Exercices

MATH-250 — Analyse numérique

Professeur — Buffa Annalisa
École Polytechnique Fédérale de Lausanne
2017

Exercices MATLAB - Analyse Numérique - 2017
Section MA
Prof. A. Quarteroni
Séance 1 - Introduction à Matlab

Exercice 1

On considère les matrices

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Créer un répertoire de travail et écrire un fichier ".m" dans lequel placer les instructions pour calculer (sans utiliser de boucles), la matrice $C = AB$ (produit matriciel) et la matrice D qui a comme éléments $D_{ij} = A_{ij}B_{ij}$ (produit composante par composante).

Exercice 2

Définir (sans utiliser de boucles) la matrice diagonale de taille $n = 5$ dont la diagonale est un vecteur de points équirépartis entre 3 et 6 (i.e. $[3, 3.75, 4.5, 5.25, 6]$).

Exercice 3

Écrire une fonction pour calculer :

a) le produit, composante par composante, entre deux vecteurs x et y ;

b) le produit scalaire entre les mêmes vecteurs x et y ;

c) un vecteur dont les éléments sont définis par :
$v_1 = x_1 y_n, \quad v_2 = x_2 y_{n-1}, \quad \ldots, \quad v_{n-1} = x_{n-1} y_2, \quad v_n = x_n y_1.$

Utiliser et compléter la définition suivante :

```
function [ElByElProd, ScalProd, v] = operations(x,y)
%
% [ELBYELPROD] = OPERATIONS(X,Y) is the element by element product of vectors X
%                  and Y. NOTE: X and Y can be row or column vectors.
% [ELBYELPROD, SCALPROD] = OPERATIONS(X,Y) returns also the scalar product of
%                            vectors X and Y.
% [ELBYELPROD, SCALPROD, V] = OPERATIONS(X,Y) returns also the vector V
%                               which is defined as: V(1) = X(1)Y(n)
%                                                    V(2) = X(2)Y(n-1)
%                                                         ...
%                                                    V(N) = X(N)Y(1)

...

return
```

Tester la fonction avec MATLAB.

Exercice 4

En utilisant la commande `diag`, définir en MATLAB la matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ avec $n = 10$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & & \\ & & & & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Ensuite, calculer les quantités suivantes :

a) le déterminant de A ;

b) les normes $\|A\|_1$, $\|A\|_2$, $\|A\|_\infty$ (tapez `help norm` pour voir les options) ;

c) le rayon spectral de A, noté $\rho(A)$. On rappelle que $\rho(A) = \max_{j=1,\ldots,n} |\lambda_j(A)|$, ou $\lambda_j(A)$ sont les valeurs propres de A. Vérifier que, puisque A est symétrique et définie positive, on a $\rho(A) = \|A\|_2$;

Visualiser les vecteurs propres $\mathbf{v}_j, j \in \{1, \ldots, 10\}$ en utilisant les commandes `[v, lambda]=eig(A)` et `plot(v)`.

En utilisant MATLAB, vérifier que la matrice V (dont les colonnes sont égales aux vecteurs propres de A) permet de diagonaliser la matrice A. En particulier, vérifier que

$$V^{-1}AV = D = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}.$$

Visualiser finalement la structure des matrices `A`, `V`, `D` (avec la commande `spy`).

Exercice 5

a) Soit

$$f(x) = \frac{x^2}{2}\sin(x), \quad x \in [1, 20]$$

une fonction qu'on veut représenter graphiquement en choisissant 10 points, 20 points et 100 points dans l'intervalle de définition. Écrire un fichier ".m" pour réaliser les trois graphiques sur la même figure et avec trois couleurs différentes. Quelle est la meilleure représentation ?

b) Faire la même chose pour les fonctions :

$$g(x) = \frac{x^3}{6}\cos(\sin(x))\exp\{-x\} + \left(\frac{1}{1+x}\right)^2, \quad x \in [1, 20]$$

$$h(x) = x(1-x) + \frac{\sin(x)\cos(x)}{x^3}, \quad x \in [1, 20]$$

Exercices Théoriques - Analyse Numérique - 2017
Section MA
Prof. A. Quarteroni
Séance 2 - Normes matricielles et conditionnement des systèmes linéaires

Exercice 1

Soit $\|\cdot\|$ une norme vectorielle. Prouver que la fonction

$$\|A\| = \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\mathbf{x}} \tag{1}$$

est une norme matricielle, en remarquant que la relation (1) est équivalente [1] à

$$\|A\| = \sup_{\|\mathbf{x}\|=1} \|A\mathbf{x}\|.$$

Exercice 2

Soit $|||\cdot|||$ une norme matricielle subordonnée à une norme vectorielle $\|\cdot\|$. Prouver que

a) $\|A\mathbf{x}\| \leq |||A|||\,\|\mathbf{x}\|$, i.e. $|||\cdot|||$ est une norme compatible (ou consistante) avec $\|\cdot\|$;

b) $|||I||| = 1$;

c) $|||AB||| \leq |||A|||\,|||B|||$, i.e. $|||\cdot|||$ est sous-multiplicative.

Exercice 3

Montrer que, si $\|\cdot\|$ est une norme matricielle consistante avec une norme vectorielle $\|\cdot\|$, alors $\rho(A) \leq \|A\| \ \forall\ A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

Exercice 4

Étant donnée la matrice $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $a_{11} = a_{22} = 1$, $a_{12} = \gamma$, $a_{21} = 0$, vérifier que pour $\gamma \geq 0$, $K_\infty(A) = K_1(A) = (1+\gamma)^2$. Soit $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ le système linéaire où $\mathbf{b}$ est tel que $\mathbf{x} = (1-\gamma, 1)^\top$ soit la solution. Trouver une majoration du type

$$\frac{\|\delta\mathbf{x}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty} \leq C\frac{\|\delta\mathbf{b}\|_\infty}{\|\mathbf{b}\|_\infty}$$

avec $C > 0$ une constante qui ne dépend que de $\|A^{-1}\|_\infty$, $\|\mathbf{b}\|_\infty$ et $\|\mathbf{x}\|_\infty$. Le vecteur $(\mathbf{x}+\delta\mathbf{x})$ est la solution du système perturbé $A(\mathbf{x}+\delta\mathbf{x}) = (\mathbf{b}+\delta\mathbf{b})$ avec $\delta\mathbf{b}$ une perturbation du vecteur $\mathbf{b}$. Le problème est-il bien conditionné par rapport à $\gamma \to \infty$?

Exercice 5

1. En effet, on peut définir pour tout $\mathbf{x} \neq 0$ un vecteur unitaire $\mathbf{u} \equiv \mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|$ de sorte que (1) s'écrive

$$\|A\| = \sup_{\|\mathbf{u}\|=1} \|A\mathbf{u}\| = \|A\mathbf{w}\| \quad \text{avec } \|\mathbf{w}\| = 1.$$

Supposons que $\|\delta A\| \leq \gamma \|A\|$, $\|\delta \mathbf{b}\| \leq \gamma \|\mathbf{b}\|$ avec $\gamma \in \mathbb{R}^+$ et $\delta A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\delta \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. On veut montrer que, si $\gamma K(A) < 1$, on a les inégalités suivantes :

$$\frac{\|\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \frac{1 + \gamma K(A)}{1 - \gamma K(A)}, \tag{2}$$

$$\frac{\|\delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \frac{2\gamma}{1 - \gamma K(A)} \, K(A). \tag{3}$$

a) Si C est une matrice carrée telle que $\rho(C) < 1$, on sait (voir le Théorème 1.5 du livre) que $I - C$ est inversible. Montrer que dans ce cas on a

$$\frac{1}{1 + \|C\|} \leq \left\|(I - C)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1 - \|C\|}. \tag{4}$$

où $\|\cdot\|$ est est une norme matricielle subordonnée à une norme vectorielle telle que $\|C\| \leq 1$.

b) Montrer l'inégalité (2) en utilisant le résultat du point 1 et le fait que $(A + \delta A)(\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}) = \mathbf{b} + \delta \mathbf{b}$.

c) Montrer l'inégalité (3). Suggestion : utiliser l'inégalité triangulaire $\|\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\delta \mathbf{x}\|$.

Exercices Théoriques - Analyse Numérique - 2017
Section MA
Prof. A. Quarteroni
Séance 3 - Systèmes linéaires : méthodes directes

Exercice 1

Considérons le cas particulier d'un système linéaire dont la matrice est tri-diagonale et inversible :

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & c_1 & & 0 \\ b_2 & a_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ 0 & & b_n & a_n \end{bmatrix}.$$

a) Montrer qu'il existe deux matrices bi-diagonales L et U de la forme

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ \beta_2 & 1 & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \beta_n & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 & & 0 \\ & \alpha_2 & \ddots & \\ & & \ddots & \gamma_{n-1} \\ 0 & & & \alpha_n \end{bmatrix},$$

telles que $A = LU$, et donner les expressions des coefficients α_i, β_i et γ_i en fonction des coefficients de A. Ces formules sont connues sous l'appellation d'*Algorithme de Thomas*.

b) Obtenir les formules résultantes de l'extension de l'algorithme de Thomas à la résolution du système $A\mathbf{x} = \mathbf{f}$, avec $\mathbf{f} = (f_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$, donnée par
   (a) trouver $\mathbf{y}$ tel que $L\mathbf{y} = \mathbf{f}$;
   (b) trouver $\mathbf{x}$ tel que $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

c) Combien d'opérations virgule flottante requiert l'algorithme précédent ?

Exercice 2

On considère un câble élastique qui occupe au repos le segment $[0, 1]$, fixé aux extrémités, sur lequel on applique une force d'intensité $f(x)$. Son déplacement au point x, $u(x)$, est la solution de l'équation différentielle suivante :

$$\begin{aligned} &-u''(x) = f(x), \quad x \in (0,1), \\ &u(0) = 0, \quad u(1) = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Soit $N \in \mathbb{N}$, $h = 1/N$ et $x_i = ih$ pour $i = 0, \ldots, N$; pour approcher la solution $u(x)$, on considère la discrétisation de l'intervalle $(0, 1)$ en N sous-intervalles (x_i, x_{i+1}), et on construit une approximation u_i de $u(x_i)$ par la méthode des différences finies. Cette méthode requiert de résoudre numériquement le système linéaire tridiagonal $A\mathbf{u} = \mathbf{b}$ qui suit :

$$\frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{N-2}) \\ f(x_{N-1}) \end{bmatrix} \tag{6}$$

où $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \ldots, u_{N-1}]^\top$ et $\mathbf{b} = [f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_{N-1})]^\top$. Plus N est grand, plus l'approximation sera précise et plus la taille du système linéaire à résoudre sera élevée.

a) On suppose que la force appliquée soit $f(x) = x(1-x)$ et on prend $N = 20$ intervalles. Construire la matrice A et le vecteur $\mathbf{b}$ correspondants, à l'aide des commandes suivantes :

```
f = @(x) x.*(1-x);
N = 20; h = 1/N;
x = linspace(h, 1-h, N-1)'; % on transpose pour avoir un vecteur colonne
b = f(x);
A = (N^2)*(diag(2*ones(N-1, 1),0) - diag(ones(N-2,1) - diag(ones(N-2,1),-1));
```

Calculer la factorisation LU de A avec la commande MATLAB `lu`. Vérifier que la matrice de permutation P est l'identité (on sait de la théorie qu'aucune permutation de lignes n'est effectuée dès que la matrice est symétrique définie positive, ce qui est le cas de A).

Calculer également la factorisation de Cholesky de A (commande `chol`) et remarquer qu'elle diffère de la précédente.

b) Mettre en oeuvre l'algorithme de *substitution directe* pour la résolution d'un système triangulaire inférieure et l'algorithme de *substitution rétrograde* pour la résolution d'un système triangulaire supérieure. Utiliser et compléter les fonctions suivantes :

```
function [x] = subs_directe(L, b)
%
% [X] = SUBS_DIRECTE(L, B) resout le systeme triangulaire inferieur L*X = B
%
...
return
```

```
function [x] = subs_retrograde(U, b)
%
% [X] = SUBS_RETROGRADE(L, B) resout le systeme triangulaire superieur ...
    U*X = B
%
...
return
```

Calculer la solution du système linéaire $A\mathbf{u} = \mathbf{b}$ à partir de la factorisation $A = LU$, en utilisant les fonctions `subs_directe` et `subs_retrograde` pour résoudre les deux systèmes triangulaires.

c) A l'aide de la commande `plot`, représenter le déplacement $\mathbf{u}$ du câble aux noeuds x_i définis au point 1.

d) Etudier le comportement du conditionnement de la matrice A, $K(A)$, lorsque N augmente, en traçant le graphe des valeurs de $K(A)$ pour $N = 10, 20, \ldots, 120$. Tracer le graphe bilogarithmique des mêmes valeurs avec la commande `loglog`. Quel type de courbe obtient-on ? Si on suppose une relation linéaire $\log_{10} K(A) = m \log_{10} N + c$ pour le graphe bilogarithmique, alors on a $K(A) = CN^m$ (avec $C = 10^c$) : calculer les constantes m et C. De combien $K(A)$ croît-il lorsque on double le nombre N des sous-intervalles ?

Exercice 3

Etudier l'existence et l'unicité de la factorisation LU des matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Exercice 4
Soit A la matrice donnée par

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 10 \\ 3 & 1 & 35 & 5 \\ 4 & 10 & 5 & 45 \end{bmatrix},$$

avec $\det(A) > 0$. Effectuer la factorisation de Cholesky de la matrice A, après avoir remarqué qu'une telle factorisation existe.

Exercices Théoriques - Analyse Numérique - 2017
Section MA
Prof. A. Quarteroni
Séance 4 - Systèmes linéaires : méthodes directes et itératives

Exercice 1
Etudier l'existence et l'unicité de la factorisation LU de Gauss des matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Répéter l'exercice dans le cas où il est possible d'utiliser une matrice de pivots.

Exercice 2
Soit A la matrice donnée par

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 10 \\ 3 & 1 & 35 & 5 \\ 4 & 10 & 5 & 45 \end{bmatrix},$$

avec $\det(A) > 0$. Effectuer la factorisation de Cholesky de la matrice A, après avoir remarqué qu'une telle factorisation existe.

Exercice 3

a) En prenant $n = 1000$, écrire en MATLAB la matrice $n \times n$ suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{1}^\top \\ \mathbf{1} & -I_{n-1} \end{bmatrix}$$

où $\mathbf{1}$ est un vecteur colonne unitaire de longueur $n-1$ et I_{n-1} est la matrice identité $(n-1) \times (n-1)$. Ensuite calculer la factorisation LU de la matrice A avec MATLAB (en utilisant la commande `lu` avec L, U et P comme sorties ; écrire `help lu` pour apprendre comme utiliser la commande).

b) Visualiser la structure des facteurs L et U et de la matrice de permutation P (en utilisant la commande `spy`).

c) Soient $\tilde{P}$ et $\tilde{Q}$ deux matrices de permutation. On considère maintenant la matrice $\tilde{A} = \tilde{P}A\tilde{Q}$ obtenue en effectuant une permutation des lignes avec $\tilde{P}$ et une permutation des colonnes avec $\tilde{Q}$ et on note par $\tilde{A} = \tilde{L}\tilde{U}$ la factorisation LU de la matrice $\tilde{A}$. Trouver une permutation des lignes de $\tilde{P}$ et des colonnes de $\tilde{Q}$ telles que les facteurs $\tilde{L}$ et $\tilde{U}$ soient creux.

d) Calculer une factorisation $\tilde{A} = \tilde{L}\tilde{U}$ de la matrice $\tilde{A}$ à l'aide de la commande `lu` et visualiser la structure des facteurs $\tilde{L}$ et $\tilde{U}$.

e) Transformer au format creux (en utilisant la commande `sparse`) les matrices L, U du point (a), et les matrices $\tilde{L}$, $\tilde{U}$ du point (d). En utilisant la commande `whos` comparer la taille en mémoire de ces matrices. Que peut-on remarquer ?

Exercice 4
En considérant la matrice de Hilbert $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 & \dots \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & \dots & \\ 1/3 & \vdots & & & \\ \vdots & & & & \end{bmatrix} \qquad A_{ij} = \frac{1}{i+j-1};$$

a) Calculer avec MATLAB les éléments de la matrice A avec $n = 10$ (en utilisant la commande `hilb`) et le nombre de conditionnement $K_2(A)$ avec la commande `cond`. Enregistrer les nombres de conditionnement calculés pour $n = 1, \dots, 10$ dans un vecteur avec 10 composantes.

b) Visualiser sur un graphe en échelle semilogarithmique (linéaire sur les abscisses et logarithmique sur les ordonnées) la valeur de $K_2(A)$ en fonction de n, pour $1 \leq n \leq 10$ en utilisant la commande `semilogy`. En déduire que $K_2(A)$ se comporte comme $e^{\alpha n}$.

c) Construire un vecteur colonne $\mathbf{x}_{ex}$ aléatoire avec n composantes en utilisant la commande `rand` et calculer le vecteur $\mathbf{b} = A\mathbf{x}_{ex}$. Pour chaque $n = 1, 2, \dots, 10$ résoudre le système linéaire $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ avec la commande \ qui met en oeuvre une méthode directe, et calculer l'erreur relative

$$\varepsilon^r = \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{ex}\|}{\|\mathbf{x}_{ex}\|}. \tag{7}$$

Visualiser l'erreur sur un graphe en échelle semilogarithmique et en déduire que cette erreur se conduit comme $K_2(A)$. Visualiser ensemble l'erreur relative ε^r et son estimation $\tilde{\varepsilon}^r$ en échelle semilogarithmique, où $\mathbf{r}$ est le résidu et $\tilde{\varepsilon}^r$ est défini comme

$$\tilde{\varepsilon}^r = K_2(A)\frac{\|\mathbf{r}\|}{\|\mathbf{b}\|}. \tag{8}$$