Übungen zur Vorlesung

Mathematik I - Theoretische Grundlagen der Informatik

HWR Berlin, Wintersemester 2022/2023

Prof. Dr.-Ing. Sebastian Schlesinger — Übung zur Klausurvorbereitung

Blatt 4

Aufgabe 4.1 (Mengen) (8 Punkte)

Es sei $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, b, c\}$. Bestimmen Sie:

(i) $A \cup B$

(ii) $A \cap B$

(iii) $A \backslash B$

(iv) $A \times B$

(v) $(A \backslash B) \cup (B \backslash A)$

(vi) $\mathscr{P}(A \backslash B)$

(vii) $\mathscr{P}(\mathscr{P}(A \backslash B))$

(viii) $\mathscr{P}(A \cap B \cup \{\emptyset\})$

— Lösung Anfang —

(i) $A \cup B = \{1, 2, 3, b, c\}$

(ii) $A \cap B = \{1\}$

(iii) $A \backslash B = \{2, 3\}$

(iv) $A \times B = \{(1, 1), (1, b), (1, c), (2, 1), (2, b), (2, c), (3, 1), (3, b), (3, c)\}$

(v) $(A \backslash B) \cup (B \backslash A) = \{2, 3\} \cup \{b, c\} = \{2, 3, b, c\}$

(vi) $\mathscr{P}(A \backslash B) = \mathscr{P}(\{2, 3\}) = \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{2, 3\}\}$

(vii) $\mathscr{P}(\mathscr{P}(A \backslash B)) = \mathscr{P}(\{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{2, 3\}\})$
$= \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{2\}\}, \{\{3\}\}, \{\{2, 3\}\}, \{\emptyset, \{2\}\}, \{\emptyset, \{3\}\}, \{\emptyset, \{2, 3\}\}, \{\{2\}, \{3\}\}, \{\{2\}, \{2, 3\}\}, \{\{3\}, \{2, 3\}\},$
$\{\emptyset, \{2\}, \{3\}\}, \{\emptyset, \{3\}, \{2, 3\}\}, \{\emptyset, \{2\}, \{2, 3\}\}, \{\{2\}, \{3\}, \{2, 3\}\}, \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{2, 3\}\}\}$

(viii) $\mathscr{P}(A \cap B \cup \{\emptyset\}) = \mathscr{P}(\{1, \emptyset\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{\emptyset\}, \{1, \emptyset\}\}$

— Lösung Ende —

Aufgabe 4.2 (Relationen) (11 Punkte)

Es sei $R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(3,2),(2,4)\}$ auf der Menge $M = \{1,2,3,4\}$.

(i) Stellen Sie die Relation als Adjazenzmatrix dar.

(ii) Stellen Sie die Relation als Graph dar.

(iii) Ist die Relation reflexiv, irreflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch oder transitiv?

(iv) Falls die Relation nicht transitiv ist, was müsste man hinzufügen, um sie mit möglichst wenigen zusätzlichen Paaren / Pfeilen transitiv zu machen? Anders ausgedückt - was ist die transitive Hülle der Relation? (Allgemein ist die transitive Hülle die kleinste R enthaltende transitive Relation. „Klein"ist im Sinne der Inklusion (Teilmengenbeziehung) gemeint.)

(v) Man erhält die reflexiv-transitive Hülle auch rechnerisch wenn man $R_{trans} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} R^n$ bildet mit $R^0 = Id$, der Identität, die jedes Element von M mit sich selbst in Relation setzt und $R^{n+1} = R^n \circ R$. Man berechnet also diese R^n und jeder Schritt fügt der Vereinigung der bereits von R^0 bis R^{n-1} berechneten Relationen ggf. weitere Paare / Pfeile hinzu bis die Vereinigung schließlich transitiv wird. In der Praxis, bei endlichen Mengen, hört man auf, weitere Relationen hinzuzufügen sobald der Vorgang stationär wird, also nichts mehr hinzugefügt wird. Berechnen Sie die reflexiv-transitive Hülle von R auf dem beschriebenen Weg.

(vi) Ist R_{trans} im vorliegenden Fall eine Ordnung?

(vii) Stellen Sie das Hasse-Diagramm von R_{trans} dar.

— Lösung Anfang —

Die Matrix und den Graphen lass ich weg. Ist wirklich einfach. Die Relation ist reflexiv und antisymmetrisch. Um sie transitiv zu machen muss man die Paare $(1,4),(3,4)$ hinzufügen. Es ist $R^0 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$, $R^1 = R = R^0 \cup R^1$ (R ist schon reflexiv). Und $R^2 = \{(1,2),(2,4),(3,2),(3,4),(1,4)\}$ und damit $R^0 \cup R^1 \cup R^2 = R \cup \{(1,4),(3,4)\} = R_{trans}$ (die anderen Paare waren schon in R und bei R^3 wird nichts mehr hinzugefügt.) R_{trans} ist eine Ordnung. Das Hasse-Diagramm lass ich weg. Im Diagramm ist unten die 1 und die 3, die eine Ebene weiter oben auf 2 zeigen, die wiederum auf 4 ganz oben zeigt.

— Lösung Ende —

Aufgabe 4.3 (Funktionen) (5 Punkte)

Es sei $R = \{(1,2),(2,3),(3,1),(4,1)\}$ eine Relation auf $M = \{1,2,3,4,5\}$.

(i) Ist R eine Funktion?

(ii) Falls es keine Funktion ist, was könnte man tun, um das möglichst einfach zu beheben (Hinweis: Definitionsbereich einschränken)?

(iii) Ist R injektiv? (Eine Funktion $f : M \to N$ ist injektiv, falls $\forall x, y \in M : f(y) = f(x) \Rightarrow x = y$).

(iv) Ist R surjektiv? (Eine Funktion $f : M \to N$ ist surjektiv, falls $\forall y \in N \exists x \in M : y = f(x)$).

(v) Was ist $R^{-1}(\{1\})$ (allgemein ist $f^{-1}(X) = \{x \in M : \exists y \in X : y = f(x)\}$)?

— Lösung Anfang —

R ist fast eine Funktion. Jedem Element aus M wird genau eines aus M via R zugeordnet. Es fehlt lediglich die 5, die keinem Element zugeordnet wird. Wir verlangen aber, dass $\forall x \in M \exists y \in N : (x,y) \in R$. Wir können das beheben, indem wir R auf $M' = M \backslash \{5\}$ einschränken. Wir erhalten also eine Funktion $R : M' \to M'$. Die Funktion ist nicht injektiv, weil sowohl 3 als auch 4 auf 1 abgebildet werden. Sie ist auch nicht surjektiv, weil es kein Urbild für 4 gibt. Das Urbild von $\{1\}$, also $R^{-1}(\{1\}) = \{3,4\}$.

— Lösung Ende —

Aufgabe 4.4 (Beweis der Ordnung) (3 Punkte)

Beweisen Sie, dass die Teilmengenbeziehung auf einer Menge eine Ordnung ist. Etwas präziser: Sei $R \subseteq \mathscr{P}(M) \times \mathscr{P}(M)$ die Relation auf einer Menge M mit $(A, B) \in R \Leftrightarrow A \subseteq B$. Zeigen Sie, dass R eine Ordnung ist.

— Lösung Anfang —

Reflexivität:
Es ist $\forall A \subseteq M : A \subseteq A$, also ist R reflexiv.
Antisymmetrie:
Falls $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$, dann gilt nach Definition der Teilmenge $A = B$, also ist R antisymmetrisch.
Transitivität:
Falls $A \subseteq B$ und $B \subseteq C$, dann folgt direkt nach Definition der Teilmenge auch $A \subseteq C$, also ist R transitiv. $\square$

— Lösung Ende —

Aufgabe 4.5 (Mengenbeweis) (3 Punkte)

Zeigen Sie für beliebige Mengen A, B, C, dass

$$A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$$

— Lösung Anfang —

Sei $x \in A \backslash (B \cup C)$
$\Leftrightarrow x \in A \wedge \neg(x \in B \cup C)$
$\Leftrightarrow x \in A \wedge \neg x \in B \wedge \neg x \in C$ (Vereinigung und De Morgan)
$\Leftrightarrow x \in A \wedge \neg x \in B \wedge x \in A \wedge \neg x \in C$ ($x \in A$ war schon Teil der Aussage; Konfunktion derselben Aussage ändert nichts an der Aussage)
$\Leftrightarrow x \in (A \backslash B) \wedge x \in (A \backslash C)$
$\Leftrightarrow x \in (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$. $\square$

— Lösung Ende —

Aufgabe 4.6 (Mengenaussage) (2 Punkte)

Seien A, B Mengen. Überlegen Sie, ob die folgende Aussage stimmt:

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow \neg(A \subseteq B)$$

Falls sie stimmt, beweisen Sie sie. Falls nicht, geben Sie ein Gegenbeispiel an.

— Lösung Anfang —

Die Aussage stimmt nicht. Gegenbeispiel: $A = \emptyset$. Dann ist $A \cap B = \emptyset$, aber $A = \emptyset \subseteq B$.

— Lösung Ende —