

2 | Modelos de dispersión

Los modelos de dispersión son soluciones a la *ecuación de transporte*¹:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = E - \lambda C - u \frac{\partial C}{\partial x} + K \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

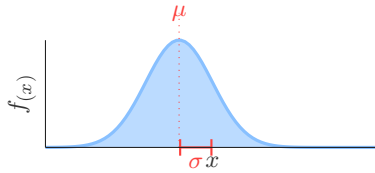
Llamamos solución a una función $c_{(x,t)}$ que satisfaga la ecuación diferencial. Afortunadamente existen soluciones analíticas para esta ecuación si realizamos algunos supuestos y simplificaciones.

2.1. Modelos Gaussianos

Los modelos gaussianos, son una familia de modelos eulerianos muy difundidos en calidad de aire. Estos modelos se caracterizan por que tienen la forma de la función de distribución normal:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{(x - \mu)^2}{\sigma^2} \right] \quad (2.1)$$

esta función también es conocida como *distribución Gaussiana*, de ahí el nombre de estos modelos.



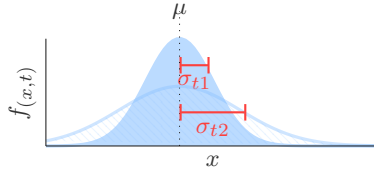
La función Gaussiana, con $\mu = 0$ y $\sigma = \sqrt{2Kt}$) es la solución analítica a la ecuación de transporte que tiene en cuenta sólo el proceso de **difusión** en la dirección x :

$$\frac{\partial C}{\partial t} = K \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (2.2)$$

donde C es la concentración, t el tiempo, x la variable espacial, y K el coeficiente de mezclado turbulento.

Notar que el hecho de que σ dependa de t produce el efecto de achatamiento de la campana a medida que transcurre el tiempo:

¹Notar que en el término advectivo u está afuera de la derivada, ya que asumiremos que es constante en el espacio (x).



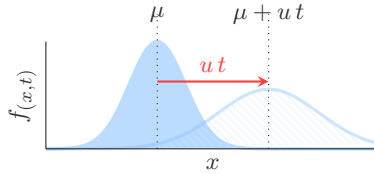
Sería interesante poder extender la solución a un caso más general donde también hay transporte advectivo (considerando el transporte influenciado por el viento), la ecuación de transporte agregando el término de **advección** se escribe:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = K \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - u \frac{\partial C}{\partial x} \quad (2.3)$$

donde u es la velocidad del viento en la dirección x . La solución a esta ecuación es:

$$c_{(x,t)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{(x - ut)^2}{\sigma^2} \right]$$

donde $\sigma = \sqrt{2Kt}$, notar que sólo reemplazamos $\mu = ut$. Esto último es lo que produce el movimiento del eje de la campana en el tiempo simulando el arrastre por el viento:



Una propiedad muy importante de la función gaussiana es que su integral es igual a 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{(x,t)} dx = 1$$

por lo tanto, podríamos multiplicar la función por la masa total emitida (M) (la integral ahora pasaría a valer M) brindándonos una función que distribuye la totalidad de la masa emitida en el espacio:

$$c_{(x,t)} = \frac{M}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{(x - ut)^2}{\sigma^2} \right]$$

esta propiedad nos garantiza que se cumpla la ley de conservación de masa.

Si queremos representar los procesos químicos que contribuyen a la degradación del contaminante podemos agregar una **tasa de decaimiento** (λ):

$$\frac{\partial C}{\partial t} = K \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - u \frac{\partial C}{\partial x} - \lambda C \quad (2.4)$$

La solución tan solo involucra hacer decaer M en el tiempo, por lo tanto: $M(t) = M e^{-\lambda t}$, y la solución quedaría:

$$c_{(x,t)} = \frac{M}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{(x-ut)^2}{\sigma^2} \right] \exp \left[-\lambda t \right]$$

donde λ es el coeficiente de decaimiento.

2.1.1. Puff Gaussiano

Las soluciones obtenidas anteriormente se conocen como *Puff Gaussiano* dado a que describen eventos puntuales y discretos de contaminación (llamados *Puffs*) y su evolución temporal.

Hasta ahora trabajamos con la ecuación de transporte en una dimensión espacial (x), pero podemos generalizarlo a más dimensiones. Por ejemplo en 2D (x, y) la ecuación de transporte sería:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = K_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - u \frac{\partial C}{\partial x} + K_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} - v \frac{\partial C}{\partial y} - \lambda C \quad (2.5)$$

Y su solución:

$$c_{(x,y,t)} = \frac{M}{\sqrt{2\pi}^2 \sigma_x \sigma_y} \exp \left[-\frac{(x-ut)^2}{2\sigma_x^2} - \frac{(y-vt)^2}{2\sigma_y^2} - \lambda t \right]$$

donde u, v son la componentes x, y del viento respectivamente y $\sigma_i = \sqrt{2K_i t}$.

Para incorporar la dimensión z hay que contemplar que habitualmente la fuente de emisión no se encuentra a nivel del suelo. Si $z = 0$ es el nivel del suelo, luego la fuente de emisión puede aparecer a altura H , por ello será necesario una corrección en el eje z .

$$c_{(x,y,z,t)} = \frac{M}{\sqrt{2\pi}^3 \sigma_x \sigma_y \sigma_z} \exp \left[-\frac{(x-ut)^2}{2\sigma_x^2} - \frac{(y-vt)^2}{2\sigma_y^2} - \frac{(z-H)^2}{2\sigma_z^2} - \lambda t \right]$$

notar que $c(x, y, z, t)$ tiene unidades de concentración ya que M tiene unidades de **masa** (por ejemplo μg) y σ_i tiene unidades de **longitud** (por ejemplo m).

2.1.2. Pluma Gaussiana

Para el caso particular de *estado estacionario* y despreciando la difusión en la dirección x , la ecuación de transporte se escribe:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -u \frac{\partial C}{\partial x} + K_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + K_z \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} = 0 \quad (2.6)$$

reordenado términos llegaríamos a:

$$\frac{\partial C}{\partial x} = \frac{K_y}{u} \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{K_z}{u} \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \quad (2.7)$$

y la solución a esta ecuación, es:

$$c_{(x,y,z)} = \frac{Q}{u\sqrt{2\pi}^2 \sigma_y \sigma_z} \exp \left[-\frac{y^2}{2\sigma_y^2} \right] \exp \left[-\frac{(z-H)^2}{2\sigma_z^2} \right] \quad (2.8)$$

donde ahora $\sigma_i = \sqrt{2x K_i/u}$ y Q es la tasa de emisión (de unidades de por ejemplo g/s). Esta solución es conocida como *Pluma Gaussiana*, y es uno de las soluciones más utilizados para modelar la calidad de aire con fines regulatorios. Es importante notar que **no depende del tiempo**.

Para llegar a esta solución tuvimos que realizar los siguientes supuestos:

- Vientos constantes en tiempo y espacio.
- Turbulencia contante en tiempo y espacio.
- Emisión puntual y constante en el tiempo.

Los primeros dos supuestos hacen que sea imposible captar las fluctuaciones aleatorias que se observan normalmente en una pluma. De todas formas sí representa bien la concentraciones promedio en periodos del orden de una hora:

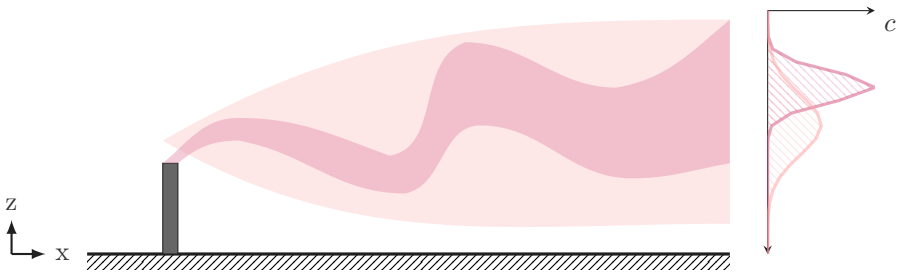


Fig. 2.1: Pluma instantanea vs promedio horario.

En cuanto a que las emisiones sean constantes es razonable para muchos eventos de contaminación, y en todo caso es un supuesto conservativo que se puede mejorar utilizando emisiones horarias promedio. Un supuesto adicional es que la fuente es puntual, esto aunque a primer vista parece muy restrictivo veremos que es posible representar razonablemente bien emisiones de tipo lineales, de área y de volumen realizando algunas modificaciones a este modelo.

Coeficientes de dispersión turbulenta

Como ya fue mencionado, los coeficientes de dispersión σ_y y σ_z dan idea de la dispersión horizontal y vertical respectivamente y por lo tanto de la apertura de la pluma. Tal apertura depende del nivel de turbulencia y entonces de las condiciones meteorológicas. A continuación vamos a describir el método de Briggs basado en clases de estabilidad atmosférica que aún se utiliza en algunos modelos de screening y dejaremos para próximos capítulos los métodos más sofisticados que utilizan los modelos de detalle.

La estabilidad atmosférica esta vinculado a la libertad con la que las corrientes de aire se mueven verticalmente en la atmósfera. Decimos que una atmósfera es estable cuando los movimientos verticales son inhibidos y por lo tanto la atmósfera está muy estratificada, y decimos que es inestable cuando los movimientos verticales son promovidos y por lo tanto la atmósfera está bien mezclada. Pasquill (1961) y Gifford (1961) desarrollaron una clasificación de estabilidad atmosférica donde definieron 6 clases de A a F donde A: muy inestable, B: moderadamente estable, C: levemente estable, D neutral, E levemente estable, F: estable. Y las vincularon con algunas variables meteorológicas.

$u(m/s)$	Día Radiación solar			Noche Nubosidad	
	Fuerte	Media	Débil	Nublado ($> 4/8$)	Despejado ($< 3/8$)
<2	A	A-B	B	E	F
2-3	A-B	B	C	E	F
3-5	B	B-C	C	D	E
5-6	C	C-D	D	D	D
>6	C	D	D	D	D

Tab. 2.1: Clases de Estabilidad

Briggs (1973), propuso una metodología empírica para calcular los coeficientes de dispersión basada en la anterior clasificación:

$$\sigma_y = \frac{ax}{(1+bx)^c} \quad \sigma_z = \frac{dx}{(1+ex)^f}$$

Los coeficientes (a,b,c,d,e,f) están tabulados y dependen de la clase de estabilidad, y tienen distintos valores para condiciones urbanas y rurales:

C.E	a	b	c	d	e	f
A	0.22	0.0001	0.5	0.2	0	—
B	0.16	0.0001	0.5	0.12	0	—
C	0.11	0.0001	0.5	0.08	0.0002	0.5
D	0.08	0.0001	0.5	0.06	0.0015	0.5
E	0.06	0.0001	0.5	0.03	0.0003	1
F	0.04	0.0001	0.5	0.016	0.0003	1

Tab. 2.2: Parametros de coeficiente turbulento (Rural)

C.E	a	b	c	d	e	f
A	0.32	0.0004	0.5	0.24	0.0001	-0.5
B	0.32	0.0004	0.5	0.24	0.0001	-0.5
C	0.22	0.0004	0.5	0.2	0	—
D	0.16	0.0004	0.5	0.14	0.0003	0.5
E	0.11	0.0004	0.5	0.08	0.0015	0.5
F	0.11	0.0004	0.5	0.08	0.0015	0.5

Tab. 2.3: Parametros de coeficiente turbulento (Urbano)

Es importante notar la dependencia de los σ con x , lo que nos indica que la pluma se ensancha a medida que se aleja de la fuente. Además observando los valores de los coeficientes podemos ver que para atmósferas más inestables los valores de sigmas crecen más rápido.

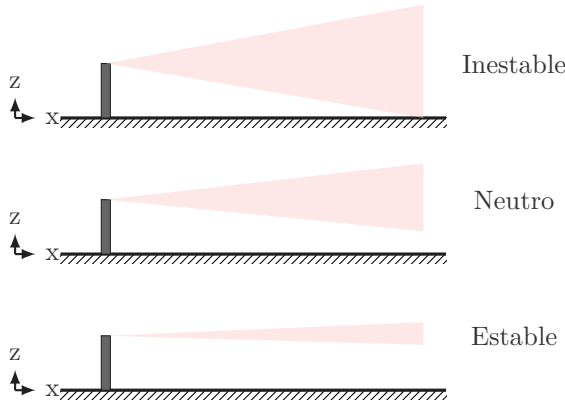


Fig. 2.2: Efecto de la estabilidad en la forma de la pluma.

Reflexión con el terreno

Podemos considerar es que a nivel del suelo (y por debajo) no hay flujo de aire, y por lo tanto todo contaminante que alcance esta zona “rebotaría” contra la superficie. Este efecto de *reflexión* se puede contemplar ubicando una fuente adicional por

debajo del suelo, en espejo con la fuente real (en la posición $(x,y,z)=(0,0,-H)$) y aplicando el *principio de superposición*. La figura 2.3 muestra cual es la idea de esta corrección.

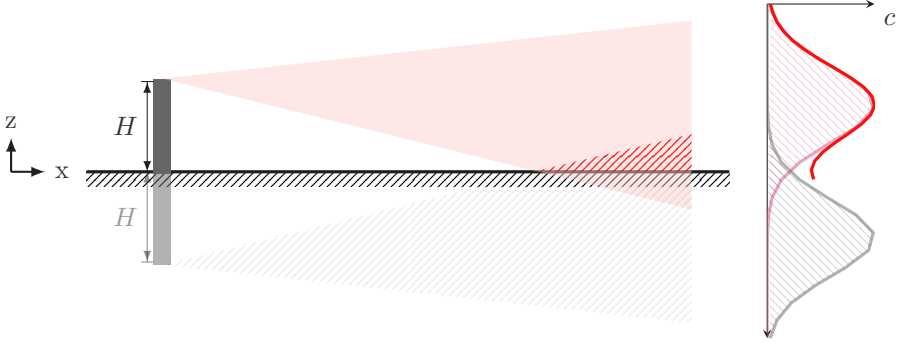


Fig. 2.3: Esquema de teoría de las imágenes.

por lo tanto la solución de pluma con reflexión quedaría:

$$c(x,y,z) = \frac{Q}{u 2\pi \sigma_y \sigma_z} \exp \left[-\frac{y^2}{2\sigma_y^2} \right] \left(\exp \left[-\frac{(z-H)^2}{2\sigma_z^2} \right] + \exp \left[-\frac{(z+H)^2}{2\sigma_z^2} \right] \right) \quad (2.9)$$

Altura del centro de la pluma

Cuando un efluente gaseoso tiene una temperatura superior al entorno (i.e tiene empuje térmico), ó sale de la fuente con velocidad vertical no nula, se puede ver que el eje de la pluma asciende asintóticamente hasta que alcanza una altura de equilibrio (Fig. 2.4), este fenómeno se conoce como *plume rise* y puede ser importante ya que retrasa la llegada de la pluma al suelo, por lo que se lo suele considerar en los modelos gaussianos.

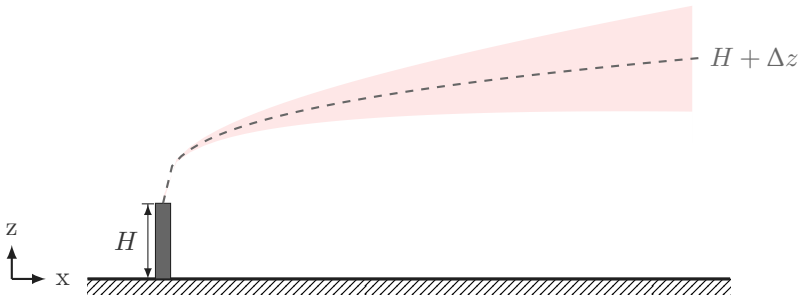


Fig. 2.4: Plume-rise

Los edificios o grandes estructuras generan perturbaciones en el flujo de aire povocando que la forma de la pluma de contaminante se deflecte hacia abajo

adelantando la llegada de la pluma del aire al suelo (Fig. 2.5), este efecto se lo conoce como *down-wash*.

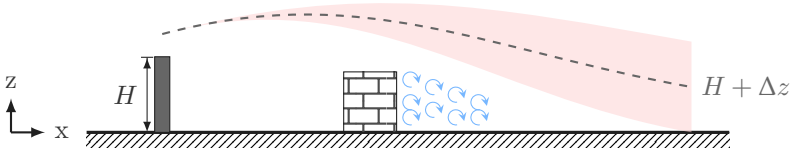


Fig. 2.5: Downwash.

Tanto el fenómeno de *plume-rise* como el de *down-wash* modifican la altura del eje de la pluma y por lo tanto para incorporar estos efectos hay que modificar la solución de pluma gaussiana un Δz , por lo que quedaría:

$$c_{(x,y,z)} = \frac{Q}{u 2\pi \sigma_y \sigma_z} \exp \left[-\frac{y^2}{2\sigma_y^2} \right] \left(\exp \left[-\frac{(z - H - \Delta z)^2}{2\sigma_z^2} \right] + \exp \left[-\frac{(z + H - \Delta z)^2}{2\sigma_z^2} \right] \right) \quad (2.10)$$

Hay otros aspectos que pueden ser considerados para ganar realismo en el modelo de pluma gaussiana que serán tratados en futuros capítulos, por el momento solo vamos a mencionarlos:

- Transporte sobre terrenos complejos.
- Tratamiento de calmas ($u \approx 0$)
- Capa límite heterogénea (Turbulencia y vientos variables en el eje vertical)
- Fuentes cercanas al suelo
- Emisiones variables, y fuentes no puntuales
- Efecto de fumigación costera