Rapport DM

Gautier Poursin

20 mars 2020

Exercice 1

1.
On cherche à déterminer la loi de $Y = \frac{2}{\theta}\sqrt{X}$, avec $f(x) = \frac{1}{2\theta\sqrt{x}} * exp(-\frac{\sqrt{x}}{\theta})$.

Utilisons la fonction de répartition de X:

$$P(Y \leq t) = P(\sqrt{Y} \leq \frac{\theta}{2}t) = P(X \leq \frac{\theta^2}{4}t^2) = \int_{\infty}^{\frac{\theta^2}{4}t^2} \frac{1}{2\theta\sqrt{x}} exp(-\frac{\sqrt{x}}{\theta})\, \mathrm{d}x.$$

On remarque que cette intégrale est primitive evidente ie

$$P(Y \leq t) = \frac{1}{2\theta}[-2\theta * exp(-\frac{\sqrt{x}}{\theta})]_0^{\frac{\theta^2}{4}t^2}$$

Donc, $P(Y \leq t) = 1 - exp(\frac{-t}{2})$
On peut alors en déduire la fonction de densité en dérivant la solution obtenue:
$f_Y(x) = \frac{1}{2}exp(\frac{-t}{2})\mathbb{1}_{t>0}$.
Donc, $\boxed{Y \sim \epsilon(\frac{1}{2})}$

2.
Déterminons une statistique exhaustive minimale pour (X1...Xn).

$$\prod_{i=1}^n f(x_i) = (\frac{1}{2\pi})^n \frac{1}{\prod_{i=1}^n x_i^{\frac{1}{2}}} exp(-\frac{\sum_{i=1}^n x_i^{\frac{1}{2}}}{\theta})\mathbb{1}_{x>0}(minx_i)$$

On pose donc $\boxed{T(x) = \sum_{i=1}^n x_i^{\frac{1}{2}}}$ qui est la statistique exhaustive minimale. On posera aussi $\boxed{h(x) = \frac{1}{\prod_{i=1}^n x_i^{\frac{1}{2}}}}$ et $\boxed{g(x) = (\frac{1}{2\pi})^n exp(-\frac{T(x)}{\theta})\mathbb{1}_{x>0}(minx_i)}$

3.
On cherche l'estimateur de maximum de vraisemblance de θ. Pour cela, on va calculer la log-vraisemblance avant de dérivé celle ci pour chercher Θ qui l'annule.

$Log(Ln(x,\theta)) = log(\prod_{i=1}^n f(x_i) = -nlog(2\theta) - log(\prod_{i=1}^n x_i^{\frac{1}{2}}) - \frac{\sum_{i=1}^n x_i^{\frac{1}{2}}}{\theta}$

On va dériver l'expression obtenu puis regarder ou elle s'annule:

$\frac{\partial Log(Ln(x,\theta))}{\partial\theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\frac{1}{2}}}{\theta^2} = 0 \iff \boxed{\Theta = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\frac{1}{2}}}{n}}$

Regardons si cet estimateur est efficace.

$Var(\Theta) = Var(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^{\frac{1}{2}}}{n}) = \frac{1}{n^2}Var(\sum_{i=1}^{n} X_i^{\frac{1}{2}}) = \frac{Var(X_1^{\frac{1}{2}})}{n}$ car les X_i sont i.i.d.
Avec la question 1, on sait que $Var(Y) = 4$. Donc,
$Var(\sqrt{X}) = Var(\frac{\theta}{2}Y) = \frac{\theta^2}{4}Var(Y) = \theta^2$

Donc, $\boxed{Var(\Theta) = \frac{\theta^2}{n}}$

Calculons l'information de Fisher et vérifions que $Var(\Theta) = I_n(\Theta)^-1$
$Log(f(x,\theta)) = -log(2) - log(\theta) - \frac{1}{2}log(x) - \frac{\sqrt{x}}{\theta}$ donc en dérivant deux fois par rapport à θ , on obtient $\frac{\partial^2 Log(f(x,\theta))}{\partial^2\theta} = \frac{1}{\theta^2} - \frac{2\sqrt{(x)}}{\theta^3}$.
Donc, $\boxed{I_1(\theta) = -E_\theta(\frac{\partial^2 Log(f(x,\theta))}{\partial^2\theta}) = -\frac{1}{\theta^2} + E(\frac{2\sqrt{X}}{\theta^3}) = -\frac{1}{\theta^2} + \frac{1}{\theta^2}E(Y) = \frac{1}{\theta^2}}$

On peut alors déterminer $\boxed{I_n(\theta) = nI_1(\theta) = \frac{n}{\theta^2}}$

On retrouve bien $Var(\Theta) = I_n(\theta)^-1$
Enfin, vérifions que c'est un estimateur sans biais.
$\boxed{E(\Theta) - \theta = \frac{E(\sum_{i=1}^{n} X_i^{\frac{1}{2}})}{n} - \theta = E(X_1^{\frac{1}{2}}) - \theta = \frac{\theta}{2}E(Y) - \theta = 0}$ car les X_i sont i.i.d et $Y \sim \epsilon(\frac{1}{2})$

On peut alors confirmer que Θ est un estimateur efficace.

4.
Montrons que $\sqrt{n}\frac{\partial\frac{L_n}{n}}{\partial\theta} \to 0$ en probabilité ie $P(|\sqrt{n}\frac{\partial\frac{L_n}{n}}{\partial\theta} - 0| > \epsilon) \to 0$.
On pose $Y_n = \sqrt{n}\frac{\partial\frac{L_n}{n}}{\partial\theta}$, alors $E(Y_n) = \frac{\sqrt{n}}{n}E(\frac{-n}{\theta} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\sqrt{x_i}}{\theta^2})$. Or les Xi sont iid donc $E(Y_n) = \sqrt{n}(-\frac{1}{\theta} + \frac{E(\sqrt{X_1})}{\theta^2}) = \sqrt{n}(\frac{-1}{\theta} + \frac{1}{2\theta}E(Y))$ donc $\boxed{E(Y_n) = 0}$ car $Y \sim \epsilon(\frac{1}{2})$.

De meme, $V(Y_n) = \frac{n}{n^2}V(\frac{-n}{\theta} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\sqrt{x_i}}{\theta^2}) = \frac{1}{n\theta^4}V(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}) = \frac{1}{4\theta^2}V(Y)$ donc $\boxed{V(Y_n) = \frac{1}{\theta^2}}$.

Finalement, $\boxed{Y_n \sim N(0, \frac{1}{\theta^2})}$.

Donc, avec la borne de Chernoff, $\boxed{P(|Y_n - 0| > \epsilon) \leq exp(\frac{-n\epsilon^2\theta^2}{2}) \to 0}$ lorsque $n \to \infty$.

On peut alors appliquer le **théorème de Normalité asymptotique du maximum de vraisemblance** ie $\sqrt{n}(\hat{\theta}_{MV} - \theta) \to N(0, I_1^{-1}(\theta))$, soit $(\hat{\theta}_{MV} - \theta) = \frac{1}{\sqrt{n}} I_1^{\frac{-1}{2}}(\theta) Z_n$ avec $Z_n \sim N(0,1)$. En réécrivant la formule précédente d'une différente manière, on obtient que $Z_n = \sqrt{n}(\hat{\theta}_{MV} - \theta) I_1^{\frac{1}{2}}(\theta)$.

Par définition, lorsque $Z_n \sim N(0,1)$, alors $P(u_{\frac{\alpha}{2}} < Z_n < u_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha$ donc $P(u_{\frac{\alpha}{2}} < \sqrt{n}(\hat{\theta}_{MV} - \theta) I_1^{\frac{1}{2}}(\theta) < u_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha$ donc après quelques calculs, on obtient:

$\boxed{P(\hat{\theta}_{MV} - \frac{1}{\sqrt{n}} u_{\frac{\alpha}{2}} I_1^{\frac{-1}{2}}(\theta) < \theta < \hat{\theta}_{MV} - \frac{1}{\sqrt{n}} u_{1-\frac{\alpha}{2}} I_1^{\frac{-1}{2}}(\theta)) = 1 - \alpha}$.

Par continuité de $I_1^{\frac{-1}{2}}$, $\boxed{I_1^{\frac{-1}{2}}(\theta) \to I_1^{\frac{-1}{2}}(\hat{\theta}_{MV})}$.

Finalement, on obtient l'intervalle asymptotique au niveau $1-\alpha$ suivant: $\boxed{[\hat{\theta}_{MV} \pm \frac{I_1^{\frac{-1}{2}}(\hat{\theta}_{MV})}{\sqrt{n}} u_{1-\frac{\alpha}{2}}]}$
avec $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ la valeur telle que $\phi(u_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2}$

Exercice 2

Partie 1

1.
On a $f(x) = aexp(-ax)$ si $x \geq$, 0 sinon. Donc,
$Ln(f(x) = \prod_{i=1}^{n} aexp(-ax_i) 1_{x \geq 0} = a^n exp(-\sum_{i=1}^{n}(x_i)) 1_{x \geq 0}(minx_i)$

Donc, $log(Ln(f(x)) = nlog(a) - a\sum_{i=1}^{n} x_i + log(1_{x\geq 0}(minx_i))$.

On va ensuite annuler la dérivée:
$\partial \frac{Ln(f(x)}{\partial a} = \frac{n}{a} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \iff \boxed{a = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i}}$.

2.
On va calculer l'information de Fisher apportée sur a. Pour n=1 :
$Log(L_1(f(x))) = log(a) - ax_1$ donc $\frac{\partial^2 Log(L_1(f(x)))}{\partial^2 a} = -\frac{1}{a^2}$
Donc, $\boxed{I_1(a) = -E_a(\frac{\partial^2 Log(L_1(f(x)))}{\partial^2 a}) = \frac{1}{a^2}}$

Finalement, $\boxed{I_n(a) = nI_1(a) = \frac{n}{a^2}}$

Partie 2

1.
On pose $T_i = X_i + \tau$, alors $f_{\tau_i}(x) = aexp(-a(t-\tau)) 1_{t\geq\tau}(x)$.
Donc, $L_n(f(x)) = a^n exp(-a\sum_{i=1}^{n}(t_i - \tau)) 1_{t\geq\tau}(mint_i)$

Ici, la vraisemblance est maximum lorsque $\boxed{W = mint_i}$

2.
On va utiliser la fonction de répartition des Xi, qui sont i.i.d.
$P(minT_i \leq t) = 1 - P(X_1 \geq t - \tau)^n$.
Or, $P(X_1 \geq t-\tau) = 1 - F_{X_1}(t-\tau) = 1 - \int_0^{t-\tau} aexp(-ax)\,\mathrm{dx} = exp(-a(t-\tau))$.
Donc, $P(minT_i \leq t) = 1 - exp(-na(t-\tau))$

Finalement, en dérivant l'expression précédente:
$\boxed{f_{minT_i}(t) = naexp(-na(t-\tau))1_{t\geq\tau}}$
Donc, les Ti suivent une loi exponentielle translatée X+τ avec $X \sim \epsilon(na)$.
Donc, $\boxed{E(W) = \tau + \frac{1}{na}}$. Il faut poser $\boxed{\tau_1 = W - \frac{1}{na}}$ pour avoir un estimateur sans biais.

3.
On sait que $V(aX+b) = a^2V(X)$ donc:
$\boxed{V(\tau_1) = V(W - \frac{1}{na}) = V(W) = V(X+\tau) = V(X) = (\frac{1}{na})^2}$

4.
On pose $\bar{T} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n T_i$.

$E(\bar{T}) = \frac{1}{n}E(\sum_{i=1}^n T_i) = \frac{1}{n}E(\sum_{i=1}^n (X_i + \tau)) = \frac{1}{n}E(\sum_{i=1}^n X_i + n\tau)$

Les Xi sont iid donc $E(\sum_{i=1}^n X_i) = nE(X_1) = \frac{n}{a}$.

Donc, $\boxed{E(\bar{T}) = \frac{1}{a} + \tau}$.

Pour avoir un estimateur sans biais de τ, il suffit de poser : $\boxed{\hat{\tau_2} = \bar{T} - \frac{1}{a}}$.

5.
$V(\hat{\tau_2}) = V(\bar{T} - \frac{1}{a}) = V(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n T_i) = \frac{1}{n^2}V(\sum_{i=1}^n T_i)$

Or, les Ti sont iid puisque c'est une combinaison linéaires des Xi eux mêmes iid.
Donc, $\boxed{V(\hat{\tau_2}) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n V(X_i+\tau) = \frac{1}{n}V(X_1) = \frac{1}{na^2}}$.

6.
L'estimateur préférentiel est celui qui possède la plus petite variance. Ainsi, il faut privilégier τ_1

Probleme

Partie 1

1.
On a $\boxed{P(\sqrt{n}(q_\alpha(n) - q_\alpha) \leq x) = P(q_\alpha(n) \leq q_\alpha + \frac{x}{\sqrt{n}}) = P(F_n^{-1}(\alpha) \leq q_\alpha + \frac{x}{\sqrt{n}})}$
par définition de $P(F_n^{-1}(\alpha)$.
Puis, en composant par F_n dans l'inégalité, on obtient $P(\alpha \leq F_n(q_\alpha + \frac{x}{\sqrt{n}})$.
Or, par inégalité sur les parties entières et sachant que les sauts de la fonction de répartition sont d'amplitudes au moins $\frac{1}{n}$, alors $\boxed{n\alpha > \rceil n\alpha \rceil - 1}$.

Donc, on a bien $\boxed{P(F_n^{-1}(\alpha) \leq q_\alpha + \frac{x}{\sqrt{n}}) = P(F_n(q_\alpha + \frac{x}{\sqrt{n}}) > \frac{\rceil n\alpha \rceil - 1}{n})}$

2. a)
Avec la question précédente, on a:
$P(\sqrt{n}(q_\alpha(n) - q_\alpha) \leq x) = P(F_n(q_\alpha + \frac{x}{\sqrt{n}}) > \frac{\rceil n\alpha \rceil - 1}{n}) = P(\sqrt{n}(F_n(q_\alpha + \frac{x}{\sqrt{n}}) - F(q_\alpha + \frac{x}{\sqrt{n}})) > \sqrt{n}(\frac{\rceil n\alpha \rceil - 1}{n} - F(q_\alpha + \frac{x}{\sqrt{n}})))$

donc $P(\sqrt{n}(q_\alpha(n) - q_\alpha) \leq x) = 1 - Gn(yn)$ avec $\boxed{y_n = \sqrt{n}(\frac{\rceil n\alpha \rceil - 1}{n} - F(q_\alpha + \frac{x}{\sqrt{n}}))}$.

2. b)
Lorsque $n \to \infty$, alors $\boxed{\frac{\rceil n\alpha \rceil - 1}{n} \to \alpha}$.
Effectuons le DL de F à l'ordre 1:
$F(q_\alpha + \frac{x}{\sqrt{n}}) = F(q_\alpha) + (q_\alpha + \frac{x}{\sqrt{n}} - q_\alpha)F^{'}(q_\alpha) + O(\frac{x}{\sqrt{n}}^2)$
Or, $F(q_\alpha) = \alpha$ et $F^{'}(q_\alpha) = f(q_\alpha)$.
Donc, $y_n = \sqrt{n}(\frac{\rceil n\alpha \rceil - 1}{n} - \alpha - \frac{x}{\sqrt{n}} f(q_\alpha))$
Donc, par multiplication puis soutraction de limites, $\boxed{y_n \to -xf(q_\alpha)}$

3. a)
On pose $Z_n = \sqrt{n}(F_n(q_\alpha) - F(q_\alpha)) = \sqrt{n}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n 1_{]-\infty,q_\alpha]}(X_i) - \alpha)$. avec les Xi iid.
Donc, $E(Z_n) = \sqrt{n}(E(1_{]-\infty,q_\alpha]}(X_1)) - \alpha)$.
Or, $\boxed{E(1_{]-\infty,q_\alpha]}(X_1)) = F(q_\alpha) = \alpha}$.

Donc, on conclut que $\boxed{\mathbb{E}(Z_n) = 0}$.

Calculons la variance de Z_n: $V(Z_n) = n(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n V(1_{]-\infty,q_\alpha]}(X_i) - \alpha))$ avec les Xi iid.
Donc, $\boxed{V(Z_n) = \frac{1}{n}V(\sum_{i=1}^n V(1_{]-\infty,q_\alpha]}(X_i))) = V(1_{]-\infty,q_\alpha]}(X_1))}$.
Or,$V(X) = E(X^2) - E^2(X)$ donc $\boxed{V(Z_n) = \alpha - (\alpha)^2 = \alpha * (1-\alpha)}$.

Donc, en posant $T = \frac{Z_n}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}}$, on a bien que $T \sim N(0,1)$ ie $\boxed{Z->N(0,\alpha(1-\alpha))}$

Calculons $|Y_n - Z_n|$:
Avec l'inégalité triangulaire, on obtient:
$|Y_n - Z_n| \leq \sqrt{n}(|F_n(q_\alpha + \frac{x}{\sqrt{n}} - F_n(q_\alpha))| + ||F(q_\alpha + \frac{x}{\sqrt{n}} - F(q_\alpha)|$
$\leq x(\frac{|F_n(q_\alpha + \frac{x}{\sqrt{n}} - F_n(q_\alpha))|}{\frac{x}{\sqrt{n}}} + \frac{|F(q_\alpha + \frac{x}{\sqrt{n}} - F(q_\alpha)|}{\frac{x}{\sqrt{n}}})$. On reconnait ici la formule d'une dérivée au point q_α donc
$\boxed{|Y_n - Z_n| \leq x(f_n(q_\alpha) - f(q_\alpha))}$.
Dans l'hypothèse où lorsque $n \to \infty$, alors $f_n(q_\alpha)$ tendrait vers $f(q_\alpha)$ ie $f_n(q\alpha) - f(q\alpha) \to 0$, alors on obtiendrait le résultat souhaité $\boxed{|Y_n - Z_n| \to 0}$

3.b)
Le lemme de Slutsky nous dit que si Xn converge en loi vers X, Yn converge en probabilite vers une constante c, alors (Xn,Yn) converge en loi vers (X,c).
Ici, $Y_n \sim N(0,\alpha(1-\alpha))$ en loi et $Y_n - Z_n \to 0$ donc par le lemme de Slutsky,
$\boxed{Y_n = Z_n + (Y_n - Z_n) \to N(0,\alpha(1-\alpha))}$

4.
Avec l'inégalité de la question 1, et la question 2.a, on a:
$P(Y_n > \sqrt{n}(\frac{n\alpha-1}{n} - F(q_\alpha + \frac{x}{\sqrt{n}}))) = 1 - G_n$ ie
$1 - P(Y_n \leq \sqrt{n}(\frac{n\alpha-1}{n} - F(q_\alpha + \frac{x}{\sqrt{n}}))) = 1 - G_n$
donc $P(Y_n \leq \sqrt{n}(\frac{n\alpha-1}{n} - F(q_\alpha + \frac{x}{\sqrt{n}}))) = G_n$.
Alors, avec la question 2a, $\boxed{P(Y_n \leq y_n) \leq G_n(y_n)}$ donc $\boxed{P(\frac{Y_n}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}} \leq \frac{y_n}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}}) \leq G_n(\frac{y_n}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}})}$.
Donc, en reprenant l'inégalité de la question 1,
$1 - P(\sqrt{n}(q_\alpha(n) - q_\alpha) \leq x) \leq G_n(\frac{y_n}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}})$ ie
$P(\sqrt{n}(q_\alpha(n) - q_\alpha) \leq x) \leq 1 - G_n(\frac{y_n}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}})$.
Lorsque $n \to \infty$, alors $P(\sqrt{n}(q_\alpha(n) - q_\alpha) \leq x) \to 1 - G_n(\frac{-xf(q_\alpha)}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}})$.
Or, G_n est la fonction de répartion d'une loi normale centrée réduite, puisque on a divisé Y_n par la racine de sa variance, donc $\boxed{1 - G_n(-x) = G_n(x)}$ donc on obtient:
$\boxed{P(\sqrt{n}(q_\alpha(n) - q_\alpha) \leq x) \to G_n(\frac{xf(q_\alpha)}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}})}$

Partie 2

1.
$E(X_1) = \int_0^\theta \frac{x}{2\theta}\,\mathrm{d}x + \int_{2\theta}^{3\theta} \frac{x}{2\theta}\,\mathrm{d}x = \frac{\theta}{4} + \frac{5\theta}{4}$, donc $\boxed{E(X_1) = \frac{3\theta}{2}}$
$V(X_1) = E(X_1^2) - E^2(X_1) = \int_0^\theta \frac{x^2}{2\theta}\,\mathrm{d}x + \int_{2\theta}^{3\theta} \frac{x^2}{2\theta}\,\mathrm{d}x - \frac{9}{4}\theta^2 = \frac{\theta^2}{6} + \frac{19\theta^2}{6} - \frac{9\theta^2}{4}$

donc $\boxed{\mathrm{V(X_1)} = \frac{13}{12}\theta^2}$.

Avec la méthode des moments, $\hat{\theta}_{M,n} = \frac{2}{3}E(X_1)$. Or, pour avoir un estimateur de l'espérance, il suffit de prendre la moyenne empirique $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

Donc, $\boxed{\hat{\theta}_{M,n} = \frac{2}{3n}\sum_{i=1}^{n} X_i}$

Posons $T_n = \hat{\theta}_{M,n} - \theta$, $E(T_n) = \frac{2}{3n}E(\sum_{i=1}^{n} X_i) - \theta = \frac{2}{3}E(X_1) - \theta = 0$ donc $\boxed{E(T_n) = 0}$ et $V(T_n) = \frac{4}{9n^2}V(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{4}{9n}V(X_1)$ donc $\boxed{V(T_n) = \frac{13}{27n}\theta^2}$.

Avec le théoreme centrale limite, on déduit que $\boxed{\hat{\theta}_{M,n} - \theta \sim N(0, \frac{13}{27n^2}\theta^2)}$

2.

Calculons $F_\theta(t)$ pour $t \in [-\infty, \infty]$.

Si $t \in [-\infty, 0[$, alors $\boxed{F_\theta(t) = 0}$

si $t \in [0, \theta]$, alors $\boxed{F_\theta(t) = \frac{t}{2\theta}}$

Si $t \in [\theta, 2\theta]$, alors $\boxed{F_\theta(t) = \frac{1}{2}}$

Si $t \in [2\theta, 3\theta]$, alors $\boxed{F_\theta(t) = \frac{t}{2\theta} - \frac{1}{2}}$

Si $t \in [3\theta, \infty[$, alors $\boxed{F_\theta(t) = 1}$

Vous retrouverez les représentations en fin de sujet.

3.

On cherche t tel que $P(X \leq t) = \frac{1}{4}$ donc avec la question précédente, $t \in [0, \theta]$ et par calcul, $\boxed{t = \frac{\theta}{2}}$. On peut alors poser $\boxed{\hat{\theta}_{q,n} = 2\hat{q_n}}$.

Trouver la loi de $\hat{\theta}_{q,n} - \theta$ revient à trouver la loi de $2(\hat{q_n} - q_{\frac{1}{4}})$. Avec la partie 1, on sait que $\hat{q_n} - q_\alpha \to N(0, \frac{\alpha(1-\alpha)}{f(\alpha)^2 n})$.

Ici, $\boxed{f^2(q_{\frac{1}{4}}) = \frac{1}{4\theta^2}}$, et ceci est vrai pour toute valeur $t \in]0, \theta[\bigcup]2\theta, 3\theta[$ (visible sur le graphique de la question 2) donc $\boxed{\hat{\theta}_{q,n} - \theta \to N(0, \frac{3}{n\theta^2})}$.

4.

De la même manière que précédement, on a que $\boxed{q_{\frac{3}{4}} = \frac{5\theta}{2}}$ et donc, en appliquant le meme raisonnement que la question précédente, on obtient:

$\boxed{\hat{\theta}_{q,n} - \theta \to N(0, \frac{75}{16n\theta^2})}$.

5.

Asymptotiquement, il faut prendre l'estimateur qui possède la plus petit variance. Donc il faut choisir $\hat{\theta}_{M,n}$, il temps le plus rapidement vers 0 lorsque $n \to \infty$.

6.

On a $x \in]0,\theta[$, donc $3\theta - x \in]2\theta, 3\theta[$ donc
$P(X_{(n)} \leq 3\theta - x) = P^n(X_1 \leq 3\theta - x) = (\frac{3\theta-x}{2\theta} - \frac{1}{2})^n = (\frac{2\theta-x}{2\theta})$ avec la fonction de répartition calculée à la question 2.
Or, $2\theta - x < 2\theta$ donc $\boxed{P(X_{(n)} \leq 3\theta - x) \to 0}$

Donc, $X_{(n)} \to 3\theta$ en proba donc on peut poser $\boxed{\hat{\theta_{S,n}} = \frac{X_{(n)}}{3}}$

7.
$P(\frac{X_{(n)}}{3} \leq \theta - \frac{t}{n}) = P(X_{(n)} \leq 3(\theta - \frac{t}{n})) = (\frac{3}{2\theta}(\theta - \frac{t}{n}) - \frac{1}{2})^n = (1 - \frac{3t}{2n\theta})^n$.
On reconnait ici la forme exponentielle suivante:
$P(\frac{X_{(n)}}{3} \leq \theta - \frac{t}{n}) = exp(nlog(1 - \frac{3t}{2n\theta}))$.
Avec un développement limité sur le logarithme, on obtient $\boxed{P(\frac{X_{(n)}}{3} \leq \theta - \frac{t}{n}) \to exp(-\frac{3t}{2\theta})}$
Déterminons la loi de $n(\theta - \hat{\theta_{S,n}})$.
$P(n(\theta - \hat{\theta_{S,n}}) \leq t) = 1 - P(\hat{\theta_{S,n}} \leq \theta - \frac{t}{n}) \to 1 - exp(-\frac{3t}{2\theta})$ donc,, en dérivant de chaque coté et par continuité:
$\boxed{n(\theta - \hat{\theta_{S,n}}) \to \frac{3}{2\theta}exp(-\frac{3t}{2\theta})}$ ie $\boxed{n(\theta - \hat{\theta_{S,n}}) \sim \epsilon(\frac{3}{2\theta})}$

9.
Ici, $\boxed{\text{la médiane vaut } \theta}$, c'est la plus petite valeur telle que $F_\theta(q_{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}$. Mais il y a en réalité plusieurs valeurs telles que $F_\theta(t) = \frac{1}{2}$. On va donc parler de médiane empirique. Cette médiane empirique est moins sensible aux observations abérantes que ne l'est la moyenne empirique, ce serait donc un meilleur estimateur de θ.

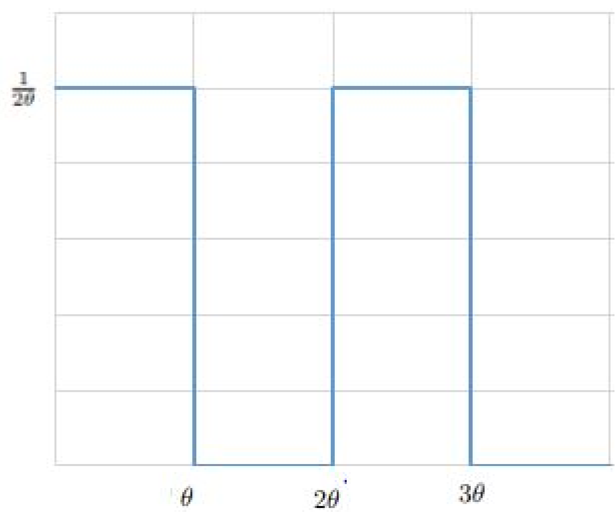

Figure 1: Représentation de $f_\theta(t)$

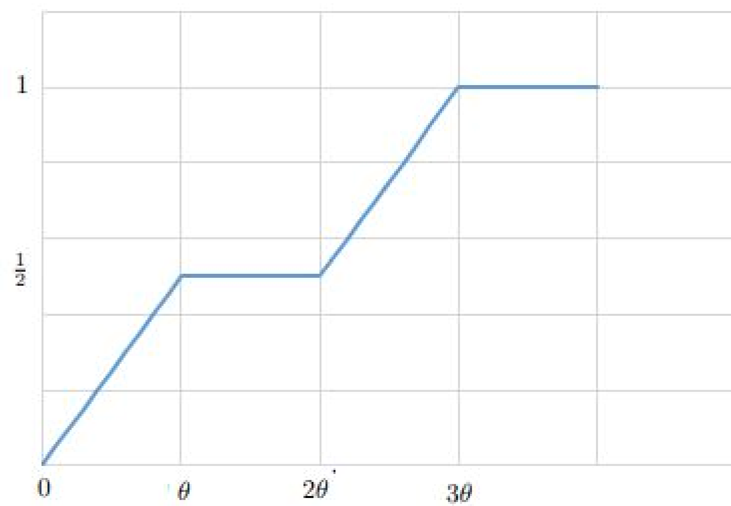

Figure 2: Représentation de $F_\theta(t)$