ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Exercices

MATH-250 — Analyse numérique

Professeur — Buffa Annalisa
École Polytechnique Fédérale de Lausanne
2017

Exercices Matlab - Analyse Numérique - 2017
Section MA
Prof. A. Quarteroni
Séance 1 - Introduction à Matlab

Exercice 1

On considère les matrices

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Créer un répertoire de travail et écrire un fichier ".m" dans lequel placer les instructions pour calculer (sans utiliser de boucles), la matrice $C = AB$ (produit matriciel) et la matrice D qui a comme éléments $D_{ij} = A_{ij}B_{ij}$ (produit composante par composante).

Solution 1

Dans le script `ex1.m`, nous avons :

```
clc
clear all
close all

A= [5 3 0; 1 1 -4; 3 0 0];
B= [4 3 2; 0 1 0; 5 0 1/2];

C = A*B
D = A.*B
```

On obtient

```
>> ex1

C =

    20    18    10
   -16     4     0
    12     9     6


D =

    20     9     0
     0     1     0
    15     0     0
```

Exercice 2

Définir (sans utiliser de boucles) la matrice diagonale de taille $n = 5$ dont la diagonale est un vecteur de points équirépartis entre 3 et 6 (i.e. $[3, 3.75, 4.5, 5.25, 6]$).

Solution 2

```
>> M = diag(linspace(3,6,5))

M =

    3.0000         0         0         0         0
         0    3.7500         0         0         0
         0         0    4.5000         0         0
         0         0         0    5.2500         0
         0         0         0         0    6.0000
```

Exercice 3

Écrire une fonction pour calculer :

a) le produit, composante par composante, entre deux vecteurs x et y ;

b) le produit scalaire entre les mêmes vecteurs x et y ;

c) un vecteur dont les éléments sont définis par :
$v_1 = x_1 y_n, \quad v_2 = x_2 y_{n-1}, \quad \ldots, \quad v_{n-1} = x_{n-1} y_2, \quad v_n = x_n y_1.$

Utiliser et compléter la définition suivante :

```
function [ElByElProd, ScalProd, v] = operations(x,y)
%
% [ELBYELPROD] = OPERATIONS(X,Y) is the element by element product of vectors X
%                and Y. NOTE: X and Y can be row or column vectors.
% [ELBYELPROD, SCALPROD] = OPERATIONS(X,Y) returns also the scalar product of
%                          vectors X and Y.
% [ELBYELPROD, SCALPROD, V] = OPERATIONS(X,Y) returns also the vector V
%                             which is defined as: V(1) = X(1)Y(n)
%                                                  V(2) = X(2)Y(n-1)
%                                                      ...
%                                                  V(N) = X(N)Y(1)

...

return
```

Tester la fonction avec MATLAB.

Solution 3

```
function [ElByElProd, ScalProd, v] = operations(x,y)
%
% [ELBYELPROD] = OPERATIONS(X,Y) is the element by element product of vectors X
%                and Y. NOTE: X and Y can be row or column vectors.
% [ELBYELPROD, SCALPROD] = OPERATIONS(X,Y) returns also the scalar product of
%                          vectors X and Y.
% [ELBYELPROD, SCALPROD, V] = OPERATIONS(X,Y) returns also the vector V
%                             which is defined as: V(1) = X(1)Y(n)
%                                                  V(2) = X(2)Y(n-1)
%                                                      ...
%                                                  V(N) = X(N)Y(1)
```

```
size_x = size(x);
size_y = size(y);

if (size_x(1) ≠ size_y(1) || size_x(2) ≠ size_y(2))
    disp('!!! ERROR: vectors size is different !!!')
    return
end

if (min(size_x) > 1)
    disp('!!! ERROR: X and Y are matrices !!!')
    return
end

ElByElProd = x.*y;

if (size_x(2) ≥ size_x(1))
    ScalProd = x*y';
else
    ScalProd = x'*y;
end

n = length(x);
v = x.*y(end:-1:1);
%% On peut aussi utiliser une boucle for:
% v = [ ];
% for i = 1:n
% v = [v x(i)*y(n-i+1)];
% end

return
```

```
>> x = [1 4 7 2 1 2];
>> y = [0 9 1 4 3 0];
>> [ElByElProd, ScalProd, v] = operations(x,y)


ElByElProd =

     0    36     7     8     3     0


ScalProd =

    54


v =

     0    12    28     2     9     0
```

Exercice 4

En utilisant la commande `diag`, définir en MATLABla matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ avec $n = 10$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & & \\ & & & & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Ensuite, calculer les quantités suivantes :

a) le déterminant de A ;

b) les normes $\|A\|_1$, $\|A\|_2$, $\|A\|_\infty$ (tapez `help norm` pour voir les options) ;

c) le rayon spectral de A, noté $\rho(A)$. On rappelle que $\rho(A) = \max_{j=1,\dots,n} |\lambda_j(A)|$, ou $\lambda_j(A)$ sont les valeurs propres de A. Vérifier que, puisque A est symétrique et définie positive, on a $\rho(A) = \|A\|_2$;

Visualiser les vecteurs propres $\mathbf{v}_j$, $j \in \{1, \dots, 10\}$ en utilisant les commandes `[v, lambda]=eig(A)` et `plot(v)`.

En utilisant MATLAB, vérifier que la matrice V (dont les colonnes sont égales aux vecteurs propres de A) permet de diagonaliser la matrice A. En particulier, vérifier que

$$V^{-1}AV = D = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}.$$

Visualiser finalement la structure des matrices `A`, `V`, `D` (avec la commande `spy`).

Solution 4

On peut définir la matrice A avec la commande suivante

```
n=10;
A=2*diag(ones(1,n))-diag(ones(1,n-1),1)-diag(ones(1,n-1),-1);
A
```

Après, on calcule son déterminant par

```
det(A)
```

```
ans = 11
```

et les normes $\|A\|_1$, $\|A\|_2$, $\|A\|_\infty$ par

```
nrm1=norm(A,1)
nrm2=norm(A,2)
nrminf=norm(A,inf)
```

et on obtient

```
nrml = 4
nrm2 = 3.9190
nrminf = 4
```

Pour évaluer le rayon spectral de A, il faut calculer ses valeurs propres et en prendre le maximum, en valeur absolue :

```
rho=max(abs(eig(A)))

rho = 3.9190
```

On peut directement vérifier que, A étant symétrique et définie positive, on a $\rho(1) = \|A\|_2$. Pour calculer et visualiser les vecteurs propres $\mathbf{v}_j, j \in \{1, \ldots, 10\}$, il faut utiliser les commandes

```
[V, D]=eig(A);
figure
plot(V)
```

ou, si on veut visualiser chaque vecteur propre individuellement, la boucle suivante :

```
figure
for i=1:10
    plot(V(:,i))
    pause
end
```

Avec la première option, on a le graphe de la Figure 1.

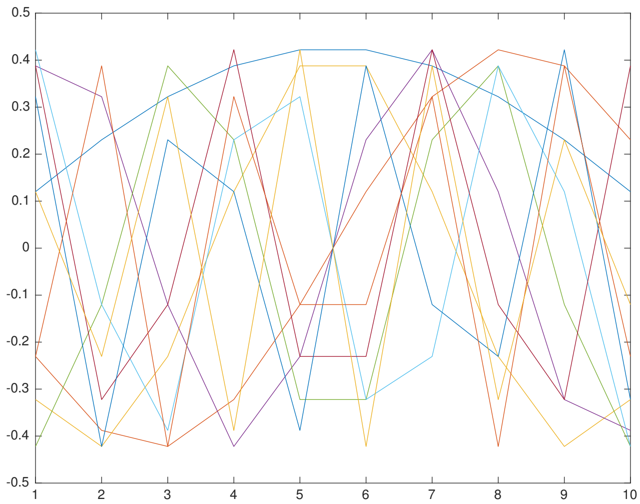

FIGURE 1 – Composantes des vecteurs propres de la matrice A.

Pour vérifier que la matrice V (dont les colonnes sont égales aux vecteurs propres de A) permet de diagonaliser la matrice A, c'est-à-dire $V^{-1}AV = D = \text{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, il faut utiliser les commandes suivantes :

```
[V,D]=eig(A)
inv(V)*A*V % ou mieux (V\A)*V
D
dif = norm(D-inv(V)*A*V); % ou mieux dif = norm(D-(V\A)*V);
```

on obtient

```
dif = 3.5003e-15
```

Enfin, pour visualiser la structure des matrices `A`, `V`, `D`, il faut taper

```
spy(A)
spy(D)
spy(V)
```

On peut observer à la Figure 2 que la matrice A est tri-diagonale, la matrice D est diagonale alors que la matrice V des vecteurs propres est pleine : tous ses éléments sont différentes de zéro.

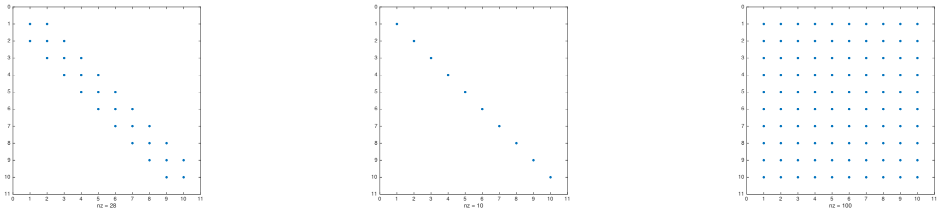

FIGURE 2 – Structure des matrices A, D et V de gauche à droite.

Exercice 5

a) Soit

$$f(x) = \frac{x^2}{2}\sin(x), \quad x \in [1, 20]$$

une fonction qu'on veut représenter graphiquement en choisissant 10 points, 20 points et 100 points dans l'intervalle de définition. Écrire un fichier ".m" pour réaliser les trois graphiques sur la même figure et avec trois couleurs différentes. Quelle est la meilleure représentation ?

b) Faire la même chose pour les fonctions :

$$g(x) = \frac{x^3}{6}\cos(\sin(x))\exp -x + \left(\frac{1}{1+x}\right)^2, \quad x \in [1, 20]$$

$$h(x) = x(1-x) + \frac{\sin(x)\cos(x)}{x^3}, \quad x \in [1, 20]$$

Solution 5

a) Le script `ex5.m` est

```
f=@ (x) x.^2/2.*sin(x);
x1 = linspace(1,20,10);
x2 = linspace(1,20,20);
x3 = linspace(1,20,100);

figure
plot(x1,f(x1),'r')
hold on
plot(x2,f(x2),'g')
plot(x3,f(x3),'m')
legend('10 points','20 points','100 points')
```

```
xlabel('x')
ylabel('f(x)')
saveas(gcf,'f5','epsc')
```

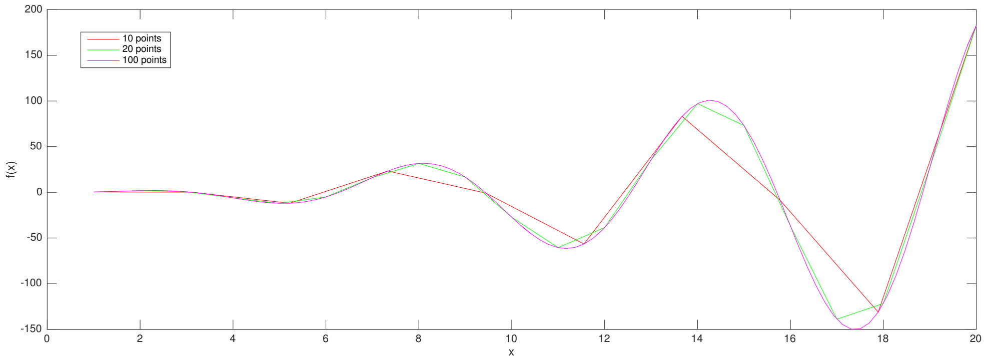

FIGURE 3 – Graphe de la fonction f.

b) On remplace la fonction f par les fonctions g et h :

```
g=@(x) x.^3/6.*cos(sin(x)).*exp(-x)+(1./(1+x)).^2;
h=@ (x) x.*(1-x)+sin(x).*cos(x)./(x.^3);
```

Exercices Théoriques - Analyse Numérique - 2017
Section MA
Prof. A. Quarteroni
Séance 2 - Normes matricielles et conditionnement des systèmes linéaires

Exercice 1

Soit $\|\cdot\|$ une norme vectorielle. Prouver que la fonction

$$\|A\| = \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\mathbf{x}} \tag{1}$$

est une norme matricielle, en remarquant que la relation (1) est équivalente [1] à

$$\|A\| = \sup_{\|\mathbf{x}\|=1} \|A\mathbf{x}\| \,.$$

Solution 1

En utilisant l'astuce, on montre directement que cette définition forme une norme matricielle.

a) Si $\|A\mathbf{x}\| \geq 0$, alors $\|A\| = \sup_{\|\mathbf{x}\|=1} \|A\mathbf{x}\| \geq 0$. De plus

$$\|A\| = \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\mathbf{x}} = 0 \Leftrightarrow \|A\mathbf{x}\| = 0 \;\forall\; \mathbf{x} \neq \mathbf{0},$$

ou encore

$$A\mathbf{x} = 0 \;\forall\; \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \Leftrightarrow A = \mathbf{0}.$$

Donc, $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = \mathbf{0}$.

b) Soit un scalaire α, on a

$$\|\alpha A\| = \sup \|\mathbf{x}\| = 1 \, \|\alpha A\mathbf{x}\| = |\alpha| \sup \|\mathbf{x}\| = 1 \, \|A\mathbf{x}\| = |\alpha| \, \|A\| \,.$$

c) Vérifions enfin l'inégalité triangulaire. Par définition du supremum, si $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ alors

$$\frac{\|A\mathbf{x}\|}{\mathbf{x}} \leq \|A\| \Rightarrow \|A\mathbf{x}\| \leq \|A\| \, \|\mathbf{x}\| \,,$$

ainsi, en prenant $\mathbf{x}$ de norme 1, on obtient

$$\|(A+B)\,\mathbf{x}\| \leq \|A\mathbf{x}\| + \|B\mathbf{x}\| \leq \|A\| + \|B\| \,,$$

d'où on déduit $\|A+B\| = \sup_{\|\mathbf{x}\|=1} \|(A+B)\,\mathbf{x}\| \leq \|A\| + \|B\|$.

---

1. En effet, on peut définir pour tout $\mathbf{x} \neq 0$ un vecteur unitaire $\mathbf{u} \equiv \mathbf{x}/\,\|\mathbf{x}\|$ de sorte que (1) s'écrive

$$\|A\| = \sup_{\|\mathbf{u}\|=1} \|A\mathbf{u}\| = \|A\mathbf{w}\| \quad \text{avec } \|\mathbf{w}\| = 1.$$

Exercice 2
Soit $|||\cdot|||$ une norme matricielle subordonnée à une norme vectorielle $\|\cdot\|$. Prouver que

a) $\|A\mathbf{x}\| \leq |||A|||\, \|\mathbf{x}\|$, i.e. $|||\cdot|||$ est une norme compatible (ou consistante) avec $\|\cdot\|$;
b) $|||I||| = 1$;
c) $|||AB||| \leq |||A|||\, |||B|||$, i.e. $|||\cdot|||$ est sous-multiplicative.

Solution 2

a) Par définition du supremum, si $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ alors

$$|||A||| = \sup_{\mathbf{y}\neq\mathbf{0}} \frac{\|A\mathbf{y}\|}{\|\mathbf{y}\|} \geq \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \Rightarrow \|A\mathbf{x}\| \leq |||A|||\, \|\mathbf{x}\|\,.$$

b) Par la définition de la norme matricielle subordonnée à une norme vectorielle

$$|||I||| = \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|I\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} = 1.$$

c) Par la compatibilité de la norme, on déduit

$$|||AB||| = \sup_{\|\mathbf{x}\|=1} \|AB\mathbf{x}\| \leq \sup_{\|\mathbf{x}\|=1} |||A|||\, \|B\mathbf{x}\| = |||A||| \sup_{\|\mathbf{x}\|=1} \|B\mathbf{x}\| = |||A|||\, |||B|||.$$

Exercice 3
Montrer que, si $\|\cdot\|$ est une norme matricielle consistante avec une norme vectorielle $\|\cdot\|$, alors $\rho\left(A\right) \leq \|A\| \;\; \forall\, A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

Solution 3
Si λ est une valeur propre de A, alors il existe $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, vecteur propre de A, tel que $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Ainsi, puisque $\|\cdot\|$ est consistante,

$$|\lambda|\, \|\mathbf{v}\| = \|\lambda\mathbf{v}\| = \|A\mathbf{v}\| \leq \|A\|\, \|\mathbf{v}\|$$

et donc $|\lambda| \leq \|A\|$. Cette inégalité étant vraie pour toute valeur propre de A, elle l'est en particulier quand $|\lambda|$ est égale au rayon spectral.

Exercice 4
Étant donnée la matrice $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $a_{11} = a_{22} = 1$, $a_{12} = \gamma$, $a_{21} = 0$, vérifier que pour $\gamma \geq 0$, $K_\infty\left(A\right) = K_1\left(A\right) = \left(1+\gamma\right)^2$. Soit $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ le système linéaire où $\mathbf{b}$ est tel que $\mathbf{x} = \left(1-\gamma, 1\right)^\top$ soit la solution. Trouver une majoration du type

$$\frac{\|\delta\mathbf{x}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty} \leq C \frac{\|\delta\mathbf{b}\|_\infty}{\|\mathbf{b}\|_\infty}$$

avec $C > 0$ une constante qui ne dépend que de $\left\|A^{-1}\right\|_\infty$, $\|\mathbf{b}\|_\infty$ et $\|\mathbf{x}\|_\infty$. Le vecteur $\left(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}\right)$ est la solution du système perturbé $A\left(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}\right) = \left(\mathbf{b} + \delta\mathbf{b}\right)$ avec $\delta\mathbf{b}$ une perturbation du vecteur $\mathbf{b}$. Le problème est-il bien conditionné par rapport à $\gamma \to +\infty$?

Solution 4
On a

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\gamma \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ainsi, puisque $\gamma \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\|A\|_1 &= \max_{j=1,2} \sum_{i=1}^{2} |a_{ij}| = \max\{1, 1+\gamma\} = 1+\gamma, \\
\|A\|_\infty &= \max_{j=1,2} \sum_{i=1}^{2} |a_{ij}| = \max\{1+\gamma, 1\} = 1+\gamma, \\
\left\|A^{-1}\right\|_1 &= \max\{1, 1+\gamma\} = 1+\gamma, \\
\left\|A^{-1}\right\|_\infty &= \max\{1, 1+\gamma\} = 1+\gamma.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$K_1(A) = \|A\|_1 \left\|A^{-1}\right\|_1 = K_\infty(A) = \|A\|_\infty \left\|A^{-1}\right\|_\infty = (1+\gamma)^2.$$

On a

$$\mathbf{b} = A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

en particulier $\|\mathbf{b}\|_\infty = 1$. En perturbant le second membre du système $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ (on ne perturbe pas la matrice), on obtient un système perturbé de la forme

$$A(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) = \mathbf{b} + \delta\mathbf{b},$$

donc

$$\delta\mathbf{x} = A^{-1}\delta\mathbf{b}.$$

On en tire que

$$\|\delta\mathbf{x}\|_\infty \leq \left\|A^{-1}\right\|_\infty \|\delta\mathbf{b}\|_\infty.$$

En divisant par $\|\mathbf{x}\|_\infty$, on trouve

$$\frac{\|\delta\mathbf{x}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty} \leq \frac{\|A^{-1}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty} \|\delta\mathbf{b}\|_\infty.$$

En plus, puisque $\|\mathbf{x}\|_\infty = 1$, on peut écrire

$$\frac{\|\delta\mathbf{x}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty} \leq \underbrace{\frac{\|A^{-1}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty}}_{\mathrm{C}} \frac{\|\delta\mathbf{b}\|_\infty}{\|\mathbf{b}\|_\infty}$$

avec $C = \dfrac{\|A^{-1}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty}$ la constante cherchée. On a donc que

$$C = \frac{1+\gamma}{\max\{1, |1-\gamma|\}}.$$

On voit bien que $C \to 1$ quand $\gamma \to \infty$. Ainsi, pour le cas particulier de $\mathbf{b} = (1,1)^{\top}$, le problème est bien conditionné. Remarquons que, dans le cas général ($\mathbf{b}$ arbitraire), le problème est mal conditionné pour γ grand. En effet, $K_{\infty}(A) \to \infty$ quand $\gamma \to \infty$. Cet exercice met en évidence que le fait d'avoir une matrice avec un grand conditionnement n'empêche pas nécessairement le système global d'être bien conditionné pour des choix particuliers du second membre $\mathbf{b}$.

Exercice 5

Supposons que $\|\delta A\| \leq \gamma \|A\|$, $\|\delta \mathbf{b}\| \leq \gamma \|\mathbf{b}\|$ avec $\gamma \in \mathbb{R}^{+}$ et $\delta A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\delta \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n}$. On veut montrer que, si $\gamma K(A) < 1$, on a les inégalités suivantes :

$$\frac{\|\mathbf{x}+\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \frac{1+\gamma K(A)}{1-\gamma K(A)}, \tag{2}$$

$$\frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \frac{2\gamma}{1-\gamma K(A)}\, K(A). \tag{3}$$

a) Si C est une matrice carrée telle que $\rho(C) < 1$, on sait (voir le Théorème 1.5 du livre) que $I - C$ est inversible. Montrer que dans ce cas on a

$$\frac{1}{1+\|C\|} \leq \left\|(I-C)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1-\|C\|}. \tag{4}$$

où $\|\cdot\|$ est est une norme matricielle subordonnée à une norme vectorielle telle que $\|C\| \leq 1$.

b) Montrer l'inégalité (2) en utilisant le résultat du point 1 et le fait que $(A+\delta A)(\mathbf{x}+\delta\mathbf{x}) = \mathbf{b}+\delta\mathbf{b}$.

c) Montrer l'inégalité (3). Suggestion : utiliser l'inégalité triangulaire $\|\mathbf{x}+\delta\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{x}\|+\|\delta\mathbf{x}\|$.

Solution 5

a) Puisque[2] $\|I\| = 1$, on a (Exercice 2, Série 2)

$$1 = \|I\| \leq \|I-C\| \left\|(I-C)^{-1}\right\| \leq (1+\|C\|) \left\|(I-C)^{-1}\right\|,$$

ce qui donne la première égalité de (4). Pour la seconde, en remarquant que $I = I - C + C$ et en multipliant à droite les deux membres par $(I-C)^{-1}$, on $(I-C)^{-1} = I + C(I-C)^{-1}$. En prenant les normes, on obtient

$$\left\|(I-C)^{-1}\right\| \leq 1 + \|C\| \left\|(I-C)^{-1}\right\|,$$

d'où on déduit la seconde inégalité, puisque $\|C\| < 1$.

b) Soit

$$(A+\delta A)(\mathbf{x}+\delta\mathbf{x}) = \mathbf{b}+\delta\mathbf{b}.$$

Alors, on a

$$\left(I + A^{-1}\delta A\right)(\mathbf{x}+\delta\mathbf{x}) = \mathbf{x} + A^{-1}\delta\mathbf{b}.$$

2. On suppose (toujours) que $\|\cdot\|$ est une norme matricielle subordonnée à une norme vectorielle.

De plus, puisque $\gamma K(A) < 1$ et $\|\delta A\| \leq \gamma \|A\|$ on a

$$\left\|A^{-1}\delta A\right\| \leq \left\|A^{-1}\right\| \|\delta A\| \leq \gamma \left\|A^{-1}\right\| \|A\| = \gamma K(A) < 1.$$

Alors, $\rho\left(A^{-1}\delta A\right) < 1$ et $I + A^{-1}\delta A$ est inversible. En prenant l'inverse de cette matrice et en passant aux normes, on obtient

$$\|\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}\| \leq \left\|\left(I + A^{-1}\delta A\right)^{-1}\right\| \left(\|\mathbf{x}\| + \gamma \left\|A^{-1}\right\| \|\mathbf{b}\|\right).$$

Alors, l'inégalité du point 1 donne

$$\|\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}\| \leq \frac{1}{1 - \|A^{-1}\delta A\|} \left(\|\mathbf{x}\| + \gamma \left\|A^{-1}\right\| \|\mathbf{b}\|\right),$$

ce qui implique

$$\frac{\|\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \frac{1 + \gamma K(A)}{1 - \gamma K(A)},$$

puisque $\left\|A^{-1}\delta A\right\| \leq \gamma K(A)$ et $\|\mathbf{b}\| \leq \|A\| \|\mathbf{x}\|$.

c) Montrons à présent que l'inéquation (3) est correcte. En retranchant $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ de (2), on a

$$A\delta\mathbf{x} = -\delta A(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) + \delta\mathbf{b}.$$

En prenant l'inverse de A et en passant aux normes, on obtient l'inégalité suivante

$$\begin{aligned} \|\delta\mathbf{x}\| &\leq \left\|A^{-1}\delta A\right\| \|\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}\| + \left\|A^{-1}\right\| \|\delta\mathbf{b}\| \\ &\leq \gamma K(A) \|\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}\| + \gamma \left\|A^{-1}\right\| \|\mathbf{b}\| \end{aligned}$$

En divisant les deux membres par $\|\mathbf{x}\|$ et en utilisant l'inégalité triangulaire $\|\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\delta\mathbf{x}\|$, on obtient finalement (3).

Exercice 6

a) Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice symétrique définie positive et soient λ_i et $\mathbf{v}_i$, $i = 1, \ldots, n$, les valeurs propres et les vecteurs propres de A. Montrer que si $\mathbf{x}$ est la solution du système linéaire $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, alors

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} (c_i/\lambda_i)\, \mathbf{v}_i,$$

où c_i est la i-ème composante de $\mathbf{b}$ dans la base des vecteurs propres de A.

b) On se donne maintenant le système linéaire $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ suivant

$$\begin{bmatrix} 1001 & 1000 \\ 1000 & 1001 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad ,$$

où A est mal-conditionnée avec les valeurs propres $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2001$. En décomposant le second membre sur la base des vecteurs propres de la matrice A, expliquer pourquoi, lorsque $\mathbf{b} = (2001, 2001)^\top$, une petite perturbation $\delta\mathbf{b} = (1, 0)^\top$ produit de grandes variations dans la solution, et réciproquement, si $\mathbf{b} = (1, -1)^\top$, une petite variation $\delta\mathbf{x} = (0.001, 0)^\top$ dans la solution induit de grandes variations dans $\mathbf{b}$.

Solution 6

a) Puisque A est une matrice symétrique, il existe une matrice V orthogonale et une matrice D diagonale dont tous les coefficients sont réels, telles que

$$V^{-1}AV = D = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$$

ou, de façon équivalente, $A\mathbf{v}_i = \lambda_i\mathbf{v}_i$ pour $i = 1, \dots, n$, de sorte que les vecteurs colonnes de V soient les vecteurs propres de A. De plus, les vecteurs propres sont deux à deux orthogonaux (et peuvent être normalisés : donc, on a que $\mathbf{v}_j^\top \mathbf{v}_l = \delta_{jl}$, où δ_{jl} est le symbole de Kronecker) et on déduit que les vecteurs propres d'une matrice symétrique sont orthogonaux et engendrent l'espace $\mathbb{R}^n$ tout entier.

Donc, soient $\mathbf{b} = \sum_{i=1}^n c_i\mathbf{v}_i$ le membre de droite du système linéaire $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ et $\mathbf{x}$ sa solution ; en écrivant aussi $\mathbf{x}$ dans la base des vecteurs propres de A, on a :

$$A\mathbf{x} = A\sum_{i=1}^n x_i\mathbf{v}_i = A\sum_{i=1}^n c_i\mathbf{v}_i.$$

Et, puisque $A\mathbf{v}_i = \lambda_i\mathbf{v}_i$, on trouve

$$\sum_{i=1}^n x_i\lambda_i\mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^n c_i\mathbf{v}_i.$$

Donc on trouve

$$\sum_{i=1}^n (\lambda_i x_i - c_i)\,\mathbf{v}_i = 0,$$

c'est-à-dire $\lambda_i x_i = c_i$ et

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n (c_i/\lambda_i)\,\mathbf{v}_i.$$

b) Les vecteurs propres de la matrice A sont $\mathbf{v}_1 = (1, -1)^\top$ (qui correspond à $\lambda_1 = 1$) et $\mathbf{v}_2 = (1, 1)^\top$ (qui correspond à $\lambda_2 = 2001$). Soit $\mathbf{b} = (2001, 2001)^\top$ et $\delta\mathbf{b} = (1, 0)^\top$. Alors,

$$\mathbf{b} + \delta + \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2001 \\ 2001 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 2001\mathbf{v}_2 + \frac{1}{2}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \frac{1}{2}\mathbf{v}_1 + \frac{4003}{2}\mathbf{v}_2.$$

Si on écrit la solution $\mathbf{x}$ comme combinaison linéaire des vecteurs propres, on trouve

$$\mathbf{x} = \frac{\frac{1}{2}}{1}\mathbf{v}_1 + \frac{\frac{4003}{2}}{2001}\mathbf{v}_2 = \frac{1}{2}\mathbf{v}_1 + \frac{4003}{4002}\mathbf{v}_2 \approx \begin{bmatrix} 1.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}.$$

Ainsi on voit que l'erreur $\delta\mathbf{x}$ par rapport à la solution exacte $\mathbf{x} = (1, 1)^\top$ est $\delta\mathbf{x} \approx (0.5, -0.5)^\top$.

Réciproquement, soit $\mathbf{b} = (1, -1)^\top$. La solution exacte du système est $\mathbf{x} = (1, 1)^\top$. On exprime la solution perturbée par rapport aux vecteurs propres :

$$\mathbf{x} + \delta + \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1.001 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{2.001}{2}\mathbf{v}_1 + \frac{0.001}{2}\mathbf{v}_2,$$

d'où $c_1 = 2.001/2$ et $c_2 = 0.001/2$. Donc

$$\mathbf{b} + \delta + \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2.001 \\ 0 \end{bmatrix}$$

et $\delta\mathbf{b} = (1.001, 1)^\top$.

Remarque. Le système linéaire de cet exercice pourrait être obtenu de l'analyse d'une barre rigide attachée dans sa partie central à un ressort de raideur 4000 et connectée aux extremités à deux ressorts de raideur 1 (voir Figure 4 ci-dessous). On applique des forces b_1 et b_2 aux extremités de la barre et on observe ses déplacements verticaux x_1 et x_2. Si les forces b_1 et b_2 sont équilibrées (par exemple $b_1 = 2001$, $b_2 = 2001$), alors de petits changements $\delta\mathbf{b}$ engendrent des mouvements significatifs de la barre (grand $\delta\mathbf{x}$). A l'inverse, si les forces ne sont pas équilibrées (par exemple $b_1 = 1$, $b_2 = -1$), alors on peut obtenir de petits déplacements $\delta\mathbf{x}$ même si on impose de forts changements $\delta\mathbf{b}$ sur les forces exercées.

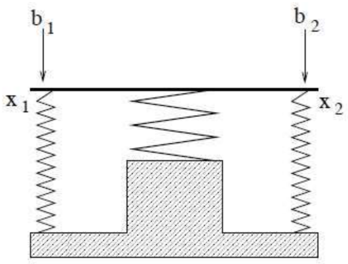

FIGURE 4 – Ressort