Laboratorio di Meccanica
Misura della costante elastica di una molla e dell'accelerazione di gravità

Gruppo C2.7 (Schrödinger): Marsicano Aurora, Minichetti Gianluca
Morini Pietro, Nicastro Claudia

11 Aprile 2020

Nome	Marsicano	Minichetti	Morini	Nicastro
presenza	X	X	X	X
analisi	X	X		
tabelle			X	X
grafici		X	X	
stesura elaborato	X			X

1 Scopo dell'esperienza

Misurare il valore della costanza elastica di una molla reale e dell'accelerazione di gravità attraverso due metodi differenti.

2 Materiali e apparato sperimentale

L'apparato sperimentale consiste:

- Una molla appesa al suuporto
- Bilance per la misura della massa di 10 dischetti
- Un cronometro per le misure del periodo

Data l'impossibilità di recarci in laboratorio abbiamo utilizzato dei dati sperimentali.

3 Strategie e formule utilizzate

Per ricavare k della molla e g attraverso l'oscillazione di una molla per una massa appesa si utilizza la legge di Hooke in una dimensione:

$$F = -k\Delta(x) = -k(x - x_0)$$

dove F è la forza elastica, Δx è l'elongazione della molla, x è la posizione finale della molla e x_0 è la posizione di equilibrio.

Risolvendo l'equazione differenziale di secondo grado si ottiene la soluzione generale:

$$x = x_0 + A\cos(wt + \varphi)$$

con w^2 = k/m (pulsazione), A=ampiezza, φ=fase.
Il periodo di oscillazione è legato alla pulsazione dalla relazione:

$$T = \frac{2\pi}{w} = 2\pi\cos(\sqrt{\tfrac{m}{k}})$$

Poiché la massa è appesa, il valore della Forza elastica dipende anche dalla Forza-peso, per cui la formula diventa:

$$F = -k\Delta x + mg = -k(x - x_0) + mg$$

che ha come soluzione:

$$x = x_0 + \frac{mg}{k} + A\cos(wt + \varphi)$$

che nel caso statico risulta:

$$x = x_0 + \frac{mg}{k}$$

Poiché l'esperimento si basa sullo studio di una molla reale e non ideale, la posizione di equilibrio e la massa totale dell'oscillatore sono ignoti. E' necessario quindi calcolare:

- k utilizzando due diverse misure di periodo per masse diverse:

$$k = \frac{4\pi^2(m2 - m1)}{T2^2 - T1^2}$$

- g utilizzando due diverse misure di allungamento su masse diverse:

$$g = \frac{k(x_{\mathrm{eq2}} - x_{\mathrm{eq1}})}{(m2 - m1)}$$

3.1 Incertezza

Per $k = \dfrac{4\pi^2(m2 - m1)}{T2^2 - T1^2}$ bisogna utilizzare la formula di propagazione delle incertezze attraverso la serie di Taylor:

$$\sigma(k) = 4\pi^2\sqrt{(\frac{d(k)}{d(T2)}\sigma T2)^2 + (\frac{d(k)}{d(T1)}\sigma T1)^2}$$

Per $g = \dfrac{k(x_{\mathrm{eq2}} - x_{\mathrm{eq1}})}{(m2 - m1)}$ la formula di propagazione delle incertezze è:

$$\sigma(g) = \frac{1}{m2 - m1}\sqrt{(\frac{d(g)}{d(k)}\sigma(k))^2 + (\frac{d(g)}{d(x_{\mathrm{eq2}})}\sigma(x_{\mathrm{eq2}}))^2 + (\frac{d(g)}{d(x_{\mathrm{eq1}})}\sigma(x_{\mathrm{eq1}}))^2}$$

Da queste formule si può poi calcolare l'incertezza relativa di k e g esprimibili come:

- $\dfrac{\sigma(k)}{k}$
- $\dfrac{\sigma(g)}{g}$

Attraverso il metodo grafico è possibile linearizzare una funzione $f(x)$ tramite una retta approssimante della forma $y = a + bx$

- $E[b] = \frac{Cov(x,y)}{Var[x]}$
- $\sigma[b] = \frac{1}{\sum_{n=1}^{n} \frac{1}{\sigma^2(y) * Var[x]}}$
- $E[a] = \bar{y} - \bar{x} * E[b]$
- $\sigma[a] = \frac{1}{\sum_{n=1}^{n} \frac{1}{\sigma^2(y)}} * \sqrt{\frac{x^2}{Var[x]}}$

Per valutare se la retta di approssimazione è efficace, si calcola il coefficiente di determinazione indicato con r^2 dato da:

$$\frac{Cov^2(xy)}{Var(x)Var(y)}$$

Il suo valore è sempre compreso tra 0 e 1 e coincide con il quadrato del coefficiente di correlazione (p^2). In questo modo si può studiare:

1. il periodo di oscillazione in funzione della massa:

$$T^2 = {T_0}^2 + \alpha 2m$$

2. l'elongazione della molla in funzione della massa:

$$x_{\text{eq}} = x_0 + (m_0 + m)\frac{g}{k} = {x_0}' + \alpha 2m$$

3. l'elongazione della molla in funzione del periodo di oscillazione:

$$x_{\text{eq}} = x_0 + \alpha 3T^2$$

Poiché $\alpha 1 = \frac{4\pi^2}{k}$, k può essere ricavato come:

$$k = 4\frac{\pi^2}{\alpha 1}$$

e la sua incertezza diventa:

$$\sigma(k) = 4\pi^2\sigma(\alpha 1)$$

Dai valori di $\alpha 1$, $\alpha 2$ e $\alpha 3$, inoltre, è possibile ricavare g esprimibile come:

1. $g = 4\pi^2\frac{\alpha 2}{\alpha 1}$
2. $g = \frac{4\pi^2}{\alpha 3}$

L'incertezza su g dalla prima formula è

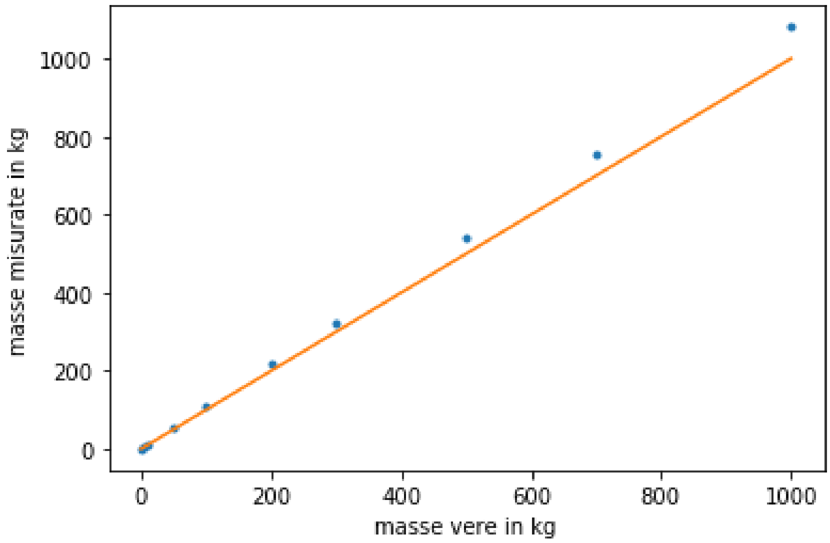
$$\sigma(g) = 4\pi^2\frac{\alpha 2}{\alpha 1}\sqrt{\sigma(\alpha 2)^2 + \sigma(\alpha 1)^2}$$

L'incertezza su g dalla seconda formula è

$$\sigma(g) = \frac{4\pi^2}{\alpha 3^2\sigma(\alpha 3)}$$

3.2 Accorgimenti

- Errore di offset:
  Analizzando i dati relativi alle masse si notano delle disuguaglianze tra il valore delle masse reali e il valore delle masse misurate per cui è necessaria una correzione. Confrontando la retta dei valori medi con quella ideale, ovvero avente offset pari a zero e pendenza di 45°, si determina l'errore di offset, in corrispondenza dell'intercetta della retta.

  Dal grafico si può concludere che l'errore di offset può essere trascurato.

- Poiché si tratta di una molla reale, l'allungamento viene stimolato a partire da un preciso valore della massa per cui risulta che i valori di T0 e T1 del periodo di oscillazione presenti nella tabella siano pari a 0. Nei calcoli, quindi, sono stati trascurati.

5 periodi in s

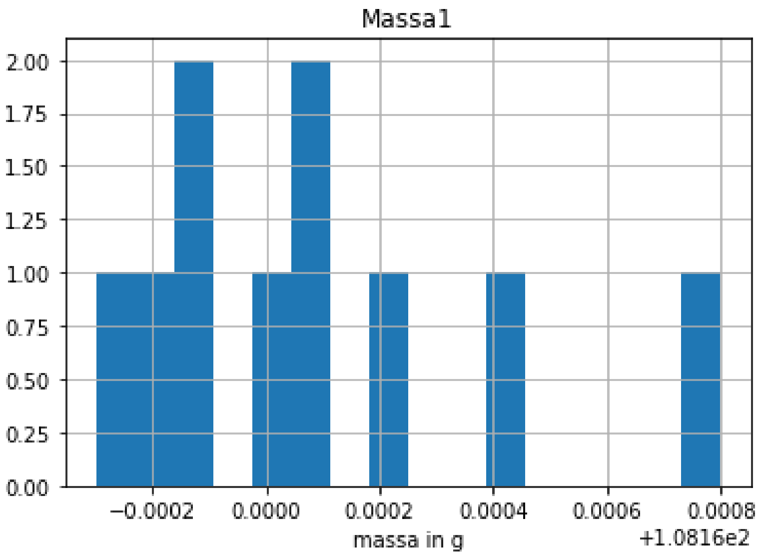
T0	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8	T9
0.0	0.0	1.974	2.355	2.723	2.888	3.045	3.299	3.661	3.905
0.0	0.0	1.975	2.166	2.726	2.951	3.024	3.495	3.584	3.616
0.0	0.0	2.124	2.21	2.638	2.992	3.21	3.37	3.562	3.804
0.0	0.0	2.075	2.201	2.677	3.042	3.282	3.536	3.527	3.64
0.0	0.0	2.07	2.509	2.65	2.809	3.095	3.641	3.842	3.687
0.0	0.0	2.242	2.261	2.486	2.665	3.212	3.381	3.341	4.002
0.0	0.0	1.97	2.22	2.659	2.798	3.329	3.465	3.498	3.548
0.0	0.0	2.086	2.309	2.688	2.971	3.031	3.42	3.524	3.547
0.0	0.0	2.19	2.524	2.608	2.928	3.309	3.285	3.518	3.65
0.0	0.0	2.113	2.246	2.51	2.957	3.14	3.254	3.388	3.816

4 Misure di k e g

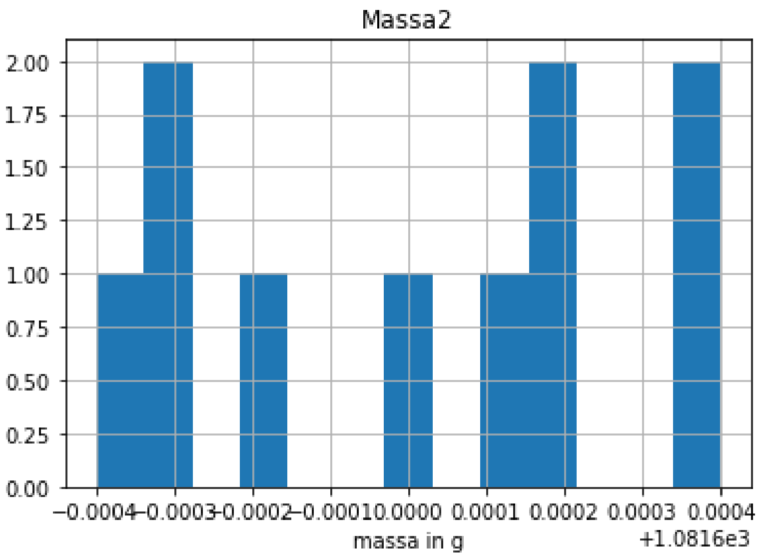
La misura indiretta di k e g prevede l'analisi di misure che dipendono da molteplici parametri che potrebbero innalzare il valore dell'incertezza totale. Per ridurla, vengono utilizzati due diversi metodi.

5 Metodo 1

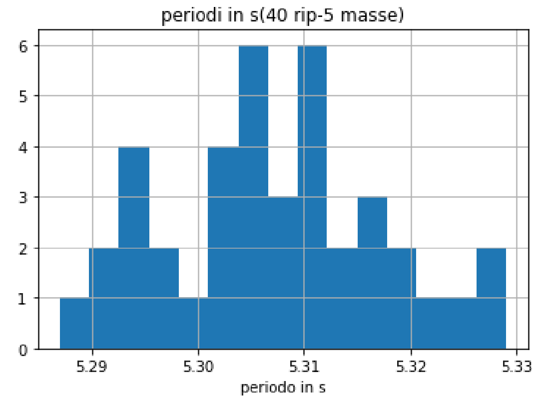
- misura della massa complessiva di 5 dischetti

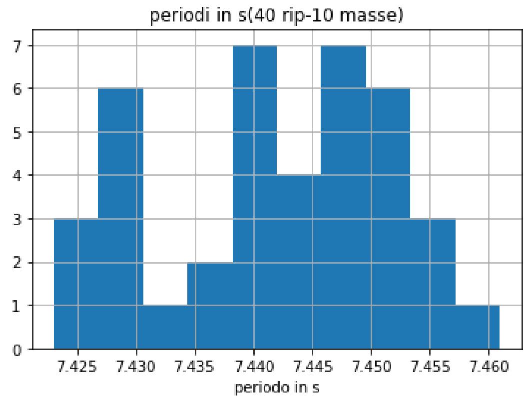


- misura della massa complessiva di 10 dischetti

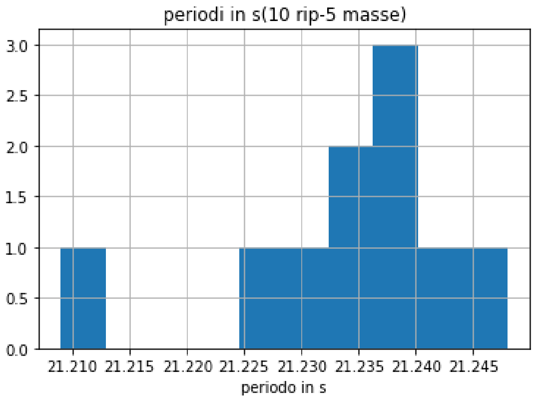


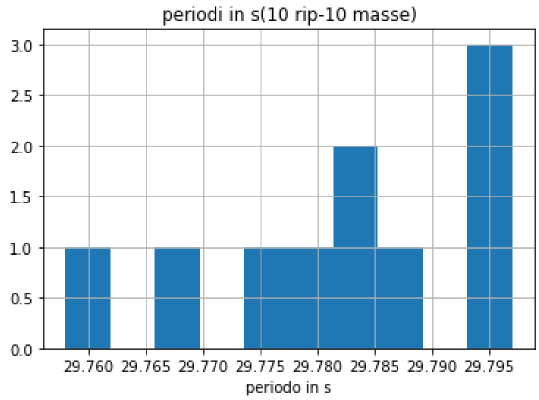
- misura dell'allungamento per i 5 dischetti e per i 10 dischetti per 10 volte ciascuno
- misura del periodo di oscillazione per 5 dischetti e per 10 dischetti:
  - misura del tempo complessivo di 10 oscillazioni ripetuta per 40 volte.





  - misura del tempo complessivo di 40 oscillazioni ripetuta per 10 volte.





- Analisi dei dati raccolti: tabella con valori medi e incertezze per misure ripetute:

  Da questi dati è possibile ricavare la misura di k e g con la relativa incertezza nei due casi analizzati:
  - 1°caso (10 ripetizioni 40 oscillazioni):

$$k = (52.9 \pm 0.034) N/m$$

$$g = (9.75 \pm 0.076) m/s^2$$

  - 2°caso (40 ripetizioni 10 oscillazioni):

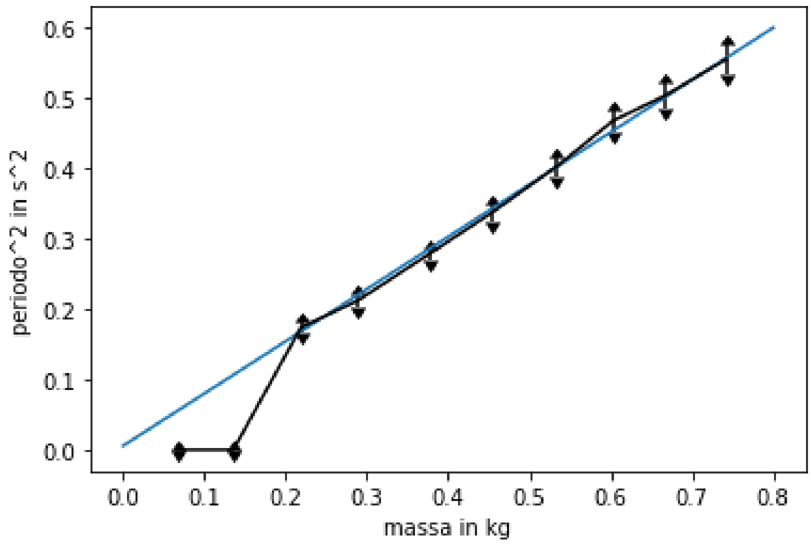
$$k = (53.0 \pm 0.057) N/m$$

$$g = (9.76 \pm 0.073) m/s^2$$

Non è stata presa in considerazione l'incertezza sulle masse per la misura di k poiché è $\ll$ di quella dei periodi e pertanto può essere trascurata.

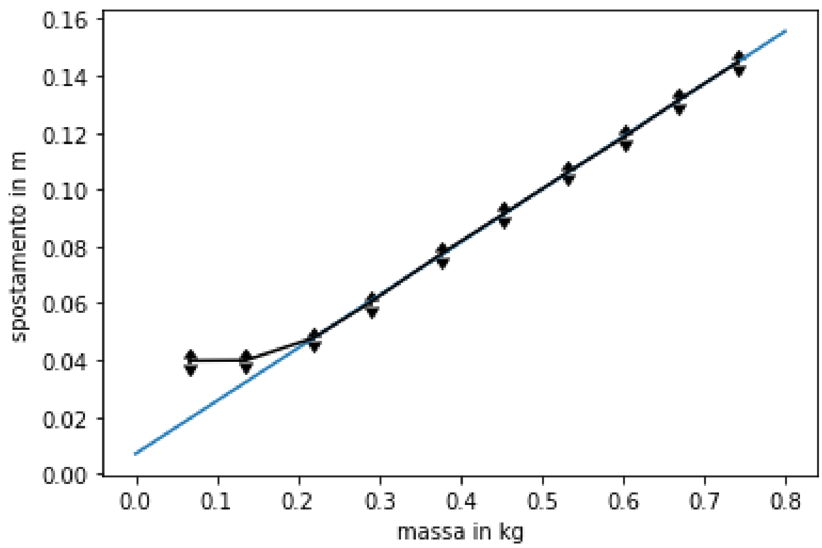
6 Metodo 2 (metodo grafico)

- misura della massa dei 10 dischetti in modo integrato con 10 ripetizioni ciascuna.
- misura dell'allungamento e del periodo di oscillazione ad ogni integrazione dei dischetti (20 misure per 10 oscillazioni per il periodo).
- Il grafico mostra l'andamento di T^2 in funzione della massa: il coefficiente angolare



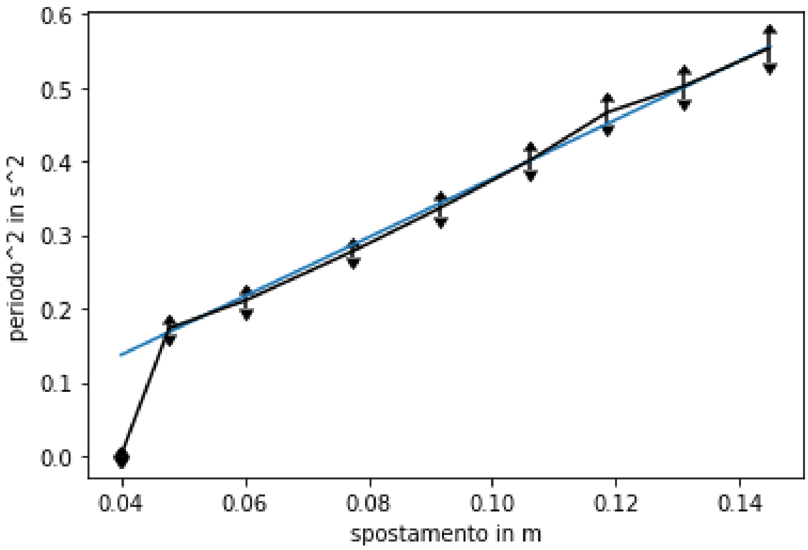
della retta $\alpha 1 = 0.997$

- Il grafico mostra l'andamento di x_{eq} in funzione della massa: il coefficiente angolare



della retta $\alpha 2 = 0.999$

- Il grafico mostra l'andamento di x_{eq} in funzione di T^2 il coefficiente angolare della



retta $\alpha 3 = 0.996$

Dal coefficiente angolare alfa1 della retta di interpolazione è possibile ricavare il valore di k con la relativa incertezza:

$$k = (\frac{4\pi^2}{\alpha 1} \pm \sigma(k)) = (53.3 \pm 1.8)N/m$$

Dai coefficienti angolari $\alpha 1$, $\alpha 2$ e $\alpha 3$ delle relative rette di interpolazione è possibile calcolare g con incertezza in due modi differenti:

- $1° g = (4\pi^2 \frac{\alpha 2}{\alpha 1} \pm \sigma(g)) = (9.88 \pm 1.3)m/s^2$
- $2° g = (\frac{4\pi^2}{\alpha 3} \pm \sigma(g)) = (9.89 \pm 0.33)m/s^2$

La tabella mostra i valori di tutte le misure di k e g con le incertezze ricavate con i due metodi:

Grandezza	Misura(N/m)	Inc.assoluta(N/m)	Inc.relativa
k metodo1 caso 10ripetizioni	52.9	0.034	0.65%
k metodo2 caso 40ripetizioni	53.0	0.057	0.11%
k metodo2	53.3	1.8	3.4%

Grandezza	Misura(m/s^2)	Inc.assoluta(m/s^2)	Inc.relativa
g metodo1	9.75	0.076	0.78%
g metodo2 $\alpha 3$	9.88	0.33	3.3%
g metodo2 $\frac{\alpha 2}{\alpha 1}$	9.88	1.3	13%

7 Conclusione

La misura di k con il primo metodo mostra come l' incertezza relativa calcolata per il primo caso (40 oscillazioni per 10 ripezioni), che risulta rispettivamente dello $0,65\%$, sia lievemente maggiore a quella calcolata per il secondo caso (10 oscillazioni per 40 ripetizioni), che si riduce allo $0,11\%$. Questo risultato è dimostrato dal fatto che l'incertezza di tipo B, causata da errori legati allo strumento utilizzato e ai materiali di riferimento, può essere corretta aumentando il numero di misure della stessa grandezza fisica. I valori delle incertezza relative di g calcolate nei due differenti casi con il secondo metodo, invece, si discostano notevolmente l'uno dall'altro. Ricavando g dal rapporto $\frac{\alpha 2}{\alpha 1}$ rispetto ad $\alpha 3$, infatti, si deve propagare l'incertezza di due variabili calcolate, a loro volta, indirettamente. Confrontando, infine, i valori delle incertezze relative di k e g dal primo metodo con quelli del secondo metodo si nota come, sebbene la costruzione di una retta dei dati interpolante permetta di studiare la dipendenza lineare delle variabili interessate e capirne la correlazione fisica, le approssimazioni grafiche determinano una crescita significativa dell'incertezza sulle misure.

8 Quesiti

1. Per riproducibilità di una misura si intende il grado di concordanza tra le misure effettuate sullo stesso misurando con diversi metodi e condizioni di misura (diversi strumenti, operatori, luoghi e tempi).

2. La valutazione dell'incertezza di tipo A, calcolata con metodi statistici, si applica quando sono state eseguite un numero adeguato di misurazioni indipendenti di una grandezza X sotto le stesse condizioni e i cui valori sono diversi tra loro. Nell'esperienza della molla il calcolo della deviazione standard della media di k e g ne è un esempio.

3. L'incertezza di tipo B si applica quando nell'esecuzione di una misura i valori registrati si ripetono uguali a se stessi. In questo caso non è possibile utilizzare metodi statistici e la valutazione di questo tipo di incertezze richiede un'adeguata analisi della situazione sperimentale utilizzata. Bisogna,quindi, tener conto di diversi fattori come la taratura della strumentazione o le caratteristiche dei materiali e degli strumenti impiegati. Nell'esperienza della molla, per esempio, l'utilizzo di una strumentazione digitale per misurare i periodi di oscillazione e l'elongazione ha reso necessaria la misura di n multipli della stessa grandezza per ottenere una media campionaria di valori.

4. L'incertezza di misurare piu periodi è differente da quella di misurare piu volte lo stesso periodo poiché nel primo caso si effettua una valutazione nelle stesse condizioni di misura mentre nel secondo caso si colleziona un maggior numero di misure sulla stessa grandezze. In quest'ultimo modo si riduce lo scarto massimo.

5. $\sigma(T^2)$ è l'incertezza della variabile casuale T^2. La propagazione $\sigma(T)$ è un'approssimazione di $\sigma(T^2)$ a partire da T usando la formula di espansione di Taylor.

6. Ripetendo una misura nelle stesse condizioni per un numero n di volte che tende ad infinito e si traccia l'istogramma, questo tenderà ad un gaussiana(teorema del limite centrale). I bin, pertanto, devo essere scelti in modo che i valori siano contenuti nel grafico.

7. Il coefficiente angolare b della retta interpolazione del tipo $y = a + bx$ può essere ricavato come $\frac{Cov(x,y)}{Var(x)}$.

8. Il contributo dominante di un'incertezza di misura si valuta confrontando quest'ultima con l'incertezza delle altre grandezze di riferimento. Data una funzione G(x,y), se $\sigma(x) \ll \sigma(y)$, l'incertezza di x può essere trascurata.

9. Il modo corretto di scrivere il risultato di una misura consiste nel riportare il valore atteso con l'incertezza di misura correlata, che tiene conto sia delle incertezze di tipo A e che di tipo B, impiegando le opportune cifre significative e unità di misura tali da non perdere informazioni. Nell'esperienza della molla, per esempio, il valore di g ricavato dai calcoli è di 9.75m/s^2 con l'incertezza di 0.076m/s^2. Poiché l'incertezza relativa di g con due cifre significative è dello 0,78% e con tre è lo stesso, il risultato corretto è: g= (9.75 $\pm$ 0.076) m/s^2

10. Estrarre g dal rapporto $\frac{\alpha 2}{\alpha 1}$ rispetto ad $\alpha 3$ comporta un aumento dell'incertezza poiché bisogna tener conto dell'incertezza combinata di due variabili anziché una. Dai calcoli risulta che l'incertezza aumenti di circa il 10%.