Übung

Mathematik I - Theoretische Grundlagen der Informatik

HWR Berlin, Wintersemester 2023/2024

Prof. Dr.-Ing. Sebastian Schlesinger

Aufgabe 1 (Mengenbeweise) (6 Punkte)

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(i) $\forall A, B, C : A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(ii) $\forall A, B, C : A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(iii) $\forall A, B, C : A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$

(iv) $\forall A, B, C : A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$

(v) $\forall A, B, C : A \cup (B \backslash C) = (A \cup B) \backslash (A \backslash C)$

(vi) $\forall A, B, C : A \cap (B \backslash C) = (A \cap B) \backslash (A \backslash C)$

— Lösung Anfang —

1. Sei $x \in A \cap (B \cup C)$
   $\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in (B \cup C)$
   $\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C)$
   $\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)$
   $\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \vee x \in (A \cap C)$
   $\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. $\square$

2. Sei $x \in A \cup (B \cap C)$
   $\Leftrightarrow x \in A \vee x \in (B \cap C)$
   $\Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C)$
   $\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C)$
   $\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \wedge x \in (A \cup C)$
   $\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. $\square$

3. Sei $x \in A \backslash (B \cup C)$
   $\Leftrightarrow x \in A \wedge \neg(x \in B \cup C)$
   $\Leftrightarrow x \in A \wedge \neg(x \in B \vee x \in C)$
   $\Leftrightarrow x \in A \wedge \neg x \in B \wedge \neg x \in C$ (De Morgan)
   $\Leftrightarrow x \in A \wedge \neg x \in B \wedge x \in A \wedge \neg x \in C$ (Konjunktion derselben Aussage)
   $\Leftrightarrow x \in (A \backslash B) \wedge x \in (A \backslash C)$
   $\Leftrightarrow x \in (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$. $\square$

4. Sei $x \in A \backslash (B \cap C)$
   $\Leftrightarrow x \in A \wedge \neg(x \in B \cap C)$
   $\Leftrightarrow x \in A \wedge \neg(x \in B \wedge x \in C)$

$\Leftrightarrow x \in A \wedge \neg x \in B \vee \neg x \in C$ (De Morgan)
$\Leftrightarrow x \in A \wedge \neg x \in B \vee x \in A \wedge \neg x \in C$ (Konjunktion derselben Aussage)
$\Leftrightarrow x \in (A \backslash B) \vee x \in (A \backslash C)$
$\Leftrightarrow x \in (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$. $\square$

5. Sei $x \in A \cup (B \backslash C)$
$\Leftrightarrow x \in A \vee \neg(x \in B \wedge x \in C)$
$\Leftrightarrow x \in A \vee \neg x \in B \vee \neg x \in C$ (De Morgan)
$\Leftrightarrow (x \in A \vee \neg x \in B) \vee \neg x \in C$
$\Leftrightarrow (x \in A \vee \neg x \in B) \wedge (x \in A \vee \neg x \in C)$
$\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \wedge x \in (A \cup C)$
$\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. $\square$

6. Sei $x \in A \cap (B \backslash C)$
$\Leftrightarrow x \in A \wedge \neg(x \in B \wedge x \in C)$
$\Leftrightarrow x \in A \wedge \neg x \in B \vee \neg x \in C$ (De Morgan)
$\Leftrightarrow (x \in A \wedge \neg x \in B) \vee (x \in A \wedge \neg x \in C)$
$\Leftrightarrow x \in (A \backslash B) \vee x \in (A \backslash C)$
$\Leftrightarrow x \in (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$. $\square$

— Lösung Ende —

Aufgabe 2 (Relationen) (6 Punkte)

Es sei $R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(3,2),(2,4)\}$ auf der Menge $M = \{1,2,3,4\}$.

Hinweis: Wir definieren die **Komposition von Relationen** $R \subseteq M \times N, S \subseteq N \times P$ wie folgt: $R \circ S := \{(x,z) \in M \times P | \exists y \in N : (x,y) \in R \wedge (y,z) \in S\}$.

(i) Stellen Sie die Relation als Adjazenzmatrix dar.

(ii) Stellen Sie die Relation als Graph dar.

(iii) Ist die Relation reflexiv, irreflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch oder transitiv?

(iv) Falls die Relation nicht transitiv ist, was müsste man hinzufügen, um sie mit möglichst wenigen zusätzlichen Paaren / Pfeilen transitiv zu machen? Anders ausgedückt - was ist die transitive Hülle der Relation? (Allgemein ist die transitive Hülle die kleinste R enthaltende transitive Relation. „Klein"ist im Sinne der Inklusion (Teilmengenbeziehung) gemeint.)

(v) Man erhält die reflexiv-transitive Hülle auch rechnerisch wenn man $R_{trans} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} R^n$ bildet mit $R^0 = Id$, der Identität, die jedes Element von M mit sich selbst in Relation setzt und $R^{n+1} = R^n \circ R$. Man berechnet also diese R^n und jeder Schritt fügt der Vereinigung der bereits von R^0 bis R^{n-1} berechneten Relationen ggf. weitere Paare / Pfeile hinzu bis die Vereinigung schließlich transitiv wird. In der Praxis, bei endlichen Mengen, hört man auf, weitere Relationen hinzuzufügen sobald der Vorgang stationär wird, also nichts mehr hinzugefügt wird. Berechnen Sie die reflexiv-transitive Hülle von R auf dem beschriebenen Weg. Ist R_{trans} im vorliegenden Fall eine Ordnung?

(vi) Stellen Sie das Hasse-Diagramm von R_{trans} dar.

— Lösung Anfang —

Die Matrix und den Graphen lass ich weg. Ist wirklich einfach. Die Relation ist reflexiv und antisymmetrisch. Um sie transitiv zu machen muss man die Paare $(1,4), (3,4)$ hinzufügen. Es ist $R^0 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$, $R^1 = R = R^0 \cup R^1$ (R ist schon reflexiv). Und $R^2 = \{(1,2),(2,4),(3,2),(3,4),(1,4)\}$ und damit $R^0 \cup R^1 \cup R^2 = R \cup \{(1,4),(3,4)\} = R_{trans}$ (die anderen Paare waren schon in R und bei R^3 wird nichts mehr hinzugefügt.) R_{trans} ist eine Ordnung. Das Hasse-Diagramm lass ich weg. Im Diagramm ist unten die 1 und die 3, die eine Ebene weiter oben auf 2 zeigen, die wiederum auf 4 ganz oben zeigt.

— Lösung Ende —

Aufgabe 3 (Relationen und Komposition) (6 Punkte)
Sei $M = \{a, b, c, d\}, R = (a, a), (a, c), (c, b), (c, d), S = S = (a, b), (d, a), (d, c)$. Berechnen Sie $R \circ S$ und $S \circ R$ und stellen Sie $R, S, R \circ S, S \circ R$ als Graphen und Adjazenzmatrix dar.

Aufgabe 4 (Ordnungen, kleinste, größte, minimale, maximale Elemente) (5 Punkte)
Für eine Ordnung $R \subseteq M \times M$ auf einer Menge M definieren wir:

- $g \in M$ ist **kleinstes** Element bezüglich R, falls $\forall x \in M : (g, x) \in R$
- $g \in M$ ist **größtes** Element bezüglich R, falls $\forall x \in M : (x, g) \in R$
- $g \in M$ ist **minimales** Element bezüglich R, falls $\forall g' \in M : (g', g) \in R \Rightarrow g' = g$ (also es gibt kein echt kleineres als g)
- $g \in M$ ist **maximales** Element bezüglich R, falls $\forall g' \in M : (g, g') \in R \Rightarrow g' = g$ (also es gibt kein echt größeres als g)

Betrachte folgende Relation: $R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (e, c), (e, a), (e, d), (e, b), (c, a), (c, b), (d, b), (d, a)\}$

(i) Stellen Sie die Relation als Graph dar.

(ii) Ist es eine Relation? Falls ja, stellen Sie sie als Hasse-Diagramm dar.

(iii) Welche Elemente sind kleinste, größte, minimale, maximale Elemente bezüglich R?

Aufgabe 5 (Funktionen) (5 Punkte)
Es sei $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1), (4, 1)\}$ eine Relation auf $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Hinweis: Eine **Funktion** f ist eine Relation $f \subseteq M \times N$, für die gilt, dass es zu jedem $x \in M$ genau ein $y \in N$ gibt, so dass $(x, y) \in f$. In dem Fall schreibt man auch $f : M \to N, x \mapsto y$.

Wir definieren folgende Eingenschaften für Funktionen:

- **Injektivität**: $\forall x, y \in M : f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$
- **Surjektivität**: $\forall y \in N \exists x \in M : y = f(x)$

Die **Urbildfunktion** ist die Funktion $f^{-1} : N \to \mathscr{P}(M), y \mapsto f^{-1}(y) = \{x \in M : f(x) = y\}$.

(i) Ist R eine Funktion?

(ii) Falls es keine Funktion ist, was könnte man tun, um das möglichst einfach zu beheben

(iii) Ist R injektiv?

(iv) Ist R surjektiv?

(v) Was ist $R^{-1}(\{1\})$ (allgemein ist $f^{-1}(X) = \{x \in M : \exists y \in X : y = f(x)\}$)?

— Lösung Anfang —
R ist fast eine Funktion. Jedem Element aus M wird genau eines aus M via R zugeordnet. Es fehlt lediglich die 5, die keinem Element zugeordnet wird. Wir verlangen aber, dass $\forall x \in M \exists y \in N : (x, y) \in R$. Wir können das beheben, indem wir R auf $M' = M \backslash \{5\}$ einschränken. Wir erhalten also eine Funktion $R : M' \to M'$. Die Funktion ist nicht injektiv, weil sowohl 3 als auch 4 auf 1 abgebildet werden. Sie ist auch nicht surjektiv, weil es kein Urbild für 4 gibt. Das Urbild von $\{1\}$, also $R^{-1}(\{1\}) = \{3, 4\}$.
— Lösung Ende —

Aufgabe 6 (Mengenaussage) (2 Punkte)

Seien A, B Mengen. Überlegen Sie, ob die folgende Aussage stimmt:

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow \neg(A \subseteq B)$$

Falls sie stimmt, beweisen Sie sie. Falls nicht, geben Sie ein Gegenbeispiel an.

— Lösung Anfang —

Die Aussage stimmt nicht. Gegenbeispiel: $A = \emptyset$. Dann ist $A \cap B = \emptyset$, aber $A = \emptyset \subseteq B$.

— Lösung Ende —

Aufgabe 7 (Äquivalenzrelationen, Partitionen und Funktionen) (5 Punkte)

Hinweise: Eine **Partition** einer Menge M ist eine Menge P von Teilmengen von M, so dass gilt:

- $\forall A \in P : A \neq \emptyset$
- $\forall A, B \in P : A \neq B \Rightarrow A \cap B = \emptyset$
- $\bigcup_{A \in P} A = M$

Die Quotientenmenge $M/{\sim}$ einer Äquivalenzrelation $\sim$ auf M ist die Menge aller Äquivalenzklassen von $\sim$ auf M. Die Äquivalenzklasse $[x]$ eines Elements $x \in M$ ist die Menge aller Elemente, die zu x äquivalent sind, also $[x] = \{y \in M : x \sim y\}$. Eine Quotientenmenge $M/{\sim}$ ist stets eine Partition von M. Für Funktionen kann man eine dazu passende Bijektion konstruieren, die von der Quotientenmenge in die Bildmenge der Funktion abbildet. Das wollen wir in der Aufgabe am Beispiel nachvollziehen.

Analog zu Relationen gibt es auch Komposition von Funktionen. Seien $f : X \to Y, g : Y \to Z$ Funktionen. Dann ist $g \circ f : X \to Z, x \mapsto g(f(x))$ die Komposition von f und g.

Sei $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}, Y = \{a, b, c\}$, und $f : X \to Y$ definiert durch: $f(1) = a$, $f(2) = a$, $f(3) = c$, $f(4) = b$, $f(5) = a$, $f(6) = b$, $f(7) = c$, $f(8) = a$.

(i) Was ist $f^{-1}(\{a\})$, $f^{-1}(\{b\})$, $f^{-1}(\{c\})$. Ergibt das eine Partition von X?

(ii) Wir definieren $x_1 \sim x_2$ falls $f(x_1) = f(x_2)$. Überprüfen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ergibt. Was sind die Äquivalenzklassen?

(iii) Was ist die Projektionsfunktion $\pi : X \to X/{\sim}$?

(iv) Wir betrachten die Funktion $[f] : X/{\sim} \to Y$, definiert durch $[f]([x]) = f(x)$. Zeigen Sie, dass $[f]$ wohldefiniert und eine Bijektion ist.

(v) Zeigen Sie, dass $f = [f] \circ \pi$.