Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

Temporada Académica e Verano (enero 2021)

Interrogación 1 - Pauta

Pregunta 1: *Algebra de eventos*

Sean A y B dos eventos posibles contenidos en un mismo espacio muestral y se realiza la siguiente operación:

$$[\bar{A} \cup (A \cap B)] \cap [\bar{B} \cup (A \cap B)] \cap (\overline{A \cap B})$$

la cual es igual a:

Solución

Tenemos que

$$\begin{aligned} [\bar{A} \cup (A \cap B)] &= (\bar{A} \cup A) \cap (\bar{A} \cup B) = S \cap (\bar{A} \cup B) = (\bar{A} \cup B) \\ [\bar{B} \cup (A \cap B)] &= (\bar{B} \cup A) \cap (\bar{B} \cup B) = (\bar{B} \cup A) \cap S = (\bar{B} \cup A) \end{aligned}$$

Por De Morgan

$$(\bar{A} \cup B) \cap (\bar{B} \cup A) \cap (\overline{A \cap B}) = \overline{(A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \cup (A \cap B)} = \overline{A \cup B}$$

Pregunta 2: *Axiomas de probabilidad*

Para las siguientes afirmaciones en el casillero responda $\vee$ (verdadero) o F (falso):

- Si $P(A) = 1$ y $P(A \cap B) = 0$, entonces $P(B) = 0$.
- Si $P(A \cap B) = 0$, entonces necesariamente A y B son eventos disjuntos.
- Si $P(A) + P(B) = 1$, entonces necesariamente $P(A \cup B) = 1$.
- Si $P(A) = P(B) = 1$, entonces necesariamente $P(A \cap B) = 1$.

Solución

- Si $P(A) = 1$ y $P(A \cap B) = 0$, entonces $P(B) = 0$. (VERDADERO)

  Por axioma 1:
  $$P(B) \geq 0. \tag{1}$$
  Por ley aditiva y axioma 2:
  $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq 1 \to P(B) \leq 0. \tag{2}$$
  Por lo tanto, por (1) y (2) se tiene que $P(B) = 0$.

- Si $P(A \cap B) = 0$, entonces necesariamente A y B son eventos disjuntos. (FALSO)

  Consideremos una variable aleatoria $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ como la vista en clases y defina los siguientes eventos
  $$A = \{X \leq 3\} \quad \text{y} \quad B = \{X \geq 3\}$$
  Luego
  $$A \cap B = \{X = 3\} \neq \phi$$
  pero
  $$P(A \cap B) = P(X = 3) = \int_3^3 f_X(x)\,dx = 0$$
  Por lo tanto, no necesariamente los eventos son disjuntos.

- Si $P(A) + P(B) = 1$, entonces necesariamente $P(A \cup B) = 1$. (FALSO)
  Tomemos como referencia el ejemplo de clases que consistía en al lanzar una moneda honesta dos veces:
  $$A = \{cc,\, cs\} \quad \text{y} \quad B = \{cc,\, sc\} \to A \cup B = \{cc,\, cs,\, sc\}.$$
  Al aplicar medida de probabilidad se tiene que
  $$P(A) = 1/2, \quad P(B) = 1/2, \quad P(A \cup B) = 3/4 \neq 1 = P(A) + P(B).$$
  Por lo tanto, no necesariamente la suma es 1.

- Si $P(A) = P(B) = 1$, entonces necesariamente $P(A \cap B) = 1$. (VERDADERO)

  Por ley aditiva y axioma 2:
  $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq 1 \to P(A \cap B) \geq 1 \tag{3}$$
  Por axioma 2:
  $$P(A \cap B) \leq 1 \tag{4}$$
  Por lo tanto, por (3) y (4) se tiene que $P(A \cap B) = 1$.

Pregunta 3: *Conteo*

Para los adultos mayores y personas fármaco dependientes, los pastilleros semanales pueden ser un gran apoyo y solución para organizar su medicación de manera sencilla y práctica, permitiendo evitar lagunas y errores en la medicación. Suponga que una persona el día domingo prepara el pastillero semanal ingresando en cada día las tres pastillas distintas que debe tomar en la noche antes de dormir, hoy viernes durante la mañana se le soltó el pastillero de las manos y al caer las pastillas quedaron repartidas en el suelo. Al recogerlas, como eran del mismo tamaño y color, no se podía distinguir entre ella, así que tomo tres al azar y las dejo en el casillero del viernes, otras tres en el del sábado y las últimas tres en el casillero del domingo. ¿Cuál es la probabilidad que hoy no tenga errores en su medicación?

Solución

Definamos A al evento en que al asignar las pastillas al azar en el pastillero, hoy la medicación será correcta.

Casos totales:

Tenemos $\# S = \binom{9}{3}$ maneras de escoger tres pastillas para meter en el casillero viernes.

Casos favorables:

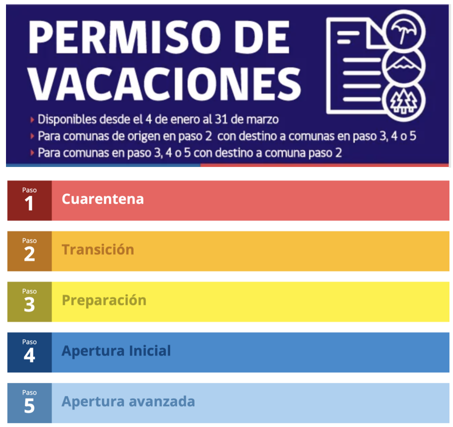
Tenemos $\# A = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3$ combinaciones que implican una medicación correcta hoy viernes.

Por lo tanto

$$P(A) = \frac{\# A}{\# S} = \frac{3^3}{\binom{9}{3}} = 0.3214286$$

Pregunta 4: *Independencia*

Si usted ha decidido ir de vacaciones y al revisar la página del Ministerio de Salud se entera de los siguiente:



¿Cuál es la probabilidad que un adulto que decide salir de vacaciones, deba pedir permiso? Asuma que la probabilidad que una comuna se encuentre en cualquiera de estos pasos es 1/5 y esta es independiente al paso en que se encuentren el resto de las comunas.

Solución

Definamos A_i el paso en que se encuentra la comuna de origen, con $i = 1, 2, \ldots, 5$, y B_j el paso en que se encuentra la comuna de destino, $j = 1, 2, \ldots, 5$.

El evento D pedir permiso solo ocurre

$$D = (A_2 \cap B_3) \cup (A_2 \cap B_4) \cup (A_2 \cap B_5) \cup (A_3 \cap B_2) \cup (A_4 \cap B_2) \cup (A_5 \cap B_2)$$

Por axioma 3 e independencia se tiene que

$$P(D) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{6}{25} = 0.24$$

Pregunta 5: *Probabilidades totales*

Suponga que al 15 de enero, en Chile se ha inoculado con la primera dosis al personal médico con vacunas contra el covid19 de dos orígenes: Pfizer (Bélgica) y AstraZeneca (Inglaterra), 75 % y 25 % respectivamente.

En un centro de salud, el profesional a cargo del proceso de vacunación, reciben 6 frascos de AstraZeneca y 3 frascos de Pfizer, a los cuales les quita la etiqueta (es decir, ya no se sabe cuál es cuál). Si estos 9 frascos son utilizados para la aplicación de la segunda dosis. Determine la probabilidad que, sin consultar que tipo de dosis recibió inicialmente, a un profesional médico le apliquen correctamente la 2da dosis.

Solución

Definamos los eventos:

A: 1ra dosis Pfizer.
B: 2da dosis Pfizer.
D: 2da dosis correcta.

Se pide

$$P(D) = P[(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})]$$

Por teorema de probabilidades totales se tiene que

$$P(D) = P(B \,|\, A)\, P(A) + P(\overline{B} \,|\, \overline{A})\, P(\overline{A}) = \frac{3}{9} \cdot 0.75 + \frac{6}{9} \cdot = 0.25 = 0.4166667$$

Pregunta 6: *Teorema de Bayes*

La versión TAV de este curso ha sido dividida en tres secciones de 40, 40 y 36 alumnos, y el porcentaje de alumnos que hacen el curso por 1ra vez es de 40 %, 60 % y 70 % para las secciones 1, 2 y 3 respectivamente.

Si un alumno envía un mail comentando que el curso lo está haciendo por 1ra vez, ¿cuál es la probabilidad que pertenezca a la sección 2?

Solución

Definamos como A_i si el alumno pertenece a la i-ésima sección y B si está haciendo el curso por 1ra vez. Del enunciado se tiene que

$$P(A_1) = \frac{40}{116}, \quad P(A_2) = \frac{40}{116}, \quad P(A_3) = \frac{36}{116}$$

y

$$P(B \mid A_1) = 0.4, \quad P(B \mid A_2) = 0.6, \quad P(B \mid A_3) = 0.7$$

Se pide

$$P(A_2 \mid B) = \frac{P(B \mid A_2)\, P(A_2)}{P(B \mid A_1)\, P(A_1) + P(B \mid A_2)\, P(A_2) + P(B \mid A_3)\, P(A_3)} = 0.3680982$$

Pregunta 7: *Función de densidad*

Considere la siguiente función de probabilidad acumulada de una variable aleatoria:

$$F_X(x) = 1 - \left(1 - x^2\right)^\alpha$$

con $\alpha > 0$ y $0 < x < 1$.

Evalúe para $x = [x]$ y $\alpha = [a]$ la función de riesgo definida como $h(x) = \dfrac{f_X(x)}{1 - F_X(x)}$.

Solución

Tenemos que

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) = 2\, x\, \alpha\, (1 - x^2)^{\alpha - 1}$$

y se pide

$$h(x) = \frac{2\, x\, \alpha\, (1 - x^2)^{\alpha - 1}}{\left(1 - x^2\right)^\alpha} = \frac{2\, x\, \alpha}{1 - x^2}$$

```
## Ejemplo
x = 0.17
a = 1.24
Fx = 1-(1-x^2)^a
fx = -a*(1-x^2)^(a-1) * (-2*x)
hx = fx/(1-Fx)
hx
[1] 0.4341468
```

Pregunta 8: *Moda*

Considere el siguiente modelo continuo con función de densidad dada por:

$$f_X(x) = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \exp\left[x\beta - \frac{1}{\alpha}\exp(x\beta)\right]$$

con $x \in \mathbb{R}, \alpha > 0$ y $\beta > 0$.

Evalúe la moda de este modelo cuando $\alpha =$ [`alpha`] y $\beta =$ [`beta`].

Solución

Se pide el valor de x cuando $f_X(x)' = 0$.

Tenemos que

$$f'_X(x) = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \exp\left[x\beta - \frac{1}{\alpha}\exp(x\beta)\right] \cdot \left(\beta - \frac{1}{\alpha}\exp(x\beta)\cdot\beta\right) = 0 \to x = \frac{\ln(\alpha)}{\beta}$$

Notar que

$$f''_X\left(\ln(\alpha)/\beta\right) = \beta \cdot e^{-1} \cdot 0^2 - \beta^2 \cdot e^{-1} < 0 \to \frac{\ln(\alpha)}{\beta} \text{ es máximo}$$

```
## Ejemplo
alpha = 5
beta = 3
moda = log(alpha)/beta
moda
moda
[1] 0.5364793
```

Pregunta 9: *Skewness*

Considere la siguiente función generadora de momentos de una variable aleatoria discreta:

$$M_X(t) = \left(1 + \beta - \beta\, e^t\right)^{-(\beta+1)}, \quad -\infty < t < \infty$$

Evalúe el coeficiente de asimetría cuando $\beta = $[`beta`].

Solución

Tenemos que

$$\begin{aligned}
M_X^{(1)}(t) &= (\beta+1)\,\left(1+\beta-\beta\,e^t\right)^{-(\beta+2)}\,(\beta\,e^t)\\
&\to M_X^{(1)}(0) = \beta\,(\beta+1) = \mathrm{E}(X)\\
M_X^{(2)}(t) &= (\beta+1)\,(\beta+2)\,\left(1+\beta-\beta\,e^t\right)^{-(\beta+3)}\,(\beta\,e^t)^2 + (\beta+1)\,\left(1+\beta-\beta\,e^t\right)^{-(\beta+2)}\,(\beta\,e^t)\\
&\to M_X^{(2)}(0) = \beta\,(\beta+1)\,(\beta^2+2\,\beta+1) = \mathrm{E}(X^2)\\
M_X^{(3)}(t) &= (\beta+1)\,(\beta+2)\,(\beta+3)\left(1+\beta-\beta\,e^t\right)^{-(\beta+4)}\,(\beta\,e^t)^3 + (\beta+1)\,(\beta+2)\,\left(1+\beta-\beta\,e^t\right)^{-(\beta+3)}\,2\,(\beta\,e^t)^2\\
&\quad + (\beta+1)\,(\beta+2)\,\left(1+\beta-\beta\,e^t\right)^{-(\beta+3)}\,(\beta\,e^t)^2 + (\beta+1)\,\left(1+\beta-\beta\,e^t\right)^{-(\beta+2)}\,(\beta\,e^t)\\
&\to M_X^{(3)}(0) = \beta^3\,(\beta+1)\,(\beta+2)\,(\beta+3) + 3\,\beta^2\,(\beta+1)\,(\beta+2) + \beta\,(\beta+1) = \mathrm{E}(X^3)
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\sigma_X^2 = \mathrm{E}(X^2) - \mu_X^2 = \beta\,(\beta+1)^2$$

y

$$\theta_X = \frac{\mathrm{E}(X^3) - 3\,\mu_X\,\mathrm{E}(X^2) + 2\,\mu_X^3}{\sigma_X^3} = \frac{1+2\,\beta}{(\beta+1)\,\sqrt{\beta}}$$

```
## Ejemplo
b = 9.8
m1 = b*(b+1)
m2 = b*(b+1)*(b^2+2*b+1)
m3 = b^3*(b+1)*(b+2)*(b+3)+3*b^2*(b+1)*(b+2)+b*(b+1)
(m3-3*m1*m2+2*m1^3)/(sqrt(m2-m1^2))^3
[1] 0.6092989
(1+2*b)/((b+1)*sqrt(b))
[1] 0.6092989
```

La encuesta nacional de salud nos permite cada cierto tiempo sacarle a una foto a Chile a nivel de salud. Esta encuesta considera a personas de 15 años o más localizadas en zonas urbanas y rurales de las quince regiones de Chile.

La base de datos `ENS.xlsx` contiene una sub-muestra aleatoria de 2.515 casos, de la encuesta realizada el año 2009 y un 2 % de las variables originales, a los cuales se les realizaron además del cuestionario, exámenes de laboratorio. En la base viene una 2da hoja con la descripción de las variables.

A continuación responda las siguientes tres preguntas:

Pregunta 10: *Weibull* (Ejemplo clase)

Para la variable PAS ajuste los parámetros de una distribución Weibull utilizando la mediana y el percentil 80 %. Calcule la probabilidad estimada que la PAS, de personas de 15 años o más, sea menor o igual a 150 mmHg.

Hint: Si $T \sim$ Weibull, entonces

$$F_T(t) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}\right], \quad f_T(t) = \frac{\beta}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1}\exp\left[-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}\right], \quad t > 0$$

Con $\beta > 0$, es un parámetro de forma y $\eta > 0$, es un parámetro de escala.

Si t_p es el percentil $p \times 100\,\%$, entonces

$$\ln(t_p) = \ln(\eta) + \frac{1}{\beta}\cdot\ln(-\ln(1-p))$$

Solución

```
library(readxl)
ENS = read_excel("ENS.xlsx")

X = ENS$PAS
x50 = median(X)
x80 = quantile(X, 0.80)
beta = (log(-log(1-0.50))-log(-log(1-0.80)))/(log(x50)-log(x80))
eta = exp(log(x50)-log(-log(1-0.50))/beta)
pweibull(150, shape = beta, scale = eta)
[1] 0.8615114
```

Pregunta 11: *Logistica* (Ejemplo clase)

Para la variable GLUBASAL ajuste los parámetros de una distribución Logistica utilizando la media y el percentil 90 %. Calcule la probabilidad estimada que el nivel de GLUBASAL sea mayor a 110 mg/dL.

Hint: Si $Y \sim$ Logística(μ, σ), se tiene que es el percentil $p \times 100\,\%$ es

$$y_p = \mu + \sigma\,\log\left(\frac{p}{1-p}\right)$$

La esperanza varianza están dadas por:

$$\mu_y = \mu \quad y \quad \sigma^2_Y = \frac{\sigma^2\,\pi^2}{3}$$

Nota: Durante la prueba se recordó que $\log = \ln$.

Solución

```
library(readxl)
ENS = read_excel("ENS.xlsx")

X = ENS$GLUBASAL
mu = mean(X)
x90 = quantile(X, 0.90)
sigma = (x90-mu)/log(0.9/(1-0.9))
1-plogis(110, location = mu, scale = sigma)
[1] 0.1134582
```

Pregunta 12: *Percentil + Mediana + R*

Para la variable PESO, se propone un modelo cuya función de densidad y función de probabilidad acumulada están dadas por las siguientes expresiones:

$$f_X(x) = \frac{\alpha\beta\,(e^{\alpha x}-1)^{\beta-1}\,e^{\alpha x}}{\left(1+(e^{\alpha x}-1)^{\beta}\right)^{2}}, \quad F_X(x) = \frac{(e^{\alpha x}-1)^{\beta}}{1+(e^{\alpha x}-1)^{\beta}}$$

con $x > 0$, $\alpha > 0$ y $\beta > 0$.

Utilizando la mediana y el percentil 75 %, estime los parámetros α y β, y luego calcule la probabilidad, según el modelo, de que el PESO de una persona de 15 o más años sea mayor a 80 kilos.

Solución

```
library(readxl)
ENS = read_excel("ENS.xlsx")

X = ENS$PESO
x50 = quantile(X, 0.50)
x75 = quantile(X, 0.75)
a = log(2)/x50
b = (log(exp(x75*a)-1)/log(0.75/0.25))^(-1)
x = 80
Fx = (exp(a*x)-1)^b/(1+(exp(a*x)-1)^b)
1-Fx
[1] 0.263804
```