Beweis des Satzes von Sturm:

Wir betrachten der Sturmfolge $(f_0,\dots,f_\ell)$ von f und die Folge $(g_0,\dots,g_\ell)$ mit $g_i := \frac{f_i}{f_\ell}$.

Da $f_0,\dots,f_\ell$ die Zwischenergebnisse des modifizierten Euklidischen Algorithmus sind ist $f_\ell = ggT(f, f')$ und $g_i = \frac{f_i}{f_\ell} \in \mathbb{R}[X]$.

Ist $c \in \mathbb{R}$ keine Nullstelle von f, dann ist c auch keine Nullstelle von $f_\ell = ggT(f, f')$ (vgl. A.2).

Das gilt insbesondere für $c \in \{a, b\}$. Das heißt

$$(g_0(c), \dots, g_\ell(c)) = \frac{1}{f_\ell(c)} (f_0(c), \dots, f_\ell(c))$$

für $c \in \{a, b\}$

$\Rightarrow$ $\operatorname{signvar}(g_0(c), \dots, g_\ell(c)) = \operatorname{signvar}(f_0(c), \dots, f_\ell(c))$

für $c \in \{a, b\}$.

$\Rightarrow$ Wir können in der Behauptung $v(f; a) - v(f; b)$ durch

$\mathrm{signvar}(g_0(a),\ldots,g_\ell(a)) - \mathrm{signvar}(g_0(b),\ldots,g_\ell(b))$

austauschen.

Wir lassen x die reelle Achse $\mathbb{R}$ von $-\infty$ nach $+\infty$ durchlaufen und beobachten dabei die Vorzeichenänderungen in der Folge $(g_0(x),\ldots,g_\ell(x))$.

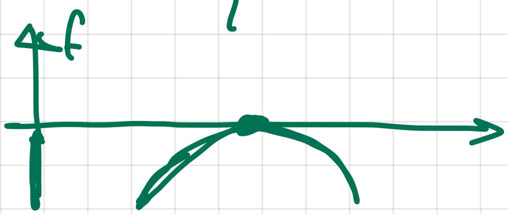
Damit sich ~~etwas~~ was an den Vorzeichen der Werte $g_0(x),\ldots,g_\ell(x)$ ändert, sollte eine Nullstelle eines der Polynome $g_0,\ldots,g_\ell$ erreicht bzw. überquert werden. (g_ℓ hat keine Nullstellen, denn $g_\ell = \frac{f_\ell}{f_\ell} = 1$).

Wir analysieren, was sich am Anfang der Folge $(g_0(x),\ldots,g_\ell(x))$ ändert, wenn man eine Nullstelle c von $g_0 = \frac{f}{\mathrm{ggT}(f,f')}$ überquert.

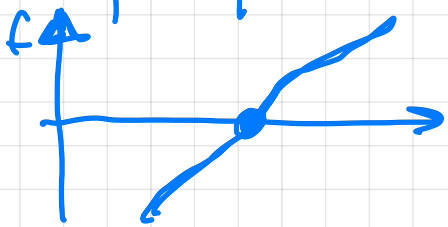
Man hat $g_0(c) = 0$ und damit auch $f(c) = 0$ und wir betrachten eine kleine Umgebung von c.

$(f_0(x), f_1(x), \ldots, f_\ell(x)) = (f(x), f'(x), \ldots\ldots)$. Beim Überqueren der Nullstelle c von f gibt es in einer kleinen Umgebung von c die folgenden 4 Möglichkeiten.

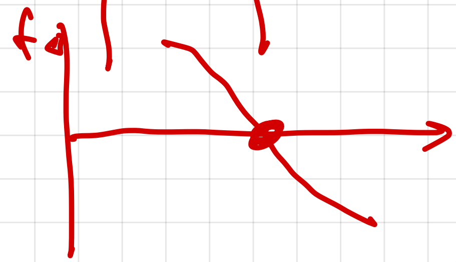
	vor c	nach c
f	negativ	negativ



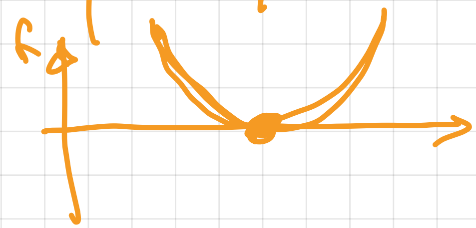
	vor c	nach c
f	negativ	positiv



	vor c	nach c
f	positiv	negativ

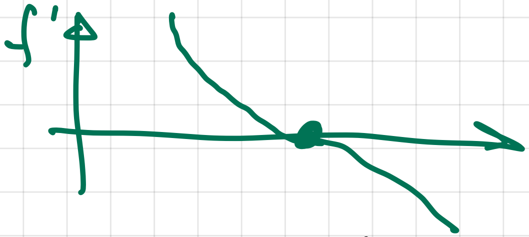


	vor c	nach c
f	positiv	positiv



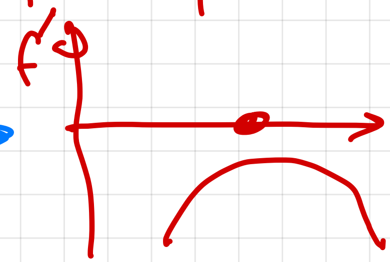
Für f' hat man dann entsprechend die folgenden Möglichkeiten:

	vor c	nach c
f'	positiv	negativ

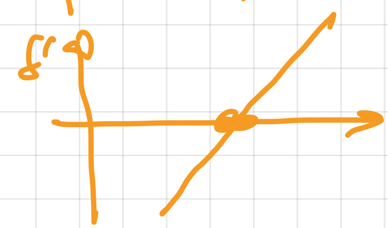


	vor c	nach c
f'	positiv	positiv

	vor c	nach c
f'	negativ	negativ



	vor c	nach c
f'	neg.	pos



Wir können hieraus nun die Möglichkeiten für die Vorzeichen der ersten beiden Glieder der Folge $(f_0(x), \ldots, f_\ell(x))$ beschreiben: Beim Überqueren von c hat man 4 Möglichkeiten:

$(-,+,\ldots) \rightsquigarrow (-,-,\ldots)$ $\quad (-,+,\ldots) \rightsquigarrow (+,+,\ldots)$ $\quad (+,-,\ldots) \rightsquigarrow (-,-,\ldots)$ $\quad (+,-,\ldots) \rightsquigarrow (+,+,\ldots)$

Man sieht: in jedem der vier Fälle wird am Anfang der Sturmfolge eine Vorzeichenänderung verloren.

Wir betrachten nun eine Nullstelle $c \in \mathbb{R}$ eines Polynoms g_i mit $1 \leq i \leq \ell - 1$. Nach der Definition der Sturmfolge gilt ~~gilt~~ $f_{i-1} = q_i f_i - f_{i+1}$ mit $q_i \in \mathbb{R}[x]$.
Wir teilen diese Gleichung durch f_ℓ und erhalten:

$$\frac{f_{i-1}}{f_\ell} = q_i \frac{f_i}{f_\ell} - \frac{f_{i+1}}{f_\ell}$$

, das heißt

$$g_{i-1} = q_i \cdot g_i - g_{i+1}.$$

Wegen $g_i(c) = 0$ hat man also $g_{i-1}(c) = -g_{i+1}(c)$.

Nach dem Aufbau des Euklidischen Algorithmus gilt $\operatorname{ggT}(f_i, f_{i+1}) = \operatorname{ggT}(f, f') = f_\ell$

$$\Rightarrow \operatorname{ggT}(g_i, g_{i+1}) = \operatorname{ggT}\left(\frac{f_i}{f_\ell}, \frac{f_{i+1}}{f_\ell}\right) = \frac{\operatorname{ggT}(f_i, f_{i+1})}{f_\ell}$$

$$= \frac{f_\ell}{f_\ell} = 1. \Rightarrow g_{i+1}(c) \neq 0,$$

denn sonst wäre $x - c$ gemeinsamer Teiler von g_i und g_{i+1}!

$\Rightarrow$ $(g_{i-1}(c), g_i(c), g_{i+1}(c))$ ist $(+, 0, -)$ oder $(-, 0, +)$.

$\Rightarrow$ für x in einer kleinen Umgebung von c gilt

$(g_{i-1}(x), g_i(x), g_{i+1}(x))$ ist $(+, g_i(x), -)$ oder $(-, g_i(x), +)$

mit $g_i(x) \in \mathbb{R}$. Unabhängig von dem Vorzeichen von $g_i(x) \in \mathbb{R}$ hat man dann in $(g_{i-1}(x), g_i(x), g_{i+1}(x))$ genau eine Vorzeichenänderung.

$$(\ldots +, + \mid -, \ldots -)$$

$$\Downarrow$$

$$(\ldots + \mid -, -, \ldots)$$

Zusammenfassend: Beim Überqueren einer Nullstelle von g_0 ($\Leftrightarrow$ Nullstelle von f) verliert man in $(g_0(x), \ldots, g_\ell(x))$ genau eine Vorzeichenänderung.

Beim Erreichen oder Überqueren der Nullstellen anderer Polynome $g_1, \dots, g_{l-1}$ ($g_l = 1$) bleibt die Anzahl der Vorzeichenänderungen erhalten.

$\Rightarrow$ Die Anzahl der Nullstellen von g_0 (und f) in $[a, b]$ ist genau

$$\text{signvar}(g_0(a), \dots, g_l(a)) - \text{signvar}(g_0(b), \dots, g_l(b)). \qquad \square$$

Beispiele:

- $f = x^3 - x$

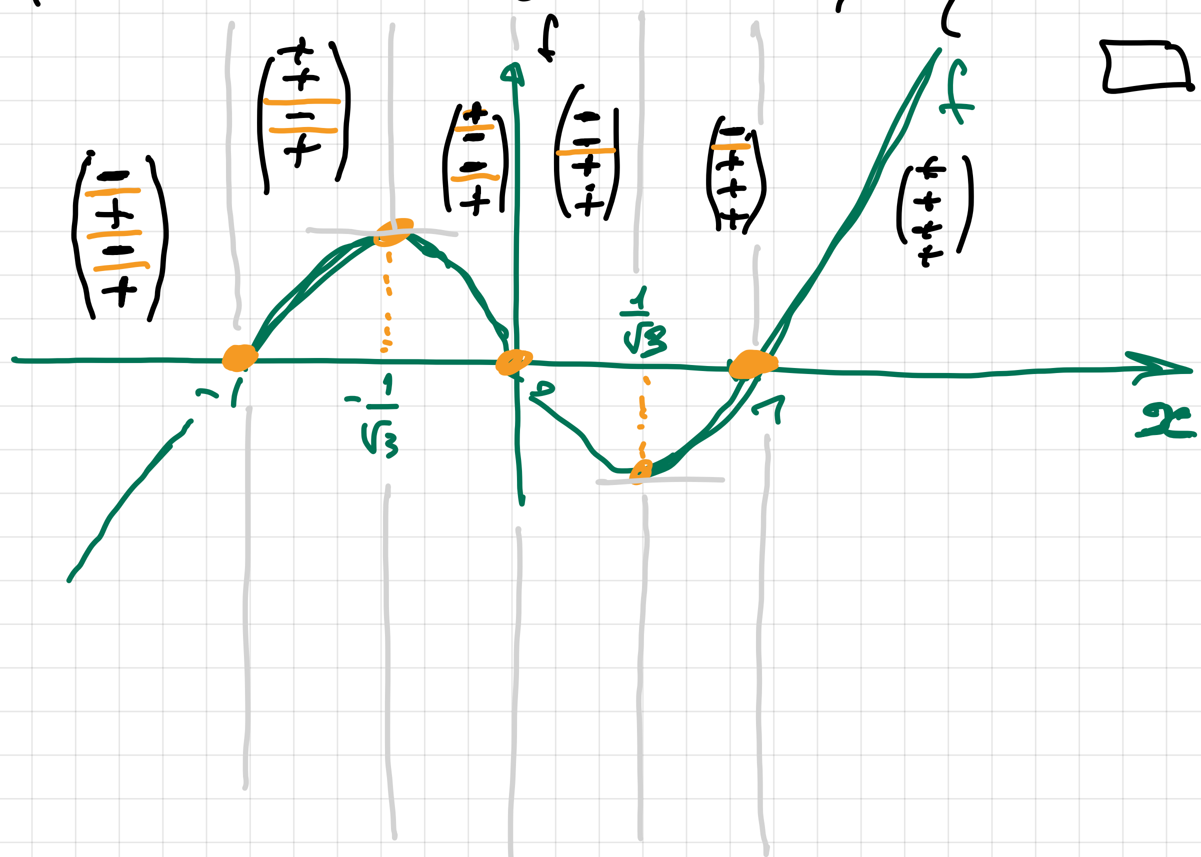
Sturmfolge:

$f_0 = f = x^3 - x$

$f_1 = f' = 3x^2 - 1$

$f_2 = \frac{2}{3}x$

$f_3 = 1$



$$x^3 - x : 3x^2 - 1 = \frac{1}{3}x$$
$$-\left(x^3 - \frac{1}{3}x\right)$$
$$-\frac{2}{3}x$$

$$\underbrace{x^3 - x}_{=f_0} = \left(\frac{1}{3}x\right) \cdot \underbrace{\left(3x^2 - 1\right)}_{=f_1} - \underbrace{\left(\frac{2}{3}x\right)}_{=f_2}$$

$$3x^2 - 1 : \frac{2}{3}x = \frac{9}{2}x$$
$$-3x^2$$
$$-1$$

$$\underbrace{3x^2 - 1}_{=f_1} = \left(\frac{9}{2}x\right) \cdot \underbrace{\left(\frac{2}{3}x\right)}_{=f_2} - \underbrace{1}_{=f_3}$$

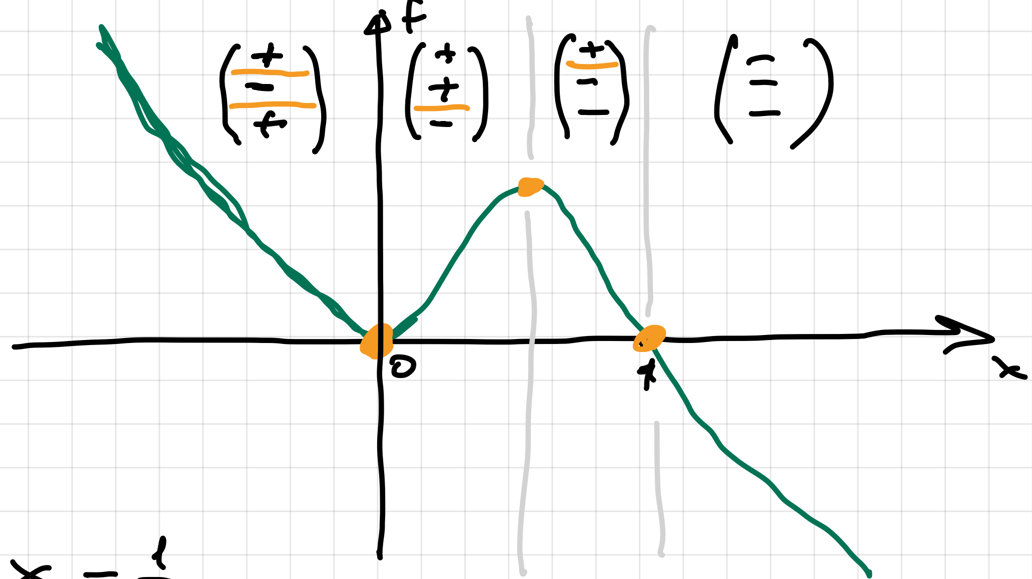
- $-x^3 + x^2$
- $x^3 - x - 6$

Beispiele als Aufgabe

- $f = -x^3 + x^2$

$$\left.\begin{aligned} f_0 &= -x^3 + x^2 \\ f_1 &= -3x^2 + 2x \\ f_2 &= -\tfrac{2}{9}x \end{aligned}\right\}$$

Nur 3 Glieder hier



$$(-x^3 + x^2) : (-3x^2 + 2x) = \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}$$

$$-\left(-x^3 + \frac{2}{3}x^2\right)$$

$$\frac{1}{3}x^2$$

$$-\left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}x\right)$$

$$\frac{2}{9}x$$

$$(-3x^2 + 2x) : \left(-\frac{2}{9}x\right) = \frac{27}{2}x - 9$$

$$-\left(-3x^2\right)$$

$$2x$$

$$-\,2x$$

$$0$$

- $x^3 - x - 6$