Übungen zur Vorlesung

Mathematik I - Theoretische Grundlagen der Informatik

HWR Berlin, Wintersemester 2022/2023

Prof. Dr.-Ing. Sebastian Schlesinger — Besprechung in nächster Vorlesung

Blatt 2

Aufgabe 2.1 (Mengen) (9 Punkte)

Bestimmen Sie die folgenden Mengen:

(i) $\{a, b, c\} \cup \{b, c, d\}$

(ii) $\{a, b, c\} \cap \{b, c, d\}$

(iii) $\{a, b, c\} \setminus \{b, c, d\}$

(iv) $\mathscr{P}(\{1, a\})$

(v) $\mathscr{P}(\{1, \{1\}\})$

(vi) $\mathscr{P}(\{1, 2, 3\}) \setminus \mathscr{P}(\{1, 2\})$

(vii) $\bigcap_{i \in \{2,6\}} \{\frac{i}{2}, i + 1\}$ (Hinweis: $\bigcap_{i \in I} A_i = \{x | \forall i \in I : x \in A_i\}$ für eine Indexmenge I)

(viii) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{n, n + 1, 2n\}$ (Hinweis: $\bigcup_{i \in I} A_i = \{x | \exists i \in I : x \in A_i\}$ für eine Indexmenge I)

(ix) $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathscr{P}(\emptyset)))$

— Lösung Anfang —

(i) $\{a, b, c\} \cup \{b, c, d\} = \{a, b, c, d\}$

(ii) $\{a, b, c\} \cap \{b, c, d\} = \{b, c\}$

(iii) $\{a, b, c\} \setminus \{b, c, d\} = \{a\}$

(iv) $\mathscr{P}(\{1, a\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{a\}, \{1, a\}\}$

(v) $\mathscr{P}(\{1, \{1\}\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{\{1\}\}, \{1, \{1\}\}\}$

(vi) $\mathscr{P}(\{1, 2, 3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$, $\mathscr{P}(\{1, 2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$, also $\mathscr{P}(\{1, 2, 3\}) \setminus \mathscr{P}(\{1.2\}) = \{\{3\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

(vii) $\bigcap_{i \in \{2,6\}} \{\frac{i}{2}, i + 1\} = \{\frac{2}{2}, 3\} \cap \{\frac{6}{2}, 7\} = \{3\}$

(viii) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{n, n + 1, 2n\} = \mathbb{N}$

(ix) $\mathscr{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, $\mathscr{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $\mathscr{P}(\{\emptyset, \{\emptyset\}\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

— Lösung Ende —

Aufgabe 2.2 (Beweis) (4 Punkte)

Seien A und B Mengen. Beweisen Sie: $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$

— Lösung Anfang —

Beweis:

„$\Rightarrow$“:
Gelte $A \subseteq B$. Wir zeigen $A \cup B = B$.

Dazu zeigen wir erst $A \cup B \subseteq B$ und später $B \subseteq A \cup B$.

„$\subseteq$ “:

Sei $x \in A \cup B$

$\Leftrightarrow x \in A \lor x \in B$

$\Rightarrow x \in B$, weil $A \subseteq B (x \in A \Rightarrow x \in B)$, was zu zeigen war.

„$\supseteq$“:

Nun zeigen wir noch $B \subseteq A \cup B$.

Sei dazu $x \in B$. Dann ist $x \in A \cup B$ (Vereinigung von B mit irgendwas), was zu zeigen war.

„$\Leftarrow$“:
Gelte $A \cup B = B$. Wir zeigen $A \subseteq B$.

Sei $x \in A$. Dann ist $x \in A \cup B$ (ich kann was Beliebiges dazu vereinigen). Wegen $A \cup B = B$ gilt insbesondere $A \cup B \subseteq B$, also $x \in A \cup B \Rightarrow x \in B$, was zu zeigen war.

$\square$

— Lösung Ende —

Aufgabe 2.3 (Beweis) (5 Punkte)

Seien A, B, C Mengen. Beweisen Sie

$$(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow C \subseteq A$$

— Lösung Anfang —

Beweis:

„$\Rightarrow$“: Gelte $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$. Wir zeigen $C \subseteq A$.

Sei dazu $x \in C$. Dann ist $x \in (A \cap B) \cup C$ (Weil $x \in C$ kann ich was beliebiges dazu vereinigen) und nach Voraussetzung auch $x \in A \cap (B \cup C)$. Damit insbesonder $x \in A$, was zu zeigen war.

„$\Leftarrow$“:
Gelte $C \subseteq A$. Wir zeigen $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$.

Sei $x \in (A \cap B) \cup C$. Das ist äquivalent zu $x \in (A \cap B) \vee x \in C$

$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee x \in C$

$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)$ (weil $C \subseteq A$ nach Voraussetzung ist $x \in C$ äquivalent zu $x \in A \wedge x \in C$)

$\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup x \in (A \cap C)$

$\leftrightarrow x \in A \cap (B \cup C)$ (Distributivgesetz), was zu zeigen war.

$\square$

— Lösung Ende —