Міністерство освіти і науки України
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара
Факультет прикладної математики
Кафедра комп'ютерних технологій

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №5

Виконавець: студент групи ПК-21м-1
Панасенко Єгор
Сергійович

Постановка задачі

Тема роботи: Побудова синергетичного регулятору для для дискретно-безперервних систем керування (розробка та створення програми).

Мета роботи: Побудувати та отримати чисельний розв'язок регулятора дискретно-безперервної системи методом АКАР.

Теоретичне введення.

Сформулюємо задачу АКАР для дискретно-безперервних систем. Нехай задана система рівнянь, що описує рух безперервного об'єкта.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= f_1(x_1, ..., x_n); \\ &\dots \\ \dot{x}_n(t) &= f_n(x_1, ..., x_n) + bu[k]. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Необхідно визначити дискретний закон керування $u[k] = u(x_1, ..., x_n)$, що забезпечує переклад ВТ системи з довільного початкового стану $X(x_{10}, ..., x_{n0})$) в початок координат $(x_1 = x_2 = ... = x_n = 0)$ простору станів. При цьому забезпечується мінімум супроводжуючого функціоналу

$$\mathbf{J} = \int_0^\infty F(\psi, \dot{\psi}) dt, \tag{6.2}$$

де $F(\psi, \dot{\psi})$ - неперервно диференційовна по своїх аргументів безумовно-позитивна функція, $\psi(x_1, ..., x_n)$ - агрегована макрозмінна, що представляє собою деяку довільну диференційовану або кусочно-безперервну функцію фазових координат.

Застосуємо до системи (6.1) процедуру разностной апроксимації [14], отримаємо наступні різницеві рівняння

$$\begin{aligned} \Delta x_1[k] &= f_1(x_1[k], ..., x_n[k]), \\ &\dots\dots\dots \\ \Delta x_n[k] &= f_n(x_1[k], ..., x_n[k]) + bu[k], \end{aligned} \tag{6.3}$$

що описують вихідну дискретно-безперервну систему. Тут

$$\Delta x_i[k] = (x_i[k+1] - x_i[k])/T. \tag{6.4}$$

Підставляючи (6.4) у співвідношення (6.3), отримуємо наступну різницеву модель об'єкту

$$
\begin{gathered}
x_1[k+1] = f_1^1(x_1[k], ..., x_n[k]),\\
...\\
x_n[k+1] = f_n^1(x_1[k], ..., x_n[k]) + b^1 u[k],
\end{gathered} \tag{6.5}
$$

де $f_i^1(x_1[k], ..., x_n[k]) = x_i[k] + T f_i(x_1[k], ..., x_n[k])$, $b^1 = bT$, T - крок дискретизації по часу.

Функціонал (6.2) для системи (6.1) запишемо у вигляді

$$
\mathbf{J} = T \sum_{k=0}^{\infty} F(\psi[k], \Delta\psi[k]). \tag{6.6}
$$

Виберемо функцію $F(\psi, \dot{\psi}(t) = m^2\psi^2 + c^2\dot{\psi}^2(t)$, тоді її дискретний аналог має вигляд

$$
F(\psi[k], \Delta\psi[k]) = m^2\psi^2[k] + c^2\Delta\psi^2[k] \tag{6.7}
$$

і функціонал (6.2) набуде вигляду

$$
\mathbf{J} = T \sum_{k=0}^{\infty} (m^2\psi^2[k] + c^2\Delta\psi^2[k]). \tag{6.8}
$$

Рівняння Ейлера -Лагранжа в безперервному випадку має перший інтеграл виду $F(\psi, \dot{\psi}) = \frac{\partial F(\psi, \dot{\psi})}{\partial \dot{\psi}} \dot{\psi}(t) = C$, де $C = 0$. Для дискретно-безперервного випадку, він має такий вигляд

$$
\Delta F_{\Delta\psi}(\psi[k], \Delta\psi[k]) - F_{\psi}(\psi[k+1], \Delta\psi[k+1]) = 0, \tag{6.9}
$$

де $F_{\psi}(\psi[k+1], \Delta\psi[k+1])$- похідна від функції $F(\psi[k+1], \Delta\psi[k+1])$ по змінної ψ. Отримаємо його в явному вигляді для випадку, коли F має вигляд (6.7).

Маємо $F_{\psi} = 2m^2\psi[k]$ та $F_{\Delta\psi} = 2c^2\Delta\psi[k]$.

Таким чином співвідношення (6.9), після підстави вказанних вище значень приймає вигляд

$$
\Delta(2c^2\Delta\psi[k]) - 2m^2\psi[k+1] = \Delta(2c^2\frac{\psi[k+1] - \psi[k]}{T}) - 2m^2\psi[k+1] =
$$

$$
2c^2\Delta(\psi[k+1] - \psi[k]) - 2Tm^2\psi[k+1] = 0.
$$

Положим $\lambda = \frac{m^2}{c^2}$, далі отримуємо що

$$
\Delta(\psi[k+1] - \psi[k]) - T\lambda\psi[k+1] = \frac{\psi[k+2] - \psi[k+1]}{T} -
$$

$$-\frac{\psi[k+1]-\psi[k]}{T}-T\lambda\psi[k+1]=0.$$

Таким чином, отримуємо наступне функціональне рівняння

$$\psi[k+2]-(2+\lambda T^2)\psi[k+1]+\psi[k]=0. \tag{6.10}$$

Воно визначає підродини стійких і нестійких екстремалів. Родина стійких екстремалів описується наступним різницевим рівнянням

$$\psi[k+1]+\alpha\psi[k]=0, \tag{6.11}$$

де $\alpha=1+\frac{1}{2}\lambda T^2-(\lambda T^2+\frac{1}{4}\lambda^2 T^4)$.

Зауваження. Відзначимо, що умова асимптотичної стійкості в цілому рівняння (6.11) має вигляд

$$0<\alpha<1. \tag{6.12}$$

З рівняння (6.11), з урахуванням разностной моделі об'єкта (6.5) можна визначити безліч допустимих законів керування $u(x_1[k],...,x_n[k])$, що забезпечують переклад ВТ системи з довільних початкових умов в околицю різноманіття

$$\psi[k]=0,$$

та утримання її в цій околиці при подальшому русі вздовж $\psi(x_1[k],...,x_n[k])=0$ до положення рівноваги $x_{1k}[NT]=...=x_{nk}[NT]=0$. Рух уздовж різноманіття $\psi[k]=0$ буде описуватись системою різницевих рівнянь розмірності $n-1$:

$$\psi_{i\psi}[k+1]=\hat{f}_i^n(x_{1\psi}[k],...,x_{(n-k)\psi}[k]), i=1,2,...,n-1. \tag{6.13}$$

Для отримання рівнянь (6.13) необхідно з рівняння $\psi[k]=0$ виразити координату $x_n[k]=\varphi(x_1[k],...,x_{n-1}[k])$ і підставити її в перші $(n-1)$ рівнянь системи (6.5). Відзначимо, що замкнута система (6.13) стійка, якщо згідно з критерієм Калмана-Бертман праві частини в (6.13) $\hat{f}_i^n$ є обмеженими за нормою для будь-яких $x[k]$. Дану умову обмеженості $\hat{f}_i^n$ можна представити у вигляді :

$$\max_i\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{c_i}{c_j}\mid h_{ij}(x)\mid\right)<1,$$

для будь-яких x або

$$\max_j\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{c_j}\mid h_{ij}(x)\mid\right)<1,$$

для будь-яких x, тут h_{ij} - елементи матриці $H(x_k)=\frac{\partial\hat{f}_i^n(x[k]}{\partial x_i}$; $c_1,...,c_n$ - позитивні константи.

Умови обмеженості $\hat{f}_i^n$ за нормою разом з умовою (6.12), забезпечують асимптотическую стійкість руху синтезованих методом АКАР дискретно- безперервних систем керування.

Постанова завдання: Використовуя наступну системи рівнянь

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2,\\ \dot{x}_2(t) &= u,\end{aligned} \tag{6.14}$$

перейти до дискретноъ форми представлення та побудувати такі нелінійні дискретны обернені зв'язки $u(x_1, x_2)$, що дозволяють сформувати у структурі системи (6.14) бажані біфуркації:

1. Біфуркацію типу «сідло-вузол»

$$\dot{x}_{1\psi}(t) = \mu - x_{1\psi}^2(t); \tag{6.15}$$

2. Транскритичну біфуркацію

$$\dot{x}_{1\psi}(t) = \mu x_{1\psi}(t) - x_{1\psi}^2(t); \tag{6.16}$$

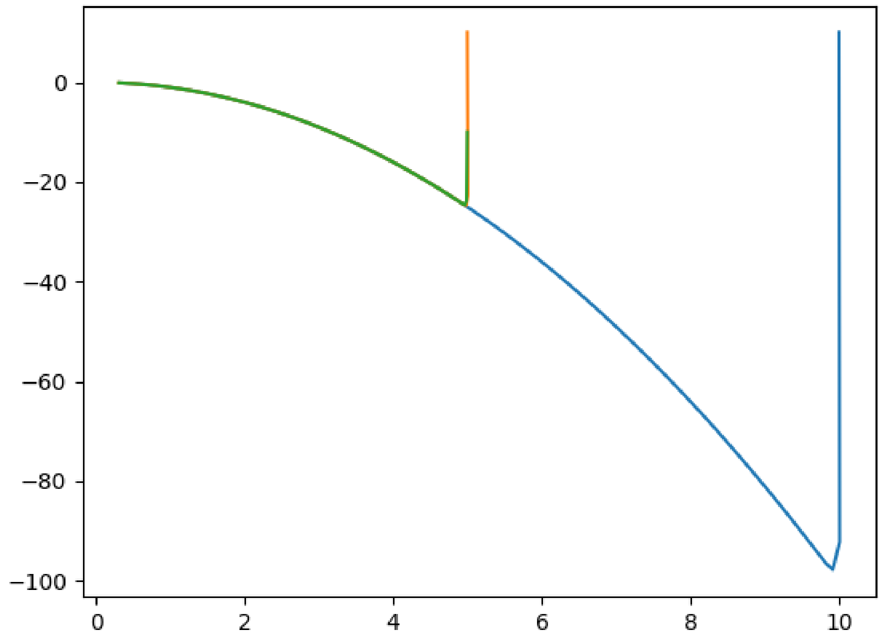
3. Біфуркацію типу «вілки»

$$\dot{x}_{1\psi}(t) = \mu x_{1\psi}(t) - x_{1\psi}^3(t). \tag{6.17}$$

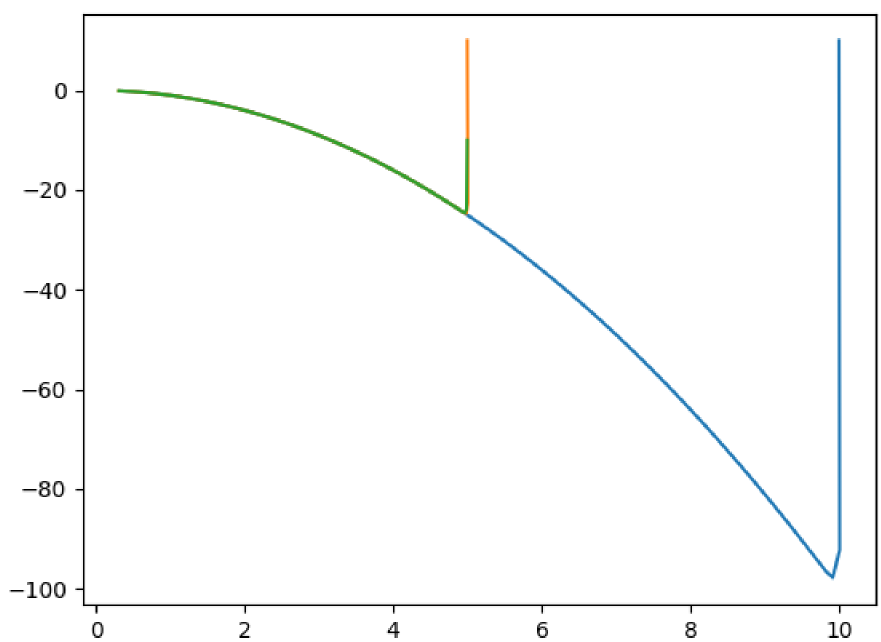
В співвідношеннях (6.15)-(6.17) наведено наступне: $x_{1\psi}(t)$ - параметр порядку, μ – відстань до точки біфуркації. Початкові значення до системи (6.14) вибирати самостійно. 4. Порівняти отримані результати з результатами ,що отрималі у роботі № 4.

Хід роботи

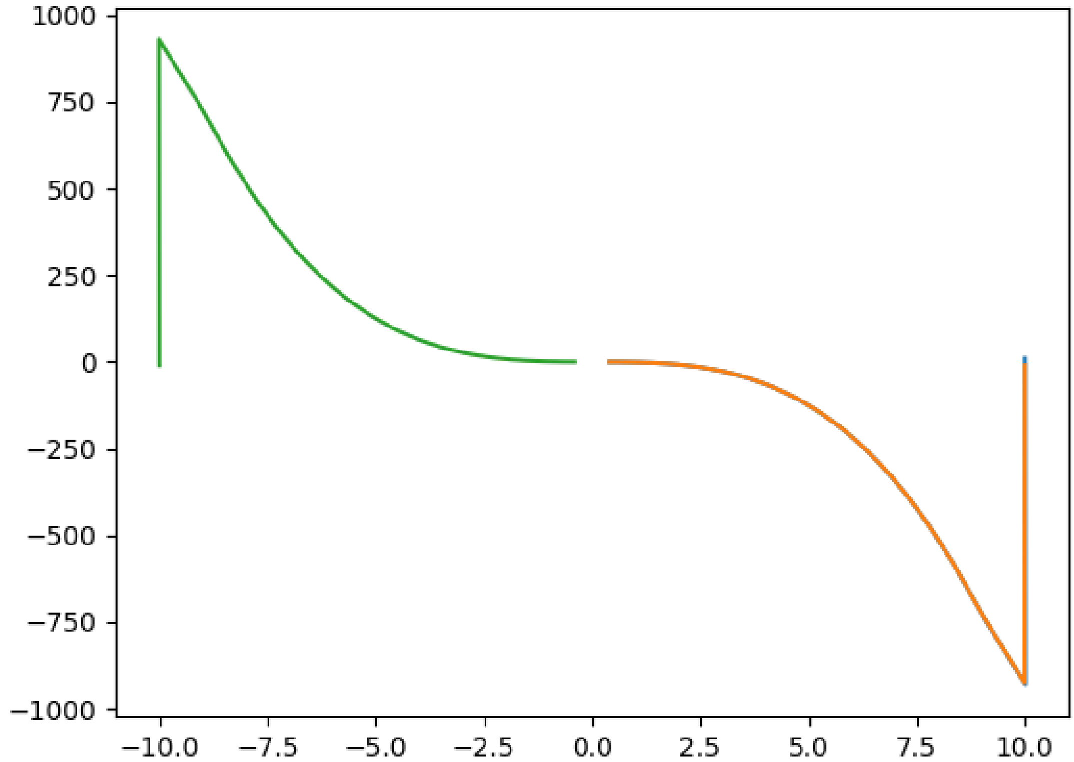
- Біфуркація типу «сідло-вузол»



- Транскритична біфуркація



- Біфуркація типу «виделки»



Код програми

```
#!/usr/bin/env python3

from sympy import *
from sympy.solvers.ode.ode import odesimp
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint
init_printing()

lamb, T, mu = symbols("lamb, T, mu")
x = symbols("x:2:2")
x = [x[:2], x[2:]]
u = symbols("u:2")
alpha = 1+lamb*T**2/2-(lamb*T**2+lamb**2*T**4/4)


def psiv(psi, k):
    p = (psi(k+1)+alpha*psi(k))
    return p.subs(x[0][k+1], x[0][k]+T*x[1][k]).subs(x[1][k+1], x[1][k]+T*u[k])

def sol(psi, muv, lambv, Tv, starts):
    xx = np.zeros((3000, 2))
    xx[0] = starts
    sol = lambdify(((x[0][0], x[1][0]), mu, lamb, T), solve(psiv(psi, 0),u[0])[0])
```

```
    for i in range(2999):
        Tv = 0.001
        uu = sol(xx[i], 0, 1300000, Tv)
        xx[i+1] = 1*xx[i][0]+Tv*xx[i][1], 1*xx[i][1]+Tv*uu

    return xx


Tv = 0.001
lambv = 1300000
muv = 0
print("Альфа", alpha.subs(lamb, 1000000).subs(T, 0.001))

plt.figure(1)
xx = sol(lambda k: x[1][k]-mu+x[0][k]**2, muv, lambv, Tv, [10, 10])
plt.plot(xx[:,0], xx[:,1])
xx = sol(lambda k: x[1][k]-mu+x[0][k]**2, muv, lambv, Tv, [5, 10])
plt.plot(xx[:,0], xx[:,1])
xx = sol(lambda k: x[1][k]-mu+x[0][k]**2, muv, lambv, Tv, [5, -10])
plt.plot(xx[:,0], xx[:,1])
plt.show(block=False)

plt.figure(2)
xx = sol(lambda k: x[1][k]-mu*x[0][k]+x[0][k]**2, muv, lambv, Tv, [10, 10])
plt.plot(xx[:,0], xx[:,1])
xx = sol(lambda k: x[1][k]-mu*x[0][k]+x[0][k]**2, muv, lambv, Tv, [5, 10])
plt.plot(xx[:,0], xx[:,1])
xx = sol(lambda k: x[1][k]-mu*x[0][k]+x[0][k]**2, muv, lambv, Tv, [5, -10])
plt.plot(xx[:,0], xx[:,1])
plt.show(block=False)

plt.figure(3)
xx = sol(lambda k: x[1][k]-mu*x[0][k]+x[0][k]**3, muv, lambv, Tv, [10, 10])
plt.plot(xx[:,0], xx[:,1])
xx = sol(lambda k: x[1][k]-mu*x[0][k]+x[0][k]**3, muv, lambv, Tv, [10, -10])
plt.plot(xx[:,0], xx[:,1])
xx = sol(lambda k: x[1][k]-mu*x[0][k]+x[0][k]**3, muv, lambv, Tv, [-10, -10])
plt.plot(xx[:,0], xx[:,1])
plt.show()
```