Métodos Numéricos

http://www.famaf.unc.edu.ar/~serra/metodos_numericos.html

Guía 2

Abril de 2015

Problema 1: Interprete el resultado del siguiente programa en virtud de la representación de punto flotante de los números reales.

```
program test_igualdad
implicit none
integer, parameter :: dp=kind(1.d0)
if (19.08_dp + 2.01_dp == 21.09_dp) then
   write(*,*) '19.08 + 2.01 = 21.09 '
else
   write(*,*) '19.08 + 2.01 /= 21.09 '
endif
end program test_igualdad
```

Problema 2: Implementar un programa Fortran para evaluar la suma (en precisión simple)

$$\sum_{n=1}^{10\,000\,000} \frac{1}{n}$$

primero, en el orden usual, y luego, en el orden opuesto. Explique las diferencias obtenidas e indique cuál es más preciso.

Problema 3: Efectúe con un programa en Fortran en simple precisión los siguientes cálculos, matemáticamente equivalentes,

a) $1\,000\,000 \cdot 0.1$

b) $\sum_{n=1}^{1\,000\,000} 0.1$

c) $\sum_{m=1}^{1\,000} \left(\sum_{n=1}^{1\,000} 0.1 \right)$

Explique las diferencias obtenidas y muestre que el error relativo en b) es del orden del 1%, pero es mucho menor en c).

Problema 4: La fórmula cuadrática nos dice que las raíces de $ax^2 + bx + c = 0$ son

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Si $b^2 \gg 4ac$, entonces, cuando $b > 0$ el cálculo de x_1 involucra en el numerador la sustracción de dos números casi iguales, mientras que si $b < 0$, esta situación ocurre para el cálculo de x_2. "Racionalizando el numerador" se obtienen las siguientes fórmulas alternativas que no sufren este problema:

$$x_1 = \frac{-2c}{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}, \qquad x_2 = \frac{2c}{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}.$$

siendo la primera adecuada cuando $b > 0$, y la segunda cuando $b < 0$. Escriba un programa en precisión simple que utilice la fórmula usual y la "racionalizada" para calcular las raíces de

$$x^2 + 6210x + 1 = 0.$$

Interprete los resultados.

Problema 5: Considere las siguientes integrales

$$y_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+10} dx$$

para $n = 1, 2, \ldots, 30$. Muestre que

$$y_n = \frac{1}{n} - 10 y_{n-1} \ ,$$

y que $y_0 = \ln(11) - \ln(10)$. Note que empleando esta fórmula de recursión, se obtienen los resultados exactos de las integrales.

a) Escriba un programa en precisión simple que a partir de y_0, calcule recursivamente y_i para $i = 2, \cdots, 30$. Explique los resultados obtenidos (note que $0 < y_n < 1$).

b) Derive una fórmula para evaluar y_{n-1} dado y_n. Escriba un programa que utilice esta recursión para calcular y_n, aproximando y_{n+k} por 0. Explique por qué este algoritmo es estable. Encuentre el valor de k, para que el programa calcule y_7 con un error absoluto menor a 10^{-6} (note que $y_7 \approx 0.0114806$).

c) Modifique el programa para que tome como entrada n, y el error absoluto deseado, ϵ, y luego estimando el error absoluto en el calculo de y_n como $Err = |\hat{y}_n(y_{n+k} = 0) - \hat{y}_n(y_{n+k-1} = 0)|$ ($\hat{y}_n(y_{n+k} = 0)$ es el valor de y_n obtenido partiendo de $y_{n+k} = 0$)), determine y_n con un error absoluto (aproximado) menor que ϵ.

Problema 6: *Problema matemáticamente inestable.* Considere la suceción

$$x_n = \frac{13}{3} x_{n-1} - \frac{4}{3} x_{n-2} \, . \tag{1}$$

a) Demuestre que, eligiendo $x_0 = 1 \ , x_1 = 1/3$ tenemos que $x_n = 1/3^n \ \forall n \geq 0$ (sugerencia: use inducción).

b) Haga un código fortran que calcule x_n y su error relativo hasta $n = 15$ y discuta el resultado comparando reales de 4 y 8 bytes.

c) Defina $y_n = 1/x_n$ y encuentre la relación de recurrencia para y_n. Imponga la condición inicial $y_0 = 1, \ y_1 = 3$. Calcule ahora $x_n = 1/y_n$ y compare con lo obtenido en el punto anterior. Es este algoritmo estable? discuta.

d) Demuestre que la solución general de la ecuación (1) con x_0, x_1 arbitrarios es

$$x_n = \frac{A}{3^n} + B \, 4^n \, ,$$

Discuta en base a esto los resultados numéricos obtenidos.

Problema 7: Desarrolle un programa para encontrar la raíz de una función f utilizando el método de la bisección, dando como datos de entrada el intervalo inicial $[a, b]$ y la tolerancia ε. f debe definirse como una función dentro del programa. La salida debe ser

- la aproximación final x_N

- el valor de $f(x_N)$.

Problema 8: Utilice el programa del ejercicio anterior para

a) encontrar la menor solución positiva de la ecuación $2x = \tan(x)$ con un error menor a 10^{-5}. Cuántos pasos son necesarios si se comienza con el intervalo $[0.8, 1.4]$?

b) encontrar una aproximación a $\sqrt{3}$ con un error menor a 10^{-5}. Note que $\sqrt{3}$ es la raíz positiva de la ecuación $f(x) = x^2 - 3$.

Problema 9: Desarrolle un programa para encontrar la raíz de una función f utilizando el método de Newton–Raphson, dando como datos de entrada una estimación inicial x_0, la tolerancia `tol` y un número máximo de iteraciones `MAX_ITE`. El programa debe finalizar cuando se satisfaga una de las siguientes condiciones:

$$\frac{|x_N - x_{N-1}|}{|x_N|} < \varepsilon, \qquad |f(x_N)| < \varepsilon, \qquad \text{Número de iteraciones} = \texttt{MAX\_ITE}$$

El programa debe retornar el número de iteraciones realizadas, el valor final de la aproximación x_N, el error relativo, y el valor de $|f(x_N)|$. f y f' deben ser funciones del programa.
Utilice este programa para resolver los incisos a) y b) del problema 7. Compare la cantidad de evaluaciones de la función y su derivada en los dos métodos.

Problema 10: Grafique el error relativo de la aproximación k-ésima de $\sqrt{3}$ en función de k, empleando el método de bisección y el de Newton–Raphson. Escriba los programas en doble precisión, y fije una tolerancia de 10^{-10} como criterio de detención. Compare los resultados en un único gráfico en escala *log – log*.

Problema 11: Adapte el programa de Newton–Raphson para calcular una aproximación a la raíz cúbica de un número R positivo. La entrada debe ser el número R, la aproximación inicial x_0 y el error máximo permitido ε.

Problema 12: Dado el siguiente polinomio

$$p(x) = -10 + 5x - 12x^2 + 6x^3 - 2x^4 + x^5 \ ,$$

y sabiendo que posee una única raíz real positiva, encuentre la misma utilizando:

a) El método de bisección. Elija los valores iniciales utilizando los teoremas que acotan la region del espacio complejo donde se hallan las raíces. Evalúe el polinomio en una subrutina y utilice el algoritmo de Horner.

b) El método de Newton-Raphson. Elija el valor inicial utilizando los teoremas que acotan la region del espacio complejo donde se hallan las raíces. Evalúe el polinomio y su derivada en una subrutina utilizando el algoritmo de Horner.

Problema 13: Un objeto en caida vertical en el aire está sujeto a la fuerza de gravedad y a la resistencia del aire. Si un objeto de masa m es dejado caer desde una altura h_0, su altura luego de t segundos está dada por:

$$h(t) = h_0 - \frac{mg}{k}t + \frac{m^2 g}{k^2}\left(1 - e^{-kt/m}\right)$$

donde $g = 9.8\,m/s^2$ y k representa el coeficiente de resistencia del aire en $kg{\cdot}s/m$. Suponga que $h_0 = 10m$, $m = 0.1\,kg$, y $k = 0.149\,kg\,s/m$. Encuentre, con una preción de $0.01\,s$, el tiempo que le toma a este objeto llegar al suelo. Utilice el método de bisección y el de Newton–Raphson.

Ejercicios Complementarios

Problema 14: Aplicar algoritmo de Newton-Raphson generalizado al siguiente sistema de ecuaciones no lineales:

$$\begin{aligned} 2x + \cos(y) &= 0 \\ 2y + \sin(x) &= 0 \end{aligned}$$

Grafique primero las funciones, y encuentre la solución gráficamente. Implemente un programa para resolver este sistema que tome como valor incial el par $(0, 0)$, y escriba los valores sucesivos de los pares (x_k, y_k) obtenidos en la iteración k y la estimación del error absoluto, definido commo $||\mathbf{e}_k||_\infty = ||\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}||_\infty \equiv \texttt{max}(|x_k - x_{k-1}|, |y_k - y_{k-1}|)$. El programa debe detenerse cuando $||\mathbf{e}_k||_\infty < 10^{-6}$.