Міністерство освіти і науки України
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара
Факультет прикладної математики
Кафедра комп'ютерних технологій

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №2

Виконавець: студент групи ПК-21м-1
Панасенко Єгор
Сергійович

Постановка задачі

Тема роботи: Чисельний синтез регулятору у задачі керування методом АКАР.

Мета роботи: Викорисовуя Maple(Матлаб) та постановку задач керування отримати навички чисельного розв'язання задач синергетичного керування у вигляді ЗДР 1-го порядку.

Завдання. Побудувати регулятор до системи 1-го порядку використовуя метод АКАР та різни види функції $\psi(x)$.

Постанова задачи.

$$\dot{x}(t) + ax = u. \tag{3.1}$$

Потрібно визначити закон керування $u(\psi) = u(x_1, ..., x_n)$, який забезпечує перехід точки відображення (ТВ) системи (3.1) з будь якого початкового стану $x_0 = (x_{10}, ..., x_{n0})$ (деякої допустимої області) спочатку в окіл многовиду

$$\psi(x_1, ..., x_n) = 0 \tag{3.2}$$

у просторі координат $x_1, \ldots, x_n$, а далі рух ВТ системи уздовж цього многовиду в початок координат $(x_{1k} = \ldots = x_{nk} = 0)$ простору стану. При цьому на траєкторіях руху до многовиду (3.2) має місто мінімум супроводжувального функціоналу

$$\mathbf{J} = \int_0^\infty F(\psi, \dot{\psi}) dt. \tag{3.3}$$

Підінтегральна функція у (3.3) явно від змінної t не залежить, тому рівняння Ейлера-Лагранжа буде мати перший інтеграл, який має вигляд

$$F(\psi, \dot{\psi}) - \frac{\partial F(\psi, \dot{\psi})}{\partial \dot{\psi}} \dot{\psi}(t) = C. \tag{3.4}$$

Далі, так як верхня межа інтегралу (3.3) дорівнює нескінченності (∞), то для його збіжності та стійкості системи слідує надати в співвідношенні (3.4) = 0. Тоді з (3.4) маємо наступне рівняння

$$F(\psi,\dot\psi)=\frac{\partial F(\psi,\dot\psi)}{\partial\dot\psi}\dot\psi(t), \tag{3.5}$$

якому необхідно задовольнити при розв'язку задачи синтезу оптимального керування. Підставивши у співвідношення (3.5) підінтегральний вираз

$$F(\psi,\dot\psi)=m^2\psi^2+c^2\dot\psi^2(t)$$

або більш загальне співвідношення

$$F(\psi,\dot\psi)=m^2\varphi^2(\psi)+c^2\dot\psi^2(t)$$

отримуємо диференціальне рівняння

$$m^2\psi^2=c^2\dot\psi^2(t) \tag{3.6}$$

або в загальному вигляді

$$m^2\varphi^2(\psi)=c^2\dot\psi^2.$$

Його розв'язок має підродину стійких та нестійких екстремалей. Очевидно, що родина стійких (відносно $\psi(x_1,...,x_n)=0$) екстремалей визначається рівнянням

$$T\dot\psi(t)+\psi=0, \tag{3.7}$$

або

$$T\dot\psi(t)+\varphi(\psi)=0,$$

яке має для рівняння з (3.7) розв'язок

$$\psi(t)=\psi_0e^{\frac{-t}{T}},T=c/m.$$

Умови асимптотичної сталості у цілому для рівняння (3.6) відносно многовиду $\psi(x_1,...,x_n)=0$ мають вигляд $T>0$.

Таким чином, квадратичному відносно функцій ψ та $\dot\psi(t)$, функціоналу (3.3) відповідають умови оптимальності, представлені у вигляді диференційного рівняння Ейлера-Лагранжа (3.4). Враховуючи, що функція ψ залежить від змінної x, представимо рівняння (3.7) у вигляді

$$T\frac{\partial\psi}{\partial x}\dot x(t)+\psi(x)=0. \tag{3.8}$$

Якщо скористатися властивістю інваріантності рівняння Ейлера-Лагранжа, а також вибором функції $\psi=x$ можливо записати рівняння (3.8), з урахуванням, наприклад рівняння системи (3.1) у вигляді

$$Tu-aTx+x=0,u=-(\frac{1}{T}-a)x.$$

Отримане керування співпадає с законом керування, якій був отриманий у лабораторної роботі № 1.

Крім того, певна свобода вибору функції ψ дозволяє наділити синтезуєму систему додатковими якостями, що важливо для нелінійних систем високого порядку. Відмітимо, що вказана сталість не залежить від виду нелінійних функцій в правих частинах ЗДР.

Завдання до виконання.

1. Побудувати графічне представлення поведінки системи (3.1) яка замкнута отриманим синергетичним регулятором.

2. Використати функцію $\psi = th(x)$. Дослідити час руху системи (3.1) з деякого початкового стану x_0 в кінцевий стан x_k , як $t_p = Tln \mid \frac{thx_0}{thx_k} \mid$, прийняв $x_k = Mx_0$, де $M = 0.05$. Визначити стан $x_0 < 1,0; x_0 = 5.0; x_0 > 10.0$.

3. Зробити висновки відносно поведінки стану системи у залежності від вигляду функції $\psi = th(x)$.

Хід роботи

Розглянемо диференціальне рівняння:

$$\frac{d}{dt}x(t) = -ax(t) + u(x(t), a, T)$$

Родина стійких екстремалей визначається рівнянням:

$$T\left(-ax(t) + u(x(t), a, T)\right)\frac{d}{dx(t)}\psi(x(t)) + \psi(x(t)) = 0$$

Візмемо:

$$\psi(x(t)) = x(t)$$

Підставимо у рівняння:

$$T\left(-ax(t) + u(x(t), a, T)\right)\frac{d}{dx(t)}x(t) + x(t) = 0$$

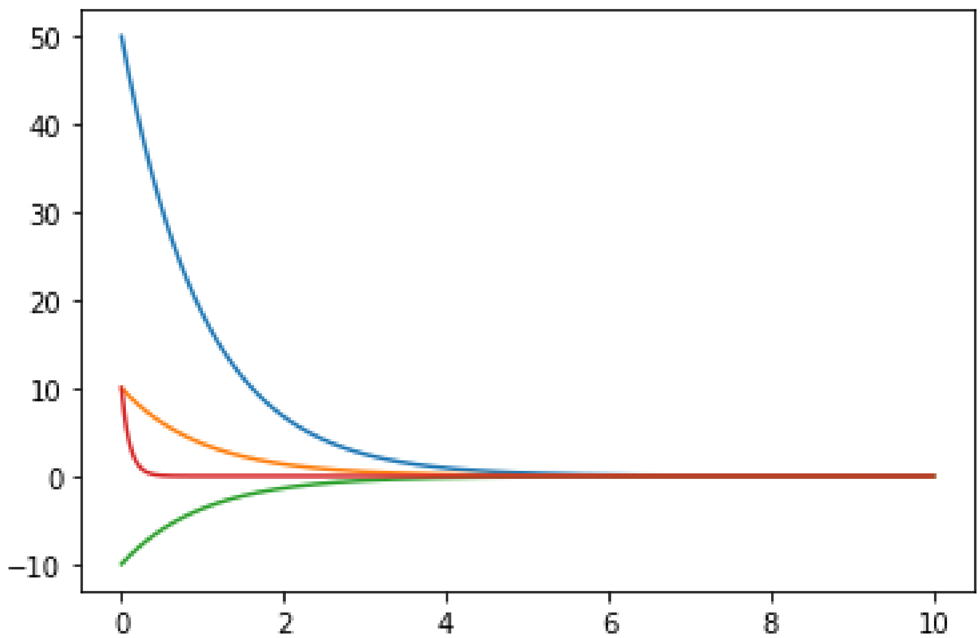
$$T\left(ax(t) - u(x(t), a, T)\right) - x(t) = 0$$

Знайдемо управління:

$$\frac{(Ta - 1)\,x(t)}{T}$$

Підставимо у рівняння отримане управління:

$$\frac{d}{dt}x(t) = -ax(t) + \frac{(Ta - 1)\,x(t)}{T}$$



Розглянемо диференціальне рівняння:

$$\frac{d}{dt}x(t) = -ax(t) + u(x(t), a, T)$$

Родина стійких екстремалей визначається рівнянням:

$$T\left(-ax(t) + u(x(t), a, T)\right)\frac{d}{dx(t)}\psi(x(t)) + \psi(x(t)) = 0$$

Візмемо:

$$\psi(x(t)) = \tanh\left(x(t)\right)$$

Підставимо у рівняння:

$$T\left(-ax(t) + u(x(t), a, T)\right)\frac{d}{dx(t)}\tanh\left(x(t)\right) + \tanh\left(x(t)\right) = 0$$

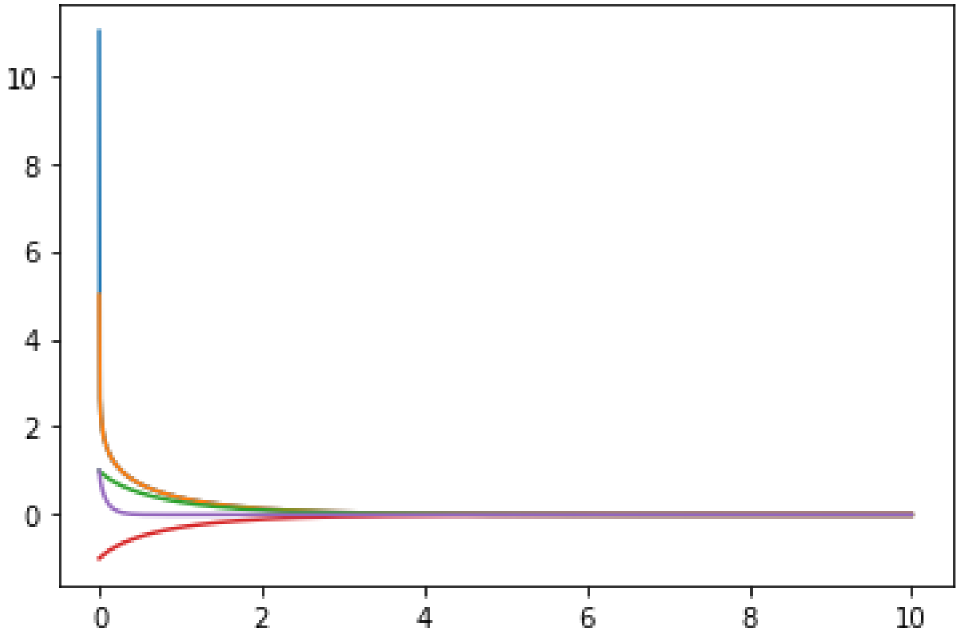
$$T\left(1 - \tanh^2\left(x(t)\right)\right)\left(ax(t) - u(x(t), a, T)\right) - \tanh\left(x(t)\right) = 0$$

Знайдемо управління:

$$ax(t) - \frac{\sinh\left(2x(t)\right)}{2T}$$

Підставимо у рівняння отримане управління:

$$\frac{d}{dt}x(t) = -\frac{0.5\sinh(2x(t))}{T}$$



Код програми

```
#!/usr/bin/env python3

from sympy import *
from sympy.solvers.ode.ode import odesimp
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint
from IPython.display import display, Latex
init_printing(use_latex='mathjax')
pprint = display

t, a, T = symbols("t, a, T")
x, u, psi = symbols("x, u, psi", cls=Function)
x = x(t)
psi = psi(x)

def sys(x, t, u, a, T):
    return u(x, a, T) - a * x

def find_u_sys(system, psi_fun):
    print("Розглянемо диференціальне рівняння:")
    pprint(Eq(diff(x,t), sys(x, t, u, a, T)))
    print("Родина стійких екстремалей визначається рівнянням:")
    eq = Eq(T*diff(psi, x)*sys(x, t, u, a, T) + psi, 0)
    pprint(eq)
    print("Візмемо:")
    pprint(Eq(psi, psi_fun))
    eq = eq.subs(psi, psi_fun)
    print("Підставимо у рівняння:")
    pprint(eq)
    eq = simplify(eq)
    pprint(eq)
```

```
    sol = solve(eq, u(x, a, T))[0]
    print("Знайдемо управління:")
    pprint(sol)
    return lambdify([x, a, T], sol, modules='sympy')

def find_x_sys(system, u):
    sol = sys(x, 0, u, a, T)
    print("Підставимо у рівняння отримане управління:")
    pprint(Eq(diff(x,t), sol))
    return lambdify((x, t, a, T), sol, modules='sympy')

u_sol = find_u_sys(sys, x)
x_sol = find_x_sys(sys, u_sol)

plt.figure(1)
tspan = np.linspace(0, 10, 1000)
plt.plot(tspan, odeint(x_sol, 50, tspan, args=(10, 1)))
plt.plot(tspan, odeint(x_sol, 10, tspan, args=(10, 1)))
plt.plot(tspan, odeint(x_sol, -10, tspan, args=(10, 1)))
plt.plot(tspan, odeint(x_sol, 10, tspan, args=(1, 0.1)))
plt.show(block=False)

print()
u_sol = find_u_sys(sys, tanh(x))
x_sol = find_x_sys(sys, u_sol)
x_sol = lambda x, t, a, T: -0.5*np.sinh(2*x)/T

tspan = np.linspace(0, 10, 1000)

plt.figure(2)
plt.plot(tspan, odeint(x_sol, 11, tspan, args=(10, 1)))
plt.plot(tspan, odeint(x_sol, 5, tspan, args=(10, 1)))
plt.plot(tspan, odeint(x_sol, 1, tspan, args=(10, 1)))
plt.plot(tspan, odeint(x_sol, -1, tspan, args=(10, 1)))
plt.plot(tspan, odeint(x_sol, 1, tspan, args=(1, 0.1)))
plt.show()
```