Métodos Numéricos

http://www.famaf.unc.edu.ar/∼serra/metodos_numericos.html

Guía 7 – Junio de 2015

Problema 1: Use eliminación Gaussiana para resolver el siguiente sistema:

i.

$$\begin{array}{lcccl} 0.0001x_1 & + & x_2 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & = & 2 \end{array}$$

ii.

$$\begin{array}{lcccccl} 3.03x_1 & - & 12.1x_2 & + & 14x_3 & = & -119 \\ -3.03x_1 & + & 12.1x_2 & + & 7x_3 & = & 120 \\ 6.11x_1 & - & 14.2x_2 & + & 21x_3 & = & -139 \end{array}$$

a) Utilizando aritmética exacta.

b) Utilizando aritmética de tres dígitos.

c) Utilizando aritmética de tres dígitos y pivoteo.

Problema 2: *Matrices tridiagonales* Sea A una matriz tridiagonal $n \times n$, esto es $a_{i,j} = 0$ si $|i-j| > 1$. Suponga que A admite una descomposición LU de Doolittle.

a) Muestre que las matrices L y U tienen la forma:

$$L = \begin{pmatrix} 1\,0\,0\cdots & \cdots & 0 \\ l_1\,1\,0\cdots & \cdots & 0 \\ 0\,l_2\,1\cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0\cdots\cdots 0 & l_{n-1} & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad U = \begin{pmatrix} u_1\,v_1\,0\cdots & \cdots & 0 \\ 0\,u_2\,v_2\cdots & \cdots & 0 \\ 0\,0\,u_3\,v_3\cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0\cdots\cdots 0 & u_{n-1} & v_{n-1} \\ 0\cdots\cdots & 0 & u_n \end{pmatrix}.$$

b) Encuentre la expresión explicita de l_i, u_i, v_i en funcion de $\{a_{i,i}, a_{i,i\pm 1}\}$.

c) Considere el sistema lineal $A\vec{x} = \vec{b}$, encuentre una expresión explícita para las componentes de $\vec{x}$.

d) Cuente el número de operaciones aritméticas $(+, - * /)$ realizadas en el proceso. Compruebe que es lineal con n.

e) Realice la descomposición LU de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1\,1\,0\,0\,0 \\ 1\,2\,1\,0\,0 \\ 0\,1\,3\,1\,0 \\ 0\,0\,1\,4\,1 \\ 0\,0\,0\,1\,5 \end{pmatrix}.$$

Problema 3: Verifique que la siguiente matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

admite descomposición de Cholestky y descompóngala.

Problema 4: Sea el sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1000 & 999 \\ 999 & 998 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1999 \\ 1997 \end{pmatrix}$$

a) Obtener la factorización LU de la matriz $\mathbf{A}$. Se puede conseguir la factorización de Cholesky?

b) Resolver el sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ utilizando la factorización obtenida en el apartado anterior.

Problema 5: Desarrolle un programa que implemente la factorización de *Croot* y/o de *Doolittle* para para obtener la descomposicion $\mathbf{L}\,\mathbf{U}$ de una matriz. Emplee el programa para descomponer las siguientes matrices:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 12 & -8 & 6 & 10 \\ 3 & -13 & 9 & 3 \\ -6 & 4 & 1 & -18 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Verifique que la descomposición es correcta realizando el producto de matrices $L \cdot U$.

Problema 6: Desarrolle un programa que implemente el método de Jacobi para resolver el sistema lineal $A\vec{x} = \vec{b}$. Los datos de entrada deben ser la tolerancia δ y el número máximo permitido de iteraciones.

El programa debe leer los valores de las entradas de A, $\vec{b}$ y de la iteración inicial $\vec{x}_0$ de tres archivos de datos.

Para cada iteración, el programa debe imprimir en pantalla el número s de iteración y el valor de la norma $\|\vec{x}^s - \vec{x}^{s-1}\|_1$, donde

$$\|\vec{x}^s\|_1 = \sum_{i=1}^{N} |x_i^s|$$

El programa debe detenerse cuando alcanza el número máximo de iteraciones o si se cumple la condición: $\|\vec{x}^s - \vec{x}^{s-1}\|_1 \leq \delta$; debe imprimir además la iteración final en formato exponencial y con diez decimales.

Problema 7: Aplique el programa desarrollado para resolver, mediante el método de Jacobi, el sistema de ecuaciones $A\vec{x} = \vec{b}$ con

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y también} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Problema 8: Repita los problemas 1 y 5 pero utilizando ahora el método de Gauss–Seidel.

Problema 9: Resuelva el sistema del problema 4 numéricamente utilizando los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel. Convergen?

Problema 10: Decida si los métodos de Jacobi y/o Gauss-Seidel son aplicables para resolver los siguientes sistemas de ecuaciones. En cada caso afirmativo calcule las soluciones, en el caso (a) con $\delta = 10^{-11}$, en el caso (b) con $\delta = 10^{-4}$. Cuántas iteraciones son necesarias en cada caso para alcanzar la precisión deseada?

$$\textbf{(a)} \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}, \qquad \textbf{(b)} \quad \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 & 5 \\ 7 & 10 & 8 & 7 \\ 6 & 8 & 10 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ 32 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}$$

Problema 11: Modifique el programa que implementa el método de Jacobi para que guarde en las sucesivas filas de un archivo de salida los valores de las iteraciones $\vec{x}^s$. Utilizando este programa resuelva el sistema con

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 21 \end{pmatrix}$$

con los distintos valores iniciales

$$\textbf{(a)} \ \vec{x}^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \textbf{(b)} \ \vec{x}^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \textbf{(c)} \ \vec{x}^0 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Finalmente grafique los puntos de las sucesiones de iteraciones obtenidas usando gnuplot.