Circuits logiques combinatoires et séquentiels

Guy Bégin

16 novembre 2022

Conception de circuits logiques

séquentiels

Objectifs

- Pouvoir concevoir un circuit logique séquentiel synchrone à partir d'une spécification fonctionnelle
- Savoir construire un diagramme d'état en fonction d'un besoin
- Savoir construire un tableau d'état en fonction d'un diagramme d'état
- Pouvoir réduire le nombre d'état nécessaires
- Savoir comment assigner des codes binaires aux états et pouvoir choisir une approche
- Pouvoir concevoir un décodeur de prochain état et un décodeur de sortie



Conception d'un circuit séquentiel synchrone

- Concevoir un circuit logique séquentiel permet de répondre à un besoin pratique qui ne peut pas être satisfait par un circuit combinatoire.
- Le point de départ est une description, la plus précise possible, du besoin à remplir : quelle doit ou doivent être les entrées, les sorties, les conditions qui font passer d'un état au suivant, etc.
- Pour un besoin donné, une multitude de solutions fonctionnellement équivalentes sont possibles, aussi il faudra établir des critères ou identifier des contraintes qui permettront d'orienter la conception et le choix final d'une solution.



Conception d'un circuit séquentiel synchrone ... 2

- Deux systèmes peuvent avoir un même comportement vu de l'extérieur, mais comporter des nombres d'états internes différents.
- Des considérations pratiques nous amèneront souvent à vouloir réduire le nombre d'états nécessaires, et à simplifier les différents circuit combinatoires utilisés.
- Réduire le nombre de bascules utilisées ne se traduit pas toujours par un système plus simple, car les décodeurs d'état et de sortie peuvent s'en retrouver plus complexes.



Spécification fonctionnelle

- Comme dans tout problème de conception, la formulation en mots de la spécification du système est cruciale.
- Appliquer parfaitement une procédure de conception en se basant sur une spécification erronée ne peut pas conduire à système adéquat.
- Il faudra un bon bagage d'expérience et d'intuition au concepteur pour pouvoir interpréter et traduire correctement une description informelle, plus souvent qu'autrement incomplète, ambiguë et imprécise, en un design concret qui répond à un besoin maladroitement exprimé.
- Il revient au concepteur de s'assurer que ce qu'il a compris correspond bien à ce qui était demandé.



Questions à se poser

La première question à poser est :

• Que doit faire le système?

Suivront d'autres questions, amenant à définir davantage de détails :

- Combien d'entrées sont nécessaires ?
- Doit-il y avoir des entrées?
- Combien de sorties sont nécessaires ?



Questions à se poser ... 2

Le comportement du système pourra être essentiellement caractérisé en répondant à la question :

• Quelle doit être la séquence des sorties, pour une certaine séquence d'entrées ?

Mais comme les séquences d'entrées peuvent être en nombre infini, il faudra identifier des patrons qui permettront de résumer le comportement du système.



Diagramme d'état

- Un diagramme d'état préliminaire est un bon point de départ pour définir et étudier le comportement du système.
- On identifiera les différents états par des lettres pour les distinguer sans faire référence à des variables binaires associées à des éléments de mémoire.
- Il s'agit dans un premier temps d'un diagramme préliminaire, parce que le diagramme final qui sera implémenté sera potentiellement différent.
- À partir du diagramme d'état, il est possible de vérifier quelle séquence de sortie correspond à une séquence d'entrée donnée, et ainsi de valider le comportement.

Tableau d'états

- Un tableau d'états comporte une ligne par état présent et combinaison d'entrées.
- Selon les combinaisons d'entrées possibles, on donne le prochain état et les valeurs de sortie.



Réduction du nombre d'états

- Deux états sont équivalents si, pour chaque combinaison d'entrées, ils produisent la même sortie et amènent le système dans le même état ou dans un état équivalent.
- Considérons le diagramme d'état de la figure 1 et le tableau d'état correspondant 2.
- On peut voir qu'il s'agit ici d'une machine de Mealy, car les valeurs de sortie sont associées aux transitions.



Diagramme d'état avant réduction

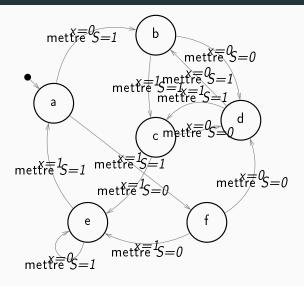


Figure 1 - Diagramme d'état avant réduction



Tableau d'état initial

État présent	X	État suivant	S
а	0	b	1
а	1	f	1
b	0	d	0
b	1	С	1
С	0	d	0
С	1	е	0
d	0	b	1
d	1	С	1
е	0	е	1
е	1	а	1
f	0	d	0
f	1	е	0



États équivalents

- En inspectant les différents états, on voit que les états c et f sont équivalents.
- En remplaçant l'état f par l'état c, on obtient le nouveau tableau d'état 2.



Tableau d'état après une simplification

Table 2 - Tableau d'état après une simplification

État présent	X	État suivant	5
а	0	b	1
а	1	С	1
b	0	d	0
b	1	С	1
С	0	d	0
С	1	е	0
d	0	b	1
d	1	С	1
е	0	е	1
е	1	а	1



Tableau d'état : encore des simplifications

- On voit maintenant que les états a et d sont équivalents.
- En remplaçant l'état *d* par l'état *a*, on obtient le tableau d'état simplifié 3.
- Il n'y a plus de simplification possible. Nous sommes passés de six états à quatre.



Tableau d'état simplifié

Table 3 – Tableau d'état simplifié

État présent	X	État suivant	S
а	0	b	1
а	1	С	1
b	0	d	0
b	1	С	1
С	0	d	0
С	1	е	0
е	0	е	1
е	1	а	1

 Il faut bien s'assurer que le tableau d'état simplifié produit les séquences de sortie désirées selon les séquences d'entrée appliquées.

Tableau d'implication

- La méthode du tableau d'implication facilite l'identification des états redondants à éliminer.
- Considérons le tableau d'état suivant, qui correspond cette fois-ci à une machine de Moore dont nous allons réduire le nombre d'états.



Tableau d'état (machine de Moore)

Table 4 – Tableau d'état (machine de Moore)

État présent	État suivant $x=0$	État suivant $x = 1$	5
a	g	С	0
b	f	h	0
С	е	d	1
d	а	С	0
е	С	а	1
f	f	b	1
g	а	С	0
h	С	g	1



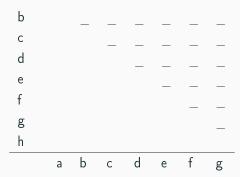
Tableau d'implication : détails

- Un tableau d'implication comporte une entrée pour chaque paire d'états dans le tableau d'état.
- Avec n états initialement (ici on a n=8), on étiquettera les colonnes avec les n-1 premiers états, et les lignes avec les n-1 derniers états.
- La première case vide, en haut à gauche, sera notée [a;b] et la dernière en bas à droite sera [g;h].
- Voici le tableau avant d'être rempli (tableau 5). Seules les cases qui ne comportent pas de _ peuvent être remplies.
- Il n'y a par exemple rien d'utile à mettre dans une case étiquetée [b;b], et on mettra l'information qui irait dans la case [c;b] dans la case [b;c].



Exemple de tableau d'implication avant d'être rempli

Table 5 – Tableau d'implication





Procédure

- On applique la procédure en considérant chaque case du tableau, ce qui permet de comparer chaque paire de lignes du tableau d'état.
 - On vérifie dans un premier temps si les sorties sont différentes.
 Si c'est le cas, on met un √ dans la case. Par exemple ici, a et c, a et e, a et f, a et h ont des sorties différentes, donc on place des √ dans les cases [a;c], [a;e], [a;f] et [a;h].
 - Si les sorties sont les mêmes, on place dans la case les paires d'états qu'une équivalence nécessiterait. Par exemple pour la case [a;b], une équivalence entre a et b nécessiterait les équivalences g=f et c=h entre les états prochains. Pour la case [a;d], une équivalence entre a et d nécessiterait les équivalences g=a et c=c. Cette dernière, évidente, n'est pas inscrite dans le tableau. Pour [b;d], on trouve f=a et h=c.



Procédure ... 2

Si les sorties sont les mêmes et les paires d'états suivants sont identiques ou encore sont les états mêmes qu'on est en train de considérer, on met directement OUI dans le tableau. Par exemple, pour la case [a;g] on a les paires g=a et c=c, donc on met OUI. Pour la case [d;g], on a a=a et c=c, on met OUI également. On continue ainsi, de colonne en colonne, pour obtenir après ces étapes le résultat suivant (tableau 6).



Tableau d'implication, après étape 1

Table 6 – Tableau d'implication, après étape 1

С	g=f c=h √	<u>−</u>	_	_	_	_	_
d	g=a	f=a h=c	<u></u>	_	_	_	
е	\checkmark	\checkmark	d=a	✓	_	_	_
f	✓	\checkmark	e=f d=b	\checkmark	c=f a=b	_	_
g	OUI	f=a h=c	\checkmark	OUI	\checkmark	\checkmark	
h	✓	✓	$e=c\ d=g$	\checkmark	a=g	f=c b=g	✓
	а	b	С	d	е	f	g



Étape suivante

2. L'étape suivante consiste à considérer chaque case qui comporte une ou des paires d'états impliqués. On regarde la case correspondant à chaque paire, et s'il y a un √ dans la case, alors l'implication ne fonctionne pas. Par exemple, la case [a;b] repose sur les équivalences g=f et c=h. Or si on regarde la case [f;g], on voit qu'il s'y trouve un √, ce qui veut dire que f et g ne peuvent pas être équivalents, ce qui implique que a et b ne pourront pas être équivalents. Ce n'est pas la peine de regarder la case [c;h]. On remplacera donc les paires de la case [a;b] par un √√, pour faire ressortir ces nouveaux échecs.



Implications qui échouent

3. Un √√ dans le tableau peut faire échouer d'autres implications. Il faut donc revoir les cases avec des paires d'états impliqués pour voir s'il faut changer leur statut. On continue à revoir ainsi jusqu'à ce qu'il n'y ait plus d'ajouts de √√. On obtient finalement le tableau suivant (tableau 7).



Tableau d'implication, après étape 3

Table 7 – Tableau d'implication, après étape 3

	а	b	С	d	е	f	g
h	\checkmark	\checkmark	e=c d=g	\checkmark	a=g	$\checkmark\checkmark$	\checkmark
g	OUI	$\checkmark\checkmark$	\checkmark	OUI	\checkmark	\checkmark	_
f	\checkmark	\checkmark	$\checkmark\checkmark$	\checkmark	$\checkmark\checkmark$	_	_
е	\checkmark	\checkmark	d=a	\checkmark	_	_	_
d	g=a	$\checkmark\checkmark$	\checkmark	_	_	_	_
С	\checkmark	\checkmark	_	_	_	_	_
b	$\checkmark\checkmark$	_	_	_	_	_	_



Dernières étapes

4. Après cette étape, toutes les cases qui contiennent OUI ou des paires d'implications indiquent des équivalences d'états. Ici, on a les équivalences suivantes : a=d, a=g, c=e, c=h, d=g, e=h. Les états uniques résultants sont a, b, c et f. On obtient le tableau d'état réduit suivant (tableau 8).



Tableau d'état réduit (machine de Moore)

Table 8 - Tableau d'état réduit (machine de Moore)

État présent	État suivant	État suivant	S
	x = 0	x = 1	
а	а	С	0
b	f	С	0
С	С	а	1
f	f	b	1



Codage des états

- Une fois que le nombre d'états a été réduit, il faut assigner des codes binaires aux états.
- Si on doit coder m états, il faudra n bits, avec $2^n \ge m$.
- Si le nombre de combinaisons binaires est plus grand que le nombre d'état nécessaires, les combinaisons inutilisées seront considérées comme des cas facultatifs.



Codage des états . . . 2

- Le choix d'une assignation des codes aux états aura des répercussions sur la complexité du décodeur de prochain état, et sur le décodeur de sortie.
- Plusieurs options peuvent être envisagées: assigner des codes dans l'ordre naturel d'énumération binaire, assigner selon un code Gray, ou encore choisir une assignation où il y a un seul bit 1 par code binaire (approche dite one-hot).
- L'approche one-hot requiert plus de bascules, mais permet souvent de simplifier les décodeurs de prochain état et de sortie.
- Le tableau 9 montre un exemple possible d'assignation pour chacune de ces approches.



Possibilités d'assignation de codes d'états

Table 9 – Possibilités d'assignation de codes d'états

État	Binaire	Gray	One-hot
а	00	00	0001
b	01	01	0010
С	10	11	0100
е	11	10	1000



Décodeur d'état

- Après avoir décidé d'une assignation, on refait le tableau d'état simplifié en remplaçant les étiquettes d'états symboliques par les codes binaires correspondants.
- On obtient ainsi un tableau de transition, qui permet d'élaborer les expressions logiques pour le décodeur de prochain état.
- Le type de bascules à utiliser déterminera les sorties nécessaires pour le décodeur d'état, en se basant sur les tableaux caractéristiques du chapitre précédent.



Décodeur de sorties

- Une fois que le codage d'état est établi, la conception du décodeur de sortie est directe.
- Un tableau de vérité avec comme entrées les valeurs binaires d'états et comme sorties les valeurs de sorties externes permet de déterminer les fonctions combinatoires à implémenter.



Procédure de conception

- La conception d'un circuit séquentiel suit une procédure bien définie.
- Étant donnée la complexité de cette tâche, on limite la conception manuelle à des relativement petits circuits.
- Pour des besoins plus ambitieux, des outils de synthèse automatisés ont été développés.
- Ces procédures automatisées supposent typiquement des bascules D, car la correspondance entre l'entrée et la prochaine sortie est directe.



Procédure de conception : étapes

Voici les étapes à suivre :

- 1. À partir de la description et des spécifications du comportement souhaité, concevoir un diagramme d'état.
- 2. Réduire le nombre d'état (si pertinent).
- 3. Assigner des codes binaires aux états.
- 4. Compléter le tableau de transition.
- 5. Sélectionner un type de bascules à utiliser.
- 6. Déterminer les expressions simplifiées pour le décodeur de prochain état et le décodeur de sortie.
- 7. Tracer le schéma logique du circuit.



Exemple de conception

- On doit concevoir un circuit séquentiel qui détecte la séquence binaire 101 lorsqu'elle apparaît dans sa séquence d'entrée.
- Une fois la séquence identifiée, le système produira une sortie 1 et demeurera dans le même état en continuant de produire une sortie 1, jusqu'à une remise à zéro.



Diagramme d'état pour l'exemple

• Selon le diagramme d'état de la figure 2, le système démarre dans l'état a, et demeure dans cet état tant que l'entrée A=0.

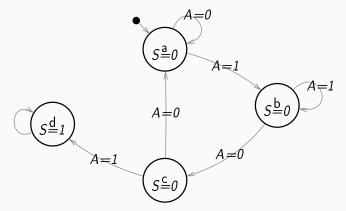


Figure 2 - Diagramme d'état pour détecter la séquence 101



Comportement selon le diagramme d'état

- Lorsque A=1, on passe à l'état b, début de la reconnaissance du patron 101.
- Ensuite, si A = 1, on reste dans l'état b parce ce pourrait être le début d'une autre séquence 101.
- De l'état b, si A=0, on passe à l'état c, car on a observé 10 en séquence.
- De l'état c, si on a A=0, la séquence observée est maintenant de 100, et on doit tout recommencer en retournant à l'état a.
- De l'état c, si on a A=1, alors on a reconnu la séquence 101.
- ullet On met la sortie S=1 et on reste dans cet état pour toutes les autres transitions, quelle que soit l'entrée.
- Il s'agit ici d'une machine de Moore, puisque la sortie est S=1 produite lorsqu'on est dans l'état d; on a S=0 dans les autres états.



Réduction d'état

Il n'y a pas de réduction d'états possible ici.



Assigner des codes binaires aux états

 Pour quatre états, il nous faudra deux bascules. Le tableau 10 présente l'assignation d'états choisie.

Table 10 - Tableau d'assignation d'état

État	Code
а	00
b	01
С	10
d	11



Compléter le tableau de transition

Le tableau 11 donne les transitions d'états.

Table 11 - Tableau de transition d'états

Z_1^n	Z_0^n	Α	Z_1^{n+1}	Z_0^{n+1}	S
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	1	0
1	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1



Sélectionner un type de bascules à utiliser

On choisit des bascules D.



Déterminer les expressions simplifiées

Les diagrammes de Karnaugh correspondants sont donnés pour Z_0^{n+1} (figure 3), Z_1^{n+1} (figure 4) et S (figure 5).



Diag-K pour Z_0^{n+1}

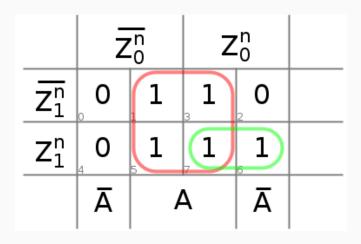


Figure 3 – Diag-K pour Z_0^{n+1}



Diag-K pour Z_1^{n+1}

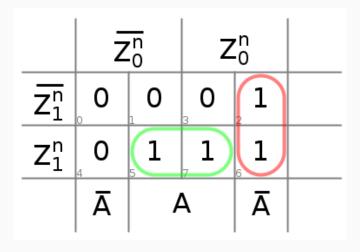


Figure 4 – Diag-K pour Z_1^{n+1}



Diag-K pour S

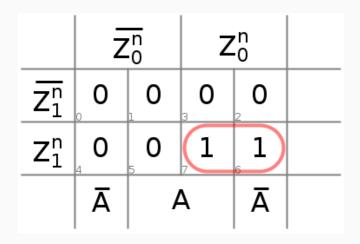


Figure 5 — Diag-K pour *S*



Décodeur de prochain état

Les expressions pour le décodeur de prochain état sont :

$$Z_1^{n+1} = (A' \cdot Z_0^n) + (A \cdot Z_1^n)$$

$$Z_0^{n+1} = A + (Z_0^n \cdot Z_1^n)$$



Décodeur de sortie

L'expression pour le décodeur de sortie est :

$$S = Z_0^n \cdot Z_1^n$$



Schéma logique du circuit détecteur pour la séquence 101

• Le circuit obtenu est représenté sur la figure 6.

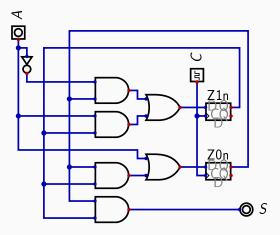


Figure 6 – Détecteur pour la séquence 101



Trace d'exécution avec succès

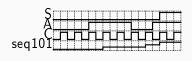


Figure 7 — Trace d'exécution avec succès

- Les premiers coups d'horloge, l'entrée A = 0 et le système demeure dans l'état 0.
- Puis, lorsque A = 1, on passe à l'état 1.
- Comme A reste à 1, on demeure dans l'état 1 un certain temps.
- Puis, lorsque A = 0, on passe à l'état 2.
- Avec A=1 de nouveau, on passe à l'état 3 en activant la sortie S=100
- On ne quittera plus cet état ensuite.

Trace d'exécution sans succès

 Une deuxième trace d'exécution (figure 8) montre un cas où le système retourne à l'état 0 après avoir reçu une séquence 100.

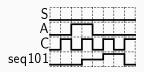


Figure 8 – Trace d'exécution sans succès



Autres types de bascules

- Les fonctions du décodeur de prochain état se formulent naturellement en fonction de bascules D.
- Pour faire l'implémentation avec des bascules JK ou T, il faut pouvoir déterminer les entrées nécessaires pour amener les changements d'états requis.
- Pour ce faire, on utilisera des tableaux d'excitation qui listent les combinaisons d'entrées pour passer d'un état présent Q_n à un état prochain Q_{n+1} .
- Le tableau d'excitation pour une bascule JK est donné dans le tableau 12 et celui pour une bascule T est donné dans le tableau 13.

Tableau d'excitation, bascule JK

Table 12 – Tableau d'excitation, bascule JK

Q_n	Q_{n+1}	J	K
0	0	0	Χ
0	1	1	Χ
1	0	Χ	1
1	1	Χ	0



Tableau d'excitation, bascule T

Table 13 – Tableau d'excitation, bascule T

Q_n	Q_{n+1}	T
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



Pour des bascules JK

- Reprenons le tableau de transition d'états pour notre exemple, en ajoutant les signaux à générer pour des bascules JK.
- On obtient alors le tableau 14.



Tableau de transition d'états, avec bascules JK

Table 14 - Tableau de transition d'états, avec bascules JK

Z_1^n	Z_0^n	Α	Z_1^{n+1}	J	K	Z_0^{n+1}	J	K
0	0	0	0	0	Χ	0	0	Χ
0	0	1	0	0	Χ	1	1	Χ
0	1	0	1	1	Χ	0	Χ	1
0	1	1	0	0	Χ	1	Χ	0
1	0	0	0	Χ	1	0	0	Χ
1	0	1	1	Χ	0	1	1	Χ
1	1	0	1	Χ	0	1	Χ	0
1	1	1	1	Χ	0	1	Х	0



Expressions pour bascules JK

On trouve les expressions simplifiées suivantes :

$$J_{Z_1}=A'\cdot Z_0^n$$

$$K_{Z_1} = A' \cdot (Z_0^n)'$$

$$J_{Z_0}=A$$

$$K_{Z_0}=(A+Z_1^n)'$$



Implémentation avec bascules JK

Ce qui nous donne l'implémentation de la figure 9.

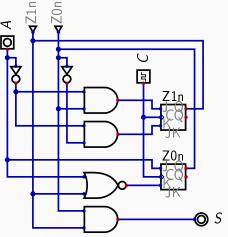


Figure 9 — Détecteur pour la séquence 101, bascules JK



États interdits

- Lorsque le nombre d'états nécessaires pour le fonctionnement de la machine à état fini est strictement inférieur au nombre total d'états possibles avec les bascules utilisées, un certain nombre d'états (physiques) ne seront pas utilisés dans le fonctionnement normal du circuit séquentiel.
- On parlera alors d'états interdits.
- Lors de la formulation des tableaux de vérité pour le décodeur de prochain état, ces états donneront lieu à des cas facultatifs, qui pourront permettre la simplification du circuit combinatoire du décodeur.
- Il faut toutefois se méfier de scénarios dans lesquels la machine à état pourrait se retrouver dans un tel état interdit en raison d'un dysfonctionnement momentané ou lors de la mise en marche du système.

États interdits ... 2

- Considérons par exemple un circuit séquentiel dont le diagramme d'état (tel qu'implémenté après conception) est illustré ci-dessous (figure 10).
- En fonctionnement normal, le système évolue entre les états a, b et c.
- Mais si pour une raison quelconque, le système entre dans l'état d, il restera coincé en bouclant sur cet état pour toujours (ou peut-être jusqu'à un prochain dysfonctionnement).



Diagramme d'état avec état interdit

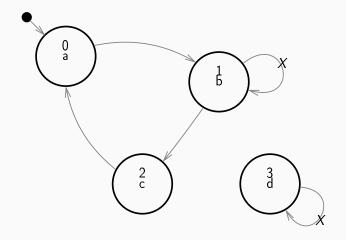


Figure 10 - Diagramme d'état avec état interdit



Solution possible

 Une solution serait de modifier le décodeur de prochain état pour s'assurer que, de l'état interdit, on revient toujours vers un état normal, comme on peut le voir sur la figure suivante (figure 11), où de l'état d, on reviendra toujours vers l'état c.



Diagramme d'état qui assure le retour en fonctionnement normal

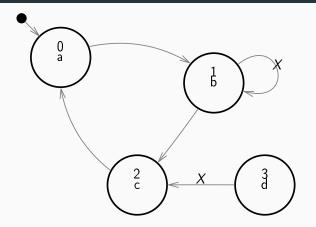


Figure 11 – Diagramme d'état qui assure le retour en fonctionnement normal



Exemple avec états one-hot

- Dans l'exemple suivant, on explore l'assignation d'états one-hot dans laquelle il n'y a qu'un seul bit 1 par code binaire.
- Considérons le diagramme d'état suivant (figure 12).

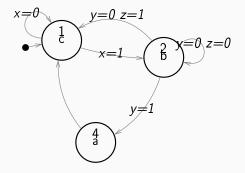


Figure 12 - Diagramme d'état pour assignation one-hot



Tableau d'assignation d'état one-hot

Le tableau d'assignation d'état correspondant est donné dans le tableau 15 ci-dessous.

Table 15 – Assignation *one-hot*

État	One-hot
а	100
b	010
С	001



États et bascules

- Chaque état aura sa propre bascule active, dont les sorties seront dénotées A, B et C.
- Le tableau de transition d'états qu'on obtient comporte un grand nombre de cas facultatifs et d'états inutilisés, que nous n'avons pas indiqués ici.



Tableau de transition d'états

• Le tableau 16 ne montre que les six transitions spécifiées dans le diagramme d'état.

Table 16 – Tableau de transition d'états *one-hot*

A^n	B^n	C^n	X	У	Z	A^{n+1}	B^{n+1}	C^{n+1}
0	0	1	0	Χ	Χ	0	0	1
0	0	1	1	Χ	Χ	0	1	0
0	1	0	Χ	0	0	0	1	0
0	1	0	Χ	0	1	0	0	1
0	1	0	Χ	1	Χ	1	0	0
1	0	0	Χ	Χ	Χ	0	0	1



Décodeur de prochain état

Il est possible de formuler le décodeur de prochain état directement, par inspection des transitions spécifiées.

Si on considère les transitions qui entrent dans l'état a, il y a trois façons différentes d'arriver en a:

- à partir de a, sous la condition x = 0
- à partir de b, sous la condition y = 0, z = 1
- à partir de c, sans conditions



Équations de prochain état

L'équation de prochain état pour a sera ainsi

$$A^{n+1} = A^n x' + B^n y' z + C^n$$

Le même raisonnement nous permet d'écrire pour les autres bascules :

$$B^{n+1} = A^n x + B^n y' z'$$

et

$$C^{n+1} = B^n y$$



Avantages

- Le décodeur de prochain état est simplifié, car les bits d'état offrent une indication directe de l'état dans lequel la machine se trouve.
- Le fonctionnement de la machine entraîne peu de transitions, ce qui résulte en une consommation d'énergie réduite, et moins de risque de glitches.
- La vitesse de commutation ne dépend pas du nombre d'états.
- Ajouter ou retrancher un état peu se faire sans avoir à tout refaire la conception.
- L'assignation one-hot est particulièrement intéressante lorsqu'on est moins limité par le nombre de bascules que par le nombre d'éléments combinatoires.

Inconvénients

- Le principal inconvénient de cette approche est la croissance du nombre de bascules, qui est linéaire avec le nombre d'états plutôt que logarithmique.
- Par exemple, pour 30 états, il faudra 30 bascules alors qu'avec un encodage binaire, il n'en faudrait que cinq.
- Il faut aussi considérer qu'il y a un grand nombre d'états interdits, et prendre les précautions qui s'imposent pour éviter les problèmes de fonctionnement coincé.

