Circuits logiques combinatoires et séquentiels

Guy Bégin

16 novembre 2022

Systèmes de numération

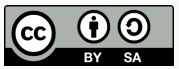
Objectifs

- Comprendre le fonctionnement du système de numération binaire
- Pouvoir effectuer des conversions entre nombres en représentation binaire, octale, hexadécimale
- Comprendre le rôle des compléments, et la représentation de nombres signés
- Comprendre la notation fractionnaire
- Se familiariser avec quelques codes courants
- Pouvoir effectuer des opérations arithmétiques sur des nombres binaires

CC BY SA

Systèmes numériques

- Les systèmes numériques sont omniprésents dans notre monde technologique.
- La grande force des systèmes numériques est leur capacité à représenter l'information sous toutes ses formes et à permettre la manipulation de cette information.
- Tout ensemble dont les éléments peuvent être dénombrés, comme un alphabet ou un ensemble fini de couleurs, se prête naturellement à une représentation numérique.
- Mais il est également possible de représenter des informations qui correspondent à des informations provenant d'ensembles continus, comme par exemple des informations sonores, en procédant à une numérisation par échantillonnage et codage.



Systèmes numériques . . . 2

- Une bonne façon de se familiariser avec la représentation numérique de l'information est d'étudier le système de numération binaire.
- Dans un chapitre suivant, nous étudierons les principes fondamentaux de la logique binaire.
- C'est sur ces deux bases que nous pourrons établir notre exploration des circuits logiques.

CC BY SA

Nombres binaires

- Les nombres binaires sont essentiellement construits de la même façon que les nombres décimaux avec lesquels nous sommes plus familiers.
- La différence fondamentale tient au fait qu'il n'est possible d'utiliser que deux symboles (chiffres), 0 et 1, plutôt que les dix chiffres de 0 à 9.
- Les chiffres sont nommés bits (contraction de b inary dig it).

CC BY SA

Nombres binaires ... 2

- Par exemple, le nombre décimal que nous écrivons 2843 correspond à $2 \times 1000 + 8 \times 100 + 4 \times 10 + 3 \times 1$.
- Il s'agit d'un système positionnel, dans lequel la valeur attribuée à un chiffre est définie par sa position et par la valeur de la base du système de numération.
- Ainsi, pour ce nombre décimal, la base vaut 10 et on a $2 \times 10^3 + 8 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 3 \times 10^0$.

CC BY SA

Nombres binaires . . . 3

- La position la plus à gauche est celle dont la valeur est la plus grande.
- C'est le chiffre le plus significatif ; la position de droite correspond au chiffre le moins significatif.
- On peut imaginer une virgule après le chiffre le moins significatif, pour délimiter la partie entière du nombre.
- D'autres chiffres, placés à droite de cette virgule correspondraient à la partie fractionnaire. On y reviendra.

CC BY SA

Nombres binaires ... 4

- Les mêmes règles positionnelles permettent d'attribuer une valeur à un nombre binaire, en tenant compte du fait que la base vaut cette fois-ci 2.
- Par exemple, la valeur attribuée au nombre binaire 10101 est

$$1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 16 + 4 + 1 = 21$$

comme on peut voir dans le tableau 1.

CC BY SA

Nombres binaires . . . 5

Table 1 – Valeur binaire du nombre 10101

Position	4	3	2	1	0
Valeur	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
Valeur déc.	16	8	4	2	1
Bit	1	0	1	0	1

- Nous avons ici le bit le plus significatif à gauche et le bit le moins significatif à droite.
- Chaque chiffre vaut 2 fois plus que le chiffre immédiatement placé à sa droite.

CC BY SA

Conversion binaire <-> décimal

- Convertir un nombre entier binaire en nombre décimal se fait naturellement, en s'appuyant sur les valeurs associées à la notation positionnelle.
- La conversion en sens inverse, de décimal à binaire, est un peu moins évidente.

CC BY SA

Conversion binaire <-> décimal ... 2

- La méthode consiste à faire une division entière du nombre (et des quotients successifs) par 2 et à noter les restes obtenus.
- Le premier reste correspond au bit le moins significatif, et le dernier au bit le plus significatif.

CC BY SA

Conversion binaire <-> décimal ... 3

- Par exemple, les opération pour convertir 37 en binaire sont résumées dans le tableau 2.

Table 2 – Étapes de conversion de 37 en binaire

	Quotient entier	Reste	Coefficient
37/2	18	1	$a_0 = 1$
18/2	9	0	$a_1 = 0$
9/2	4	1	$a_2 = 1$
4/2	2	0	$a_3 = 0$
2/2	1	0	$a_4 = 0$
1/2	0	1	$a_5 = 1$

On obtient ainsi 100101.

Notation

- Puisque les notations de nombres binaires, octaux, hexadécimaux ou décimaux font appel à des chiffres qui sont tous tirés du même ensemble, il y a un risque d'ambiguïté si on ne connaît pas la base utilisée.
- Par exemple 11 peut soit s'interpréter comme onze (si on suppose la base dix) ou comme trois (si on suppose la base deux).
- À moins que le contexte ne soit absolument clair, il vaut mieux être explicite pour éviter de telles ambiguïtés.

CC BY SA

Notation ... 2

- C'est pourquoi on dénote souvent explicitement la base, comme par exemple, (11)2 pour le nombre trois en binaire qui pourra être distingué de (11)10, le nombre onze en décimal.

CC BY SA

Représentations compactes de nombres binaires

- En comparant un nombre décimal et sa représentation binaire, comme par exemple ici 37 et 100101, on voit bien que la représentation binaire est nettement plus encombrante
- On utilise souvent des notations plus compactes mais qui conservent un lien direct avec la représentation binaire : la représentation octale et la représentation hexadécimale.

CC BY SA

Représentation octale

Notation octale

- La représentation octale correspond à utiliser la base 8, avec les chiffres $0, 1, \ldots, 7$
- On voit la correspondance entre les nombres en binaire et les chiffres de la représentation octale dans le tableau 3.

Table 3 – Représentation octale

Binaire	Octal
000	0
001	1
010	2
011	3
100	4
101	5
110	6
111	7

CC BY SA

Représentation octale ... 2

- Pour convertir un nombre binaire en nombre octal, il suffit de regrouper les bits par groupes de trois bits, en partant de la droite (bit le moins significatif), et de remplacer chaque groupe par le chiffre en base 8 correspondant.
- Par exemple pour (1010011110001)2, on aura le découpage du tableau 4.

Table 4 – Regroupement pour conversion en octal

Binaire	1	010	011	110	001
Octal	1	2	3	6	1

- On obtient le nombre octal (12361)8.

CC BY SA

Représentation hexadécimale

- La représentation hexadécimale correspond à utiliser la base 16, avec les chiffres $0, 1, \ldots, 9$, auxquels on ajoute les lettres A, B, C, D, E et F pour représenter les valeurs de dix à quinze respectivement.
- Pour simplifier, dans le contexte, on appellera ici ces cinq lettres des *chiffres* de la notation hexadécimale.
- On voit la correspondance entre les nombres en binaire et les chiffres de la représentation hexadécimale dans le tableau 5.

CC BY SA

Représentation hexadécimale ... 2

Table 5 – Représentation hexadécimale

Binaire	Hexadécimal
0000	0
0001	1
0010	2
0011	3
0100	4
0101	5
0110	6
0111	7

Binaire	Hexadécimal
1000	8
1001	9
1010	A
1011	B
1100	C
1101	D
1110	E
1111	F

CC BY SA

Représentation hexadécimale ... 3

- Pour convertir un nombre binaire en nombre hexadécimal, il suffit de regrouper les bits par groupes de quatre bits, en partant de la droite (bit le moins significatif), et de remplacer chaque groupe par le chiffre en base 16 correspondant
- Par exemple pour (1010011110001)2, on aura le découpage du tableau 6.

Table 6 – Regroupement pour conversion en hexadécimal

Binaire	1	0100	1111	0001
Hexa	1	4	F	1

- On obtient le nombre hexadécimal (14F1)16.

CC BY SA

Conversion en sens inverse

- La conversion de octal (respectivement, hexadécimal) à binaire se fait simplement en remplaçant chaque chiffre octal (resp., hexadécimal) par le groupe de trois (resp., quatre) bits correspondant, en partant du moins significatif.

CC BY SA

Nombres binaires fractionnaires

- Il est aussi possible de représenter des nombres fractionnaires en base deux.
- En gardant à l'esprit que la position d'un bit détermine sa valeur, il suffit d'étendre le principe déjà établi aux bits qui seront placés après la virgule qui sépare la partie entière de la partie fractionnaire.
- Les indices des positions à droite de la virgule seront négatifs.
- Le tableau 7 donne par exemple le détail de l'évaluation de la valeur du nombre fractionnaire (101,11)2.
- On obtient comme valeur
  $1 \times 4 + 0 \times 2 + 1 \times 1 + 1 \times 1/2 + 1 \times 1/4 = 5,75$.

CC BY SA

Nombres binaires fractionnaires ... 2

Table 7 – Évaluation de la valeur du nombre fractionnaire (101,11)2

Position	2	1	0	-1	-2
Valeur	2^2	2^1	2^0	2^{-1}	2^{-2}
Valeur déc.	4	2	1	1/2	1/4
Bit	1	0	1	1	1

CC BY SA

Opérations arithmétiques binaires

- Il est possible de transposer les opérations arithmétiques habituelles pour effectuer différentes opération arithmétiques : addition, soustraction, multiplication, division, avec des nombres binaires.
- Nous verrrons plus loin comment ces opérations s'exécutent lorsque nous aurons établi les formes d'encodages binaires qui seront utilisés pour les nombres, notamment la représentation des nombres signés.

CC BY SA

Multiplication par deux

- Pour multiplier un nombre binaire non signé par deux, il suffit de décaler tous ses bits d'une position vers la gauche.
- Si le nombre est entier, on devra insérer un zéro à la position zéro.
- Si le nombre est fractionnaire, le bit le plus significatif de la partie fractionnaire se retrouvera à la position zéro.

$$(10011)2 \times 2 = (100110)2$$

$$(100,11)2 \times 2 = (1001,1)2$$

CC BY SA

Division par deux : fractionnaire

- Pour diviser un nombre binaire par deux, il suffit de décaler tous ses bits d'une position vers la droite.
- Une division fractionnaire produira possiblement un nombre fractionnaire, comme dans l'exemple suivant.

$$(10011)2 \div 2 = (1001,1)2$$

CC BY SA

Division par deux : entière

- Pour une division entière (sans fraction), on éliminera le bit qui aurait été placé après la virgule.

$$(10011)2 \div 2 = (1001)2$$

- Il est évident de généraliser ces opérations pour les multiplications ou divisions par des puissances de 2 : par 4, 8, 16, etc.

CC BY SA

Compléments de nombres

- Les compléments de nombres jouent un rôle dans la simplification de certaines opérations mathématiques et logiques.
- Dans un système de numération de base b, on considère deux types de compléments : le complément à b et le complément à $b - 1$.
- Pour la base dix, nous aurons donc le complément à dix et le complément à neuf.
- Pour les nombres binaires (base 2), on aura le complément à deux et le complément à un.
- Pour évaluer les compléments d'un nombre, on doit tenir compte du nombre de chiffres que comporte ce nombre.

CC BY SA

Complément à neuf

- Soit un nombre entier N en base b constitué de n chiffres.
- Le complément à $b-1$ de N est $(b^n-1)-N$.
- Par exemple, en base $b=10$, le complément à neuf pour le nombre décimal $N=4576$ formé de $n=4$ chiffres sera $(b^n-1)-N=(10^4-1)-4576=5424$.

CC BY SA

Complément à un

- En base $b = 2$, le complément à un pour le nombre binaire $N = (10011)2 = (19)10$ formé de $n = 5$ bits sera $(b^n - 1) - N = (2^5 - 1) - 19 = 12$ ce qui donne en binaire : $(12)10 = (1100)2$.
- On peut vérifier qu'il est très facile, en binaire, de déterminer le complément à un, sans effectuer de calculs, en inversant simplement chacun des bits de la représentation binaire du nombre à complémenter.
- Ainsi, avec notre exemple, on trouve pour

  10011

  le complément

  01100

- Remarquons ici un zéro non significatif comme premier bit à gauche.

CC BY SA

Complément à dix

- Le complément à b de l'entier N s'évalue comme $(b^n) - N$.
- Cela correspond à ajouter 1 au complément à $b - 1$.
- Ainsi pour notre exemple précédent en base $b = 10$, le complément à dix pour le nombre décimal $N = 4576$ formé de $n = 4$ chiffres sera $(b^n) - N = (10^4) - 4576 = 5425$.

CC BY SA

Complément à deux

- Pour notre autre exemple, en base $b = 2$, le complément à deux pour le nombre binaire $N = (10011)2 = (19)10$ formé de $n = 5$ bits sera $(b^n) - N = (2^5) - 19 = 13$ ce qui donne en binaire : $(13)10 = (1101)2$.

CC BY SA

Complément à deux ... 2

- L'évaluation directe à la main, sans calculs, du complément à deux est également possible en suivant la démarche suivante :
  1. On parcourt le nombre binaire initial à partir (à droite) du bit le moins significatif, et on retranscrit les bits rencontrés jusqu'à atteindre un premier bit 1, que l'on retranscrit également.
  2. On continue la retranscription vers la gauche, en inversant cette fois les bits subséquents.

CC BY SA

Complément à deux . . . 3

- Par exemple, pour (10110)2, on aura la démarche détaillée dans le tableau 8.
- Les étapes sont numérotées selon la position considérée, à partir de la droite.

Table 8 – Étapes pour complément à deux

Nombre	1	0	1	1	0	
Étape 0					0	Retranscrit
Étape 1				1	0	Retranscrit
Étape 2			0	1	0	Inversé
Étape 3		1	0	1	0	Inversé
Étape 4	0	1	0	1	0	Inversé

CC BY SA

Complément à deux . . . 4

- Pour une évaluation par un circuit, on commencera par déterminer le complément à un par inversion et on lui additionnera 1 pour obtenir le complément à deux.

CC BY SA

Nombres signés et codage

- Représenter de nombres ≥ 0 en binaire est donc relativement naturel.
- Dans l'optique où on voudra stocker ces nombres dans une mémoire binaire numérique, il n'y a qu'à prévoir une taille suffisante (en nombre de bits) pour pouvoir accommoder des nombres assez grands pour l'application considérée.
- Avec n bits, il est possible de représenter des entiers de 0 à $2^n - 1$ avec cette représentation «naturelle».

CC BY SA

Nombres signés et codage . . . 2

- Mais on peut se demander comment représenter des nombres négatifs, c'est-à-dire < 0.
- Une première observation est le fait que si on considère des nombres positif et négatifs, on double en quelque sorte la quantité de valeurs à représenter.

CC BY SA

Nombres signés et codage . . . 3

- Par exemple, il y a 21 nombres à représenter si on veut pouvoir utiliser les valeurs comprises entre -10 et $+10$, comme on peut le voir dans le tableau 9.

Table 9 – Nombre de valeurs à représenter entre -10 et $+10$

Gamme	n. de valeurs
de -10 à -1	10
0	1
de 1 à 10	10
Total	21

- Nous devons donc nous assurer d'avoir autant de combinaisons de bits qu'il sera nécessaire.

CC BY SA

Nombres signés et codage . . . 4

- La deuxième observation est qu'il faudra un moyen de distinguer les nombres positifs des nombres négatifs.
- Si on veut que cette distinction puisse se faire non seulement sur papier, mais surtout lorsque les nombres seront stockés et manipulés dans un système électronique, il faut définir un format binaire «tout compris» qui permette de le faire.

CC BY SA

Nombres signés et codage . . . 5

- Nous devons donc établir un code, c'est-à-dire, une convention qui permettra de donner un sens à un groupe de bits.
- Le choix de la convention devrait être guidé par les usages qui seront ultimement faits des nombres qui seront représentés.
- En fait, lorsque nous avons convenu (implicitement) de représenter des nombres entiers en utilisant directement la conversion en base 2 des nombres décimaux, nous avons établi un code de représentation, qui, bien que naturel, n'en est pas moins une convention.

CC BY SA

Nombres signés et codage . . . 6

- Ici, nous devrons formuler plus explicitement la convention qui sera utilisée pour représenter les entier signés.
- Une convention de représentation peut être établie totalement arbitrairement, mais elle sera sans doute plus utile si elle peut contribuer à faciliter des opérations courantes réalisées avec les éléments à représenter.
- Puisqu'il est question ici de nombre entiers signés, l'opération à considérer en priorité est l'addition.

CC BY SA

Nombres signés et convention

- On devrait aussi considérer les trois points suivants dans notre choix de convention pour attribuer des codes binaires aux valeurs.
- Pour illustrer notre réflexion, nous allons considérer des nombre pouvant être représentés par des codes binaires de quatre bits, ce qui permet en théorie de représenter un total de 16 valeurs.
  1. Puisqu'il faudra partager notre ensemble de codes binaires en deux, il serait logique de placer la représentation pour zéro au centre de ce découpage.
  2. Les codes binaires utilisés pour un nombre et pour son inverse additif devraient être disposés symétriquement autour du code utilisé pour représenter le zéro. Il est naturel de représenter la valeur zéro avec le code 0000.
  3. L'ordre des codes devrait correspondre à l'ordre des nombres.

CC BY SA

Nombres signés et convention ... 2

- On sait bien comment ordonner les nombres entiers, en passant des nombres négatifs aux nombres positifs.
- Quel ordre serait approprié pour les représentations (codes binaires) ? L'ordre naturel, du moins pour les nombres entiers positifs, serait de passer de 0000 à 0001 à 0010, etc.
- Il faudra cependant limiter le nombre de valeurs positives, car il faut réserver des codes pour les valeurs négatives, et nous avons déjà utilisé un code pour le zéro.

CC BY SA

Nombres signés et convention ... 3

- Quel code binaire devrait-on placer juste avant le zéro, pour représenter -1 ? Si on dispose l'ensemble des codes binaires entre 0000 et 1111 selon un cycle, tel qu'illustré sur la figure 1, alors le code approprié pour -1 sera 1111.
- Et le code pour -2 sera 1110.
- Un avantage de cette disposition est que, en ajoutant 1 pour passer de -2 à -1, on parcourt le cycle dans le même sens qu'en ajoutant 1 pour passer de 1 à 2.

CC BY SA

Nombres signés et codage

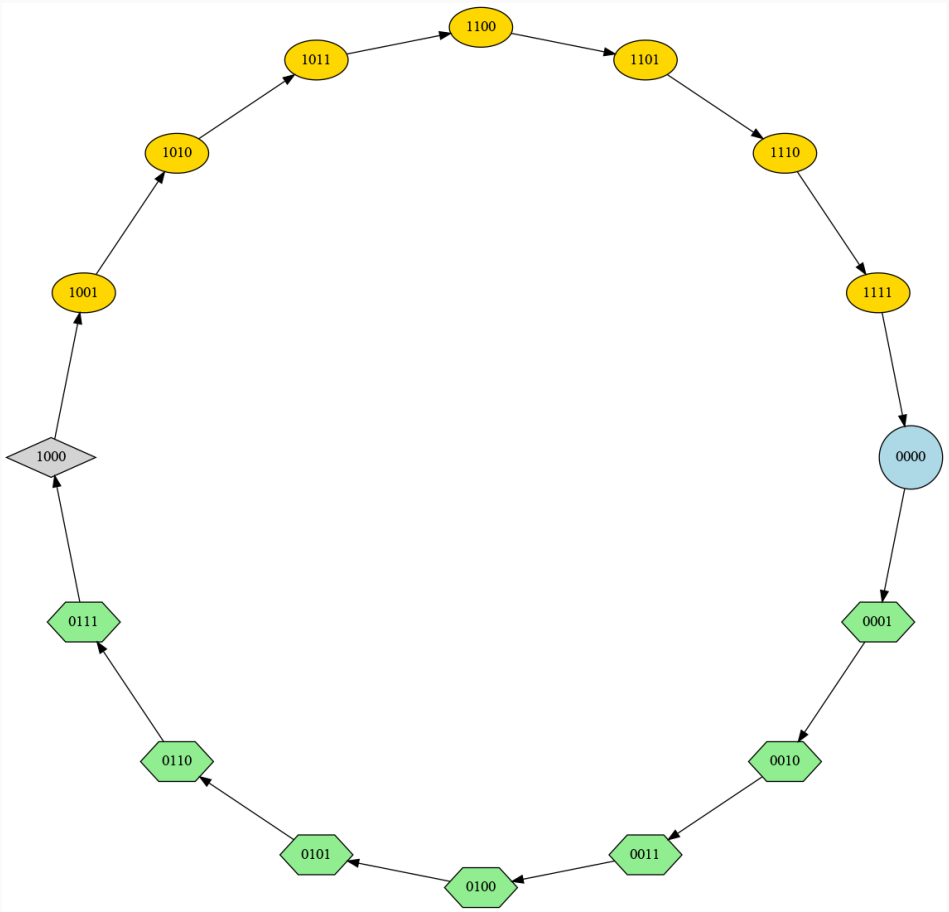


Figure 1 – Relations entre les codes dans l'assignation en complément à deux

CC BY SA

Nombres signés et codage . . . 2

- En suivant cette logique, on pourra, comme indiqué sur la figure, assigner les codes en jaune à des valeurs positives et les codes en vert à des valeurs négatives.
- Si on assigne autant de valeur positives que de valeurs négatives, un seul code binaire ne sera pas utilisable, le code 1000.
- Tout mouvement selon le sens des flèches correspond à une addition ; tout mouvement en sens inverse correspond à une soustraction.
- Les nombres binaires seront ainsi symétriques par rapport à notre zéro.
- Nous obtenons ainsi l'assignation du tableau 10.

CC BY SA

Nombres signés et codage . . . 3

Table 10 – Assignation de codes aux nombres de 4 bits

Code	Nombre
1001	-7
1010	-6
1011	-5
1100	-4
1101	-3
1110	-2
1111	-1
0000	0
0001	1
0010	2
0011	3
0100	4
0101	5
0110	6
0111	7
1000	aucun

CC BY SA

Nombres signés et codage . . . 4

- Voici quelques observations importantes sur cette représentation.
  1. Tous les codes des nombres négatifs ont le premier bit à gauche (qui serait le bit le plus significatif) à la valeur 1, alors que les autres ont codes ont la valeur 0.
     Ce bit peut ainsi servir d'indicateur de signe, avec la convention habituelle qu'on ne met pas de signe au zéro.
     On parlera ainsi de bit de signe pour dénoter ce bit, qui ne contribue pas à la grandeur (en valeur absolue) du nombre.

CC BY SA

Nombres signés et codage ... 5

2. L'inverse additif d'un nombre n, c'est-à-dire $-n$, est représenté par le complément à deux du nombre.
   Ceci signifie que pour trouver l'inverse additif d'un nombre, il suffit de calculer son complément à deux.
   Le complément à deux du complément à deux nous re-donnera le nombre initial, conformément à la double négation $--n = n$.

- Il existe d'autres conventions pour la représentation de nombres signés, comme par exemple, la représentation signe+magnitude, mais la représentation en complément à deux est de loin la plus utilisée.

CC BY SA

Opérations arithmétiques binaires : addition de nombres non signés

- En transposant les opérations classiques pour effectuer à la main des additions ou des soustractions, il est possible d'effectuer des calculs avec des nombres binaires.
- Additionner des nombres entier non signés ne pose pas de difficultés particulières.
- On suppose deux nombre entiers binaires non signés A et B représentés en utilisant le même nombre de bits (si un nombre est plus petit, on ajoutera des 0 non significatifs à gauche pour compléter la représentation).

CC BY SA

Addition de nombres non signés ... 2

- Lorsqu'on effectue l'opération bit par bit, en partant de la position la moins significative, on peut utiliser la table d'addition suivante :
- À la position i, on a trois entrées à prendre en considération : A_i et B_i, les bits des nombres à additionner et R_{i-1}, la retenue provenant de la position $i-1$.
- En sortie, on a la somme S_i et la retenue R_i.

CC BY SA

Addition de nombres non signés ... 3

Table 11 – Tableau de vérité pour l'additionneur binaire

A_i	B_i	R_{i-1}	R_i	S_i
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

CC BY SA

Addition de nombres non signés : exemple 1

Exemple :

A : 101110001 B : 001111001 S : 111101010 R : 001110001

S'il y a une retenue non nulle à la suite de l'addition à la position la plus significative, il y a un débordement, car le résultat est trop grand pour être représenté avec le nombre de bits initial.

CC BY SA

Addition de nombres signés ... 4

- L'addition de nombre signés codés avec la représentation en complément à deux est nettement avantageuse.
- Il suffit d'additionner les deux nombres comme s'il s'agissait de nombre non signés, en incluant les bits de signe dans le calcul.
- La retenue qui émane de la position la plus significative ne doit pas être prise en compte.

CC BY SA

Addition de nombres signés : exemple 2

- Additionnons $A = -2$ et $B = 4$, représentés respectivement $(1110)2$ et $(0100)2$.

A : 1110 B : 0100 S : 0010 R : 1100

qui nous donne bien le résultat escompté : S = $(0010)2 = (2)10$.

CC BY SA

Addition de nombres signés : exemple 3

- Additionnons $A = 3$ et $B = -5$, représentés respectivement (0011)2 et (1011)2.

A : 0011 B : 1011 S : 1110 R : 0011

qui nous donne bien le résultat escompté : S = (1110)2 = (-2)10.

CC BY SA

Addition de nombres signés . . . 5

- On peut vérifier facilement qu'additionner un nombre avec son complément à deux donne toujours zéro, ce qui correspond à faire $-n + n = 0$.
- Comme avec l'addition de nombre entiers non signés, il faudra se préoccuper des débordements qui peuvent survenir parce que la capacité de représentation est limitée par la taille (en nombre de bits) des codes binaires utilisés.

CC BY SA

Soustraction de nombres signés

- La soustraction s'effectue en faisant $A - B = A + (-B)$, comme suit :
  1. On détermine le complément à deux du nombre à soustraire (ici, B).
  2. On additionne ce complément à deux au nombre duquel on soustrait (ici, A).
- La retenue qui émane de la position la plus significative ne doit pas être prise en compte.
- Le résultat s'interprétera comme un nombre signé en complément à deux.

CC BY SA

Extension de signe

- Dans la représentation des nombres signés en complément à deux, le bit de signe (bit le plus à gauche) est un indication directe du signe d'un nombre.
- Si on change la taille des nombres, c'est-à-dire, le nombre de bits utilisés au total pour la représentation, il faut une opération spécifique pour préserver l'encodage en complément à deux.

CC BY SA

Extension de signe . . . 2

- Considérons par exemple le nombre 5, représenté d'abord sur quatre bits et ensuite sur huit bits.

On a pour 5

0101

ou encore

00000101

- Quand on compare ces deux représentations, on observe que :
  - elles se terminent de la même façon, avec les trois bits 101 qui représentent la grandeur du nombre ;
  - le bit le plus à gauche est 0 dans les deux cas (même signe) ;
  - dans la représentation sur huit bits, il y a des bits 0 entre le bit de signe et les trois derniers bits.

CC BY SA

Extension de signe . . . 3

- Considérons maintenant un nombre négatif, le nombre -5, représenté d'abord sur quatre bits et ensuite sur huit bits.

Le complément à deux de $5 = (0101)2$ est

$$1011$$

alors que le complément à deux de $5 = (00000101)2$ est

$$11111011$$

- Quand on compare ces deux représentations, on observe que :
  - elles se terminent de la même façon, avec les trois bits 011 ;
  - le bit le plus à gauche est 1 dans les deux cas (même signe) ;
  - dans la représentation sur huit bits, il y a des bits 1 entre le bit de signe et les trois derniers bits.

CC BY SA

Extension de signe . . . 4

- Ces constatations nous amènent à conclure que lorsqu'on augmente la taille de représentation d'un nombre signé, il faut faire une extension de signe pour intercaler les bonnes valeurs binaires entre le bit de signe et les bits qui représentent la grandeur du nombre.
- Pour un nombre positif, on doit intercaler des bits 0, alors que pour un nombre négatif, on intercale des bits 1.
- On peut donc énoncer la règle comme *on doit intercaler des bits dont la valeur est la même que le bit de signe.*

CC BY SA

Extension de signe . . . 5

- Si, à l'inverse, on réduit la taille des nombres signés, on n'aura qu'à supprimer des bits, tous égaux au bit de signe, entre le bit de signe et ceux qui représentent la grandeur du nombre.
- Si les bits à supprimer ne sont pas tous égaux au bit de signe, c'est une indication que la réduction de taille n'est pas possible : la nouvelle taille est insuffisante pour représenter les nombres correctement.

CC BY SA

Codes binaires

- Il n'y a pas que des nombres que l'on voudra représenter en binaire.
- Il est maintenant le temps de définir ce qu'on appelle un code binaire, car cette notion est au centre de tous les encodages que nous aurons à utiliser.
- Un code binaire sur n bits est typiquement une association entre, d'une part, les éléments d'un ensemble que l'on cherche à représenter et d'autre part, les différents groupes ou patrons possibles avec n bits.

CC BY SA

Codes binaires ... 2

- On appelle parfois ces patrons des mots-code (ou par abus de langage, des codes).
- Comme il y a 2^n patrons de bits différents, il est possible d'associer jusqu'à ce nombre d'éléments.
- Une règle, souvent implicite mais essentielle, est qu'on ne devrait associer qu'un seul élément à un patron de bits donné. Sinon, l'interprétation du code (le décodage) devient ambiguë.
- Selon l'application, il n'est pas toujours nécessaire d'associer tous les patrons de bits à des éléments.

CC BY SA

Codes binaires ... 3

- Par exemple, si on veut représenter les chiffres décimaux, il est nécessaires de disposer d'au moins 10 patrons de bits, ce qui est possible avec $n = 4$.
- Puisque $2^4 = 16$, il y aura $16 - 10 = 6$ patrons de bits inutilisés.
- La règle spécifique d'association peut être établie arbitrairement, mais elle est souvent conçue en vue de respecter certaines propriétés liées aux éléments à représenter ou à la configuration du code lui-même.
- C'est ce qu'on a fait, par exemple, pour définir la convention d'encodage des entiers par complément à deux.

CC BY SA

Code Gray

- Lorsqu'on utilise un code binaire pour représenter des valeurs associées à des phénomènes physiques, il peut être opportun d'utiliser un encodage dans lequel le nombre de changements de bits est minimal lorsqu'on passe d'un patron de bits au suivant dans la séquence des codes.
- Par exemple, si on cherche à encoder des positions d'un interrupteur rotatif (comme pour encoder des angles), il est préférable que lorsqu'on passe d'un position à la suivante en tournant le commutateur, un seul bit ne change dans la sortie.
- Ainsi, une erreur sur un bit n'introduit pas un gros changement dans l'interprétation de la valeur encodée.

CC BY SA

Code Gray . . . 2

- Un code Gray permet d'atteindre cet objectif.
- Avec le code Gray du tableau 12, on peut voir par exemple que la transition entre les codes pour 7 et 8 n'entraîne qu'un changement sur un bit, de 0110 à 1100.
- Avec un encodage classique basé sur les entiers binaires, on aurait observé pour ce cas une transition entre 0111 et 1000, qui comporte quatre changements de valeurs de bits.

CC BY SA

Code Gray . . . 3

Table 12 – Code Gray à quatre bits

Code Gray	Valeur
0000	0
0001	1
0011	2
0010	3
0110	4
0111	5
0101	6
0100	7
1100	8
1101	9
1111	10
1110	11
1010	12
1011	13
1001	14
1000	15

CC BY SA

Codes alphanumériques et autres

- Vous rencontrerez sans doute plusieurs autres encodages courants, comme par exemple pour encoder des caractères (code ASCII, codes UTF) ou pour encoder uniquement des chiffre décimaux (code BCD).
- Une fois qu'on a bien compris la règle d'encodage, il n'y a généralement pas de difficultés à les utiliser.
- Certains codes sont construits de manière à permettre d'identifier et même, dans certains cas, de corriger des erreurs dans le stockage ou la transmission des données encodées.
- Ces codes sont construits en fonction de règles d'encodage, qui, lorsqu'elles ne sont pas respectées, permettent de constater la présence d'erreurs.

CC BY SA