



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN
IIC1253 - MATEMÁTICAS DISCRETAS

Tarea 1

23 de Agosto 2023

2º semestre 2023 - Profesores G. Diéguez - S. Bugedo - N. Alvarado - B. Barías

Diego Pérez - 22203583

Problema 1

- (a) Sea $P(n) = 2! \cdot 4! \cdot \dots \cdot (2n)!$ y $Q(n) = ((n+1)!)^n$. Usaremos principio de inducción para demostrar $P(n) \geq Q(n)$ para todo $n \geq 1$.

CB: Sea $n = 1$, este n cumple ya que $P(1) = Q(1) = 2$.

HI: Supongamos que $n \in \mathbb{N}$ satisface $P(n) \geq Q(n)$.

TI: Se tiene:

$$P(n+1) = P(n) \cdot (2n+2)! \stackrel{HI}{\geq} Q(n) \cdot (2n+2)! = Q(n) \cdot (n+1)! \prod_{k=n+2}^{2n+2} k \geq Q(n) \cdot (n+1)! \cdot (n+2)^{n+1}$$

Donde el último término es $Q(n+1)$ ya que

$$Q(n) \cdot (n+1)! \cdot (n+2)^{n+1} = ((n+1)!)^{n+1} \cdot (n+2)^{n+1} = ((n+2)!)^{n+1} = Q(n+1)$$

Se concluye por inducción lo pedido. ■

- (b) Nuevamente usaremos inducción.

CB: Tomamos $n = 0$ y $n = 1$, que claramente cumplen ya que $s_0 = 5^0 - 1$ y $s_1 = 5^1 - 1$.

HI: Supongamos que $n \in \mathbb{N}$ satisface $s_n = 5^n - 1$ y $s_{n-1} = 5^{n-1} - 1$.

TI: se tiene:

$$s_{n+1} = 6s_n - 5s_{n-1} = 6 \cdot 5^n - 6 - 5 \cdot 5^{n-1} + 5 = 5^{n+1} - 1$$

Por lo que $n+1$ también cumple la propiedad pedida. Se concluye por inducción. ■

Problema 2

Usaremos inducción estructural

CB: Tomamos el árbol \bullet . Este elemento cumple lo pedido ya que $|\bullet| = 1 \leq 2^{0+1} - 1 = 2^{h(\bullet)+1} - 1$

HI: Supongamos que los árboles t_1 y t_2 satisfacen $|t_1| \leq 2^{1+h(t_1)} - 1$ y $|t_2| \leq 2^{1+h(t_2)} - 1$

TI: Para poder concluir por inducción, basta demostrar que la desigualdad del enunciado se satisface para $t = \bullet(t_1, t_2)$. Digamos sin pérdida de generalidad que $h(t_1) \geq h(t_2)$, por lo que $h(t) = 1 + h(t_1)$. Tenemos:

$$|t| = 1 + |t_1| + |t_2| \stackrel{HI}{\leq} 2^{h(t_1)+1} + 2^{h(t_2)+1} - 1 \leq 2 \cdot 2^{h(t_1)+1} - 1 = 2^{h(t)+1} - 1$$

Por lo que la desigualdad pedida se cumple para el árbol t . Concluimos por inducción estructural. ■