Sujets de mémoires Finance Quantitative 2023-2024

Proposé par Philippe Heinrich (philippe.heinrich@univ-lille.fr)

Sujet de mémoire : pricing d'options exotiques

Abstract

Ce sujet de mémoire est constitué d'une première partie permettant de se familiariser avec les options exotiques et d'implémenter la méthode de Monte-Carlo (MC) en codant avec Python. La seconde partie, plus avancée, propose d'étudier une méthode de simulation récente qui combine MC et une méthode de projection orthogonale pour un pricing plus rapide et efficace.

1 Pricing par méthode de Monte-Carlo (MC)

1.1 Méthode de simulation

La méthode de Monte-Carlo est une façon simple et directe d'évaluer des options qui dépendent de toute la trajectoire du sous-jacent comme les options dites exotiques.

On se placera dans l'hypothèse où le sous-jacent S suit le modèle de Black-Scholes c'est à dire que son taux de rendement est régi par l'équation différentielle stochastique

$$\frac{dS_t}{S_t} = (r - d)\,dt + \sigma dW_t$$

où r, d, σ, W sont respectivement le taux sans risque, le taux de dividende, la volatilité et le mouvement brownien.

- La première étape sera de simuler des trajectoires du sous-jacent à différentes dates $t_1, \dots, t_n$ prescrites à partir des paramètres S_0, r, d, σ. On pourra aussi se donner plus de flexibilité en permettant aux paramètres de dépendre de chaque intervalle $]t_j, t_{j+1}]$.
- La seconde étape est de produire le payoff d'une option exotique spécifiée. Par exemple, pour un call asiatique, il faudra calculer

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} S_{t_j} - K\right)_+ .$$

- La troisième étape est de produire la prime approchée à l'aide des étapes précédentes : l'espérance qui intervient dans la prime est estimée en moyennant sur les trajectoires du sous-jacent.

1.2 Pricing d'options asiatiques

À l'aide de la méthode de Monte-Carlo, pricer une option asiatique pour les données $S_0 = 100$, $\sigma = 0.1$, $r = 0.05$, $d = 0.03$, $K = 103$ dans les 3 cas suivants :

(i) $T = 1$ an, et les t_j correspondent aux mois ;

(ii) $T = 1$ an, et les t_j correspondent aux trimestres ;

(iii) $T = 1$ an, et les t_j correspondent aux semaines.

Comparer les primes obtenues dans les 3 cas, et les vitesses de convergence. Puis les comparer aux calls vanille correspondants.

1.3 Pricing d'options barrières

À l'aide de la méthode de Monte Carlo, pricer une option barrière discrète pour $T = 1$ an et $K = 103$ dans les 3 cas suivants :

(i) Call down and out avec barrière $H = 80$ et dates barrières mensuelles ;

(ii) Call down and in avec barrière $H = 80$ et dates barrières mensuelles ;

(iii) Put down and out avec barrière $H = 80$ et dates barrières mensuelles ;

(iv) Put down and out avec barrière $H = 120$ et dates barrières 0.05, 0.15, 0.25,..., 0.95.

Comparer les primes obtenues dans les 3 cas, et les vitesses de convergence. Puis les comparer aux options vanille correspondantes.

1.4 Accélerer la convergence

Au temps t_{n-1}, les options précédentes peuvent être vues comme des options vanilles. La conséquence est qu'il n'est plus nécessaire de simuler la dernière étape, puisqu'on peut la remplacer par une formule de Black-Scholes avec des paramètres adaptés.
Étudier le gain en vitesse de convergence pour les exemples traités précédemment.

2 Amélioration : combiner MC et une méthode de projec- tion

En fonction du temps que l'on peut y consacrer, cette partie (beaucoup) plus avancée repose sur l'article récent (2022) de Valentin Tissot-Daguette intitulé *Projection of Functionals and Fast Pricing of Exotic Options* et accessible via le lien https://arxiv.org/pdf/2111.03713.pdf.

Il s'agit d'en comprendre la méthode combinant MC et projection orthogonale et de l'implémenter sur des exemples concrets.