ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Course notes

MATH-250 — Analyse numérique

Professeur — Buffa Annalisa

École Polytechnique Fédérale de Lausanne

2017

Exercices Matlab - Analyse Numérique - 2017
Section MA
Prof. A. Quarteroni
Séance 1 - Introduction à Matlab

Exercice 1
On considère les matrices

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Créer un répertoire de travail et écrire un fichier ".m" dans lequel placer les instructions pour calculer (sans utiliser de boucles), la matrice $C = AB$ (produit matriciel) et la matrice D qui a comme éléments $D_{ij} = A_{ij}B_{ij}$ (produit composante par composante).

Solution 1
Dans le script `ex1.m`, nous avons :

```
clc
clear all
close all

A= [5 3 0; 1 1 -4; 3 0 0];
B= [4 3 2; 0 1 0; 5 0 1/2];

C = A*B
D = A.*B
```

On obtient

```
>> ex1

C =

   20  18  10
   -16  4  0
   12  9  6


D =

   20  9  0
   0  1  0
   15  0  0
```

Exercice 2
Définir (sans utiliser de boucles) la matrice diagonale de taille $n = 5$ dont la diagonale est un vecteur de points équirépartis entre 3 et 6 (i.e. $[3, 3.75, 4.5, 5.25, 6]$).

Solution 2

```
>> M = diag(linspace(3,6,5))

M =
3.0000   0    0    0    0
0    3.7500   0    0    0
0    0    4.5000   0    0
0    0    0    5.2500   0
0    0    0    0    6.0000
```

Exercice 3

Écrire une fonction pour calculer :

1. le produit, composante par composante, entre deux vecteurs x et y ;
2. le produit scalaire entre les mêmes vecteurs x et y ;
3. un vecteur dont les éléments sont définis par :
   $v_1 = x_1 y_n, \quad v_2 = x_2 y_{n-1}, \quad \ldots, \quad v_{n-1} = x_{n-1} y_2, \quad v_n = x_n y_1.$

Utiliser et compléter la définition suivante :

```
function [ElByElProd, ScalProd, v] = operations(x,y)

(ELBYELPROD] = OPERATIONS(X,Y) is the element by element product of vectors ...
    X and Y. NOTE: X and Y can be row or column vectors.
[ELBYELPROD, SCALPROD] = OPERATIONS(X,Y) returns also the scalar product of
vectors X and Y.
[ELBYELPROD, SCALPROD, V] = OPERATIONS(X,Y) returns also the vector V which ...
    is defined as: V(1) = X(1)Y(n)
V(2) = X(2)Y(n-1) V(N) = X(N)Y(1)
return
```

Tester la fonction avec MATLAB .

Solution 3

Exercice 4

En utilisant la commande `diag`, définir en MATLAB la matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ avec $n = 10$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & & \\ & & & & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Ensuite, calculer les quantités suivantes :

1. le déterminant de A ;
2. les normes $\|A\|_1$, $\|A\|_2$, $\|A\|_\infty$ (tapez `help norm` pour voir les options) ;
3. le rayon spectral de A, noté $\rho(A)$. On rappelle que $\rho(A) = \max_{j=1,\dots,n} |\lambda_j(A)|$, ou $\lambda_j(A)$ sont les valeurs propres de A. Vérifier que, puisque A est symétrique et définie positive, on a $\rho(A) = \|A\|_2$;

Visualiser les vecteurs propres $\mathbf{v}_j$, $j \in \{1, \dots, 10\}$ en utilisant les commandes `[v, lambda]=eig(A)` et `plot(v)`.
En utilisant MATLAB , vérifier que la matrice V (dont les colonnes sont égales aux vecteurs propres de A) permet de diagonaliser la matrice A. En particulier, vérifier que

$$V^{-1}AV = D = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}.$$

Visualiser finalement la structure des matrices `A`, `V`, `D` (avec la commande `spy`).

Solution 4
On peut définir la matrice A avec la commande suivante

Exercice 5

1. Soit

$$f(x) = \frac{x^2}{2}\sin(x), \quad x \in [1, 20]$$

une fonction qu'on veut représenter graphiquement en choisissant 10 points, 20 points et 100 points dans l'intervalle de définition. Écrire un fichier ".m" pour réaliser les trois graphiques sur la même figure et avec trois couleurs différentes. Quelle est la meilleure représentation ?

2. Faire la même chose pour les fonctions :

$$g(x) = \frac{x^3}{6}\cos(\sin(x))\exp -x + \left(\frac{1}{1+x}\right)^2, \quad x \in [1, 20]$$

$$h(x) = x(1-x) + \frac{\sin(x)\cos(x)}{x^3}, \quad x \in [1, 20]$$

Solution 5

1. Le script IMG
2. On remplace
   FIG

Exercices Théoriques - Analyse Numérique - 2017
Section MA
Prof. A. Quarteroni
Séance 2 - Normes matricielles et conditionnement des systèmes linéaires

Exercice 1
Soit $\|\cdot\|$ une norme vectorielle. Prouver que la fonction

$$\|A\| = \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\mathbf{x}} \tag{1}$$

est une norme matricielle, en remarquant que la relation (1) est équivalente [1] à

$$\|A\| = \sup_{\|\mathbf{x}\|=1} \|A\mathbf{x}\| .$$

Solution 1
En utilisant l'astuce, on montre directement que cette définition forme une norme matricielle.

1. Si $\|A\mathbf{x}\| \geq 0$, alors $\|A\| = \sup_{\|\mathbf{x}\|=1} \|A\mathbf{x}\| \geq 0$. De plus

$$\|A\| = \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\mathbf{x}} = 0 \Leftrightarrow \|A\mathbf{x}\| = 0 \ \forall \ \mathbf{x} \neq \mathbf{0},$$

ou encore

$$A\mathbf{x} = 0 \ \forall \ \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \Leftrightarrow A = \mathbf{0}.$$

Donc, $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = \mathbf{0}$.

2. Soit un scalaire α, on a

$$\|\alpha A\| = \sup \|\mathbf{x}\| = 1 \|\alpha A\mathbf{x}\| = |\alpha| \sup \|\mathbf{x}\| = 1 \|A\mathbf{x}\| = |\alpha| \|A\| .$$

3. Vérifions enfin l'inégalité triangulaire. Par définition du supremum, si $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ alors

$$\frac{\|A\mathbf{x}\|}{\mathbf{x}} \leq \|A\| \Rightarrow \|A\mathbf{x}\| \leq \|A\| \|\mathbf{x}\| ,$$

ainsi, en prenant $\mathbf{x}$ de norme 1, on obtient

$$\|(A+B)\mathbf{x}\| \leq \|A\mathbf{x}\| + \|B\mathbf{x}\| \leq \|A\| + \|B\| ,$$

d'où on déduit $\|A+B\| = \sup_{\|\mathbf{x}\|=1} \|(A+B)\mathbf{x}\| \leq \|A\| + \|B\|$.

1. En effet, on peut définir pour tout $\mathbf{x} \neq 0$ un vecteur unitaire $\mathbf{u} \equiv \mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|$ de sorte que (1) s'écrive

$$\|A\| = \sup_{\|\mathbf{u}\|=1} \|A\mathbf{u}\| = \|A\mathbf{w}\| \quad \text{avec } \|\mathbf{w}\| = 1.$$

Exercice 2
Soit $|||\cdot|||$ une norme matricielle subordonnée à une norme vectorielle $\|\cdot\|$. Prouver que

1. $\|A\mathbf{x}\| \leq |||A||| \, \|\mathbf{x}\|$, i.e. $|||\cdot|||$ est une norme compatible (ou consistante) avec $\|\cdot\|$;
2. $|||I||| = 1$;
3. $|||AB||| \leq |||A||| \, |||B|||$, i.e. $|||\cdot|||$ est sous-multiplicative.

Solution 2

1. Par définition du supremum, si $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ alors
$$|||A||| = \sup_{\mathbf{y}\neq\mathbf{0}} \frac{\|A\mathbf{y}\|}{\|\mathbf{y}\|} \geq \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \Rightarrow \|A\mathbf{x}\| \leq |||A||| \, \|\mathbf{x}\| \, .$$
2. Par la définition de la norme matricielle subordonnée à une norme vectorielle
$$|||I||| = \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|I\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} = 1.$$
3. Par la compatibilité de la norme, on déduit
$$|||AB||| = \sup_{\|\mathbf{x}\|=1} \|AB\mathbf{x}\| \leq \sup_{\|\mathbf{x}\|=1} |||A||| \, \|B\mathbf{x}\| = |||A||| \sup_{\|\mathbf{x}\|=1} \|B\mathbf{x}\| = |||A||| \, |||B|||.$$

Exercice 3
Montrer que, si $\|\cdot\|$ est une norme matricielle consistante avec une norme vectorielle $\|\cdot\|$, alors $\rho\left(A\right) \leq \|A\| \ \ \forall \ A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

Solution 3
Si λ est une valeur propre de A, alors il existe $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, vecteur propre de A, tel que $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Ainsi, puisque $\|\cdot\|$ est consistante,
$$|\lambda| \, \|\mathbf{v}\| = \|\lambda\mathbf{v}\| = \|A\mathbf{v}\| \leq \|A\| \, \|\mathbf{v}\|$$
et donc $|\lambda| \leq \|A\|$. Cette inégalité étant vraie pour toute valeur propre de A, elle l'est en particulier quand $|\lambda|$ est égale au rayon spectral.

Exercice 4
Étant donnée la matrice $A \in \mathbb{R}^{2\times2}$, $a_{11} = a_{22} = 1$, $a_{12} = \gamma$, $a_{21} = 0$, vérifier que pour $\gamma \geq 0$, $K_\infty\left(A\right) = K_1\left(A\right) = \left(1+\gamma\right)^2$. Soit $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ le système linéaire où $\mathbf{b}$ est tel que $\mathbf{x} = \left(1-\gamma, 1\right)^\top$ soit la solution. Trouver une majoration du type
$$\frac{\|\delta\mathbf{x}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty} \leq C\frac{\|\delta\mathbf{b}\|_\infty}{\|\mathbf{b}\|_\infty}$$
avec $C > 0$ une constante qui ne dépend que de $\left\|A^{-1}\right\|_\infty$, $\|\mathbf{b}\|_\infty$ et $\|\mathbf{x}\|_\infty$. Le vecteur $\left(\mathbf{x}+\delta\mathbf{x}\right)$ est la solution du système perturbé $A\left(\mathbf{x}+\delta\mathbf{x}\right) = \left(\mathbf{b}+\delta\mathbf{b}\right)$ avec $\delta\mathbf{b}$ une perturbation du vecteur $\mathbf{b}$. Le problème est-il bien conditionné par rapport à $\gamma \to +\infty$?

Solution 4
On a

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\gamma \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ainsi, puisque $\gamma \geq 0$,

$$\begin{aligned} \|A\|_1 &= \max_{j=1,2} \sum_{i=1}^{2} |a_{ij}| = \max\{1, 1+\gamma\} = 1+\gamma, \\ \|A\|_\infty &= \max_{j=1,2} \sum_{i=1}^{2} |a_{ij}| = \max\{1+\gamma, 1\} = 1+\gamma, \\ \left\|A^{-1}\right\|_1 &= \max\{1, 1+\gamma\} = 1+\gamma, \\ \left\|A^{-1}\right\|_\infty &= \max\{1, 1+\gamma\} = 1+\gamma. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$K_1(A) = \|A\|_1 \left\|A^{-1}\right\|_1 = K_\infty(A) = \|A\|_\infty \left\|A^{-1}\right\|_\infty = (1+\gamma)^2.$$

On a

$$\mathbf{b} = A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

en particulier $\|\mathbf{b}\|_\infty = 1$. En perturbant le second membre du système $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ (on ne perturbe pas la matrice), on obtient un système perturbé de la forme

$$A(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) = \mathbf{b} + \delta\mathbf{b},$$

donc

$$\delta\mathbf{x} = A^{-1}\delta\mathbf{b}.$$

On en tire que

$$\|\delta\mathbf{x}\|_\infty \leq \left\|A^{-1}\right\|_\infty \|\delta\mathbf{b}\|_\infty.$$

En divisant par $\|\mathbf{x}\|_\infty$, on trouve

$$\frac{\|\delta\mathbf{x}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty} \leq \frac{\|A^{-1}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty} \|\delta\mathbf{b}\|_\infty.$$

En plus, puisque $\|\mathbf{x}\|_\infty = 1$, on peut écrire

$$\frac{\|\delta\mathbf{x}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty} \leq \underbrace{\frac{\|A^{-1}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty}}_{\mathrm{C}} \frac{\|\delta\mathbf{b}\|_\infty}{\|\mathbf{b}\|_\infty}$$

avec $C = \dfrac{\|A^{-1}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty}$ la constante cherchée. On a donc que

$$C = \frac{1+\gamma}{\max\{1, |1-\gamma|\}}.$$

On voit bien que $C \to 1$ quand $\gamma \to \infty$. Ainsi, pour le cas particulier de $\mathbf{b} = (1, 1)^\top$, le problème est bien conditionné. Remarquons que, dans le cas général ($\mathbf{b}$ arbitraire), le problème est mal conditionné pour γ grand. En effet, $K_\infty(A) \to \infty$ quand $\gamma \to \infty$. Cet exercice met en évidence que le fait d'avoir une matrice avec un grand conditionnement n'empêche pas nécessairement le système global d'être bien conditionné pour des choix particuliers du second membre $\mathbf{b}$.

Exercice 5

Supposons que $\|\delta A\| \leq \gamma \|A\|$, $\|\delta \mathbf{b}\| \leq \gamma \|\mathbf{b}\|$ avec $\gamma \in \mathbb{R}^+$ et $\delta A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\delta \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. On veut montrer que, si $\gamma K(A) < 1$, on a les inégalités suivantes :

$$\frac{\|\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \frac{1 + \gamma K(A)}{1 - \gamma K(A)}, \tag{2}$$

$$\frac{\|\delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \frac{2\gamma}{1 - \gamma K(A)} K(A). \tag{3}$$

1. Si C est une matrice carrée telle que $\rho(C) < 1$, on sait (voir le Théorème 1.5 du livre) que $I - C$ est inversible. Montrer que dans ce cas on a

$$\frac{1}{1 + \|C\|} \leq \left\|(I - C)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1 - \|C\|}. \tag{4}$$

   où $\|\cdot\|$ est est une norme matricielle subordonnée à une norme vectorielle telle que $\|C\| \leq 1$.
2. Montrer l'inégalité (2) en utilisant le résultat du point 1 et le fait que $(A + \delta A)(\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}) = \mathbf{b} + \delta \mathbf{b}$.
3. Montrer l'inégalité (3). Suggestion : utiliser l'inégalité triangulaire $\|\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\delta \mathbf{x}\|$.

Solution 5

1. Puisque[2] $\|I\| = 1$, on a (Exercice 2, Série 2)

$$1 = \|I\| \leq \|I - C\| \left\|(I - C)^{-1}\right\| \leq (1 + \|C\|) \left\|(I - C)^{-1}\right\|,$$

   ce qui donne la première égalité de (4). Pour la seconde, en remarquant que $I = I - C + C$ et en multipliant à droite les deux membres par $(I - C)^{-1}$, on $(I - C)^{-1} = I + C(I - C)^{-1}$. En prenant les normes, on obtient

$$\left\|(I - C)^{-1}\right\| \leq 1 + \|C\| \left\|(I - C)^{-1}\right\|,$$

   d'où on déduit la seconde inégalité, puisque $\|C\| < 1$.
2. Soit

$$(A + \delta A)(\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}) = \mathbf{b} + \delta \mathbf{b}.$$

   Alors, on a

$$\left(I + A^{-1}\delta A\right)(\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}) = \mathbf{x} + A^{-1}\delta \mathbf{b}.$$

2. On suppose (toujours) que $\|\cdot\|$ est une norme matricielle subordonnée à une norme vectorielle.

De plus, puisque $\gamma K(A) < 1$ et $\|\delta A\| \leq \gamma \|A\|$ on a

$$\left\|A^{-1}\delta A\right\| \leq \left\|A^{-1}\right\| \|\delta A\| \leq \gamma \left\|A^{-1}\right\| \|A\| = \gamma K(A) < 1.$$

Alors, $\rho\left(A^{-1}\delta A\right) < 1$ et $I + A^{-1}\delta A$ est inversible. En prenant l'inverse de cette matrice et en passant aux normes, on obtient

$$\|\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}\| \leq \left\|\left(I + A^{-1}\delta A\right)^{-1}\right\| \left(\|\mathbf{x}\| + \gamma \left\|A^{-1}\right\| \|\mathbf{b}\|\right).$$

Alors, l'inégalité du point 1 donne

$$\|\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}\| \leq \frac{1}{1 - \|A^{-1}\delta A\|} \left(\|\mathbf{x}\| + \gamma \left\|A^{-1}\right\| \|\mathbf{b}\|\right),$$

ce qui implique

$$\frac{\|\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \frac{1 + \gamma K(A)}{1 - \gamma K(A)},$$

puisque $\left\|A^{-1}\delta A\right\| \leq \gamma K(A)$ et $\|\mathbf{b}\| \leq \|A\| \|\mathbf{x}\|$.

3. Montrons à présent que l'inéquation (3) est correcte. En retranchant $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ de (2), on a

$$A\delta\mathbf{x} = -\delta A(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) + \delta\mathbf{b}.$$

En prenant l'inverse de A et en passant aux normes, on obtient l'inégalité suivante

$$\begin{aligned} \|\delta\mathbf{x}\| &\leq \left\|A^{-1}\delta A\right\| \|\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}\| + \left\|A^{-1}\right\| \|\delta\mathbf{b}\| \\ &\leq \gamma K(A) \|\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}\| + \gamma \left\|A^{-1}\right\| \|\mathbf{b}\| \end{aligned}$$

En divisant les deux membres par $\|\mathbf{x}\|$ et en utilisant l'inégalité triangulaire $\|\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\delta\mathbf{x}\|$, on obtient finalement (3).