Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

Primer Semestre 2019

Curso : **Probabilidad y Estadística**
Sigla : **EYP1113**
Profesores : **Ricardo Aravena C. (Sec 01 - Sec 03) y Ricardo Olea O (Sec 02 - Sec 04).**

Pauta Interrogación 2

Problema 1

Un problema que enfrentan los bancos es el prepago de créditos hipotecarios por parte de un cliente, ya que todo el interés comprometido X, el cliente no lo paga y solo cancela el capital adeudado. Un análisis a la cartera de clientes históricos, muestran que el interés comprometido, en UF, en la cuota t se comporta como una variable aleatoria Gamma$(k,\, 1/t)$. Por otra parte, se ha observado que los clientes prepagan todo el crédito en la cuota T, la cual se comporta como una variable aleatoria Binomial-Negativa$(r,\, \pi)$. Si $k = 10$, $r = 5$ y $\pi = 0{,}04$, ¿cuál es el coeficiente de variación del interés X que el banco deja de percibir por causa de los prepagos?

Solución

LOGRO 1: *Reconocer la distribución de $X \,|\, T = t$ y de T:*

$$\textbf{[0.5 Ptos]} \quad X \,|\, T = t \sim \text{Gamma}(k,\, 1/t) \qquad \text{y} \qquad T \sim \text{Binomial-Negativa}(r,\, \pi) \quad \textbf{[0.5 Ptos]}$$

LOGRO 2: *Aplicar teorema de esperanzas iteradas para obtener μ_x:*

$$\begin{aligned} \mu_X &= \text{E}[\text{E}(X \,|\, T)] = E(k\, T) \quad \textbf{[0.5 Ptos]} \\ &= k\, \text{E}(T) = \frac{k\, r}{\pi} \quad \textbf{[0.5 Ptos]} \end{aligned}$$

LOGRO 3: *Aplicar teorema de esperanzas iteradas para obtener σ_x^2 antes de aplicar $E(T^2)$ y $Var(T)$:*

$$\begin{aligned} \sigma_X^2 &= \text{Var}[\text{E}(X \,|\, T)] + \text{E}[\text{Var}(X \,|\, T)] = \text{Var}(k\, T) + \text{E}(k\, T^2) \quad \textbf{[0.5 Ptos]} \\ &= k^2\, \text{Var}(T) + k\, \text{E}(T^2) \quad \textbf{[0.5 Ptos]} \end{aligned}$$

LOGRO 4: *Evaluar $E(T^2)$ y $Var(T)$ y obtener σ_x^2:*

$$\sigma_X^2 = k^2 \cdot \frac{r\,(1-\pi)}{\pi^2} + k\left[\frac{r\,(1-\pi)}{\pi^2} + \frac{r^2}{\pi^2}\right] = \left(\frac{k\, r}{\pi}\right)^2 \left[\frac{1-\pi}{r} + \frac{1-\pi}{r\, k} + \frac{1}{k}\right] \quad \textbf{[1.0 Ptos]}$$

LOGRO 5: *Obtener expresión para δ_X:*

$$\delta_X = \sqrt{\frac{1-\pi}{r} + \frac{1-\pi}{r\, k} + \frac{1}{k}} \quad \textbf{[1.0 Ptos]}$$

LOGRO 6: *Reemplazar y entregar valor:*

$$\delta_X = 0{,}557853 \quad \textbf{[1.0 Ptos]}$$

+ 1 Punto Base

Problema 2

Los pedidos de reparación de cierta marca de máquinas industriales se reciben cada cierto número aleatorio de días. Sea X_1 el número de días ociosos, antes de que llegue el primer pedido. Para $j \geq 2$, sea X_j el número de días ociosos entre el $(j-1)$-ésimo y el j-ésimo pedido.

Suponga que las variables aleatorias X_j son independientes y que la función de probabilidad de X_j es

$$P(X_j = k) = \alpha^2 \beta^k + \beta^2 \alpha^k; \quad k = 0, 1, 2 \ldots$$

donde α y β son números positivos que satisfacen $\alpha + \beta = 1$. Encuentre la función generadora de momentos del número total de días ociosos Y que ocurren antes que llegue el r-ésimo pedido.

Solución

LOGRO 1: *Tener claro lo que se pide:*

Se pide $M_Y(t)$ para $Y = \sum_{j=1}^{r} X_j$. **[1.0 Ptos]**

LOGRO 2: *Aplicar independencia:*

Por independencia se tiene que

$$M_Y(t) = \prod_{j=1}^{r} M_{X_j}(t) \quad \textbf{[1.0 Ptos]}$$

LOGRO 3: *Obtener por definición y parcialmente $M_{X_j}(t)$:*

$$\begin{aligned} M_{X_j}(t) &= E\left(e^{t\,X_j}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{t\,k}\,(\alpha^2\,\beta^k + \beta^2\,\alpha^k) \quad \textbf{[1.0 Ptos]} \end{aligned}$$

LOGRO 4: *Aplicar suma geométrica para la obtención final de $M_{X_j}(t)$:*

$$\begin{aligned} M_{X_j}(t) &= \alpha^2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(e^t\,\beta\right)^k + \beta^2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(e^t\,\alpha\right)^k \\ &= \frac{\alpha^2}{1-\beta\,e^t} + \frac{\beta^2}{1-\alpha\,e^t}, \quad \textbf{[1.0 Ptos]} \end{aligned} \tag{1}$$

LOGRO 5: *Indicar para que valores de t la $M_{X_j}(t)$ está definida:*

(1) está definida para $t < -\ln(\alpha)$ y $t < -\ln(\beta)$. **[1.0 Ptos]**

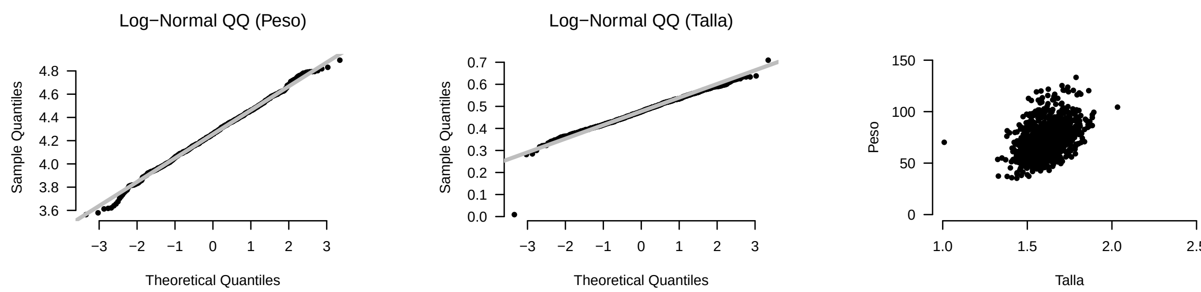
LOGRO 6: *Reemplazar y entregar $M_Y(t)$:*

$$M_Y(t) = \left[\frac{\alpha^2}{1-\beta\,e^t} + \frac{\beta^2}{1-\alpha\,e^t}\right]^r \quad \textbf{[1.0 Ptos]}$$

+ 1 Punto Base

Problema 3

La encuesta nacional de salud 2016 reportó entre muchos resultados el comportamiento empírico del Peso (X) y Talla (Y) de los chilenos mayores a 15 años. La siguiente figura muestra los gráficos de probabilidad Log-Normal de estas variables y el gráfico de dispersión que ilustra el grado de asociación y relación entre ellas.



La recta de los gráficos de probabilidad y su coeficiente de correlación se presentan a continuación:

```
Log-Normal QQ:
      Intercepto   Pendiente
Peso  4.25758992 0.207991495
Talla 0.47676953 0.059772032

cor(log(Peso), log(Talla))
0.43403869
```

El índice de masa corporal se construye como el cociente entre Peso y Talla al cuadrado:

$$\text{IMC} = \frac{\text{Peso}}{\text{Talla}^2}.$$

(a) **[2.0 Ptos.]** Obtenga el coeficiente de variación exacto del IMC.

(b) **[2.0 Ptos.]** Obtenga el coeficiente de variación aproximado del IMC.

(c) **[2.0 Ptos.]** ¿Qué porcentaje de la población presenta un IMC mayor a 30?

Solución

(a) **LOGRO 1**: *Reconocer parámetros Log-Normal para Peso y Talla:*

Tenemos que

$$X \sim \text{Log-Normal}(4{,}25758992;\ 0{,}207991495) \quad \textbf{[0.5 Ptos]}$$

e

$$Y \sim \text{Log-Normal}(0{,}47676953;\ 0{,}059772032) \quad \textbf{[0.5 Ptos]}$$

LOGRO 2: *Reconocer distribución exacta IMC y obtener δ_{IMC}:*

$\text{IMC} \sim \text{Log-Normal}(\lambda, \zeta)$

$$\lambda = 4{,}25758992 - 2 \times 0{,}47676953 = 3{,}304051$$

$$\zeta = \sqrt{0{,}207991495^2 + 2^2 \times 0{,}059772032^2 - 2 \times 2 \times 0{,}43403869 \times 0{,}207991495 \times 0{,}059772032} = 0{,}1896503$$

[0.5 Ptos]

Luego

$$\delta_{\text{IMC}} = \sqrt{e^{\zeta^2} - 1} = 0{,}1913684 \quad \textbf{[0.5 Ptos]}$$

(b) **LOGRO 3**: *Obtener μ_{IMC} aproximado de 1er orden:*

$$\mu_{\text{IMC}} \approx \frac{\mu_X}{\mu_Y^2} = \frac{e^{4{,}25758992+0{,}207991495^2/2}}{e^{2\times 0{,}47676953+0{,}059772032^2}} = 27{,}71873 \quad \textbf{[1.0 Ptos]}$$

LOGRO 4: *Obtener σ^2_{IMC} aproximado de 1er orden y calcular δ_{IMC}:*

$$\sigma^2_{\text{IMC}} \approx \sigma_X^2 \left(\frac{1}{\mu_Y^2}\right)^2 + \sigma_Y^2 \left(-\frac{2\,\mu_X}{\mu_Y^3}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{\mu_Y^2}\right)\left(-\frac{2\,\mu_X}{\mu_Y^3}\right) \times 0{,}43403869 \times \sigma_X \times \sigma_Y = 28{,}18774 \quad \textbf{[0.5 Ptos]}$$

ya que

$$\sigma_X^2 = \mu_X^2\,(e^{\zeta_X^2} - 1) = 230{,}3575 \qquad \text{y} \qquad \sigma_Y^2 = \mu_Y^2\,(e^{\zeta_Y^2} - 1) = 0{,}009320526$$

Luego

$$\delta_{\text{IMC}} = \frac{\sigma_{\text{IMC}}}{\mu_{\text{IMC}}} = 0{,}1915388 \quad \textbf{[0.5 Ptos]}$$

(c) **LOGRO 5**: *Escribir probabilidad solicitada en términos de $\Phi(\cdot)$:*

$$P(IMC > 30) = 1 - \Phi\left(\frac{\ln(30) - \lambda}{\zeta}\right) \quad \textbf{[1.0 Ptos]}$$

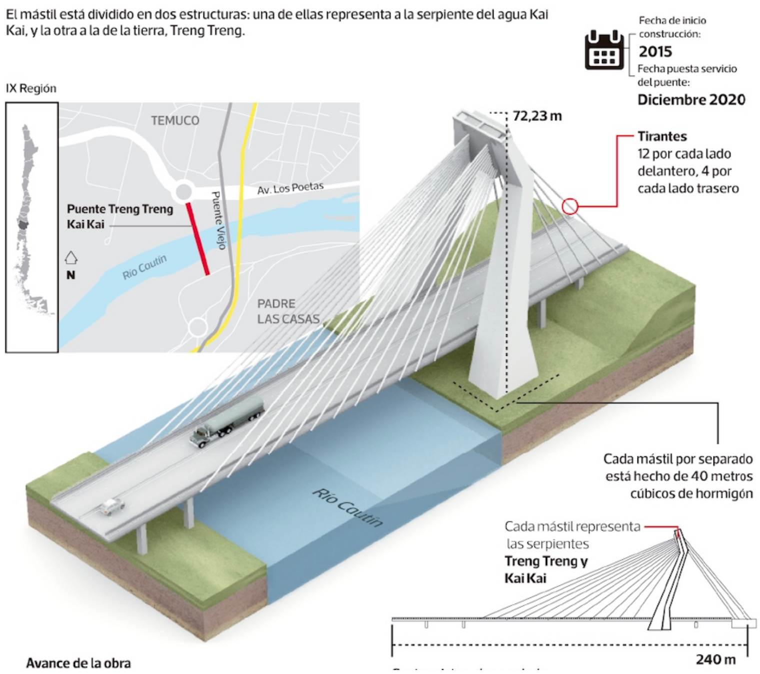
LOGRO 6: *Utilizar correctamente tabla Normal(0,1) y responder lo solicitado:*

$$P(IMC > 30) \approx 1 - \Phi(0{,}51) = 1 - 0{,}6950 \to 30{,}5\,\% \quad \textbf{[1.0 Ptos]}$$

+ 1 Punto Base

Problema 4

A fines del 2020 en el sur de Chile se espera inaugurar el puente atirantado “Treng Treng - Kai Kai”, ver figura.



La resistencia a la tracción (X) y la tenacidad (Y) del mástil, estandarizadas, pueden ser modeladas por medio de la siguiente función de densidad conjunta

$$f_{X,Y}(x,y) = k\,x\,y^2,$$

para $0 < x < y < 1$.

(a) **[2.0 Ptos.]** Obtenga el valor de la constante k.

(b) **[2.0 Ptos.]** Determine la distribución de la tenacidad condicionada a la tracción.

(c) **[2.0 Ptos.]** Determine la covarianza entre la tracción y tenacidad.

Solución

(a) **LOGRO 1**: *Tener claro como obtener k:*

Para obtener k se requiere que se cumpla la siguiente igualdad

$$\int_0^1 \int_0^y k\,x\,y^2\,dx\,dy = 1 \quad \textbf{[1.0 Ptos]}$$

LOGRO 2: *Obtener k:*

$$\int_0^1 \int_0^y k\,x\,y^2\,dx\,dy = \frac{k}{10} \to k = 10 \quad \textbf{[1.0 Ptos]}$$

(b) **LOGRO 3**: *Aplicando Teorema de Probabilidades Totales, obtener f_X:*

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_x^1 10\,x\,y^2\,dy \quad \textbf{[0.5 Ptos]} \\ &= \frac{10}{3}\,x\,(1 - x^3), \quad 0 < x < 1 \quad \textbf{[0.5 Ptos]} \end{aligned}$$

LOGRO 4: *Obtener por definición* $f_{Y \mid X=x}(y)$*:*

$$f_{Y \mid X=x}(y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{3\,y^2}{(1-x^3)}, \quad x < y < 1 \quad \textbf{[1.0 Ptos]}$$

(c) **LOGRO 5**: *Obtener* $E(X)$ *y* $E(Y)$*:*

$$\mathrm{E}(X) = \int_0^1 x \cdot \frac{10}{3}\,x\,(1-x^3)\,dx = \frac{5}{9} \quad \textbf{[0.5 Ptos]}$$

$$\mathrm{E}(Y) = \int_0^1 \int_0^y y \cdot 10\,x\,y^2\,dx\,dy = \frac{5}{6} \quad \textbf{[0.5 Ptos]}$$

LOGRO 6: *Obtener* $E(X\,Y)$ *y* $Cov(X,Y)$*:*

$$\mathrm{E}(X\,Y) = \int_0^1 \int_0^y x\,y \cdot 10\,x\,y^2\,dx\,dy = \frac{10}{21} \quad \textbf{[0.5 Ptos]}$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}(X\,Y) - \mathrm{E}(X) \cdot \mathrm{E}(Y) = 0{,}013227513 \quad \textbf{[0.5 Ptos]}$$

+ 1 Punto Base