Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

# Tarea 4

18 de Octubre 2023

2º semestre 2023 - Profesores G. Diéguez - S. Bugedo - N. Alvarado - B. Barías

Diego Pérez - 22203583

## Problema 1

Sea $R_3 = R_1 \cup R_2$ y $R_4 = R_1 \circ R_2$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Suponemos que $R_3$ es relación de equivalencia. Tenemos que demostrar 2 cosas:

- $R_3 \subseteq R_4$. Sea $(x, y) \in R_3$ y particularmente (y sin pérdida de generalidad) se tiene $(x, y) \in R_1$ (ya que $(x, y)$ debe estar en $R_1$ o en $R_2$). Como $R_2$ es refleja, $(y, y) \in R_2$, luego, $xR_1y$ y $yR_2y$, entonces $xR_1 \circ R_2y$, por lo que $(x, y) \in R_4$. Como esto se cumple para todo elemento de $R_3$, tenemos $R_3 \subseteq R_4$.
- $R_4 \subseteq R_3$. Sea $(x, y) \in R_4$. Por definición de $R_4$, existe un $z \in A$ que cumple $(x, z) \in R_1$ y $(z, y) \in R_2$, entonces por definición de $R_3$, $(x, z) \in R_3$ y $(z, y) \in R_3$. Como $R_3$ es transitiva (supuesto), entonces $(x, y) \in R_3$. Como esto se cumple para todo elemento de $R_4$, tenemos $R_4 \subseteq R_3$.

De donde obtenemos $R_3 = R_4$, como queríamos.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supongamos que $R_3 = R_4$. Como $R_1$ es refleja, entonces $\{(a, a)|a \in A\} \subseteq R_1 \subseteq R_3$, por lo que $R_3$ es refleja. Además, notar que si $(x, y) \in R_3$, entonces $(x, y) \in R_1$ o $(x, y) \in R_2$, digamos (sin pérdida de generalidad) que $(x, y) \in R_1$. Como $R_1$ es simétrica, $(y, x) \in R_1 \subseteq R_3$, por lo que $R_3$ es simétrica . Sean $(x, y)$ y $(y, z)$ dos elementos cualquiera de $R_3$. Digamos que sin pérdida de generalidad, $(x, y) \in R_1$. Tenemos 2 casos:

- $(y, z) \in R_1$. Como $R_1$ es transitiva, entonces $(x, z) \in R_1$, por lo que $(x, z) \in R_3$
- $(y, z) \notin R_1$. Como $(y, z) \in R_3$, entonces necesariamente $(y, z) \in R_2$. Tenemos $xR_1y$ y $yR_2z$, por lo que $(x, z) \in R_4$. Como $R_3 = R_4$, entonces $(x, z) \in R_3$.

En todo caso, $(x, z) \in R_3$, por lo que $R_3$ es transitiva. Se demostró que $R_3$ es refleja, simétrica y transitiva, por lo que es una relación de equivalencia.

# Problema 2

1. a) Supongamos que $f(a) = f(b)$ para algunos $a, b \in A$. Para demostrar inyectividad, basta demostrar que $a = b$. Supongamos por contradicción que $a \neq b$ y sin pérdida de generalidad, que $a > b$. Como $f$ es creciente, entonces $f(a) > f(b)$, pero habiamos asumido $f(a) = f(b)$, contradicción. Concluimos por contradicción que $a = b$ y por lo tanto, que $f$ es inyectiva.

   b) Respuesta: **es inyectiva**

   Por (a), tanto $f$ como $g$ son inyectivas. Supongamos que $g(f(a)) = g(f(b))$ para algunos $a, b \in A$. Nuevamente, basta demostrar que $a = b$. Como $g$ es inyectiva, entonces $f(a) = f(b)$ y como $f$ también lo es, entonces $a = b$. Concluimos entonces que $g \circ f$ es inyectiva.

2. Dado $f \in A^{B \cup C}$, definimos $B(f) = \{b \,|\, b : B \mapsto A, b(x) = f(x) \text{ para todo } x \in B\}$, o en otras palabras, $B(f)$ es el conjunto de todas las funciones $b$ de $B$ a $A$ tales que $b$ mapea los elementos de $B$ de igual forma que lo hace $f$. Similarmente, definimos $C(f) = \{c \,|\, c : C \mapsto A, c(x) = f(x) \text{ para todo } x \in C\}$.

   **Proposición:** Los conjuntos $B(f)$ y $C(f)$ tienen un solo elemento.

   **Demostración:** Claramente $B(f)$ es no vacio. Dados $b_1, b_2 \in B(f)$, tenemos que $b_1(x) = f(x) = b_2(x)$ para todo $x \in B$. Como el dominio de los $b_1$ y $b_2$ es $B$, deducimos $b_1 = b_2$ (2 funciones con igual dominio que lo mapean a la misma imagen). Sigue que $|B(f)| = 1$ y similarmente, $|C(f)| = 1$. ■

   Denotamos $B(f) = \{b(f)\}$ y $C(f) = \{c(f)\}$. Definimos $T : A^{B \cup C} \mapsto A^B \times A^C$ que satisface $T(f) = (b(f), c(f))$ para todo $f \in A^{B \cup C}$.

   **Proposición:** $T$ es una biyección.

   **Demostración:** En primer lugar, $T$ es función total por la proposición anterior, por lo que solo basta demostrar que es sobre e inyectiva.

   - **Sobre:** Sea $p = (b, c) \in A^B \times A^C$. Definimos $f : A^{B \cup C} \mapsto A^B \times A^C$ como

     $$f(x) = \begin{cases} b(x) & \text{si } x \in B \\ c(x) & \text{si } x \in C \end{cases}$$

     Para todo $x \in B \cup C$. Como $B$ y $C$ no tienen elementos en común, $f$ es una función que cumple $T(f) = p$, por lo que dicho $p$ tiene una preimagen en $T$. Como esto se cumple para todo $p$, se concluye que $T$ es sobre

   - **Inyectiva:** Supongamos que $T(f) = T(f') = (b, c)$. Notar que por construcción, $f(b) = f'(b)$ y $f(c) = f'(c)$ para todo $b \in B, c \in C$. Como el dominio de tanto $f$ como $f'$ es $B \cup C$, se concluye $f = f'$, por lo que $T$ es inyectiva.

Como existe una biyección ($T$) entre $A^{B\cup C}$ y $A^B \times A^C$, se concluye $A^{B\cup C} \approx A^B \times A^C$.
$\blacksquare$