RO202 - Initiation à la Recherche Opérationnelle

Zacharie Ales, Natalia Jorquera-Bravo

2024 - 2025

EXERCICES 3 - Programmation linéaire

Exercise 1

Soit le programme linéaire suivant.

$$\begin{cases} \max F = 2x & +y \\ \quad \text{s.c.} & y \geq x - 4 \\ & y \leq 8 \\ 8x & +5y \leq 56 \\ x, & y \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Ceci est un programme linéaire **en nombres entiers** car ses variables x et y doivent être entières.

Si on "oublie" que les variables sont entières en remplaçant $x, y \in \mathbb{N}$ par $x, y \in \mathbb{R}$, on obtient la **relaxation linéaire** de ce programme qui est généralement plus facile à résoudre.

1. Fonction objectif F
   a) Résoudre la relaxation linéaire du programme graphiquement.
   b) Que peut-on déduire de la solution obtenue pour le problème en nombres entiers associé ?
2. Mêmes questions en remplaçant maintenant la fonction objectif par $G = x + 6y$
3. Ecrire le problème sous forme standard.

Exercise 2

Soit le système suivant (forme standard) :

$$\begin{cases} \min z(x) = 2x_1 & -3x_2 & +5x_3 & & & & \\ \quad \text{s.c.} \quad x_1 & -2x_2 & +x_3 & -x_4 & & & = 4 & (C_1) \\ & x_2 & +3x_3 & & +x_5 & & = 6 & (C_2) \\ 2x_1 & & +x_3 & +2x_4 & & +x_6 & = 7 & (C_3) \\ x_1, & & \ldots & & , & x_6 & \geq 0 & \end{cases}$$

et soit la solution : $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (2, 0, 2, 0, 0, 1)$.

1. Vérifier que c'est une solution de base réalisable et calculer les coûts réduits. Quelle est sa valeur ? Est-ce une solution optimale ? Pourquoi ?

   Remarque : Vous pourrez utiliser les tableaux à compléter figurant en fin de TD
2. Calculer une solution optimale en utilisant l'algorithme du simplexe et en prenant comme base initiale celle de la question précédente.

Exercise 3 Implémentation

L'objectif de cet exercice est d'implémenter la méthode `pivot()` de la classe `Tableau`.

Cette classe représente un programme linéaire sous forme normale. Elle contient, notamment, les attributs suivants :

— `n, m, A[][], b[], c[]` : décrivent le tableau ;
— `basis[]` : indice des variables actuellement en base
(ou `[]` si la base n'est pas encore définie) ;

— `isMinimization` : `True` si on minimise l'objectif, `false` si on maximise.

ainsi que les méthodes :

— `pivot()` : effectue un pivot en utilisant la base figurant dans `basis` :

1. met le tableau sous forme canonique;
2. identifie la variable entrante et la variable sortante;
3. retourne `True` si une nouvelle base est trouvée et `False` si l'optimum est atteint.

— `applySimplex()` : résout le problème en effectuant des pivots successifs;

— `tableauWithSlack()` : ajoute une variable d'écart à chaque contrainte et utilise ces variables pour définir une base.

Il existe deux façons d'utiliser cette classe pour résoudre un programme linéaire à partir d'un `Tableau t` :

1. `t.applySimplex()` : à utiliser quand le programme est sous forme normale ($Ax = b$) et qu'une base est connue;
2. `t.addSlackAndSolve()` : à utiliser quand le programme est sous la forme $Ax \leq b$.

1. Compléter la méthode `pivot()` du fichier `tableau.py` pour mettre le tableau sous forme canonique.
2. Identifier la nouvelle base
   a) Identifier la variable sortante et l'afficher (pensez à prendre en compte l'attribut `isMinimization`).

      Remarque : Les calculs de réels en informatique ne sont pas toujours exacts. C'est pourquoi un réel sera considéré positif s'il est supérieur à 10^{-6} et négatif s'il est inférieur à -10^{-6}.

   b) Identifier la variable sortante et l'afficher.
3. Vérifier la solution obtenue à l'exercice 1.
4. Vérifier la solution obtenue à l'exercice 2.

Exercise 4

Utiliser votre implémentation du simplexe afin de résoudre les problèmes suivants et donner leur solution optimale :

$$\begin{aligned} z = \max\ & 8x_1 + 6x_2 \\ \text{tel que}\ & 5x_1 + 3x_2 \leq 30 \\ & 2x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ & x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z = \max\ & x_1 + 2x_2 \\ \text{tel que}\ & -3x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Exercise 5

Soit le système suivant (forme canonique) :

$$\begin{cases} \min z(x) = 2x_1 + 3x_2 \\ \quad \text{s.c. } 2x_1 + x_2 \geq 3 \ (C_1) \\ \quad 2x_1 - x_2 \geq 5 \ (C_2) \\ \quad x_1 + 4x_2 \geq 6 \ (C_3) \\ \quad x_1, \ x_2 \geq 0 \ (C_4) \end{cases}$$

1. Ecrire le dual et les "contraintes des écarts complémentaires".
2. La solution $x_1 = 3$, $x_2 = 1$ est-elle réalisable ? de base ? si oui, est-elle optimale ?
3. La solution $x_1 = \frac{26}{9}$, $x_2 = \frac{7}{9}$ est-elle réalisable ? de base ? si oui, est-elle optimale ?

Aide pour l'exercice 2

Tableau initial

	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{x_3}$	$\mathbf{x_4}$	$\mathbf{x_5}$	$\mathbf{x_6}$	RHS
(C_1)							
(C_2)							
(C_3)							
(Obj)							

Première étape de mise en forme canonique pour la base $\{x_1, x_3, x_6\}$

	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{x_3}$	$\mathbf{x_4}$	$\mathbf{x_5}$	$\mathbf{x_6}$	RHS
$(C_1) \leftarrow (C_1)$							
$(C_2) \leftarrow (C_2)/3$							
$(C_3) \leftarrow (C_3) - 2(C_1)$							
$(Obj) \leftarrow (Obj) - 2(C_1)$							

	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{x_3}$	$\mathbf{x_4}$	$\mathbf{x_5}$	$\mathbf{x_6}$	RHS
$(C_1) \leftarrow$							
$(C_2) \leftarrow$							
$(C_3) \leftarrow$							
$(Obj) \leftarrow$							

	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{x_3}$	$\mathbf{x_4}$	$\mathbf{x_5}$	$\mathbf{x_6}$	RHS
$(C_1) \leftarrow$							
$(C_2) \leftarrow$							
$(C_3) \leftarrow$							
$(Obj) \leftarrow$							

	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{x_3}$	$\mathbf{x_4}$	$\mathbf{x_5}$	$\mathbf{x_6}$	RHS
$(C_1) \leftarrow$							
$(C_2) \leftarrow$							
$(C_3) \leftarrow$							
$(Obj) \leftarrow$							