RO202 - Initiation à la Recherche Opérationnelle

Zacharie Ales, Natalia Jorquera-Bravo

2024 - 2025

EXERCICES 3 - Programmation linéaire

Exercise 1

Soit le programme linéaire suivant.

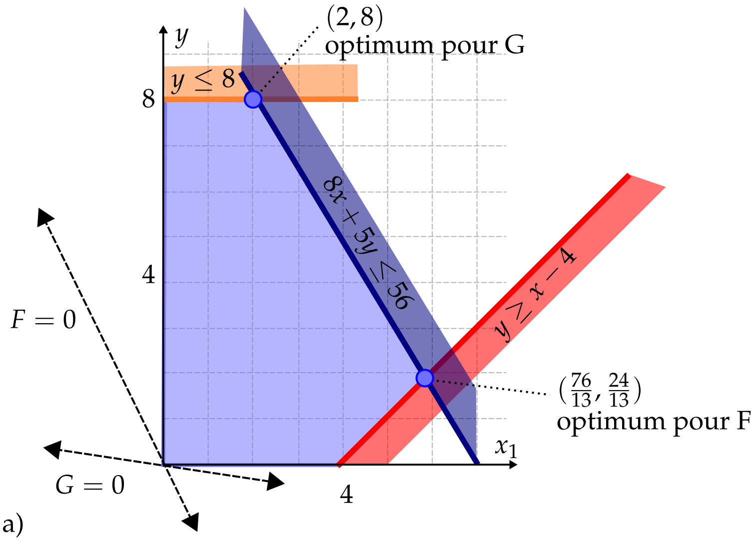
$$\begin{cases} F = \max 2x + y \\ \text{s.c.} \quad y \geq x - 4 \\ y \leq 8 \\ 8x + 5y \leq 56 \\ x, \; y \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Ceci est un programme linéaire **en nombres entiers** car ses variables x et y doivent être entières.

Si on "oublie" que les variables sont entières en remplaçant $x, y \in \mathbb{N}$ par $x, y \in \mathbb{R}$, on obtient la **relaxation linéaire** de ce programme qui est généralement plus facile à résoudre.

1. Fonction objectif F
   a) Résoudre la relaxation linéaire du programme graphiquement.
   b) Que peut-on déduire de la solution obtenue pour le problème en nombres entiers associé ?
2. Mêmes questions en remplaçant maintenant la fonction objectif par $G = \max x + 6y$
3. Ecrire la relaxation linéaire du problème d'origine sous forme standard.

Answer of exercise 1



1. a)
   b) Optimum du programme pour G mais pas pour F (solution fractionnaire qui fournit une borne supérieure).
2.
3. $$\begin{cases} \max F = 2x + y \\ \text{s.c.} \quad -x + y - x_1 = -4 \\ y + x_2 = 8 \\ 8x + 5y + x_3 = 56 \\ x, y, x_1, \; x_2, \; x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Exercise 2

Soit le système suivant (forme standard) :

$$
\begin{cases}
z = \min 2x_1 \; -3x_2 \; +5x_3 & & \\
\text{s.c.} \quad x_1 \; -2x_2 \; +x_3 \; -x_4 \qquad\qquad = 4 & & (C_1) \\
\qquad x_2 \; +3x_3 \qquad +x_5 \qquad = 6 & & (C_2) \\
\qquad 2x_1 \qquad +x_3 \; +2x_4 \qquad +x_6 = 7 & & (C_3) \\
\qquad x_1, \qquad \ldots \qquad , \quad x_6 \geq 0 & &
\end{cases}
$$

et soit la solution : $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (2, 0, 2, 0, 0, 1)$.

1. Vérifier que c'est une solution de base.
2. Mettre le tableau sous forme canonique. Est-ce que cette base est réalisable ? Quelle est la valeur de sa solution ? Est-ce une solution optimale ?

   Remarque : Vous pourrez utiliser les tableaux à compléter figurant en fin de TD
3. Calculer une solution optimale en utilisant l'algorithme du simplexe et en prenant comme base initiale celle de la question précédente.

Answer of exercise 2

1. Solution de la base $\{x_1, x_3, x_6\}$ car $Bx_B = Ax = b$ et la matrice B associée est inversible ($det(B) = 1 * (1 * 3 - +0 * 1) = 3 \neq 0$). Pour trouver les coûts réduits, on peut utiliser les tableaux en mettant sous forme canonique

	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{x_3}$	$\mathbf{x_4}$	$\mathbf{x_5}$	$\mathbf{x_6}$	RHS
(C_1)	1	-2	1	-1			4
(C_2)		1	3		1		6
(C_3)	2		1	2		1	7
(Obj)	2	-3	5				

	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{x_3}$	$\mathbf{x_4}$	$\mathbf{x_5}$	$\mathbf{x_6}$	RHS
(C_1)	1	-2	1	-1			4
$(C_2) \leftarrow (C_2)/3$		$\frac{1}{3}$	**1**		$\frac{1}{3}$		2
(C_3)	2		1	2		1	7
(Obj)	2	-3	5				

	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{x_3}$	$\mathbf{x_4}$	$\mathbf{x_5}$	$\mathbf{x_6}$	RHS
$(C_1) \leftarrow (C_1)$	1	-2	1	-1			4
(C_2)		$\frac{1}{3}$	**1**		$\frac{1}{3}$		2
$(C_3) \leftarrow (C_3) - 2(C_1)$	**0**	4	-1	4		1	-1
$(Obj) \leftarrow (Obj) - 2(C_1)$	**0**	1	3	2			-8

	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{x_3}$	$\mathbf{x_4}$	$\mathbf{x_5}$	$\mathbf{x_6}$	RHS	Ratio test
$(C_1) \leftarrow (C_1)$-(C_2)	1	-$\frac{7}{3}$	**0**	-1	-$\frac{1}{3}$		2	$\Rightarrow x_5 \geq -6$
$(C_2) \leftarrow (C_2)$		$\frac{1}{3}$	1		$\frac{1}{3}$		2	$\Rightarrow x_5 \leq 6$
$(C_3) \leftarrow (C_3)$+(C_2)		$\frac{13}{3}$	**0**	4	$\frac{1}{3}$	1	1	$\Rightarrow x_5 \leq 3$
$(Obj) \leftarrow (Obj)$-3(C_2)			**0**	2	-1		-14	

Forme canonique pour $\{x_1, x_3, x_6\}$

Coût réduit de

— x_2 : 0
— x_4 : 2
— x_5 : -1

Valeur de la solution : 14

Solution non optimale car il y a des coûts réduits négatifs

2. x_5 entre en base car c'est le seul coût réduit négatif. Le ratio test indique que x_6 sort de la base. On met sous forme canonique pour $\{x_1, x_3, x_5\}$:

	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{x_3}$	$\mathbf{x_4}$	$\mathbf{x_5}$	$\mathbf{x_6}$	RHS
$(C_1) \leftarrow (C_1)$+(C_3)	1	2		3		1	3
$(C_2) \leftarrow (C_2) - (C_3)$		-4	1	-4		-1	1
$(C_3) \leftarrow 3(C_3)$		13		12	1	3	3
$(Obj) \leftarrow (Obj) + 3(C_3)$		13		14		3	-11

Forme canonique pour $\{x_1, x_3, x_5\}$

Tous les coûts réduits sont positifs donc l'optimum est atteint. La solution optimale est $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (3, 0, 1, 0, 3, 0)$ de valeur 11.

Exercise 3 Implémentation

L'objectif de cet exercice est d'implémenter la méthode `pivot()` de la classe `Tableau`.

Cette classe représente un programme linéaire sous forme normale. Elle contient, notamment, les attributs suivants :

— `n, m, A[][], b[], c[]` : décrivent le tableau;
— `basis[]` : indice des variables actuellement en base (ou `[]` si la base n'est pas encore définie);
— `isMinimization` : `True` si on minimise l'objectif, `false` si on maximise.

ainsi que les méthodes :

— `pivot()` : effectue un pivot en utilisant la base figurant dans `basis` :
   1. met le tableau sous forme canonique;
   2. identifie la variable entrante et la variable sortante;
   3. retourne `True` si une nouvelle base est trouvée et `False` si l'optimum est atteint.

— `applySimplex()` : résout le problème en effectuant des pivots successifs;
— `tableauWithSlack()` : ajoute une variable d'écart à chaque contrainte et utilise ces variables pour définir une base.

Il existe deux façons d'utiliser cette classe pour résoudre un programme linéaire à partir d'un `Tableau t` :

1. `t.applySimplex()` : à utiliser quand le programme est sous forme normale ($Ax = b$) et qu'une base est connue;
2. `t.addSlackAndSolve()` : à utiliser quand le programme est sous la forme $Ax \leq b$.

1. Compléter la méthode `pivot()` du fichier `tableau.py` pour mettre le tableau sous forme canonique.
2. Identifier la nouvelle base
   a) Identifier la variable sortante et l'afficher (pensez à prendre en compte l'attribut `isMinimization`).

      Remarque : Les calculs de réels en informatique ne sont pas toujours exacts. C'est pourquoi un réel sera considéré positif s'il est supérieur à 10^{-6} et négatif s'il est inférieur à -10^{-6}.
   b) Identifier la variable sortante et l'afficher.
3. Vérifier la solution obtenue à l'exercice 1.
4. Vérifier la solution obtenue à l'exercice 2.

Exercise 4

Utiliser votre implémentation du simplexe afin de résoudre les problèmes suivants et donner leur solution optimale :

$$\begin{aligned} z = \max\ & 8x_1 + 6x_2 \\ \text{tel que}\ & 5x_1 + 3x_2 \leq 30 \\ & 2x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ & x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z = \max\ & x_1 + 2x_2 \\ \text{tel que}\ & -3x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Answer of exercise 4

Premier problème

$$\begin{aligned} z = \max\ & 8x_1 + 6x_2 \\ \text{tel que}\ & 5x_1 + 3x_2 + s_1 = 30 \\ & 2x_1 + 3x_2 + s_2 = 24 \\ & x_1 + 3x_2 + s_3 = 18 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	z	RHS
(C_1)	5	3	1	0	0	0	30
(C_2)	2	3	0	1	0	0	24
(C_3)	1	3	0	0	1	0	18
(Obj)	-8	-6	0	0	0	1	0

On fait entrer x_1 en base et sortir s_1

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	z	RHS
$(C_1)/5$	1	0.6	0.2	0	0	0	6
$(C_2) - \frac{2}{5}(C_1)$	0	$\frac{9}{5}$	$-\frac{2}{5}$	1	0	0	12
$(C_3) - \frac{1}{5}(C_1)$	0	$\frac{12}{5}$	$\frac{4}{5}$	0	1	0	12
$(Obj) + \frac{8}{5}(C_1)$	0	$-\frac{6}{5}$	$-\frac{8}{5}$	0	0	1	48

On fait entrer x_2 en base et sortir s_3

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	z	RHS
$(C_1) - \frac{3}{12}(C_3)$	1	0	0	0	$-\frac{1}{4}$	0	3
$(C_2) - \frac{9}{12}(C_3)$	0	0	-1	1	$-\frac{3}{4}$	0	3
$\frac{5}{12}(C_3)$	0	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{5}{12}$	0	5
$(Obj) + \frac{6}{12}(C_3)$	0	0	2	0	$\frac{1}{2}$	1	54

Solution optimale $(x_1, x_2) = (3, 5)$ et $z = 54$.

Solution : Second problème

$$\begin{aligned} z = \max\ & x_1 + 2x_2 \\ \text{tel que}\ & -3x_1 + 2x_2 + s_1 = 2 \\ & -x_1 + 2x_2 + s_2 = 4 \\ & x_1 + x_2 + s_3 = 5 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	z	RHS
(C_1)	-3	2	1	0	0	0	2
(C_2)	-1	2	0	1	0	0	4
(C_3)	1	1	0	0	1	0	5
(Obj)	-1	-2	0	0	0	1	0

On fait entrer x_2 et sortir s_1 :

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	z	RHS
$\frac{1}{2}(C_1)$	$-\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	0	0	1
$(C_2)-(C_1)$	2	0	-1	1	0	0	2
$(C_3)-\frac{1}{2}(C_1)$	$\frac{5}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	0	4
$(Obj)+(C_1)$	-4	0	1	0	0	1	2

On fait entrer x_1 et sortir s_2 :

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	z	RHS
$(C_1)+\frac{3}{4}(C_2)$	0	1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	0	0	$\frac{5}{2}$
$\frac{1}{2}(C_2)$	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	1
$(C_3)-\frac{5}{4}(C_2)$	0	0	$\frac{3}{4}$	$-\frac{5}{4}$	1	0	$\frac{3}{2}$
$(Obj)+2(C_2)$	0	0	-1	2	0	1	6

On fait entrer s_1 et sortir s_3 :

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	z	RHS
$(C_1)+\frac{1}{3}$	0	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	3
$(C_2)+\frac{2}{3}$	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	2
$\frac{4}{3}(C_3)$	0	0	1	$-\frac{5}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	2
$(Obj)+\frac{4}{3}(C_3)$	0	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	1	8

Solution optimale : $(x_1, x_2) = (2, 3)$ et $z = 8$.

Exercise 5

Soit le système suivant (forme canonique) :

$$\begin{cases} \min z(x) = 2x_1 + 3x_2 \\ \quad \text{s.c. } 2x_1 + x_2 \geq 3 \ (C_1) \\ \quad 2x_1 - x_2 \geq 5 \ (C_2) \\ \quad x_1 + 4x_2 \geq 6 \ (C_3) \\ \quad x_1, \quad x_2 \geq 0 \ (C_4) \end{cases}$$

1. Ecrire le dual et les "contraintes des écarts complémentaires".
2. La solution $x_1 = 3$, $x_2 = 1$ est-elle réalisable ? de base ? optimale ?
3. La solution $x_1 = \frac{26}{9}$, $x_2 = \frac{7}{9}$ est-elle réalisable ? de base ? optimale ?

Answer of exercise 5

1. — Le problème dual :

$$\begin{cases} \max v(x) = 3u_1 + 5u_2 + 6u_3 \\ \quad \text{s.c. } 2u_1 + 2u_2 + u_3 \leq 2 \\ \quad u_1 - u_2 + 4u_3 \leq 3 \\ \quad u_1, \quad u_2, \quad u_3 \geq 0 \end{cases}$$

— Les contraintes des écarts complémentaires

$$(c - uA)x = \begin{pmatrix} 2 - 2u_1 - 2u_2 - u_3 \\ 3 - u_1 + u_2 - 4u_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$u(Ax - b) = (u_1\ u_2\ u_3)^T \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 - 3 \\ 2x_1 - x_2 - 5 \\ x_1 + 4x_2 - 6 \end{pmatrix} = 0$$

Comme tous les termes sont positifs, on obtient :

$$\begin{aligned} &x_1(2 - 2u_1 - 2u_2 - u_3) = 0 && (1)\\ &x_2(3 - u_1 + u_2 - 4u_3) = 0 && (2)\\ &u_1(2x_1 + x_2 - 3) = 0 && (3)\\ &u_2(2x_1 - x_2 - 5 = 0 && (4)\\ &u_3(x_1 + 4x_2 - 6) = 0 && (5) \end{aligned}$$

2. $(x_1, x_2) = (3, 1)$

— *Réalisable ?* Oui, les contraintes (C_1) à (C_4) sont vérifiées.

— *De base ?* Non. On met le PL sous forme standard :

$$\begin{cases} \min z(x) = 2x_1 + 3x_2 \\ \quad \text{s.c. } 2x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ \quad 2x_1 - x_2 - x_4 = 5 \\ \quad x_1 + 4x_2 - x_5 = 6 \\ \quad x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \geq 0 \end{cases}$$

On obtient la solution $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (3, 1, 4, 0, 1)$. La solution n'est pas de base car plus de $m = 3$ variables non nulles (on aurait aussi pu tracer le polytope et constater que la solution ne correspond pas à un point extrême).

— *Optimale ?* Non. Les équations (3) et (5) donnent $4u_1 = 0$ et $-7u_3 = 0$ donc $u_1 = u_3 = 0$. Les équations (1) et (2) donnent alors $2 - 2u_2 = 0$ et $3 + u_2 = 0$ qui ne peuvent être simultanément satisfaites. Cette solution ne peut donc pas satisfaire les contraintes des écarts complémentaires et n'est donc pas optimale.

3. $(x_1, x_2) = (\frac{26}{9}, \frac{7}{9})$

— *Réalisable ?* Oui. Les contraintes (C_1) à (C_4) sont vérifiées.

— *De base ?* Oui. On obtient $x_4 = x_5 = 0$. La matrice B associée est $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. B est inversible (car $det(B) = -1(2 * 4 - (1 * -1)) = -9 \neq 0$).

— *Optimale ?* Oui. L'équation (3) donne $u_1 = 0$. Les équations (1) et (2) donnent le système $2 - 2u_2 - u_3 = 0$ et $3 + u_2 - 4u_3 = 0$. Ce système a pour solution $(u_1, u_2, u_3) = (0, \frac{5}{9}, \frac{8}{9})$. Cette solution est réalisable pour le dual et vérifie les contraintes des écarts complémentaires. Elle est donc optimale (valeur de l'objectif $2\frac{26}{9} + 3\frac{7}{9} = 5\frac{5}{9} + 6\frac{8}{9} = \frac{73}{9}$).

Aide pour l'exercice 2

Tableau initial	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{x_3}$	$\mathbf{x_4}$	$\mathbf{x_5}$	$\mathbf{x_6}$	RHS
(C_1)							
(C_2)							
(C_3)							
(Obj)							

Première étape de mise en forme canonique pour la base $\{x_1, x_3, x_6\}$

	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{x_3}$	$\mathbf{x_4}$	$\mathbf{x_5}$	$\mathbf{x_6}$	RHS
$(C_1) \leftarrow (C_1)$							
$(C_2) \leftarrow (C_2)/3$							
$(C_3) \leftarrow (C_3) - 2(C_1)$							
$(Obj) \leftarrow (Obj) - 2(C_1)$							

	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{x_3}$	$\mathbf{x_4}$	$\mathbf{x_5}$	$\mathbf{x_6}$	RHS
$(C_1) \leftarrow$							
$(C_2) \leftarrow$							
$(C_3) \leftarrow$							
$(Obj) \leftarrow$							

	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{x_3}$	$\mathbf{x_4}$	$\mathbf{x_5}$	$\mathbf{x_6}$	RHS
$(C_1) \leftarrow$							
$(C_2) \leftarrow$							
$(C_3) \leftarrow$							
$(Obj) \leftarrow$							

	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{x_3}$	$\mathbf{x_4}$	$\mathbf{x_5}$	$\mathbf{x_6}$	RHS
$(C_1) \leftarrow$							
$(C_2) \leftarrow$							
$(C_3) \leftarrow$							
$(Obj) \leftarrow$							