Ejercicio 1:

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria simple (m.a.s.) de una v.a. $X \sim U(0, \theta)$, $\theta > 0$. ¿Cuál sería un estimador natural para θ? Calcula su función de distribución en el muestreo, sesgo, varianza, error cuadrático medio (ECM) y eficiencia. ¿Es un estimador consistente para θ?

Resolución:

1. Estimador natural para θ:

- En una distribución uniforme $U(0, \theta)$, el valor esperado (media) es $\theta/2$.
- Un estimador natural para la media poblacional es la media muestral, $\bar{X}$.
- Por lo tanto, un estimador natural para $\theta/2$ sería $\bar{X}$.
- Despejando θ, un estimador natural para θ sería $\mathbf{2\bar{X}}$.
- Otro estimador natural, y que usaremos en los siguientes apartados, es el **máximo de la muestra, X(n)**, ya que θ es el límite superior del rango de la distribución.

2. Función de distribución en el muestreo de X(n):

- Sea `Y = X(n) = max(X1, ..., Xn)`.
- La función de distribución de Y, `F_Y(y)`, es la probabilidad de que el máximo de la muestra sea menor o igual a y:
  `F_Y(y) = P(Y ≤ y) = P(X(n) ≤ y) = P(X1 ≤ y, X2 ≤ y, ..., Xn ≤ y)`
- Como las variables son independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d.),
  `F_Y(y) = P(X1 ≤ y) * P(X2 ≤ y) * ... * P(Xn ≤ y) = [P(X ≤ y)]^n`
- La función de distribución de una $U(0, \theta)$ es `F_X(x) = x/θ` para `0 ≤ x ≤ θ`.
- Por lo tanto, `F_Y(y) = (y/θ)^n` para `0 ≤ y ≤ θ`, y `F_Y(y) = 0` para `y<0`, `F_Y(y) = 1` para `y>θ`.

3. Sesgo de X(n):

- Primero, necesitamos la función de densidad de Y, que se obtiene derivando F_Y(y):
  `f_Y(y) = dF_Y(y)/dy = n * y^(n-1) / θ^n` para `0 ≤ y ≤ θ`
- El valor esperado de Y (X(n)) es:
  `E[Y] = ∫[0,θ] y * f_Y(y) dy = ∫[0,θ] y * (n * y^(n-1) / θ^n) dy = (n/(n+1)) * θ`

- El sesgo es la diferencia entre el valor esperado del estimador y el parámetro:

  $Sesgo(X(n)) = E[X(n)] - \theta = (n/(n+1)) * \theta - \theta = -\theta/(n+1)$

4. Varianza de X(n):

- Primero, calculamos $E[Y^2]$:

  $E[Y^2] = \int[0,\theta]\ y^2 * f\_Y(y)\ dy = \int[0,\theta]\ y^2 * (n * y\text{^}(n-1) / \theta\text{^}n)\ dy = (n/(n+2)) * \theta^2$
- La varianza es:

  $Var(X(n)) = E[Y^2] - (E[Y])^2 = (n/(n+2)) * \theta^2 - ((n/(n+1)) * \theta)^2 = n\theta^2 / ((n+1)^2(n+2))$

5. Error cuadrático medio (ECM) de X(n):

- $ECM(X(n)) = Var(X(n)) + (Sesgo(X(n)))^2 = n\theta^2 / ((n+1)^2(n+2)) + (-\theta/(n+1))^2$
- $ECM(X(n)) = \theta^2 * (n/((n+1)^2(n+2)) + 1/(n+1)^2) = \theta^2 * (2n+2) / ((n+1)^2(n+2)) = 2\theta^2 / ((n+1)(n+2))$

6. Eficiencia de X(n):

- La eficiencia se refiere a la capacidad de un estimador de tener una varianza baja.
- Un estimador es más eficiente que otro si su varianza es menor, o su ECM es menor.
- Para hablar de eficiencia en términos absolutos, necesitaríamos compararlo con la cota de Cramér-Rao, que en este caso no es fácil de calcular.
- Sin embargo, podemos decir que X(n) no es un estimador insesgado, y por lo tanto no es eficiente en el sentido de que no alcanza la mínima varianza posible para un estimador insesgado.

7. Consistencia de X(n):

- Un estimador es consistente si converge en probabilidad al verdadero valor del parámetro a medida que el tamaño de la muestra aumenta.
- Como el $\lim(n\to\infty)\ ECM(X(n)) = 0$, podemos concluir que X(n) es un estimador consistente para θ.

Conclusión del ejercicio 1:

- Un estimador natural para θ en una distribución U(0, θ) es el máximo de la muestra, X(n), o también $2\bar{X}$.

- Hemos calculado la función de distribución, sesgo, varianza, ECM y analizado la eficiencia y consistencia de X(n) como estimador de θ.
- X(n) es un estimador sesgado pero consistente para θ.

Ejercicio 2:

Sea X_1, ..., Xn una m.a.s de una v.a. X ~ U(θ, 2), θ < 2. ¿Cuál sería un estimador natural para θ? Calcula su función de distribución en el muestreo.

Resolución:

1. Estimador natural para θ:

- En una distribución uniforme U(θ, 2), el valor esperado (media) es (θ + 2)/2.
- Un estimador natural para la media poblacional es la media muestral, $\bar{X}$.
- Por lo tanto, un estimador natural para (θ + 2)/2 sería $\bar{X}$.
- Despejando θ, un estimador natural para θ sería **$2\bar{X}$ - 2**.
- Otro estimador natural es el **mínimo de la muestra, X(1)**.

2. Función de distribución en el muestreo de X(1):

- Sea `Z = X(1) = min(X1, ..., Xn)`.
- La función de distribución de Z, `F_Z(z)`, es la probabilidad de que el mínimo de la muestra sea menor o igual a z:
  `F_Z(z) = P(Z ≤ z) = 1 − P(Z > z) = 1 − P(X(1) > z) = 1 − P(X1 > z, X2 > z, ..., Xn > z)`
- Como las variables son independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d.),
  `F_Z(z) = 1 − [P(X > z)]^n`
- La función de distribución de una U(θ, 2) es `F_X(x) = (x − θ) / (2 − θ)` para `θ ≤ x ≤ 2`.
- Por lo tanto, `P(X > z) = 1 − F_X(z) = 1 − (z − θ) / (2 − θ) = (2 − z) / (2 − θ)`
- Entonces, `F_Z(z) = 1 − [(2 − z) / (2 − θ)]^n` para `θ ≤ z ≤ 2`.

Conclusión del ejercicio 2:

- Un estimador natural para θ en una distribución U(θ, 2) es el mínimo de la muestra, X(1), o también $2\bar{X}$ - 2.
- Hemos calculado la función de distribución de X(1) en el muestreo.

Ejercicio 3:

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a.s de una v.a. $X \sim Exp(1/\lambda)$, $\lambda > 0$. ¿Cuál sería un estimador natural para λ? Calcula su sesgo, varianza, ECM y su eficiencia. ¿Es un estimador consistente de θ?

Resolución:

1. Estimador natural para λ:

- En una distribución exponencial $Exp(1/\lambda)$, el valor esperado (media) es λ.
- Un estimador natural para la media poblacional es la media muestral, $\bar{X}$.
- Por lo tanto, un estimador natural para λ es $\bar{\mathbf{X}}$.

2. Sesgo de X̄:

- El sesgo es la diferencia entre el valor esperado del estimador y el parámetro:
  `Sesgo(X̄) = E[X̄] - λ`
- Como `E[X̄] = E[(1/n) * ΣXi] = (1/n) * ΣE[Xi] = (1/n) * nλ = λ`
- `Sesgo(X̄) = λ - λ = 0`

3. Varianza de X̄:

- La varianza de una distribución exponencial $Exp(1/\lambda)$ es λ^2.
- `Var(X̄) = Var((1/n) * ΣXi) = (1/n²) * ΣVar(Xi) = (1/n²) * nλ² = λ²/n`

4. Error cuadrático medio (ECM) de X̄:

- `ECM(X̄) = Var(X̄) + (Sesgo(X̄))² = λ²/n + 0² = λ²/n`

5. Eficiencia de X̄:

- Como $\bar{X}$ es un estimador insesgado (sesgo = 0), su ECM es igual a su varianza.
- Para determinar la eficiencia en términos absolutos, necesitaríamos compararla con la cota de Cramér-Rao. El recíproco de la cota de Cramér-Rao en este caso es λ^2/n.
- Como la varianza de $\bar{X}$ es igual a la cota de Cramér-Rao, $\bar{X}$ es un estimador **eficiente** para λ.

6. Consistencia de X̄:

- Un estimador es consistente si converge en probabilidad al verdadero valor del parámetro a medida que el tamaño de la muestra aumenta.
- Como `lim(n→∞) ECM(X̄) = lim(n→∞) λ²/n = 0`, podemos concluir que $\bar{X}$ es un estimador **consistente** para λ.

Conclusión del ejercicio 3:

- Un estimador natural para λ en una distribución $Exp(1/\lambda)$ es la media muestral, $\bar{X}$.
- $\bar{X}$ es un estimador insesgado, eficiente y consistente para λ.

Ejercicio 4:

Sea $X1, ..., Xn$ una m.a.s de una v.a. $X \sim N(\mu, \sigma^2 = 2)$. Compara los estimadores

`μ^1 = X̄ = (1/n)ΣXi` y `μ^2 = (X1 + X3)/2`, $n > 3$,

en términos de sesgo y ECM. ¿Qué estimador es preferible? ¿Por qué?

Resolución:

1. Sesgo de μ^1 (X̄):

- `Sesgo(μ^1) = E[X̄] − μ = E[(1/n)ΣXi] − μ = (1/n)ΣE[Xi] − μ = (1/n) * nμ − μ = 0`
- μ^1 es **insesgado**.

2. Sesgo de μ^2:

- `Sesgo(μ^2) = E[(X1 + X3)/2] − μ = (E[X1] + E[X3])/2 − μ = (μ + μ)/2 − μ = 0`
- μ^2 también es **insesgado**.

3. ECM de μ^1 (X̄):

- Como μ^1 es insesgado, `ECM(μ^1) = Var(μ^1) = Var(X̄)`
- `Var(X̄) = Var((1/n)ΣXi) = (1/n²)ΣVar(Xi) = (1/n²) * nσ² = σ²/n = 2/n` (ya que $\sigma^2 = 2$)
- `ECM(μ^1) = 2/n`

4. ECM de μ^2:

- Como μ^2 es insesgado, `ECM(μ^2) = Var(μ^2)`
- `Var(μ^2) = Var((X1 + X3)/2) = (Var(X1) + Var(X3))/4 = (σ² + σ²)/4 = 2σ²/4 = σ²/2 = 2/2 = 1` (ya que $\sigma^2 = 2$)
- `ECM(μ^2) = 1`

5. Comparación y estimador preferible:

- Ambos estimadores son insesgados.
- `ECM(μ^1) = 2/n` y `ECM(μ^2) = 1`
- Para n > 2, `2/n < 1`, por lo tanto, `ECM(μ^1) < ECM(μ^2)` para n > 2.

Conclusión del ejercicio 4:

- Ambos estimadores, μ^1 ($\bar{X}$) y μ^2, son insesgados para μ.
- Sin embargo, μ^1 ($\bar{X}$) tiene menor ECM que μ^2 para tamaños de muestra mayores a 2.
- Por lo tanto, **μ^1 ($\bar{X}$) es preferible** a μ^2 porque tiene menor ECM y, en consecuencia, es más eficiente. Esto se debe a que $\bar{X}$ utiliza toda la información de la muestra, mientras que μ^2 solo utiliza dos observaciones.

Ejercicio 5:

Sea X1, ..., Xn una m.a.s de una v.a. X con función de densidad

```
        θx^(θ−1) / 2^θ,   si x ∈ [0, 2]
fθ(x) =
        0,                en otro caso, θ > 0.
```

¿Cuál sería un estimador natural para θ que dependa de la media muestral? Calcula la distribución asintótica (normal) de Xn y deduce a partir de esta la distribución asintótica de ^θ.

- [x]

y σ² = Var(X), se tiene que Xn ~ AN(μ, σ²/n). Como generalización directa, el Método Delta permite deducir la distribución asintótica de cualquier transformación derivable y con derivada no nula en el parámetro a estimar: Para g una función derivable tal que g'(μ) ≠ 0, se tiene que g(Xn) ~ AN(g(μ), (g'(μ))²σ²/n).

Resolución:

1. Estimador natural para θ basado en la media muestral:

- Primero, calculamos la media poblacional E[X]:

  ✅ **= ∫[0,2] x * fθ(x) dx = ∫[0,2] x * (θx^(θ-1) / 2^θ) dx = (θ / 2^θ) * ∫[0,2] x^θ dx**

  ✅ **= (θ / 2^θ) * [x^(θ+1) / (θ+1)] |_[0,2] = (θ / 2^θ) * (2^(θ+1) / (θ+1)) = 2θ / (θ+1)**

- ✅ **es la media muestral, $\bar{X}$.**
- ✅ **a $\bar{X}$ y despejamos θ:**

  $\bar{X} = 2\theta / (\theta+1)$

  $\bar{X}(\theta+1) = 2\theta$

  $\bar{X}\theta + \bar{X} = 2\theta$

  $\bar{X} = 2\theta - \bar{X}\theta$

  $\bar{X} = \theta(2 - \bar{X})$

  $\theta = \bar{X} / (2 - \bar{X})$

- Por lo tanto, un estimador natural para θ basado en la media muestral es:

  $\hat{\theta} = \bar{X} / (2 - \bar{X})$

2. Distribución asintótica de Xn:

- Para aplicar el TCL, necesitamos la varianza poblacional, Var(X):

  $E[X^2] = \int_{[0,2]} x^2 * f\theta(x)\, dx = \int_{[0,2]} x^2 * (\theta x^{(\theta-1)} / 2^\theta)\, dx = (\theta / 2^\theta) * \int_{[0,2]} x^{(\theta+1)}\, dx$

  $E[X^2] = (\theta / 2^\theta) * [x^{(\theta+2)} / (\theta+2)] \,|_{[0,2]} = (\theta / 2^\theta) * (2^{(\theta+2)} / (\theta+2)) = 4\theta / (\theta+2)$

  $Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = 4\theta/(\theta+2) - (2\theta/(\theta+1))^2$

- Según el TCL, $X_n \sim AN(\mu, \sigma^2/n)$, donde ✅ **= 2θ/(θ+1)** y $\sigma^2 = Var(X) = 4\theta/(\theta+2) - (2\theta/(\theta+1))^2$.

3. Distribución asintótica de θ^:

- Usaremos el Método Delta. Nuestra función $g(\mu) = \mu / (2 - \mu)$, donde $\mu = E[X]$.
- Calculamos la derivada de g(μ):

  $g'(\mu) = d(\mu / (2 - \mu))/d\mu = (2 - \mu + \mu) / (2 - \mu)^2 = 2 / (2 - \mu)^2$

- Sustituimos $\mu = 2\theta/(\theta+1)$ en g(μ) y g'(μ):

  $g(\mu) = (2\theta/(\theta+1)) / (2 - 2\theta/(\theta+1)) = (2\theta/(\theta+1)) / (2/(\theta+1)) = \theta$

  $g'(\mu) = 2 / (2 - 2\theta/(\theta+1))^2 = 2 / (2/(\theta+1))^2 = (\theta+1)^2 / 2$

- Aplicando el Método Delta:

  $g(X_n) = \hat{\theta} \sim AN(g(\mu), (g'(\mu))^2\sigma^2/n)$

  $\hat{\theta} \sim AN(\theta, ((\theta+1)^2 / 2)^2 * (4\theta/(\theta+2) - (2\theta/(\theta+1))^2) / n)$

  $\hat{\theta} \sim AN(\theta, (\theta+1)^4 / 4 * (4\theta/(\theta+2) - 4\theta^2/(\theta+1)^2) / n)$

Conclusión del ejercicio 5:

- Un estimador natural para θ basado en la media muestral es $\hat{\theta} = \bar{X} / (2 - \bar{X})$.
- Hemos calculado la distribución asintótica de Xn usando el TCL.
- Hemos deducido la distribución asintótica de $\hat{\theta}$ usando el Método Delta, que resulta ser aproximadamente normal con media θ y varianza $(\theta+1)^4 / 4 * (4\theta/(\theta+2) - 4\theta^2/(\theta+1)^2) / n$.

Ejercicio 6:

Sea X1, ..., Xn una m.a.s de una v.a. X ~ U(0, θ), θ > 0. Compara los estimadores

$\hat{\theta}_1 = X_n$ y $\hat{\theta}_2 = kX_n$, k > 0,

en términos de sesgo. ¿Qué valor de k proporciona un estimador insesgado? Calcula su ECM.

Resolución:

1. Sesgo de $\hat{\theta}_1$:

- Ya calculamos en el Ejercicio 1 que $E[X_n] = (n/(n+1)) * \theta$
- $Sesgo(\hat{\theta}_1) = E[X_n] - \theta = (n/(n+1)) * \theta - \theta = -\theta/(n+1)$
- $\hat{\theta}_1$ es **sesgado**.

2. Sesgo de $\hat{\theta}_2$:

- $Sesgo(\hat{\theta}_2) = E[kX_n] - \theta = kE[X_n] - \theta = k(n/(n+1)) * \theta - \theta$

3. Valor de k para estimador insesgado:

- Para que $\hat{\theta}_2$ sea insesgado, su sesgo debe ser cero:

  $k(n/(n+1)) * \theta - \theta = 0$

  $k(n/(n+1)) = 1$

  $k = (n+1)/n$

- Por lo tanto, $θ^2 = ((n+1)/n)Xn$ es un estimador insesgado de θ.

4. ECM de θ^2 con k = (n+1)/n:

- Como θ^2 es insesgado con $k = (n+1)/n$, $ECM(θ^2) = Var(θ^2)$
- $Var(θ^2) = Var(((n+1)/n)Xn) = ((n+1)/n)^2 * Var(Xn)$
- Ya calculamos en el Ejercicio 1 que $Var(Xn) = nθ^2 / ((n+1)^2(n+2))$
- $Var(θ^2) = ((n+1)/n)^2 * nθ^2 / ((n+1)^2(n+2)) = θ^2 / (n(n+2))$
- $ECM(θ^2) = θ^2 / (n(n+2))$

Conclusión del ejercicio 6:

- θ^1 es un estimador sesgado de θ.
- θ^2 es un estimador insesgado de θ cuando $k = (n+1)/n$.
- El ECM de θ^2 con $k = (n+1)/n$ es $θ^2 / (n(n+2))$.
- Para determinar cuál es mejor, necesitaríamos comparar el ECM de θ^1 (calculado en el ejercicio 1) y el ECM de θ^2. Dado que el ECM de θ^1 es $2θ^2 / ((n+1)(n+2))$, y el ECM de θ^2 es $θ^2 / (n(n+2))$, podemos ver que el ECM de θ^2 es menor.
- Por lo tanto, **θ^2 = ((n+1)/n)Xn es preferible** a θ^1 por tener menor ECM, además de ser insesgado.

Ejercicio 7:

Sea X1, ..., Xn una m.a.s de una v.a. X con función de densidad

```
        2(θ − x) / θ²,  si x ∈ (0, θ)
fθ(x) =
        0,                en otro caso, θ > 0.
```

¿Cuál sería un estimador natural para θ que dependa de la media muestral? Calcula la distribución asintótica (normal) de Xn y deduce a partir de esta la distribución asintótica de ^θ.

Resolución:

1. Estimador natural para θ basado en la media muestral:

- Primero, calculamos la media poblacional E[X]:
  ☑ **= ∫[0,θ] x * fθ(x) dx = ∫[0,θ] x * (2(θ - x) / θ²) dx = (2/θ²) * ∫[0,θ] (θx - x²) dx**

✅ **= (2/θ²) * [θx²/2 - x³/3] |_[0,θ] = (2/θ²) * (θ³/2 - θ³/3) = (2/θ²) * (θ³/6) = θ/3**

- ✅ **es la media muestral, X̄.**
- ✅ **a X̄ y despejamos θ:**

  `X̄ = θ/3`

  `θ = 3X̄`

- Por lo tanto, un estimador natural para θ basado en la media muestral es:

  `θ̂ = 3X̄`

2. Distribución asintótica de Xn:

- Para aplicar el TCL, necesitamos la varianza poblacional, Var(X):

  `E[X²] = ∫[0,θ] x² * fθ(x) dx = ∫[0,θ] x² * (2(θ - x) / θ²) dx = (2/θ²) * ∫[0,θ] (θx² - x³) dx`

  `E[X²] = (2/θ²) * [θx³/3 - x⁴/4] |_[0,θ] = (2/θ²) * (θ⁴/3 - θ⁴/4) = (2/θ²) * (θ⁴/12) = θ²/6`

  `Var(X) = E[X²] - (E[X])² = θ²/6 - (θ/3)² = θ²/6 - θ²/9 = θ²/18`

- Según el TCL, `Xn ~ AN(μ, σ²/n)`, donde ✅ **= θ/3** y `σ² = Var(X) = θ²/18`.

3. Distribución asintótica de θ̂:

- Usaremos el Método Delta. Nuestra función `g(μ) = 3μ`, donde `μ = E[X]`.
- Calculamos la derivada de g(μ):

  `g'(μ) = d(3μ)/dμ = 3`

- Sustituimos `μ = θ/3` en g(μ) y g'(μ):

  `g(μ) = 3 * (θ/3) = θ`

  `g'(μ) = 3`

- Aplicando el Método Delta:

  `g(Xn) = θ̂ ~ AN(g(μ), (g'(μ))²σ²/n)`

  `θ̂ ~ AN(θ, 3² * (θ²/18) / n)`

  `θ̂ ~ AN(θ, θ²/(2n))`

Conclusión del ejercicio 7:

- Un estimador natural para θ basado en la media muestral es `θ̂ = 3X̄`.
- Hemos calculado la distribución asintótica de Xn usando el TCL.
- Hemos deducido la distribución asintótica de θ̂ usando el Método Delta, que resulta ser aproximadamente normal con media θ y varianza `θ²/(2n)`.

Ejercicio 8:

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a.s de una v.a. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Compara los estimadores

$S^2_n = (1/n)\Sigma(X_i - \bar{X})^2$ y $Sc^2_n = (1/(n-1))\Sigma(X_i - \bar{X})^2$

de la varianza poblacional, σ^2, en términos de sesgo. Calcula el ECM para el que resulte ser insesgado.

Pista. Emplea el Teorema de Fisher y la distribución χ^2_{n-1}.

Resolución:

1. Sesgo de S^2_n:

- Según el Teorema de Fisher, $(n-1)Sc^2_n / \sigma^2 \sim \chi^2_{n-1}$, donde χ^2_{n-1} es una distribución Chi-cuadrado con n-1 grados de libertad.
- Sabemos que $E[\chi^2_{n-1}] = n-1$.
- Por lo tanto, $E[(n-1)Sc^2_n / \sigma^2] = n-1$.
- $E[Sc^2_n] = \sigma^2$.
- Como $Sc^2_n = (n/(n-1))S^2_n$, entonces $S^2_n = ((n-1)/n)Sc^2_n$
- $E[S^2_n] = E[((n-1)/n)Sc^2_n] = ((n-1)/n)E[Sc^2_n] = ((n-1)/n)\sigma^2$
- $Sesgo(S^2_n) = E[S^2_n] - \sigma^2 = ((n-1)/n)\sigma^2 - \sigma^2 = -\sigma^2/n$
- S^2_n es **sesgado**.

2. Sesgo de Sc^2_n:

- Como ya vimos arriba, $E[Sc^2_n] = \sigma^2$
- $Sesgo(Sc^2_n) = E[Sc^2_n] - \sigma^2 = \sigma^2 - \sigma^2 = 0$
- Sc^2_n es **insesgado**.

3. ECM de Sc^2_n (el estimador insesgado):

- Como Sc^2_n es insesgado, $ECM(Sc^2_n) = Var(Sc^2_n)$
- Sabemos que $Var(\chi^2_{n-1}) = 2(n-1)$
- $Var((n-1)Sc^2_n / \sigma^2) = 2(n-1)$
- $((n-1)^2/\sigma^4) * Var(Sc^2_n) = 2(n-1)$
- $Var(Sc^2_n) = 2(n-1)\sigma^4 / (n-1)^2 = 2\sigma^4 / (n-1)$
- $ECM(Sc^2_n) = 2\sigma^4 / (n-1)$

Conclusión del ejercicio 8:

- S^2n es un estimador sesgado de σ^2, con sesgo igual a $-\sigma^2/n$.
- Sc^2n es un estimador insesgado de σ^2.
- El ECM de Sc^2n (el estimador insesgado) es $2\sigma^4 / (n-1)$.
- Por lo tanto, **Sc^2n es preferible** a S^2n por ser insesgado.

Ejercicio 9:

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a.s de una v.a. X con función de densidad

```
       (1 + θx) / 2,  si x ∈ (−1, 1)
fθ(x) =
       0,                 en otro caso, θ > 0.
```

¿Cuál sería un estimador natural para θ que dependa de la media muestral? Calcula la distribución asintótica (normal) de Xn y deduce a partir de esta la distribución asintótica de ˆθ.

Resolución:

1. Estimador natural para θ basado en la media muestral:

- Primero, calculamos la media poblacional E[X]:
  - [x] **$= \int[-1,1]\ x * f\theta(x)\ dx = \int[-1,1]\ x * ((1 + \theta x) / 2)\ dx = (1/2) * \int[-1,1]\ (x + \theta x^2)\ dx$**
  - [x]

  $= (1/2) * [x^2/2 + \theta x^3/3]\ |\_[-1,1] = (1/2) * [(1/2 - 1/2) + \theta(1/3 - (-1/3))] = (1/2) * (2\theta/3) = \theta/3$
- [x] **es la media muestral, $\bar{X}$.**
- [x] **a $\bar{X}$ y despejamos θ:**

  $\bar{X} = \theta/3$

  $\theta = 3\bar{X}$
- Por lo tanto, un estimador natural para θ basado en la media muestral es:

  $\hat{\theta} = 3\bar{X}$

2. Distribución asintótica de Xn:

- Para aplicar el TCL, necesitamos la varianza poblacional, Var(X):

  $E[X^2] = \int[-1,1]\ x^2 * f\theta(x)\ dx = \int[-1,1]\ x^2 * ((1 + \theta x) / 2)\ dx = (1/2) * \int[-1,1]\ (x^2 + \theta x^3)\ dx$

  $E[X^2] = (1/2) * [x^3/3 + \theta x^4/4]\ |\_[-1,1] = (1/2) * [(1/3 - (-1/3)) + \theta(1/4 - 1/4)] = (1/2) * (2/3) = 1/3$

  $Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = 1/3 - (\theta/3)^2 = (3 - \theta^2)/9$
- Según el TCL, $Xn \sim AN(\mu, \sigma^2/n)$, donde ☑ = **θ/3** y $\sigma^2 = Var(X) = (3 - \theta^2)/9$.

3. Distribución asintótica de θˆ:

- Usaremos el Método Delta. Nuestra función $g(\mu) = 3\mu$, donde $\mu = E[X]$.
- Calculamos la derivada de g(μ):

  $g'(\mu) = d(3\mu)/d\mu = 3$
- Sustituimos $\mu = \theta/3$ en g(μ) y g'(μ):

  $g(\mu) = 3 * (\theta/3) = \theta$

  $g'(\mu) = 3$
- Aplicando el Método Delta:

  $g(Xn) = \theta\hat{} \sim AN(g(\mu), (g'(\mu))^2\sigma^2/n)$

  $\theta\hat{} \sim AN(\theta, 3^2 * (3 - \theta^2)/(9n))$

  $\theta\hat{} \sim AN(\theta, (3 - \theta^2)/n)$

Conclusión del ejercicio 9:

- Un estimador natural para θ basado en la media muestral es $\theta\hat{} = 3\bar{X}$.
- Hemos calculado la distribución asintótica de Xn usando el TCL.
- Hemos deducido la distribución asintótica de θˆ usando el Método Delta, que resulta ser aproximadamente normal con media θ y varianza $(3 - \theta^2)/n$.

Ejercicio 10:

Sea X1, ..., Xn una m.a.s de una v.a. X con función de densidad

```
        1,  si x ∈ (θ, θ + 1)
fθ(x) =
        0,  en otro caso, θ > 0.
```

Comprobar que Xn es un estimador sesgado para θ. ¿Lo es asintóticamente? ¿Cuál es su ECM? Obtener, a partir de Xn, un estimador insesgado para θ y calcular su ECM.

Resolución:

1. Comprobar si Xn es un estimador sesgado para θ:

- Primero, calculamos la media poblacional E[X]:
  ☑
  = ∫[θ, θ+1] x * 1 dx = [x²/2] |_[θ, θ+1] = ((θ+1)²/2) - (θ²/2) = (θ² + 2θ + 1 - θ²)/2 = (2θ + 1)/2 = θ + 1/2
- ☑ **es la media muestral, X̄.**
- ☑ **= θ + 1/2**
- `Sesgo(Xn) = E[Xn] - θ = (θ + 1/2) - θ = 1/2`
- Como el sesgo no es cero, **Xn es un estimador sesgado** para θ.

2. Comprobar si Xn es asintóticamente insesgado:

- Un estimador es asintóticamente insesgado si su sesgo tiende a cero a medida que el tamaño de la muestra (n) tiende a infinito.
- En este caso, el sesgo de Xn es constante e igual a 1/2, independientemente del tamaño de la muestra.
- Por lo tanto, `lim(n→∞) Sesgo(Xn) = 1/2 ≠ 0`
- **Xn no es asintóticamente insesgado**.

3. Calcular el ECM de Xn:

- Primero, necesitamos la varianza poblacional, Var(X):
  `E[X²] = ∫[θ, θ+1] x² * 1 dx = [x³/3] |_[θ, θ+1] = ((θ+1)³/3) - (θ³/3)`
  `Var(X) = E[X²] - (E[X])² = ((θ+1)³/3) - (θ³/3) - (θ + 1/2)² = 1/12`
- `Var(Xn) = Var(X)/n = (1/12)/n = 1/(12n)`
- `ECM(Xn) = Var(Xn) + (Sesgo(Xn))² = 1/(12n) + (1/2)² = 1/(12n) + 1/4`

4. Obtener un estimador insesgado a partir de Xn:

- Sabemos que `E[Xn] = θ + 1/2`
- Despejando θ, tenemos `θ = E[Xn] - 1/2`
- Un estimador insesgado para θ sería `θ^ = Xn - 1/2`

5. Calcular el ECM de θ^:

- Como θ^ es insesgado, `ECM(θ^) = Var(θ^)`
- `Var(θ^) = Var(Xn - 1/2) = Var(Xn)` (ya que la varianza no se ve afectada por constantes)
- `Var(θ^) = 1/(12n)`
- `ECM(θ^) = 1/(12n)`

Conclusión del ejercicio 10:

- Xn es un estimador **sesgado** para θ, con un sesgo de 1/2.
- Xn **no es asintóticamente insesgado**.
- El ECM de Xn es `1/(12n) + 1/4`.
- Un estimador insesgado para θ es `θ^ = Xn - 1/2`.
- El ECM de θ^ es `1/(12n)`.

Comparación:

Aunque Xn es sesgado, su ECM tiende a 1/4 cuando n tiende a infinito. El estimador insesgado θ^ tiene un ECM que tiende a 0 cuando n tiende a infinito. Por lo tanto, **θ^ es preferible** a Xn como estimador de θ, especialmente para muestras grandes, ya que es insesgado y tiene un ECM menor.

Ejercicio 11:

Sea X1, ..., Xn una m.a.s de una v.a. X con función de densidad

```
        θx^(θ-1),  si x ∈ (0, 1)
fθ(x) =
        0,          en otro caso, θ > 0.
```

Calcula el estimador MV de θ y su distribución asintótica. ¿Cuál sería un estimador natural para θ que dependa de la media muestral? ¿Es el estimador MV? Obtén el sesgo de los siguientes estimadores de θ:

`θ^1 = Xn` y `θ^2 = Σ(i=1,n) Xi² / n`

Resolución:

1. Estimador de Máxima Verosimilitud (MV) de θ:

- La función de verosimilitud es:

  $L(\theta) = \Pi(i=1,n)\ f\theta(xi) = \Pi(i=1,n)\ \theta xi^{(\theta-1)} = \theta^n * (x1 * x2 * ... * xn)^{(\theta-1)}$
- La función de log-verosimilitud es:

  $(\theta) = \ln(L(\theta)) = n*\ln(\theta) + (\theta-1) * \Sigma(i=1,n)\ \ln(xi)$
- Derivamos (θ) con respecto a θ e igualamos a cero:

  $d(\theta)/d\theta = n/\theta + \Sigma(i=1,n)\ \ln(xi) = 0$
- Despejando θ:

  $n/\theta = -\ \Sigma(i=1,n)\ \ln(xi)$

  $\theta = -n\ /\ \Sigma(i=1,n)\ \ln(xi)$
- El estimador MV de θ es:

  $\hat{\theta}\_MV = -n\ /\ \Sigma(i=1,n)\ \ln(xi)$

2. Distribución asintótica del estimador MV:

- Para obtener la distribución asintótica del estimador MV, necesitamos calcular la Información de Fisher. Primero, calculamos la segunda derivada de la log-verosimilitud:

  $d^2(\theta)/d\theta^2 = -n/\theta^2$
- La Información de Fisher es:

  $I(\theta) = -E[d^2(\theta)/d\theta^2] = -E[-n/\theta^2] = n/\theta^2$
- Según la teoría asintótica de los estimadores MV, $\hat{\theta}\_MV \sim AN(\theta,\ 1/I(\theta))$.
- Por lo tanto, la distribución asintótica del estimador MV es:

  $\hat{\theta}\_MV \sim AN(\theta,\ \theta^2/n)$

3. Estimador natural para θ basado en la media muestral:

- Primero, calculamos la media poblacional E[X]:

  ☑️ **$= \int[0,1]\ x * f\theta(x)\ dx = \int[0,1]\ x * \theta x^{(\theta-1)}\ dx = \theta * \int[0,1]\ x^{\theta}\ dx$**

  ☑️ **$= \theta * [x^{(\theta+1)} / (\theta+1)]\ |\_[0,1] = \theta / (\theta+1)$**
- ☑️ **es la media muestral, $\bar{X}$.**
- ☑️ **a $\bar{X}$ y despejamos θ:**

  $\bar{X} = \theta\ /\ (\theta+1)$

  $\bar{X}(\theta+1) = \theta$

  $\bar{X}\theta + \bar{X} = \theta$

  $\bar{X} = \theta - \bar{X}\theta$

  $\bar{X} = \theta(1 - \bar{X})$

  $\theta = \bar{X}\ /\ (1 - \bar{X})$

- Un estimador natural para θ basado en la media muestral es:
  $\hat{\theta}_{natural} = \bar{X} / (1 - \bar{X})$

4. ¿Es el estimador natural el estimador MV?

- No, el estimador natural $\hat{\theta}_{natural} = \bar{X} / (1 - \bar{X})$ no es el mismo que el estimador MV $\hat{\theta}_{MV} = -n / \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)$.

5. Sesgo de $\hat{\theta}_1 = X_n$:

- [x] **$= \theta/(\theta+1)$**
- $Sesgo(\hat{\theta}_1) = E[\hat{\theta}_1] - \theta = \theta/(\theta+1) - \theta = (\theta - \theta(\theta+1))/(\theta+1) = -\theta^2/(\theta+1)$
- **$\hat{\theta}_1$ es sesgado.**

6. Sesgo de $\hat{\theta}_2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 / n$:

- Primero, calculamos $E[X^2]$:
  $E[X^2] = \int_{[0,1]} x^2 * f_\theta(x)\, dx = \int_{[0,1]} x^2 * \theta x^{(\theta-1)}\, dx = \theta * \int_{[0,1]} x^{(\theta+1)}\, dx$
  $E[X^2] = \theta * [x^{(\theta+2)} / (\theta+2)] \big|_{[0,1]} = \theta / (\theta+2)$
- $E[\hat{\theta}_2] = E[\sum_{i=1}^{n} X_i^2 / n] = (1/n) * \sum_{i=1}^{n} E[X_i^2] = (1/n) * n * E[X^2] = E[X^2] = \theta/(\theta+2)$
- $Sesgo(\hat{\theta}_2) = E[\hat{\theta}_2] - \theta = \theta/(\theta+2) - \theta = (\theta - \theta(\theta+2))/(\theta+2) = -2\theta/(\theta+2)$
- **$\hat{\theta}_2$ es sesgado.**

Conclusión del ejercicio 11:

- El estimador de Máxima Verosimilitud (MV) de θ es $\hat{\theta}_{MV} = -n / \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)$, con distribución asintótica $AN(\theta, \theta^2/n)$.
- Un estimador natural para θ basado en la media muestral es $\hat{\theta}_{natural} = \bar{X} / (1 - \bar{X})$, que no coincide con el estimador MV.
- Tanto $\hat{\theta}_1 = X_n$ como $\hat{\theta}_2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 / n$ son estimadores sesgados de θ.

Ejercicio 12:

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a.s de una v.a. X con función de densidad

```
         (x/θ²) * e^(-x/θ),  si x > 0

fθ(x) =
```

```
        0,                      en otro caso, θ > 0.
```

Calcula el estimador MV de θ y su distribución asintótica.

Resolución:

1. Estimador de Máxima Verosimilitud (MV) de θ:

- La función de verosimilitud es:
  $L(\theta) = \Pi(i=1,n)\ f_\theta(x_i) = \Pi(i=1,n)\ (x_i/\theta^2) * e^{(-x_i/\theta)} = (x_1 * x_2 * ... * x_n) / \theta^{(2n)} * e^{(-\Sigma(i=1,n)\ x_i/\theta)}$
- La función de log-verosimilitud es:
  $(\theta) = \ln(L(\theta)) = \Sigma(i=1,n)\ \ln(x_i) - 2n*\ln(\theta) - (1/\theta) * \Sigma(i=1,n)\ x_i$
- Derivamos (θ) con respecto a θ e igualamos a cero:
  $d(\theta)/d\theta = -2n/\theta + (1/\theta^2) * \Sigma(i=1,n)\ x_i = 0$
- Despejando θ:
  $(1/\theta^2) * \Sigma(i=1,n)\ x_i = 2n/\theta$
  $\Sigma(i=1,n)\ x_i = 2n\theta$
  $\theta = \Sigma(i=1,n)\ x_i / (2n) = \bar{X} / 2$
- El estimador MV de θ es:
  $\hat{\theta}\_MV = \bar{X} / 2$

2. Distribución asintótica del estimador MV:

- Para obtener la distribución asintótica del estimador MV, necesitamos calcular la Información de Fisher. Primero, calculamos la segunda derivada de la log-verosimilitud:
  $d^2(\theta)/d\theta^2 = 2n/\theta^2 - (2/\theta^3) * \Sigma(i=1,n)\ x_i$
- La Información de Fisher es:
  $I(\theta) = -E[d^2(\theta)/d\theta^2] = -E[2n/\theta^2 - (2/\theta^3) * \Sigma(i=1,n)\ x_i] = -2n/\theta^2 + (2/\theta^3) * E[\Sigma(i=1,n)\ x_i]$
  Para calcular E[Σ(i=1,n) xi] necesitamos E[X]:
  ✅ **= ∫[0,∞] x * fθ(x) dx = ∫[0,∞] x * (x/θ²) * e^(-x/θ) dx = (1/θ²) * ∫[0,∞] x² * e^(-x/θ) dx**
  Usando integración por partes o tablas de integrales, se puede demostrar que $\int[0,\infty]\ x^2 * e^{(-x/\theta)}\ dx = 2\theta^3$
  ✅ **= (1/θ²) * 2θ³ = 2θ**
  ✅ **= 2nθ**
  $I(\theta) = -2n/\theta^2 + (2/\theta^3) * 2n\theta = -2n/\theta^2 + 4n/\theta^2 = 2n/\theta^2$

- Según la teoría asintótica de los estimadores MV, `θ^_MV ~ AN(θ, 1/I(θ))`.
- Por lo tanto, la distribución asintótica del estimador MV es:

  `θ^_MV ~ AN(θ, θ²/2n)`

Conclusión del ejercicio 12:

- El estimador de Máxima Verosimilitud (MV) de θ es `θ^_MV = X̄ / 2`.
- La distribución asintótica del estimador MV es `AN(θ, θ²/2n)`.

Ejercicio 13:

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a.s de una v.a. $X \sim Pois(\lambda)$, $\lambda > 0$. Calcula el estimador MV de λ y su distribución asintótica.

Resolución:

1. Estimador de Máxima Verosimilitud (MV) de λ:

- La función de probabilidad de una distribución de Poisson es:

  `P(X = x) = (e^(-λ) * λ^x) / x!`
- La función de verosimilitud es:

  `L(λ) = Π(i=1,n) P(Xi = xi) = Π(i=1,n) (e^(-λ) * λ^xi) / xi! = e^(-nλ) * λ^(Σ(i=1,n) xi) / Π(i=1,n) xi!`
- La función de log-verosimilitud es:

  `(λ) = ln(L(λ)) = -nλ + Σ(i=1,n) xi * ln(λ) - Σ(i=1,n) ln(xi!)`
- Derivamos (λ) con respecto a λ e igualamos a cero:

  `d(λ)/dλ = -n + Σ(i=1,n) xi / λ = 0`
- Despejando λ:

  `Σ(i=1,n) xi / λ = n`

  `λ = Σ(i=1,n) xi / n = X̄`
- El estimador MV de λ es:

  `λ^_MV = X̄`

2. Distribución asintótica del estimador MV:

- Para obtener la distribución asintótica del estimador MV, necesitamos calcular la Información de Fisher. Primero, calculamos la segunda derivada de la log-verosimilitud:

  `d²(λ)/dλ² = -Σ(i=1,n) xi / λ²`

- La Información de Fisher es:

  $I(\lambda) = -E[d^2(\lambda)/d\lambda^2] = -E[-\Sigma(i=1,n)\ xi / \lambda^2] = (1/\lambda^2) * E[\Sigma(i=1,n)\ xi]$

  Como ✅ = λ para una distribución de Poisson, $E[\Sigma(i=1,n)\ xi] = \Sigma(i=1,n)\ E[Xi] = n\lambda$

  $I(\lambda) = (1/\lambda^2) * n\lambda = n/\lambda$
- Según la teoría asintótica de los estimadores MV, $\lambda\hat{}\_MV \sim AN(\lambda, 1/I(\lambda))$.
- Por lo tanto, la distribución asintótica del estimador MV es:

  $\lambda\hat{}\_MV \sim AN(\lambda, \lambda/n)$

Conclusión del ejercicio 13:

- El estimador de Máxima Verosimilitud (MV) de λ es $\lambda\hat{}\_MV = \bar{X}$.
- La distribución asintótica del estimador MV es $AN(\lambda, \lambda/n)$.

Ejercicio 14:

Sea X1, ..., Xn una m.a.s de una v.a. X con función de densidad

```
        θx^(θ-1) / 2^θ,  si x ∈ [0, 2]
fθ(x) =
        0,                en otro caso, θ > 0.
```

Calcula el estimador MV de θ y su distribución asintótica. ¿Coincide el estimador MV con aquel calculado en el Ejercicio 5?

Resolución:

1. Estimador de Máxima Verosimilitud (MV) de θ:

- La función de verosimilitud es:

  $L(\theta) = \Pi(i=1,n)\ f\theta(xi) = \Pi(i=1,n)\ (\theta xi\hat{}(\theta-1) / 2\hat{}\theta) = \theta\hat{}n * (x1 * x2 * ... * xn)\hat{}(\theta-1) / 2\hat{}(n\theta)$
- La función de log-verosimilitud es:

  $(\theta) = \ln(L(\theta)) = n*\ln(\theta) + (\theta-1) * \Sigma(i=1,n)\ \ln(xi) - n\theta*\ln(2)$
- Derivamos (θ) con respecto a θ e igualamos a cero:

  $d(\theta)/d\theta = n/\theta + \Sigma(i=1,n)\ \ln(xi) - n*\ln(2) = 0$
- Despejando θ:

  $n/\theta = n*\ln(2) - \Sigma(i=1,n)\ \ln(xi)$

$\theta = n / (n*\ln(2) - \Sigma(i=1,n) \ln(xi))$

- El estimador MV de θ es:

  $\hat{\theta}_{MV} = n / (n*\ln(2) - \Sigma(i=1,n) \ln(xi))$

2. Distribución asintótica del estimador MV:

- Para obtener la distribución asintótica del estimador MV, necesitamos calcular la Información de Fisher. Primero, calculamos la segunda derivada de la log-verosimilitud:

  $d^2(\theta)/d\theta^2 = -n/\theta^2$

- La Información de Fisher es:

  $I(\theta) = -E[d^2(\theta)/d\theta^2] = -E[-n/\theta^2] = n/\theta^2$

- Según la teoría asintótica de los estimadores MV, $\hat{\theta}_{MV} \sim AN(\theta, 1/I(\theta))$.
- Por lo tanto, la distribución asintótica del estimador MV es:

  $\hat{\theta}_{MV} \sim AN(\theta, \theta^2/n)$

3. Comparación con el estimador del Ejercicio 5:

- En el Ejercicio 5, obtuvimos un estimador natural basado en la media muestral: $\hat{\theta} = \bar{X} / (2 - \bar{X})$.
- El estimador MV obtenido aquí es $\hat{\theta}_{MV} = n / (n*\ln(2) - \Sigma(i=1,n) \ln(xi))$.
- **Los estimadores no coinciden.**

Conclusión del ejercicio 14:

- El estimador de Máxima Verosimilitud (MV) de θ es $\hat{\theta}_{MV} = n / (n*\ln(2) - \Sigma(i=1,n) \ln(xi))$.
- La distribución asintótica del estimador MV es $AN(\theta, \theta^2/n)$.
- El estimador MV no coincide con el estimador natural basado en la media muestral obtenido en el Ejercicio 5.

Ejercicio 15:

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a.s de una v.a. X con función de densidad

```
        x / (2θ³) * e^(-x/θ),  si x > 0
fθ(x) =
        0,                      en otro caso, θ > 0.
```

Calcula el estimador MV de θ y su distribución asintótica (en función de $\mu = E[X]$).

Resolución:

1. Estimador de Máxima Verosimilitud (MV) de θ:

- La función de verosimilitud es:
  $L(\theta) = \Pi(i=1,n)\ f\theta(xi) = \Pi(i=1,n)\ (xi / (2\theta^3)) * e^{\wedge}(-xi/\theta) = (x1 * x2 * ... * xn) / (2^{\wedge}n * \theta^{\wedge}(3n)) * e^{\wedge}(-\Sigma(i=1,n)\ xi/\theta)$
- La función de log-verosimilitud es:
  $(\theta) = \ln(L(\theta)) = \Sigma(i=1,n)\ \ln(xi) - n*\ln(2) - 3n*\ln(\theta) - (1/\theta) * \Sigma(i=1,n)\ xi$
- Derivamos (θ) con respecto a θ e igualamos a cero:
  $d(\theta)/d\theta = -3n/\theta + (1/\theta^2) * \Sigma(i=1,n)\ xi = 0$
- Despejando θ:
  $(1/\theta^2) * \Sigma(i=1,n)\ xi = 3n/\theta$
  $\Sigma(i=1,n)\ xi = 3n\theta$
  $\theta = \Sigma(i=1,n)\ xi / (3n) = \bar{X} / 3$
- El estimador MV de θ es:
  $\theta\hat{}\_MV = \bar{X} / 3$

2. Distribución asintótica del estimador MV:

- Primero, necesitamos calcular $\mu = E[X]$:
  ✅
  $= \int[0,\infty]\ x * f\theta(x)\ dx = \int[0,\infty]\ x * (x / (2\theta^3)) * e^{\wedge}(-x/\theta)\ dx = (1/(2\theta^3)) * \int[0,\infty]\ x^2 * e^{\wedge}(-x/\theta)\ dx$

  Usando integración por partes o tablas de integrales, se puede demostrar que $\int[0,\infty]\ x^2 * e^{\wedge}(-x/\theta)\ dx = 2\theta^3$

  ✅ **$= (1/(2\theta^3)) * 2\theta^3 = 1 * 2 * \theta = 2\theta$**

  Por lo tanto, $\mu = 2\theta$, y $\theta = \mu/2$.

- Para obtener la distribución asintótica del estimador MV, necesitamos calcular la Información de Fisher. Primero, calculamos la segunda derivada de la log-verosimilitud:
  $d^2(\theta)/d\theta^2 = 3n/\theta^2 - (2/\theta^3) * \Sigma(i=1,n)\ xi$

- La Información de Fisher es:
  $I(\theta) = -E[d^2(\theta)/d\theta^2] = -E[3n/\theta^2 - (2/\theta^3) * \Sigma(i=1,n)\ xi] = -3n/\theta^2 + (2/\theta^3) * E[\Sigma(i=1,n)\ xi]$
  ✅ **= n * 2θ = 2nθ**

  $I(\theta) = -3n/\theta^2 + (2/\theta^3) * 2n\theta = -3n/\theta^2 + 4n/\theta^2 = n/\theta^2$

- Según la teoría asintótica de los estimadores MV, $\hat{\theta}\_{MV} \sim AN(\theta, 1/I(\theta))$.
  Como $\theta = \mu/2$:
  $\hat{\theta}\_{MV} = \bar{X}/3 \sim AN(\mu/2, (\mu/2)^2/n) = AN(\mu/2, \mu^2/(4n))$

Conclusión del ejercicio 15:

- El estimador de Máxima Verosimilitud (MV) de θ es $\hat{\theta}\_{MV} = \bar{X} / 3$.
- La distribución asintótica del estimador MV es $AN(\mu/2, \mu^2/(4n))$, donde $\mu = E[X]$.

Ejercicio 16:

Sea X1, ..., Xn una m.a.s de una v.a. X con función de densidad

```
        e^(θ-x),  si x > θ
fθ(x) =
        0,          en otro caso, θ > 0.
```

✅

= θ + 1, ¿coincide el estimador MV con alguna propuesta formulada en función de la media muestral?

Resolución:

1. Estimador de Máxima Verosimilitud (MV) de θ:

- La función de verosimilitud es:
  $L(\theta) = \Pi(i=1,n)\ f\theta(xi) = \Pi(i=1,n)\ e^{(\theta-xi)} = e^{(n\theta - \Sigma(i=1,n)\ xi)}$, para $xi > \theta$ para todo i.
- Para maximizar L(θ), necesitamos maximizar el exponente $n\theta - \Sigma(i=1,n)\ xi$, sujeto a la restricción de que $xi > \theta$ para todo i.
- Esto implica que θ debe ser menor que el mínimo de las observaciones, $\min(x1, x2, ..., xn)$.

- Como el exponente es una función creciente de θ, L(θ) se maximiza cuando θ es lo más grande posible, sin violar la restricción `xi > θ`.
- Por lo tanto, el estimador MV de θ es:
  `θ̂_MV = min(X1, X2, ..., Xn) = X(1)`

2. Comparación con un estimador basado en la media muestral:

- Nos dan que ✅ = **θ + 1**.
- ✅ **es la media muestral, X̄.**
- ✅ **a X̄, tenemos** `X̄ = θ + 1`.
- Despejando θ, obtenemos un estimador basado en la media muestral:
  `θ̂ = X̄ - 1`

3. Comparación de los estimadores:

- El estimador MV es `θ̂_MV = X(1) = min(X1, X2, ..., Xn)`.
- El estimador basado en la media muestral es `θ̂ = X̄ - 1`.
- Estos dos estimadores **no coinciden**.

Conclusión del ejercicio 16:

- El estimador de Máxima Verosimilitud (MV) de θ es `θ̂_MV = min(X1, X2, ..., Xn)`.
- El estimador basado en la media muestral, `θ̂ = X̄ - 1`, no coincide con el estimador MV.

Ejercicio 17:

Sea X1, ..., Xn una m.a.s de una v.a. X con función de densidad

```
        θ / x^(θ+1),  si x > 1
fθ(x) =
        0,            en otro caso, θ > 0.
```

✅

= θ/(θ-1), ¿coincide el estimador MV con alguna propuesta formulada en función de la media muestral?

Resolución:

1. Estimador de Máxima Verosimilitud (MV) de θ:

- La función de verosimilitud es:

  $L(\theta) = \Pi(i=1,n)\ f\theta(xi) = \Pi(i=1,n)\ \theta / xi\text{^}(\theta+1) = \theta\text{^}n / (x1 * x2 * ... * xn)\text{^}(\theta+1)$
- La función de log-verosimilitud es:

  $(\theta) = \ln(L(\theta)) = n*\ln(\theta) - (\theta+1) * \Sigma(i=1,n)\ \ln(xi)$
- Derivamos (θ) con respecto a θ e igualamos a cero:

  $d(\theta)/d\theta = n/\theta - \Sigma(i=1,n)\ \ln(xi) = 0$
- Despejando θ:

  $n/\theta = \Sigma(i=1,n)\ \ln(xi)$

  $\theta = n / \Sigma(i=1,n)\ \ln(xi)$
- El estimador MV de θ es:

  $\theta\hat{}\_MV = n / \Sigma(i=1,n)\ \ln(xi)$

2. Comparación con un estimador basado en la media muestral:

- Nos dan que ✅ = **θ/(θ-1)**.
- ✅ **es la media muestral, X̄.**
- ✅ **a X̄, tenemos** $\bar{X} = \theta/(\theta-1)$.
- Despejando θ:

  $\bar{X}(\theta - 1) = \theta$

  $\bar{X}\theta - \bar{X} = \theta$

  $\bar{X}\theta - \theta = \bar{X}$

  $\theta(\bar{X} - 1) = \bar{X}$

  $\theta = \bar{X} / (\bar{X} - 1)$
- Un estimador basado en la media muestral es:

  $\theta\hat{} = \bar{X} / (\bar{X} - 1)$

3. Comparación de los estimadores:

- El estimador MV es $\theta\hat{}\_MV = n / \Sigma(i=1,n)\ \ln(xi)$.
- El estimador basado en la media muestral es $\theta\hat{} = \bar{X} / (\bar{X} - 1)$.
- Estos dos estimadores **no coinciden**.

Conclusión del ejercicio 17:

- El estimador de Máxima Verosimilitud (MV) de θ es $\theta\hat{}\_MV = n / \Sigma(i=1,n)\ \ln(xi)$.

- El estimador basado en la media muestral, `θ̂ = X̄ / (X̄ - 1)`, no coincide con el estimador MV.

Ejercicio 18:

Sea X_1, ..., X_n una m.a.s de una v.a. X con función de densidad

```
        (2θ / (1-θ)) * (x/ (1-θ))^(3θ-1),  si x ∈ [0, 1]
fθ(x) =
        0,                                  en otro caso, θ > 0, θ ≠ 1.
```

Calcula el estimador MV de θ.

Resolución:

- La función de verosimilitud es:
  `L(θ) = Π(i=1,n) fθ(xi) = Π(i=1,n) [(2θ / (1-θ)) * (xi / (1-θ))^(3θ-1)]`
  `L(θ) = (2θ / (1-θ))^n * Π(i=1,n) xi^(3θ-1) / (1-θ)^(n(3θ-1))`
  `L(θ) = (2θ)^n / (1-θ)^(4nθ - n) * Π(i=1,n) xi^(3θ-1)`
- La función de log-verosimilitud es:
  `(θ) = ln(L(θ)) = n*ln(2) + n*ln(θ) - n(4θ - 1)*ln(1-θ) + (3θ-1) * Σ(i=1,n) ln(xi)`
- Derivamos (θ) con respecto a θ e igualamos a cero:
  `d(θ)/dθ = n/θ - 4n*ln(1-θ) + n(4θ - 1)/(1-θ) + 3 * Σ(i=1,n) ln(xi) = 0`
- Esta ecuación es difícil de resolver analíticamente para θ. Se necesitarían métodos numéricos para encontrar el valor de θ que maximiza la log-verosimilitud.

Conclusión del ejercicio 18:

- La ecuación para encontrar el estimador MV de θ es `n/θ - 4n*ln(1-θ) + n(4θ - 1)/(1-θ) + 3 * Σ(i=1,n) ln(xi) = 0`.
- No se puede obtener una solución analítica explícita para θ. Se requieren métodos numéricos para encontrar el estimador MV.

Ejercicio 19:

Sea X_1, ..., X_n una m.a.s de una v.a. X con función de densidad

```
        λ^α * x^(α-1) * e^(-λx) / Γ(α),  si x > 0
fα,λ(x) =
        0,                                en otro caso, α, λ > 0.
```

Disponiendo de la siguiente información:

☑ = **α/λ** y `Var(X) = α/λ²`

¿qué estimadores de α y λ surgen de manera natural?

Resolución:

- Nos dan ☑ = **α/λ** y `Var(X) = α/λ²` .
- ☑ **y Var(X) son la media muestral (X̄) y la varianza muestral (S²), respectivamente.**
- Igualamos los estimadores naturales a los valores teóricos:
    1. `X̄ = α/λ`
    2. `S² = α/λ²`
- Tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (α y λ).
- De la ecuación 1, despejamos α: `α = λX̄`
- Sustituimos α en la ecuación 2: `S² = (λX̄)/λ² = X̄/λ`
- Despejamos λ: `λ = X̄/S²`
- Sustituimos λ en la ecuación para α: `α = (X̄/S²) * X̄ = X̄²/S²`

Conclusión del ejercicio 19:

Los estimadores naturales para α y λ que surgen a partir de la media y varianza muestral son:

- `λ^ = X̄/S²`
- `α^ = X̄²/S²`

Ejercicio 20:

Sea X1, ..., Xn una m.a.s de una v.a. X ~ U(-θ, θ), θ > 0. ¿En términos de media, de qué se diferencia esta distribución de la U(0, θ)? ¿Por qué esto supone una dificultad añadida a la estimación de θ? ¿Cuál sería un estimador natural para θ?

Resolución:

1. Diferencia entre U(-θ, θ) y U(0, θ) en términos de media:

- La media de una distribución U(0, θ) es θ/2.
- La media de una distribución U(-θ, θ) es (-θ + θ)/2 = 0.

2. Dificultad añadida a la estimación de θ:

- En la distribución U(0, θ), la media muestral ($\bar{X}$) podía usarse para estimar θ (como en el Ejercicio 1).
- En la distribución U(-θ, θ), la media poblacional es 0, independientemente del valor de θ.
- Por lo tanto, la media muestral $\bar{X}$ no proporciona información útil para estimar θ en este caso, ya que siempre será cercana a cero, sin importar el valor real de θ.

3. Estimador natural para θ:

- Un estimador natural para θ en una distribución U(-θ, θ) sería considerar el valor absoluto máximo de la muestra, tanto positivo como negativo.
- Podemos definir el estimador como: `θˆ = max(|X(1)|, |X(n)|)`, donde X(1) es el mínimo y X(n) es el máximo de la muestra.
- Otra opción sería `θˆ = (|X(1)| + |X(n)|) / 2`
- También se puede usar `θˆ = max(X1,...,Xn) − min(X1,...,Xn)) / 2`

Conclusión del ejercicio 20:

- La distribución U(-θ, θ) tiene media 0, mientras que la U(0, θ) tiene media θ/2.
- La media muestral no es útil para estimar θ en la distribución U(-θ, θ).
- Un estimador natural para θ en este caso es `θˆ = max(|X(1)|, |X(n)|)`.

Ejercicio 21:

Sea X una v.a. que modeliza cierto fenómeno de interés. Se sabe que

`P(X = −1) = (1 − θ)/2`, `P(X = 0) = 1/2` y `P(X = 1) = θ/2`,

donde θ es un parámetro poblacional desconocido tal que θ ∈ (0, 1). Se pide:

(a) Dada una m.a.s. $X_1, \ldots, X_n$ de la v.a. X, determinar el estimador MV de θ.

(b) Si se considera un tamaño muestral $n = 50$ y se observa una realización particular tal que $n_{-1} = 10$, $n_0 = 25$ y $n_1 = 15$, donde n_i es la frecuencia del dato x_i (número de veces que aparece x_i en la muestra), proporcionar la estimación MV de θ.

Resolución:

a) Estimador de Máxima Verosimilitud (MV) de θ:**

- La función de verosimilitud para una muestra $X_1, \ldots, X_n$ es:

  $$L(\theta) = \Pi(i=1,n)\ P(X_i = x_i) = [(1-\theta)/2]^{(n-1)} * (1/2)^{n0} * (\theta/2)^{n1}$$

  donde n-1, n0 y n1 son la cantidad de veces que aparece -1, 0 y 1 en la muestra, respectivamente.
- La función de log-verosimilitud es:

  $$(\theta) = \ln(L(\theta)) = n-1 * \ln((1-\theta)/2) + n0 * \ln(1/2) + n1 * \ln(\theta/2)$$

  $$(\theta) = n-1 * [\ln(1-\theta) - \ln(2)] + n0 * [-\ln(2)] + n1 * [\ln(\theta) - \ln(2)]$$

  $$(\theta) = n-1 * \ln(1-\theta) - n-1 * \ln(2) - n0 * \ln(2) + n1 * \ln(\theta) - n1 * \ln(2)$$
- Derivamos (θ) con respecto a θ e igualamos a cero:

  $$d(\theta)/d\theta = -n-1 / (1-\theta) + n1 / \theta = 0$$
- Despejando θ:

  $$n1 / \theta = n-1 / (1-\theta)$$

  $$n1(1-\theta) = n-1 * \theta$$

  $$n1 - n1\theta = n-1 * \theta$$

  $$n1 = n-1 * \theta + n1\theta$$

  $$n1 = \theta(n-1 + n1)$$

  $$\theta = n1 / (n-1 + n1)$$
- El estimador MV de θ es:

  $$\hat{\theta}\_MV = n1 / (n-1 + n1)$$

(b) Estimación MV de θ con n = 50, n-1 = 10, n0 = 25 y n1 = 15:

- Sustituimos los valores en la fórmula del estimador MV:

  $$\hat{\theta}\_MV = 15 / (10 + 15) = 15 / 25 = 3/5 = 0.6$$

Conclusión del ejercicio 21:

- El estimador de Máxima Verosimilitud (MV) de θ es $\hat{\theta}\_MV = n1 / (n-1 + n1)$, donde n1 es la cantidad de veces que aparece 1 en la muestra y n-1 la cantidad de veces que aparece -1.

- Con los datos proporcionados (n = 50, n-1 = 10, n0 = 25 y n1 = 15), la estimación MV de θ es `θ^_MV = 0.6`.

Interpretación del ejercicio 21:

El estimador MV de θ se basa únicamente en la proporción de veces que aparecen los valores 1 y -1 en la muestra. El valor 0 no influye en la estimación de θ. Esto tiene sentido, ya que la probabilidad de obtener 0 es constante (1/2) e independiente de θ.

Aclaración importante

¿Es preferible el método de los momentos o el m´etodo de m´axima verosimilitud?:

“El metodo de los momentos y el metodo maxima verosimilitud coinciden en el caso de la estimacion de media y varianza en poblaciones normales, pero no coinciden para una amplia gama de variables aleatorias. Ello corrobora la consideracion anterior acerca de que los resultados de ambos metodos son con frecuencia coincidentes, sin que sea cierto en general. La estimacion por maxima verosimilitud (m´as complicada en calculos), conduce a estimadores de menor riesgo que el metodo de los momentos (mas sencillo desde el punto de vista practico), sin que pueda enunciarse una regla general en este sentido. Como ya se ha indicado, a la hora de comparar dos estimadores para elegir el mejor, la regla general es que no hay reglas generales que permitan establecer que un tipo de estimador sea siempre mejor que otro: exigir insesgadez puede conducir a varianzas disparatadas y permitir sesgo puede implicar un lastre en la estimacion. Ello lleva, por tanto, a la necesidad de decidir en cada caso concreto calculando el error de los estimadores para hallar el de menor valor. Esto quiere decir que no es posible predecir de antemano si los estimadores obtenidos por el metodo de los momentos son mejores que los obtenidos por m´axima verosimilitud y viceversa.”

Elementos de Estadıstica Aplicada. Teorıa de muestras e Inferencia Estadıstica, pp. 88-89. J. J. Muruzabal Irigoyen – Ed. Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. (Adaptacion)