
Klausur
Mathematik I - Theoretische Informatik

HWR Berlin, Wintersemester 2024

Prof. Dr.-Ing. Sebastian Schlesinger

Aufgabe 1 (Beweis)

(5 Punkte)

Seien A, B, C Mengen. Beweisen Sie

$$(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow C \subseteq A$$

Aufgabe 2 (Symmetrische Differenz)

(4 Punkte)

Unter

$$A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

versteht man die *symmetrische Differenz* der Mengen A und B .

(i) Machen Sie sich anhand eines Venn-Diagramms klar, was unter der symmetrischen Differenz anschaulich zu verstehen ist.

(ii) Beweisen Sie: $\forall A, B : A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Aufgabe 3 (Mengenbeweis)

(4 Punkte)

Zeigen Sie für beliebige Mengen A, B :

$$A \cap (B \cup A) = A$$

Aufgabe 4 (Potenzmengenbeweis)

(4 Punkte)

Zeigen Sie für beliebige Mengen A, B :

$$\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$$

Aufgabe 5 (Relationen)

(11 Punkte)

Es sei $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 2), (3, 2), (2, 4)\}$ auf der Menge $M = \{1, 2, 3, 4\}$.

(i) Stellen Sie die Relation als Adjazenzmatrix dar.

(ii) Stellen Sie die Relation als Graph dar.

(iii) Ist die Relation reflexiv, irreflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch oder transitiv?

(iv) Falls die Relation nicht transitiv ist, was müsste man hinzufügen, um sie mit möglichst wenigen zusätzlichen Paaren / Pfeilen transitiv zu machen? Anders ausgedrückt - was ist die transitive Hülle der Relation? (Allgemein ist die transitive Hülle die kleinste R enthaltende transitive Relation. „Klein“ ist im Sinne der Inklusion (Teilmengenbeziehung) gemeint.)

- (v) Man erhält die reflexiv-transitive Hülle auch rechnerisch wenn man $R_{trans} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} R^n$ bildet mit $R^0 = Id$, der Identität, die jedes Element von M mit sich selbst in Relation setzt und $R^{n+1} = R^n \circ R$. Man berechnet also diese R^n und jeder Schritt fügt der Vereinigung der bereits von R^0 bis R^{n-1} berechneten Relationen ggf. weitere Paare / Pfeile hinzu bis die Vereinigung schließlich transitiv wird. In der Praxis, bei endlichen Mengen, hört man auf, weitere Relationen hinzuzufügen sobald der Vorgang stationär wird, also nichts mehr hinzugefügt wird. Berechnen Sie die reflexiv-transitive Hülle von R auf dem beschriebenen Weg.
- (vi) Ist R_{trans} im vorliegenden Fall eine Ordnung?
- (vii) Stellen Sie das Hasse-Diagramm von R_{trans} dar.