Міністерство освіти і науки України
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара
Факультет прикладної математики
Кафедра комп'ютерних технологій

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №1

Виконавець: студент групи ПК-21м-1
Панасенко Єгор
Сергійович

Постановка задачі

2. Лабораторна робота № 1

Тема роботи: Використання середовища Maple (MatLab) для чисельного розв'язання задач синергетичного керування.

Мета роботи: Ознайомитися з середовищем Maple 13 (MatLab) та методом АКАР для чисельного розв'язання наступної найпростейшей задачи синергетичного керування.

Побудувати регулятор до системи:

$$\dot{x}(t) + ax = u. \tag{2.1}$$

Критерій якості побудувати на основі наступного супроводжуваючого функціоналу

$$\mathbf{I}_1 = \int_0^\infty F(\psi, \dot{\psi})dt = \int_0^\infty [m^2\psi^2(x) + c^2\dot{\psi}^2(t)]dt \tag{2.2}$$

Тут $\psi(x)$ - деяка функція змінної x . Повна похідна функції $\psi(x)$ по часу має вигляд

$$\dot{\psi}(t) = \frac{\partial\psi}{\partial x}\dot{x}(t). \tag{2.3}$$

Визначимо далі похідну $\psi(x)$ на розв'язках системи (2.1). Для цього підставимо у співвідношення (2.3) похідну $\dot{x}(t) = u - ax$ з рівняння (2.1). Маємо наступне співвідношення

$$\dot{\psi}(t) = \frac{\partial\psi}{\partial x}(u - ax). \tag{2.4}$$

Далі підставимо це співвідношення (2.4) у функціонал (2.2):

$$\mathbf{I}_1 = \int_0^\infty [m^2\psi^2(x) + c^2\dot{\psi}^2(t)]dt = \int_0^\infty [m^2\psi^2(x) + c^2(\frac{\partial\psi}{\partial x})^2(u - ax)^2]dt =$$
$$\int_0^\infty [m^2\psi^2(x) + c^2(\frac{\partial\psi}{\partial x})^2(u^2 - 2axu + a^2x^2)]dt. \quad (2.5)$$

Це дозволяє в деякої сенсі врахувати якості об'єкту при побудові критерію якості системи. Якщо для простоти положити, що функція $\psi(x) = x$ тоді функціонал (2.5) буде наступним

$$\mathbf{I}_1 = \int_0^\infty [(m^2 + c^2a^2)x^2 - 2auc^2 + c^2u^2]dt. \quad (2.6)$$

Для пошуку керування $u(x)$, яке доставляє мінімум критерію (2.6) використовуємо метод Ейлера-Лагранжа. Побудуємо лагранжіан, маючі на увазі підінтегральне співвідношення з (2.6) та рівняння руху (2.1):

$$L = (m^2 + c^2a^2)x^2 - 2auc^2 + c^2u^2 + \lambda(t)(\dot{x} + ax - u), \quad (2.7)$$

де $\lambda(t)$ функція Лагранжу.

Далі запишемо систему рівнянь Ейлера-Лагранжа:

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 2(m^2 + c^2a^2)x - 2ac^2u + \lambda(t)a - \dot{\lambda}(t) = 0,$$
$$\frac{\partial L}{\partial u} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} = 2c^2u - 2ac^2x - \lambda(t) = 0, \quad (2.8)$$

які сумісно з рівнянням системи (2.1) дозволяють отримати розв'язок задачи оптимізації. Для чого знайдемо керування $u(t)$ з (2.1) та підставимо його у співвідношення (2.8) як $\dot{x}(t) + ax = u$. Получимо два рівняння, що дають наприкінці наступне співвідношення у вигляді звичайного диференціального рівняння (після виконання деяких підставлень):

$$c^2\ddot{x}(t) = m^2x, \ddot{x}(t) = \frac{m^2}{c^2}x.$$

Його загальний розв'язок має вигляд

$$x(t) = c_1e^{\frac{-mt}{c}} + c_2e^{\frac{+mt}{c}}. \quad (2.9)$$

Система, яку синтезуємо, повинна мати стійкість, тому з розв'язку (2.9) потрібно виключити другу складову $c_2 e^{\frac{+mt}{c}}$. Таким чином, отримуємо сталу екстремаль

$$x_e(t) = c_1 e^{\frac{-mt}{c}}. \tag{2.10}$$

Використовую отриману екстремаль (2.10) та рівняння системи (2.1) знаходимо керування системи

$$u = \dot{x}(t) + ax = ac_1 e^{\frac{-mt}{c}} - c_1 \frac{m}{c} e^{\frac{-mt}{c}} = -(\frac{m}{c} - a)x.$$

Побудоване керування забезпечую оптимальне по критерію якості (2.6) рух системи (2.1).

Завдання. Побудувати закон керування, використовуя квадратичний критерій якості

$$\mathbf{I}_1 = \int\limits_0^{\infty} [(m^2 - c^2 a^2)x^2 + c^2 u^2] dt. \tag{2.11}$$

Завдання до виконання: Навести візуалізацію отриманих результатів для різних початкових умов та змінної , використовуя критерії (2.6) та (2.11).

Хід роботи

Розглянемо диференціальне рівняння:

$$ax(t) + \frac{d}{dt}x(t) = u(t)$$

Та супроводжуючий функціонал:

$$I_1 = \int\limits_0^{\infty} \left(-2ac^2 u(t) + c^2 u^2(t) + \left(-a^2 c^2 + m^2\right) x^2(t)\right) dt$$

Використаємо метод множників Лагранжа та роздивимось функціонал:

$$J_\lambda = \int\limits_{t_0}^{T} \left(-2ac^2 u(t) + c^2 u^2(t) + \left(-a^2 c^2 + m^2\right) x^2(t) + \left(ax(t) - u(t) + \frac{d}{dt}x(t)\right) \lambda(t)\right) dt$$

Для отримання екстремалей цього функціоналу вирішимо рівняння Эйлера:

$$\begin{bmatrix} a\lambda(t) + 2\left(-a^2 c^2 + m^2\right) x(t) - \frac{d}{dt}\lambda(t) = 0 \\ -2ac^2 + 2c^2 u(t) - \lambda(t) = 0 \end{bmatrix}$$

Вираземо диференціальне рівняння з постановки задачі через u та підставимо у систему:

$$\begin{bmatrix} a\lambda(t) + 2\left(-a^2c^2 + m^2\right)x(t) - \frac{d}{dt}\lambda(t) = 0 \\ -2ac^2 + 2c^2\left(ax(t) + \frac{d}{dt}x(t)\right) - \lambda(t) = 0 \end{bmatrix}$$

Вирішимо систему:

$$x(t) = \frac{C_1 e^{\frac{mt}{c}}}{2c\,(ac+m)} + \frac{C_2 e^{-\frac{mt}{c}}}{2c\,(ac-m)} - \frac{a\left(a^2c^2 - m^2\right)\left(\begin{cases} -\frac{ce^{-\frac{mt}{c}}}{m} & \text{for } m \neq 0 \\ t & \text{otherwise} \end{cases}\right)e^{\frac{mt}{c}}}{2m\,(ac+m)} + \frac{a\left(a^2c^2 - m^2\right)\left(\begin{cases} \frac{ce^{\frac{mt}{c}}}{m} & \text{for } m \neq 0 \\ t & \text{otherwise} \end{cases}\right)e^{-\frac{mt}{c}}}{2m\,(ac-m)}$$

$$\lambda(t) = C_1 e^{\frac{mt}{c}} + C_2 e^{-\frac{mt}{c}} - \frac{ac\left(a^2c^2 - m^2\right)\left(\begin{cases} -\frac{ce^{-\frac{mt}{c}}}{m} & \text{for } m \neq 0 \\ t & \text{otherwise} \end{cases}\right)e^{\frac{mt}{c}}}{m} + \frac{ac\left(a^2c^2 - m^2\right)\left(\begin{cases} \frac{ce^{\frac{mt}{c}}}{m} & \text{for } m \neq 0 \\ t & \text{otherwise} \end{cases}\right)e^{-\frac{mt}{c}}}{m}$$

З розглянутого рішення потрібно залишити тільки сталу екстремаль, тому:

$$x(t) = \frac{C_2 e^{-\frac{mt}{c}}}{2c\,(ac-m)}$$

Знайдемо похідну отриманого рішення:

$$\frac{d}{dt}x(t) = -\frac{C_2 m e^{-\frac{mt}{c}}}{2c^2\,(ac-m)}$$

Виразимо через x заміною

$$\frac{d}{dt}x(t) = -\frac{mx(t)}{c}$$

Підставимо отриманий рішення та похідну у дифференціальне рівняння з постановки задачі та отримаємо наше управління:

$$ax(t) - \frac{mx(t)}{c} = u(t)$$

Підставляючи управління до того ж самого рівняння отримаємо диференціальне рівняння з однією функцією x:

$$\frac{d}{dt}x(t) = -\frac{mx(t)}{c}$$

Розглянемо диференціальне рівняння:

$$ax(t) + \frac{d}{dt}x(t) = u(t)$$

Та супроводжуючий функціонал:

$$I_1 = \int_0^{\infty} \left(c^2u^2(t) + \left(-a^2c^2 + m^2\right)x^2(t)\right)\, dt$$

Використаємо метод множників Лагранжа та роздивимось функціонал:

$$J_\lambda = \int_{t_0}^{T} \left(c^2u^2(t) + \left(-a^2c^2 + m^2\right)x^2(t) + \left(ax(t) - u(t) + \frac{d}{dt}x(t)\right)\lambda(t)\right)\, dt$$

Для отримання екстремалей цього функціоналу вирішимо рівняння Эйлера:

$$\begin{bmatrix} a\lambda(t) + 2\left(-a^2c^2 + m^2\right)x(t) - \frac{d}{dt}\lambda(t) = 0 \\ 2c^2u(t) - \lambda(t) = 0 \end{bmatrix}$$

Вираземо диференціальне рівняння з постановки задачі через u та підставимо у систему:

$$\begin{bmatrix} a\lambda(t) + 2\left(-a^2c^2 + m^2\right)x(t) - \frac{d}{dt}\lambda(t) = 0 \\ 2c^2\left(ax(t) + \frac{d}{dt}x(t)\right) - \lambda(t) = 0 \end{bmatrix}$$

Вирішимо систему:

$$x(t) = \frac{C_1e^{-\frac{mt}{c}}}{2c\left(ac - m\right)} + \frac{C_2e^{\frac{mt}{c}}}{2c\left(ac + m\right)}$$

$$\lambda(t) = C_1e^{-\frac{mt}{c}} + C_2e^{\frac{mt}{c}}$$

З розглянутого рішення потрібно залишити тільки сталу екстремаль, тому:

$$x(t) = \frac{C_1 e^{-\frac{mt}{c}}}{2c\,(ac - m)}$$

Знайдемо похідну отриманого рішення:

$$\frac{d}{dt}x(t) = -\frac{C_1 m e^{-\frac{mt}{c}}}{2c^2\,(ac - m)}$$

Виразимо через x заміною

$$\frac{d}{dt}x(t) = -\frac{mx(t)}{c}$$

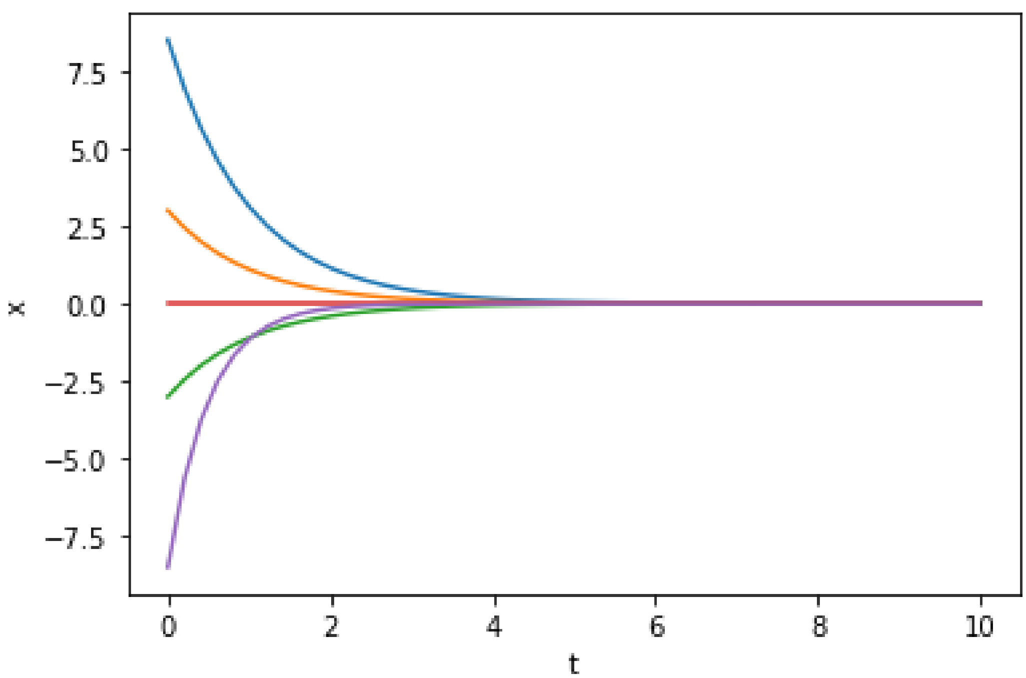
Підставимо отриманий рішення та похідну у дифференціальне рівняння з постановки задачі та отримаємо наше управління:

$$ax(t) - \frac{mx(t)}{c} = u(t)$$

Підставляючи управління до того ж самого рівняння отримаємо диференціальне рівняння з однією функцією x:

$$\frac{d}{dt}x(t) = -\frac{mx(t)}{c}$$

Завдяки тому що ми отримали однаковий оптимальний розв'язок для обох супроводжуючи функціоналів, можна побудувати графік зміни значення x в залежності від часу t:



Код програми

```
#!/usr/bin/env python3
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint
from sympy import *
from IPython.display import display, Latex
init_printing(use_latex='mathjax')
pprint = display

a, m, c, t, T = symbols("a, m, c, t, T")
x, lamb, u = symbols("x, lambda, u", cls=Function)
x, lamb, u = x(t), lamb(t), u(t)

def solv(f0, arg=0):
    e = Eq(diff(x,t)+a*x, u)
    print("Розглянемо диференціальне рівняння:")
    pprint(e)
    print("Та супроводжуючий функціонал:")
    pprint(Eq(symbols("I1"),Integral(f0, (t, 0, oo))))
    F = f0 + lamb * (e.lhs - e.rhs)
    print("Використаємо метод множників Лагранжа та роздивимось функціонал:")
    pprint(Eq(symbols("J_lambda"),Integral(F, (t, symbols("t0"), T))))
    print("Для отримання екстремалей цього функціоналу вирішимо рівняння Эйлера:")
    eq1 = Eq(diff(F, x) - diff(diff(F, diff(x, t)), t), 0)
    eq2 = Eq(diff(F, u) - diff(diff(F, diff(u, t)), t), 0)
    sys = Matrix([eq1, eq2])
    pprint(sys)
    sys = sys.subs(u, e.lhs)
    print("Вираземо диференціальне рівняння з постановки задачі через u та підставимо у
систему:")
    pprint(sys)
    sol = dsolve(sys, [x, lamb])
    print("Вирішимо систему:")
    pprint(sol[0])
    pprint(sol[1])
    xe = sol[0].rhs.args[arg]
    print("З розглянутого рішення потрібно залишити тільки сталу екстремаль, тому:")
    pprint(Eq(x, xe))
    dxe = diff(xe, t)
    print("Знайдемо похідну отриманого рішення:")
    pprint(Eq(diff(x,t), dxe))
    dxe = simplify(dxe/xe)*x
    print("Виразимо через x заміною")
    pprint(Eq(diff(x,t), dxe))
    sol = e.subs(diff(x, t), dxe)
    print("Підставимо отриманий рішення та похідну у дифференціальне рівняння з постановки
задачі та отримаємо наше управління:")
    pprint(sol)
    sol = solve(sol, u)[0]
    sol = solve(e.subs(u, sol), diff(x,t))[0]
    print("Підставляючи управління до того ж самого рівняння отримаємо диференціальне рівняння з
однією функцією x:")
    pprint(Eq(diff(x,t), sol))
    return lambdify([x, t, a, m, c], sol)


def draw() -> None:
    tspan = np.linspace(0, 10)

    plt.plot(tspan, odeint(sys1, 8.5, tspan, args=(0.1, 50, 50)))
    plt.plot(tspan, odeint(sys1, 3, tspan, args=(0.1, 50, 50)))
    plt.plot(tspan, odeint(sys1, -3, tspan, args=(0.1, 50, 50)))
```

```
    plt.plot(tspan, odeint(sys1, 0, tspan, args=(0.1, 50, 50)))
    plt.plot(tspan, odeint(sys1, -8.5, tspan, args=(0.1, 60, 30)))

    plt.xlabel("t")
    plt.ylabel("x")
    plt.show()


sys1 = solv((m**2-c**2*a**2) * x**2 - 2*a*c**2*u + c**2*u**2, 1)
print(" ")
print(" ")
sys2 = solv((m**2-c**2*a**2) * x**2 + c**2*u**2, 0)
print(" ")
print(" ")
print("Завдяки тому що ми отримали однаковий оптимальний розв'язок для обох супроводжуючи
функціоналів, можна побудувати графік зміни значення x в залежності від часу t:")
draw()
```