuito será disipada por la resistencia. Esto es, la tasa a la cual la energía es disipada es

$$\frac{dU}{dt} = -I^2 R$$

donde el signo negativo implica que la energía total disminuye en el tiempo. Así

$$\frac{dU}{dt} = \frac{Q}{C} \frac{dQ}{dt} + L I \frac{dI}{dt} = -I^2 R$$

Aquí, nuevamente se tiene $I = -dQ/dt$

$$-\frac{Q}{C} I + L I \frac{dI}{dt} = -I^2 R$$

$$-\frac{Q}{C} + L \frac{dI}{dt} = -IR$$

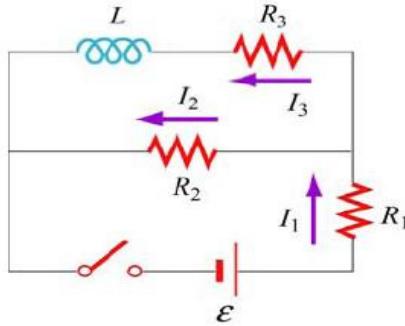
$$-\frac{Q}{C} - L \frac{dQ^2}{dt^2} = \frac{dQ}{dt} R$$

Finalmente, la ecuación diferencial para Q es

$$L \frac{dQ^2}{dt^2} + \frac{dQ}{dt} R + \frac{Q}{C} = 0$$

Problema 5

Consideré el circuito de la figura



Determine la corriente por cada resistencia

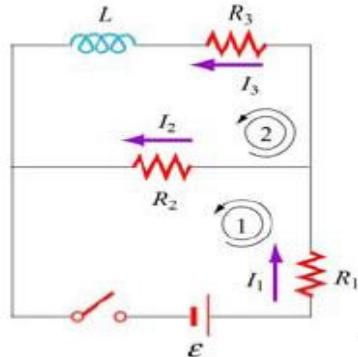
- inmediatamente después de cerrar el interruptor
 - después de que ha pasado mucho de tiempo de cerrado el interruptor
- Suponga que el interruptor es reabierto después de que ha estado mucho tiempo cerrado, encuentre nuevamente las corrientes:
- inmediatamente después de que es abierto
 - después de un largo tiempo

Solución

a) Inmediatamente después de que el interruptor es cerrado, la corriente a través de la inductancia es cero ya que la fem autoinducida evita que la corriente crezca abruptamente.

Así, $I_3 = 0$.

Debido a que $I_1 = I_2 + I_3$, se tiene que $I_1 = I_2$



Utilizando las leyes de Kirchhoff a la malla 1, se tiene

$$-\varepsilon + I_1 R_1 + I_2 R_2 = 0$$

$$I_1 = I_2 = \frac{\varepsilon}{R_1 + R_2}$$

- b) Despues de un largo tiempo, no hay fem autoinducida en la inductancia y las corrientes pasan a ser constantes. Para la malla 1, se tiene ahora

$$-\varepsilon + I_1 R_1 + I_2 R_2 = 0$$

y para la malla 2

$$I_3R_3 - I_2R_2 = 0$$

por último, por la ley de nodos, $I_1 = I_2 + I_3$. Resolviendo, se obtiene

$$I_1 = \frac{(R_2 + R_3)\varepsilon}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}$$

$$I_2 = \frac{R_3\varepsilon}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}$$

$$I_3 = \frac{R_2\varepsilon}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}$$

c) Inmediatamente después de que el interruptor es abierto nuevamente, la corriente a través de R_1 es 0, $I_1 = 0$. Esto implica que $I_2 + I_3 = 0$.

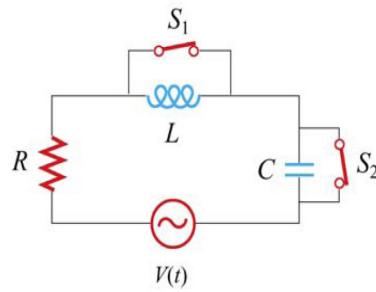
La malla 2 ahora forma un circuito RL que decae e I_3 comienza a decaer. Así

$$I_3 = -I_2 = \frac{R_3\varepsilon}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}$$

d) Despues de mucho tiempo , todas las corrientes son cero, esto es, $I_1 = I_2 = I_3 = 0$

Problema 6

Consideré el circuito de la figura, donde $V(t) = V_o \cos wt$. Si S_1 y S_2 se cierran inicialmente, encuentre (Datos son R , L , V_o y w)



- a) La corriente en función del tiempo
- b) La potencia promedio entregada al circuito
- c) La corriente en función del tiempo largo tiempo después de que S_1 se abre
- d) La capacidad C si S_1 y S_2 se abren y después de un tiempo largo, la corriente y el voltaje están en fase
- e) La impedancia cuando S_1 y S_2 se abren
- f) La energía máxima almacenada en el condensador y la inductancia
- g) La diferencia de fase entre voltaje y corriente si se dobla la frecuencia w
- h) La frecuencia para la cual la reactancia inductiva es igual a un medio de la reactancia capacitiva

Solución

- a) Al cerrar ambos interruptores, no circulará corriente ni por la inductancia ni por el condensador. La impedancia equivalente en este caso es $Z_{eq} = R$ de modo que la corriente es, simplemente

$$I(t) = \frac{V_o}{R} \cos wt$$

- b) La potencia instantánea consumida por la resistencia es

$$P(t) = V(t)I(t) = \frac{V_o^2}{R} \cos^2 wt$$

Claramente una función periódica, el promedio temporal es entonces

$$\langle P(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T dt P(t) = \frac{V_o^2}{2R}$$

- c) Cuando se abre S_1 , se conecta la inductancia al circuito. La impedancia equivalente en este caso es

$$Z_{eq} = R + iwL = \sqrt{R^2 + w^2 L^2} e^{i \arctan(\frac{wL}{R})}$$

Luego, la corriente es

$$\hat{I} = \frac{\hat{V}}{Z_{eq}} = \frac{V_o}{\sqrt{R^2 + w^2 L^2}} e^{-i \arctan(\frac{wL}{R})}$$

Así,

$$I(t) = \operatorname{Re}(\hat{I}e^{iwt}) = \frac{V_o}{\sqrt{R^2 + w^2L^2}} \cos(wt - \tan^{-1}(wL/R))$$

d) Ahora se conecta además el condensador, de modo que la impedancia equivalente en este caso es

$$Z_{eq} = R + iwL + \frac{1}{iwC} = R + i(wL - \frac{1}{wC}) = |Z| e^{i\phi}$$

donde está dado por

$$\phi = \tan^{-1} \frac{(wL - \frac{1}{wC})}{R}$$

como no hay desfase entre voltaje y corriente, $\phi = 0$ (el circuito está en resonancia!), esto quiere decir que $w = w_o$

$$\phi = 0 \rightarrow \tan^{-1} = 0$$

$$w_o L = \frac{1}{w_o C}$$

$$C = \frac{1}{w_o^2 L}$$

e) El circuito está en resonancia, luego

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (wL - \frac{1}{wC})^2} = R$$

f) La energía máxima en el condensador es (V_c representa la amplitud del voltaje en el condensador)

$$U_{E_{max}} = \frac{1}{2} C V_c^2 = \frac{1}{2} C \left(\frac{I_o}{wC} \right)^2$$

$$U_{E_{max}} = \frac{1}{2} C \frac{V_o^2}{R} \frac{1}{w_o^2 C^2} = \frac{V_o^2 L}{2 R^2}$$

En el último paso se ha usado que la frecuencia es igual a la frecuencia de resonancia $w_0 = 1/(\sqrt{LC})$. Ahora, la energía máxima almacenada por la inductancia

$$U_{L_{max}} = \frac{1}{2} L I_o^2 = \frac{L V_o^2}{2 R^2}$$

g) Si la frecuencia es ahora

$$w = 2w_o = \frac{2}{\sqrt{LC}}$$

el ángulo de desfase entre voltaje y corriente queda

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{wL - 1/(wC)}{R}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2/(\sqrt{LC})L - (\sqrt{LC}/(2C))}{R}\right)$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{3}{2R}\sqrt{\frac{L}{C}}\right)$$

h) Finalmente, la frecuencia para que $X_L = \frac{1}{2}X_C$ debe cumplir

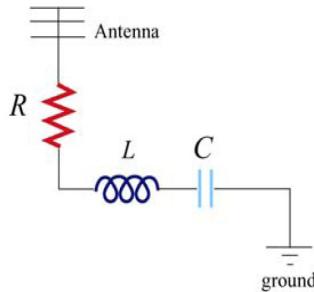
$$wL = \frac{1}{2} \frac{1}{wC}$$

luego

$$w = \frac{1}{\sqrt{2LC}} = \frac{w_o}{\sqrt{2}}$$

Problema 7

Una antena FM tiene una inductancia $L = 10^{-6}$ H, una capacidad $C = 10^{-12}$ F, y una resistencia $R = 100 \Omega$. Una señal de radio induce una fem sinusoidal en la antena con amplitud 10^{-5} V



- A que frecuencia angular w_0 de la señal incidente el circuito estará sintonizado, esto es, para que w_0 la corriente en el circuito será máxima?
- Asumiendo que la onda incidente está sintonizada, cual será la amplitud de la corriente en el circuito a esta frecuencia?
- Cuál es la amplitud de la diferencia de potencial a través del condensador a esta frecuencia?

Solución

- La antena estará sintonizada con la señal incidente a la frecuencia de resonancia, esto es, la señal debe tener una velocidad angular dada por

$$w_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} = \sqrt{\frac{1}{10^{-6}10^{-12}}} = 10^9$$

y la frecuencia asociada es

$$f = \frac{w_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}10^9 = 0,159 * 10^9$$

Equivalentemente $f = 0,159Ghz.$

- A la frecuencia de resonancia, la corriente máxima es

$$I_0 = \frac{V_0}{R} = \frac{10^{-5}}{100} = 0,1\mu A$$

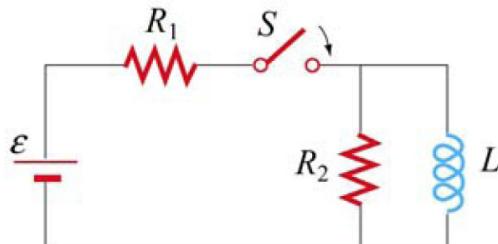
- La amplitud del voltaje en la inductancia

$$V_L = I_0 X_L = I_0 w_0 L = 0,1 * 10^{-6} 2\pi * 0,159 * 10^9 * 10^{-6} = 9,99 * 10^{-5} V$$

Problema 1

Dado el circuito de la figura, suponer que el interruptor S se ha cerrado durante un largo tiempo, de modo que existen corrientes estacionarias en el inductor de $L = 2H$ y que su resistencia es despreciable. Además $R_1 = 10 \Omega$, $\varepsilon = 10 \text{ V}$

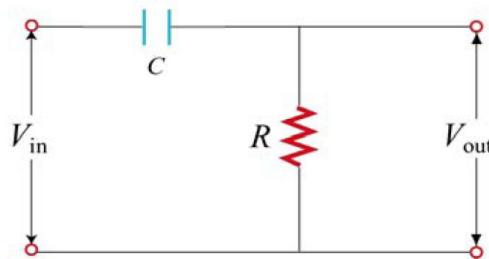
- Determinar la intensidad de corriente suministrada por la batería, la corriente que circula por la resistencia $R_2 = 100 \Omega$ y la intensidad que circula por el inductor
- Determinar el voltaje inicial entre los extremos del inductor cuando se abre el interruptor S



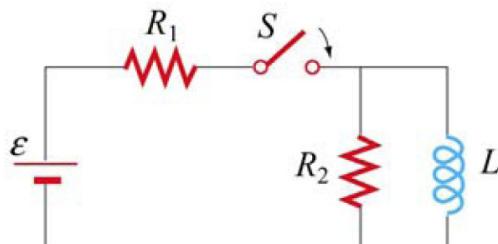
Problema 2

El circuito de la figura se denomina filtro RC pasa-altos porque transmite con mayor amplitud las señales de alta frecuencia que las de baja. Si la tensión de entrada es $V_{in} = V_0 \cos wt$, demostrar que la de salida es $V_{out} = V_R \cos(wt - \phi)$, donde

$$V_R = \frac{V_0}{\sqrt{1 + (\frac{1}{wRC})^2}}$$



Solución problema 1



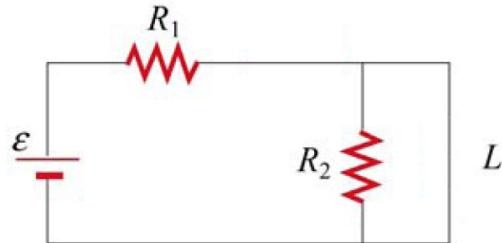
Cuando el interruptor S ha estado cerrado por largo tiempo, las corrientes llegan a un estado de régimen permanente. Si $I_L(t)$ denota la corriente a través de la inductancia, se tiene que el voltaje a través de ésta es

$$v_L(t) = L \frac{dI_L}{dt}$$

En régimen estacionario

$$\frac{dI_L}{dt} = 0$$

Así, no hay diferencia de potencial entre los extremos de la inductancia. Esto significa que en régimen permanente la inductancia se comporta como un cortocircuito



En esta situación, toda la corriente se irá por la inductancia, de esta forma

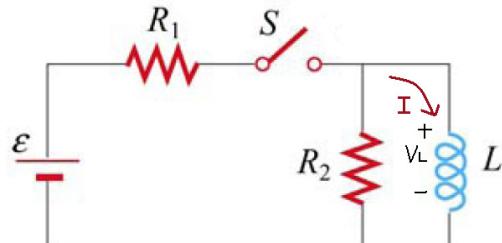
$$I_{R_{100\Omega}} = 0$$

Para obtener la intensidad que circula por el circuito, simplemente sumamos las caídas de potencial y se obtiene

$$-\epsilon + IR_1 = 0$$

$$I = \frac{\epsilon}{R_1} = \frac{10}{10} = 1A$$

b) En el instante en que se abre nuevamente el interruptor, circula corriente a través de la inductancia y la resistencia de 100Ω



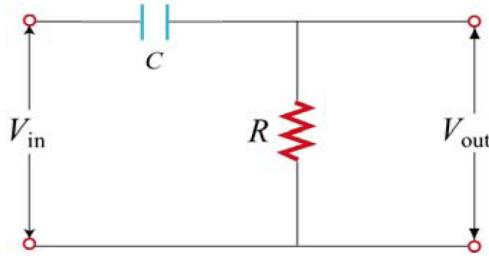
Sea $I(t)$ la corriente que fluye en este caso. Por continuidad, $I(0) = 1A$, con esto

$$IR_2 + V_L = 0$$

$$V_L = -IR_2 = -1 * 100 = -100V$$

Solución Problema 2

El circuito consiste en un condensador en serie con una resistencia



La impedancia equivalente está dada por

$$\hat{Z} = R + \frac{1}{iwC} = R - i\frac{1}{wC}$$

Conviene expresar esta impedancia en su forma polar

$$\hat{Z} = \sqrt{R^2 + \frac{1}{w^2C^2}} e^{i\phi}$$

donde ϕ está dado por

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{1}{wRC}\right)$$

De esta forma, se tiene

$$\hat{V}_{in} = \hat{Z}\hat{I}$$

$$\hat{I} = \frac{\hat{V}_{in}}{\hat{Z}} = \frac{V_o}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{w^2C^2}} e^{i\phi}}$$

$$\hat{I} = \frac{V_o}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{w^2C^2}}} e^{-i\phi}$$

Finalmente, V_{out} es el voltaje entre los extremos de la resistencia

$$\hat{V}_{out} = \hat{Z}_r \hat{I} = R \hat{I} = \frac{RV_o}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{w^2C^2}}} e^{-i\phi}$$

$$\hat{V}_{out} = \frac{V_o}{\sqrt{1 + \frac{1}{R^2 w^2 C^2}}} e^{-i\phi}$$

Con esto

$$V_{out}(t) = \operatorname{Re}(\hat{V}_{out} e^{iwt}) = \frac{V_o}{\sqrt{1 + \frac{1}{R^2 w^2 C^2}}} \cos(wt - \phi)$$

Parte VII

Ecuaciones de Maxwell y sus bases empíricas

Capítulo 14

Ecuaciones de Maxwell

14.1. Corriente de Desplazamiento

Habíamos visto anteriormente que si un conductor con corriente posee cierta simetría favorable, el campo magnético se podía obtener fácilmente mediante la ley de Ampère

$$\oint_{\Gamma} d\vec{x} \cdot \vec{B}(\vec{x}) = \mu_0 I_{enc}$$

Esta ecuación indica que la circulación del campo magnético sobre cualquier curva cerrada es siempre $\mu_0 I_{enc}$, donde I_{enc} es la corriente que atraviesa una superficie cuyo contorno es la curva de integración.

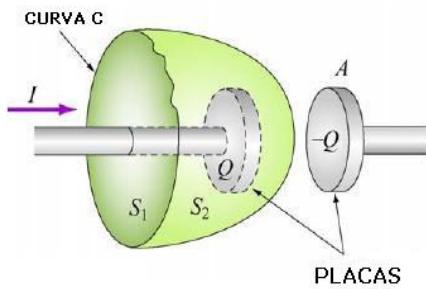
Ahora, en un medio material la ley de Ampère es

$$\oint_{\Gamma} d\vec{x} \cdot \vec{H}(\vec{x}) = I$$

Esta ley se puede llevar a su forma diferencial mediante el teorema de Stokes

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{x}) = J(\vec{x})$$

Sin embargo, esta ley es inconsistente en algunas ocasiones y encontraremos entonces una generalización válida, que fue propuesta por Maxwell. Consideremos el circuito eléctrico de la figura, que consiste de un condensador de placas paralelas, que se está cargando con una corriente de magnitud constante I



Utilizando la ley de Ampère al contorno C y a la superficie S_1

$$\oint_C d\vec{x} \cdot \vec{H}(\vec{x}) = \iint_{S_1} d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{J}(\vec{x}) = I$$

Si, por otra parte, se utiliza la ley de Ampère al contorno C y a la superficie S_2 , entonces $J(\vec{x})$ es cero para todo $\vec{x} \in S_2$

$$\oint_C d\vec{x} \cdot \vec{H}(\vec{x}) = \iint_{S_2} d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{J}(\vec{x}) = 0$$

Vemos que existe entonces una ambigüedad fundamental en la ley de Ampère al escoger dos superficies de integración distintas. El error es fácil de ver al mirar su forma diferencial

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{x}) = \vec{J}(\vec{x})$$

Utilizamos ahora el hecho de que la divergencia de un rotor es nulo

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{x}) = 0$$

Es inmediato que $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$ es **inconsistente** con la conservación de la carga en la presente situación, por que de hecho, en el volumen encerrado por ambas superficies, hay un $\partial\rho/\partial t$ distinto de cero (se está acumulando carga en el condensador).

Maxwell corrigió la ley de Ampère al agregar un término tal que de ella se desprenda

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{x}) = -\frac{\partial \rho(\vec{x})}{\partial t}$$

De la primera ecuación de Maxwell

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D}(\vec{x}) = \rho(\vec{x})$$

y sustituyendo en la ecuación de continuidad

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{x}) + \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{D}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{J}(\vec{x}) + \frac{\partial \vec{D}(\vec{x})}{\partial t}) = 0$$

de manera que la corrección de Maxwell está en agregar el término $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ a la forma diferencial de la ley de Ampère, y entonces se obtiene la ley de Ampère-Maxwell

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{x}) = \vec{J}(\vec{x}) + \frac{\partial \vec{D}(\vec{x})}{\partial t}$$

es evidente que en el caso de campos que no dependen del tiempo, esta ley es igual a la ley de Ampère. La introducción del segundo término , llamado densidad de *corriente de desplazamiento*, representa una de las más grandes contribuciones de Maxwell a la teoría electromagnética. Veremos que al modificar ésta ley, las ecuaciones de Maxwell predicen la propagación de ondas electromagnéticas.

Por último, la forma integral de la ley de Ampère-Maxwell queda de la forma

$$\oint_{\Gamma} d\vec{x} \cdot \vec{H}(\vec{x}) = \iint_{S(\Gamma)} d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{J}(\vec{x}) + \frac{d}{dt} \iint_{S(\Gamma)} d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{D}(\vec{x})$$

En el ejemplo, al integrar en la superficie S_2 , el segundo término no es nulo, debido a que hay un flujo del campo \vec{D} a través de S_2 que está variando en el tiempo, de hecho la magnitud del campo crece cuando se acumula carga en el condensador.

14.2. Ecuaciones de Maxwell

Las ecuaciones de Maxwell resumen toda la teoría electromagnética. Éstas establecen la relación entre las **fuentes** (densidad de carga $\rho(t, \vec{x})$, y densidad de corriente $\vec{J}(t, \vec{x})$) con los campos $\vec{E}(t, \vec{x}), \vec{B}(t, \vec{x}), \vec{D}(t, \vec{x}), \vec{H}(t, \vec{x})$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D}(t, \vec{x}) = \rho(\vec{x})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(t, \vec{x}) = -\frac{\partial \vec{B}(t, \vec{x})}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(t, \vec{x}) = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{x}) = \vec{J}(\vec{x}) + \frac{\partial \vec{D}(\vec{x})}{\partial t}$$

La primera ecuación $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$ es la ley de Gauss, cuya forma integral es

$$\iint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{D}(t, \vec{x}) = \iiint_{V(S)} d^3x \rho(t, \vec{x})$$

La ecuación $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ es la forma diferencial de la ley de inducción de Faraday, ésta dice que un campo magnético variable en el tiempo induce un campo eléctrico, en su forma integral

$$\oint_{\Gamma} d\vec{x} \cdot \vec{E}(t, \vec{x}) = -\frac{d}{dt} \iint_{S(\Gamma)} d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{B}(t, \vec{x})$$

La ecuación $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ es la ley de Gauss magnética, y representa el hecho de que los monopolos magnéticos nunca han sido observados. Es decir, las líneas de campo magnético son cerradas, consecuencia de esto es que el flujo magnético sobre una superficie cerrada es siempre cero. En su forma integral

$$\iint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{B}(t, \vec{x}) = 0$$

Por último, la ecuación $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ es una extensión de la ley de Ampère, mencionada anteriormente. Hay que notar que ésta implica la ecuación de continuidad.

Es claro que las ecuaciones de Maxwell representan expresiones matemáticas de ciertos resultados experimentales. Resulta evidente entonces que no pueden demostrarse, sin embargo, la aplicabilidad para cualquier situación puede verificarse.

Junto con la ecuación de la fuerza de Lorentz, $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$, que describe la acción de los campos sobre partículas cargadas, este conjunto de leyes nos da una descripción clásica completa de las partículas que actúan electromagnéticamente.

14.2.1. Vector de Poynting- Conservación de la Energía

Las ecuaciones de Maxwell son consistentes con la ley de conservación de la carga eléctrica

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}(t, \vec{x}) + \frac{\partial \rho(t, \vec{x})}{\partial t} = 0$$

o, en su forma integral

$$\oint_{S(V)} d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{J}(\vec{x}) = -\frac{d}{dt} \iiint_V d^3x \rho(\vec{x})$$

intentemos establecer una ley equivalente para la **Conservación de la energía**. Podemos comenzar el análisis definiendo una densidad de energía electromagnética $\epsilon(t, \vec{x})$. Del mismo modo, definimos el **vector de Poynting** $\vec{S}(t, \vec{x})$, donde

$$\vec{S}(t, \vec{x}) \cdot d\vec{S}(\vec{x})$$

es la energía electromagnética de campo cruzando una superficie $d\vec{S}(\vec{x})$ por unidad de tiempo. Notar que nuestras definiciones de $\epsilon(t, \vec{x})$ y $\vec{S}(t, \vec{x})$ están claramente inspiradas en $\rho(t, \vec{x})$ y $\vec{J}(t, \vec{x})$. Uno podría pensar entonces que la ley de conservación de la energía se escribe en la forma

$$-\frac{d}{dt} \iiint_V d^3x \epsilon(t, \vec{x}) = \oint_{S(V)} d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{S}(t, \vec{x})$$

Sin embargo, esto no está correcto, pues falta incluir un término que involucre el **trabajo** realizado por los campos sobre las cargas presentes en la región V (por unidad de tiempo). La fuerza neta que actúa sobre un elemento de carga por unidad de volumen es (de acuerdo a la fuerza de Lorentz)

$$\vec{f} = \rho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B} = \rho(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

de forma que el trabajo realizado sobre las cargas por unidad de tiempo es

$$W = \iiint_V d^3x \vec{f} \cdot \vec{v} = \iiint_V d^3x \rho(\vec{x}) (\vec{E}(\vec{x}) \cdot \vec{v}(\vec{x})) = \iiint_V d^3x' \vec{J}(\vec{x}) \cdot \vec{E}(\vec{x})$$

Luego, la ley de conservación de la energía debe ser como sigue

$$-\frac{d}{dt} \iiint_V d^3x \epsilon(t, \vec{x}) = \oint_{S(V)} d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{S}(t, \vec{x}) + \iiint_V d^3x \vec{J}(\vec{x}) \cdot \vec{E}(\vec{x})$$

La interpretación es bien clara: la disminución de energía por unidad de tiempo en un volumen V es igual al flujo de energía electromagnética por unidad de tiempo a través del contorno de V más el trabajo reaizado sobre las cargas en V por unidad de tiempo. En su forma diferencial

$$\frac{\partial \epsilon(t, \vec{x})}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S}(t, \vec{x}) = -\vec{J}(t, \vec{x}) \cdot \vec{E}(t, \vec{x})$$

Veamos que una expresión de este tipo se obtiene a partir de las ecuaciones de Maxwell

$$\vec{J} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B}(t, \vec{x}) - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(t, \vec{x})}{\partial t}$$

$$-\vec{J}(t, \vec{x}) \cdot \vec{E}(t, \vec{x}) = -\frac{1}{\mu_0} \vec{E}(t, \vec{x}) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}(t, \vec{x})) + \epsilon_0 \vec{E}(t, \vec{x}) \cdot \frac{\partial \vec{E}(t, \vec{x})}{\partial t}$$

Además

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(t, \vec{x}) = -\frac{\partial \vec{B}(t, \vec{x})}{\partial t}$$

y

$$\vec{E}(t, \vec{x}) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}(t, \vec{x})) = \vec{B}(t, \vec{x}) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}(t, \vec{x})) - \vec{\nabla} \cdot (\vec{E}(t, \vec{x}) \times \vec{B}(t, \vec{x}))$$

$$-\vec{J}(t, \vec{x}) \cdot \vec{E}(t, \vec{x}) = -\frac{1}{\mu_0} \left(\vec{B}(t, \vec{x}) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}(t, \vec{x})) - \vec{\nabla} \cdot (\vec{E}(t, \vec{x}) \times \vec{B}(t, \vec{x})) \right) + \epsilon_0 \vec{E}(t, \vec{x}) \frac{\partial \vec{E}(t, \vec{x})}{\partial t}$$

$$-\vec{J}(t, \vec{x}) \cdot \vec{E}(t, \vec{x}) = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}(t, \vec{x}) \cdot \frac{\partial \vec{B}(t, \vec{x})}{\partial t} + \epsilon_0 \vec{E}(t, \vec{x}) \frac{\partial \vec{E}(t, \vec{x})}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{E}(t, \vec{x}) \times \frac{\vec{B}(t, \vec{x})}{\mu_0} \right)$$

$$-\vec{J}(t, \vec{x}) \cdot \vec{E}(t, \vec{x}) = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2(t, \vec{x}) + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2(t, \vec{x}) \right\} + \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{E}(t, \vec{x}) \times \frac{\vec{B}(t, \vec{x})}{\mu_0} \right)$$

Comparando con nuestra expresión anterior, obtenemos fórmulas explícitas para ϵ y \vec{S}

$$\epsilon(t, \vec{x}) = \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2(t, \vec{x}) + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2(t, \vec{x})$$

$$\vec{S}(t, \vec{x}) = \frac{1}{\mu_0} \vec{E}(t, \vec{x}) \times \vec{B}(t, \vec{x})$$

14.3. Ecuaciones de Maxwell en un Medio Lineal, Homogéneo e Isotrópico

Es bien sabido que la relación entre los campos \vec{D} y \vec{E} en general está dada por

$$\vec{D}(t, \vec{x}) = (\epsilon_0 \vec{P} +) \vec{E}(t, \vec{x})$$

Sin embargo, en ciertos medios, la polarización depende linealmente del campo eléctrico (medios lineales), de forma que

$$\vec{D}(t, \vec{x}) = \epsilon \vec{E}(t, \vec{x})$$

donde ϵ es la permitividad del medio, y no depende de \vec{x} para medios homogéneos e isotrópicos.

Del mismo modo, en este tipo de medios simples, el campo \vec{H} está relacionado con \vec{B} mediante

$$\vec{H}(t, \vec{x}) = \frac{1}{\mu} \vec{B}(t, \vec{x})$$

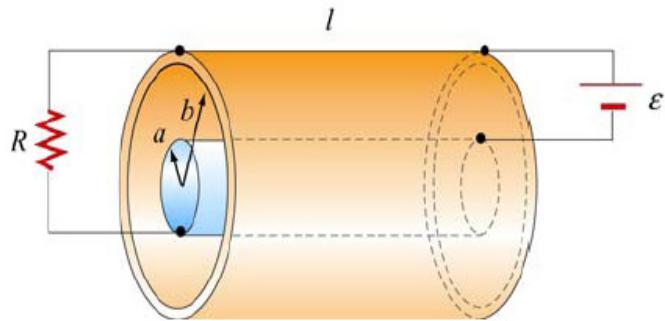
donde μ es la permeabilidad del medio. De esta forma las ecuaciones de Maxwell se pueden escribir como

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(t, \vec{x}) &= \frac{\rho(t, \vec{x})}{\epsilon} \\ \vec{\nabla} \times \vec{E}(t, \vec{x}) &= -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(t, \vec{x}) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(t, \vec{x}) &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B}(t, \vec{x}) &= \mu \vec{J}(t, \vec{x}) + \mu \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(t, \vec{x})\end{aligned}$$

Es un sistema de ecuaciones diferenciales acoplado para \vec{E} y \vec{B} , donde propiedades del medio se incluyen en ϵ y μ

Problema

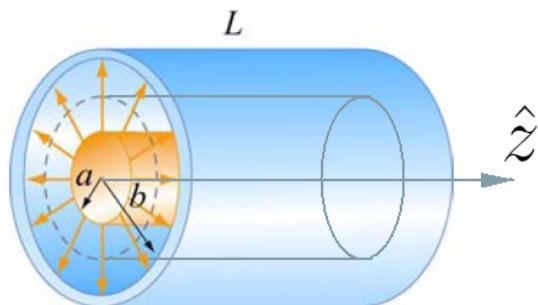
Un cable coaxial consiste de dos conductores cilíndricos concéntricos , el interior de radio a y el exterior de radio b (ambos con resistencia nula). La longitud de ambos cables l es tal que $l \gg b$. El cable transmite energía en DC desde una batería a una carga. La batería provee una fem ε entre ambos conductores en un extremo del cable , y la carga es una resistencia R conectada entre los conductores al otro extremo del cable. Una corriente I fluye a través del conductor interior y regresa por el conductor exterior. La batería carga el conductor interno con carga $-Q$ y el externo con $+Q$



- Encuentre el campo eléctrico en todas partes
- Encuentre la dirección y magnitud de \vec{B} en todas partes
- Calcule el vector de Poynting al interior del cable
- Al integrar \vec{S} sobre una superficie apropiada, encuentre la potencia que fluye en el cable coaxial

Solución

a) Despreciando efectos de borde, se puede calcular el campo eléctrico mediante la ley de Gauss, utilizando como superficie de integración un cilindro de largo h y radio r , con $a < r < b$, como se muestra en la figura



$$\begin{aligned} \iint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') &= \iint_S dS(\vec{x}') \hat{n}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') = \iint_S dS(\varphi, z) \hat{r} \cdot E(r) \hat{r} \\ \iint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') &= E(r) \iint_S dS(r, \varphi, z) = E(r) 2\pi r h \end{aligned}$$

la carga encerrada por S es

$$q_{int} = 2\pi a h \sigma$$

donde σ es la densidad de carga (homogénea) en el conductor interno

$$\sigma = \frac{-Q}{2\pi a L}$$

con esto

$$E(r)2\pi r h = \frac{2\pi a h}{\epsilon_0} \left(\frac{-Q}{2\pi a L} \right)$$

$$E(r) = \frac{-Q}{2\pi r L \epsilon_0}$$

de forma que el campo eléctrico entre ambos conductores está dado por

$$\vec{E}(r) = \frac{-Q}{2\pi r L \epsilon_0} \hat{r}$$

Además, se sabe

$$\varepsilon = \phi(b) - \phi(a) = - \int_a^b d\vec{x}' \cdot \vec{E}(\vec{x}')$$

tomando una curva parametrizada por $\vec{x}' = r\hat{r}$, con \hat{r} alguna dirección radial fija, y $a < r < b$, se obtiene

$$\begin{aligned} \varepsilon &= - \int_a^b dr E(r) = - \int_a^b dr \frac{-Q}{2\pi r L \epsilon_0} = \frac{Q}{2\pi L \epsilon_0} \int_a^b \frac{dr}{r} \\ \varepsilon &= \frac{Q}{2\pi L \epsilon_0} \ln(b/a) \end{aligned}$$

luego

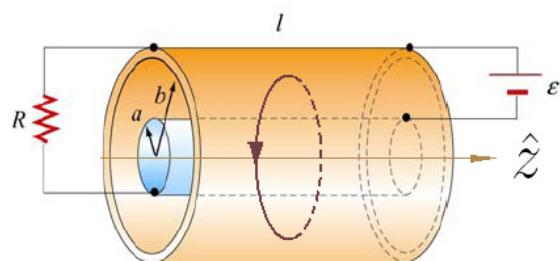
$$Q = \varepsilon 2\pi L \epsilon_0 \ln(a/b)$$

y

$$\vec{E}(r) = \frac{-\varepsilon \ln(a/b)}{r} \hat{r}$$

por supuesto, que el campo eléctrico para $r < a$ es nulo (interior de un conductor), y lo mismo ocurre para $r > b$, pues el cable coaxial es eléctricamente neutro.

b) El campo magnético para $a < r < b$ puede ser obtenido mediante la ley de Ampère, utilizando como contorno una curva circular Γ concéntrica al conductor interno y de radio r .



Notar que el sentido de la corriente por el conductor interno es según \hat{z} . Por simetría, el campo magnético sólo dependerá de la variable r , y será tangente a la curva Γ en todos sus puntos

$$\oint_{\Gamma} d\vec{x} \cdot \vec{B}(\vec{x}) = \int_0^{2\pi} d\varphi r \hat{\varphi} \cdot \vec{B}(r) \hat{\varphi} = 2\pi r B(r)$$

la corriente encerrada por Γ es simplemente I , luego

$$\oint_{\Gamma} d\vec{x} \cdot \vec{B}(\vec{x}) = \mu_0 I$$

$$2\pi r B(r) = \mu_0 I$$

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\varphi}$$

El campo magnético es nulo para $r > a$ (Cualquier curva encierra una corriente nula, pues ambos conductores llevan I en sentidos opuestos).

c) El vector de Poynting al interior del cable ($a < r < b$) está dado por

$$\begin{aligned} \vec{S}(r) &= \frac{1}{\mu_0} \vec{E}(r) \times \vec{B}(r) = \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{-\varepsilon \ln(a/b)}{r} \right) \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \right) \hat{r} \times \hat{\varphi} \\ \vec{S}(r) &= \frac{-I\varepsilon \ln(a/b)}{2\pi r^2} \hat{z} \end{aligned}$$

El vector de Poynting representa un flujo de energía por unidad de tiempo y área en dirección $-\hat{z}$ (es decir, desde la fem hacia la resistencia). Para calcular la potencia que se transmite a través de la línea se debe calcular el flujo del vector Poynting sobre una sección transversal entre ambos conductores, esto es

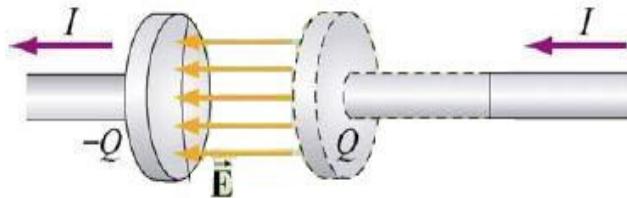
$$P = \iint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{S}(\vec{x}) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_a^b dr r (-\hat{z}) \cdot \frac{-I\varepsilon \ln(a/b)}{2\pi r^2} \hat{z} = I\varepsilon \ln(a/b) \int_a^b dr \frac{1}{r}$$

$$P = \varepsilon I$$

que es efectivamente la potencia que se disipa en la resistencia. Con este ejemplo se ilustra como los campos realmente son los que transportan la energía desde la fuente a la carga

Problema

Un condensador de placas paralelas circulares se está cargando de modo que entre las placas existe un campo eléctrico $\vec{E}(t)$ aproximadamente uniforme. Obtenga el campo magnético entre las placas del condensador en función de la distancia r al eje del mismo.



Solución

De la cuarta ecuación de Maxwell, tenemos que

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

en este caso, para la región entre placas

$$\vec{J} = \vec{0}$$

Además, en el vacío se tiene $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$, y $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0$, con lo que

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Ahora, integrando sobre una circunferencia a distancia r del eje de las placas, y utilizando el teorema de Stokes

$$\begin{aligned} \oint_C d\vec{x} \cdot \vec{B} &= \iint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{x})) = \iint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}(\vec{x})}{\partial t} \\ \oint_C d\vec{x} \cdot \vec{B} &= \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \iint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} (E \pi r^2) \end{aligned}$$

$$\oint_C d\vec{x} \cdot \vec{B} = B 2\pi r = \frac{\pi r^2}{c^2} \frac{dE}{dt}$$

Finalmente

$$B = \frac{r}{2c^2} \frac{dE}{dt}$$

Parte VIII

Ondas Electromagnéticas

Capítulo 15

Ondas Planas Monocromáticas

Una de las consecuencias importantes de las ecuaciones de Maxwell, es la predicción de la existencia de ondas electromagnéticas que se propagan a la velocidad de la luz (La luz es, en efecto, una onda electromagnética)

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

La razón es que un campo eléctrico variable en el tiempo produce un campo magnético y vice versa. El acoplamiento entre estos dos campos lleva a la generación de ondas electromagnéticas. Esta predicción fue confirmada por Hertz en 1887



Fig. 15.1: Heinrich Hertz

Heinrich Hertz (1857-1894) Físico Alemán. Clarificó y expandió la teoría electromagnética de la luz que fue propuesta por Maxwell. Fue el primero en demostrar de forma satisfactoria la existencia de ondas electromagnéticas al construir un aparato para producir y detectar ondas de radio.

15.1. Ondas electromagnéticas planas en medios no conductores y libres de fuentes

Sabemos que cargas y corrientes son fuentes de campos electromagnéticos. Más adelante veremos exactamente como son creados estos campos a partir de cierta distribución de fuentes. Por el momento, mostraremos algunas soluciones particulares a las ecuaciones de Maxwell, en primer lugar, las ondas planas. Supongamos que se quiere estudiar el comportamiento de los campos en una región del espacio libre de fuentes (Es evidente que para que existan campos, deben existir fuentes en algún lugar del espacio). Lo que quiero decir con esto es que encontraremos un tipo de solución para regiones que están lejos de las fuentes (es decir $\rho(t, \vec{x}) = 0$ en la zona de interés). También asumiremos que el medio en el cual se propagan las ondas no es

buen **conductor**, en ese caso tampoco existirá una densidad de corriente $\vec{J}(t, \vec{x})$ en respuesta al campo eléctrico. En este caso las ecuaciones de Maxwell son

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(t, \vec{x}) &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E}(t, \vec{x}) &= -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(t, \vec{x}) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(t, \vec{x}) &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B}(t, \vec{x}) &= \mu\epsilon \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(t, \vec{x})\end{aligned}$$

Utilizaremos ahora la conocida identidad

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{f} = \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{f} \right) - \vec{\nabla}^2 \vec{f}$$

De esta forma

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E}(t, \vec{x}) = \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(t, \vec{x}) \right) - \vec{\nabla}^2 \vec{E}(t, \vec{x})$$

pero en regiones libre de fuentes

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(t, \vec{x}) = 0$$

como indica la primera ecuación de Maxwell. Así

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E}(t, \vec{x}) = -\vec{\nabla}^2 \vec{E}(t, \vec{x})$$

por otro lado

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E}(t, \vec{x}) &= -\vec{\nabla} \times \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(t, \vec{x}) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{\nabla} \times \vec{B}(t, \vec{x}) \right) \\ \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E}(t, \vec{x}) &= -\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu\epsilon \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(t, \vec{x}) \right) = -\mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}(t, \vec{x})\end{aligned}$$

de forma que

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E}(t, \vec{x}) - \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}(t, \vec{x}) = 0$$

definiendo

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E}(t, \vec{x}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}(t, \vec{x}) = 0$$

Esta es la conocida **Ecuación de Onda**. Es decir, hemos llegado a que en un medio libre de cargas y no conductor, el campo eléctrico satisface la ecuación de onda. Las soluciones son ondas que se propagan a velocidad c . Es fácil verificar que el campo magnético satisface **exactamente** la misma ecuación, en efecto

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B}(t, \vec{x}) = \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(t, \vec{x}) \right) - \vec{\nabla}^2 \vec{B}(t, \vec{x}) = -\vec{\nabla}^2 \vec{B}(t, \vec{x})$$

por otro lado

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B}(t, \vec{x}) = \vec{\nabla} \times \left(\mu\epsilon \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(t, \vec{x}) \right)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B}(t, \vec{x}) = \mu\epsilon \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{E}(t, \vec{x}) = -\mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{B}(t, \vec{x})$$

En resumen

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E}(t, \vec{x}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}(t, \vec{x}) = 0$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{B}(t, \vec{x}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{B}(t, \vec{x}) = 0$$

son las ecuaciones desacopladas para los campos $\vec{E}(t, \vec{x})$ y $\vec{B}(t, \vec{x})$.

Ecuación de Onda en una dimensión

La forma general de la ecuación de onda en una dimensión es

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \psi(x, t) = 0$$

Resulta inmediato verificar que cualquier función de la forma $\psi(x \pm ct)$ satisface la ecuación de onda en una dimensión. La demostración es la siguiente: Sea $x' = x \pm ct$, con esto $\frac{\partial x'}{\partial x} = 1$ y $\frac{\partial x'}{\partial t} = \pm c$. Usando la regla de la cadena

$$\frac{\partial \psi(x')}{\partial x} = \frac{\partial \psi(x')}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{\partial \psi(x')}{\partial x'}$$

$$\frac{\partial^2 \psi(x')}{\partial x'^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi(x')}{\partial x'} \right) = \frac{\partial^2 \psi(x')}{\partial x'^2} \frac{\partial x}{\partial x'} = \frac{\partial^2 \psi(x')}{\partial x'^2}$$

Similarmente, las derivadas parciales con respecto a t son

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial t} = \pm c \frac{\partial \psi}{\partial x'}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\pm \frac{\partial \psi}{\partial x'} \right) = \pm \frac{\partial^2 \psi}{\partial x'^2} \frac{\partial x'}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x'^2}$$

Luego

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x'^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

lo cual muestra que $\psi(x \pm ct)$ es solución de la ecuación de onda en una dimensión. La ecuación de onda es un ecuación diferencial lineal, lo que implica que si $\psi_1(x, t)$ y $\psi_2(x, t)$ son soluciones de la ecuación de onda, entonces $\psi_1(x, t) \pm \psi_2(x, t)$ también es solución .vLas ondas electromagnéticas obedecen entonces el principio de superposición

Solución a la ecuación de Onda

Para resolver la ecuación de onda que satisfacen los campos electromagnéticos, supondremos que la variación temporal de éstos es de la forma e^{iwt} (es decir, tienen una dependencia oscilatoria en el tiempo a una frecuencia bien determinada, w). A este tipo de ondas las llamaremos **monocromáticas**

$$\vec{E}(t, \vec{x}) = \vec{E}(\vec{x})e^{iwt}$$

$$\vec{B}(t, \vec{x}) = \vec{B}(\vec{x})e^{iwt}$$

de forma que

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}(t, \vec{x}) = -w^2 \vec{E}(\vec{x})$$

Entonces la parte espacial $\vec{E}(\vec{x})$ satisface

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E}(\vec{x}) + \frac{w^2}{c^2} \vec{E}(\vec{x}) = 0$$

busquemos una solución de la forma

$$\vec{E}(\vec{x}) = \vec{E}_0 e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}$$

donde $\vec{k} = |\vec{k}| \hat{k}$ y \vec{E}_0 es un vector constante

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E}(\vec{x}) = \vec{\nabla}^2 \vec{E}_0 e^{-i(k_x x + k_y y + k_z z)} = -k^2 \vec{E}_0 e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$$

donde $k = |\vec{k}|$, de forma que

$$-k^2 \vec{E}_0 e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \frac{w^2}{c^2} \vec{E}_0 e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} = 0$$

En efecto, es solución si

$$k = \sqrt{\frac{w^2}{c^2}}$$

Finalmente, hemos encontrado que una solución de la ecuación de onda en medios no conductores y libres de cargas son campos de la forma

$$\vec{E}(t, \vec{x}) = \vec{E}_0 e^{i(wt - \vec{k}\cdot\vec{x})}$$

$$\vec{B}(t, \vec{x}) = \vec{B}_0 e^{i(wt - \vec{k}\cdot\vec{x})}$$

con $|\vec{k}| = \frac{w}{c}$. Sin embargo, los campos deben tener divergencia nula, de forma que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(t, \vec{x}) = 0 \rightarrow \vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0$$

del mismo modo

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(t, \vec{x}) = 0 \rightarrow \vec{k} \cdot \vec{B}_0 = 0$$

Ambos campos deben ser **transversales** (perpendiculares a la dirección de propagación)

Propagación en el eje z

Supongamos ahora que la dirección de propagación de los campos es en la dirección del eje z , es decir

$$\vec{k} = \beta \hat{k} = \frac{w}{c} \hat{k}$$

y

$$\vec{k} \cdot \vec{x} = \beta z$$

entonces

$$\begin{aligned}\vec{E}(t, z) &= \vec{E}_0 e^{i(wt - \beta z)} \\ \vec{B}(t, z) &= \vec{B}_0 e^{i(wt - \beta z)}\end{aligned}$$

además, ambos campos deben ser perpendiculares al eje z . Por ejemplo, si escogemos

$$\vec{E}(t, z) = E_0 e^{i(wt - \beta z)} \hat{i}$$

de la ecuación

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(t, z) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(t, z)$$

se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial z} E_0 e^{i(wt - \beta z)} \hat{j} = -i\beta E_0 e^{i(wt - \beta z)} \hat{j} = -iw \vec{B}_0 e^{i(wt - \beta z)}$$

entonces

$$i\beta E_0 e^{i(wt - \beta z)} \hat{j} = iw \vec{B}_0 e^{i(wt - \beta z)}$$

y se desprende que

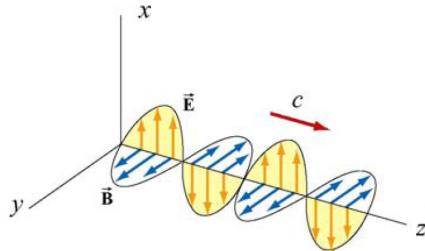
$$\vec{B}_0 = \frac{E_0}{c} \hat{j}$$

Finalmente

$$\begin{aligned}\vec{E}(t, z) &= E_0 e^{i(wt - \beta z)} \hat{i} \\ \vec{B}(t, z) &= B_0 e^{i(wt - \beta z)} \hat{j}\end{aligned}$$

$$\frac{B_0}{E_0} = \frac{1}{c}$$

$$\beta = \frac{w}{c}$$



Vemos que \vec{E} y \vec{B} están siempre en fase, es decir, alcanzan sus máximos y mínimos al mismo tiempo.

Nota

Por supuesto que los campos físicos se obtienen al tomar la parte real de las soluciones encontradas

$$\vec{E}(t, z) = E_0 \cos(wt - \beta z) \hat{i}$$

$$\vec{B}(t, z) = \frac{E_0}{c} \cos(wt - \beta z) \hat{j}$$

Resumen

- Las ondas son transversales ya que tanto \vec{E} y \vec{B} son perpendiculares a la dirección de propagación, que coincide con la dirección del producto $\vec{E} \times \vec{B}$
- Los campos \vec{E} y \vec{B} son perpendiculares entre sí. Es decir $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$
- La razón entre las magnitudes de los campos es

$$\frac{E_0}{B_0} = \frac{w}{\beta} = c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

- La velocidad de propagación es igual a la velocidad de la luz en el medio $c = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}}$
- Las ondas electromagnéticas obedecen el principio de superposición

Vector Poynting

En general, el flujo de Energía por unidad de área (y tiempo) está descrito por el vector de Poynting

$$\vec{S}(t, \vec{x}) = \frac{1}{\mu} \vec{E}(t, \vec{x}) \times \vec{B}(t, \vec{x}) = \vec{E}(t, \vec{x}) \times \vec{H}(t, \vec{x})$$

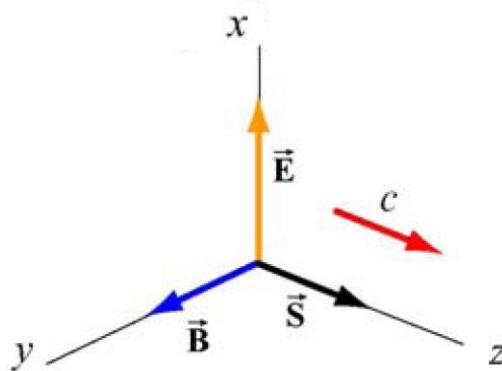
Debido a que los campos son perpendiculares

$$| \vec{S}(t, \vec{x}) | = \frac{1}{\mu} | \vec{E}(t, \vec{x}) \times \vec{B}(t, \vec{x}) | = \frac{1}{\mu} | \vec{E}(t, \vec{x}) | | \vec{B}(t, \vec{x}) |$$

En el caso de las ondas planas monocromáticas recién visto

$$\vec{S}(t, \vec{x}) = \frac{1}{\mu} \frac{E_0 B_0}{c} \cos^2(wt - \beta x) \hat{k}$$

Como es de esperar, el vector de Poynting apunta en la dirección de propagación



La intensidad de la onda I , definida como el promedio temporal de $| \vec{S} |$ es

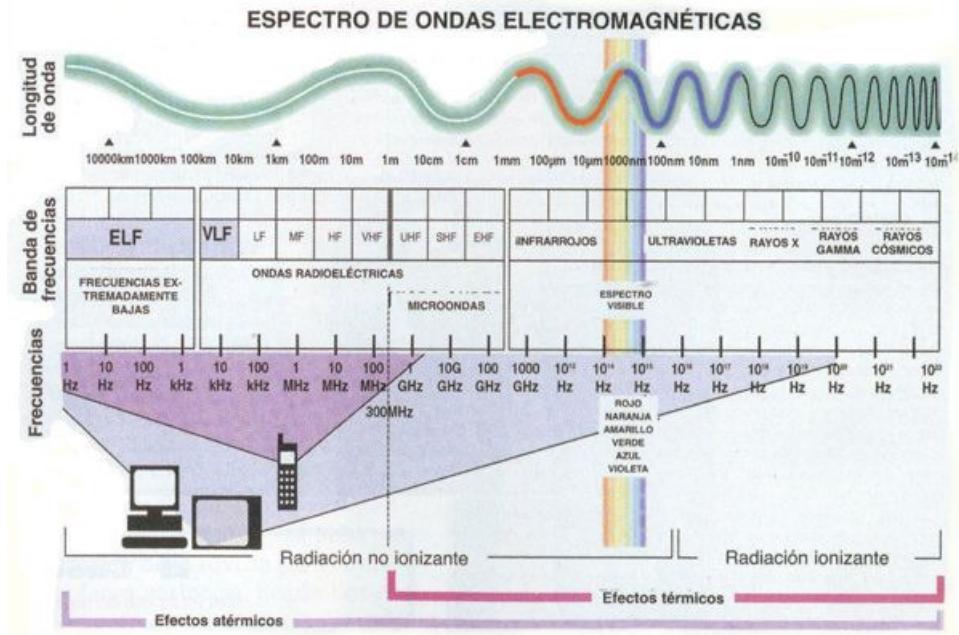
$$I = \frac{E_0 B_0}{\mu} \langle \cos^2(wt - \beta x) \rangle = \frac{E_0 B_0}{2\mu} = \frac{E_0^2}{2c\mu} = \frac{c B_0^2}{2\mu}$$

donde hemos usado

$$\langle \cos^2(wt - \beta x) \rangle = 1/2$$

Notar que la magnitud de la intensidad es constante. Por supuesto que esto no es muy realista, pues es bien sabido de la vida diaria que la energía de la radiación decae con la distancia. Veremos más adelante que los campos electromagnéticos tienen en general la forma de ondas esféricas, cuya amplitud decae como el inverso de la distancia $1/r$, de forma que la magnitud del vector poynting decae como $1/r^2$. Por supuesto que las ondas planas, si bien son soluciones

de las ecuaciones de Maxwell, constituyen sólo un estudio aproximado de los campos electromagnéticos muy distantes de las fuentes. (Por ejemplo, de la radiación producida por el Sol en la tierra, se puede suponer que la magnitud de los campos es constante). Veremos también que es posible generar ondas planas teóricamente, pero en la práctica no



Ejemplo

En la superficie de la atmósfera terrestre, la magnitud del vector Poynting (en promedio temporal) es $\langle S \rangle = 1,35 \times 10^3 \text{ W/m}^2$.

- a) Asumiendo que la radiación solar en la superficie de la atmósfera consiste en una onda sinusoidal plana, ¿Cuáles son las magnitudes del campo eléctrico y magnético?
- b) ¿Cuál es el promedio temporal de la potencia radiada por el Sol? La distancia media entre el Sol y la Tierra es $R = 1,5 \times 10^{11} \text{ m}$

Solución

- a) El promedio temporal del vector Poynting está relacionado con la magnitud del campo eléctrico según

$$\langle S \rangle = \frac{\epsilon_0 c E_0^2}{2}$$

La amplitud del campo eléctrico es entonces

$$E_0 = \sqrt{\frac{2 \langle S \rangle}{c \epsilon_0}} = \sqrt{\frac{2 (1,35 \times 10^3 \text{ W/m}^2)}{(3 \times 10^8 \text{ m/s}) (8,85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2)}} = 1,01 \times 10^3 \text{ V/m}$$

La magnitud del campo magnético es

$$B_0 = \frac{E_0}{c} = \frac{1,01 \times 10^3 \text{ V/m}}{3 \times 10^8 \text{ m/s}} = 3,4 \times 10^{-6} \text{ T} = 3,4 \mu\text{T}$$

Notar que este campo magnético es menor que el campo magnético terrestre, que varía entre 30 y 60 μT

- b) La potencia total irradiada por el Sol a una distancia R es (en promedio)

$$\langle P \rangle = \langle S \rangle 4\pi R^2 = (1,35 \times 10^3 \text{ W/m}^2) 4\pi (1,5 \times 10^{11} \text{ m})^2 = 3,8 \times 10^{26} \text{ W}$$

Por supuesto que aquí hemos supuesto que la radiación emitida por el sol corresponde a ondas esféricas. La intensidad a una distancia r del Sol es

$$I = \langle S \rangle = \frac{\langle P \rangle}{4\pi r^2}$$

la cual decrece como $1/r^2$

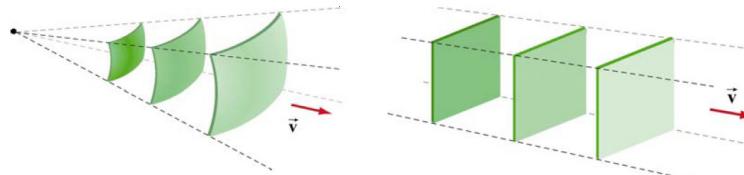


Fig. 15.2: Como veremos más adelante, los campos de radiación en general son ondas esféricas

15.2. Ondas Planas en medios conductores

Veremos que las soluciones para las ondas electromagnéticas planas en medios conductores difieren bastante en su comportamiento con respecto al caso de un medio dieléctrico perfecto (no conductor) que vimos anteriormente. Aceptaremos ahora que el medio tenga una conductividad σ , de forma que existirá una corriente eléctrica en el medio en respuesta al campo eléctrico. Si el medio es ohmico

$$\vec{J}(t, \vec{x}) = \sigma \vec{E}(t, \vec{x})$$

Claramente seguiremos suponiendo que el medio es lineal, homogéneo e isotrópico, de forma que las ecuaciones de Maxwell quedan

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(t, \vec{x}) &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E}(t, \vec{x}) &= -\frac{\partial \vec{B}(t, \vec{x})}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(t, \vec{x}) &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B}(t, \vec{x}) &= \mu\sigma \vec{E}(t, \vec{x}) + \mu\epsilon \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(t, \vec{x})\end{aligned}$$

Al igual que antes, evaluamos

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E}(t, \vec{x}) = \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(t, \vec{x}) \right) - \vec{\nabla}^2 \vec{E}(t, \vec{x}) = -\vec{\nabla}^2 \vec{E}(t, \vec{x})$$

Además

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E}(t, \vec{x}) = -\vec{\nabla} \times \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(t, \vec{x}) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{B}(t, \vec{x})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E}(t, \vec{x}) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu\sigma \vec{E}(t, \vec{x}) + \mu\epsilon \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(t, \vec{x}) \right) = -\mu\sigma \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(t, \vec{x}) - \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}(t, \vec{x})$$

con esto, la ecuación para el campo eléctrico es

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E}(t, \vec{x}) - \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}(t, \vec{x}) - \mu\sigma \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(t, \vec{x}) = 0$$

Es fácil verificar, siguiendo los mismos pasos, que el campo magnético satisface la misma ecuación

$$\vec{\nabla}^2 \vec{B}(t, \vec{x}) - \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{B}(t, \vec{x}) - \mu\sigma \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(t, \vec{x}) = 0$$

La única diferencia con el caso anterior (propagación en medios dieléctricos perfectos) la constituye el término $\mu\sigma \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(t, \vec{x})$. Veremos que la conductividad del medio tendrá como efecto una **atenuación** de las ondas a medida que penetra en el material. Nuevamente supondremos que los campos son de la forma

$$\vec{E}(t, \vec{x}) = \vec{E}(\vec{x}) e^{i\omega t}$$

luego

$$\left(\vec{\nabla}^2 + \mu\epsilon w^2 - i\mu\sigma w \right) \vec{E}(\vec{x}) e^{iwt} = 0$$

Definimos

$$k^2 = w^2\mu\epsilon - i\mu\sigma w$$

y la ecuación queda de la forma

$$\left(\vec{\nabla}^2 + k^2 \right) \vec{E}(\vec{x}) = 0$$

Si la propagación es en el eje z , entonces la ecuación a resolver es

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \vec{E}(\vec{x}) = 0$$

cuya solución es, por supuesto

$$\vec{E}(\vec{x}) = \vec{E}_0 e^{-ikz}$$

y entonces la solución completa queda

$$\vec{E}(t, \vec{x}) = \vec{E}_0 e^{i(wt - kz)}$$

Hay que recordar que k es un número complejo, que escribiremos en la forma $k = \beta - i\alpha$. Así

$$k^2 = \mu\epsilon w^2 - i\mu\sigma w = \beta^2 - \alpha^2 - 2i\alpha\beta$$

se debe resolver

$$2\alpha\beta = \mu\sigma w \rightarrow \alpha = \frac{\mu\sigma w}{2\beta}$$

$$\beta^2 - \alpha^2 = \mu\epsilon w^2 \rightarrow \beta^2 - \frac{\mu^2\sigma^2 w^2}{4\beta^2} = w^2\mu\epsilon$$

$$\beta^2 - \frac{\mu^2\sigma^2 w^2}{4\beta^2} = w^2\mu\epsilon$$

$$\beta^4 - \beta^2 w^2 \mu\epsilon - \frac{\mu^2\sigma^2 w^2}{4} = 0$$

$$\beta^2 = \frac{w^2\mu\epsilon \pm \sqrt{w^4\mu^2\epsilon^2 + \mu^2\sigma^2 w^2}}{2}$$

$$\beta^2 = \frac{w^2\mu\epsilon \pm w^2\mu\epsilon \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{w^2\epsilon^2}}}{2}$$

Obviamente la solución correcta es con el signo positivo, pues β es real

$$\beta^2 = w^2 \frac{\mu\epsilon}{2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{w\epsilon} \right)^2} + 1 \right)$$

$$\beta = w \sqrt{\left(\frac{\mu\epsilon}{2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{w\epsilon} \right)^2} + 1 \right) \right)}$$

y como

$$\alpha^2 = \beta^2 - w^2 \mu \epsilon$$

$$\begin{aligned}\alpha^2 &= w^2 \frac{\mu \epsilon}{2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{w \epsilon} \right)^2} + 1 \right) - w^2 \mu \epsilon \\ \alpha^2 &= w^2 \frac{\mu \epsilon}{2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{w \epsilon} \right)^2} - 1 \right) \\ \alpha &= w \sqrt{\left(\frac{\mu \epsilon}{2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{w \epsilon} \right)^2} - 1 \right) \right)}\end{aligned}$$

Solución

Se concluye que las ondas planas monocromáticas en un medio con conductividad σ son de la forma

$$\vec{E}(t, z) = \vec{E}_0 e^{-\alpha z} e^{i(wt - \beta z)}$$

donde hemos asumido que la propagación es en la dirección z , y al igual que antes \vec{E}_0 debe ser un vector perpendicular a z . Notar que la amplitud de la onda es atenuada por un factor exponencial $e^{-\alpha z}$, por lo que α es llamada **Constante de atenuación**

$$\begin{aligned}\beta &= w \sqrt{\left(\frac{\mu \epsilon}{2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{w \epsilon} \right)^2} + 1 \right) \right)} \\ \alpha &= w \sqrt{\left(\frac{\mu \epsilon}{2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{w \epsilon} \right)^2} - 1 \right) \right)}\end{aligned}$$

Ésta es la solución exacta para ondas planas monocromáticas en un medio lineal y de conductividad σ . Notar que para un dieléctrico perfecto, la constante de atenuación es cero y se recupera el caso visto anteriormente

Observación

Este factor exponencial atenuante es el que explica que en ciertos materiales las ondas no se propaguen correctamente. Por ejemplo, para el agua de mar (que constituye un medio conductor), dentro de un gran rango de frecuencias el factor α es grande, de forma que las ondas decaen bastante rápido. (Esto explica en parte por qué los submarinos no se comunican mediante ondas electromagnéticas)

La razón física de este factor atenuante radica en la naturaleza misma del medio. Por ser conductor, existe una gran cantidad de cargas libres que son aceleradas por la presencia del campo eléctrico (principalmente, pues ya es sabido que su magnitud es muchísimo mayor a la del campo magnético). De esta forma, parte de la energía electromagnética que se propaga es utilizada en trabajo para mover las cargas libres presentes en el medio. Con esto, resulta natural que la onda electromagnética pierda energía a medida que avanza en el material

Supongamos ahora que $\vec{E}_0 = E_0 \hat{i}$. Nuevamente, de la ley de Faraday podemos determinar la relación entre las magnitudes de los campos

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(t, \vec{x}) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(t, \vec{x})$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \times E_0 e^{-\alpha z} e^{i(wt-\beta z)} \hat{i} = -iw \vec{B}_0 e^{-\alpha z} e^{i(wt-\beta z)}$$

$$(i\beta + \alpha) \times E_0 e^{-\alpha z} e^{i(wt-\beta z)} \hat{j} = iw \vec{B}_0 e^{-\alpha z} e^{i(wt-\beta z)}$$

Se obtiene $\vec{B}_0 = B_0 \hat{j}$ con

$$B_0 = \frac{i\beta + \alpha}{iw} E_0$$

$$B_0 = \frac{\beta - i\alpha}{w} E_0 = \frac{k}{w} E_0$$

con

$$k = \sqrt{w^2 \mu \epsilon - i\mu \sigma w}$$

$$B_0 = \sqrt{\mu \epsilon - \frac{i\mu \sigma}{w}} E_0 = \sqrt{\frac{\mu \sigma + iw \mu \epsilon}{iw}} E_0$$

y entonces

$$\frac{E_0}{B_0} = \sqrt{\frac{iw}{\sigma \mu + iw \mu \epsilon}}$$

o

$$\frac{E_0}{H_0} = \sqrt{\frac{iw \mu}{\sigma + iw \epsilon}} = \eta$$

Esta razón, que depende de las características del medio (μ, ϵ, σ) y de la frecuencia w , se conoce como **impedancia característica del medio**. Notar que en general ($\sigma \neq 0$) es un número complejo, esto quiere decir que para medios con conductividad, el campo eléctrico y magnético **no están en fase**

La impedancia característica en representación polar es

$$\eta = |\eta| e^{i\vartheta}$$

donde

$$|\eta| = \left(\frac{\frac{w}{\mu}}{\sqrt{(\sigma^2 + w^2 \epsilon^2)}} \right)^{1/2} = \left(\frac{\mu/\epsilon}{\sqrt{(\frac{\sigma}{\epsilon w})^2 + 1}} \right)^{1/2} = \frac{\sqrt{\mu/\epsilon}}{\left(1 + \left(\frac{\sigma}{w\epsilon}\right)^2\right)^{1/4}}$$

y

$$\vartheta = \frac{1}{2} (\pi/2 - \text{Arctan}(w\epsilon/\sigma))$$

$$\tan 2\vartheta = \frac{\sigma}{w\epsilon}$$

Con esto, la solución general para ondas planas que se propagan en dirección z queda

$$\begin{aligned}\vec{E}(z, t) &= E_0 e^{-\alpha z} e^{i(wt - \beta z)} \hat{e}_1 \\ \vec{H}(z, t) &= \frac{E_0}{|\eta|} e^{-\alpha z} e^{i(wt - \beta z - \vartheta)} \hat{e}_2 \\ e_1 \times e_2 &= \hat{k}\end{aligned}$$

La velocidad de propagación es

$$c = \frac{w}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{w\epsilon}\right)^2} + 1 \right)}}$$

y la longitud de onda

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{w \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{w\epsilon}\right)^2} + 1 \right)}}$$

15.3. Solución para buenos conductores

Si la conductividad es grande en el sentido $\sigma \gg w\epsilon$, entonces

$$\begin{aligned}\beta &= w \sqrt{\left(\frac{\mu\epsilon}{2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{w\epsilon}\right)^2} + 1 \right) \right)} \approx w \sqrt{\frac{\mu\sigma}{2w}} \\ \alpha &= w \sqrt{\left(\frac{\mu\epsilon}{2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{w\epsilon}\right)^2} - 1 \right) \right)} \approx w \sqrt{\frac{\mu\sigma}{2w}}\end{aligned}$$

Es decir, aproximadamente se tiene

$$\alpha = \beta = \sqrt{\frac{w\mu\sigma}{2}}$$

En términos de la frecuencia en Hertz $f = \frac{w}{2\pi}$

$$\alpha = \beta = \sqrt{\pi f \sigma}$$

En este caso los campos son atenuados rápidamente. Se define la **profundidad de penetración** como la distancia dentro del material a la cual los campos han decaido en un factor $1/e$ (aproximadamente al 30 % de su valor original)

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\pi f \sigma}}$$

Además, en este caso la impedancia característica queda

$$\eta = \sqrt{\frac{w\mu}{\sigma}} e^{i\pi/4} = \frac{E_0}{H_0}$$

Es decir, los campos se encuentran en un desfase de $\vartheta = \pi/4$

$$\vec{E}(z, t) = E_0 e^{-\alpha z} e^{i(wt - \beta z)} \hat{e}_1$$

$$\vec{H}(z, t) = \frac{E_0}{|\eta|} e^{-\alpha z} e^{i(wt - \beta z - \pi/4)} \hat{e}_2$$

$$e_1 \times e_2 = \hat{k}$$

La velocidad de propagación es

$$c = \frac{w}{\beta} = \sqrt{\frac{2w}{\sigma\mu}} = w\delta$$

y la longitud de onda

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}} = 2\pi\delta$$

Nota: Notar que aquí, la definición de un buen conductor no es una propiedad única del material, puesto que debe tenerse $\sigma >> w\epsilon$. Es decir, un material se considera buen conductor en determinado rango de frecuencias.

15.4. Resumen sobre las ondas planas monocromáticas

Hemos visto que las ecuaciones de Maxwell aceptan como solución campos electromagnéticos que están descritos matemáticamente por ondas planas. Para una propagación según el eje z , los campos son de la forma

$$\vec{E}(z, t) = E_0 e^{-\alpha z} e^{i(wt - \beta z)} \hat{e}_1$$

$$\vec{H}(z, t) = \frac{E_0}{|\eta|} e^{-\alpha z} e^{i(wt - \beta z - \vartheta)} \hat{e}_2$$

$$e_1 \times e_2 = \hat{k}$$

1. En un dieléctrico perfecto (conductividad nula), la constante de atenuación es cero, y la impedancia intrínseca es un número real puro

$$\eta = \frac{E_0}{H_0} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \rightarrow \frac{E_0}{B_0} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = c$$

En el espacio vacío, la impedancia intrínseca es

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx 120\pi$$

En este caso

$$\vec{E}(z, t) = E_0 e^{i(wt - \beta z)} \hat{e}_1$$

$$\vec{B}(z, t) = \frac{E_0}{c} e^{i(wt - \beta z)} \hat{e}_2$$

$$e_1 \times e_2 = \hat{k}$$

Con

$$\beta = \frac{w}{c} = w\sqrt{\mu\epsilon}$$

2. En un buen conductor ($\sigma >> w\epsilon$), los campos son fuertemente atenuados a medida que se propagan en el medio. Aquí, en un análisis aproximado

$$\alpha = \beta = \sqrt{\frac{w\mu\sigma}{2}} = \sqrt{\pi f \sigma}$$

la impedancia intrínseca es un complejo con fase $\pi/4$ y su magnitud es

$$|\eta| = \sqrt{\frac{w\mu}{\sigma}}$$

Los campos son atenuados por un factor $1/e$ al ingresar una distancia igual a la profundidad de penetración

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}}$$

Problema

Dado $\vec{E}(t, \vec{x}) = E_m \sin(wt - \beta z) \hat{j}$ en el espacio libre, encuentre $\vec{D}(t, \vec{x})$, $\vec{B}(t, \vec{x})$ y $\vec{H}(t, \vec{x})$. Dibuje \vec{E} y \vec{H} en $t = 0$

Solución

Se tiene

$$\vec{E}(t, \vec{x}) = E_m \sin(wt - \beta z) \hat{j}$$

de aquí es inmediato que

$$\vec{D}(t, \vec{x}) = \epsilon_0 \vec{E}(t, \vec{x}) = \epsilon_0 E_m \sin(wt - \beta z) \hat{j}$$

Además, de la ecuación de Maxwell

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(t, \vec{x}) = -\frac{\partial \vec{B}(t, \vec{x})}{\partial t}$$

como la propagación es en z , la única derivada parcial espacial para el campo eléctrico que no es nula es la que involucra z , es decir

$$\frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \times \vec{E}(t, \vec{x}) = -\frac{\partial \vec{B}(t, \vec{x})}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \times \vec{E}(t, \vec{x}) = -\frac{\partial}{\partial z} E_m \sin(wt - \beta z) \hat{i} = \beta E_m \cos(wt - \beta z) \hat{i} = -\frac{\partial \vec{B}(t, \vec{x})}{\partial t}$$

Luego

$$\vec{B}(t, \vec{x}) = -\frac{\beta}{w} E_m \sin(wt - \beta z) \hat{i} = -\frac{E_m}{c} \sin(wt - \beta z) \hat{i}$$

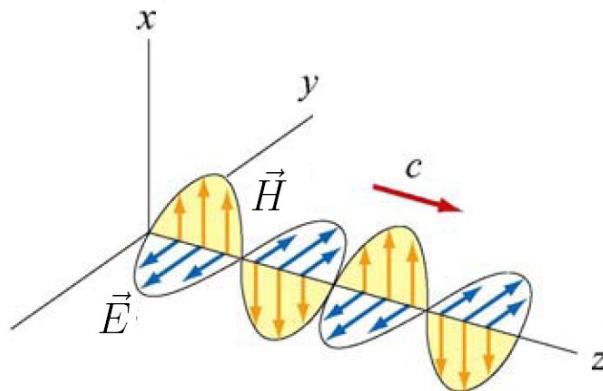
Por último, el campo $\vec{H}(t, \vec{x})$ es, simplemente

$$\vec{H}(t, \vec{x}) = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}(t, \vec{x}) = -\frac{E_m}{\mu_0 c} \sin(wt - \beta z) \hat{i}$$

En $t = 0$, los campos \vec{E} y \vec{H} están dados por

$$\vec{E}(0, \vec{x}) = -E_m \sin(\beta z) \hat{j}$$

$$\vec{H}(0, \vec{x}) = \frac{E_m}{\mu_0 c} \sin(\beta z) \hat{i}$$



Problema

Dado $\vec{H} = H_m e^{i(wt+\beta z)} \hat{i}$ en el espacio libre, encuentre \vec{E}

Solución

Una forma de resolver este problema es notando que \vec{H} representa una onda plana que se propaga en dirección $-\hat{z}$. Luego, debe tenerse que el vector poynting tenga esta dirección, lo cual se logra con un campo eléctrico polarizado según \hat{j} , en efecto

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = E \hat{j} \times H \hat{i} = -EH \hat{k}$$

Además, se cumple que

$$\frac{E}{B} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

o, equivalentemente

$$\frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \frac{\beta \mu_0}{w}$$

y entonces

$$\vec{E} = \frac{w \mu_0}{\beta} H_m e^{i(wt+\beta z)} \hat{j}$$

Otra forma, es recordando que el espacio vacío tiene conductividad nula y entonces

$$\vec{\nabla} \times H = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times H = \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \times \vec{H} = \beta H_m e^{i(wt+\beta z)} \hat{j}$$

entonces

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \beta H_m e^{i(wt+\beta z)} \hat{j}$$

$$\vec{D} = \frac{\beta}{w} H_m e^{i(wt+\beta z)} \hat{j}$$

$$\vec{E} = \frac{\beta}{w \epsilon_0} H_m e^{i(wt+\beta z)} \hat{j}$$

En efecto, es el mismo resultado anterior

$$\vec{E} = \frac{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}{\epsilon_0} H_m e^{i(wt+\beta z)} \hat{j} = \frac{\mu_0}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} H_m e^{i(wt+\beta z)} \hat{j}$$

$$\vec{E} = \frac{w \mu_0}{\beta} H_m e^{i(wt+\beta z)} \hat{j}$$

Problema

Dados

$$\vec{E} = 30\pi e^{i(10^8 t + \beta z)} \hat{i}, \vec{H} = H_m e^{i(10^8 t + \beta z)} \hat{j}$$

en el espacio libre, encontrar H_m y β ($\beta > 0$)

Solución

Estas son ondas planas que satisfacen las ecuaciones de Maxwell en el vacío, de forma que

$$\frac{w}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 3 \times 10^8 \text{ (m/s)}$$

Luego

$$\beta = \frac{w}{c} = \frac{10^8}{3 \times 10^8} = \frac{1}{3}$$

Además

$$\frac{|E|}{|B|} = c \rightarrow \frac{|E|}{|H|} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi$$

Luego

$$|H_m| = \frac{30\pi}{120\pi} = \frac{1}{4}$$

Además, las ondas se propagan en la dirección $-\hat{k}$, por lo que

$$\vec{E} \times \vec{H} = -\hat{k}$$

entonces

$$H_m = -\frac{1}{4}$$

y

$$\begin{aligned}\vec{E} &= 30\pi e^{i(10^8 t + \frac{1}{3}z)} \hat{i} \\ \vec{H} &= -\frac{1}{4} e^{i(10^8 t + \frac{1}{3})} \hat{j}\end{aligned}$$

Problema

En un medio homogéneo no conductor donde $\mu_r = 1$, encuentre ϵ_r y w si

$$\vec{E} = 30\pi e^{i(wt-(4/3)y)} \hat{z}, \vec{H} = 1,0\pi e^{i(wt-(4/3)y)} \hat{i}$$

¿Cuál es la velocidad de la luz en esta región?

Solución

Se trata de ondas planas con $\beta = 4/3$. Luego

$$\frac{w}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_r\epsilon_0}} = \frac{3 \times 10^8}{\sqrt{\epsilon_r}}$$

Además

$$\frac{E}{H} = 30\pi = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_r\epsilon_0}} = 120\pi\sqrt{\frac{1}{\epsilon_r}}$$

Así

$$\begin{aligned}\frac{w}{4/3} &= \frac{3 \times 10^8}{\sqrt{\epsilon_r}} \\ 30\pi &= 120\pi\sqrt{\frac{1}{\epsilon_r}}\end{aligned}$$

Resolviendo

$$\epsilon_r = 16$$

$$w = 10^8 \text{ (rad/s)}$$

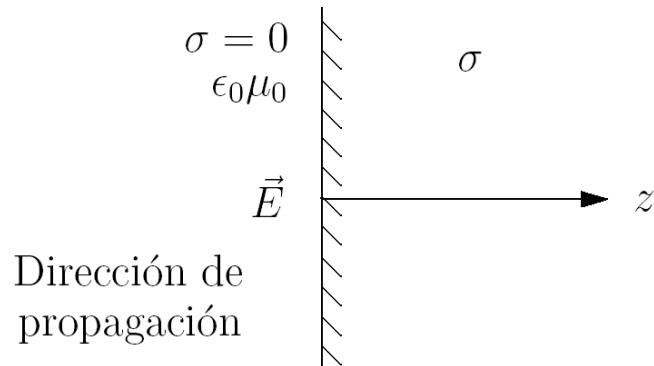
la velocidad de la luz en este medio es

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 16\epsilon_0}} = \frac{3 \times 10^8}{4}$$

es un cuarto de la velocidad de la luz en el vacío

Problema

Suponga $\vec{E} = e^{-\alpha z} e^{i(wt - \beta z)} \hat{i}$ (V/m) con $f = 100$ Mhz, en la superficie de un conductor de cobre, $\sigma = 58 MS/m$, localizado en $z > 0$. Examine la atenuación a medida que la onda se propaga en el interior del conductor



Solución

A una profundidad z , la magnitud del campo eléctrico es

$$| \vec{E} | = e^{-\alpha z} = e^{-z/\delta}$$

donde $\delta = 1/\alpha$ es la profundidad de penetración

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}} = 6,61 \mu m$$

Es decir, después de 6,61 micrómetros dentro del conductor, el campo es atenuado en $\frac{1}{e}$, a un 36,8 % de su valor inicial. A 5δ o 33 micrómetros, la magnitud es 0,67 % de su valor inicial

Problema

Para agua de mar con $\mu = \mu_0$ y conductividad $\sigma \approx 4,3$ (S/m), ¿a qué frecuencia la profundidad de penetración es de un metro?

Solución

Supongamos un rango de frecuencias en el que el agua de mar es considerado un buen conductor, es decir

$$\sigma >> w\epsilon$$

(notar que la permitividad del vacío es del orden de 10^{-12} , y la constante dieléctrica ϵ_r en general no es muy grande). La profundidad de penetración está dada por

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu w \sigma}} = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 w \sigma}}$$
$$\delta^2 = \frac{2}{\mu_0 w \sigma} \rightarrow w = \frac{2}{\sigma \mu_0 \delta^2}$$

Se desea $\delta = 1$ (m), entonces

$$w = \frac{2}{4,3 \times 4\pi \times 10^{-7} 1^2} = 3,7 \times 10^5$$

o, en Hertz

$$f = \frac{w}{2\pi} = 58,6 \times 10^3$$

o sea, una frecuencia de aproximadamente 60 kHz para una profundidad de un metro. Si un submarino está equipado con un receptor de muy alta sensibilidad y si se utiliza un transmisor de muy alta potencia, es posible comunicarse con otro submarino sumergido. Sin embargo, debe utilizarse una frecuencia muy baja, y aún en este caso se produce una atenuación muy fuerte de la señal. En efecto, a 5 profundidades de penetración (5 metros), la magnitud de los campos se reduce al 1 % del valor original, y por consiguiente la potencia se reduce al 0,01 % de la potencia incidente

Problema

Una onda plana uniforme que se propaga en un medio determinado, tiene un campo eléctrico

$$\vec{E}(t, z) = 5e^{-\gamma z} e^{i10^8 t} \hat{j}$$

Si el medio se caracteriza por

$$\sigma = 3,5 S/m$$

$$\epsilon_r = 1$$

$$\mu_r = 18$$

Determine γ , H , η y la profundidad de penetración para el medio. ¿Después de recorrer qué distancia la onda se atenúa al 10 % de su valor inicial? ¿Cuál es la velocidad de propagación en este medio?

Solución

Las ondas planas que son solución de las ecuaciones de Maxwell son de la forma

$$\vec{E}(t, z) = \vec{E}_0 e^{-ikz} e^{iwt}$$

donde

$$k = \beta - i\alpha$$

$$\vec{E}(t, z) = \vec{E}_0 e^{-i\beta z - \alpha z} e^{iwt}$$

comparando con

$$\vec{E}(t, z) = 5e^{-\gamma z} e^{i10^8 t} \hat{j}$$

se aprecia que se trata de una onda plana a frecuencia $w = 10^8$ Hertz, polarizada según \hat{j} y con

$$\gamma = \alpha + i\beta$$

Notemos que

$$\frac{\sigma}{w\epsilon} = \frac{3,5}{\epsilon_0 \times 10^8} = \frac{3,5}{8,854 \times 10^{-12} \times 10^8} = 3953,02$$

Se aprecia que

$$\sigma \gg w\epsilon$$

de forma que el medio se puede considerar un buen conductor. En este caso

$$\alpha \approx \beta \approx \sqrt{\frac{w\mu\sigma}{2}} = \frac{10^8 \times 18 * 4\pi \times 10^{-7} \times 3,5}{2} = 62,9159$$

Con esto

$$\gamma = 62,9159 + i62,9159 = \frac{62,9159}{\sqrt{2}} e^{i\pi/4}$$

La profundidad de penetración es

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = 0,0158942$$

La impedancia característica del medio es (en una muy buena aproximación)

$$\eta = \sqrt{\frac{w\mu}{\sigma}} e^{i\pi/4} = \sqrt{\frac{10^8 \times 18 \times 4\pi 10^{-7}}{3,5}} e^{i\pi/4} = 25,4219 e^{i\pi/4}$$

El campo $\vec{H}(t, z)$ está dado por

$$H(t, z) = -\frac{5}{|\eta|} e^{-\gamma z} e^{i10^8 t} e^{-i\pi/4} \hat{i} = -\frac{5}{|\eta|} e^{-\alpha z} e^{i(10^8 t - \beta z - \pi/4)} \hat{i}$$

$$H(t, z) = -0,196681 e^{-62,9159 z} e^{i(10^8 t - 62,9159 z - \pi/4)} \hat{i}$$

La velocidad de propagación está relacionada con la constante de propagación β

$$\beta = \frac{w}{c} \rightarrow c = \frac{10^8}{62,9159} = 1,5895 \times 10^8$$

un poco más de la mitad de la velocidad de la luz en el vacío. Por último, para determinar a qué distancia dentro del material la onda se ha atenuado hasta un 10 % de su valor original, se debe resolver

$$0,1 = e^{-\alpha x} = e^{-62,9159 x}$$

$$-2,30258 = -62,9159 x$$

$$x = 3,65978 \times 10^{-2} = 3,65978 cm$$

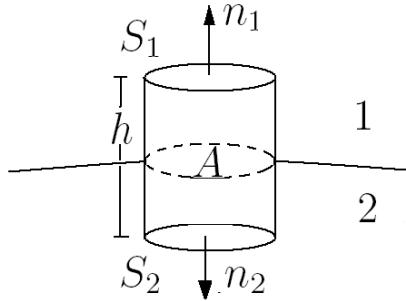
Capítulo 16

Condiciones de borde en la frontera

Las condiciones que deben satisfacer los campos electromagnéticos en una zona interfacial que separa dos madios se deducen, por supuesto, de las ecuaciones de Maxwell. La más simple de obtener es la que cumple la componente normal del campo magnético, y se obtiene a partir de la ecuación

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(t, \vec{x}) = 0$$

En cualquier zona interfacial entre dos medios se puede construir una superficie cilíndrica como se muestra en la figura



Integrando la ecuación de Maxwell sobre el volumen limitado por el cilindro se obtiene

$$\begin{aligned} \iiint_V d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(t, \vec{x}) &= \oint_{S(V)} d\vec{S}(\hat{x}) \cdot \vec{B}(t, \vec{x}) = 0 \\ \iint_{S_1} dS_1 \hat{n}_1 \cdot \vec{B}(t, \vec{x}) + \iint_{S_2} dS_2 \hat{n}_2 \cdot \vec{B}(t, \vec{x}) + \iint_{S_3} dS_3 \hat{n}_3 \cdot \vec{B}(t, \vec{x}) &= 0 \end{aligned}$$

donde S_3 es el manto del cilindro, mientras S_1 y S_2 las tapas. Si $\vec{B}(t, \vec{x})$ es finito, el último término se puede anular si $h \rightarrow 0$. Además, en este límite ($h \rightarrow 0$) las superficies S_1 y S_2 son prácticamente las mismas, $S_1 \rightarrow S_2$, con $\hat{n}_1 = -\hat{n}_2$ y entonces

$$\begin{aligned} \oint_{S(V)} d\vec{S}(\hat{x}) \cdot \vec{B}(t, \vec{x}) &= \iint_{S_1} dS_1 \left(\hat{n}_1 \cdot \vec{B}(t, \vec{x}) - \hat{n}_1 \cdot \vec{B}(t, \vec{x}) \right) = 0 \\ \hat{n}_1 \cdot \vec{B}(t, \vec{x}) - \hat{n}_1 \cdot \vec{B}(t, \vec{x}) &= 0 \end{aligned}$$

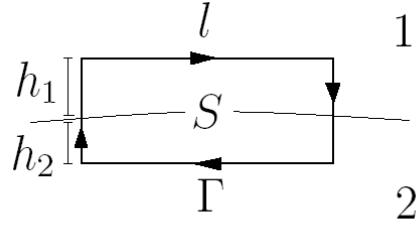
Es decir, la componente **normal** del campo magnético es continua al atravesar un medio

$$B_{1n} = B_{2n}$$

Ahora veremos que la componente tangencial del campo eléctrico es continua. A partir de la ecuación

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(t, \vec{x}) + \frac{\partial \vec{B}(t, \vec{x})}{\partial t} = 0$$

Integremos esta ecuación sobre una superficie plana rectangular como la de la figura



El contorno de S es el camino Γ indicado en la figura. Utilizando el teorema de Stokes

$$\iint_S d\vec{S}(\hat{x}) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}(t, \vec{x})) = \oint_{\Gamma} d\vec{x} \cdot \vec{E}(t, \vec{x}) = - \iint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \frac{\partial \vec{B}(t, \vec{x})}{\partial t}$$

En el caso en que $h_1 \rightarrow 0$, $h_2 \rightarrow$

$$lE_{1t} - lE_{2t} = 0$$

la integral de superficie por supuesto es nula ya que la superficie total tiende a cero ($S \rightarrow$ suponemos que la derivada temporal del campo magnético es finita). De aquí se deduce que la componente **tangencial** de $\vec{E}(t, \vec{x})$ debe ser continua al atravesar una interfaz entre dos medios

$$lE_{1t} = lE_{2t}$$

Utilizando ahora la primera ecuación de Maxwell

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D}(t, \vec{x}) = \rho(t, \vec{x})$$

y utilizando la misma superficie para el caso del campo magnético (cilindro de altura h) se obtiene

$$\begin{aligned} \iiint_V d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{D}(t, \vec{x}) &= \iiint_V d^3x \rho(\vec{x}) \\ \oint_{V(S)} d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{D}(t, \vec{x}) &= \iint_V d^3x \rho(\vec{x}) \end{aligned}$$

si $h \rightarrow 0$, entonces

$$(D_{1n} - D_{2n}) A = \sigma A$$

donde A es la superficie de las tapas, y σ es la densidad superficial de carga en la frontera que divide a los dos medios. Así, la componente normal del campo $\vec{D}(t, \vec{x})$ es discontinua al atravesar una superficie cargada

$$D_{1n} - D_{2n} = \sigma$$

o, equivalentemente para medios lineales

$$\epsilon_1 E_{1n} - \epsilon_2 E_{2n} = \sigma$$

Por último, de la ecuación

$$\vec{\nabla} \times H(t, \vec{x}) = \vec{J}(t, \vec{x}) + \frac{\partial D(t, \vec{x})}{\partial t}$$

y utilizando la misma superficie de integración que el caso del campo eléctrico, se obtiene

$$\begin{aligned} \iint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot (\vec{\nabla} \times H(t, \vec{x})) &= \iint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot J(t, \vec{x}) + \iint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \frac{\partial D(t, \vec{x})}{\partial t} \\ \oint_{\Gamma} d\vec{x} \cdot \times H(t, \vec{x}) &= \iint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot J(t, \vec{x}) + \iint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \frac{\partial D(t, \vec{x})}{\partial t} \end{aligned}$$

Si nuevamente h_1 y h_2 tienden a cero, y la derivada temporal del campo \vec{D} es finita

$$H_{1t} - H_{2t} = \vec{J}(t, \vec{x}) \cdot \hat{n}$$

donde n es la perpendicular a la superficie S . Es decir, la componente tangencial de $\vec{H}(t, \vec{x})$ es discontinua al atravesar un medio con densidad de carga superficial en la interfaz.

Resumen

Al atravesar una interfaz entre dos medios (1 y 2), los campos electromagnéticos satisfacen

$$B_{1n} = B_{2n}$$

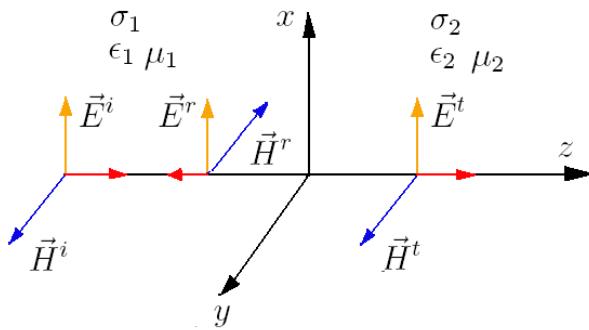
$$E_{1t} = E_{2t}$$

$$D_{1n} - D_{2n} = \sigma$$

$$H_{1n} - H_{2n} = \vec{J} \cdot \hat{n}$$

16.1. Condiciones de Borde para incidencia normal

Las ondas electromagnéticas que se propagan en materiales generalmente entran en el material a través de una frontera entre éste y otro medio, que puede ser aire o vacío. Aquí utilizaremos las condiciones de borde que satisfacen los campos para el caso de ondas que inciden normalmente sobre una interfaz. (Esto significa que la dirección de propagación es perpendicular a la frontera). Veremos que la onda incidente será acompañada por una onda reflejada y una transmitida. Consideremos el caso que se muestra en la figura



Se aprecia una onda incidente ($\vec{E}^i(x, z)$, $\vec{H}^i(y, z)$) que se desplaza en el sentido positivo de z , los campos $\vec{E}^r(x, z)$, $\vec{H}^r(y, z)$ describen la onda reflejada que se desplaza en el sentido negativo de z , y $\vec{E}^t(x, z)$, $\vec{H}^t(y, z)$ describen la onda transmitida. La interfaz es el plano $z = 0$, con el medio 1 a la izquierda y el medio 2 a la derecha. Más concretamente

$$\begin{aligned}\vec{E}^i(t, z) &= E^i e^{-ikz} e^{iwt} \hat{i} \\ \vec{E}^r(t, z) &= E^r e^{ikz} e^{iwt} \hat{i} \\ \vec{E}^t(t, z) &= E^t e^{-ikz} e^{iwt} \hat{i} \\ \vec{H}^i(t, z) &= H^i e^{-ikz} e^{iwt} \hat{j} \\ \vec{H}^r(t, z) &= -H^r e^{ikz} e^{iwt} \hat{j} \\ \vec{H}^t(t, z) &= H^t e^{-ikz} e^{iwt} \hat{j}\end{aligned}$$

Estas son ondas planas que se propagan en dirección z . Son soluciones a las Ecuaciones de Maxwell si

$$k = \beta - i\alpha$$

Con α y β encontrados anteriormente (Son propiedad de la frecuencia y del medio en el cual se propagan las ondas). Interesa determinar qué relación se cumple entre las magnitudes de los campos incidentes, reflejados y transmitidos. Para ello, usaremos el hecho de que el campo eléctrico debe ser continuo en $z = 0$ (es completamente transversal a la interfaz). Esto significa

$$\vec{E}^i(t, 0) + \vec{E}^r(t, 0) = \vec{E}^t(t, 0)$$

o bien

$$E^i + E^r = E^t$$

Además, si no hay una corriente superficial en la interfaz, el campo $\vec{H}(t, z)$ es también continuo en $z = 0$

$$\vec{H}^i(t, 0) + \vec{H}^r(t, 0) = \vec{H}^t(t, 0)$$

o bien

$$H^i - H^r = H^t$$

Además, para cada onda las magnitudes entre \vec{E} y \vec{H} están dadas por las impedancias intrínsecas del medio. En resumen, se debe resolver lo siguiente

$$E^i + E^r = E^t$$

$$H^i - H^r = H^t$$

$$\frac{E^i}{H^i} = \eta_1 = \frac{E^r}{H^r}$$

$$\frac{E^t}{H^t} = \eta_2$$

Utilizando la última junto a las dos primeras se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned} \frac{E^t}{H^t} &= \eta_2 = \frac{E^i + E^r}{H^i - H^r} \\ \eta_2 &= \frac{E^i + E^r}{\frac{1}{\eta_1}(E^i - E^r)} \\ \eta_2 &= \eta_1 \frac{E^i + E^r}{E^i - E^r} \rightarrow E^i(\eta_2 - \eta_1) = E^r(\eta_1 + \eta_2) \end{aligned}$$

Finalmente

$$\begin{aligned} E^r &= E^i \left(\frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_1 + \eta_2} \right) \\ E^t &= E^i \left(\frac{2\eta_2}{\eta_1 + \eta_2} \right) \\ H^r &= H^i \left(\frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_1 + \eta_2} \right) \\ H^t &= H^i \left(\frac{2\eta_1}{\eta_1 + \eta_2} \right) \end{aligned}$$

Es inmediato que si $\eta_1 = \eta_2$, entonces $\vec{E}^r = 0$, $\vec{H}^r = 0$, lo cual es evidente pues en este caso no existe ninguna interfaz. Recordar que la impedancia de un medio está dada en general por

$$\eta = \sqrt{\frac{iw\mu}{\sigma + iw\epsilon_0}}$$

Para un buen conductor

$$\eta \approx \sqrt{\frac{w\mu}{\sigma}} e^{i\pi/4}$$

Para un medio dieléctrico perfecto (conductividad nula)

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

Para el espacio vacío

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi$$

16.1.1. Incidencia Normal en un conductor perfecto: Ondas estacionarias

Un caso particular interesante de la ley de reflexión y transmisión en una interfaz para ondas que inciden normalmente es cuando el medio 2 es un conductor perfecto. En este medio, la impedancia intrínseca tiende a cero

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \eta_2 = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{iw\mu}{\sigma + iw\epsilon_0}} = 0$$

Luego, se cumple

$$\begin{aligned} E^r &= E^i \left(\frac{-\eta_1}{\eta_1} \right) = -E^i \\ E^t &= 0 \\ H^r &= H^i \left(\frac{-\eta_1}{\eta_1} \right) = -H^i \\ H^t &= 0 \end{aligned}$$

Es decir, la onda es **completamente reflejada**. Veremos que esta condición da origen a la creación de una onda estacionaria. El campo eléctrico total queda

$$\vec{E}(t, z) = \vec{E}^i(t, z) + \vec{E}^r(t, z)$$

$$\vec{E}(t, z) = E^i e^{-ikz} e^{iwt} \hat{i} - E^i e^{ikz} e^{iwt} \hat{i}$$

$$\vec{E}(t, z) = E^i e^{iwt} \hat{i} (e^{-ikz} - e^{ikz})$$

Si el medio 1 es un dieléctrico perfecto, entonces $k = \beta$ ($\alpha = 0$)

$$\vec{E}(t, z) = E^i e^{iwt} \hat{i} (e^{-i\beta z} - e^{i\beta z}) = -2i \sin(\beta z) E^i e^{iwt} \hat{i}$$

Tomando la parte real

$$\vec{E}(t, z) = 2E^i \sin(\beta z) \sin(wt) \hat{i}$$

Esta es una onda que se anula para valores determinados de z ($\forall t$), dados por

$$z = \frac{n\pi}{\beta} = \frac{wn\pi}{c} = \frac{fn}{2\lambda f}$$

$$z = \frac{n}{2\lambda}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

donde λ es la longitud de onda en el medio 1. Por otra parte, el campo eléctrico se anula para todo t tal que

$$\sin wt = 0 \rightarrow t = \frac{n\pi}{w}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Esta onda es llamada **estacionaria** puesto que no se propaga, sino que simplemente oscila en el espacio y el tiempo.

Para el campo magnético se tiene

$$\vec{H}(t, z) = \vec{H}^i(t, z) + \vec{H}^r(t, z)$$

$$\vec{H}(t, z) = H^i e^{-i\beta z} e^{iwt} \hat{j} + H^i e^{i\beta z} e^{iwt} \hat{j}$$

$$\vec{H}(t, z) = H^i e^{iwt} \hat{j} (e^{-i\beta z} + e^{i\beta z}) = 2H^i e^{iwt} \cos(\beta z) \hat{j}$$

tomando la parte real

$$\vec{H}(t, z) = 2H^i \cos(\beta z) \cos wt \hat{j}$$

Se anula para

$$\beta z = \frac{\pi}{2} + n\pi \rightarrow z = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{\beta}$$

$$z = \left(\frac{n}{2} + \frac{1}{4}\right) \lambda, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Además, se aprecia que se anula para todo t tal que

$$\cos wt = 0$$

Se aprecia que para ondas estacionarias, el campo eléctrico y magnético están en un desfase de $\pi/2$

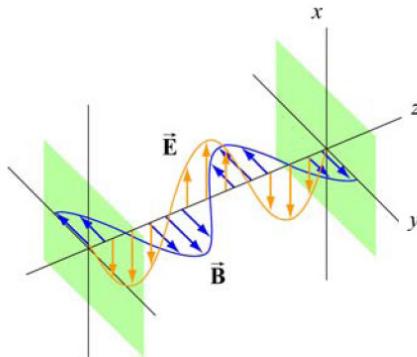
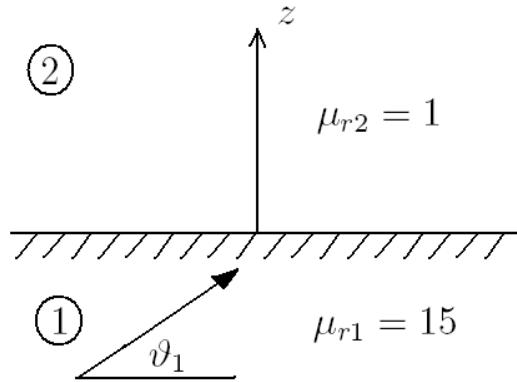


Fig. 16.1: Ondas estacionarias se pueden lograr al confinar ondas electromagnéticas entre dos planos perfectamente conductores

Problema

En la región 1 de la figura, $\vec{B}_1 = 1,2\hat{i} + 0,8\hat{j} + 0,4\hat{k}$ (T). Encuentre \vec{H}_2 (\vec{H} en $z = +0$) y los ángulos entre los campos y una tangente a la superficie



Solución

Se tiene

$$\vec{B}_1 = 1,2\hat{i} + 0,8\hat{j} + 0,4\hat{k}$$

la componente normal del campo magnético a una superficie es siempre continua, es decir

$$\vec{B}_1 \cdot \hat{z} = \vec{B}_2 \cdot \hat{z}$$

se desprende que el campo magnético en $z = 0+$ es de la forma

$$\vec{B}_2 = B_{2x}\hat{i} + B_{2y}\hat{j} + 0,4\hat{k}$$

Además, en la región 1 la permeabilidad está dada por

$$\mu_1 = \mu_{r1}\mu_0 = 15\mu_0$$

de forma que el campo \vec{H} en $z = 0-$ es

$$\vec{H}_1 = \frac{1}{15\mu_0}\vec{B}_1 = \frac{1}{15\mu_0}(1,2\hat{i} + 0,8\hat{j} + 0,4\hat{k})$$

La componente tangencial de \vec{H} es continua al atravesar una superficie **sin** densidad de carga superficial. Suponiendo que éste es el caso, el campo \vec{H} en $z = 0+$ es de la forma

$$\vec{H}_2 = \frac{1}{15\mu_0}(1,2\hat{i} + 0,8\hat{j}) + H_{2z}\hat{k}$$

En resumen

$$\vec{B}_2 = B_{2x}\hat{i} + B_{2y}\hat{j} + 0,4\hat{k}$$

$$\vec{H}_2 = \frac{1}{15\mu_0}(1,2\hat{i} + 0,8\hat{j}) + H_{2z}\hat{k}$$

Además

$$\vec{H}_2 = \frac{1}{\mu_2}\vec{B}_2 = \frac{1}{\mu_0}\vec{B}_2$$

luego

$$B_{2x} = \mu_0 H_{2x} = \frac{1,2}{15}$$

$$B_{2y} = \mu_0 H_{2y} = \frac{0,8}{15}$$

$$B_{2z} = \mu_0 H_{2z} = 0,4 \rightarrow H_{2z} = \frac{0,4}{\mu_0}$$

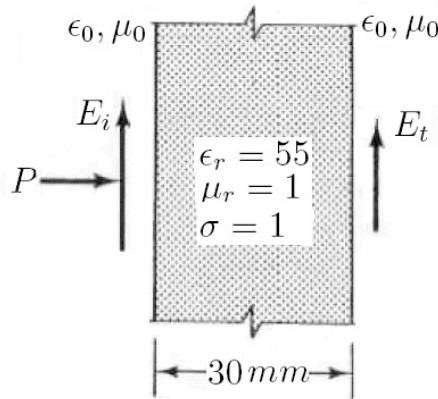
Finalmente

$$\vec{H}_2 = \frac{1}{15\mu_0} (1,2\hat{i} + 0,8\hat{j}) + \frac{0,4}{\mu_0} \hat{k}$$

Problema

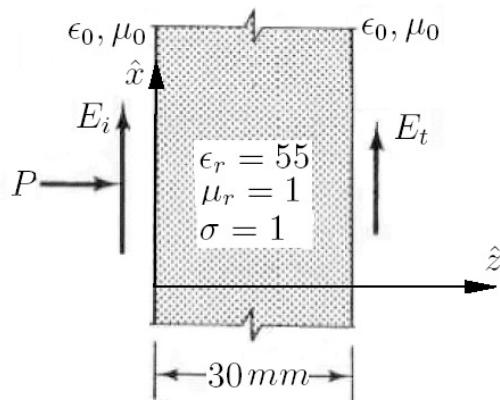
Un campo \vec{E} de 500 Mhz viaja por el espacio libre e incide perpendicularmente sobre un medio parcialmente conductor como se ilustra en la figura. Si la amplitud del campo incidente es $E_{i0} = 100 \text{ V/m}$, determine

- Las amplitudes de las ondas una vez atravesado completamente el medio (E_{t0}, H_{t0})
- La potencia temporal que porta la onda incidente
- La potencia temporal que porta la onda transmitida nuevamente al espacio



Solución

Definimos el eje \hat{z} como se indica en la figura, donde el origen coincide con el extremo izquierdo del medio parcialmente conductor



La onda incidente está descrita por

$$\vec{E}_i = E_{i0} e^{i(5 \times 10^8 t - \beta z)} \hat{i}, z < 0$$

donde la constante de propagación en el vacío está dada por

$$\beta = \frac{w}{c} = 5 \times 10^8 \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$$

Al incidir normalmente sobre el medio conductor, parte de la onda se refleja, y otra es transmitida hacia el medio. Si E_{m0} es la amplitud de la onda transmitida en la interfaz ($z = 0$), entonces se cumple

$$E_{m0} = E_{i0} \left(\frac{2\eta_m}{\eta_0 + \eta_m} \right)$$

donde η_m es la impedancia intrínseca del medio conductor

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{iw\mu}{\sigma + iw\epsilon}} = \sqrt{\frac{i5 \times 10^8 \mu_0}{1 + i5 \times 10^8 55\epsilon_0}}$$

$$\eta_2 = 44,5594 + i13,2865$$

El que sea un número complejo implica que existirá un desfase entre la onda incidente y la onda transmitida al medio. η_0 es la impedancia intrínseca del vacío

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi$$

Así, para $E_{i0} = 100$

$$E_{m0} = 21,3182 + i5,63173i = 22,0495e^{i0,258274}$$

Con esto, la onda transmitida al medio parcialmente conductor está descrita por

$$\vec{E}_m(t, z) = E_{m0} e^{-\alpha_m z} e^{i(wt - \beta_m z)}, 0 < z < 30 \times 10^{-3}$$

$$\vec{E}_m(t, z) = 22,0495e^{-\alpha_m z} e^{i(5 \times 10^8 t - \beta_m z + 0,258274)}, 0 < z < 30 \times 10^{-3}$$

donde la constante de atenuación (α_m) en este medio está dada por

$$\alpha_m = w \sqrt{\left(\frac{\mu\epsilon}{2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{w\epsilon} \right)^2} - 1 \right) \right.}$$

$$\alpha_m = 5 \times 10^8 \sqrt{\left(\frac{\mu_0 55\epsilon_0}{2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{1}{5 \times 10^8 55\epsilon_0} \right)^2} - 1 \right) \right)} = 24,26005$$

Así

$$\vec{E}_m(t, z) = 22,0495e^{-24,26005z} e^{i(5 \times 10^8 t - \beta_m z + 0,258274)}, 0 < z < 30 \times 10^{-3}$$

La magnitud del campo en $z = 30 \times 10^{-3}$ es

$$E_{mt} = 22,0495e^{-24,26005 \times 30 \times 10^{-3}} = 10,6491$$

Si E_{t0} es la amplitud del campo eléctrico transmitido nuevamente al vacío, se cumple

$$E_{t0} = E_{mt} \left| \left(\frac{2\eta_0}{\eta_0 + \eta_m} \right) \right| = 19,0375$$

la amplitud del campo \vec{H} se relaciona con la del campo eléctrico según

$$\frac{E_{t0}}{H_{t0}} = \eta_0$$

$$H_{t0} = \frac{\eta_0}{E_{t0}} = 0,0504984$$

b) El promedio temporal del vector Poynting de la onda incidente es

$$\left\langle \vec{S}_i \right\rangle = \frac{E_{i0}^2}{2c\mu_0} \hat{k} = 13,2629 \hat{k} (W/m^2)$$

c) Para la onda transmitida nuevamente al vacío

$$\left\langle \vec{S}_t \right\rangle = \frac{E_{t0}^2}{2c\mu_0} \hat{k} = 0,480681 \hat{k} (W/m^2)$$

Problema

Se requiere que Ud. haga una estimación de la intensidad de campo eléctrico, en V/m , que requeriría generar un radar de 2 Ghz de penetración de suelo, con el objeto de detectar piezas metálicas de gran tamaño, enterradas a una profundidad de hasta 2 metros. Dependiendo de la composición y la humedad del terreno, este puede tener el siguiente rango de parámetros

$$10^{-4} \leq \sigma \leq 10^{-2}$$

$$3 \leq \epsilon_{rt} \leq 8$$

$$\mu_{rt} = 1$$

Por otra parte se estima que las piezas enterradas tienen el siguiente rango de parámetros

$$10^7 \leq \sigma_m \leq 6 \times 10^7$$

$$1 \leq \mu_{rm} \leq 7000$$

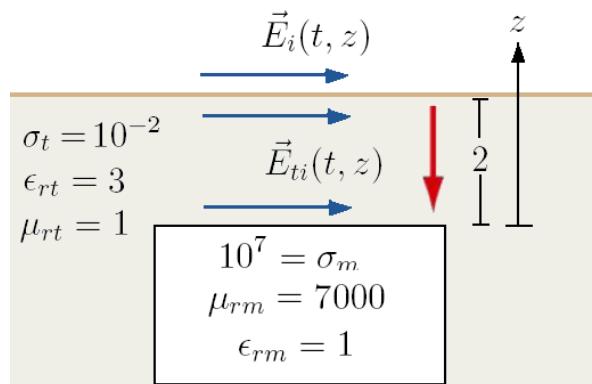
$$\epsilon_{rm} = 1$$

Se requiere saber que intensidad de campo eléctrico en V/m se requiere en el aire, sobre la superficie del terreno, para detectar en el aire sobre la superficie del terreno, un rebote del objeto metálico que tenga una amplitud de $1V/m$, asumiendo incidencia normal

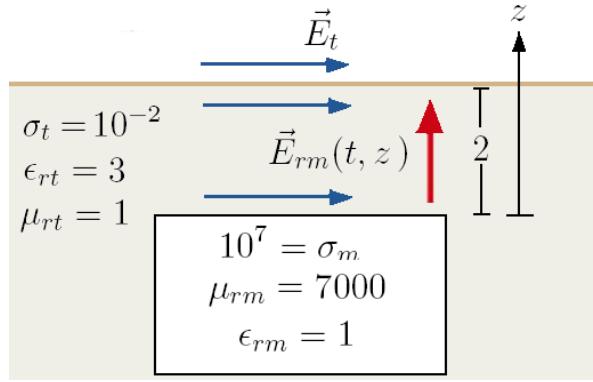
Solución

Para estimar la intensidad mínima de campo eléctrico que debe generar el radar, debemos suponer la peor situación posible. Supondremos que hay una pieza metálica situada a 2 m de profundidad en la tierra. El caso menos favorable para la propagación en la tierra es cuando ésta presenta su máxima conductividad (mayor atenuación). Más aún, para que ésta se comporte como un buen conductor (atenuante) debe tenerse $\sigma_t >> w\epsilon_t$, de forma que consideramos el caso de mayor conductividad y menor constante dieléctrica.

La reflexión en la placa metálica será buena en la medida que η_m (impedancia intrínseca del metal) sea lo más pequeña posible. De esta forma, el peor de los casos para la reflexión en la pieza metálica ocurre cuando η_m toma su máximo valor posible, y entonces cuando posee la menor conductividad y la mayor permeabilidad magnética.



En la figura de arriba se aprecia una onda incidente \vec{E}_i (campo emitido por el radar en la superficie), y una onda transmitida en la tierra \vec{E}_{ti} , que se propaga en dirección $-z$, esta onda será reflejada por la pieza metálica en $z = 0$



En esta figura se muestra el campo que se ha reflejado en el metal y se propaga hacia la superficie, que llamaremos \vec{E}_{rm} , y la onda recibida finalmente en la superficie, llamada \vec{E}_t . Sabemos que esta última tiene una magnitud de $E_t = 1$ (V/m). La magnitud de la onda reflejada en el metal se describe por

$$E_{rm}(z) = E_{r0}e^{-\alpha z}$$

donde α es el coeficiente de atenuación en la tierra

$$\alpha = w \sqrt{\left(\frac{\mu_t \epsilon_t}{2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma_t}{w \epsilon_t} \right)^2} - 1 \right) \right)}$$

con $w = 2 \times 10^9$ Hz, $\sigma_t = 10^{-2}$ (S/m), $\mu_t = 4\pi 10^{-7} = \mu_0$, $\epsilon_t = \epsilon_{rt} \epsilon_0 = 3 \times 8,854 \times 10^{-12}$.

Reemplazando estos valores

$$\alpha = 1,08742$$

Debido a las condiciones de contorno en la interfaz ($z = 2$), se cumple

$$E_t = 1 = E \left| \frac{2\eta_0}{\eta_0 + \eta_t} \right|$$

donde E es la magnitud del campo \vec{E}_{rm} en $z = 2$, y η_0 es la impedancia intrínseca del aire, considerada igual a la del vacío.

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi$$

y la impedancia intrínseca de la tierra

$$\eta_t = \sqrt{\frac{iw\mu_0}{\sigma_t + iw\epsilon_0\epsilon_{rt}}} = 217,434 + i3,2564$$

con esto se obtiene

$$E = \left| \frac{\eta_0 + \eta_t}{2\eta_0} \right| = 0,788393V/m$$

Además

$$E = E_{rm}(z = 2) = E_{r0}e^{-\alpha 2} = E_{r0}e^{-1,08742 \times 2}$$

de donde la magnitud de la onda reflejada en el metal en $z = 0$ es

$$E_{r0} = E e^{1,08742 \times 2} = 6,93842V/m$$

Ahora, esta onda reflejada en el metal proviene de la onda \vec{E}_{ti} que fue transmitida a la tierra. La magnitud de esta última se puede expresar como

$$E_{ti} = E_0 e^{\alpha z}$$

donde E_0 (magnitud en $z = 0$) está relacionada con E_{r0} mediante

$$E_{r0} = E_0 \left| \frac{\eta_m - \eta_t}{\eta_m + \eta_t} \right|$$

donde la impedancia intrínseca de la pieza de metal es

$$\eta_m = \sqrt{\frac{iw\mu_0\mu_m}{\sigma_m + iw\epsilon_0\epsilon_m}}$$

con $w = 2 \times 10^9$ Hz, $\sigma_m = 10^7$ (S/m), $\mu_m = 700$, $\epsilon_m = 1$ resulta

$$\eta_m = 2,35095 + i2,35095$$

Notar que es un complejo con fase $\pi/4$, que es lo que se obtiene para un buen conductor. Con todo esto

$$E_0 = E_{r0} \left| \frac{\eta_m + \eta_t}{\eta_m - \eta_t} \right| = 7,09235$$

Justo en $z = 2$, la magnitud de la onda transmitida a la tierra es

$$E_{ti}(2) = E_0 e^{\alpha z} = 7,09235 e^{1,08742 \times 2} = 62,4177 V/m$$

Si E_i es la magnitud de la onda que emite el radar en la superficie, entonces se cumple

$$E_{ti}(2) = E_i \left| \frac{2\eta_t}{\eta_t + \eta_0} \right|$$

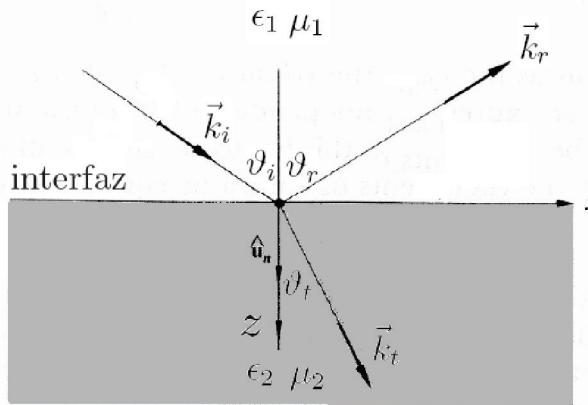
$$E_i = 62,4177 \left| \frac{\eta_t + \eta_0}{2\eta_t} \right|$$

$$E_i = 85,3109$$

Es decir, se requiere emitir un campo de magnitud aproximadamente $E_i = 85,3$ (V/m)

16.2. Reflexión y Refracción en la frontera de dos medios dieléctricos. Incidencia Oblicua

Un caso más general que el discutido en la sección de incidencia normal es el de la reflexión y refracción de una onda plana que incide oblicuamente por el plano de una zona interfacial de un dieléctrico. La situación está descrita por la siguiente figura



El sistema de coordenadas que utilizaremos se ilustra en la figura. Los medios sobre y bajo el plano $z = 0$ están caracterizados por permitividades y permeabilidades $\{\epsilon_1, \mu_1\}$ y $\{\epsilon_2, \mu_2\}$ respectivamente. Una onda plana con vector de onda \vec{k}_i y frecuencia w incide desde el medio 1. La onda refractada y reflejada tienen vectores de onda \vec{k}_t y \vec{k}_r , respectivamente, y \hat{u}_n es un vector unitario normal dirigido desde el medio 1 al medio 2. (En el dibujo, concide con la dirección z). La onda incidente está descrita por

$$\vec{E}_i(t, \vec{x}) = \vec{E}_0 e^{i(wt - \vec{k}_i \cdot \vec{x})}$$

$$\vec{H}_i(t, \vec{x}) = \frac{1}{\eta_1} \left(\frac{\vec{k}_i \times \vec{E}_i}{\beta_1} \right)$$

donde \vec{k}_i es la dirección de propagación de la onda incidente, cuya magnitud es $k_i = \beta_1 = \frac{w}{c_1} = \sqrt{\mu_1 \epsilon_1} w$. Además \vec{E}_0 debe tener una dirección perpendicular a \vec{k}_i (las ondas electromagnéticas son transversales). Para la onda refractada

$$\vec{E}_t(t, \vec{x}) = \vec{E}_t e^{i(wt - \vec{k}_t \cdot \vec{x})}$$

$$\vec{H}_t(t, \vec{x}) = \frac{1}{\eta_2} \left(\frac{\vec{k}_t \times \vec{E}_t}{\beta_2} \right)$$

con $k_t = \beta_2 = \frac{w}{c_2} = \sqrt{\epsilon_2 \mu_2} w$. Por último, la onda reflejada está descrita por

$$\vec{E}_r(t, \vec{x}) = \vec{E}_0 e^{i(wt - \vec{k}_r \cdot \vec{x})}$$

$$\vec{H}_r(t, \vec{x}) = \frac{1}{\eta_1} \left(\frac{\vec{k}_r \times \vec{E}_r}{\beta_1} \right)$$

notar que la magnitud del vector de onda reflejada es igual al de la incidente, $k_r = \beta_1$.

La existencia de condiciones de borde en la interfaz $z = 0$, que se deben satisfacer para todos los puntos en el plano en todo instante, implica que la variación espacial (y temporal) de

los campos debe ser la misma en $z = 0$. De esta forma, las ondas reflejadas y refractadas deben tener la misma frecuencia w que la incidente si las condiciones en la frontera se satisfacen para todo t . Además, debe tenerse que las 3 ondas deben tener la misma fase en $z = 0$

$$(\vec{k}_i \cdot \vec{x}) \Big|_{z=0} = (\vec{k}_t \cdot \vec{x}) \Big|_{z=0} = (\vec{k}_r \cdot \vec{x}) \Big|_{z=0}$$

De aquí se aprecia que los tres vectores de onda deben permanecer en un plano, llamado **plano de incidencia**. En la figura, corresponde al plano $x - z$. Esta condición se puede reescribir en términos de los ángulos de incidencia ϑ_i , de reflexión ϑ_r y de refracción ϑ_t . Notar que ningún vector de onda tiene componente según j , luego

$$(\vec{k}_i \cdot \vec{x}) = (k_{ix}x + k_{iz}z) \Big|_{z=0} = k_{ix}x = k_i \sin \vartheta_i x$$

análogo para el resto, así

$$k_i \sin \vartheta_i x = k_r \sin \vartheta_r x = k_t \sin \vartheta_t x$$

$$k_i \sin \vartheta_i = k_r \sin \vartheta_r = k_t \sin \vartheta_t$$

Como $k_i = k_r$, se obtiene que el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión

$$\sin \vartheta_i = \sin \vartheta_r$$

Además, se obtiene la **ley de Snell**

$$k_i \sin \vartheta_i = k_t \sin \vartheta_t$$

$$\frac{\sin \vartheta_i}{\sin \vartheta_t} = \frac{k_t}{k_i} = \sqrt{\frac{\epsilon_2 \mu_2}{\epsilon_1 \mu_1}}$$

$$\frac{\sin \vartheta_i}{\sin \vartheta_t} = \sqrt{\frac{\epsilon_2 \mu_2}{\epsilon_1 \mu_1}} = \frac{c_1}{c_2}$$

16.2.1. Polarización paralela y perpendicular

$$\vartheta_i, \vartheta_r, \vartheta_t$$

$$\vec{k}_i, \vec{k}_r, \vec{k}_t$$

$$\vec{E}_i, \vec{H}_i, \vec{E}_r, \vec{H}_r, \vec{E}_t, \vec{H}_t$$