Introduction à la recherche opérationnelle et à l'optimisation combinatoire

Cours RO202

Zacharie Ales
(zacharie.ales@ensta.fr)

Adapté de cours de Marie-Christine Costa, Alain Faye et Sourour Elloumi

Créé le 21/01/2018
Modifié le 18/12/2024 (v7)

Sommaire

Recherche opérationnelle

Définition 1 [Wikipedia]

Ensemble des méthodes et techniques rationnelles orientées vers la recherche du **meilleur choix**

Recherche opérationnelle

Définition 1 [Wikipedia]

Ensemble des méthodes et techniques rationnelles orientées vers la recherche du **meilleur choix**

Définition 2

Mettre au point des méthodes, les implémenter au sein d'outils (logiciels) pour trouver des résultats ensuite confrontés à la réalité

Et repris jusqu'à satisfaction du demandeur

Discipline au carrefour entre

- Mathématiques
- Économie
- Informatique

- Par nature en prise directe avec l'industrie

Problème d'optimisation combinatoire

Définition - Problème d'optimisation combinatoire

Maximiser ou Minimiser une fonction objectif tout en respectant un ensemble de contraintes

Problème d'optimisation combinatoire

Définition - **Problème d'optimisation combinatoire**

Maximiser ou Minimiser une fonction objectif tout en respectant un ensemble de contraintes

Caractéristiques

- 1 problème → grand nombre de solutions
- 1 solution → 1 valeur

↑ Mais pas infini

Problème d'optimisation combinatoire

Définition - **Problème d'optimisation combinatoire**

Maximiser ou Minimiser une fonction objectif tout en respectant un ensemble de contraintes

Caractéristiques

- 1 problème → grand nombre de solutions
- 1 solution → 1 valeur

↑ Mais pas infini

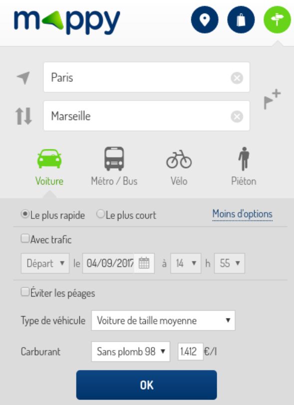
Problème discret

Recherche d'une solution optimale entière

Les variables sont généralement dans $\{0, 1\}$, $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$

Sommaire

Premier exemple : cheminer



Paris

Marseille

● Le plus rapide ○ Le plus court Moins d'options

☐ Avec trafic

Départ le 04/09/2017 à 14 h 55

☐ Éviter les péages

Type de véhicule Voiture de taille moyenne

Carburant Sans plomb 98 1,412 €/l

Critères

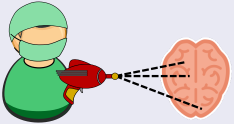
1. ....
2. ....
3. ....

Calcul du chemin minimisant un critère

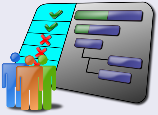
Solution trouvée facilement par un algorithme de graphes

Autres exemples

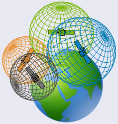
Curiethérapie



Ordonnancement



Positionnement de capteurs



Gestion de ressources

- Gestion des stocks
- Transport et logistique
- Router, relier
- ...

Entreprises très concernées par la RO

bouygues TELECOM

HUAWEI

SNCF

Artelys

eDF

AIR LIQUIDE

TOTAL

LocalSolver

AIR FRANCE

Microsoft

EURODECISION ALGORITHMS FOR BUSINESS

orange™

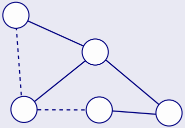
engie

IBM

Programme

Optimisation dans les graphes

Chapitre 1

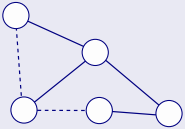


1.1 - Arbre couvrant

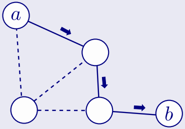
Programme

Optimisation dans les graphes

Chapitre 1



1.1 - Arbre couvrant

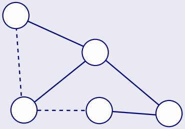


1.2 - Chemin

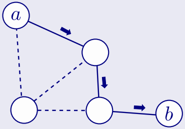
Programme

Optimisation dans les graphes

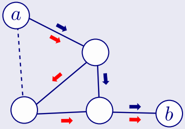
Chapitre 1



1.1 - Arbre couvrant



1.2 - Chemin

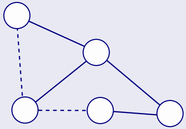


1.3 - Flot

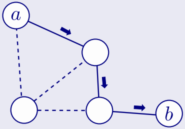
Programme

Optimisation dans les graphes

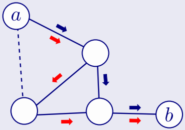
Chapitre 1



1.1 - Arbre couvrant



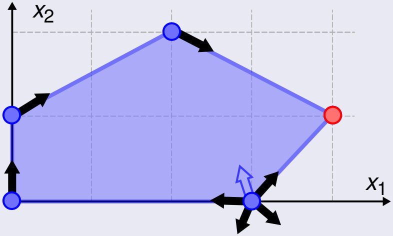
1.2 - Chemin



1.3 - Flot

Programmation linéaire (PL)

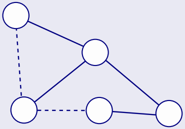
Chapitre 2



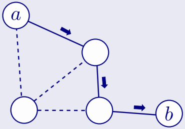
Programme

Optimisation dans les graphes

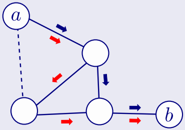
Chapitre 1



1.1 - Arbre couvrant



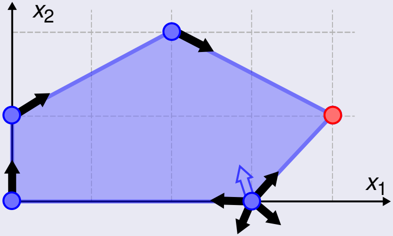
1.2 - Chemin



1.3 - Flot

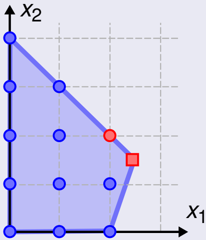
Programmation linéaire (PL)

Chapitre 2



PL en nombres entiers

Chapitre 3



Sommaire

Sommaire

Qu'est-ce qu'un graphe ?

"Des points et des traits ou des flèches"

Point de vue mathématique

Une relation binaire

Point de vue pratique

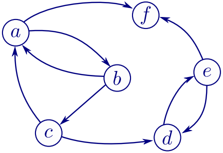
Représentation abstraite d'un réseau

Ex : réseau de télécommunication

Permet de

- Visualiser des échanges
- Modéliser des systèmes réels
- Jouer

  Voir cours Jeux, Graphes et RO (RO203)
- ...



Domaines variés

- Économie
- Informatique
- Industrie
- Chimie
- Sociologie
- ...

Graphes orientés

Notation - **Graphe orienté**

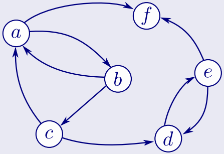
$$G = (V, A)$$

Ensemble de sommets ↑ ↑ Ensemble d'arcs $\subseteq V \times V$

Exemple

- $V = \{a, b, c, d, e, f\}$
- $A = \{(ab), (ba), (bc), (ca), (cd), (af), \ldots\}$

Aussi noté : (a, b)



Vocabulaire

Extrémité initiale

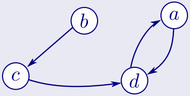
Soit $h = (ab) \in A$

Extrémité finale

- a et b sont adjacents ou voisins
- a est prédécesseur de b
- b est successeur de a

Définition - **Graphe simple**

Graphe ne possédant pas deux arcs ayant les même extrémités initiales et terminales



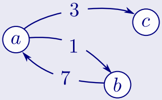
Définition - **Multigraphe**

Graphe non simple

Définition - **Graphe valué**

Graphe dont les arcs portent une valuation

Distance, coût, gain, ...



Prédécesseurs et successeurs

Définition - **Successeur d'un sommet**

$$\delta(v) = \{\text{successeurs du sommet v}\}$$

$\uparrow$ $V \mapsto P(V)$ (aussi noté δ^+)

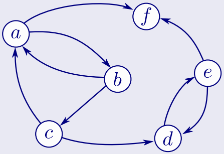
Définition - **Prédécesseur d'un sommet**

$$\delta^{-1}(v) = \{\text{prédécesseurs du sommet v}\}$$

$\uparrow$ Aussi noté δ^-

Exemple

- $\delta(b) =$ ......
- $\delta(f) =$.
- $\delta^{-1}(b) =$ ...
- $\delta^{-1}(d) =$ ......



Chemin et circuit

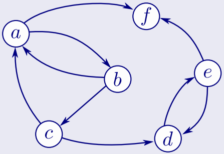
Définition - **Chemin**

Suite d'arcs telle que l'extrémité terminale d'un arc coïncide avec l'extrémité initiale de l'arc suivant

- chemin **simple** : pas deux fois le même arc
- chemin **élémentaire** : pas deux fois le même sommet

Exemple

- Chemin :
    - . . . .
    - . . . .



Chemin et circuit

Définition - **Chemin**

Suite d'arcs telle que l'extrémité terminale d'un arc coïncide avec l'extrémité initiale de l'arc suivant

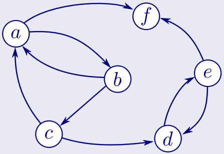
- chemin **simple** : pas deux fois le même arc
- chemin **élémentaire** : pas deux fois le même sommet

Définition - **Circuit**

Chemin dont les deux extrémités coïncident

Exemple

- Chemin :
  - . . . .
  - . . . .
- Circuit :
  - . . . .
  - . . . .



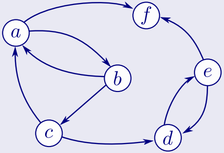
Racine, degrés

Définition - Racine

Sommet r tel qu' . . . .

Exemples

- Racine : . .



Racine, degrés

Définition - **Racine**

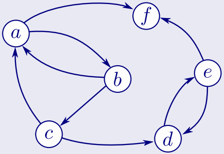
Sommet r tel qu' ....

Définition - **Degré intérieur** (resp. **extérieur**) d'un sommet x

Nombre d'arcs dont x est l'extrémité terminale (noté $d^-(x)$)

resp. initiale ↑ ↑ resp. $d^+(x)$

Exemples



- Racine : . .
- $d^-(a) =$., $d^-(f) =$.
- $d^+(a) =$., $d^+(b) =$.,
  $d^+(f) =$.

Graphes non orientés

Définition - **Arête**

Arc "sans orientation"

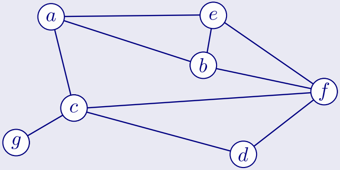
Notation - **Graphe non orienté**

$$G = (V, E)$$

Ensemble de sommets ↲ ↳ Ensemble d'arêtes

Exemple

- $V =$ ....
- $E =$ ....

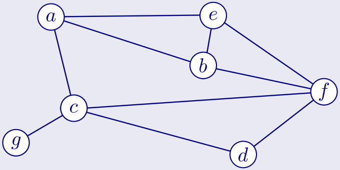


Définition - **Chaîne**

Séquence d'arêtes $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ telle qu'il existe une séquence de sommets $\{v_1, v_2, ..., v_{n+1}\}$ vérifiant $[v_i v_{i+1}] = e_i$

Exemple

- Chaîne : ....

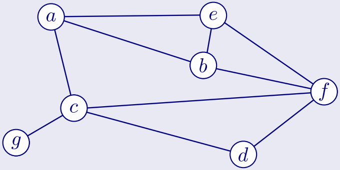


Définition - **Voisinage**

Les sommets x et y sont dits voisins si $[xy] \in E$

Exemple

- b est voisin de ……



Définition - **Voisinage**

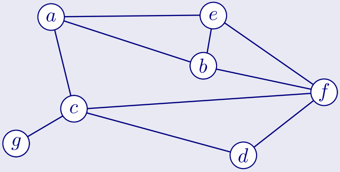
Les sommets x et y sont dits voisins si $[xy] \in E$

Notation - $N(x)$

$N(x) = \{\text{voisins de } x\}$

Exemple

- b est voisin de ......
- $N(c) =$ ....



Définition - **Voisinage**

Les sommets x et y sont dits voisins si $[xy] \in E$

Notation - $N(x)$

$N(x) = \{\text{voisins de } x\}$

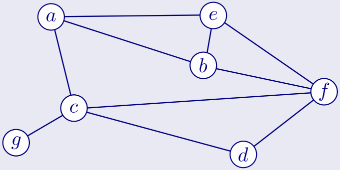
Définition - **Degré**

$d(x) = |N(x)|$

↑ Nombre d'arêtes adjacentes à x

Exemple

- b est voisin de ......
- $N(c) =$ ....
- $d(b) =$.
- $d(c) =$.



Cycle élémentaire

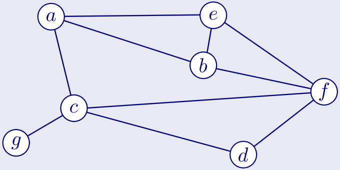
Définition - **Cycle** (élémentaire)

Chaîne dont les deux extrémités coïncident

(et qui ne passe pas 2 fois par le même sommet)

Exemple

- Cycle : ....



Définition - **Cycle Hamiltonien**

Cycle élémentaire passant par tous les sommets

Hypothèses pour la suite

- Les graphes sont simples

  ↳ Une seule arête ou un seul arc entre deux sommets
- Les cycles sont élémentaires
- Les graphes sont sans boucle

  Pas d'arête ou d'arc (x,x)

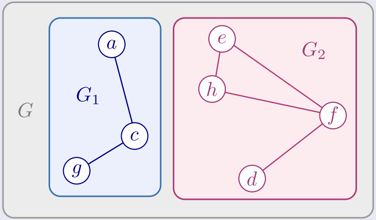
Définition - **Relation de connexité $\mathcal{R}$**

Soit x et y deux sommets d'un graphe $G = (V, E)$

- $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x$ et y sont reliés par une chaîne

Exemple

- $a\mathcal{R}g$
- G_1 et G_2 ....
- G ....



Définition - **Relation de connexité $\mathcal{R}$**

Soit x et y deux sommets d'un graphe $G = (V, E)$

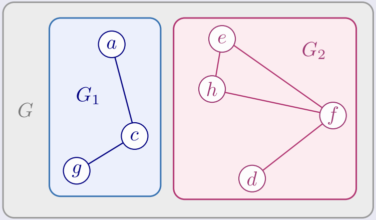
- $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x$ et y sont reliés par une chaîne

Définition - **Composante connexe**

$\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence dont les classes d'équivalences sont appelées **composantes connexes**

Exemple

- $a\mathcal{R}g$
- G_1 et G_2 ....
- G ....



Définition - **Relation de connexité $\mathcal{R}$**

Soit x et y deux sommets d'un graphe $G = (V, E)$

- $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x$ et y sont reliés par une chaîne

Définition - **Composante connexe**

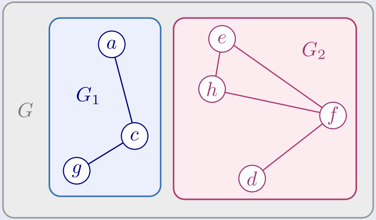
$\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence dont les classes d'équivalences sont appelées **composantes connexes**

Définition - **Graphe connexe $G = (V, A)$**

G ne possède qu'une unique composante connexe

Exemple

- $a\mathcal{R}g$
- G_1 et G_2 ....
- G ....



Arbre

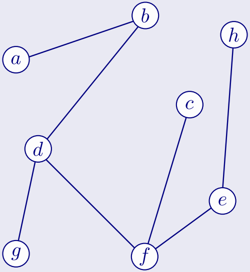
Définition - **Arbre**

Graphe ....et ....

Définition - **Forêt**

Graphe ....

Exemple



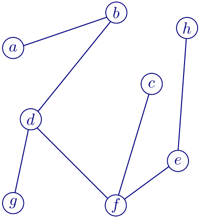
Théorème

Soit $G = (V, E)$ un graphe

$n \geq 2$

Il y a équivalence entre les propriétés suivantes

1. G est connexe sans cycle (*i.e.*, G est un arbre)
2. G est connexe minimal (*i.e.*, retirer une arête rend G non connexe)
3. G ne contient aucun circuit et possède $n - 1$ arêtes
4. G est sans cycle maximal (*i.e.*, ajouter une arête forme un cycle)
5. G est sans cycle et possède $n - 1$ arcs
6. Tous couples de sommets de G est relié par un unique chemin



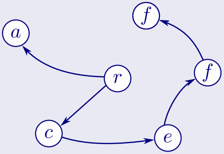
Graphes orientés - Arborescence

Définition - **Arborescence**

$G = (V, A)$ arbre possédant une racine r telle que

- r est reliée à tout $v \in V$ par un chemin unique

Exemple



Propriété

- $d^{-}(r) =$.
- $d^{-}(x) =$. pour tout $v \neq r$

arborescence = "arbre enraciné" = "arbre" en informatique

- arbre généalogique, tournois, arbre des espèces animales,...

Sommaire

Problème

Comment relier des objets en minimisant la longueur totale des liens ?

Problème

Comment relier des objets en minimisant la longueur totale des liens ?

Donnée - Graphe non orienté valué

$$G = (\overset{\text{Objets à relier}}{V}, \overset{\text{Liens possibles}}{E}, \underset{\text{Longueur du lien}}{p})$$

Problème

Comment relier des objets en minimisant la longueur totale des liens ?

Donnée - Graphe non orienté valué

Objets à relier Liens possibles

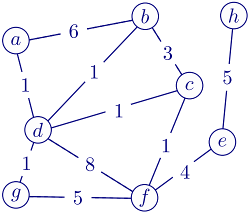
$$G = (V, E, p)$$

Longueur du lien

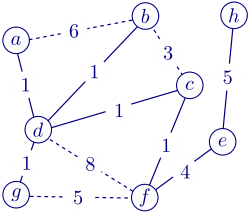
Formulation du problème

Sélectionner des arêtes d'un graphe orienté valué $G = (V, E, p)$ afin de former un arbre :

- couvrant chaque sommet et
- dont la somme des poids des arêtes est minimale



Graphe initial

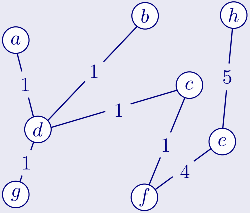


Une solution

Solution optimale - **Arbre couvrant de poids minimal**

- Arbre→ graphe sans cycle et connexe
- **Couvrant** → passant par tous les sommets
- Minimal → de longueur totale min

Exemple



Arbre couvrant de poids minimal

Comment obtenir un arbre couvrant de poids minimal ?

Algorithme de Kruskal

Données

poids $p : E \mapsto \mathbb{R}$

- $G = (V, E, p)$: graphe non orienté valué

Résultat

$E_2 \subseteq E$

- $H = (V, E_2)$: arbre couvrant de poids minimal de G

Algorithme de Kruskal

Données : $G = (V, E, p)$

Résultat : Arbre couvrant de poids minimal de G

```
$E_2 \leftarrow \emptyset$
$L \leftarrow$ Liste des arêtes de $E$ triées par ordre de poids croissant
pour $\underline{k \text{ allant de } 1 \text{ à } \overset{\text{Nombre de sommets du graphe}}{n} - 1}$ faire
    $w \leftarrow 1^{\text{ère}}$ arête de $L$ ne formant pas de cycle avec $E_2$
    $E_2 \leftarrow E_2 \cup \{w\}$
retourner $\underline{H = (V, E_2)}$
```

Complexité de l'algorithme

Complexité du tri $\mathcal{O}(\underset{\text{Nombre d'arêtes}}{m} \; log \; m)$

La détection de cycle peut se faire efficacement en associant un représentant à chaque composante connexe (structure de données Union-find)

Quelques notions de complexité

Complexité $\mathcal{O}(n)$ d'un algorithme $\mathcal{A}$

Dans le pire des cas, $\mathcal{A}$ s'exécute en un nombre d'étapes proportionnel à $n \in \mathbb{N}$

Quelques notions de complexité

Complexité $\mathcal{O}(n)$ d'un algorithme $\mathcal{A}$

Dans le pire des cas, $\mathcal{A}$ s'exécute en un nombre d'étapes proportionnel à $n \in \mathbb{N}$

Problème "facile" P (ou problème polynomial)

Polynomial par rapport à la taille des données d'entrée ↴

On connaît un algorithme résolvant P de complexité polynomiale

Ex : $\mathcal{O}(log\ n)$, $\mathcal{O}(n^2)$, $\mathcal{O}(n^{10} + 3n^2)$, ...

Quelques notions de complexité

Complexité $\mathcal{O}(n)$ d'un algorithme $\mathcal{A}$

Dans le pire des cas, $\mathcal{A}$ s'exécute en un nombre d'étapes proportionnel à $n \in \mathbb{N}$

Problème "facile" P (ou problème polynomial)

Polynomial par rapport à la taille des données d'entrée

On connaît un algorithme résolvant P de complexité polynomiale

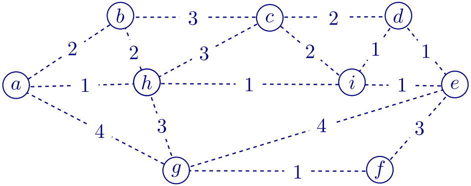
Ex : $\mathcal{O}(log~n)$, $\mathcal{O}(n^2)$, $\mathcal{O}(n^{10} + 3n^2)$, ...

Problème "difficile" P

On ne connaît aucun algorithme permettant de résoudre P en un nombre polynomial d'étapes

Ex : problème dont les seuls algorithmes connus sont de complexité $\mathcal{O}(e^n)$, $\mathcal{O}(n!)$

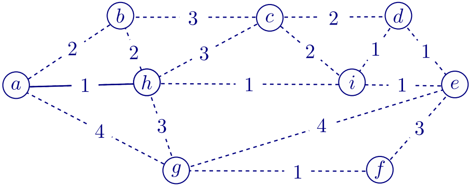
Algorithme de Kruskal - Exemple



Arête	*ah*	*de*	*di*	*ei*	*hi*	*fg*	*ab*	*bh*	*ci*	*cd*	*bc*	*ch*	*ef*	*gh*	*ag*	*ge*
Poids	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4
k																

- $n = 9 \rightarrow$ stop après 8 sélections

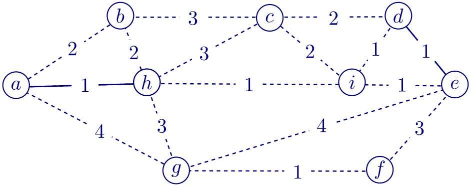
Algorithme de Kruskal - Exemple



Arête	*ah*	*de*	*di*	*ei*	*hi*	*fg*	*ab*	*bh*	*ci*	*cd*	*bc*	*ch*	*ef*	*gh*	*ag*	*ge*
Poids	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4
k	1															

- $n = 9 \rightarrow$ stop après 8 sélections

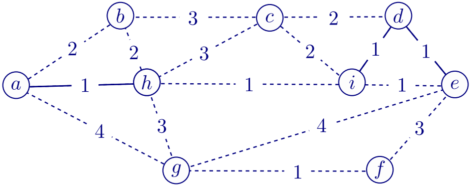
Algorithme de Kruskal - Exemple



Arête	*ah*	*de*	*di*	*ei*	*hi*	*fg*	*ab*	*bh*	*ci*	*cd*	*bc*	*ch*	*ef*	*gh*	*ag*	*ge*
Poids	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4
k	1	2														

- $n = 9 \rightarrow$ stop après 8 sélections

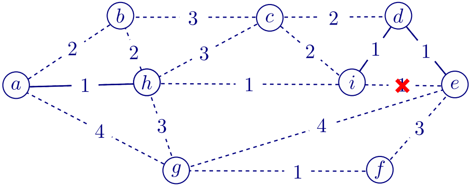
Algorithme de Kruskal - Exemple



Arête	*ah*	*de*	*di*	*ei*	*hi*	*fg*	*ab*	*bh*	*ci*	*cd*	*bc*	*ch*	*ef*	*gh*	*ag*	*ge*
Poids	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4
k	1	2	3													

- $n = 9 \rightarrow$ stop après 8 sélections

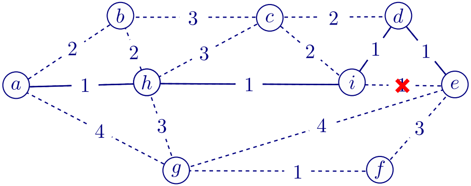
Algorithme de Kruskal - Exemple



Arête	*ah*	*de*	*di*	*ei*	*hi*	*fg*	*ab*	*bh*	*ci*	*cd*	*bc*	*ch*	*ef*	*gh*	*ag*	*ge*
Poids	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4
k	1	2	3	×												

- $n = 9 \rightarrow$ stop après 8 sélections

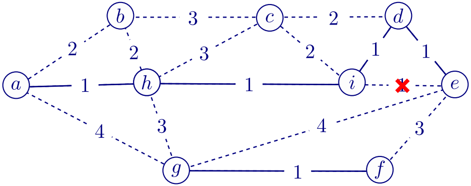
Algorithme de Kruskal - Exemple



Arête	*ah*	*de*	*di*	*ei*	*hi*	*fg*	*ab*	*bh*	*ci*	*cd*	*bc*	*ch*	*ef*	*gh*	*ag*	*ge*
Poids	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4
k	1	2	3	×	4											

- $n = 9 \rightarrow$ stop après 8 sélections

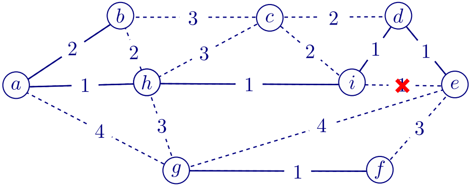
Algorithme de Kruskal - Exemple



Arête	*ah*	*de*	*di*	*ei*	*hi*	*fg*	*ab*	*bh*	*ci*	*cd*	*bc*	*ch*	*ef*	*gh*	*ag*	*ge*
Poids	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4
k	1	2	3	×	4	5										

- $n = 9 \rightarrow$ stop après 8 sélections

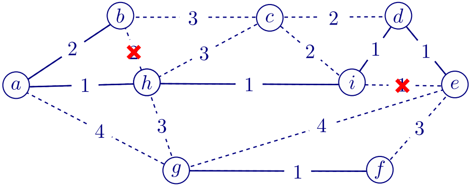
Algorithme de Kruskal - Exemple



Arête	*ah*	*de*	*di*	*ei*	*hi*	*fg*	*ab*	*bh*	*ci*	*cd*	*bc*	*ch*	*ef*	*gh*	*ag*	*ge*
Poids	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4
k	1	2	3	×	4	5	6									

- $n = 9 \rightarrow$ stop après 8 sélections

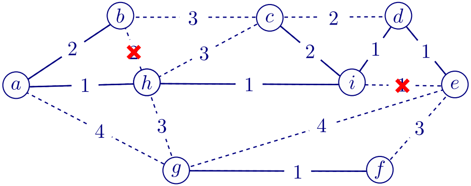
Algorithme de Kruskal - Exemple



Arête	*ah*	*de*	*di*	*ei*	*hi*	*fg*	*ab*	*bh*	*ci*	*cd*	*bc*	*ch*	*ef*	*gh*	*ag*	*ge*
Poids	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4
k	1	2	3	×	4	5	6	×								

- $n = 9 \rightarrow$ stop après 8 sélections

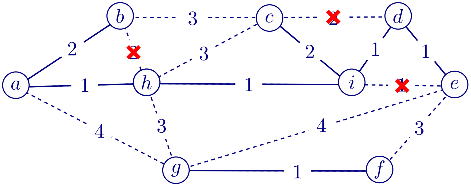
Algorithme de Kruskal - Exemple



Arête	*ah*	*de*	*di*	*ei*	*hi*	*fg*	*ab*	*bh*	*ci*	*cd*	*bc*	*ch*	*ef*	*gh*	*ag*	*ge*
Poids	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4
k	1	2	3	×	4	5	6	×	7							

- $n = 9 \rightarrow$ stop après 8 sélections

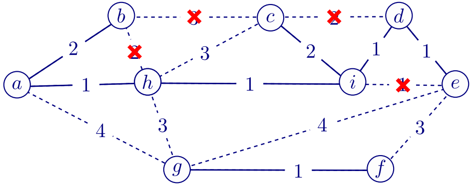
Algorithme de Kruskal - Exemple



Arête	*ah*	*de*	*di*	*ei*	*hi*	*fg*	*ab*	*bh*	*ci*	*cd*	*bc*	*ch*	*ef*	*gh*	*ag*	*ge*
Poids	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4
k	1	2	3	×	4	5	6	×	7	×						

- $n = 9 \rightarrow$ stop après 8 sélections

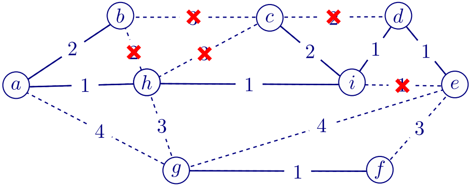
Algorithme de Kruskal - Exemple



Arête	*ah*	*de*	*di*	*ei*	*hi*	*fg*	*ab*	*bh*	*ci*	*cd*	*bc*	*ch*	*ef*	*gh*	*ag*	*ge*
Poids	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4
k	1	2	3	×	4	5	6	×	7	×	×					

- $n = 9 \rightarrow$ stop après 8 sélections

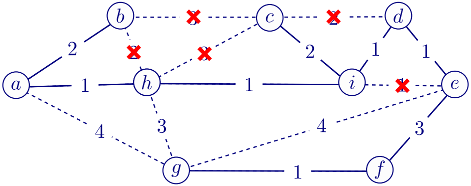
Algorithme de Kruskal - Exemple



Arête	*ah*	*de*	*di*	*ei*	*hi*	*fg*	*ab*	*bh*	*ci*	*cd*	*bc*	*ch*	*ef*	*gh*	*ag*	*ge*
Poids	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4
k	1	2	3	×	4	5	6	×	7	×	×	×				

- $n = 9 \rightarrow$ stop après 8 sélections

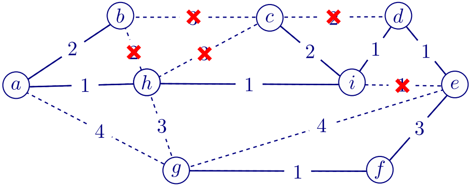
Algorithme de Kruskal - Exemple



Arête	*ah*	*de*	*di*	*ei*	*hi*	*fg*	*ab*	*bh*	*ci*	*cd*	*bc*	*ch*	*ef*	*gh*	*ag*	*ge*
Poids	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4
k	1	2	3	×	4	5	6	×	7	×	×	×	8			

- $n = 9 \rightarrow$ stop après 8 sélections

Algorithme de Kruskal - Exemple



Arête	*ah*	*de*	*di*	*ei*	*hi*	*fg*	*ab*	*bh*	*ci*	*cd*	*bc*	*ch*	*ef*	*gh*	*ag*	*ge*
Poids	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4
k	1	2	3	×	4	5	6	×	7	×	×	×	8			

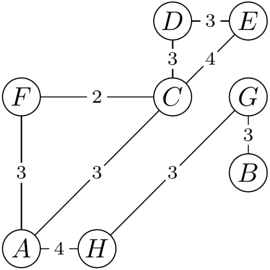
- $n = 9 \rightarrow$ stop après 8 sélections
- $p(H) = (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 3) = 12$

Quiz !

Question 1

Voici la liste des arêtes de ce graphe ordonnées par poids croissant : (F, C), (A, C), (A, F), (B, G), (C, D), (D, E), (H, G), (A, H), (C, E)

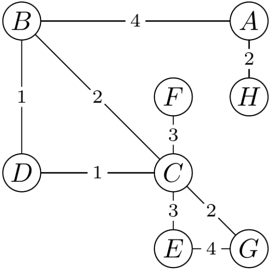
Indiquer les 4 premières arêtes ajoutées à l'arbre lorsqu'on applique l'algorithme de Kruskal.



Question 2

Voici la liste des arêtes de ce graphe ordonnées par poids croissant : (D, B), (D, C), (C, B), (G, C), (H, A), (C, F), (E, C), (B, A), (E, G)

Indiquer les 4 premières arêtes ajoutées à l'arbre lorsqu'on applique l'algorithme de Kruskal.



Preuve d'optimalité - Algorithme de Kruskal

Notations

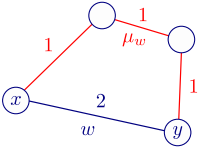
- $G = (V, E, p)$: graphe initial
- $H = (V, E_2)$: arbre couvrant obtenu par l'algorithme de Kruskal

Propriété 1

Soient

- $w = [xy] \in E \backslash E_2$
- μ_w : chaîne de x à y dans H

alors, $p(w) \geq max_{u \in \mu_w} p(u)$



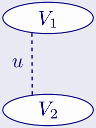
Preuve d'optimalite - Algorithme de Kruskal

Notations

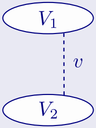
- H : arbre obtenu par l'algorithme de Kruskal de poids $p(H)$
- $H^{(1)}$: arbre optimal de poids $p(H^{(1)})$
- $u \in H^{(1)} \backslash H$ reliant V_1 et V_2
  Avec $V_1 \cup V_2 = V$
- $v \in H \backslash H^{(1)}$ reliant V_1 et V_2

Montrons que
$p(H) = p(H^{(1)})$

Optimal - $H^{(1)}$



Algorithme - H



- .... (propriété 1)
- .... ($H^{(1)}$ est optimal)

Soit $H^{(2)} = H^{(1)} \cup \{v\} \backslash \{u\}$
On a donc ....

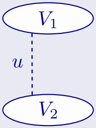
Preuve d'optimalite - Algorithme de Kruskal

Notations

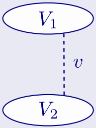
- H : arbre obtenu par l'algorithme de Kruskal de poids $p(H)$
- $H^{(1)}$: arbre optimal de poids $p(H^{(1)})$
- $u \in H^{(1)} \backslash H$ reliant V_1 et V_2
  Avec $V_1 \cup V_2 = V$
- $v \in H \backslash H^{(1)}$ reliant V_1 et V_2

Montrons que
$p(H) = p(H^{(1)})$

Optimal - $H^{(1)}$



Algorithme - H



- .... (propriété 1)
- .... ($H^{(1)}$ est optimal)

Soit $H^{(2)} = H^{(1)} \cup \{v\} \backslash \{u\}$
On a donc ....

On répète le processus...

Considérons $w \in H^{(2)} \backslash H$
On a donc $p(H^{(3)}) = p(H^{(1)})$

On répète jusqu'à ce que $H^{(\dots)} = H$

Algorithme de Kruskal

Remarque

L'algorithme de Kruskal est un **algorithme glouton**

Définition - **Algorithme glouton**

A chaque étape, faire le choix le plus intéressant à cet instant et ne plus le remettre en question

Caractéristiques des algorithmes gloutons

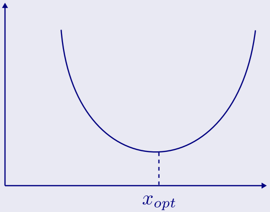
- Facile
- Rapide ↓ Algorithme dit **heuristique**
- Rarement optimale
  L'abre couvrant de poids minimal est une exception

Algorithmes gloutons

Choix glouton = Choix **localement** optimal

Optimum local $\neq$ Optimum global

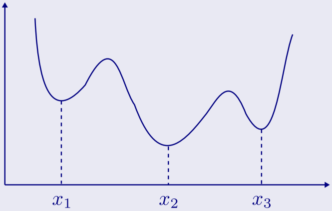
Fonction concave ou convexe



Optimum local $=$ Optimum global

($\leq$ optimum global entier)

Fonction quelconque



- x_1, x_2, x_3 : optimums locaux
- x_2 : optimum global

Arbre couvrant de poids maximal

Maximisation

Même algorithme en triant les arêtes par ordre de poids décroissant

Difficulté de l'implémentation

Détection des cycles

↳ Fonction fournie dans le TP

Sommaire

Le voyageur de commerce

Problème du voyageur de commerce

Comment passer une fois par chaque ville tout en minimisant la longueur totale parcourue ?

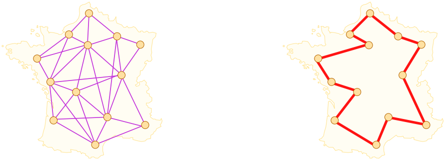
Graphe valué associé

Villes

Routes possibles

$$G = (V, E, p)$$

Longueur des routes



Graphe initial

Solution

Source : Wikipedia

Le voyageur de commerce

Problème du voyageur de commerce

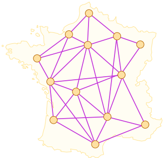
Comment passer une fois par chaque ville tout en minimisant la longueur totale parcourue ?

Graphe valué associé

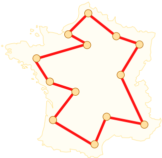
$$G = (\overset{\text{Villes}}{V}, \overset{\text{Routes possibles}}{E}, \underset{\text{Longueur des routes}}{p})$$

On cherche un cycle **hamiltonien** de valeur minimale

Passant par tous les sommets



Graphe initial



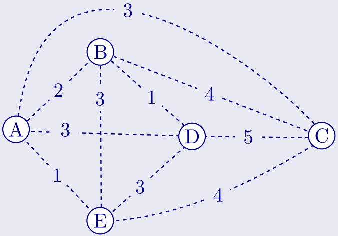
Solution

Source : Wikipedia

Algorithme glouton pour le voyageur de commerce

```
Données : $G = (V, E, p)$ : graphe initial
Résultat : $H(V, E_2)$ : cycle hamiltonien
$k \leftarrow 0$
$E_2 \leftarrow \emptyset$
$L \leftarrow$ Liste des arêtes de G triées par
  ordre de longueur croissante
pour $k$ allant de 1 à $n$ faire
    $w \leftarrow$ 1ère arête de $L$ ne formant pas
      de sous-cycle$^*$ avec $E_2$ et telle que
      les degrés des sommets restent
      $\leq 2$
    $E_2 \leftarrow E_2 \cup \{w\}$
retourner $H = (V, E_2)$
```

Exemple

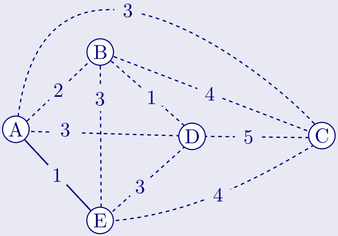


$L = (AE, BD, AB, BE, AD, DE, AC, BC, CE, CD)$

Algorithme glouton pour le voyageur de commerce

```
Données : $G = (V, E, p)$ : graphe initial
Résultat : $H(V, E_2)$ : cycle hamiltonien
$k \leftarrow 0$
$E_2 \leftarrow \emptyset$
$L \leftarrow$ Liste des arêtes de G triées par
  ordre de longueur croissante
pour $k$ allant de 1 à $n$ faire
    $w \leftarrow$ 1ère arête de $L$ ne formant pas
      de sous-cycle$^*$ avec $E_2$ et telle que
      les degrés des sommets restent
      $\leq 2$
    $E_2 \leftarrow E_2 \cup \{w\}$
retourner $H = (V, E_2)$
```

Exemple

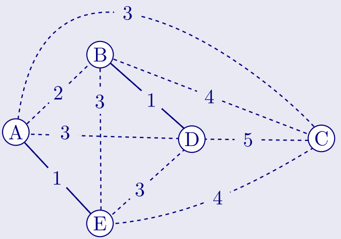


$L = (AE, BD, AB, BE, AD, DE, AC, BC, CE, CD)$

Algorithme glouton pour le voyageur de commerce

```
Données : $G = (V, E, p)$ : graphe initial
Résultat : $H(V, E_2)$ : cycle hamiltonien
$k \leftarrow 0$
$E_2 \leftarrow \emptyset$
$L \leftarrow$ Liste des arêtes de G triées par
  ordre de longueur croissante
pour $k$ allant de 1 à $n$ faire
    $w \leftarrow$ 1ère arête de $L$ ne formant pas
      de sous-cycle$^*$ avec $E_2$ et telle que
      les degrés des sommets restent
      $\leq 2$
    $E_2 \leftarrow E_2 \cup \{w\}$
retourner $H = (V, E_2)$
```

Exemple

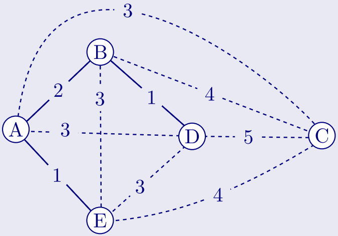


$L = (AE, BD, AB, BE, AD, DE, AC, BC, CE, CD)$

Algorithme glouton pour le voyageur de commerce

```
Données : $G = (V, E, p)$ : graphe initial
Résultat : $H(V, E_2)$ : cycle hamiltonien
$k \leftarrow 0$
$E_2 \leftarrow \emptyset$
$L \leftarrow$ Liste des arêtes de G triées par
  ordre de longueur croissante
pour $k$ allant de 1 à $n$ faire
    $w \leftarrow$ 1ère arête de $L$ ne formant pas
      de sous-cycle$^*$ avec $E_2$ et telle que
      les degrés des sommets restent
      $\leq 2$
    $E_2 \leftarrow E_2 \cup \{w\}$
retourner $H = (V, E_2)$
```

Exemple

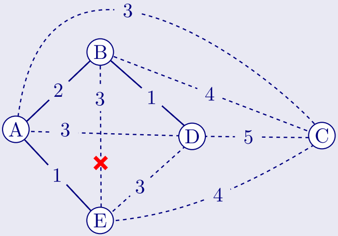


$L = (AE, BD, AB, BE, AD, DE, AC, BC, CE, CD)$

Algorithme glouton pour le voyageur de commerce

```
Données : $G = (V, E, p)$ : graphe initial
Résultat : $H(V, E_2)$ : cycle hamiltonien
$k \leftarrow 0$
$E_2 \leftarrow \emptyset$
$L \leftarrow$ Liste des arêtes de G triées par
  ordre de longueur croissante
pour $k$ allant de 1 à $n$ faire
    $w \leftarrow$ 1ère arête de $L$ ne formant pas
      de sous-cycle$^*$ avec $E_2$ et telle que
      les degrés des sommets restent
      $\leq 2$
    $E_2 \leftarrow E_2 \cup \{w\}$
retourner $H = (V, E_2)$
```

Exemple

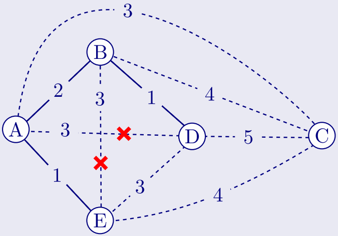


$L = (AE, BD, AB, BE, AD, DE, AC, BC, CE, CD)$

Algorithme glouton pour le voyageur de commerce

```
Données : $G = (V, E, p)$ : graphe initial
Résultat : $H(V, E_2)$ : cycle hamiltonien
$k \leftarrow 0$
$E_2 \leftarrow \emptyset$
$L \leftarrow$ Liste des arêtes de G triées par ordre de longueur croissante
pour $k$ allant de 1 à $n$ faire
    $w \leftarrow$ 1ère arête de $L$ ne formant pas de sous-cycle$^*$ avec $E_2$ et telle que les degrés des sommets restent $\leq 2$
    $E_2 \leftarrow E_2 \cup \{w\}$
retourner $H = (V, E_2)$
```

Exemple

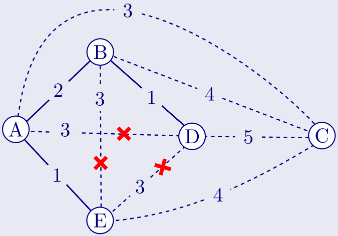


$L = (AE, BD, AB, BE, AD, DE, AC, BC, CE, CD)$

Algorithme glouton pour le voyageur de commerce

```
Données : $G = (V, E, p)$ : graphe initial
Résultat : $H(V, E_2)$ : cycle hamiltonien
$k \leftarrow 0$
$E_2 \leftarrow \emptyset$
$L \leftarrow$ Liste des arêtes de G triées par
  ordre de longueur croissante
pour $k$ allant de 1 à $n$ faire
    $w \leftarrow$ 1ère arête de $L$ ne formant pas
      de sous-cycle$^*$ avec $E_2$ et telle que
      les degrés des sommets restent
      $\leq 2$
    $E_2 \leftarrow E_2 \cup \{w\}$
retourner $H = (V, E_2)$
```

Exemple

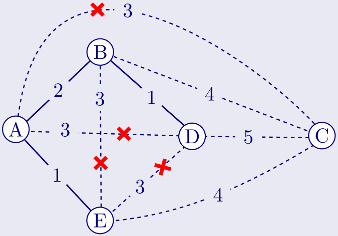


$L = (AE, BD, AB, BE, AD, DE, AC, BC, CE, CD)$

Algorithme glouton pour le voyageur de commerce

```
Données : $G = (V, E, p)$ : graphe initial
Résultat : $H(V, E_2)$ : cycle hamiltonien
$k \leftarrow 0$
$E_2 \leftarrow \emptyset$
$L \leftarrow$ Liste des arêtes de G triées par
  ordre de longueur croissante
pour $k$ allant de 1 à $n$ faire
    $w \leftarrow$ 1ère arête de $L$ ne formant pas
      de sous-cycle$^*$ avec $E_2$ et telle que
      les degrés des sommets restent
      $\leq 2$
    $E_2 \leftarrow E_2 \cup \{w\}$
retourner $H = (V, E_2)$
```

Exemple

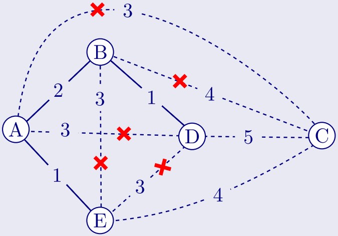


$L = (AE, BD, AB, BE, AD, DE, AC, BC, CE, CD)$

Algorithme glouton pour le voyageur de commerce

```
Données : $G = (V, E, p)$ : graphe initial
Résultat : $H(V, E_2)$ : cycle hamiltonien
$k \leftarrow 0$
$E_2 \leftarrow \emptyset$
$L \leftarrow$ Liste des arêtes de G triées par
  ordre de longueur croissante
pour $k$ allant de 1 à $n$ faire
    $w \leftarrow$ 1ère arête de $L$ ne formant pas
      de sous-cycle$^*$ avec $E_2$ et telle que
      les degrés des sommets restent
      $\leq 2$
    $E_2 \leftarrow E_2 \cup \{w\}$
retourner $H = (V, E_2)$
```

Exemple

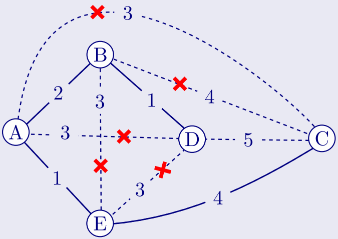


$L = (AE, BD, AB, BE, AD, DE, AC, BC, CE, CD)$

Algorithme glouton pour le voyageur de commerce

```
Données : $G = (V, E, p)$ : graphe initial
Résultat : $H(V, E_2)$ : cycle hamiltonien
$k \leftarrow 0$
$E_2 \leftarrow \emptyset$
$L \leftarrow$ Liste des arêtes de G triées par
  ordre de longueur croissante
pour $k$ allant de 1 à $n$ faire
    $w \leftarrow$ 1ère arête de $L$ ne formant pas
      de sous-cycle$^*$ avec $E_2$ et telle que
      les degrés des sommets restent
      $\leq 2$
    $E_2 \leftarrow E_2 \cup \{w\}$
retourner $H = (V, E_2)$
```

Exemple

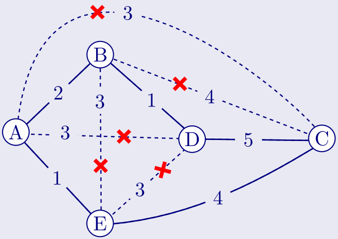


$L = (AE, BD, AB, BE, AD, DE, AC, BC, CE, CD)$

Algorithme glouton pour le voyageur de commerce

```
Données : $G = (V, E, p)$ : graphe initial
Résultat : $H(V, E_2)$ : cycle hamiltonien
$k \leftarrow 0$
$E_2 \leftarrow \emptyset$
$L \leftarrow$ Liste des arêtes de G triées par
  ordre de longueur croissante
pour $k$ allant de 1 à $n$ faire
    $w \leftarrow$ 1ère arête de $L$ ne formant pas
      de sous-cycle$^*$ avec $E_2$ et telle que
      les degrés des sommets restent
      $\leq 2$
    $E_2 \leftarrow E_2 \cup \{w\}$
retourner $H = (V, E_2)$
```

Exemple

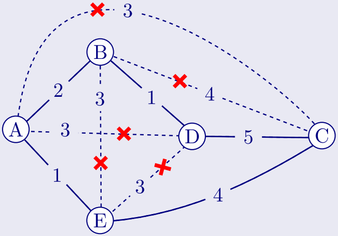


$L = (AE, BD, AB, BE, AD, DE, AC, BC, CE, CD)$

Algorithme glouton pour le voyageur de commerce

```
Données : $G = (V, E, p)$ : graphe initial
Résultat : $H(V, E_2)$ : cycle hamiltonien
$k \leftarrow 0$
$E_2 \leftarrow \emptyset$
$L \leftarrow$ Liste des arêtes de G triées par ordre de longueur croissante
pour $k$ allant de 1 à $n$ faire
    $w \leftarrow$ 1ère arête de $L$ ne formant pas de sous-cycle$^*$ avec $E_2$ et telle que les degrés des sommets restent $\leq 2$
    $E_2 \leftarrow E_2 \cup \{w\}$
retourner $H = (V, E_2)$
```

Exemple



$L = (AE, BD, AB, BE, AD, DE, AC, BC, CE, CD)$

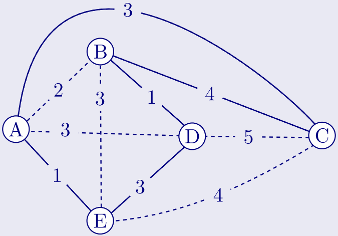
Solution heuristique de valeur ..

* : cycle ne contenant pas l'ensemble des sommets du graphe

Algorithme glouton pour le voyageur de commerce

L’algorithme ne donne pas la solution optimale

- solution gloutonne : longueur 13
- solution optimale : longueur 12



Le problème du voyageur de commerce est un problème « difficile »

Sommaire

Problèmes de cheminement

Problème 1

Trouver un chemin d'un sommet à un autre de longueur minimale

Problème 2

Trouver les plus courts chemins d'un sommet à tous les autres

Problème 3

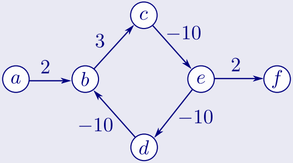
Trouver un plus court chemin pour toutes paires de sommets

Applications du routage

- Réseaux de télécommunications
- GPS routier
- Distribution d'eau, de gaz
- ...

Définition - **Circuit absorbant**

Circuit ....



Théorème

- Il existe un chemin de longueur minimale finie de *r* à tous les sommets du graphe

si et seulement si

- *r* est une racine du graphe et le graphe ne contient pas de circuit absorbant

Cas où l'on est sûr de l'absence de circuit absorbant

- Toutes les longueurs sont positives ou nulles
- Le graphe est sans circuit

Sommaire

Algorithme de Dijkstra

Problème 1 et 2

Cas des valuations positives

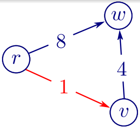
Principe de l'algorithme

Construire une arborescence $H(V, A_2)$

- dont *r* est la racine et
- correspondant au plus court chemin entre *r* et les autres sommets

Idée de l'algorithme

- Le plus court chemin entre *r* et son sommet le plus proche *v* est $p(r, v)$
- Même raisonnement pour le sommet le plus proche de *r* ou *v*
- On répète cette idée jusqu'à ce que
  - Problème 1 : le sommet cible soit atteint
  - Problème 2 : tous les sommets soient atteints



Algorithme de Dijkstra

Problème 1 et 2

Cas des valuations positives

Notation

Prédécesseur de *x* sur le meilleur chemin connu de *r* à *x*

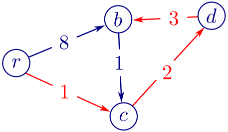
Soient les applications pred(x) et $\pi(x)$

Longueur du meilleur chemin connu entre *r* et *x*

$\pi(b) =$.
pred$(b) =$.

$\pi(d) =$.
pred$(d) =$.

$\pi(r) =$.
pred$(r) =$.



$\pi(c) =$.
pred$(c) =$.

Algorithme de Dijkstra

Problème 1 et 2

Cas des valuations positives

Données :

$G = (V, A, p)$: graphe de poids positifs

$r \in V$: sommet origine

Résultat : $H = (V, A_2)$ arborescence des plus courts chemins

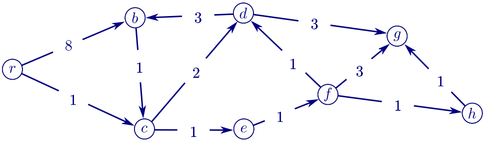
Sommets déjà considérés comme pivot

Origine des arcs

Arêtes de l'arborescence

```
$(\text{pivot}, V_2, \pi(r), A_2) \leftarrow (r, r, 0, \emptyset)$
pour $v \in V \backslash \{r\}$ faire  ⟵ Initialisation de $\pi$ (aucun sommet de $V \backslash \{r\}$ n'est pour l'instant atteint)
    $\pi(v) \leftarrow +\infty$

pour $j$ allant de 1 à $n-1$ faire  ⟵ Pour tout pivot
    pour $y \in V \backslash V_2$ tel que $(\text{pivot}, y) \in A$ faire
        si $\pi(\text{pivot}) + p(\text{pivot}, y) < \pi(y)$ alors  ⟵ Si utiliser $(pivot, y)$ fournit un meilleur chemin vers $y$
            $\pi(y) \leftarrow \pi(\text{pivot}) + p(\text{pivot}, y)$
            $\text{pred}(y) \leftarrow \text{pivot}$

    $\text{pivot} \leftarrow argmin_{z \notin V_2} \pi(z)$
    $V_2 \leftarrow V_2 \cup \{\text{pivot}\}$

pour tout $x \in V \backslash \{r\}$ faire  ⟵ Construire $A_2$ à partir de pred
    $A_2 \leftarrow A_2 \cup \{(\text{pred}(x), x)\}$

retourner $H(V, A_2)$
```

Algorithme de Dijkstra - Exemple



```
Données : $G = (V, A, p)$ : graphe de poids positifs
Résultat : $H = (V, A_2)$ arborescence des plus courts chemins
$(V_2, \text{pivot}, \pi(r), A_2) \leftarrow (r, r, 0, \emptyset)$
pour $v \in V \setminus \{r\}$ faire
    $\pi(v) \leftarrow +\infty$
pour $j$ allant de 1 à $n - 1$ faire
    pour tout sommet $y \notin V_2$ tel que $y \in \delta^+(\text{pivot})$
      faire
        si $\pi(\text{pivot}) + p(\text{pivot}, y) < \pi(y)$ alors
            $\pi(y) \leftarrow \pi(\text{pivot}) + p(\text{pivot}, y)$
            $\text{pred}(y) \leftarrow \text{pivot}$
    pivot $\leftarrow$ $argmin_{z \notin V_2} \pi(z)$
    $V_2 \leftarrow V_2 \cup \{\text{pivot}\}$
pour tout $x \in V \setminus \{r\}$ faire
    $A_2 \leftarrow A_2 \cup \{(\text{pred}(x), x)\}$
retourner $H(V, A_2)$
```

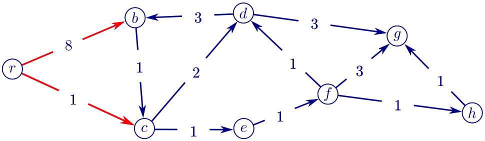
Valeurs de π

j	pivot	π						
		b	c	d	e	f	g	h
-	-	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞

Valeurs de pred

j	pivot	pred						
		b	c	d	e	f	g	h

Algorithme de Dijkstra - Exemple



```
Données : $G = (V, A, p)$ : graphe de poids positifs
Résultat : $H = (V, A_2)$ arborescence des plus courts chemins
$(V_2, \text{pivot}, \pi(r), A_2) \leftarrow (r, r, 0, \emptyset)$
pour $v \in V \setminus \{r\}$ faire
    $\pi(v) \leftarrow +\infty$
pour $j$ allant de 1 à $n - 1$ faire
    pour tout sommet $y \notin V_2$ tel que $y \in \delta^+(\text{pivot})$ faire
        si $\pi(\text{pivot}) + p(\text{pivot}, y) < \pi(y)$ alors
            $\pi(y) \leftarrow \pi(\text{pivot}) + p(\text{pivot}, y)$
            $\text{pred}(y) \leftarrow \text{pivot}$
    $\text{pivot} \leftarrow argmin_{z \notin V_2} \pi(z)$
    $V_2 \leftarrow V_2 \cup \{\text{pivot}\}$
pour tout $x \in V \setminus \{r\}$ faire
    $A_2 \leftarrow A_2 \cup \{(\text{pred}(x), x)\}$
retourner $H(V, A_2)$
```

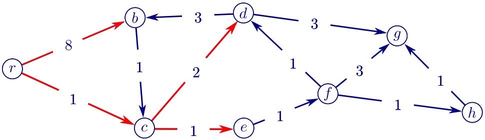
Valeurs de π

		π						
j	**pivot**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**g**	**h**
-	-	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
1	r	8	1	|	|	|	|	|

Valeurs de pred

		pred						
j	**pivot**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**g**	**h**
1	r	r	r					

Algorithme de Dijkstra - Exemple



```
Données : $G = (V, A, p)$ : graphe de poids positifs
Résultat : $H = (V, A_2)$ arborescence des plus courts
           chemins
$(V_2, \text{pivot}, \pi(r), A_2) \leftarrow (r, r, 0, \emptyset)$
pour $v \in V \backslash \{r\}$ faire
    $\pi(v) \leftarrow +\infty$
pour $j$ allant de 1 à $n-1$ faire
    pour tout sommet $y \notin V_2$ tel que $y \in \delta^+(\text{pivot})$
      faire
        si $\pi(\text{pivot}) + p(\text{pivot}, y) < \pi(y)$ alors
            $\pi(y) \leftarrow \pi(\text{pivot}) + p(\text{pivot}, y)$
            $\text{pred}(y) \leftarrow \text{pivot}$
    pivot $\leftarrow$ $argmin_{z \notin V_2} \pi(z)$
    $V_2 \leftarrow V_2 \cup \{\text{pivot}\}$
pour tout $x \in V \backslash \{r\}$ faire
    $A_2 \leftarrow A_2 \cup \{(\text{pred}(x), x)\}$
retourner $H(V, A_2)$
```

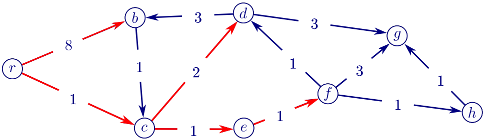
Valeurs de π

j	pivot				π			
		b	c	d	e	f	g	h
-	-	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
1	r	8	1	|	|	|	|	|
2	c	|	|	3	2	|	|	|

Valeurs de pred

j	pivot				pred			
		b	c	d	e	f	g	h
1	r	r	r					
2	c	|	|	c	c			

Algorithme de Dijkstra - Exemple



```
Données : $G = (V, A, p)$ : graphe de poids positifs
Résultat : $H = (V, A_2)$ arborescence des plus courts
           chemins
$(V_2, \text{pivot}, \pi(r), A_2) \leftarrow (r, r, 0, \emptyset)$
pour $v \in V \setminus \{r\}$ faire
    $\pi(v) \leftarrow +\infty$

pour $j$ allant de 1 à $n - 1$ faire
    pour tout sommet $y \notin V_2$ tel que $y \in \delta^+(\text{pivot})$
      faire
        si $\pi(\text{pivot}) + p(\text{pivot}, y) < \pi(y)$ alors
            $\pi(y) \leftarrow \pi(\text{pivot}) + p(\text{pivot}, y)$
            $\text{pred}(y) \leftarrow \text{pivot}$

    pivot $\leftarrow argmin_{z \notin V_2} \pi(z)$
    $V_2 \leftarrow V_2 \cup \{\text{pivot}\}$

pour tout $x \in V \setminus \{r\}$ faire
    $A_2 \leftarrow A_2 \cup \{(\text{pred}(x), x)\}$

retourner $H(V, A_2)$
```

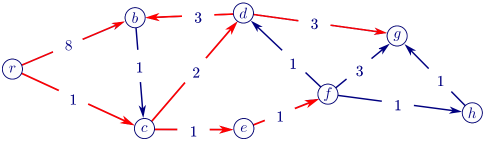
Valeurs de π

					π			
j	**pivot**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**g**	**h**
-	-	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
1	r	8	1	|	|	|	|	|
2	c	|	|	3	2	|	|	|
3	e	|	|	|	|	3	|	|

Valeurs de pred

					pred			
j	**pivot**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**g**	**h**
1	r	r	r					
2	c	|	|	c	c			
3	e	|	|	|	|	e		

Algorithme de Dijkstra - Exemple



```
Données : $G = (V, A, p)$ : graphe de poids positifs
Résultat : $H = (V, A_2)$ arborescence des plus courts
           chemins
$(V_2, \text{pivot}, \pi(r), A_2) \leftarrow (r, r, 0, \emptyset)$
pour $v \in V \backslash \{r\}$ faire
    $\pi(v) \leftarrow +\infty$
pour $j$ allant de 1 à $n-1$ faire
    pour tout sommet $y \notin V_2$ tel que $y \in \delta^+(\text{pivot})$
      faire
        si $\pi(\text{pivot}) + p(\text{pivot}, y) < \pi(y)$ alors
            $\pi(y) \leftarrow \pi(\text{pivot}) + p(\text{pivot}, y)$
            $\text{pred}(y) \leftarrow \text{pivot}$
    $\text{pivot} \leftarrow argmin_{z \notin V_2} \pi(z)$
    $V_2 \leftarrow V_2 \cup \{\text{pivot}\}$
pour tout $x \in V \backslash \{r\}$ faire
    $A_2 \leftarrow A_2 \cup \{(\text{pred}(x), x)\}$
retourner $H(V, A_2)$
```

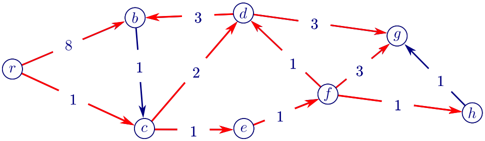
Valeurs de π

					π			
j	**pivot**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**g**	**h**
-	-	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
1	r	8	1	|	|	|	|	|
2	c	|	|	3	2	|	|	|
3	e	|	|	|	|	3	|	|
4	d	6	|	|	|	|	6	|

Valeurs de pred

					pred			
j	**pivot**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**g**	**h**
1	r	r	r					
2	c	|	|	c	c			
3	e	|	|	|	|	e		
4	d	d	|	|	|	|	d	

Algorithme de Dijkstra - Exemple



```
Données : $G = (V, A, p)$ : graphe de poids positifs
Résultat : $H = (V, A_2)$ arborescence des plus courts
           chemins
$(V_2, \text{pivot}, \pi(r), A_2) \leftarrow (r, r, 0, \emptyset)$
pour $v \in V \backslash \{r\}$ faire
    $\pi(v) \leftarrow +\infty$
pour $j$ allant de 1 à $n-1$ faire
    pour tout sommet $y \notin V_2$ tel que $y \in \delta^+(\text{pivot})$
      faire
        si $\pi(\text{pivot}) + p(\text{pivot}, y) < \pi(y)$ alors
            $\pi(y) \leftarrow \pi(\text{pivot}) + p(\text{pivot}, y)$
            $\text{pred}(y) \leftarrow \text{pivot}$
    $\text{pivot} \leftarrow \mathit{argmin}_{z \notin V_2} \pi(z)$
    $V_2 \leftarrow V_2 \cup \{\text{pivot}\}$
pour tout $x \in V \backslash \{r\}$ faire
    $A_2 \leftarrow A_2 \cup \{(\text{pred}(x), x)\}$
retourner $H(V, A_2)$
```

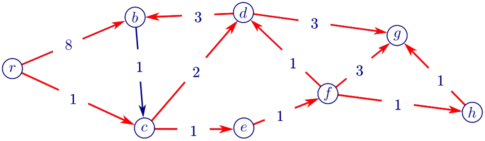
Valeurs de π

j	pivot				π			
		b	c	d	e	f	g	h
-	-	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
1	r	8	1	|	|	|	|	|
2	c	|	|	3	2	|	|	|
3	e	|	|	|	|	3	|	|
4	d	6	|	|	|	|	6	|
5	f	|	|	|	|	|	|	4

Valeurs de pred

j	pivot				pred			
		b	c	d	e	f	g	h
1	r	r	r					
2	c	|	|	c	c			
3	e	|	|	|	|	e		
4	d	d	|	|	|	|	d	
5	f	|	|	|	|	|	|	f

Algorithme de Dijkstra - Exemple



```
**Données :** $G = (V, A, p)$ : graphe de poids positifs
**Résultat :** $H = (V, A_2)$ arborescence des plus courts chemins
$(V_2, \text{pivot}, \pi(r), A_2) \leftarrow (r, r, 0, \emptyset)$
**pour** $v \in V \backslash \{r\}$ **faire**
    $\pi(v) \leftarrow +\infty$
**pour** $j$ allant de 1 à $n-1$ **faire**
    **pour** tout sommet $y \notin V_2$ tel que $y \in \delta^+(\text{pivot})$
      **faire**
        **si** $\pi(\text{pivot}) + p(\text{pivot}, y) < \pi(y)$ **alors**
            $\pi(y) \leftarrow \pi(\text{pivot}) + p(\text{pivot}, y)$
            $\text{pred}(y) \leftarrow \text{pivot}$
    $\text{pivot} \leftarrow argmin_{z \notin V_2}\, \pi(z)$
    $V_2 \leftarrow V_2 \cup \{\text{pivot}\}$
**pour** tout $x \in V \backslash \{r\}$ **faire**
    $A_2 \leftarrow A_2 \cup \{(\text{pred}(x), x)\}$
**retourner** $H(V, A_2)$
```

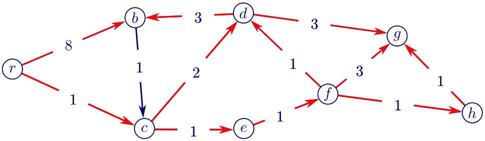
Valeurs de π

j	pivot				π			
		b	c	d	e	f	g	h
-	-	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
1	r	8	1	|	|	|	|	|
2	c	|	|	3	2	|	|	|
3	e	|	|	|	|	3	|	|
4	d	6	|	|	|	|	6	|
5	f	|	|	|	|	|	|	4
6	h	|	|	|	|	|	5	|

Valeurs de pred

j	pivot				pred			
		b	c	d	e	f	g	h
1	r	r	r					
2	c	|	|	c	c			
3	e	|	|	|	|	e		
4	d	d	|	|	|	|	d	
5	f	|	|	|	|	|	|	f
6	h	|	|	|	|	|	h	|

Algorithme de Dijkstra - Exemple



```
Données : $G = (V, A, p)$ : graphe de poids positifs
Résultat : $H = (V, A_2)$ arborescence des plus courts
           chemins
$(V_2, \text{pivot}, \pi(r), A_2) \leftarrow (r, r, 0, \emptyset)$
pour $v \in V \backslash \{r\}$ faire
    $\pi(v) \leftarrow +\infty$

pour $j$ allant de 1 à $n-1$ faire
    pour tout sommet $y \notin V_2$ tel que $y \in \delta^+(\text{pivot})$
      faire
        si $\pi(\text{pivot}) + p(\text{pivot}, y) < \pi(y)$ alors
            $\pi(y) \leftarrow \pi(\text{pivot}) + p(\text{pivot}, y)$
            $\text{pred}(y) \leftarrow \text{pivot}$

    $\text{pivot} \leftarrow argmin_{z \notin V_2}\, \pi(z)$
    $V_2 \leftarrow V_2 \cup \{\text{pivot}\}$

pour tout $x \in V \backslash \{r\}$ faire
    $A_2 \leftarrow A_2 \cup \{(\text{pred}(x), x)\}$

retourner $H(V, A_2)$
```

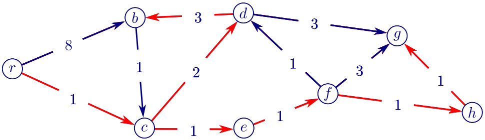
Valeurs de π

					π			
j	**pivot**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**g**	**h**
-	-	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
1	r	8	1	|	|	|	|	|
2	c	|	|	3	2	|	|	|
3	e	|	|	|	|	3	|	|
4	d	6	|	|	|	|	6	|
5	f	|	|	|	|	|	|	4
6	h	|	|	|	|	|	5	|
7	g	|	|	|	|	|	|	|

Valeurs de pred

					pred			
j	**pivot**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**g**	**h**
1	r	r	r					
2	c	|	|	c	c			
3	e	|	|	|	|	e		
4	d	d	|	|	|	|	d	
5	f	|	|	|	|	|	|	f
6	h	|	|	|	|	|	h	|
7	g	|	|	|	|	|	|	|

Algorithme de Dijkstra - Exemple



```
Données : $G = (V, A, p)$ : graphe de poids positifs
Résultat : $H = (V, A_2)$ arborescence des plus courts
           chemins
$(V_2, \text{pivot}, \pi(r), A_2) \leftarrow (r, r, 0, \emptyset)$
pour $v \in V \backslash \{r\}$ faire
    $\pi(v) \leftarrow +\infty$
pour $j$ allant de 1 à $n - 1$ faire
    pour tout sommet $y \notin V_2$ tel que $y \in \delta^+(\text{pivot})$
      faire
        si $\pi(\text{pivot}) + p(\text{pivot}, y) < \pi(y)$ alors
            $\pi(y) \leftarrow \pi(\text{pivot}) + p(\text{pivot}, y)$
            $\text{pred}(y) \leftarrow \text{pivot}$
    pivot $\leftarrow argmin_{z \notin V_2} \pi(z)$
    $V_2 \leftarrow V_2 \cup \{\text{pivot}\}$
pour tout $x \in V \backslash \{r\}$ faire
    $A_2 \leftarrow A_2 \cup \{(\text{pred}(x), x)\}$
retourner $H(V, A_2)$
```

Valeurs de π

					π			
j	**pivot**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**g**	**h**
-	-	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
1	r	8	1	|	|	|	|	|
2	c	|	|	3	2	|	|	|
3	e	|	|	|	|	3	|	|
4	d	6	|	|	|	|	6	|
5	f	|	|	|	|	|	|	4
6	h	|	|	|	|	|	5	|
7	g	|	|	|	|	|	|	|

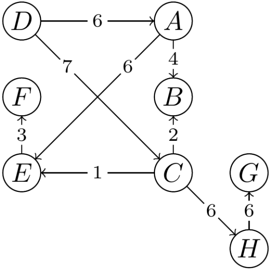
Valeurs de pred

					pred			
j	**pivot**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**g**	**h**
1	r	r	r					
2	c	|	|	c	c			
3	e	|	|	|	|	e		
4	d	d	|	|	|	|	d	
5	f	|	|	|	|	|	|	f
6	h	|	|	|	|	|	h	|
7	g	|	|	|	|	|	|	|

Quiz !

Question 3

Déterminer la plus courte distance pour atteindre chaque sommet à partir du sommet D en utilisant l'algorithme de Dijkstra.



Algorithme de Dijkstra

Problème 1 et 2

Cas des valuations positives

Preuve

Récurrence sur j

Complexité de l'algorithme

1. Actualisation de π
   - à une itération : $\mathcal{O}(d^+(pivot))$
   - nombre total d'opérations : $\mathcal{O}(\sum_{v \in V} d^+(v)) = \mathcal{O}(|A|)$
2. Détermination du pivot
   - recherche du plus petit élément parmi q (q allant de n-1 à 1)
   - nombre total d'opérations : $\mathcal{O}(\sum\limits_{q=1}^{n-1} q) = \mathcal{O}(\frac{n(n-1)}{2}) = \mathcal{O}(n^2)$

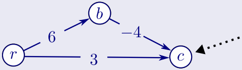
$m := |A| \leq n^2$ donc complexité globale : $\mathcal{O}(n^2)$

En pratique $\mathcal{O}(n + m\, ln(n))$ avec implémentation adéquate

Utilisation de tas de Fibonacci pour calculer l'*argmin* $\lrcorner$

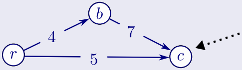
Cas où l'algorithme de Dijkstra ne fonctionne pas

Minimisation avec valeurs négatives



c sera pivot avant b
donc bc ne sera pas considéré

Maximisation



c sera pivot avant b
donc bc ne sera pas considéré

Sommaire

Algorithme de Bellman

Problème 1 et 2, Graphes sans circuits

Définition - Tri topologique des sommets d'un graphe $G = (V, A)$

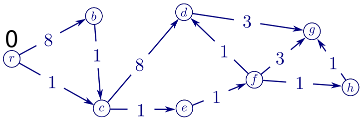
Ordre total sur V tel que i précède j pour tout $ij \in A$

Propriété

On peut toujours trier topologiquement les sommets d'un graphe sans circuit

Algorithme - Tri topologique des sommets d'un graphe orienté

- Le sommet de départ a pour valeur 0 ; les autres ne sont pas valués
- À chaque itération : on value un sommet non valué dont tous les prédécesseurs sont valués



Algorithme de Bellman

Problème 1 et 2, Graphes sans circuits

Définition - Tri topologique des sommets d'un graphe $G = (V, A)$

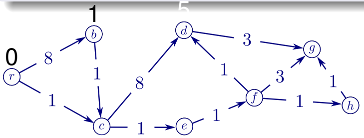
Ordre total sur V tel que i précède j pour tout $ij \in A$

Propriété

On peut toujours trier topologiquement les sommets d'un graphe sans circuit

Algorithme - Tri topologique des sommets d'un graphe orienté

- Le sommet de départ a pour valeur 0 ; les autres ne sont pas valués
- À chaque itération : on value un sommet non valué dont tous les prédécesseurs sont valués



Algorithme de Bellman

Problème 1 et 2, Graphes sans circuits

Définition - Tri topologique des sommets d'un graphe $G = (V, A)$

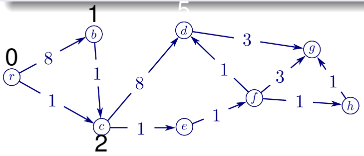
Ordre total sur V tel que i précède j pour tout $ij \in A$

Propriété

On peut toujours trier topologiquement les sommets d'un graphe sans circuit

Algorithme - Tri topologique des sommets d'un graphe orienté

- Le sommet de départ a pour valeur 0 ; les autres ne sont pas valués
- À chaque itération : on value un sommet non valué dont tous les prédécesseurs sont valués



Algorithme de Bellman

Problème 1 et 2, Graphes sans circuits

Définition - Tri topologique des sommets d'un graphe $G = (V, A)$

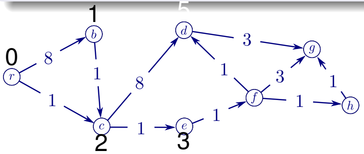
Ordre total sur V tel que i précède j pour tout $ij \in A$

Propriété

On peut toujours trier topologiquement les sommets d'un graphe sans circuit

Algorithme - Tri topologique des sommets d'un graphe orienté

- Le sommet de départ a pour valeur 0 ; les autres ne sont pas valués
- À chaque itération : on value un sommet non valué dont tous les prédécesseurs sont valués



Algorithme de Bellman

Problème 1 et 2, Graphes sans circuits

Définition - Tri topologique des sommets d'un graphe $G = (V, A)$

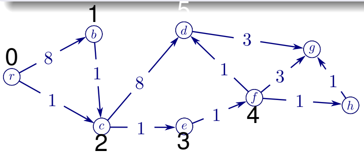
Ordre total sur V tel que i précède j pour tout $ij \in A$

Propriété

On peut toujours trier topologiquement les sommets d'un graphe sans circuit

Algorithme - Tri topologique des sommets d'un graphe orienté

- Le sommet de départ a pour valeur 0 ; les autres ne sont pas valués
- À chaque itération : on value un sommet non valué dont tous les prédécesseurs sont valués



Algorithme de Bellman

Problème 1 et 2, Graphes sans circuits

Définition - Tri topologique des sommets d'un graphe $G = (V, A)$

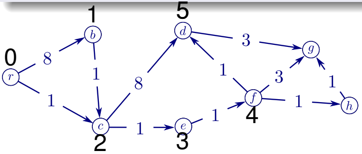
Ordre total sur V tel que i précède j pour tout $ij \in A$

Propriété

On peut toujours trier topologiquement les sommets d'un graphe sans circuit

Algorithme - Tri topologique des sommets d'un graphe orienté

- Le sommet de départ a pour valeur 0 ; les autres ne sont pas valués
- À chaque itération : on value un sommet non valué dont tous les prédécesseurs sont valués



Algorithme de Bellman

Problème 1 et 2, Graphes sans circuits

Définition - Tri topologique des sommets d'un graphe $G = (V, A)$

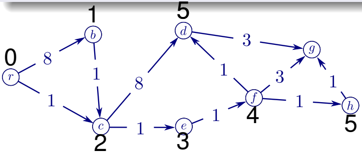
Ordre total sur V tel que i précède j pour tout $ij \in A$

Propriété

On peut toujours trier topologiquement les sommets d'un graphe sans circuit

Algorithme - Tri topologique des sommets d'un graphe orienté

- Le sommet de départ a pour valeur 0 ; les autres ne sont pas valués
- À chaque itération : on value un sommet non valué dont tous les prédécesseurs sont valués



Algorithme de Bellman

Problème 1 et 2, Graphes sans circuits

Définition - Tri topologique des sommets d'un graphe $G = (V, A)$

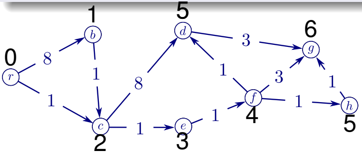
Ordre total sur V tel que i précède j pour tout $ij \in A$

Propriété

On peut toujours trier topologiquement les sommets d'un graphe sans circuit

Algorithme - Tri topologique des sommets d'un graphe orienté

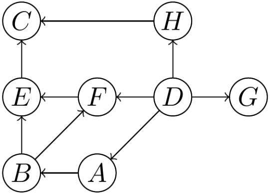
- Le sommet de départ a pour valeur 0 ; les autres ne sont pas valués
- À chaque itération : on value un sommet non valué dont tous les prédécesseurs sont valués



Quiz !

Question 4

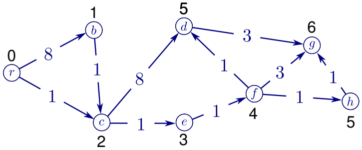
Déterminer l'ordre topologique des sommets de ce graphe.



Algorithme de Bellman

Problème 1 et 2

Graphes sans circuits



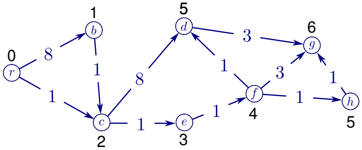
```
Données : $G = (V, A, p)$ : graphe sans circuit
$T \leftarrow$ Sommets de $V$ ordonnés selon le tri topologique
$\pi(r) \leftarrow 0$
pour $j$ allant de 1 à $n$ faire
    $\pi(T[i]) \leftarrow \min_{v \in \delta^-(T[i])}(\pi(v) + p(v, T[i]))$
```

	r	b	c	e	f	d	h	g
Ordre	0	1	2	3	4	5	5	6
b	0	8	∞	∞	∞	∞	∞	∞

Algorithme de Bellman

Problème 1 et 2

Graphes sans circuits



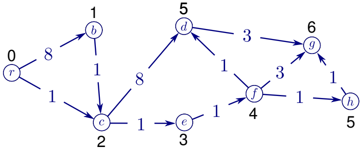
```
Données : $G = (V, A, p)$ : graphe sans circuit
$T \leftarrow$ Sommets de $V$ ordonnés selon le tri topologique
$\pi(r) \leftarrow 0$
pour $j$ allant de 1 à $n$ faire
    $\pi(T[i]) \leftarrow \min_{v \in \delta^-(T[i])}(\pi(v) + p(v, T[i]))$
```

	r	b	c	e	f	d	h	g
Ordre	0	1	2	3	4	5	5	6
b	0	8	∞	∞	∞	∞	∞	∞
c	|	|	1	|	|	|	|	|

Algorithme de Bellman

Problème 1 et 2

Graphes sans circuits



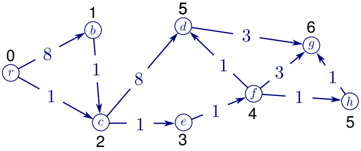
```
Données : $G = (V, A, p)$ : graphe sans circuit
$T \leftarrow$ Sommets de $V$ ordonnés selon le tri topologique
$\pi(r) \leftarrow 0$
pour $j$ allant de 1 à $n$ faire
    $\pi(T[i]) \leftarrow \min_{v \in \delta^-(T[i])}(\pi(v) + p(v, T[i]))$
```

	r	b	c	e	f	d	h	g
Ordre	0	1	2	3	4	5	5	6
b	0	8	∞	∞	∞	∞	∞	∞
c	|	|	1	|	|	|	|	|
e	|	|	|	2	|	|	|	|

Algorithme de Bellman

Problème 1 et 2

Graphes sans circuits



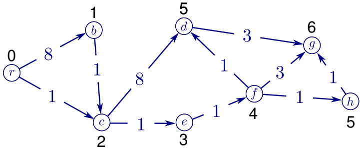
```
Données : $G = (V, A, p)$ : graphe sans circuit
$T \leftarrow$ Sommets de $V$ ordonnés selon le tri topologique
$\pi(r) \leftarrow 0$
pour $j$ allant de 1 à $n$ faire
    $\pi(T[i]) \leftarrow \min_{v \in \delta^-(T[i])}(\pi(v) + p(v, T[i]))$
```

	r	b	c	e	f	d	h	g
Ordre	0	1	2	3	4	5	5	6
b	0	8	∞	∞	∞	∞	∞	∞
c	|	|	1	|	|	|	|	|
e	|	|	|	2	|	|	|	|
f	|	|	|	|	3	|	|	|

Algorithme de Bellman

Problème 1 et 2

Graphes sans circuits



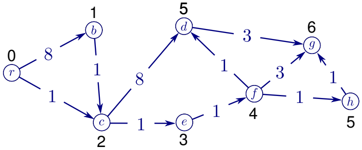
```
Données : $G = (V, A, p)$ : graphe sans circuit
$T \leftarrow$ Sommets de $V$ ordonnés selon le tri topologique
$\pi(r) \leftarrow 0$
pour $j$ allant de 1 à $n$ faire
    $\pi(T[i]) \leftarrow \min_{v \in \delta^-(T[i])}(\pi(v) + p(v, T[i]))$
```

	r	b	c	e	f	d	h	g
Ordre	0	1	2	3	4	5	5	6
b	0	8	∞	∞	∞	∞	∞	∞
c	|	|	1	|	|	|	|	|
e	|	|	|	2	|	|	|	|
f	|	|	|	|	3	|	|	|
d	|	|	|	|	|	4	|	|

Algorithme de Bellman

Problème 1 et 2

Graphes sans circuits



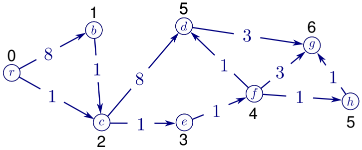
```
Données : $G = (V, A, p)$ : graphe sans circuit
$T \leftarrow$ Sommets de $V$ ordonnés selon le tri topologique
$\pi(r) \leftarrow 0$
pour $j$ allant de 1 à $n$ faire
    $\pi(T[i]) \leftarrow \min_{v \in \delta^-(T[i])} (\pi(v) + p(v, T[i]))$
```

	r	b	c	e	f	d	h	g
Ordre	0	1	2	3	4	5	5	6
b	0	8	∞	∞	∞	∞	∞	∞
c	|	|	1	|	|	|	|	|
e	|	|	|	2	|	|	|	|
f	|	|	|	|	3	|	|	|
d	|	|	|	|	|	4	|	|
h	|	|	|	|	|	|	4	|

Algorithme de Bellman

Problème 1 et 2

Graphes sans circuits



```
Données : $G = (V, A, p)$ : graphe sans circuit
$T \leftarrow$ Sommets de $V$ ordonnés selon le tri topologique
$\pi(r) \leftarrow 0$
pour $j$ allant de 1 à $n$ faire
    $\pi(T[i]) \leftarrow \min_{v \in \delta^-(T[i])} (\pi(v) + p(v, T[i]))$
```

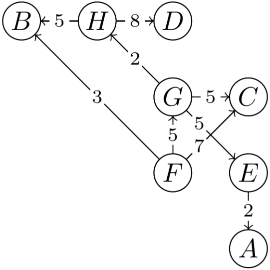
<table>
<tr><th></th><th>r</th><th>b</th><th>c</th><th>e</th><th>f</th><th>d</th><th>h</th><th>g</th></tr>
<tr><td>Ordre</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>5</td><td>6</td></tr>
<tr><td>b</td><td>0</td><td>8</td><td>∞</td><td>∞</td><td>∞</td><td>∞</td><td>∞</td><td>∞</td></tr>
<tr><td>c</td><td>|</td><td>|</td><td>1</td><td>|</td><td>|</td><td>|</td><td>|</td><td>|</td></tr>
<tr><td>e</td><td>|</td><td>|</td><td>|</td><td>2</td><td>|</td><td>|</td><td>|</td><td>|</td></tr>
<tr><td>f</td><td>|</td><td>|</td><td>|</td><td>|</td><td>3</td><td>|</td><td>|</td><td>|</td></tr>
<tr><td>d</td><td>|</td><td>|</td><td>|</td><td>|</td><td>|</td><td>4</td><td>|</td><td>|</td></tr>
<tr><td>h</td><td>|</td><td>|</td><td>|</td><td>|</td><td>|</td><td>|</td><td>4</td><td>|</td></tr>
<tr><td>g</td><td>|</td><td>|</td><td>|</td><td>|</td><td>|</td><td>|</td><td>|</td><td>5</td></tr>
</table>

Quiz !

Question 5

Déterminer la plus courte distance pour atteindre chaque sommet à partir du sommet F en utilisant l'algorithme de Bellman.

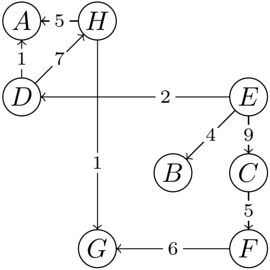
L'ordre topologique des sommets est le suivant : F1 - G2 - C3 - E3 - H3 - A4 - B4 - D4



Question 6

Déterminer la plus courte distance pour atteindre chaque sommet à partir du sommet E en utilisant l'algorithme de Bellman.

L'ordre topologique des sommets est le suivant : E1 - B2 - C2 - D2 - F3 - H3 - A4 - G4



Question 5 et 6 bellman

Algorithme de Bellman

Problème 1 et 2

Graphes sans circuits

Remarques

- Pour maximiser : remplacer min par max
- Gère les longueurs négatives

  Contrairement à l'algorithme de Dijkstra
- Très bonne complexité : $\mathcal{O}(m)$

Sommaire

Algorithme de Roy-Warshall-Floyd

Problèmes 1, 2 et 3

Objectif

Trouver le cheminement minimal entre toute paire de sommets
Pas de contraintes sur le graphe

Principe

- $M = \{m(x, y)\}_{x,y \in V}$

  ↳ Longueur du plus court chemin actuellement connu entre x et y
- Initialement $m(x, y) = p(x, y)$

  ↳ Ou ∞ si $(xy) \notin A$
- À chaque étape on considère $z \in V$ et, pour tout : $(xy) \in A$
  - si "passer par z" améliore le chemin actuel de x à y, $m(x, y)$ est mis à jour
- A la fin de l'algorithme :
  - $m(x, y) =$ plus court chemin de x à y

Variable de l'algorithme

préd(x, y) = prédécesseur de y sur le chemin minimum de x à y

- préd : tableau de taille $|V| \times |V|$

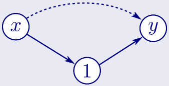
  ↳ Initialement : préd(x, y) = x si $(xy) \in A$ et $\emptyset$ sinon

Algorithme de Roy-Warshall-Floyd

Problèmes 1, 2 et 3

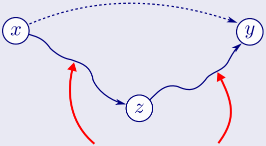
Étape 1 ($z = 1$)

L'arc (x,y) est ajouté s'il n'existait pas



Étape z

- Au début de l'étape z, chaque arc représente un chemin d'au plus z arcs



Chemins contenant des
sommets entre 1 et $z - 1$

- Si passer par z améliore le chemin de x à y, on modifie *m* et préd
  préd(x,y)← préd(z,y)

Algorithme de Roy-Warshall-Floyd

Problèmes 1, 2 et 3

```
Données : $G = (V, A, p)$ : graphe quelconque
Résultat : $M = m(x, y)$ : valeur d'un plus court chemin de x à y
pour $(x, y) \in A$ faire
    $m(x, y) \leftarrow p(x, y)$
    préd$(x, y) \leftarrow x$
pour tout $(x, y) \notin A$ faire
    $m(x, y) \leftarrow \infty$
    préd$(x, y) \leftarrow \emptyset$
pour tout $z \in V$ faire
    pour tout $x \in V$ faire
        pour tout $y \in V$ faire
            si $m(x, y) > m(x, z) + m(z, y)$ alors
                $m(x, y) \leftarrow m(x, z) + m(z, y)$
                préd$(x, y) \leftarrow$préd$(z, y)$
        si $m(x, x) < 0$ alors
            STOP (il y a un circuit absorbant)
```

Algorithme de Roy-Warshall-FLoyd

Problèmes 1, 2 et 3

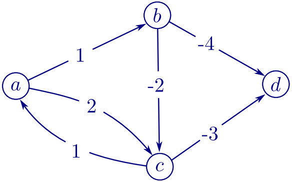


Tableau initial *m*, prèd

	a	b	c	d
a		1, a	2, a	
b			-2, b	-4, b
c	1, c			-3, c
d				

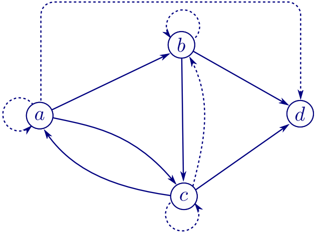


Tableau final *m*, prèd

	a	b	c	d
a	3, c	4, a	2, b	-1, c
b	-1, c	3, c	3, c	-5, c
c	1, c	5, a	3, b	-3, c
d				

Algorithme de Roy-Warshall-FLoyd

Problèmes 1, 2 et 3

Caractéristiques

- Détecte les circuits négatifs

  Valeur négative sur des termes de la diagonale
- $\mathcal{O}(n^3)$

  3 boucles imbriquées
- En cas de maximisation
  - remplacer ∞ par $-\infty$
  - échanger $<$ et $>$

Preuve d'optimalité par récurrence

- Au début de l'étape z on a les plus courts chemins passant par les z sommets déjà considérés

  De longueur au plus z
- A la fin dernière étape on a donc considéré tous les chemins

Quel algorithme pour trouver le chemin de valeur minimale ?

Caractéristique	**Dijkstra**	**Bellman**	**Roy-Warshall-Floyd**
Entre 2 sommets	x	x	x
Entre 1 sommets et tous les autres	x	x	x
Entre tous les couples de sommets			x
Gère les chemins maximaux		x	x
Poids négatifs		x	x
Graphe avec circuits	x		x
Gère les circuits absorbants			x
Complexité	$\mathcal{O}(n+m\ln(n))$	$\mathcal{O}(m)$	$\mathcal{O}(n^3)$

Remarque

Il existe d'autres algorithmes

Problèmes difficiles

- Trouver un chemin élémentaire de longueur minimale en présence de circuits absorbants ↑ Passant par tous les sommets
- Trouver un chemin de longueur maximale dans un graphe avec valuations positives et circuits

En résumé

Notions abordées

- Plusieurs problèmes d’optimisation dans les graphes
  Arbres couvrants de poids minimal
  Plus courts chemins
  Voyageur de commerce
- Classes d’algorithmes
  Algorithmes gloutons
  Programmation dynamique
- Classe de problèmes
  - Problèmes faciles (ou polynomiaux)
    Une solution optimale peut être obtenue par un algorithme de complexité polynomiale
  - Problèmes "difficiles"

Sommaire

Classe Graph

graph.py

```
import numpy as np

class Graph:

    n = 0 # Nombre de sommets
    nodes = np.array([]) # Noms des sommets
    adjacency = np.empty(0) # Liens du graphe

    # Cree un graphe a partir d'un tableau de noms de sommets
    def __init__(self, sNames):
        self.nodes = np.copy(sNames)
        self.n = len(self.nodes)
        self.adjacency = np.zeros((self.n, self.n))

    # Permet d'ajouter une arete au graphe
    def addEdge(self, name1, name2, weight):
        id1 = np.where(self.nodes == name1)[0][0]
        id2 = np.where(self.nodes == name2)[0][0]
        self.adjacency[id1, id2] = weight
        self.adjacency[id2, id1] = weight

    ...
```

Classe Graph

Exemple d'utilisation

```
import numpy as np
import graph

def main():

    g = graph.Graph(np.array(["a", "b", "c", "d", "e", "f", "g"]))

    # Add the edges
    g.addEdge("a", "b",  1.0)
    g.addEdge("a", "c",  3.0)

    print(g.adjacency[0][1]); // Affiche 1.0
```

Sommaire

Matroïdes

Notations

- $E = \{e_1, e_2, .., e_n\}$: ensemble d'éléments fini et non vides
  $E \neq \emptyset$
- $I \subset \mathcal{P}(E)$

Définition - **Matroïde**

Couple $M = (E, I)$ tel que

- $I \neq \emptyset$

$(F \in I \text{ et } F' \subset F) \Rightarrow F' \in I$

- I famille de sous-ensembles **indépendants**
- Soient $F \in I$ et $H \in I$ tels que $card(F) < card(H)$, $\exists x \in H \backslash F$ tel que $F \cup \{x\} \in I$
  Propriété d'échange

Matroïdes

Définition - Base

Ensemble indépendant maximal pour l'inclusion

Propriété

Toutes les bases d'un matroïde ont le même cardinal

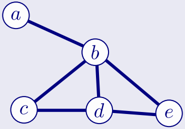
Exemple - Matroïde matriciel (H. Whitney)

- A : matrice donnée
- E : ensemble de lignes de A
- $H \in I$: ensemble de lignes de A linéairement indépendantes

Couple $M = (E, I)$ ne définissant pas un matroïde

- E : ensemble des sommets d'un graphe
- I : ensemble des ensembles stables de ce graphe
  Stable : ensemble de sommets deux à deux non adjacents

Exemple



- Tout ensemble inclus dans un stable est stable

mais...

- $\{a, c, e\}$, $\{a, d\}$ et $\{b\}$ sont des stables maximaux qui n'ont pas le même cardinal

Exemple de matroïde

Soient :

- $G = (V_G, E_G)$: graphe connexe
- $I_G = \{F \subset E_G \text{ tel que } G' = (V_G, F) \text{ sans cycle}\}$
- $M_G = (E_G, IG)$: matroïde graphique

Matroïdes pondérés

$M = (E, I, w)$ tel que

- $w_e > 0$: poids de $e \in E$

Poids de $F \subset E$

$w(F) = \sum_{e \in F} w(e)$

Problème

Trouver $F \subset I$ tel que $w(F)$ est maximal (ou minimal)

Algorithme glouton - Matroïde pondérés

```
**Données :** $M = (E, I, w)$ : matroïde
**Résultat :** $F \in I$
$F \leftarrow \emptyset$
$L \leftarrow$ éléments de $E$ ordonnés par poids décroissant
pour $i = 1$ à $n$ faire
    si $F \cup \{e_i\} \subset I$ alors
        $F \leftarrow F \cup \{e_i\}$
retourner $F$
```

Théorème

L'algorithme glouton donne toujours l'optimum pour le problème du matroïde pondéré

Complexité

$$\overset{\text{Complexité du tri}\ \downarrow}{\mathcal{O}}(n\ log\ n) + \mathcal{O}(n \times \overset{\downarrow\ \text{Complexité du test}}{f}(n))$$

- $\mathcal{O}(n \times f(n))$: complexité de la boucle "pour"

Remarque

Si on connaît la taille K d 'une base on peut remplacer la boucle par "tant que card F < K"

Conséquence

L'algorithme de Kruskal pour la recherche d'un arbre couvrant est optimal

Q1 : CF-AC-BG-CD
Q2 : BD-CD-CG-AH
Q3 : D0-A6-C7-E8-B9-F11-H13-G19

Q4 : A2-B3-C6-D1-E5-F4-G2-H2
Q5 : F0-G5-C7-E10-H7-A12-B3-D15
Q6 : E0-B4-C9-D2-F14-H9-A3-G10