

科目：資料結構

一、A 為(8x4)矩陣、B 為(4x10)矩陣、C 為(10x3)矩陣、D 為(3x20)矩陣、E 為(20x4)矩陣，

(二)使用 Dynamic Programming(動態規劃)的技巧計算出此五個矩陣相乘  $A \times B \times C \times D \times E$  的最佳乘法順序(請用括號表示乘法順序),使得五個矩陣相乘所需要花費的乘法數量最少。(15 分)

(三)請列出此五個矩陣相乘所需要花費的最少乘法數量(5分)(注意:未說明 Dynamic Programming 計算過程,不予計分。)

《破題關鍵》：本題為矩陣連乘用動態規劃求解題，已在 106 高考出過類似題，只要做熟考古題再加上相當的耐心運算即可得到正確解答。

《命中特區》：講義 P54、P84 完全命中

【擬答】

$$\begin{aligned} & (((\text{AxB})\text{xC})\text{xD})\text{xE}) \vee (((\text{AxB})\text{xC})\text{x}(\text{DxE})) \vee (((\text{AxB})\text{x}(\text{CxD}))\text{xE}) \vee ((\text{AxB})\text{x}((\text{CxD})\text{xE})) \vee \\ & ((\text{AxB})\text{x}(\text{Cx}(\text{DxE}))) \vee (((\text{Ax}(\text{BxC}))\text{xD})\text{xE}) \vee ((\text{Ax}(\text{BxC}))\text{x}(\text{DxE})) \vee ((\text{Ax}((\text{BxC})\text{xD}))\text{xE}) \vee \\ & (\text{Ax}(((\text{BxC})\text{xD})\text{xE})) \vee (\text{Ax}((\text{BxC})\text{x}(\text{DxE}))) \vee ((\text{Ax}(\text{Bx}(\text{CxD})))\text{xE}) \vee (\text{Ax}((\text{Bx}(\text{CxD}))\text{xE})) \vee \end{aligned}$$

$(A_x(B_x((C_x D_x)E)))$ 、 $(A_x(B_x(C_x(D_x E))))$

(二)本題  $n = 5$  且  $P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$  分別為 8, 4, 10, 3, 20, 4, 動態規劃演算法

就是在求  $m[i, j] = \begin{cases} \min_{i \leq k < j} \{m[i, k] + m[k+1, j] + p_{i-1} p_k p_j\}, & \text{if } i < j \\ 0, & \text{if } i \geq j \end{cases}$  , 因此

$$m[1, 2] = 8 * 4 * 10 = 320$$

$$m[2, 3] = 4 * 10 * 3 = 120$$

$$m[3, 4] = 10 * 3 * 20 = 600$$

$$m[4, 5] = 3 * 20 * 4 = 240$$

$$m[1, 3] = \min(m[1, 2] + 8 * 10 * 3, m[2, 3] + 8 * 4 * 3) = \min(320 + 240, 120 + 96) = 216$$

$$m[2, 4] = \min(m[2, 3] + 4 * 3 * 20, m[3, 4] + 4 * 10 * 20) = \min(120 + 240, 600 + 800) = 360$$

$$m[3, 5] = \min(m[3, 4] + 10 * 20 * 4, m[4, 5] + 10 * 3 * 4) = \min(240 + 800, 240 + 120) = 360$$

$$m[1, 4] = \min(m[1, 3] + 8 * 3 * 20, m[2, 4] + 8 * 4 * 20, m[1, 2] + m[3, 4] + 8 * 10 * 20) = \min(216 + 240, 360 + 640, 600 + 1600) = 456$$

$$m[2, 5] = \min(m[2, 4] + 4 * 20 * 4, m[3, 5] + 4 * 10 * 4, m[2, 3] + m[4, 5] + 4 * 3 * 4) = \min(360 + 320, 360 + 160, 120 + 240 + 48) = 408$$

$$m[1, 5] = \min(m[1, 4] + 8 * 20 * 4, m[2, 5] + 8 * 4 * 4, m[1, 2] + m[3, 5] + 8 * 10 * 4, m[1, 3] + m[4, 5] + 8 * 3 * 4) =$$

$$\min(456 + 640, 408 + 128, 320 + 360 + 320, 216 + 240 + 96) = 536, \text{ 最少的乘法數量發生在}$$

$(A_x(((B_x C_x)(D_x E)))) \rightarrow$  先做  $B_x C_x(m[2, 3])$  與  $D_x E(m[4, 5])$ , 將結果相乘  $(4 * 3 * 4)$ , 最後再與  $A$  相乘  $(8 * 4 * 4)$

(三)此時乘法數量為 536

二、假設收銀機內銅板的集合  $S = \{\$50, \$20, \$20, \$15, \$10, \$2, \$1, \$1, \$1\}$ , 而預計找錢給顧客的金額  $W = \$75$

(一)設計一個 Greedy(貪婪)的演算法, 來解決錢給顧客的問題, 使得找給顧客金額  $W$  所使用的銅板數量最少, 並依此 Greedy 的演算法列出找給顧客金額 \$75 的過程(15 分)

(二)此 Greedy 演算法適合使用何種資料結構來完成。(5 分)

(三)此 Greedy 演算法的解法是否能保證為最佳解?請舉例說明。(5 分)

【解題關鍵】

《考題難易》：★

《破題關鍵》：本題為演算法基本概念題, 掌握貪婪演算法概念再做熟考古題(本題 106 關務有類似題)即可得到解答。

《命中特區》：講義 P40 完全命中。

【擬答】

(一)貪婪演算法是指在對問題求解時, 總是做出在當前看來是最好的選擇。也就是說, 不從整體最優上加以考慮, 他所做出的的時在某種意義上的局部最優解。以本題而言, 可以採用先選面額最大的, 如果無法選再選面額較小的, 因此找給顧客金額 \$75 的過程如下:

1. 先選 \$50, 尚餘  $75 - 50 = 25$

2. 再選 \$20, 尚餘  $25 - 20 = 5$

3. 再選 \$2, 尚餘  $5 - 2 = 3$

4. 再選 \$1, 尚餘  $3 - 1 = 2$

5. 再選 \$1, 尚餘  $2 - 1 = 1$

6. 再選 \$1, 尚餘  $1 - 1 = 0$



共需 6 個銅板。

(二)由於本題需要將銅板排序，然後由大到小取用，因此可用佇列(Queue)資料結構。



## 為你專屬設計的學習模式， 讓你靈活學習、輕鬆準備！

我們都在 **志光學儒保成** 成功找到工科人的工頂人生

### 多元學習模式



**面授學習**

**直接，有效**

- 實際面對面教學，現場解決您的疑惑。
- 優質專業名師，幫您統整、分析考試重點資訊。
- 定期的大小測驗，您可隨時檢視學習效果。



**雲端函授**

**自主，彈性**

- 不用煩惱通勤問題，課程教材直接送到家。
- 反覆聽課，不怕觀念聽不懂。
- 完全自由，可自主安排學習進度。



**視訊學習**

**便利，專注**

- 安靜舒適的上課環境，提高您的專注力。
- 看課時間能自由預約，無須擔心時間衝突。
- 可依需求暫停、倒轉或快轉，深度學習超簡單。



**專業名師指導，提升解題順暢度！**

本以為適合閒蕩，但發現穩定的生活才是我想要的。老師的教材都有明確分析與統整，再加上會由老師出申論題讓考生做練習，增加寫題目的敏感及順暢度。考前還有總複習課程，精準預測範圍、統整考前重點。

**全國探花 李○庭 109年鐵路員級機械工程**



**選對好老師，中年轉職好順利！**

我遭遇公司裁員，覺得公職夠穩定，決定踏上國考之路。隔了20幾年重拾書本，選擇好的補習班讓我事半功倍。熱力學老師跟流體力學老師，我非常推崇，只要照著老師講的記下來、寫下來，這樣就夠了。

**1年考取 古○芳 109年高考機械工程**



**題庫班老師的講解，對我幫助很大！**

畢業後工作，累的要死薪水卻不怎麼樣。剛好朋友推薦鐵路特考，就挑戰看看。我覺得機械原理的題庫班對我幫助很大，跟著老師一起解，不懂的地方聽老師講解，覺得聽完很多疑問就會解開並且對我幫助很大。

**優秀考取 謝○軒 109年鐵路佐級機械工程**

(三) Greedy 演算法的解法無法保證為最佳解，例如以本題而言，如果依次選\$50，\$15，\$10，只需要 3 個銅板，明顯比 greedy 演算法所得結果好。

本題貪婪演算法如下

#定義零錢種類

moneycount=[50，20，20，15，10，2，1，1，1]

def getMax(x):

m=[]

while True:

for i in moneycount:

if i<=x:

x-=i

m.append(i)

break

if x<1:

break

return m

a=getMax(75)

print(a)

三、二元搜尋法(binary search)使用 divide-and-conquer(分而治之)演算法技巧，對一個已排序的(sorted)且長度為 n 的陣列 A[0:n-1]，以二元化方式進行資料值 x 的搜尋，其最差時間複雜度

(worst time complexity)可降到  $\Theta(\log n)$

(一)請使用 C++ 或 Python 語言，修改此二元搜尋法，使其能對未排序的(unsorted)且長度為  $n$  的陣列  $A[0:n-1]$ ，進行三元化搜尋，即以 divide-and-conquer 技巧將此陣列切成三個子陣列，並在可能包含資料值  $x$  的子陣列繼續進行 divide-and-conquer 搜尋，如果找到則回傳 1，如果找不到則回傳 0。(17 分)(注意:請寫一 searching 類別，內含一個 search 功能)

(二)請分析修改後的三元法其最差時間複雜度(worst case time complexity)以 order 的方式表示。(8 分)(注意:不可將此陣列數值進行排序，請加註解說明程式碼作法。)

【解題關鍵】

《考題難易》：★★★★

《破題關鍵》：本題為搜尋進階變化題，掌握二分搜尋觀念搭配做熟考古題(本題 106 關務類似題)靈活運用即可得到解答。

《命中特區》：106 高考類似題

【擬答】

(一)

class searching:

def search(A, start, stop, target):

if(stop==start+1): #如果只剩 2 筆資料無法切割 3 塊

if(A[start]==target) return 1 #如 A[start]為找尋對象則回傳 1

elif(A[stop]==target) return 1 #如 A[stop]為找尋對象則回傳 1

else return 0 #否則回傳 0

else :

mid1 = start + (stop - start) / 3;

mid2 = stop - (stop - start) / 3;

#Check if key is present at any mid 則回傳 1

if (A[mid1] == target) :

return 1

elif (A[mid2] == target) :

return 1

x = search(A, start, mid1, target); #對第一分塊進行搜尋

if (x == 0): #如果沒有找到

x = search(A, mid1+1, mid2, target); #對第二分塊進行搜尋

if(x==0): #如果沒有找到

x = search(A, mid2+1, stop, target); #對第三分塊進行搜尋

else return 1 #如果有找到則回傳 1

else return x #如果有找到則回傳 1

(二)這是一個遞迴的對未排序陣列進行三分搜尋的演算法，由於此演算法會將  $A$  切成三塊分別搜尋，直到只剩 2 個元素無法切割成 3 塊，接著循序搜尋這 2 個元素，因此實際上是對所有陣列中的數各處理 1 次，因此不管最好最差，時間複雜度均為  $O(n)$ 。

四、(一)請使用 C 語言寫一副程式 void FindMeanAverage(int A[], int n, int \* mean, int \* average)，對一個未排序的(unsorted)長度為  $n$  的陣列  $A[0:n-1]$ ，尋找陣列中的中位數與平均數，並分別存入 mean 及 average 運算複雜度。(17 分)

(二)請舉例說明此副程式最差情況(worst case)所花費的運算複雜度(8 分)(注意:請加註解說明程式碼作法。)

【解題關鍵】

《考題難易》：★

《破題關鍵》：本題為演算法基本題，掌握中位數與平均數基本概念即可輕鬆得到解答。

《命中特區》：本題為程式設計基本題

【擬答】



志光學儒保成 工科人專屬學習規劃

精心安排完整豐富的上榜課程

工科考試所需要的資源，我們通通幫你準備好了

- 法科架構班**：學校沒教的，我們教給你！名師精解法科知識，結合實務例子，助你建構法科概念。
- 主題題庫班**：主題式教學，搭配各類試題演練，進行考點分析及破題要點訓練，讓您短時間各科實力倍增。
- 考前提要關懷講座**：名師考前最終提點，穩定你累積許久的實力，讓你的觀念更加清晰。
- 扎實正規班**：完整堂數規劃，循序漸進學習，讓您深度修習工科各專業學科知識。
- 作文實戰班**：作文再也不是理工人的痛！透過專業老師的輔導，快速強化您的寫作架構、邏輯概念。
- 精華總複習**：考前重點總複習，精準掌握重要考點，讓您考前實力突飛猛進。
- 工科全科班**：公職+國營完善循環課程規劃，All in One課程一次到位，奠定穩固基礎、強化上榜實力。
- 全國全真模擬考**：檢視應考實力、訓練臨場反應、掌握最新考題趨勢，全程比照考試時程，模擬考場實戰氛圍，讓您能以平常心應考！

109普考 電子工程 曾○維 一年考取

我是工科人，我工頂啦！

由於考試的題目非常靈活，參加題庫班，除了勤做考古題外，大量實作解說，很快速地強化我的考前記憶，每做一道題目馬上能判斷是在哪一章節，然後再進行解題。

■完整課程資訊詳洽全國志光·學儒·保成門市■

(一)

```
double FindMeanAverage(int A[], int n, int * mean, int * average){
    int sum = 0;
    for (int i = 0; i < n; i++)
        sum += A[i];
    *average = (double)sum / (double)n;
    // First we sort the array
    sort(A, A + n);
    // check for even case
    if (n % 2 != 0)
        *mean = (double)A[n / 2];
    else
        *mean = (double)(A[(n - 1) / 2] + A[n / 2]) / 2.0;
```

(二) 此副程式最差情況就是資料反向排序且有，則此時排序演算法若選快速排序則需  $O(n^2)$ ，FindMeanAverage 整體時間複雜度需  $O(n^2)$ 。