Probeklausur

Mathematik I - Theoretische Grundlagen der Informatik

HWR Berlin, Wintersemester 2023/2024

Prof. Dr.-Ing. Sebastian Schlesinger

Aufgabe 1 (Mengen und Funktionen) (5 Punkte)

Gegeben seien die Mengen $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ und $C = \{1, 2\}$.

1. Geben Sie die Menge $A \cup B$ an

2. Geben Sie die Menge $A \cap B$ an

3. Geben Sie die Menge $A \setminus B$ an.

4. Was ist $\mathscr{P}(C)$?

5. Geben Sie eine bijektive Abbildung $f : A \to \mathscr{P}(C)$ an.

Aufgabe 2 (Relationen) (10 Punkte)

Gegeben seien die Relationen $R, S \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$ mit $R = \{(1, 2), (3, 1), (4, 1)\}$ und $S = \{(1, 2), (2, 1), (1, 3), (4, 3)\}$.

(i) Stellen Sie R und S als Graphen und Adjazenzmatrix dar.

(ii) Geben Sie die Relation $R \circ S$ an und stellen Sie sie auch als Graphen dar.

(iii) Geben Sie die Relation $S \circ R$ an und stellen Sie sie auch als Graphen dar.

(iv) Ist R eine Äquivalenzrelation oder Ordnungsrelation? Begründen Sie Ihre Antwort.

(v) Berechnen Sie die reflexiv-transitive Hülle von R.

(vi) Ist die reflexiv-transitive Hülle von R eine Äquivalenzrelation oder Ordnungsrelation? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3 (Äquivalenzrelation) (5 Punkte)

Sei $x \sim y \Leftrightarrow x = y \vee x = -y$ eine Relation auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

(i) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

(ii) Bestimmen Sie die Quotientenmenge $\mathbb{Z}/\sim$.

Aufgabe 4 (Ordnungen) (7 Punkte)

Sei $\sim$ eine Relation auf $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$. Wir definieren $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a \leq c \wedge b \leq d$.

(i) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Ordnungsrelation ist.

(ii) Zeichnen Sie das Hasse-Diagramm für die Teilmenge $\{0, 1, 2\} \times \{0, 1, 2\}$.

(iii) Was sind die größten und kleinsten Elemente, maximalen und minimalen Elemente von $\{0,1,2\} \times \{0,1,2\} \backslash \{(2,2)\}$?

Aufgabe 5 (Beweise) (6 Punkte)

Zeigen Sie

(i) $B \backslash (B \backslash A) = A \cap B$ für Mengen A, B.

(ii) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$ für Abbildungen $f : A \to B$ und $B_1, B_2 \subseteq B$.

(Hinweis: Es ist $f^{-1}(X) = \{a \in A \mid f(a) \in X\}$.)