A. Nullstellen univariater Polynome.

A2 Rechenfehler zu einfachen Nullstellen

A1 Numerische Verfahren zur Bestimmung von Nullstellen

A3. Lokalisierung reeller Nullstellen

A 2. Lokalisierung reeller Nullstellen.

Wir befassen uns mit Polynomen aus $\mathbb{R}[x]$ und ihren reellen Nullstellen.

Def A 2.1. Man betrachte die Folge $a_0, \dots, a_k$ der Werte aus $\mathbb{R}$. Die Anzahl der Vorzeichenänderungen $\operatorname{signvar}(a_0, \dots, a_k)$ der Folge $a_0, \dots, a_k$ definieren wir als die Anzahl der ~~Paare~~ Paare (i, l) mit $0 \leq i < l \leq k$, $a_i a_l < 0$ und $a_j = 0$ für alle j mit $i < j < l$.

Beispiel:

$$\operatorname{signvar}(\underbrace{2, -10}_{1.}, \overbrace{-10, 3}^{2.}, \underbrace{3, 0, 0, -1}_{3.}, 0, 0, -2, \overbrace{-2, 5}^{4.}, 0) = 4$$

Für die nächste Definition recidieren wir den
den Euklidischen Algorithmus zur Berechnung von
$ggT(f,g)$ für univariate Polynome.
Der Algorithmus basiert auf der Beobachtung

$$ggT(f,g) = ggT(\mathrm{Rem}(f,g), g) \quad \text{für } g \neq 0.$$

```
ggT-Algo(f,g):
Annahme: f,g ∈ K[x] \ {0}
while g ≠ 0:
    f,g := g, Rem(f,g)
endwhile
return f
```

deg g sinkt in jeder Iteration.

Wir können also die Zwischenergebnisse des Algorithmus als die Folge $f_0, \dots, f_k$ von Polynomen darstellen mit

$$\boxed{\begin{aligned} f_0 &= f \\ f_1 &= g \end{aligned}}$$ Start

$f_0 = q_1 \cdot f_1 + f_2$ mit $\deg f_2 < \deg f_1$

$f_1 = q_2 \cdot f_2 + f_3$ mit $\deg f_3 < \deg f_2$

$\vdots$

$f_k = q_{k-1} \cdot f_{k-1} + f_{k+1}$ mit $f_{k+1} = 0$.

Hinten ist $f_k = ggT(f,g)$.

Da die Gleichung $ggT(f,g) = ggT(c\,Rem(f;g), g)$

für jede Konstante $c \in K \setminus \{0\}$

erfüllt ist, können wir

im Euklidischen Algorithmus $Rem(f;g)$ durch

$c\,Rem(f;g)$ ersetzen, ohne dass die Korrektheit berücksichtigt usw. Die folgende Variante des Euklidischen Algorithmus

ggT-Algo-Modifiziert(f,g) :
Annahme: $f,g \in k[x]$
while $g \neq 0$:
    $f, g := g, -\mathrm{Rem}(f,g)$
end
return g

produziert also die folgende Folge der Zwischenergebnisse

$f_0 = f$

$f_1 = g$

$f_2 = q_1 \cdot f_1 - f_3$ mit $\deg f_3 < \deg f_1$

$\vdots$

$f_k = q_{k-1} \cdot f_{k-1} - f_{k+1}$ mit $f_{k+1} = 0$.

Hierbei ist $f_k = \mathrm{ggT}(f,g)$.

man beachte, $\mathrm{ggT}(f,g)$ ist bis auf eine mult. Konstante aus $k \setminus \{0\}$ bestimmt.

Das motiviert die folgende Definition:

Def A. 2.2. Sei $f \in \mathbb{R}[x] \setminus \mathbb{R}$.

Die Sturmfolge von f ist die Folge $f_0, \dots, f_k$ der Polynome mit

$$f_0 = f$$
$$f_1 = f'$$
$$f_i = -\operatorname{Rem}(f_{i-1}, f_{i-2}) \quad \text{für } (i = 2, \dots, k)$$
$$0 = -\operatorname{Rem}(f_k, f_{k-1})$$

Die Sturmfolge ist also die Folge der Zwischenergebnisse des modifizierten Euklidischen Algorithmus.

Für $a \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$v(f; a) := \operatorname{signvar}(f_0(a), \dots, f_k(a)).$$

Theorem A. 2.3 (Sturm). Sei $f \in \mathbb{R}[x] \setminus \mathbb{R}$ und seien $a, b \in \mathbb{R}$ Zahlen mit $a < b$, $f(a) \neq 0 \neq f(b)$.
Dann ist die Anzahl der Nullstellen von f im offenen Intervall (a,b) (ohne Berücksichtigung der Vielfachheit) gleich $v(f;a) - v(f;b)$.

Beweis: Sei $(f_0, \ldots, f_k)$ die Sturmfolge von f.

Sei $(g_0, \ldots, g_k) = \left(\frac{f_0}{f_k}, \ldots, \frac{f_k}{f_k}\right)$.

$g_0, \ldots, g_k$ sind Polynome, weil $f_0, \ldots, f_k$ aus dem Euklidischen Algorithmus entstehen, und alle Reste im Euklidischen Algorithmus durch ggT des Endergebnis(ses) teilbar sind.

Man beachte, dass für alle $a \in \mathbb{R}$ mit $f(a) \neq 0$

$$\text{signvar}(f_0(a), \dots, f_k(a)) = \text{signvar}(g_0(a), \dots, g_k(a)).$$

Das liegt daran, dass $g_0 = \frac{f}{f_k}$ ein Polynom

ist: $f(a) \neq 0 \Rightarrow f(a) = g_0(a) f_k(a) \Rightarrow$

$f_k(a) \neq 0$

Wir analysieren das Verhalten von

$\text{signvar}(g_0(c), \dots, g_k(c))$, wenn man

c von $-\infty$ nach ∞ bewegt und dabei

die Nullstellen der Polynome $g_0, \dots, g_{k-1}$

überquert. ($g_k = 1$ – hat keine Nullstellen).

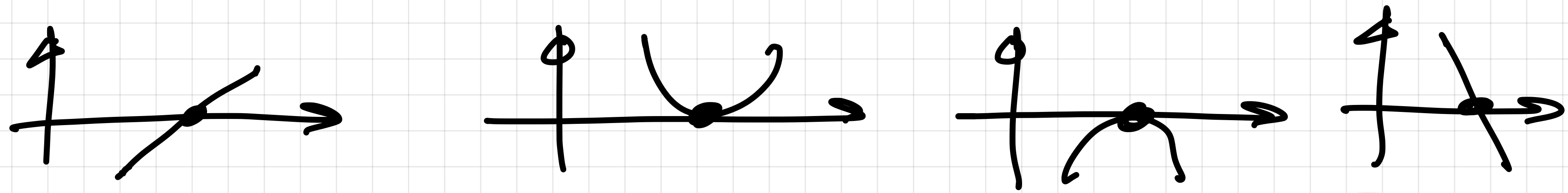
ist keine Nullstelle von $g_0 = \frac{f}{ggT(f,f')}$, dann ist

c eine Nullstelle von f. Das c ist ~~ebenso~~ aber keine

Nullstelle von g_1, weil $g_0 = \frac{f}{ggT(f,f')}$ und $g_1 = \frac{f'}{ggT(f,f')}$

teilerfremd sind. In einer kleinen Umgebung von

c hat f eine der folgenden Formen.



	vor c	c	nach c
f	$-$	0	$+$
f'	$+$		$+$

	vor c	c	nach c
f	$+$	0	$+$
f'	$-$		$+$

	vor c	c	nach c
f	$-$	0	$-$
f'	$+$		$-$

	vor c	c	nach c
f	$+$	0	$-$
f'	$-$		$-$

vor c gilt also $\mathrm{signvar}(f(x), f'(x)) = 1$

und nach c $\mathrm{signvar}(f(x), f'(x)) = 0$.

Das Gleiche gilt auch für $g_0(x), g_1(x)$.

D.h. ~~...~~ für x vor c $\quad \mathrm{sign}(g_0(x), g_1(x)) = 1$

für x nach c $\quad \mathrm{sign}(g_0(x), g_1(x)) = 0$.

Beim Überqueren einer Nullstelle von f wird also eine Vorzeichenänderung am Anfang der Folge $(g_0(x), \ldots, g_k(x))$ verloren.

Nun analysieren wir, was sich in $(g_0(x), \ldots, g_k(x))$ beim Überqueren einer Nullstelle von $g_i(x)$ mit $i \in \{1, \ldots, k-1\}$ ändert.

Man hat $f_{i+1} = -\mathrm{Rem}(f_i, f_{i-1}) \Rightarrow$

$$f_{i-1} = q_i f_i - f_{i+1} \quad \text{mit } \deg f_{i+1} < \deg f_i$$

$$f_{i-1}(a) = q_i(a) f_i(a) - f_{i+1}(a)$$

$\quad$ " $g_i(a) f_k(a)$ $\quad \Rightarrow \quad f_i(a) = 0$.

Beim überqueren von c hat man also

	vor c	c	nach c
f_{i-1}	$+$		$+$
f_i		0	
f_{i+1}	$-$		$-$

oder

	vor c	c	nach c
f_{i-1}	$-$		$-$
f_i		0	
f_{i+1}	$+$		$+$

In den beiden Fällen hat man keine Änderung Signwechsel $(f_{i-1}(x), f_i(x), f_{i+1}(x))$ zwischen x vor c und x nach c.

Wenn $g_i = \frac{f_i}{f_k}$ mit $f_k = ggT(f, f')$

gilt $ggT(g_{i-1}, g_i) = ggT(g_i, g_{i+1}) = 1$, sodass

g_{i-1}, g_i sowie g_i und g_{i+1} keine gem. Nullstellen hat.

$\Rightarrow$

	vor c	c	nach c
g_{i-1}	+	+	+
g_i		0	
g_{i+1}	−	−	−

oder

	vor c	c	nach c
g_{i-1}	−	−	−
g_i		0	
g_{i+1}	+	+	+

Beim Überqueren oder Erreichen einer Nullstelle von g_i, $i=1,\dots,k-1$ ändert bleibt also $\operatorname{signvar}(g_{i-1}(x), g_i(x), g_{i+1}(x)) = 1$.
Wenn man c von a nach b bewegt, so ändert sich $\operatorname{sign}(g_0(c),\dots,g_k(c))$ nicht, wenn man eine Nullstelle eines der Polynome $g_1,\dots,g_{k-1}$ erreicht oder überquert. Darüber hinaus sinkt $\operatorname{sign}(g_0(c),\dots,g_k(c))$ um 1 beim Überqueren einer Nullstelle von f. Es folgt, dass die Bed. des Theorems erfüllt ist. $\square$

for........

1.24 Lemma Sei $f = x^d + a_1 x^{d-1} + \dots + a_d \in \mathbb{C}[x]$ mit $d \in \mathbb{Z}_{>0}$. Dann liegt jede Nullstelle $\lambda \in \mathbb{C}$ von f im Kreis mit Zentrum in 0 vom Radius

$$R = 1 + |a_1| + \dots + |a_d|.$$

Beweis: ist $f(\lambda) = 0$ ~~so gilt~~ und $|\lambda| \geq 1$, so gilt

$$|\lambda^d| = |a_1 \lambda^{d-1} + \dots + a_d \lambda^0| \leq |a_1| \cdot |\lambda|^{d-1} + \dots + |a_d| \cdot |\lambda|^0$$

$$\Rightarrow |\lambda| \leq |a_1| \cdot \frac{1}{|\lambda|} + \dots + \frac{1}{|\lambda^d|} |a_d|$$

$$\leq |a_1| + \dots + |a_d| \leq 1 + |a_1| + \dots + |a_d|.$$

$\square$.

Insbesondere liegen alle reellen Nullstellen im Intervall $[-R, R]$.

Wir ergänzen noch die Definition von $v(f;a)$ auf die Fälle $a=-\infty$ und $a=\infty$

$$v(f;\infty) := \operatorname{signvar}(LC(f_0), \ldots, LC(f_k))$$

$$v(f,-\infty) := \operatorname{signvar}(LC(f_0(-x)), \ldots, LC(f_k(-x))).$$

A. 2.5 Korollar Die Anzahl der reellen Nullstellen von $f \in \mathbb{R}[x]\setminus\mathbb{R}$ ist $v(f;-\infty) - v(f;\infty)$.

Beweis:

$$v(f;-R) = v(f;-\infty)$$
$$v(f;R) = v(f,+\infty)$$

für alle geeignet großen R. Die Behauptung folgt also aus A.1.2.3.

A.2 Reduktion zum Fall der einfachen Nullstellen.

<u>Erl. Def.</u> (Vielfachheit)

$$\mathrm{mult}(f, a) = m \quad \text{mit } m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

$f(x) = (x-a)^m g(x)$

$g \in \mathbb{C}[x]$ und

$g(a) \neq 0.$

$\mathrm{mult}(f, a) = 0$ 0-fache Nullstelle
(keine Nullstelle

$\mathrm{mult}(f, a) = 1$ 1-fache Nullstelle

$\mathrm{mult}(f, a) > 1$ vielfache Nullstelle.

Prop Vielfachheit $f, g \in \mathbb{C}[x]$

f teilt g $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{mult}(f,a) \leq \mathrm{mult}(g,a)$ für alle $a \in \mathbb{C}$.

Beweis: $f(x) = (x-a)^m u(x)$ mit $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ und $u(a) \neq 0$. $\quad g(x) = (x-a)^n v(x)$, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $v(a) \neq 0$.

$$f \cdot q = g \quad \text{mit } q \in \mathbb{C}[x]$$

Wäre $m > n$, so hätte man

$$\underbrace{(x-a)^{m-n} u(x) q(x)}_{=0 \text{ für } x=a} = \underbrace{v(x)}_{\neq 0 \text{ für } x=a}.$$

$\square$

Seien $f, g \in \mathbb{C}[x] \setminus \{0\}$.

Korollar.

$$f = (x-\lambda_1)^{m_1} \cdots (x-\lambda_k)^{m_k}$$

$$g = (x-\lambda_1)^{n_1} \cdots (x-\lambda_k)^{n_k}$$

mit $m_1, \dots, m_k, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ (=0 erlaubt!)

$$\Rightarrow \operatorname{ggT}(f,g) = (x-\lambda_1)^{s_1} \cdots (x-\lambda_k)^{s_k}$$

mit $s_i = \min\{m_i, n_i\}$.

Prop. Sei $f \in \mathbb{C}[x] \setminus \mathbb{C}$ und sei $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ Vielfachheit von λ ist m.

Dann ist λ $(m-1)$-fache Nullstelle von f'!

Beweis: $f(x) = (x-a)^m u(x)$ mit $u(a) \neq 0$.

$$f'(x) = \left((x-a)^m u(x)\right)'$$
$$= m(x-a)^{m-1} u(x) + (x-a)^m u'(x)$$
$$= (x-a)^{m-1} \underbrace{\left(m\, u(x) + (x-a)\, u'(x)\right)}_{\substack{= m\, u(a) \neq 0 \\ \text{für } x = a}}$$

Korollar. Für $f = (x-\lambda_1)^{m_1} \cdots (x-\lambda_k)^{m_k} \in \mathbb{C}[x]$ und $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{Z}_{>0}$ gilt

$$\frac{f}{\operatorname{ggT}(f, f')} = (x-\lambda_1) \cdots (x-\lambda_k)$$

Prop. Seien k Körper und sei K ein Körper, der den Körper k erweitert.
Seien $f, g \in k[x]$. Dann ist
$\mathrm{ggT}(f, g)$ von f, g bzgl. $k[x]$ auch
das $\mathrm{ggT}(f, g)$ bzgl. $K[X]$.

Beweis: Rein Ausführen des Euklidschen
Algorithmus auf f, g berührt nur den
Körper k, auch wenn K als zugrundeliegender
Körper dient.

$\square$