Übungen zur Vorlesung

Mathematik I - Theoretische Grundlagen der Informatik

HWR Berlin, Wintersemester 2022/2023

Prof. Dr.-Ing. Sebastian Schlesinger — Besprechung in nächster Vorlesung

Blatt 3

Aufgabe 3.1 (Mengen) (3 Punkte)

Bestimmen Sie die folgenden Mengen:

(i) $(\{1,2\} \times \{3,4\}) \cup \{1,2,3\}$

(ii) $\{a,b\} \times \mathscr{P}(\{1,2\})$

(iii) $\mathscr{P}(\{1,2\}) \cap \mathscr{P}(\{1\})$

— Lösung Anfang —

(i) $\{1,2,3,(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)\}$

(ii) $\{(a,\emptyset),(b,\emptyset),(a,\{1\}),(b,\{1\}),(a,\{2\}),(b,\{2\}),(a,\{1,2\}),(b,\{1,2\})\}$

(iii) $\{\emptyset,\{1\}\}$

— Lösung Ende —

Aufgabe 3.2 (Aussagen über Mengen) (11 Punkte)

Es sei $A = \{1, 2\}$ und $B = \{1, 2, 3\}$. Welche der folgenden Beziehungen sind richtig?

(i) $1 \in A$

(ii) $\{1\} \subseteq A$

(iii) $1 \in \mathscr{P}(A)$

(iv) $\{1\} \in \mathscr{P}(A)$

(v) $\mathscr{P}(A) \subseteq \mathscr{P}(B)$

(vi) $A \in \mathscr{P}(B)$

(vii) $\emptyset \in \mathscr{P}(A)$

(viii) $\emptyset \subseteq \mathscr{P}(A)$

(ix) $\{\{1\}, A\} \subseteq \mathscr{P}(A)$

(x) $(1, 2) \in \mathscr{P}(A \times B)$

(xi) $\{1, 2\} \times \{1, 2\} \in \mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B)$

— Lösung Anfang —

(i) wahr

(ii) wahr

(iii) falsch

(iv) wahr

(v) wahr

(vi) wahr

(vii) wahr

(viii) wahr

(ix) wahr

(x) wahr

(xi) falsch

— Lösung Ende —

Aufgabe 3.3 (Kartesische Produkte) (4 Punkte)

Es sei $A = \{1, 2\}$ und $B = \{2, 3, 4\}$. Bilden Sie die folgenden Mengen:

(i) $A \times B$

(ii) $(A \times A) \cap (B \times B)$

(iii) $(A \times B) \setminus (B \times B)$

(iv) $A \times A \times A$

— Lösung Anfang —

(i) $A \times B = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4)\}$

(ii) $(A \times A) \cap (B \times B) = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\} \cap \{(2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\} = \{(2, 2)\}$

(iii) $(A \times B) \setminus (B \times B) = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$

(iv) $A \times A \times A = \{(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1), (1, 2, 2), (2, 1, 2), (2, 2, 1), (2, 2, 2)\}$

— Lösung Ende —

Aufgabe 3.4 (Potenzmengenbeweis) (4 Punkte)

Zeigen Sie für beliebige Mengen A, B:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \mathscr{P}(A) \subseteq \mathscr{P}(B)$$

— Lösung Anfang —

„$\Rightarrow$“:

Sei $M \in \mathscr{P}(A)$. Wir wollen zeigen, dass dann auch $M \in \mathscr{P}(B)$.

Dann ist $M \subseteq A$. Da aber $A \subseteq B$ ist auch $M \subseteq B$ und damit $M \in \mathscr{P}(B)$.

„$\Leftarrow$“:

Sei $x \in A$. Wir wollen zeigen, dass dann $x \in B$. Es ist $\{x\} \subseteq A$, also $\{x\} \in \mathscr{P}(A)$.

Wegen Voraussetzung ist aber $\mathscr{P}(A) \subseteq \mathscr{P}(B)$, also $\{x\} \in \mathscr{P}(B)$ und damit $x \in B$.

$\square$

— Lösung Ende —

Aufgabe 3.5 (Mengenbeweis) (4 Punkte)

Zeigen Sie für beliebige Mengen A, B:

$$A \cap (B \cup A) = A$$

— Lösung Anfang —

„$\subseteq$“:

Sei $x \in A \cap (B \cup A)$. Dann ist $x \in A$ (und irgendwas anderem), also $A \cap (B \cup A) \subseteq A$.

„$\supseteq$“:

Sei $x \in A$. Dann ist $x \in A \vee (x \in A \wedge x \in B)$.

$\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in A) \wedge (x \in A \vee x \in B)$ (Distributivität)

$\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in A \vee x \in B)$

$\Leftrightarrow x \in A \cap (A \cup B)$

$\square$

— Lösung Ende —

Aufgabe 3.6 (Potenzmengenbeweis) (4 Punkte)

Zeigen Sie für beliebige Mengen A, B:

$$\mathscr{P}(A \cap B) = \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$$

— Lösung Anfang —

Sei $M \in \mathscr{P}(A \cap B)$

$\Leftrightarrow M \subseteq A \cap B$

$\Leftrightarrow \forall x \in M : x \in A \cap B$

$\Leftrightarrow \forall x \in M : x \in A \wedge x \in B$

$\Leftrightarrow M \subseteq A \wedge M \subseteq B$

$\Leftrightarrow M \in \mathscr{P}(A) \wedge M \in \mathscr{P}(B)$

$\Leftrightarrow M \in \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$

□

— Lösung Ende —

Aufgabe 3.7 (Relationendarstellungen) (2 Punkte)
Sei $R = \{(1,1),(2,2),(1,3),(2,3),(2,1),(3,1)\}$ eine Relation. Stellen Sie die Relation als Graph und Adjazenzmatrix dar.

Aufgabe 3.8 (Relation) (5 Punkte)
Diese Aufgabe ist etwas schwieriger.

Wir definieren $a \equiv b \Leftrightarrow 3|(a-b)$ mit $a,b \in \mathbb{Z}$. Beschreiben Sie was die Relation ausdrückt.

Hinweis: Denken Sie an die Division mit Rest.

— Lösung Anfang —
Zwei Zahlen sind in Relation, wenn sie den gleichen Rest bei der Division durch 3 haben.

Begründung:

Jede Zahl a lässt sich darstellen als $a = 3 \cdot \xi + \eta$ mit geeignetem a, ξ, η, wobei $\eta \in \{0,1,2\}$. η ist der Rest bei der Division von a durch 3. Hat man nun $b = 3 \cdot \kappa + \lambda$, dann ist $a - b = 3 \cdot \xi + \eta - 3 \cdot \kappa - \lambda = \eta - \lambda$ und es gilt $3|(a-b) \Leftrightarrow \eta - \lambda = 0$, also wenn a und b denselben Rest bei der Division durch 3 ergeben.
— Lösung Ende —