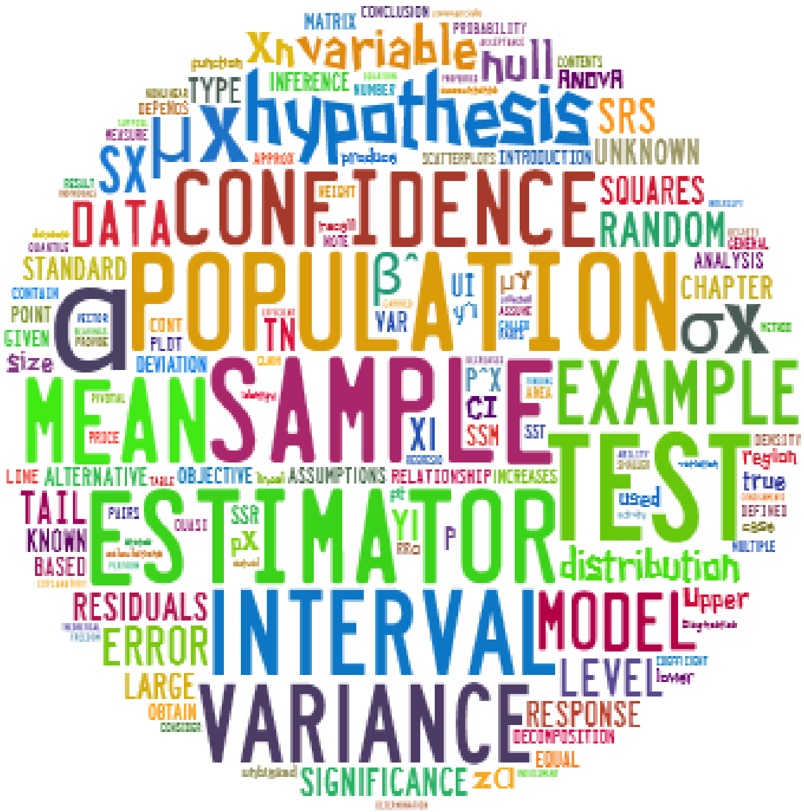


Modelos aditivos y benchmarking

PRÁCTICA 2

Análisis de eficiencia y Productividad

Enunciado

Para la realización de la práctica utilizaremos las bases de datos "`internet firms.xlsx`" y "`ATP 2009.xlsx`" disponibles en el CAMPUS VIRTUAL UMH. Además, también se utilizará el siguiente *toy dataset* (`A`):

`Store`	`A`	`B`	`C`	`D`	`E`	`F`	`G`	`H`	`I`	`J`
x_1`: employee`	2	3	3	4	5	5	6	8	4	10
y_1`: sale`	3	5	4	5	6	4	5	7	2	5

y una base de datos (`B`) con 25 DMUs generada como se muestra a continuación:

$x_1 \sim U(a = 1, b = 10)$

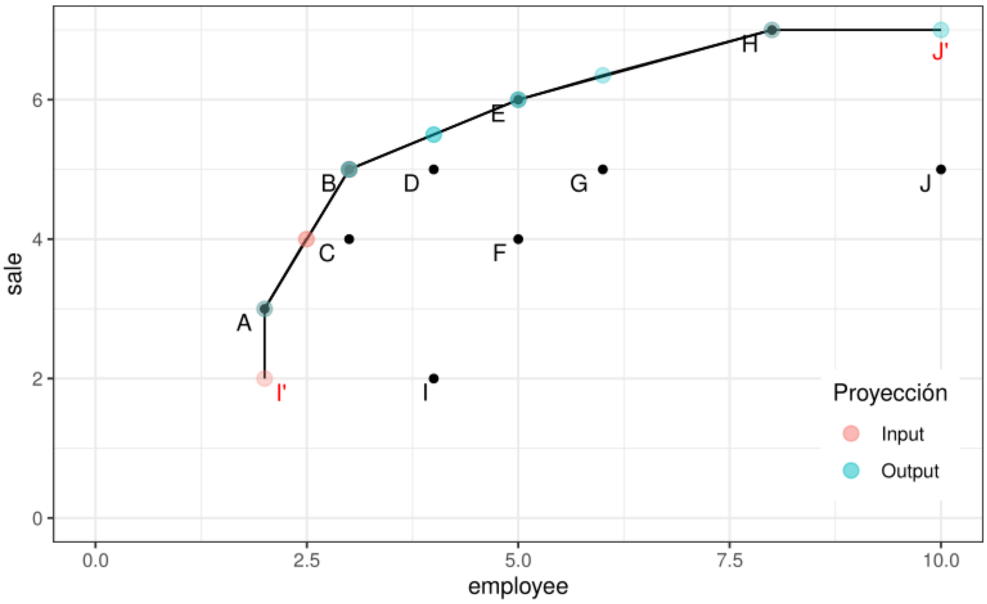
$y_D = \ln(x_1) + 3$

$u_k = |N(\mu = 0.3, \sigma = 1.5)|$

$y_1 = y_D - u_k$

Ejercicio 1. Reproduce el siguiente gráfico con la ayuda de `ggplot2()`:

1) Se ha utilizado el *toy dataset* A.
2) Se asume una tecnología DEA con rendimientos variables a escala.
3) La frontera ha sido obtenida mediante las medidas radial *input* y *output*.
4) Las proyecciones bajo orientación *output* (azul) se están superponiendo a las proyecciones bajo orientación *input* (rosa) en el gráfico.
5) Se deberá utilizar la función `geom_path()` dos veces: una para le medida radial *input* y otra para la medida radial *output*.



¿Qué ocurre con las proyecciones de las DMUs J (J') e I (I')? ¿Qué solución se propone en la literatura?

Los modelos radial *input* y output están proyectando a las DMUs I y J, respectivamente, sobre la frontera débilmente eficiente. Las nuevas DMUs virtuales I' y J' no son realmente eficientes, ya que:

- A produce más *output* que I' utilizando el mismo *input*.
- H produce el mismo *output* que J' utilizando menos *input*.

Por lo tanto, será necesaria la utilización de otro tipos de modelos que permitan identificar únicamente DMUs (virtuales u observadas) fuertemente eficientes.

Ejercicio 2. Crea una función `eff_scores()` que devuelva un vector de *scores* (en formato `data.frame`) a partir de ciertas características de la tecnología y una medida de eficiencia introducida por el usuario. Los argumentos de la función serán los siguientes:

- `tech_xmat`: matriz de *inputs* para las DMUs que constituyen la tecnología.
- `tech_ymat`: matriz de *outputs* para las DMUs que constituyen la tecnología.
- `eval_xmat`: matriz de *inputs* para las DMUs que se desean evaluar.
- `eval_ymat`: matriz de *outputs* para las DMUs que se desean evaluar.
- `convexity`
  - `TRUE`: se impone convexidad en la tecnología.
  - `FALSE`: no se impone convexidad en la tecnología.
- `returns`
  - `"constant"`: se asumen rendimientos constantes a escala.
  - `"variable"`: se asumen rendimientos variables a escala.
- `measure`:
  - `"rad_out"`: distancia radial bajo orientación *output* en 2 etapas.
  - `"rad_inp"`: distancia radial bajo orientación *input* en 2 etapas.
  - `"ddf"`: distancia direccional.

    El argumento `direction` sólo se refiere a esta medida:
    - "mean": vector proyección dado por el valor promedio de *inputs* y *outputs* de todas las DMUs.
    - "briec": vector proyección dado por el valor de *inputs* y *outputs* de la DMU evaluada.
- `rownames`: vector que indica el nombre de las DMUs. Puede ser `NULL`.

En este ejercicio se actualizan las funciones `rad_out()` y `rad_inp()` para determinar como eficientes únicamente las DMUs que pertenezcan a la frontera fuertemente eficiente. Del mismo modo, las DMUs no eficientes que se proyecten sobre la frontera débilmente eficiente, serán corregidas mediante las variables de holgura (s_j^- y s_j^+), las cuales tomarán, en ese caso, valores estrictamente superiores a 0.

Ejercicio 3. Aplica las nuevas funciones `rad.inp()` y `rad.out()` sobre el *toy dataset* A e interpreta los resultados para la DMU I (bajo orientación *input*) y la DMU J (bajo orientación *output*).

Los resultados bajo orientación *input* son los siguientes:

	θ	s_1^-	s_1^+	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8	λ_9	λ_{10}
A	1.00	0	0	1.0	0.0	0	0	0	0	0	0	0	0
B	1.00	0	0	0.0	1.0	0	0	0	0	0	0	0	0
C	0.83	0	0	0.5	0.5	0	0	0	0	0	0	0	0
D	0.75	0	0	0.0	1.0	0	0	0	0	0	0	0	0
E	1.00	0	0	0.0	0.0	0	0	1	0	0	0	0	0
F	0.50	0	0	0.5	0.5	0	0	0	0	0	0	0	0
G	0.50	0	0	0.0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
H	1.00	0	0	0.0	0.0	0	0	0	0	0	1	0	0
I	0.50	0	1	1.0	0.0	0	0	0	0	0	0	0	0
J	0.30	0	0	0.0	1.0	0	0	0	0	0	0	0	0

La DMU I necesitaría reducir el número de empleados en un 50% (2) y aumentar (al mismo tiempo) el número de ventas en 1 unidad (3) para ser eficiente. Su conjunto de referencia se compone únicamente por la DMU A.

Los resultados bajo orientación *output* son los siguientes:

	ϕ	s_1^-	s_1^+	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8	λ_9	λ_{10}
A	1.00	0	0	1.0	0.0	0	0	0.00	0	0	0.00	0	0
B	1.00	0	0	0.0	1.0	0	0	0.00	0	0	0.00	0	0
C	1.25	0	0	0.0	1.0	0	0	0.00	0	0	0.00	0	0
D	1.10	0	0	0.0	0.5	0	0	0.50	0	0	0.00	0	0
E	1.00	0	0	0.0	0.0	0	0	1.00	0	0	0.00	0	0
F	1.50	0	0	0.0	0.0	0	0	1.00	0	0	0.00	0	0
G	1.27	0	0	0.0	0.0	0	0	0.67	0	0	0.33	0	0
H	1.00	0	0	0.0	0.0	0	0	0.00	0	0	1.00	0	0
I	2.75	0	0	0.0	0.5	0	0	0.50	0	0	0.00	0	0
J	1.40	2	0	0.0	0.0	0	0	0.00	0	0	1.00	0	0

La DMU J necesitaría aumentar las ventas en un 40% (7) y disminuir (al mismo tiempo) el número de empleados en 2 unidades (8) para ser eficiente. Su conjunto de referencia se compone únicamente por la DMU H.

Ejercicio 4. Añade a la función `eff_scores()` la posibilidad de plantear los modelos aditivos. Para ello, el argumento `measure` deberá tomar el valor "`wam`". Por otro lado, se debe crear un nuevo argumento `weights` que tomará uno de los siguientes valores:

- "`WAM`": Weighted Additive Model
- "`MIP`": Measure of Inefficiency Proportions
- "`NOR`": Normalized Weighted Additive Model
- "`RAM`": Range Adjusted Measures
- "`BAM`": Bounded Adjusted Measures

Este tipo de modelos miden la eficiencia considerando únicamente los excesos de *inputs* ($s_j^-, j = 1, \dots, m$) y las deficiencias de *outputs* ($s_r^+, r = 1, \dots, s$). Para ello, se formula un modelo aditivo donde la selección de los pesos (`weights`), $\rho_{x_j}^-$ y $\rho_{y_r}^+$, proporcionan diferentes medidas de eficiencia (puedes consultarlas en el Anexo)

Ejercicio 5. Responde las siguientes cuestiones sobre al modelo aditivo básico (Charnes et al., 1985):

a) ¿Qué quiere decir que sea un modelo no orientado?

Un modelo es orientado cuando la proyección de una DMU ineficiente a la frontera se da bajo alguna de las siguientes alternativas:

1) Aumentando el *output*, mientras se mantiene el *input* constante.
2) Reduciendo el *input*, mientras se mantiene el *output* constante.

Es decir, cuando únicamente se actúa sobre *inputs* u *outputs*.

Los modelos no orientados proporcionan soluciones que implican aumentar el *output* producido a la vez que disminuyen el *input* utilizado, o viceversa.

b) ¿Qué quiere decir que las DMUs proyectadas no conserven el mix?

En los modelos radiales, las DMUs proyectadas aumentan todos los *outputs* o disminuyen todos los *inputs* en la misma proporción. En contra, las soluciones que no conservan el mix son aquellas en las que DMUs proyectadas aumentan cada *output* y/o disminuyen cada *input* en una proporción diferente.

c) ¿Qué implica que el modelo tenga problemas con las unidades de media?

La medida de esfuerzo para alcanzar la frontera de Mejores Prácticas (z_0) puede verse alterada por las unidades de medida de las variables analizadas, dando una mayor importancia a aquellas variables con una media superior.

d) Interpreta la siguiente tabla en base a las respuestas de los apartados anteriores.

DMU	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{y}_1$	$\bar{y}_2$	Modelo	*Score* (τ)
A	7.6	4.2	1256.9	27.1	Radial orientación input	0.8
					Radial orientación output	1.25
					Aditivo básico	1300

Modelo	Interpretación
Radial orientación input	Reducir un 20% cada uno de los *inputs* manteniendo los *outputs* constantes. La nueva DMU proyectada mantendrá las mismas proporciones entre los *inputs* utilizados.
Radial orientación output	Aumentar un 25% cada uno de los *outputs* manteniendo los *inputs* constantes. La nueva DMU proyectada mantendrá las mismas proporciones entre los *outputs* producidos.
Aditivo básico	Un desplazamiento de 1300 uds entre *inputs* y *outputs*. Cualquier combinación de reducción de *inputs* y/o aumento de *output* es posible (pudiendo alguno de ellos no ser alterado). Claramente, el *output* y_1 ha sido muy significativo en la obtención del *score* de eficiencia τ.

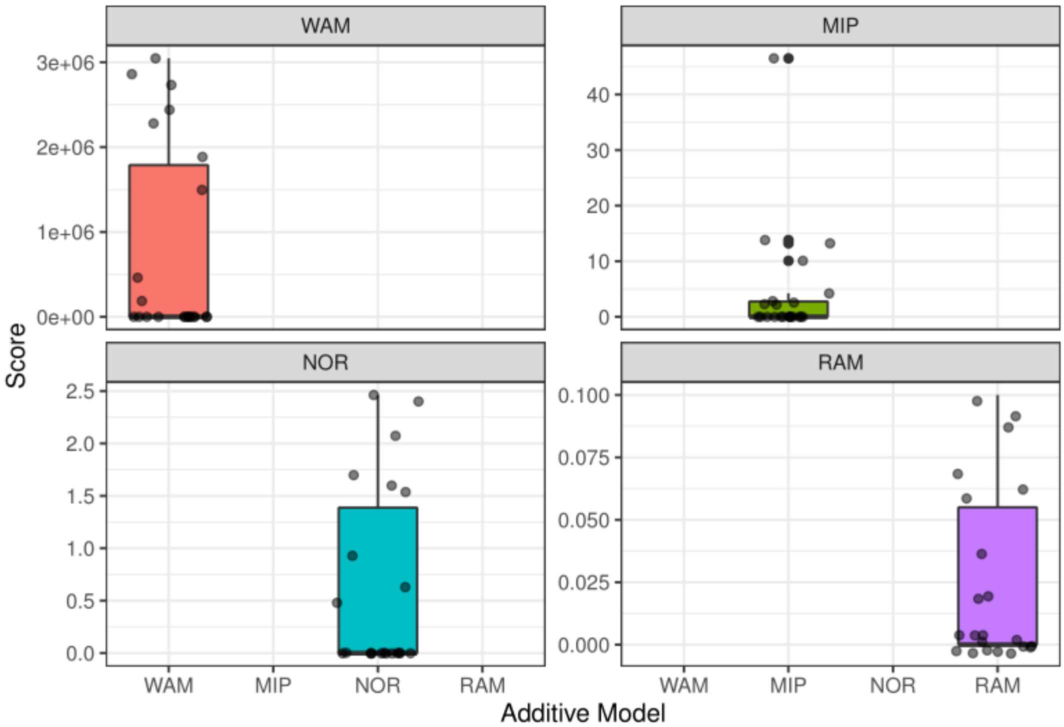
Ejercicio 6. Realiza un análisis de la eficiencia con la base de datos `internet`. Esta base de datos contiene una muestra de 22 empresas de comercio electrónico, de las cuales, se han medido 4 *inputs* y 2 *outputs*. En concreto, se han registrado las siguientes variables:

- `visitors`: número de visitantes en la web (*input*).
- `employee`: número de empleados (*input*).
- `marketing`: inversión en marketing (*input*).
- `developm`: inversión en innovación y desarrollo (*input*).
- `customers`: número de clientes (*output*).
- `revenue`: beneficio (*output*).

a) Rellena la siguiente tabla y marca en color azul las DMUs eficientes.

Companies	WAM	MIP	NOR	RAM	BAM
eBay	0	0	0	0	0
Beyond.com	460669.5	2.26	0.93	0.04	0.35
Drugstore.com	2439796.7	13.22	1.60	0.06	0.47

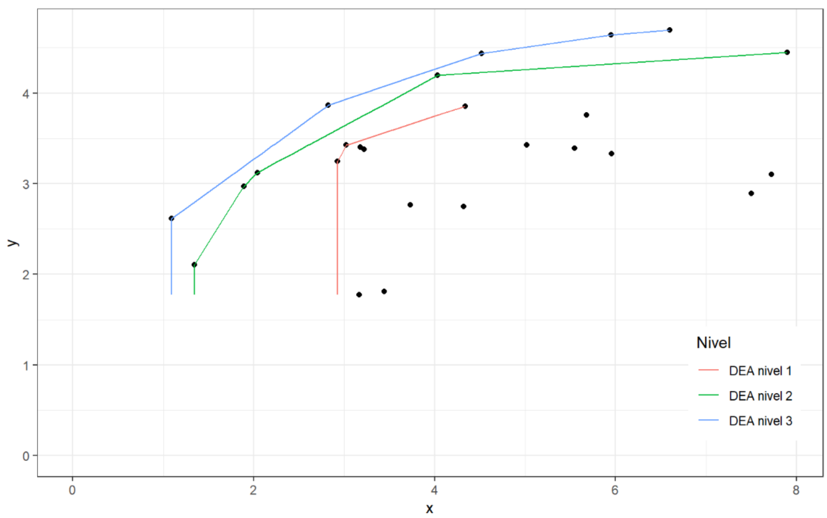
b) Reproduce el siguiente gráfico que mide la variabilidad de los *scores* de eficiente obtenidos por los modelos WAM, MIP, NOR y RAM e interprétalo.



Ejercicio 7. Rellena la siguiente tabla calculando los *scores* de eficiencia para la base de datos internet, asumiendo retornos variables de escala, y con un modelo aditivo con la Measure of Inefficiency Proportions.

Company	MIP	Variables con exceso de input	Variables con defecto de output	Referencias (proporción)
Amazon.com	0			
Buy.com	0			
eToys	2.817	employee (+508.96) marketing (+63.99) developm (+36.06)	revenue (-138.13)	12% de 1-800-Flowers 29% de Buy.com 59% de Outpost.com
NextCard	10.077	developm (+14.88)	customers (-1,844,842) revenue (-22.17)	16% de eBay 38% de Garden.com 34% de Outpost.com 13% de Peapod

Ejercicio 8. Reproduce el siguiente gráfico con la base de datos B y explícalo en el contexto de los *targets* secuenciales.



El gráfico muestra diferentes fronteras DEA que podrían reflejar una estructura de *targets* secuenciales. Bajo esta filosofía, no debe escogerse necesariamente la proyección directa sobre la frontera DEA estándar (nivel 3), si no que podemos realizar varias proyecciones intermedias sobre fronteras DEA de más bajo nivel (niveles 1 y 2), ofreciendo así caminos alternativos (y posiblemente más interesantes en términos estratégicos) a la frontera DEA.

Anexo

Modelo DEA en formato envolvente con retornos constantes bajo orientación input:

$$\min_{\theta,\lambda} \theta$$

$$s.t.$$

$$\begin{aligned}
-\theta x_{0j} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_{kj} &\leq 0, && j = 1, \dots, m \\
\sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_{kr} &\geq y_{0r}, && r = 1, \dots, s \\
\lambda_k &\geq 0, && k = 1, \dots, n
\end{aligned}$$

Con retornos variables:

- Añadimos la restricción: $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$

Modelo FDH:

- Añadimos la restricción: $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1.$
- Añadimos la restricción: $\lambda_k \in \{0, 1\}, \;\; k = 1, \dots, n$

Modelo DEA en formato envolvente con retornos constantes bajo orientación output:

$$\max_{\phi,\lambda} \phi$$

$$s.t.$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_{kj} &\leq x_{0j}, && j = 1, \dots, m \\
-\phi y_{0r} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_{kr} &\geq 0, && r = 1, \dots, s \\
\lambda_k &\geq 0, && k = 1, \dots, n
\end{aligned}$$

Con retornos variables:

- Añadimos la restricción: $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$

Modelo FDH:

- Añadimos la restricción: $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1.$
- Añadimos la restricción: $\lambda_k \in \{0, 1\}, \;\; k = 1, \dots, n$

Modelo DEA en formato envolvente con retornos constantes bajo la medida de distancia direccional:

$$\max_{\beta,\lambda} \beta$$

$$s.t.$$

$$\begin{aligned} \beta \cdot G_{x_j} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_{kj} &\leq x_{0j}, \quad j = 1, \ldots, m \\ -\beta \cdot G_{y_r} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_{kr} &\geq y_{0r}, \quad r = 1, \ldots, s \\ \lambda_k &\geq 0, \quad k = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

a) `direction = "mean"`: $G_{x_j} = \bar{x}_{.j}$ y $G_{y_r} = \bar{y}_{.r}$.

b) `direction = "briec"`: $G_{x_j} = x_{0j}$ y $G_{y_r} = y_{0r}$.

Con retornos variables:

- Añadimos la restricción: $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$

Modelo FDH:

- Añadimos la restricción: $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$.
- Añadimos la restricción: $\lambda_k \in \{0, 1\}, \quad k = 1, \ldots, n$

Modelo DEA en formato envolvente con retornos variables bajo orientación input en 2 etapas:

$$\min_{\theta, s^-, s^+, \lambda} \theta$$

$$s.t.$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_{kj} &= \theta x_{0j} - s_{0j}^-, \quad && j = 1, \dots, m \\
\sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_{kr} &= y_{0r} + s_{0r}^+, \quad && r = 1, \dots, s \\
\sum_{k=1}^{n} \lambda_k &= 1, && \\
s_{0j}^- &\geq 0, && j = 1, \dots, m \\
s_{0r}^+ &\geq 0, && r = 1, \dots, s
\end{aligned}$$

Modelo FDH:

- Añadimos la restricción: $\lambda_k \in \{0, 1\}, \quad k = 1, \dots, n$

Modelo DEA en formato envolvente con retornos variables bajo orientación output en 2 etapas:

$$\max_{\phi, s^-, s^+, \lambda} \phi$$

$$s.t.$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_{kj} &= x_{0j} - s_{0j}^-, & j &= 1, \dots, m \\
\sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_{kr} &= \phi y_{0r} + s_{0r}^+, & r &= 1, \dots, s \\
\sum_{k=1}^{n} \lambda_k &= 1, & & \\
s_{0j}^- &\geq 0, & j &= 1, \dots, m \\
s_{0r}^+ &\geq 0, & r &= 1, \dots, s
\end{aligned}$$

Modelo FDH:

- Añadimos la restricción: $\lambda_k \in \{0, 1\}, \quad k = 1, \dots, n$

Modelos Aditivos:

$$\max_{s^-,s^+,\lambda} \omega = \sum_{j=1}^{m} \rho_{x_j}^- s_{0j}^- + \sum_{r=1}^{s} \rho_{y_r}^+ s_{0r}^+$$

$$s.t.$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_{kj} &= x_{0j} - s_{0j}^-, & j &= 1, \dots, m \\
\sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_{kr} &= y_{0r} + s_{0r}^+, & r &= 1, \dots, s \\
\lambda_k &\geq 0, & k &= 1, \dots, n \\
s_{0j}^- &\geq 0, & j &= 1, \dots, m \\
s_{0r}^+ &\geq 0, & r &= 1, \dots, s
\end{aligned}$$

weights	$\rho_{x_j}^-$	$\rho_{y_r}^+$
”ONE”	$\mathbf{1}_{1xm}$	$\mathbf{1}_{1xs}$
”MIP”	$\frac{1}{x_{0j}}$	$\frac{1}{y_{0r}}$
”NOR”	$\frac{1}{\sigma_{x_j}^-}$	$\frac{1}{\sigma_{y_r}^+}$
”RAM”	$\frac{1}{(m+s)R_{x_j}^-}$	$\frac{1}{(m+s)R_{y_r}^+}$
”BAM”	$\frac{1}{(m+s)\left(x_{0j} - \min(x_j)\right)}$	$\frac{1}{(m+s)(\max(y_r) - y_{0r})}$

σ es la desviación estándar.

R es el rango.

Con retornos variables:

- Añadimos la restricción: $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$

Modelo FDH:

- Añadimos la restricción: $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$.
- Añadimos la restricción: $\lambda_k \in \{0, 1\}, \quad k = 1, \dots, n$