Übungen zur Vorlesung

Mathematik I - Theoretische Grundlagen der Informatik

HWR Berlin, Wintersemester 2022/2023

Prof. Dr.-Ing. Sebastian Schlesinger Besprechung in nächster Vorlesung
Blatt 2

Aufgabe 2.1 (Mengen) (5 Punkte)
Bestimmen Sie die folgenden Mengen:

(i) $(\{1,2\} \times \{3,4\}) \cup \{1,2,3\}$

(ii) $\mathscr{P}(\{1,2,3\}) \setminus \mathscr{P}(\{1,2\})$

(iii) $\bigcap_{i \in \{2,6\}} \{\frac{i}{2}, i+1\}$

(iv) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{n, n+1, 2n\}$

(v) $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathscr{P}(\emptyset)))$

— Lösung Anfang —

(i) $\{1,2,3,(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)\}$

(ii) Aufgabe erneut auf neuem Blatt, Lösung machen wir dann

(iii) Aufgabe erneut auf neuem Blatt, Lösung machen wir dann

(iv) Aufgabe erneut auf neuem Blatt, Lösung machen wir dann

(v) Aufgabe erneut auf neuem Blatt, Lösung machen wir dann

— Lösung Ende —

Aufgabe 2.2 (Mengenbeweise) (5 Punkte)

Beweisen Sie folgende Aussagen:

(i) $A \subseteq B \cap C \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \subseteq C$

(ii) $A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$

(iii) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

(iv) $(\bigcup_{i \in I} D_i) \cap B = \bigcup_{i \in I} (D_i \cap B)$

(v) $\bigcap_{\varepsilon \in \mathbb{R} \backslash \{0\}} \{x \in \mathbb{R} | |x - \pi| \leq |\varepsilon|\} = \{\pi\}$

— Lösung Anfang —

Beweis (i): „$\Rightarrow$“:

Sei $A \subseteq B \cap C$. Wir zeigen $A \subseteq B \wedge A \subseteq C$.

Sei $x \in A$. Wir müssen zeigen, dass dann $x \in B$ und $x \in C$. Nach Voraussetzung ist $x \in B \cap C$, d.h. $x \in B \wedge x \in C$, was zu zeigen war.

„$\Leftarrow$“: analog

□

Beweis (ii):

Sei $x \in A \backslash (B \cup C)$

$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin (B \cup C)$

$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C$

$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \wedge x \in A \wedge x \notin C$

$\Leftrightarrow x \in A \backslash B \wedge x \in A \backslash C$

$\Leftrightarrow x \in (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$

□

Beweis (iii):

Sei $x \in (A \cup B) \times C$

$\Leftrightarrow x \in A \times C \vee x \in B \times C$

$\Leftrightarrow x \in (A \times C) \cup (B \times C)$

□

Beweis (iv):

Sei $x \in (\bigcup_{i \in I} D_i) \cap B$

$\Leftrightarrow x \in \{x | \exists i \in I : x \in D_i\} \cap B$

$\Leftrightarrow x \in (\bigcup_{i \in I} D_i \cap B)$

□

Beweis (v):

„$\subseteq$“:

Annahme: $\exists x \in \bigcap_{\varepsilon \in \mathbb{R} \backslash \{0\}} \{x \in \mathbb{R} | |x - \pi| \leq |\varepsilon|\} : x \neq \pi$

Wegen $x \neq \pi$ muss es ein $\varepsilon > 0$ geben mit $|x - \pi| > \varepsilon$. Andererseits ist $x \in \bigcap_{\varepsilon > 0} \{x \in \mathbb{R} | |x - \pi| \leq \varepsilon\} = \{y | \forall \varepsilon > 0 : |y - \pi| \leq \varepsilon\}$, d.h. $\forall \varepsilon > 0 : |x - \pi| \leq \varepsilon$. Widerspruch! Also muss $x = \pi$ sein.

„$\supseteq$“:
Da $|\pi - \pi| = 0 \leq \varepsilon$ für beliebige (also alle) $\varepsilon > 0$ und $\pi \in \mathbb{R}$ folgt, dass $\pi \in \bigcap_{\varepsilon \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} \{x \in \mathbb{R} | |x - \pi| \leq |\varepsilon|\}$

$\square$

— Lösung Ende —

Aufgabe 2.3 (Symmetrische Differenz) (4 Punkte)

Unter

$$A \triangle B := (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$$

versteht man die *symmetrische Differenz* der Mengen A und B.

(i) Machen Sie sich anhand eines Venn-Diagramms klar, was unter der symmetrischen Differenz anschaulich zu verstehen ist.

(ii) Beweisen Sie: $\forall A, B : A \triangle B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$.

— Lösung Anfang —

Venn-Diagramm zeichne ich jetzt mal nicht. Bleibt als Übung.

Beweis:

Sei $x \in A \triangle B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$

$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)$

$\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \notin A) \wedge (x \notin B \vee x \in B) \wedge (x \notin B \vee x \notin A)$ (Distributivität)

$\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \notin A \vee x \notin B)$ ($x \in A \vee x \notin A$ ist immer wahr, kann man also kürzen)

$\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \wedge \neq (x \in A \wedge x \in B)$ (De Morgan)

$\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \backslash (A \cap B)$

□

— Lösung Ende —

Aufgabe 2.4 (Beweisen oder Widerlegen) (2 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie:

Aus $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset, A_2 \cap A_3 \neq \emptyset$ und $A_1 \cap A_3 \neq \emptyset$ folgt $\bigcap_{i \in \{1.2.3\}} A_i \neq \emptyset$.

— Lösung Anfang —

Sei $A_1 = \{1,2\}, A_2 = \{2,3\}, A_3 = \{1,3\}$. Dann ist $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset, A_2 \cap A_3 \neq \emptyset$ und $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$. Aber $\bigcap_{i \in \{1,2,3\}} A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \emptyset$.

Die Behauptung ist also falsch.

— Lösung Ende —

Aufgabe 2.5 (Relation) (2 Punkte)

Gegeben sei die Relation $R = \{(a,a), (a,b), (b,c), (c,b), (a,d)\}$.

(i) Stellen Sie die Adjazenzmatrix der Relation dar.

(ii) Stellen Sie die Relation als Graph dar.

— Lösung Anfang —

Das ist eine ganz einfache Aufgabe. Lass ich mal als Übung.

— Lösung Ende —

Aufgabe 2.6 (Vollständige Induktion) (6 Punkte)

Beweisen Sie durch vollständige Induktion:

(i) Für alle $n \in \mathbb{N} : n^2 + n$ ist gerade (d.h. durch 2 teilbar).

(ii) Wenn eine Menge n Elemente hat, dann hat ihre Potenzmenge 2^n Elemente.

— Lösung Anfang —

Beweis (i):

Induktionsanfang ($n = 0$): $0^2 + 0 = 0$ ist gerade, stimmt also.

Induktionsschritt ($n \mapsto n + 1$):
$(n + 1)^2 + (n + 1) = n^2 + 2n + 1 + n + 1 = n^2 + n + 2n + 2$. Nach Induktionshypothese ist $n^2 + n$ gerade und es ist natürlich $2n + 2 = 2(n + 1)$ gerade (2 teilt den Term).

□

Beweis(ii): Induktionsanfang ($n = 0$): $\mathscr{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, die Potenzmenge der Menge mit 0 Elementen hat also $1 = 2^0$ Elemente. Stimmt also.

Induktionsschritt ($n \mapsto n + 1$):
Sei $M_n = \{m_1, \ldots m_n\}$ eine Menge mit n Elementen, deren Potenzmenge, die Menge aller Teilmengen von M_n genau 2^n Elemente nach Induktionshypothese hat. Sei nun $M_{n+1} = M_n \cup \{m_{n+1}\}$ die Menge mit $n + 1$ Elementen, die aus M_n durch Hinzufügen eines neuen Elementes m_{n+1} hervorgeht. Es sind alle Teilmengen von M_n auch Teilmengen von M_{n+1}, also $\mathscr{P}(M_n) \subseteq \mathscr{P}(M_{n+1})$ und wir erhalten die restlichen Teilmengen, die zusätzlich in $\mathscr{P}(M_{n+1})$ liegen, indem wir zu jeder Teilmenge $A \in \mathscr{P}(M_n)$ das Element m_{n+1} hinzufügen, also jeweils $A \cup \{m_{n+1}\}$ bilden.

Damit haben wir also $A_1, \ldots, A_{2^n}$ Teilmengen aus $\mathscr{P}(M_n)$ nach Induktionshypothese und nun kommen die Teilmengen $A_1 \cup \{m_{n+1}\}, \ldots A_{2^n} \cup \{m_{n+1}\}$ zu $\mathscr{P}(M_{n+1})$ hinzu.

Wir erhalten also insgesamt $2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$ Elemente in $\mathscr{P}(M_{n+1})$, was die Behauptung beweist (und gleichzeitig eine Konstruktion für die Potenzmenge angibt).

□

— Lösung Ende —