ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Course notes

MATH-250 — Analyse numérique

Professeur — Buffa Annalisa
École Polytechnique Fédérale de Lausanne
2017

Exercices Matlab - Analyse Numérique - 2017
Section MA
Prof. A. Quarteroni
Séance 1 - Introduction à Matlab

Exercice 1

On considère les matrices

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Créer un répertoire de travail et écrire un fichier ".m" dans lequel placer les instructions pour calculer (sans utiliser de boucles), la matrice $C = AB$ (produit matriciel) et la matrice D qui a comme éléments $D_{ij} = A_{ij}B_{ij}$ (produit composante par composante).

Exercice 2

Définir (sans utiliser de boucles) la matrice diagonale de taille $n = 5$ dont la diagonale est un vecteur de points équirépartis entre 3 et 6 (i.e. $[3, 3.75, 4.5, 5.25, 6]$).

Exercice 3

Écrire une fonction pour calculer :

1. le produit, composante par composante, entre deux vecteurs x et y ;
2. le produit scalaire entre les mêmes vecteurs x et y ;
3. un vecteur dont les éléments sont définis par :
   $v_1 = x_1y_n, \quad v_2 = x_2y_{n-1}, \quad \ldots, \quad v_{n-1} = x_{n-1}y_2, \quad v_n = x_ny_1.$

Utiliser et compléter la définition suivante :

```
function [ElByElProd, ScalProd, v] = operations(x,y)

(ELBYELPROD] = OPERATIONS(X,Y) is the element by element product of vectors ...
    X and Y. NOTE: X and Y can be row or column vectors.
[ELBYELPROD, SCALPROD] = OPERATIONS(X,Y) returns also the scalar product of
vectors X and Y.
[ELBYELPROD, SCALPROD, V] = OPERATIONS(X,Y) returns also the vector V which ...
    is defined as: V(1) = X(1)Y(n)
V(2) = X(2)Y(n-1) V(N) = X(N)Y(1)
return
```

Tester la fonction avec MATLAB .

Exercice 4

En utilisant la commande `diag`, définir en MATLAB la matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ avec $n = 10$

$$
\begin{bmatrix}
2 & -1 & & & & \\
-1 & 2 & -1 & & & \\
 & -1 & 2 & -1 & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & & & & \\
 & & & & -1 & 2
\end{bmatrix}
$$

Ensuite, calculer les quantités suivantes :

1. le déterminant de A ;
2. les normes $\|A\|_1$, $\|A\|_2$, $\|A\|_\infty$ (tapez `help norm` pour voir les options) ;
3. le rayon spectral de A, noté $\rho(A)$. On rappelle que $\rho(A) = \max_{j=1,\dots,n} |\lambda_j(A)|$, ou $\lambda_j(A)$ sont les valeurs propres de A. Vérifier que, puisque A est symétrique et définie positive, on a $\rho(A) = \|A\|_2$;

Visualiser les vecteurs propres $\mathbf{v}_j, j \in \{1, \dots, 10\}$ en utilisant les commandes `[v, lambda]=eig(A)` et `plot(v)`.
En utilisant MATLAB , vérifier que la matrice V (dont les colonnes sont égales aux vecteurs propres de A) permet de diagonaliser la matrice A. En particulier, vérifier que

$$V^{-1}AV = D = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}.$$

Visualiser finalement la structure des matrices `A`, `V`, `D` (avec la commande `spy`).

Exercice 5

1. Soit

   $$f(x) = \frac{x^2}{2}\sin(x), \quad x \in [1, 20]$$

   une fonction qu'on veut représenter graphiquement en choisissant 10 points, 20 points et 100 points dans l'intervalle de définition. Écrire un fichier ".m" pour réaliser les trois graphiques sur la même figure et avec trois couleurs différentes. Quelle est la meilleure représentation ?
2. Faire la même chose pour les fonctions :

   $$g(x) = \frac{x^3}{6}\cos(\sin(x))\exp -x + \left(\frac{1}{1+x}\right)^2, \quad x \in [1, 20]$$

   $$h(x) = x(1-x) + \frac{\sin(x)\cos(x)}{x^3}, \quad x \in [1, 20]$$

Exercices Théoriques - Analyse Numérique - 2017
Section MA
Prof. A. Quarteroni
Séance 2 - Normes matricielles et conditionnement des systèmes linéaires

Exercice 1
Soit $\|\cdot\|$ une norme vectorielle. Prouver que la fonction

$$\|A\| = \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\mathbf{x}} \tag{1}$$

est une norme matricielle, en remarquant que la relation (1) est équivalente [1] à

$$\|A\| = \sup_{\|\mathbf{x}\|=1} \|A\mathbf{x}\|\,.$$

Exercice 2
Soit $|||\cdot|||$ une norme matricielle subordonnée à une norme vectorielle $\|\cdot\|$. Prouver que

1. $\|A\mathbf{x}\| \leq |||A|||\,\|\mathbf{x}\|$, i.e. $|||\cdot|||$ est une norme compatible (ou consistante) avec $\|\cdot\|$;
2. $|||I||| = 1$;
3. $|||AB||| \leq |||A|||\,|||B|||$, i.e. $|||\cdot|||$ est sous-multiplicative.

Exercice 3
Montrer que, si $\|\cdot\|$ est une norme matricielle consistante avec une norme vectorielle $\|\cdot\|$, alors $\rho\left(A\right) \leq \|A\|\ \ \forall\ A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

Exercice 4
Étant donnée la matrice $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $a_{11} = a_{22} = 1$, $a_{12} = \gamma$, $a_{21} = 0$, vérifier que pour $\gamma \geq 0$, $K_\infty\left(A\right) = K_1\left(A\right) = \left(1+\gamma\right)^2$. Soit $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ le système linéaire où $\mathbf{b}$ est tel que $\mathbf{x} = \left(1-\gamma, 1\right)^\top$ soit la solution. Trouver une majoration du type

$$\frac{\|\delta\mathbf{x}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty} \leq C\frac{\|\delta\mathbf{b}\|_\infty}{\|\mathbf{b}\|_\infty}$$

avec $C > 0$ une constante qui ne dépend que de $\left\|A^{-1}\right\|_\infty$, $\|\mathbf{b}\|_\infty$ et $\|\mathbf{x}\|_\infty$. Le vecteur $\left(\mathbf{x}+\delta\mathbf{x}\right)$ est la solution du système perturbé $A\left(\mathbf{x}+\delta\mathbf{x}\right) = \left(\mathbf{b}+\delta\mathbf{b}\right)$ avec $\delta\mathbf{b}$ une perturbation du vecteur $\mathbf{b}$. Le problème est-il bien conditionné par rapport à $\gamma \to +\infty$?

Exercice 5

1. En effet, on peut définir pour tout $\mathbf{x} \neq 0$ un vecteur unitaire $\mathbf{u} \equiv \mathbf{x}/\left\|\mathbf{x}\right\|$ de sorte que (1) s'écrive

$$\|A\| = \sup_{\|\mathbf{u}\|=1} \|A\mathbf{u}\| = \|A\mathbf{w}\| \quad \text{avec } \|\mathbf{w}\| = 1.$$

Supposons que $\|\delta A\| \leq \gamma \|A\|$, $\|\delta \mathbf{b}\| \leq \gamma \|\mathbf{b}\|$ avec $\gamma \in \mathbb{R}^+$ et $\delta A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\delta \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. On veut montrer que, si $\gamma K(A) < 1$, on a les inégalités suivantes :

$$\frac{\|\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \frac{1 + \gamma K(A)}{1 - \gamma K(A)}, \tag{2}$$

$$\frac{\|\delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \frac{2\gamma}{1 - \gamma K(A)} \, K(A). \tag{3}$$

1. Si C est une matrice carrée telle que $\rho(C) < 1$, on sait (voir le Théorème 1.5 du livre) que $I - C$ est inversible. Montrer que dans ce cas on a

$$\frac{1}{1 + \|C\|} \leq \left\|(I - C)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1 - \|C\|}. \tag{4}$$

   où $\|\cdot\|$ est est une norme matricielle subordonnée à une norme vectorielle telle que $\|C\| \leq 1$.

2. Montrer l'inégalité (2) en utilisant le résultat du point 1 et le fait que $(A + \delta A)(\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}) = \mathbf{b} + \delta \mathbf{b}$.

3. Montrer l'inégalité (3). Suggestion : utiliser l'inégalité triangulaire $\|\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\delta \mathbf{x}\|$.