Ejercicio 22

---

1. Contexto del problema

La función de densidad de probabilidad $f(x)$ es:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{si } x \in [0,2], \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Se pide:

a) Calcular la función de distribución $F(x)$.
b) Determinar los parámetros a y b tal que $P(0.5 < X \leq 1) = 0.1357$.

2. Condición de normalización: Calcular a y b

Para que $f(x)$ sea una función de densidad válida, debe cumplir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1.$$

Dado que $f(x) = ax^2 + b$ en $[0,2]$, integramos en ese intervalo:

$$\int_0^2 (ax^2 + b)\, dx = 1.$$

Calculamos la integral:

$$\int_0^2 (ax^2 + b)\, dx = a\int_0^2 x^2\, dx + b\int_0^2 1\, dx.$$

Resolviendo cada término:

- La integral de x^2 es:

$$\int_0^2 x^2\, dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{2^3}{3} - 0 = \frac{8}{3}.$$

- La integral de 1 es:

$$\int_0^2 1\, dx = [x]_0^2 = 2 - 0 = 2.$$

Por lo tanto:

$$\int_0^2 (ax^2 + b)\, dx = a \cdot \frac{8}{3} + b \cdot 2 = 1.$$

Simplificamos la ecuación:

$$\frac{8a}{3} + 2b = 1. \quad \text{(Ecuación 1)}$$

3. Segunda condición: Probabilidad $P(0.5 < X \leq 1) = 0.1357$

La probabilidad se calcula integrando $f(x)$ en el intervalo $(0.5, 1]$:

$$P(0.5 < X \leq 1) = \int_{0.5}^{1} (ax^2 + b)\, dx = 0.1357.$$

Calculamos la integral:

$$\int_{0.5}^{1} (ax^2 + b)\, dx = a \int_{0.5}^{1} x^2\, dx + b \int_{0.5}^{1} 1\, dx.$$

- La integral de x^2 entre 0.5 y 1 es:

$$\int_{0.5}^{1} x^2\, dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{0.5}^{1} = \frac{1^3}{3} - \frac{(0.5)^3}{3}.$$

$$\int_{0.5}^{1} x^2\, dx = \frac{1}{3} - \frac{0.125}{3} = \frac{1 - 0.125}{3} = \frac{0.875}{3}.$$

- La integral de 1 entre 0.5 y 1 es:

$$\int_{0.5}^{1} 1\, dx = [x]_{0.5}^{1} = 1 - 0.5 = 0.5.$$

Por lo tanto:

$$\int_{0.5}^{1} (ax^2 + b)\, dx = a \cdot \frac{0.875}{3} + b \cdot 0.5 = 0.1357.$$

Simplificamos la ecuación:

$$\frac{0.875a}{3} + 0.5b = 0.1357. \quad \text{(Ecuación 2)}$$

4. Resolver el sistema de ecuaciones

Las ecuaciones obtenidas son:

1. $\frac{8a}{3} + 2b = 1$,
2. $\frac{0.875a}{3} + 0.5b = 0.1357$.

Multiplicamos ambas ecuaciones por 3 para eliminar denominadores:

1. $8a + 6b = 3$,
2. $0.875a + 1.5b = 0.4071$.

Resolviendo el sistema:

- Multiplicamos la segunda ecuación por 8 para igualar los coeficientes de a:

$$8(0.875a + 1.5b) = 8(0.4071).$$

$$7a + 12b = 3.2568. \quad \text{(Ecuación 3)}$$

Las ecuaciones ahora son:

1. $8a + 6b = 3$,
2. $7a + 12b = 3.2568$.

Resolvemos por sustitución o eliminación. Multiplicamos la primera ecuación por 2 para igualar los coeficientes de b:

$$2(8a + 6b) = 2(3) \implies 16a + 12b = 6.$$

Restamos la segunda ecuación de esta:

$$(16a + 12b) - (7a + 12b) = 6 - 3.2568.$$

$$9a = 2.7432.$$

Despejamos a:

$$a = \frac{2.7432}{9} \approx 0.3048.$$

Sustituimos $a = 0.3048$ en la primera ecuación $8a + 6b = 3$:

$$8(0.3048) + 6b = 3.$$

$$2.4384 + 6b = 3.$$

$$6b = 3 - 2.4384 = 0.5616.$$

$$b = \frac{0.5616}{6} \approx 0.0936.$$

Ejercicio 23

Ejercicio 23. *El tiempo de atención en urgencias tiene la función de distribución siguiente:*

$$F(x) = \begin{cases} 0, & si \;\; x \leqslant 0 \\ 0.5x, & si \;\; 0 < x \leqslant 1 \\ 0.5, & si \;\; 1 < x \leqslant 2 \\ 0.25x, & si \;\; 2 < x \leqslant 4 \\ 1, & si \;\; x > 4 \end{cases} \qquad (en\ horas)$$

Se pide: a) La función de densidad y su interpretación. b) Si el tiempo en dar el alta es superior a una hora, ¿Cuál es la probabilidad de que sea superior a 3.5 horas?

1. Función de distribución acumulativa $F(x)$

La función de distribución acumulativa dada es:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ 0.5x & \text{si } 0 < x \leq 1, \\ 0.5 & \text{si } 1 < x \leq 2, \\ 0.25x & \text{si } 2 < x \leq 4, \\ 1 & \text{si } x > 4. \end{cases}$$

---

2. Inciso a: Función de densidad $f(x)$

La función de densidad $f(x)$ se obtiene derivando la función de distribución $F(x)$:

$$f(x) = \frac{d}{dx}F(x).$$

Calculamos por intervalos:

1. **Para** $x \leq 0$:

$$F(x) = 0 \implies f(x) = 0.$$

2. **Para** $0 < x \leq 1$:

$$F(x) = 0.5x \implies f(x) = \frac{d}{dx}(0.5x) = 0.5.$$

3. **Para** $1 < x \leq 2$:

$$F(x) = 0.5 \implies f(x) = \frac{d}{dx}(0.5) = 0.$$

4. **Para** $2 < x \leq 4$:

$$F(x) = 0.25x \implies f(x) = \frac{d}{dx}(0.25x) = 0.25.$$

5. **Para** $x > 4$:

$$F(x) = 1 \implies f(x) = \frac{d}{dx}(1) = 0.$$

Función de densidad $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ 0.5 & \text{si } 0 < x \leq 1, \\ 0 & \text{si } 1 < x \leq 2, \\ 0.25 & \text{si } 2 < x \leq 4, \\ 0 & \text{si } x > 4. \end{cases}$$

Interpretación:
La función de densidad describe la probabilidad relativa de que el tiempo de atención esté en un intervalo específico. La densidad es constante en los intervalos $(0, 1]$ y $(2, 4]$, con valores de 0.5 y 0.25, respectivamente. En los intervalos $[1, 2]$ y fuera de $[0, 4]$, la densidad es cero.

3. Inciso b: Probabilidad de que $X > 3.5$

Queremos calcular $P(X > 3.5)$, que se puede escribir como:

$$P(X > 3.5) = 1 - F(3.5).$$

De la función de distribución acumulativa:

- Para $2 < x \leq 4$, $F(x) = 0.25x$.

Evaluamos $F(3.5)$:

$$F(3.5) = 0.25 \cdot 3.5 = 0.875.$$

Por lo tanto:

$$P(X > 3.5) = 1 - F(3.5) = 1 - 0.875 = 0.125.$$

Resultado: La probabilidad de que el tiempo de atención sea superior a 3.5 horas es 0.125 (12.5%).

5. Resumen de resultados

1. Los valores de a y b son:

$$a \approx 0.3048, \quad b \approx 0.0936.$$

2. La función de densidad queda:

$$f(x) = \begin{cases} 0.3048x^2 + 0.0936 & \text{si } x \in [0, 2], \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$