Métodos Numéricos

http://www.famaf.unc.edu.ar/∼serra/mn14.html

Guía 4 – Mayo de 2015

Problema 1:

a) Realice un programa que integre numéricamente la función

$$I = \int_0^1 e^{-x} dx$$

utilizando *regla compuesta del trapecio*. El intervalo de integración debe ser dividido en N subintervalos del mismo tamaño h. La salida debe ser la aproximación S obtenida.

b) Calcule, utilizando el programa del punto anterior, el error $\varepsilon(h) = |S - I|$, para $h = 0.05$ y $h = 0.025$. Verifique que el cociente de precisión

$$Q = \frac{\varepsilon(h)}{\varepsilon(h/2)}$$

sea aproximadamente 4.

Problema 2: Repita el problema anterior empleando ahora la *regla compuesta de Simpson*. Verifique que el cociente de precisión es ahora 16.

Problema 3: *Fórmula de Integración de Newton–Cotes* Estas fórmulas se basan en la idea de integrar una función polinomial en vez de $f(x)$, i.e.

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_n(x)dx$$

donde $P_n(x)$ es el polinomio interpolante de grado n para ciertos valores de x que se escogen apropiadamente en el intevalo $[a, b]$. Muestre que si se eligen puntos equiespaciados y que incluyan los extremos (fórmula cerrada), los casos $n = 1$ y $n = 2$ corresponden a la regla del Trapecio y de Simpson, respectivamente. *Ayuda*: use la forma de Lagrange para el polinomio interpolante, y calcule los pesos de la fórmula de integración resultante.

Problema 4: *Formula de integración de Euler-McClaurin*

a) Deduzca la fórmula de integración de Euler-McClaurin:

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; h\left(\frac{f(a)}{2} + f(x_1) + \ldots + f(x_{N-1}) + \frac{f(b)}{2}\right) \;+\; \frac{h^2}{12}\,(f'(a) - f'(b)) \;+\; \mathrm{O}(h^4)$$

b) Muestre que integra exactamente polinomios de grado 3.

Problema 5: Muestre que la regla de Simpson integra exactamente polinomios de grado 3.

Problema 6: Usando los programas para los algoritmos del Trapecio y de Simpson, aproxime las siguientes integrales con un error relativo menor a 10^{-7} (utilice doble precisión). Indique, en cada caso, el número de puntos utilizado.

a) $\int_{0.5}^{1} x^4 dx$

b) $\int_{0}^{0.5} \frac{2}{x-4} dx$

c) $\int_{1}^{1.5} x^2 \log x dx$

d) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} x \sin x dx$

Problema 7: *Cuadratura de Gauss-Legendre de 3 puntos*

a) Calcule los puntos y pesos correspondientes a la cuadratura de Gauss-Legendre (G-L) de 3 puntos, esto es, intervalo $[-1, 1]$ y función de peso $w(x) = 1$.

b) Utilice cuadraturas de G-L de 2 y 3 puntos para estimar la integral

$$\int_{1}^{3/2} e^{-x^2} \, dx \, ,$$

y compare los errores relativos de ambas.

c) Realice ahora la integral utilizando los códigos que escribió para cuadraturas de trapezoide y Simpson al mismo error relativo que G-L de 3 puntos. Que valores de N debe usar en cada caso?

Problema 8: *Cuadratura de Gauss-Hermite de 3 puntos*

a) Calcule los puntos y pesos correspondientes a la cuadratura de Gauss-Hermite (G-H) de 3 puntos, esto es, intervalo $(-\infty, \infty)$ y función de peso $w(x) = exp(-x^2)/\sqrt{\pi}$.

b) Utilice cuadraturas de G-H de 2 y 3 puntos para estimar la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}} e^x \, dx \, ,$$

y compare los errores relativos de ambas.

Problema 9: *Cuadratura de Gauss–Legendre. Comparación con otros métodos*

a) Escriba un programa que calcule la integral

$$I = \int_{0}^{1} e^{-t} dt = 1 - e^{-1}.$$

utilizando la cuadratura de Gauss–Legendre. Para calcular los puntos y pesos necesarios use la subrutina *gauss* que se provee.

b) Calcule el error relativo $\epsilon = |(numérico - exacto)/exacto|$ para distintos valores de número de puntos de integración (N). Considere valores de N consecutivos hasta 100, y luego de 100 en 100 hasta $N = 3000$. Repita el cálculo empleando los algoritmos de Simpson y Trapecio.

c) Haga un gráfico *log-log* comparativo de los errores relativos *versus* N. Observe que

$$\epsilon \approx CN^{\alpha} => \log \epsilon = \alpha \log N + constante.$$

Esto significa que una dependencia como ley de potencia aparece como una línea recta en un gráfico *log-log.*

d) Use el gráfico para estimar las leyes de potencia de la dependencia del error ϵ con el número de puntos N. y para determinar el número cifras decimales de precisión en cada método. Haga esto tanto para el error del algoritmo como para el de redondeo.

e) Repita los incisos anteriores usando doble precisión.

Problema 10: *Cuadratura de Gauss-Laguerre de 2 puntos*

a) Calcule los puntos y pesos correspondientes a la cuadratura de Gauss-Laguerre (G-La) de 2 puntos, esto es, intervalo $[0,\infty)$ y función de peso $w(x) = exp(-x)$.

b) La integral

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1}\, dx$$

aparece en el tratamiento de la radiación de cuerpo negro de Planck que da nacimiento a la mecánica cuántica en el año 1900. Evalue la misma usando la cuadratura de Gauss-Laguerre de 2 puntos y calcule el error relativo.

Problema 11: *Integración numérica en dos dimensiones*

a) Haga un programa que integre funciones en la region $a \leq x \leq b\,;\ c \leq y \leq d$ siguiendo el código delineado en la clase teórica, usando el método de cuadratura de Simpson en cada coordenada.

b) Evalue númericamente con no menos de 8 cifras significativas las integrales

$$\int_0^2 dx \int_0^1 dy\, e^{-x\,y} \qquad ; \qquad \int_{1.4}^2 dx \int_1^{3/2} dy\, \ln\,(x+2y)$$

c) Modifique el programa para permitir que los límites de integración en y sean función de x y evalue la integral

$$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy\, e^{-x\,y}$$