

Movimiento planetario: Simulación con Runge-Kutta de cuarto orden

Gastón Valvassori

15 de Junio de 2015

Facultad de Matemática, Astronomía y Física - Universidad Nacional de Córdoba

Resumen

Se presenta la simulación del movimiento planetario utilizando el método de Runge-Kutta de cuarto orden (*RK4*) en Fortran90. Se comprueban las tres leyes de Kepler, se emplea un método de disparo para encontrar velocidades iniciales de los planeta y se simula el problema de tres cuerpos Tierra-Júpiter-Sol.

1 Introducción

Con el fin de resolver el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (*ODE*) de primer orden con condiciones iniciales referente al movimiento planetario, se utiliza el método de Runge-Kutta de cuarto orden.

Se presenta un breve resumen de la teoría necesaria para reproducir este problema.

1.1 Enfoque teórico

Runge-Kutta de orden cuatro Para resolver el sistema

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{X}) \\ \mathbf{X}(\mathbf{a}) = \mathbf{S} \text{ dado} \end{cases} \quad (1)$$

donde $\dot{\mathbf{X}} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n)$, $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\mathbf{F}(t, \mathbf{X}) = (f_1(t, \mathbf{X}), f_2(t, \mathbf{X}), \dots, f_n(t, \mathbf{X}))$ y $\mathbf{X}(\mathbf{a})$ son las condiciones iniciales del problema, se hace

$$\mathbf{X}(t+h) = \mathbf{X}(t) + \frac{h}{6} (\mathbf{K}_1 + 2\mathbf{K}_2 + 2\mathbf{K}_3 + \mathbf{K}_4) \quad (2)$$

donde

$$\begin{cases} \mathbf{K}_1 = \mathbf{F}(t, \mathbf{X}) \\ \mathbf{K}_2 = \mathbf{F}\left(t + \frac{1}{2}h, \mathbf{X} + \frac{1}{2}h\mathbf{K}_1\right) \\ \mathbf{K}_3 = \mathbf{F}\left(t + \frac{1}{2}h, \mathbf{X} + \frac{1}{2}h\mathbf{K}_2\right) \\ \mathbf{K}_4 = \mathbf{F}(t + h, \mathbf{X} + h\mathbf{K}_3) \end{cases}$$

con h el paso.

Luego para resolver el sistema con condiciones de borde se aplica el **método de disparo** que consta en aplicar $RK4$ más un método de hallar raíces.

Método de la secante Este es una imitación del método de Newton con algunas modificaciones. Recordemos que las iteraciones de Newton definen x_{n+1} en términos de x_n mediante la fórmula

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (3)$$

En el método de la secante, reemplazamos $f'(x_n)$ por una aproximación que es fácil de computar. Dado que la derivada esta definida por

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

podemos decir que para un h suficientemente chico

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

En particular, si $x = x_n$ y $h = x_{n-1} - x_n$ tenemos que

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_{n-1}) - f(x_n)}{x_{n-1} - x_n} \quad (4)$$

Usando esto en (3) obtenemos el **método de la secante**

$$x_{n+1} = x_n - \left(\frac{x_{n-1} - x_n}{f(x_{n-1}) - f(x_n)} \right) f(x_n) \quad (5)$$

El nombre del método proviene de que el miembro derecho de la ecuación (4) es la pendiente de la recta secante del gráfico de f .

Movimiento de dos cuerpos La fuerza de atracción entre dos cuerpos de masas M y m , que gobierna el movimiento planetario, viene dada por

$$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^2} \mathbf{e}_{12} \quad (6)$$

donde \mathbf{e}_{12} es el vector unitario en la dirección de $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ y $G = 6.6742 \times 10^{-11} Nm^2 kg^{-2}$.

Dado que los planetas del sistema solar se mueven, aproximadamente, en el mismo plano, las simulaciones en dos dimensiones serán suficientes.

Estudiaremos el caso de un planeta que orbita alrededor del Sol, cuya masa es $M \gg m$. Es pertinente, entonces, resolver el sistema de *ODE* resultantes de la ecuación (6). Asumiendo que el Sol está en reposo en el origen, se obtienen las siguientes ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v_x \\ \frac{dv_x}{dt} = -\frac{GMx}{(x^2+y^2)^{3/2}} \\ \frac{dy}{dt} = v_y \\ \frac{dv_y}{dt} = -\frac{GMy}{(x^2+y^2)^{3/2}} \end{cases} \quad (7)$$

donde $\mathbf{r} = (x, y)$ y $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$, son los vectores de posición y velocidad del planeta, respectivamente.

Cambio de unidades Para evitar que la computadora trabaje con números excesivamente grandes se realiza un cambio de unidades desde *MKS* a *unidades astronómicas*. A saber, en el nuevo sistema de unidades tenemos que la longitud es $1 \text{ au} = 149597870700 \text{ m}$, la masa es $1 M_S = 1.9891 \times 10^{30} \text{ kg}$, y el tiempo es $1 d = 86400 \text{ s}$.

Luego se escribe la constante G en estas nuevas unidades resultando $G = 2.96 \times 10^{-4} \text{ au}^3 d^{-2} M_S^{-1}$.

2 Simulaciones

Para simplificar la escritura de los programas numéricos redefinimos las componentes de los vectores \mathbf{r} y \mathbf{v} como

$$\mathbf{r} = (x_1, x_3) \text{ y } \mathbf{v} = (x_2, x_4)$$

de manera tal que el sistema (7) queda representado por

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -\frac{GMx_1}{(x_1^2+x_3^2)^{3/2}} \\ \frac{dx_3}{dt} = x_4 \\ \frac{dx_4}{dt} = -\frac{GMx_3}{(x_1^2+x_3^2)^{3/2}} \end{cases} \quad (8)$$

Órbita de la tierra Para simular la órbita terrestre se tienen las siguientes condiciones iniciales

$$\begin{cases} x_1(0) = 0.98329134 \text{ au} \\ x_2(0) = 0 \\ x_3(0) = 0 \\ x_4(0) = 0.01749578 \text{ au} \cdot d^{-1} \end{cases} \quad (9)$$

Vale aclarar que la condición sobre x_1 representa la distancia más cercana al Sol, es decir, el perihelio. En nuestro nuevo sistema de unidades, la masa de la tierra es $M_T = 3.0016 \times 10^{-6} M_S$.

Solo resta resolver el sistema (8) con las condiciones iniciales (9) utilizando *RK4*. Para tal propósito se ejecuta el programa ubicado en el directorio */mov_plane/inciso-a/* haciendo uso del *module rk4.f90* que contiene la subrutina que calcula *RK4* ubicada en */mov_plane/*. Es decir, al momento de compilar y ejecutar, se debe hacer como

```
mov_plane/inciso-a$ gfortran ../rk4.f90 -o 2cuerpos.x 2cuerpos.f90
```

```
mov_plane/inciso-a$ ./2cuerpos.x
```

El programa *2cuerpos.f90* da como salida un archivo donde se graban el tiempo, las coordenadas x e y , las velocidades sobre cada coordenada, las energías cinética y potencial, y la energía mecánica.

Con los datos obtenidos se observan las siguientes gráficas

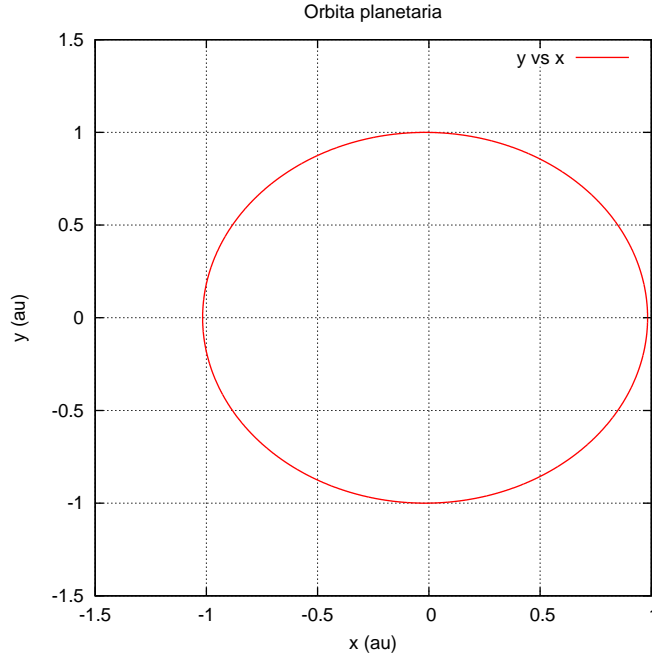


Figura 1: Órbita de la tierra.

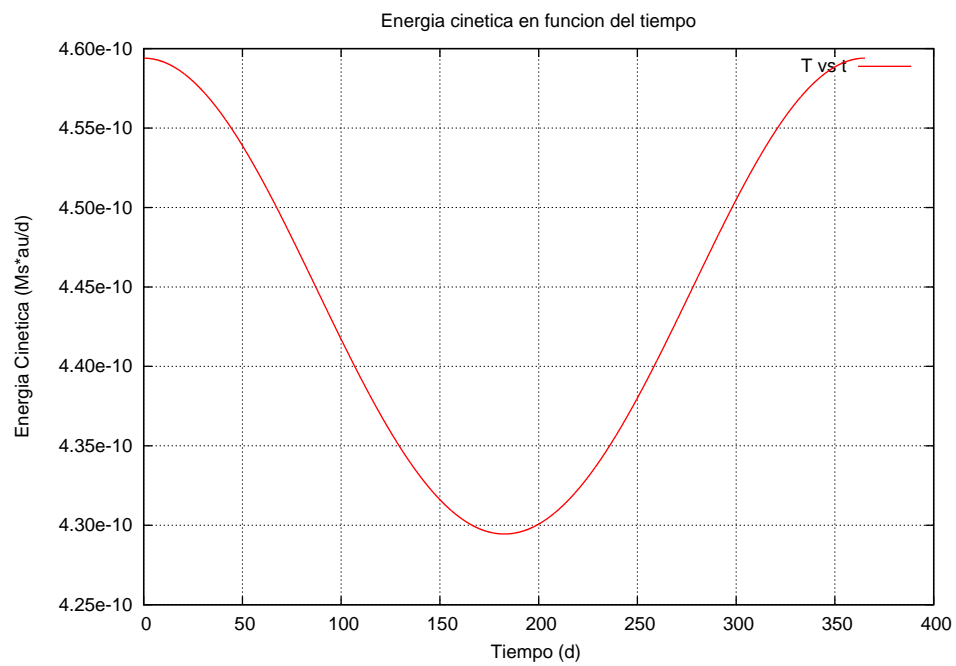


Figura 2: Energía cinética vs tiempo.

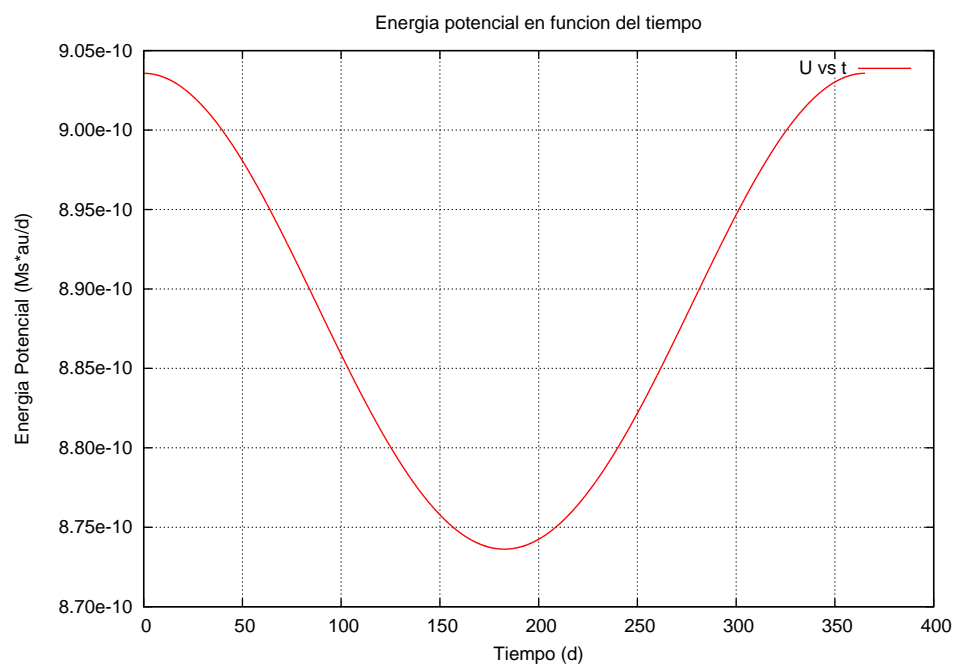


Figura 3: Energía potencial vs tiempo.

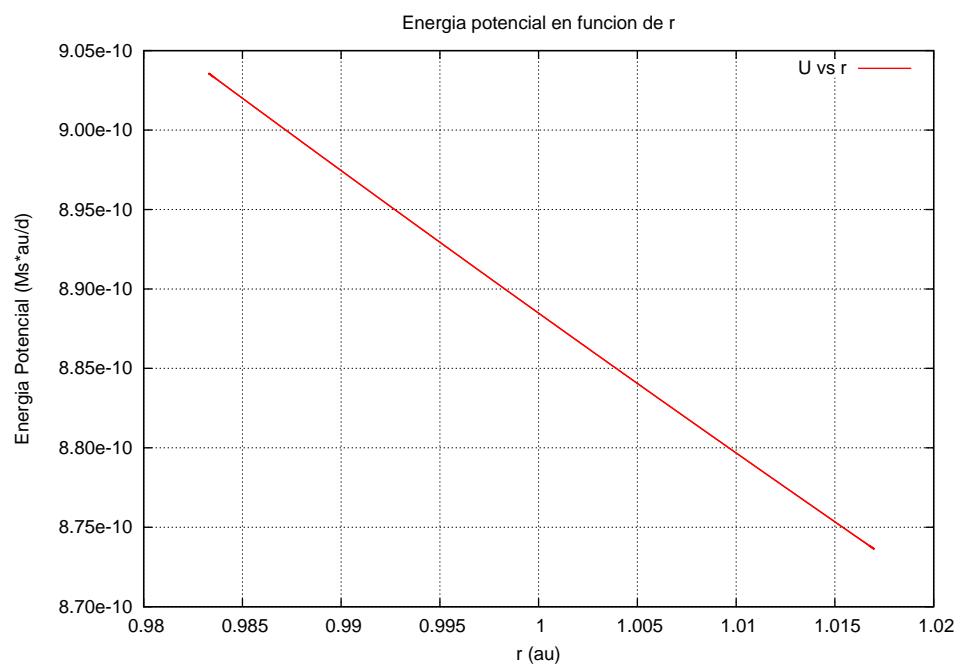


Figura 4: Energía potencial vs r.

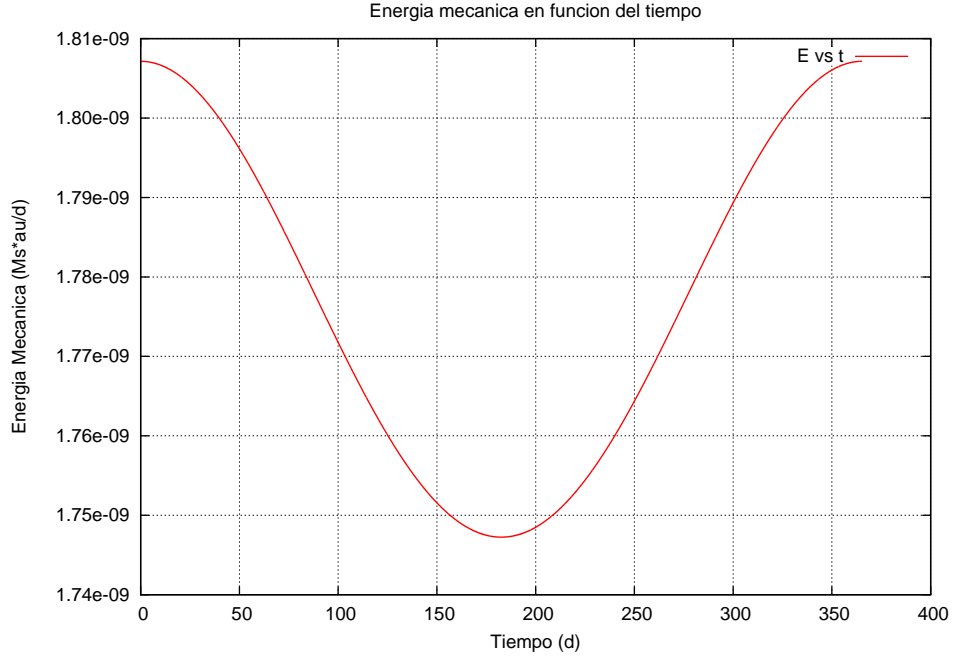


Figura 5: Energía mecánica vs tiempo.

Afortunadamente se observa lo esperado, una órbita elíptica en la *figura 1*, y las correspondientes energías en función del tiempo. En la *figura 4* se observa la energía potencial como función del módulo del vector posición \mathbf{r} , cuyo comportamiento lineal se debe a que la energía potencial es proporcional a $1/r$ y se grafica U vs $1/r$.

Sobre el paso h Para simular la órbita de la Tierra se utilizó un paso $h = 10^{-1}$. Veamos que esa elección es óptima, se utiliza el programa ubicado en */mov_plane/inciso.b/* llamado *h_optimo.f90*.

Para determinar el h óptimo se fue variando a éste desde 10^2 hasta 10^{-5} observando el cambio de energía en la órbita terrestre

$$\Delta E = |E(T) - E(0)| \quad (10)$$

donde T corresponde al valor del período temporal terrestre ($T = 365.256$ d). Con los datos obtenidos y graficando en escala *log-log* observa el siguiente comportamiento de ΔE vs h

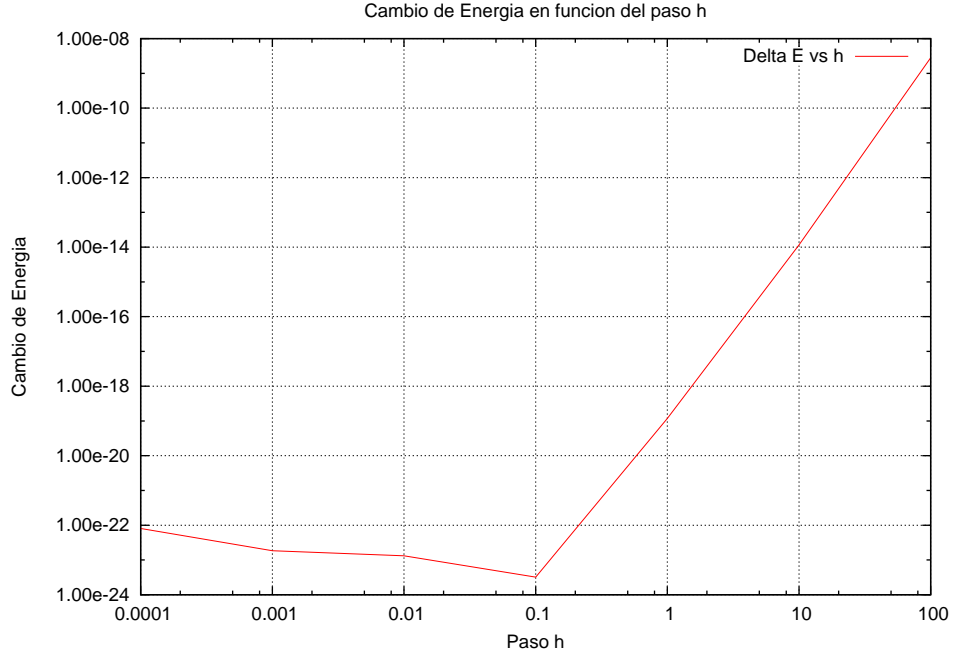


Figura 6: ΔE vs h .

Se puede ver a simple vista que el h óptimo es el previamente mencionado, y vale notar que desde $h = 10^{-1}$ hacia h más pequeños aparece el error de redondeo, mientras que para valores más grandes, aparece el error del algoritmo.

Afelio y perihelio de la órbita terrestre Para calcular las distancias máxima y mínima de la Tierra al Sol, conocidas como afelio y perihelio, respectivamente, se utiliza el programa ubicado en `/mov_plane/inciso_c/` llamado `afepери-if.f90`. Nuevamente, dicho programa, utiliza el `module rk4.f90` por lo que se debe compilar y ejecutar de la manera ya conocida.

Al ejecutar este programa encontramos que el afelio se encuentra a una distancia $r_a = 1.01699732 \text{ ua}$ con coordenadas $(x, y) = (0.98329032, -0.00143108) \text{ ua}$. El perihelio está a una distancia $r_p = 0.98329134 \text{ ua}$ cuyas coordenadas son $(x, y) = (0.98329032, -0.00143108) \text{ ua}$.

Comparando con valores de tabla se pueden ver los errores relativos porcentuales son $e_p \sim 0\%$ y $e_a \sim 0.03\%$.

Método de disparo: buscando velocidades iniciales de distintos planetas Como se discutió en la introducción de este trabajo, queremos resolver un sistema de *ODE* de primer grado con condiciones de frontera, para tal caso aplicamos el llamado *método de disparo*. Este consta en resolver el sistema con condiciones iniciales aplicando una estimación inicial de la velocidad inicial sobre el eje y , y luego aplicar algún método para hallar raíces. En nuestro caso el método usado fue el método de la secante. Puesto que estamos trabajando en dos dimensiones y el método de la secante es para funciones de una dimensión, se calcula el ángulo que barre el vector \mathbf{r} en función del tiempo, $\theta(t)$, y se aplica *disparo* sobre dicha función unidimensional.

La condición de frontera es $\mathbf{r}(T) = \mathbf{r}(0)$ y, suponemos que, en $t = 0$ el planeta se halla en el perihelio y que este coincide con el eje x . A fin de comprobar nuestro programa numérico, se opta por determinar la velocidad sobre el eje y de Mercurio, Júpiter y Tierra. La elección de éste último es para poder comprobar con los valores dados previamente para resolver el sistema (8).

El programa numérico a usar es el mismo para los tres planetas, teniendo en cuenta que se deben cambiar algunos valores especificados dentro del mismo código. Por cuestiones de orden los programas se encuentra en `/mov_plane/inciso_d/` dentro de las carpetas con los nombres de cada planeta, con nombre `2cshooting_kin.f90`. Nuevamente, se compila utilizando `rk4.f90` de la manera previamente informada.

Las condiciones iniciales sobre la velocidad en la componente y fueron

Planeta	$z_1(ua \cdot d^{-1})$	$z_2(ua \cdot d^{-1})$
Mercurio	Condicion órbita circular	0.015998
Júpiter	“	0.016824
Tierra	“	0.016998

Tabla 1: Condiciones iniciales para método de disparo.

donde la condición de órbita circular es $E = 0$.

Los valores de las tres velocidades obtenidos fueron

Planeta	$v_y(ua \cdot d^{-1})$
Mercurio	1.82586392E-2
Júpiter	5.408587761E-3
Tierra	-4.62627911E-3

Tabla 2: Velocidades iniciales obtenidas con método de disparo.

Tomando como referencia el valor de tabla de la Tierra, claramente los valores discrepan mucho. Cuando uno ejecuta el programa numérico se ve en pantalla que los errores absolutos entre la posición final e inicial sobre x e y , y la velocidad final e inicial sobre el eje x son del orden de 10^{-4} , 10^{-3} .

Se intentó realizar esta etapa utilizando el método de bisección pero no se logró encontrar buenas condiciones iniciales tales que se pueda aplicar bisección.

Comprobando las Leyes de Kepler Para comprobar las leyes de Kepler se usaron tres planetas, Tierra, Júpiter y Mercurio, teniendo en cuenta que las condiciones iniciales para resolver el sistema de *ODE* es el valor brindado por la *NASA*¹, pues con los valores de la velocidad inicial sobre x obtenidos en el paso anterior, no se cumplen todas las leyes. Respecto a las órbitas cerradas aleatorias, se tomaron condiciones iniciales variando un poco las que se tienen para la Tierra, que se pueden ver en el programa *kepler_general.f90* ubicado en */mov_plane/inciso_e/*.

Primera ley La primera ley se puede comprobar sumando la distancia entre los focos, la distancia desde el primer foco a un punto y la distancia del segundo foco al mismo punto, y observar que esa cantidad se mantiene constante en el tiempo. Lo que se obtuvo fue lo siguiente

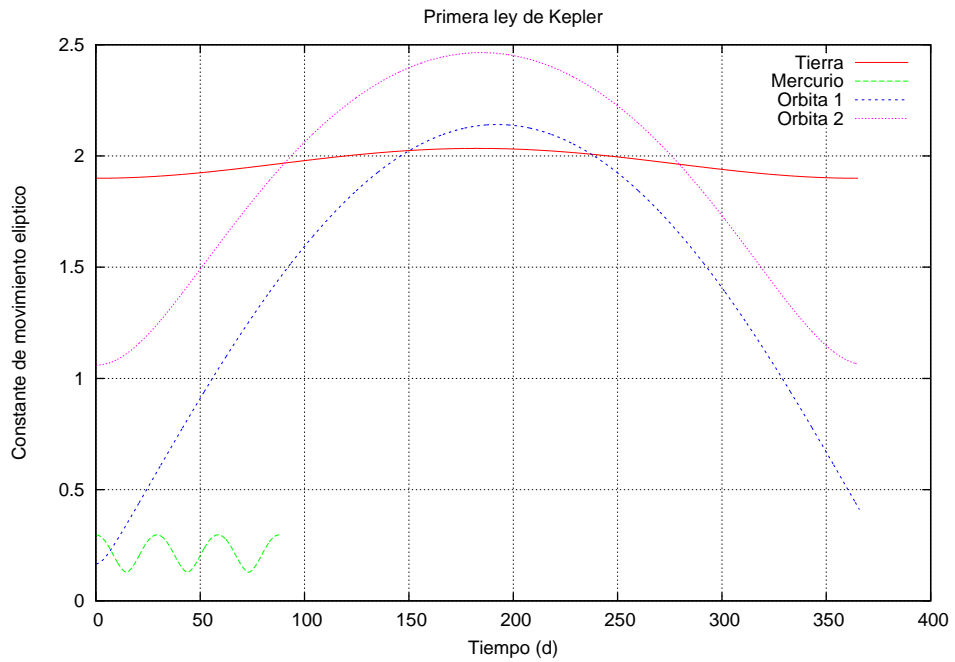


Figura 7: Primera ley de Kepler.

¹Ver apéndice con dichos valores.

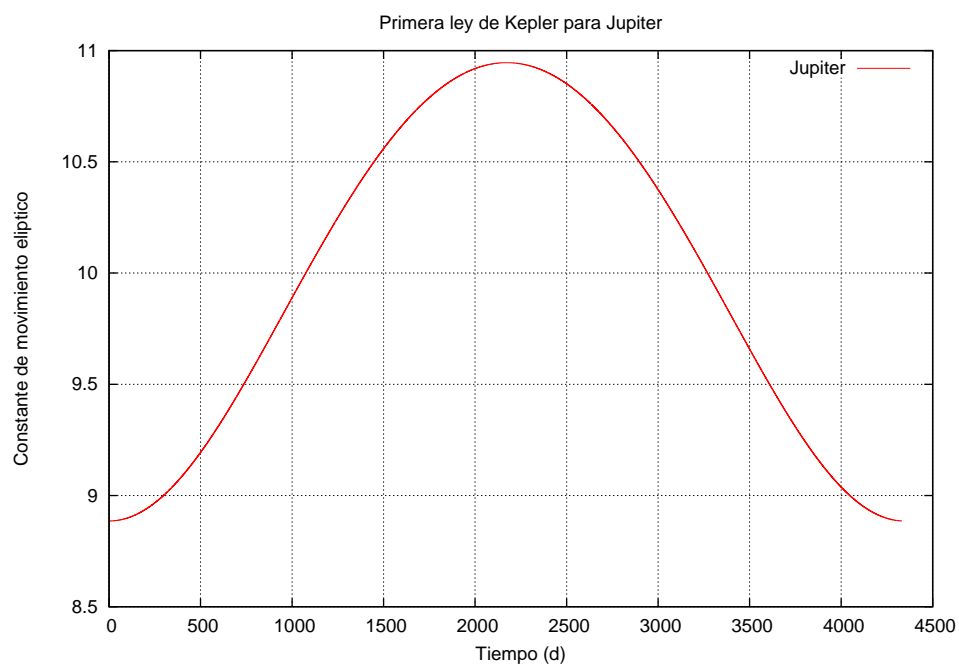


Figura 8: Primera ley de Kepler.

La Tierra es la que mejor satisface esta ley, el resto de los planetas/órbitas tienen un error considerable.

Segunda ley Aquí se debe comprobar que el radio vector que une un planeta y el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales, es decir, debemos ver la constancia del momento angular

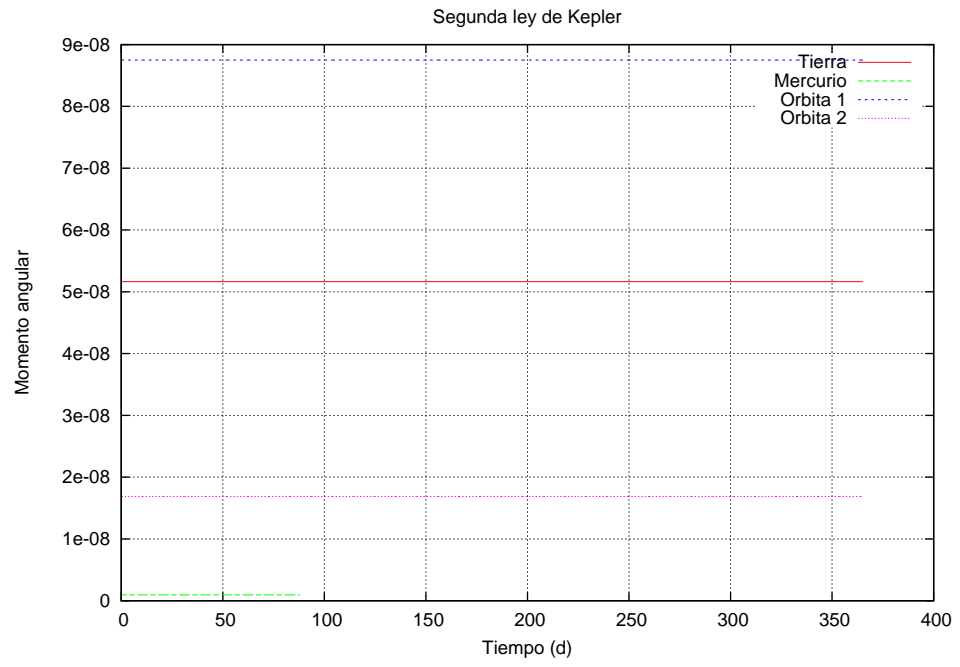


Figura 9: Segunda ley de Kepler.

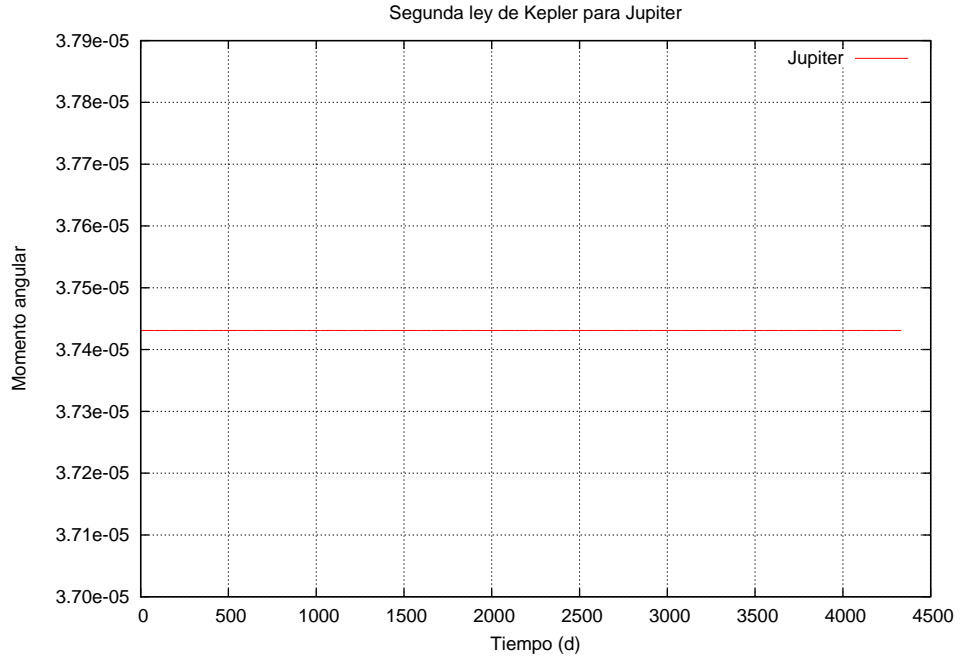


Figura 10: Segunda ley de Kepler.

Esta ley es satisfecha por todos los planetas y órbitas.

Tercera ley Por último debemos comprobar que el período orbital, T , cumple la siguiente relación

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G(M + m)} \approx \frac{4\pi^2 a^3}{GM}$$

donde a es el semieje menor de la órbita, es decir, el perihelio. Los resultados obtenidos luego de las simulaciones fueron

Planeta/Órbita	T^2 de tabla (d^2)	T^2 calculado (d^2)
Tierra	0.1334119E+06	0.1267987E+06
Jupiter	0.1877134E+08	0.1618067E+08
Mercurio	0.7738545E+04	0.3877923E+04
Órbita 1	0.1339560E+06	0.1333730E+06
Órbita 2	0.1334119E+06	0.6409705E+05

Tabla 3: Tercera ley de Kepler.

Evidentemente nuestro programa funciona bien pero, lo que no fue bien electo, fueron las condiciones iniciales para resolver cada órbita. Por tal razón se observan las discrepancias en la Órbita 2 y en Mercurio, mientras que para el resto, la ley se satisface.

Problema de tres cuerpos Consideremos ahora dos planetas atraídos por el Sol (en el origen y no afectado por éstos) y por cada uno de ellos. Se simula el sistema Tierra, Júpiter y Sol, es decir, hay que resolver 8 *ODEs*. Para este caso la fuerza aplicada sobre el planeta Tierra está dada por

$$\mathbf{F} = G \left(-\frac{m_S m_T}{r_{ST}^2} \hat{r}_{ST} + \frac{m_J m_T}{r_{JT}^2} \hat{r}_{JT} \right) \quad (11)$$

donde m_S es la masa del Sol, m_J la masa de Júpiter, m_T masa de la tierra; r_{ST} es la distancia Sol-Tierra y r_{JT} la distancia Júpiter-Tierra. La fuerza que actúa sobre Júpiter es la misma que esta pero donde hay un $+$ hay que poner un $-$, tercera ley de Newton.

Con esta nueva expresión para la fuerza, el sistema de ecuaciones diferenciales a resolver es

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -\frac{Gm_S x_1}{(x_1^2 + x_3^2)^{3/2}} + \frac{Gm_J(x_1 + x_5)}{[(x_1 + x_5)^2 + (x_3 + x_7)^2]^{3/2}} \\ \frac{dx_3}{dt} = x_4 \\ \frac{dx_4}{dt} = -\frac{Gm_S x_3}{(x_1^2 + x_3^2)^{3/2}} + \frac{Gm_J(x_3 + x_7)}{[(x_1 + x_5)^2 + (x_3 + x_7)^2]^{3/2}} \\ \frac{dx_5}{dt} = x_6 \\ \frac{dx_6}{dt} = -\frac{Gm_S x_1}{(x_1^2 + x_3^2)^{3/2}} - \frac{Gm_J(x_1 + x_5)}{[(x_1 + x_5)^2 + (x_3 + x_7)^2]^{3/2}} \\ \frac{dx_7}{dt} = x_8 \\ \frac{dx_8}{dt} = -\frac{Gm_S x_3}{(x_1^2 + x_3^2)^{3/2}} - \frac{Gm_J(x_3 + x_7)}{[(x_1 + x_5)^2 + (x_3 + x_7)^2]^{3/2}} \end{cases} \quad (12)$$

con las condiciones iniciales

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1(0) = 0.98329134 \text{ au} \\ x_2(0) = 0 \\ x_3(0) = 0 \\ x_4(0) = 0.01749578 \text{ au} \cdot d^{-1} \\ x_5(0) = 4.950429 \text{ au} \\ x_6(0) = 0 \\ x_7(0) = 0 \\ x_8(0) = 0.007924 \text{ au} \cdot d^{-1} \end{array} \right. \quad (13)$$

Para resolver este sistema, basta modificar levemente el programa para resolver el problema de dos cuerpos. Se utiliza el programa ubicado en */mov_plane/*
/inciso_f/ de nombre *3cuerpos.f90*.

Este sistema se resuelve considerando, en primer lugar, la masa de Júpiter, y luego se consideran tres casos donde Júpiter es 10, 100 y 1000 veces más masivo. Lo más importante es notar como cambia la órbita de la Tierra para distintos períodos, tal como se ve en las siguientes gráficas

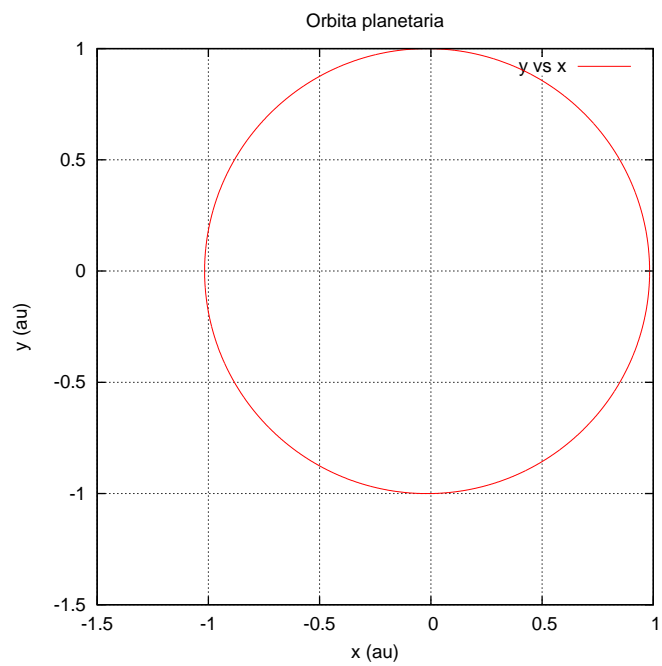


Figura 11: Órbita terrestre para la masa de Júpiter y $T = 365.256d$.

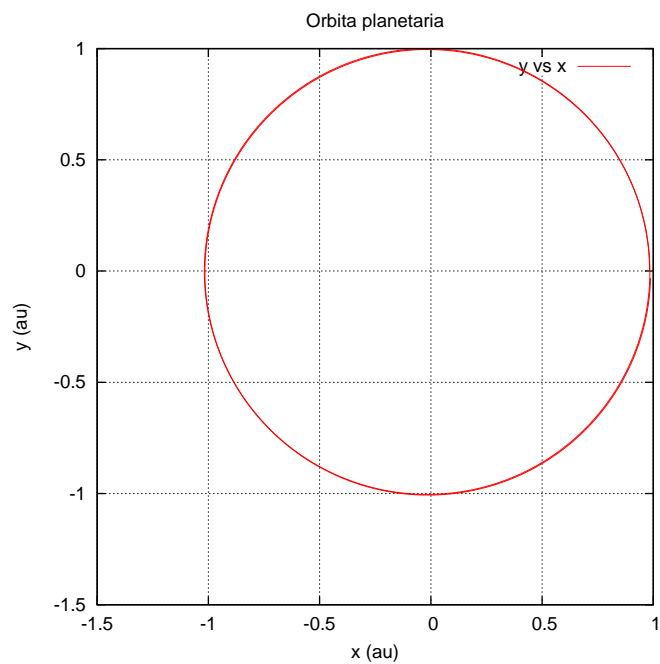


Figura 12: Órbita terrestre para 10 veces la masa de Júpiter y dos veces el período de la Tierra.

Haciendo un zoom de la *figura 12* se observa lo siguiente

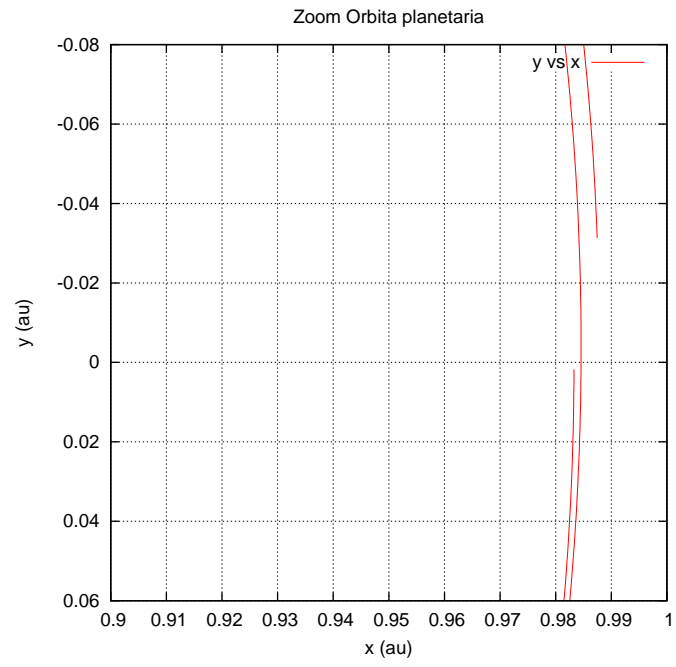


Figura 13: Zoom *figura 12*.

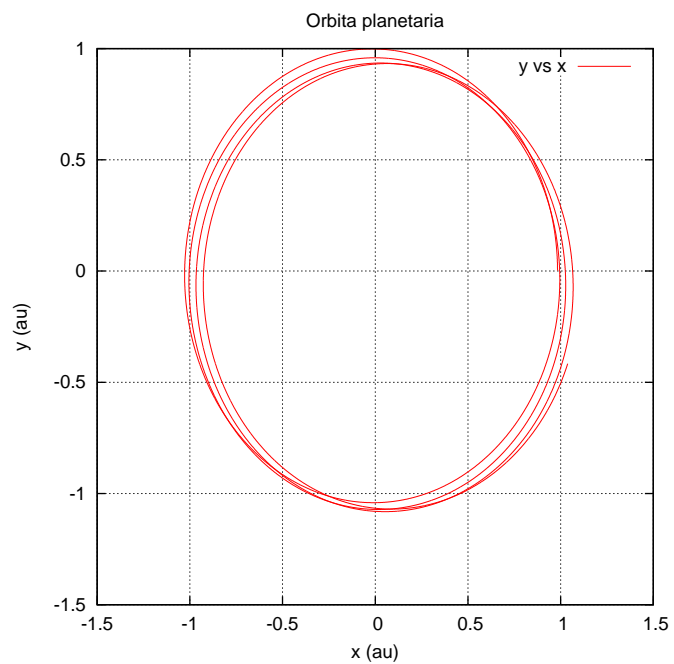


Figura 14: Órbita terrestre para 100 veces la masa de Júpiter y 4 años de evolución temporal.

En el gráfico anterior se observa el preceso de la órbita terrestre. Por último veamos para 1000 veces la masa de Júpiter

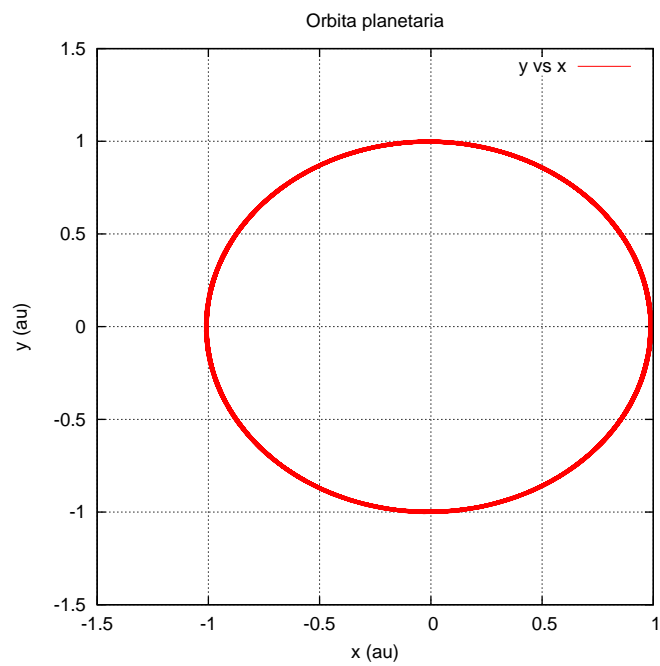


Figura 15: Órbita terrestre para 1000 veces la masa de Júpiter y evolución temporal de 100 años.

Repitiendo el proceso de zoom, vemos lo siguiente

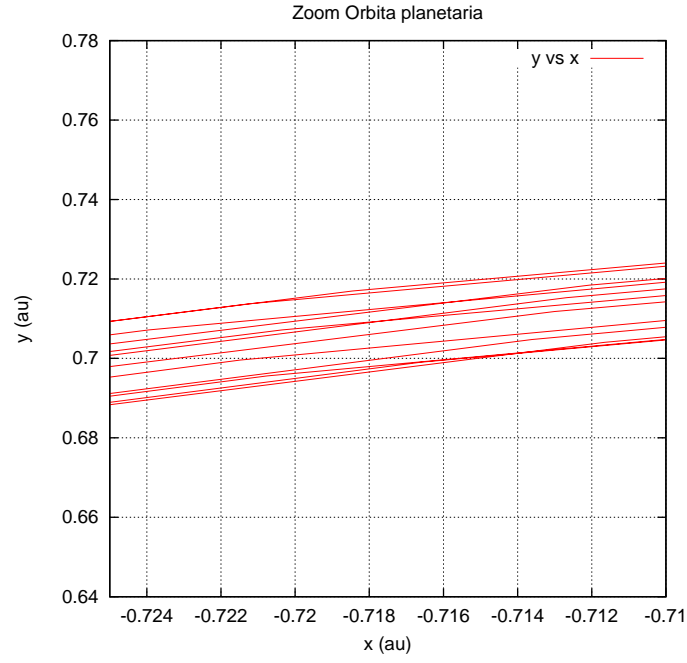


Figura 16: Zoom de la *figura 15*.

Está claro que la órbita deja de ser cerra a partir de las 10 veces la masa de Júpiter. Se puede probar modificando los tiempos evolutivos en el programa *3cuerpos.f90* y observar que para el caso de 1000 veces la masa de Júpiter, la órbita se hace cada vez más grande.

3 Apéndice

Velocidad inicial en el eje y

Planeta	$v_y(0) \text{ au} \cdot d^{-1}$
Mercurio	0.034064
Júpiter	0.007924

Tabla 4: Valores oficiales.

Referencias

- [1] W. Cheney, D. Kincaid: *Numerical Mathematics and Computing*, Sixth Edition. - Ed. Thomson Higher Education. 10 Davis Drive. Belmont, CA 94002-3098. USA - Pág. 439-443; 469-471; 565-567
- [2] L. D. Landau, E. M. Lifshitz: *Mecánica*, Volumen 1 del Curso de Física Teórica, Segunda Edición. - Ed. REVERTÉ S.A. Encarnación 86, Barcelona. - Pág. 29-46
- [3] Velocidad en el perihelio de Mercurio: Extraído de <http://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/mercuryfact.html> el 16 de Junio de 2015
- [4] Velocidad en el perihelio de Júpiter: Extraído de <http://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/jupiterfact.html> el 16 de Junio de 2015