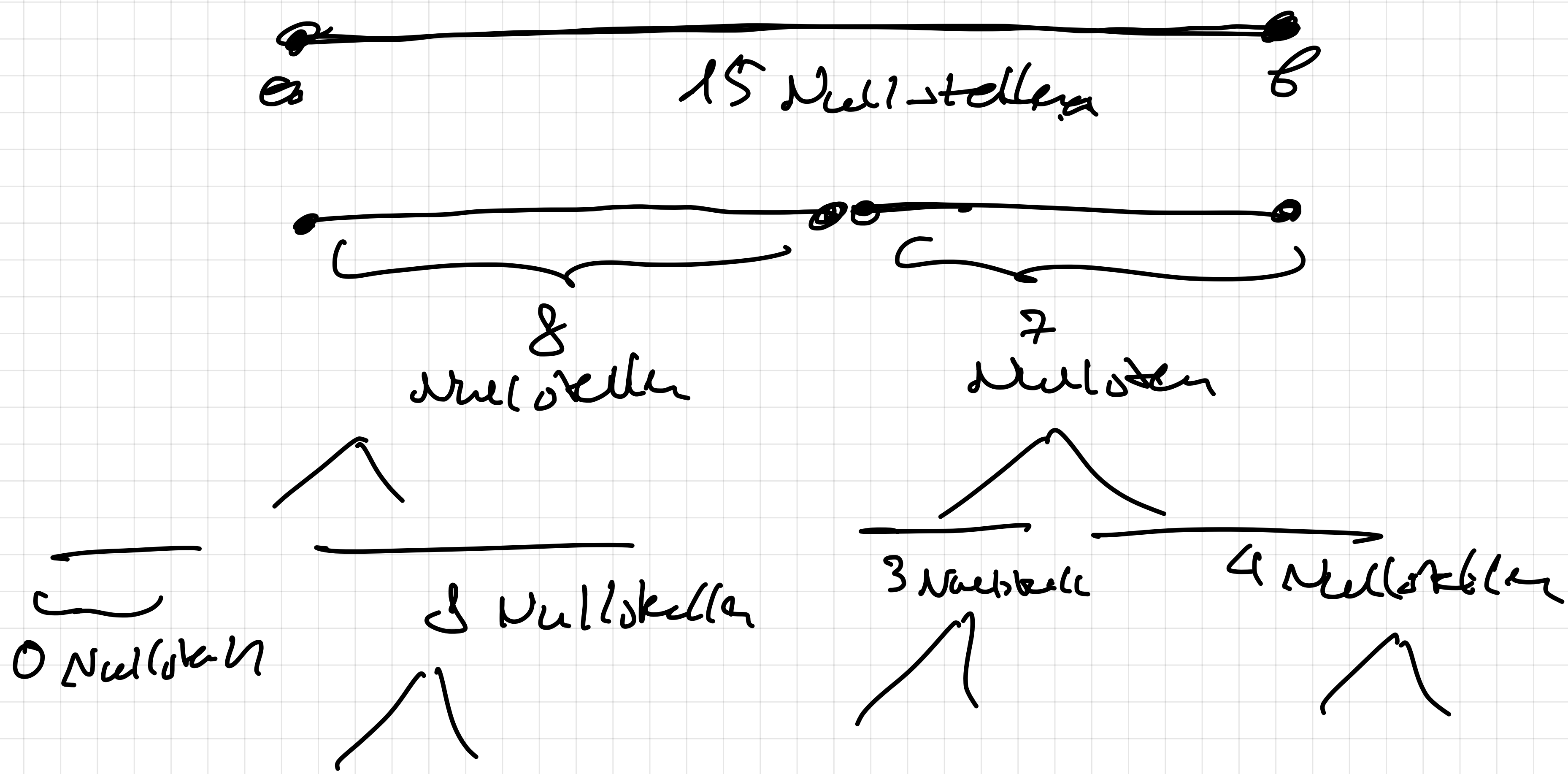
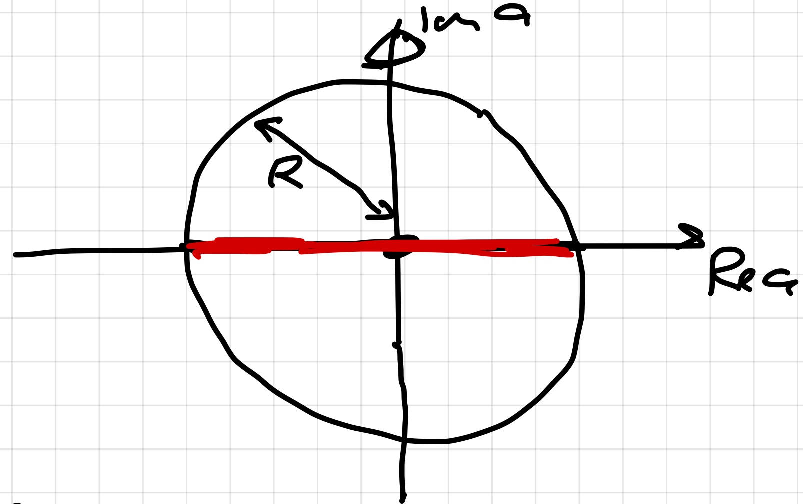
A.3.6. Bemerkung Man kann mit Hilfe des Satzes von Sturm kleine Intervalle bestimmen, in denen alle reellen Nullstellen des gegebenen Polynoms $f \in \mathbb{R}[x] \setminus \mathbb{R}$ liegen. Eine Art binäre Suche kann benutzt werden.



Was noch zu klären ist: was ist das Startintervall, in dem alle reellen Nullstellen von f enthalten sind?

A.3.7. Lemma Sei $f = X^d + c_1 X^{d-1} + \dots + c_d \in \mathbb{C}[X] \setminus \mathbb{C}$.
Dann erfüllt jede Nullstelle $a \in \mathbb{C}$ von f die Ungleichung $|a| \leq R := 1 + |c_1| + \dots + |c_d|$

Beweis: Im Fall $|a| \leq 1$ ist die Behauptung trivial, denn $R \geq 1$. Sei also $|a| \geq 1$.



a Nullstelle von f $\iff$

$$f(a) = 0 \iff a^d + c_1 a^{d-1} + \dots + c_d = 0$$

$$\iff a^d = -(c_1 a^{d-1} + \dots + c_d)$$

$$\iff a = -\left(c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot \frac{1}{a} + \dots + c_d \cdot \frac{1}{a^{d-1}}\right)$$

$$\Rightarrow |a| = \left| c_1 \cdot \frac{1}{a^0} + \dots + c_d \cdot \frac{1}{a^{d-1}} \right|$$

$$\leq |c_1| \cdot \underbrace{\left|\frac{1}{a^0}\right|}_{\leq 1} + \dots + |c_d| \cdot \underbrace{\left|\frac{1}{a^{d-1}}\right|}_{\leq 1} \leq R.$$

$\square$

Wir erweitern die Bezeichnung $v(f;c)$ auf den Fall $c \in \{-\infty, +\infty\}$. Man setzt

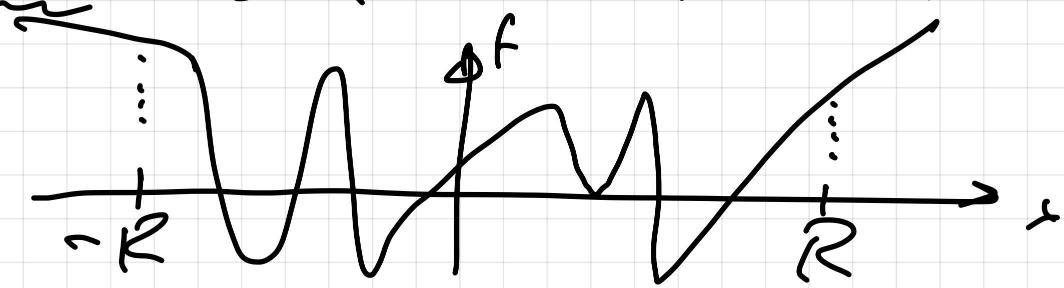
$$v(f;+\infty) = \operatorname{signvar}(LC(f_0), \dots, LC(f_\ell)),$$
$$v(f;-\infty) = \operatorname{signvar}(LC(f_0(-x)), \dots, LC(f_\ell(-x))),$$

wobei hier $(f_0, \dots, f_\ell)$ die Sturmfolge von f ist.

__A.3.8. Korollar.__ Die Anzahl der reellen Nullstellen eines Polynoms $f \in \mathbb{R}[x] \setminus \mathbb{R}$, ohne Berücksichtigung der Vielfachheiten, ist

$$v(f;-\infty) - v(f;+\infty).$$

__Beweis:__ Sei R wie im Lemma A.3.7. Dann ist



Ist a genügend klein, so gilt $v(f;a) = v(f;-\infty)$.

Mit anderen Worten: es gibt ein $\bar{a} \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass $v(f,a) = v(f;-\infty)$ für alle $a \le \bar{a}$ erfüllt ist.

Analog: ist b genügend groß, so gilt $v(f;b) = v(f;+\infty)$. Mit anderen Worten es gibt ein $\bar{b} \in \mathbb{R}$ mit $v(f,b) = v(f,+\infty)$ für alle $b \ge \bar{b}$. Wir können $\bar{a}$ und $\bar{b}$ so fixieren, dass $\bar{a} < -R$ und $\bar{b} > R$ gilt. $\Longrightarrow$

$$v(f;-\infty) - v(f;+\infty) = \underbrace{v(f,\bar{a}) - v(f,\bar{b})}$$

Das ist nach Sturm die Anzahl der Nullstellen in $[\bar{a},\bar{b}]$. Aber $[\bar{a},\bar{b}] \supseteq [-R,R]$ und $(-R,R]$

enthält nach dem Lemma A.3.7 alle reellen Nullstellen von f. $\Rightarrow$ Behauptung. $\square$

A.3.9. Bemerkung. Lokalisierung der Nullstellen mit "Sortierung" nach Vielfachheit.

$$f \in \mathbb{R}[x] \setminus \mathbb{R}$$

$$f = (x-c_1)^{m_1} \cdots (x-c_t)^{m_t} \quad m_1, \ldots, m_t \in \mathbb{Z}_{>0}$$
$$c_1, \ldots, c_t \in \mathbb{C}.$$

$$\mathrm{ggT}(f, f') = (x-c_1)^{m_1-1} \cdots (x-c_t)^{m_t-1}$$

Die Nullstellen von $\mathrm{ggT}(f, f')$ sind die mehrfachen Nullstellen von f. Nullstellen von

$\mathrm{ggT}(\mathrm{ggT}(f, f'), \mathrm{ggT}(f, f')')$ sind mindestens 3-fache Nullstellen von f.

Und so weiter .....

A.4. Die Vorzeichenregel von Descartes.

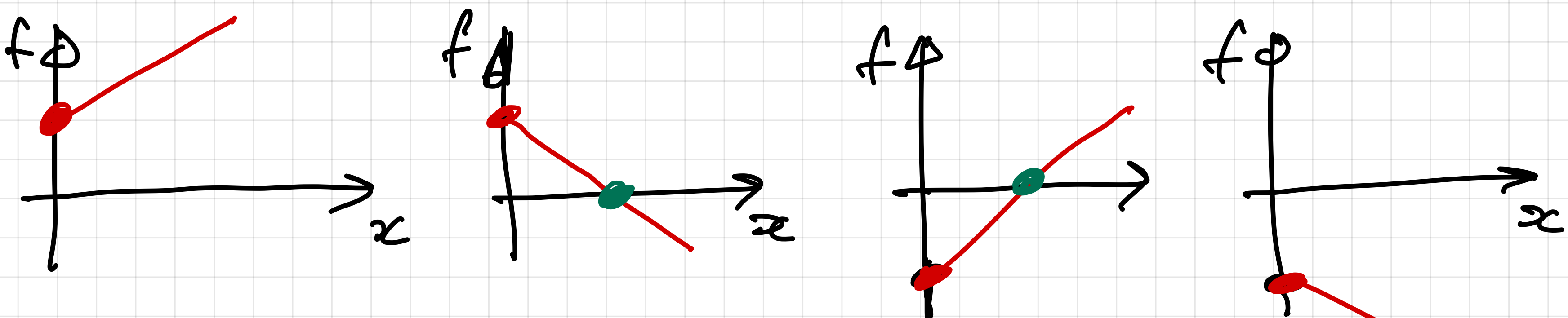
A.4.1 Theorem (Die Vorzeichenregel). Die Anzahl der positiven Nullstellen von

$$f = a_0 x^d + a_1 x^{d-1} + \dots + a_d \in \mathbb{R}[x] \setminus \mathbb{R}$$

mit $a_0 \neq 0 \neq a_d$ ist höchstens

$$\operatorname{signvar}(a_0, \dots, a_d).$$

Beweis: Induktion über d. $d = 1$. Möglichkeiten.



$$f = a_0 x + a_1$$

Genau eine positive Nullstelle im Fall $\operatorname{signvar}(a_0, a_1) = 1$, sonst ist $\operatorname{signvar}(a_0, a_1) = 0$ und f

hat keine positive Nullstelle.

Sei $d \geq 2$ und sei die Behauptung für Polynome vom Grad $d-1$ bereits verifiziert.

Sei $f = a_0 x^d + \dots\dots a_j x^{d-j} + a_d$

d.h. $a_\ell = 0$ für $j < \ell < d$ und $a_j \neq 0$.

Dann ist $f' = a_0 \cdot d\, x^{d-1} + \dots\dots + a_j (d-j) x^{d-j-1}$

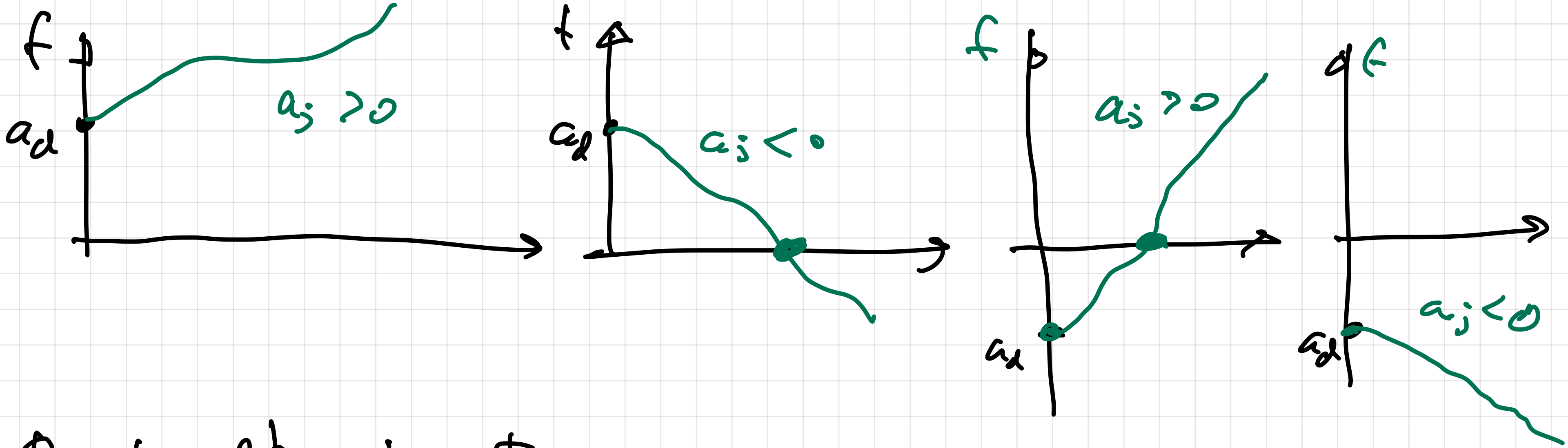
mit $a_0 \neq 0 \neq a_j$. Nach der Induktionsvoraussetzung hat f' höchstens $\operatorname{signvar}(a_0, \dots, a_j)$ positive Nullstellen. Wir unterscheiden zwischen zwei Fällen:

<u>Fall 1:</u> f' hat keine positiven Nullstellen.

$a_j > 0 \Rightarrow f'(x)$ positiv für alle $x > 0 \Rightarrow$

f steigt für $x > 0$.

$a_j < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$ für alle $x < 0 \Rightarrow f$ sinkt für $x > 0$



Das heißt: im Fall $a_d a_j < 0$
hat f genau eine positive Nullstelle
und $\quad \operatorname{signvar}(a_0, \dots, a_d) \geq \operatorname{signvar}(a_j, \dots, a_d)$

$$= \operatorname{signvar}(a_j, 0, \dots, 0, a_d)$$

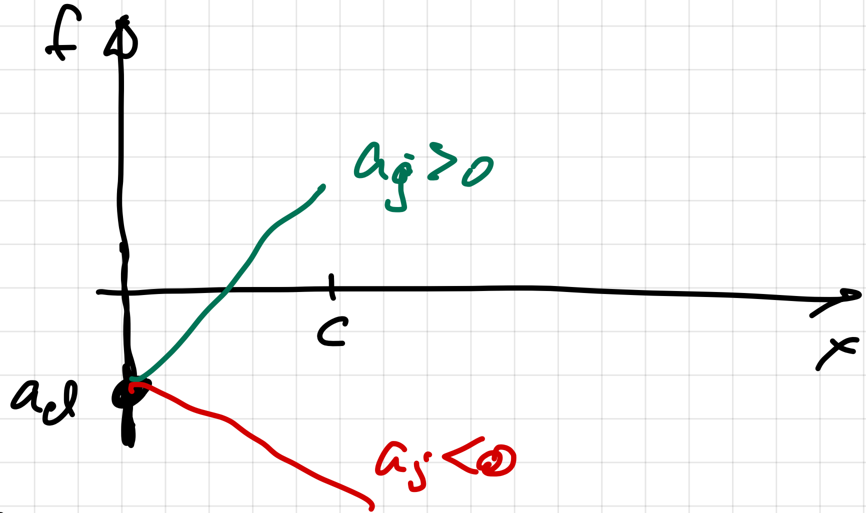
$$= \operatorname{signvar}(a_j, a_d) = 1.$$

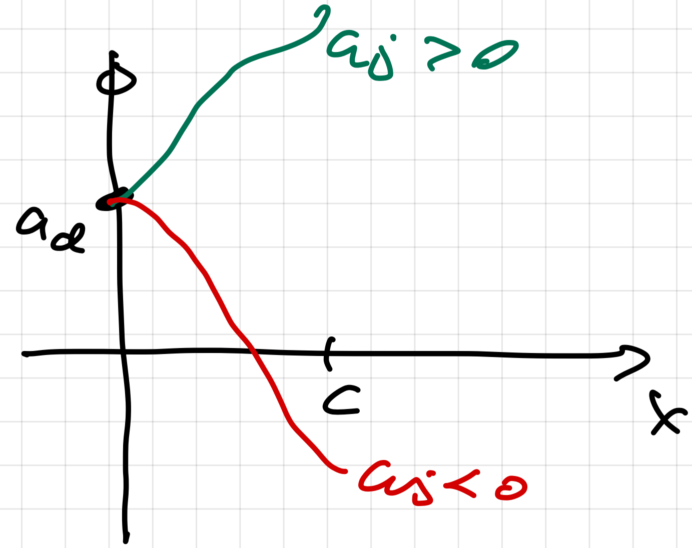
$\Rightarrow$ Die Behauptung ist erfüllt.

Im Fall $a_d a_j > 0$ hat f keine Nullstellen $\Rightarrow$ die Behauptung ist erfüllt.

Fall 2: f' hat eine positive Nullstelle.

Sei c die kleinste positive Nullstelle von f.



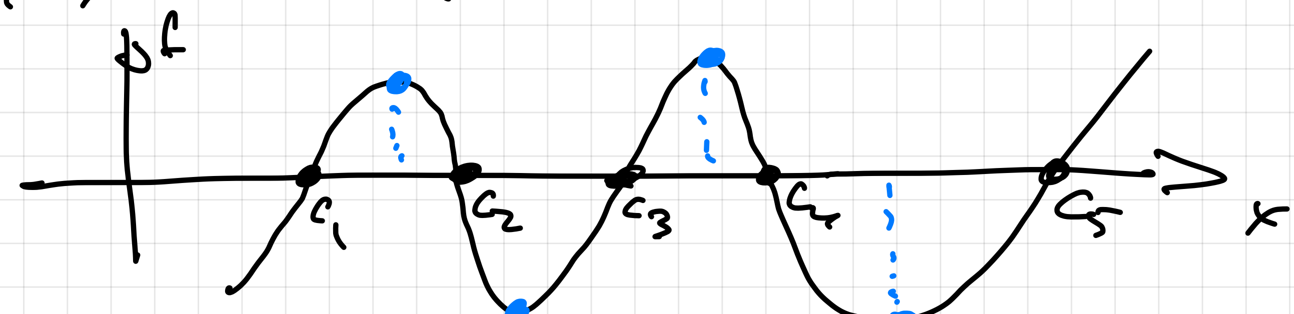


f ist monoton auf $(0,c)$. Man hat:

$$f'>0 \text{ auf } (0,c) \iff a_j>0$$

$$f'<0 \text{ auf } (0,c) \iff a_j<0.$$

Seien $c_1,\dots,c_t$ alle positiven Nullstellen des Polynoms f.



Nach dem Satz von Rolle befindet sich in (c_i, c_{i+1}) $(i = 1, \dots, t-1)$ mindestens eine Nullstelle von f'. Somit hat f' mindestens $t-1$ positive Nullstellen.

Ist $a_d a_j < 0$, so gilt

$$\operatorname{signvar}(a_0, \dots, a_d) = \underbrace{\operatorname{signvar}(a_0, \dots, a_j)}_{\text{nach I.V. } \leq t-1} + 1$$

$$\leq (t-1) + 1 = t$$

Die Anzahl der positiven Nullstellen von f.

Ist $a_d a_j > 0 \Rightarrow c$ ist eine Nullstelle von f', die nicht zwischen zwei positiven Nullstellen von f eingeschlossen ist, denn bei $a_d a_j > 0$ hat f keine Nullstellen in $(0, c)$

$\Rightarrow$ f' hat mindestens $t-1$ Nullstellen in den Intervallen $(c_1, c_2), \ldots, (c_{t-1}, c_t)$ plus zusätzlich die Nullstelle c.
Also hat f' mindestens t positive Nullstellen. $\Rightarrow$

$$\operatorname{signvar}(c_0, \ldots, c_d) = \operatorname{signvar}(c_0, \ldots, c_j) \underset{\uparrow}{\leq} t$$

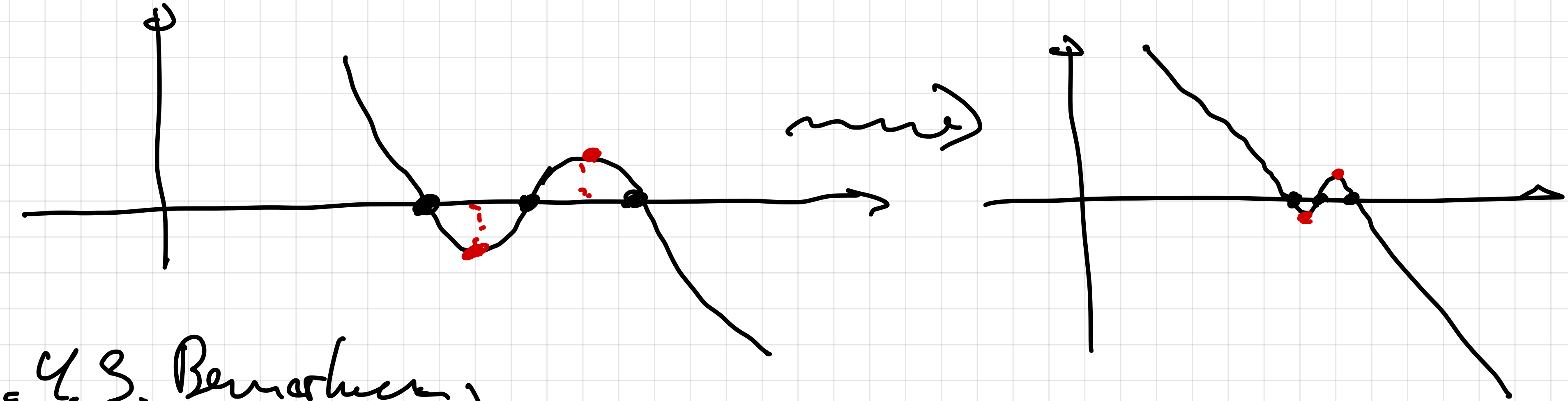
Wegen der I.V. angewendet zu f'.

$\Rightarrow$ Behauptung.

$\square$

<u>A.4.2. Bem.</u> Gilt dieser Satz auch, wenn man die Nullstellen mit Vielfachheit zählt?

Ja: im Wesentlichen kann man denselben Beweis benutzen.



A.4.3. Bemerkung.

Zählen der negativen Nullstellen von $f(x)$ $\Longleftrightarrow$ Zählen der positiven Nullstellen von $f(-x)$.

A.4.4 Bemerkung. Man hat Methoden zum Zählen der komplexen bzw. reellen Nullstellen, die auf der linearen Algebra basieren.

f Polynom $\longmapsto M_f$ (eine gewisse symmetrische positiv-semidefinite Matrix).

Der Rang und die Signatur dieser Matrix geben die Antwort.

Zurück in Kapitel 3

Bsp.

$$f_1 = x^2 + 2y^2 - 4$$
$$f_2 = xy - 1$$

$\langle f_1, f_2 \rangle$ Gröbnerbasis bzgl. der Lex-Ordnung?

G Gröbnerbasis von $I \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$

dann erzeugt

$G_\ell := G \cap k[x_{\ell+1}, \dots, x_n]$

das Eliminationsideal

$I_\ell = I \cap k[x_{\ell+1}, \dots, x_n]$

Wie berechnet man eine Gröbnerbasis?

$$S(f_1, f_2) = y f_1 - x f_2 = x^2y + 2y^3 - 4y - x^2y + x$$
$$= x + 2y^3 - 4y \qquad \mathrm{Rem}(S(f_1, f_2); f_1, f_2) = S(f_1, f_2) =: f_3$$

$f_1 = x^2 + 2y^2 - 4$

$f_2 = xy - 1$

$f_3 = x + 2y^3 - 4y = \mathrm{Rem}(S(f_1, f_2); f_1, f_2)$.

$S(f_1, f_3) = f_1 - x f_3 = x^2 + 2y^2 - 4 - x^2 - 2xy^3 + 4xy = -2xy^3 + 4xy + 2y^2 - 4$

$\mathrm{Rem}(S(f_1, f_3); f_1, f_2, f_3) = 0$

Noch zu Teilen.	Operationen.
$-2xy^3 + 4xy + 2y^2 - 4$	$-2y^2 f_2 = -2xy^3 + 2y^2$
$4xy \quad - 4$	$4 f_2 = 4xy - 4$
0	

$f_1 = x^2 + 2y^2 - 4$ $\qquad$ $0 = Rem(S(f_1, f_3); f_1, f_2, f_3)$

$f_2 = xy - 1$

$f_3 = x + 2y^3 - 4y = Rem(S(f_1, f_2); f_1, f_2)$.

$S(f_2, f_3) = f_2 - y f_3 = xy - 1 - xy - 2y^4 + 4y^2 = -2y^4 + 4y^2 - 1$

$Rem(S(f_2, f_3); f_1, f_2, f_3) = S(f_2, f_3)$

$f_4 = Rem(S(f_2, f_3); f_1, f_2, f_3) = -2y^4 + 4y^2 - 1$

$f_1 = x^2 + 2y^2 - 4$ $\qquad\qquad$ $0 = \text{Rem}(S(f_1, f_3); f_1, f_2, f_3)$

$f_2 = xy - 1$

$f_3 = x + 2y^3 - 4y = \text{Rem}(S(f_1, f_2); f_1, f_2)$

$f_4 = -2y^4 + 4y^2 - 1 = \text{Rem}(S(f_2, f_3); f_1, f_2, f_3)$

$$S(f_1, f_4) = y^4 f_1 + \frac{1}{2}x^2 f_4 = x^2y^4 + 2y^6 - 4y^4 - x^2y^4 + 2x^2y^2 - \frac{1}{2}x^2$$
$$= 2x^2y^2 - \frac{1}{2}x^2 + 2y^6 - 4y^4$$

$\text{Rem}(S(f_1, f_4); f_1, f_2, f_3, f_4) = 0$

Noch zu teilen:	Operationen
$2x^2y^2 - \frac{1}{2}x^2 + 2y^6 - 4y^4$	$2y^2 f_1 = 2x^2y^2 + 4y^4 - 8y^2$
$-\frac{1}{2}x^2 + 2y^6 - 8y^4 + 8y^2$	$-\frac{1}{2} f_1 = -\frac{1}{2}x^2 - y^2 + 2$
$2y^6 - 8y^4 + 9y^2 - 2$	$-y^2 f_4 = 2y^6 - 4y^4 + y^2$
$-4y^4 + 8y^2 - 2$	$2 f_4 = -4y^4 + 8y^2 - 2$
0	

$$f_1 = x^2 + 2y^2 - 4$$

$$f_2 = xy - 1$$

$$f_3 = x + 2y^3 - 4y = \mathrm{Rem}(S(f_1, f_2); f_1, f_2)$$

$$f_4 = -2y^4 + 4y^2 - 1 = \mathrm{Rem}(S(f_2, f_3); f_1, f_2, f_3)$$

$$0 = \mathrm{Rem}(S(f_1, f_3); f_1, f_2, f_3)$$

$$0 = \mathrm{Rem}(S(f_2, f_4); f_1, f_2, f_3, f_4)$$

$$S(f_1, f_4) = y^4 f_1 + \tfrac{1}{2} x^2 f_4 = x^2y^4 + 2y^6 - 4y^4 - x^2y^4 + 2x^2y^2 - \tfrac{1}{2}x^2$$

$$= 2x^2y^2 - \tfrac{1}{2}x^2 + 2y^6 - 4y^4$$

$$S(f_2, f_4) = y^3 f_2 + \tfrac{1}{2} x f_4 = xy^4 - y^3 - \tfrac{1}{2}xy^4 + 2xy^2 - \tfrac{1}{2}x = 2xy^2 - \tfrac{1}{2}x - y^3$$

$$\mathrm{Rem}(S(f_2, f_4); f_1, f_2, f_3, f_4) = 0$$

Zu Teilen	Operationen
$2xy^2 - \frac{1}{2}x - y^3$	$2y f_2 = 2xy^2 - 2y$
$-\frac{1}{2}x - y^3 + 2y$	$-\frac{1}{2} f_3 = -\frac{1}{2}x - y^3 + 2y$
0	

$$f_1 = x^2 + 2y^2 - 4$$
$$f_2 = xy - 1$$
$$f_3 = x + 2y^7 - 4y = \mathrm{Rem}(S(f_1,f_2); f_1, f_2)$$
$$f_4 = -2y^4 + 4y^2 - 1 = \mathrm{Rem}(S(f_2,f_3); f_1, f_2, f_3)$$

$0 = \mathrm{Rem}(S(f_1,f_3); f_1, f_2, f_3)$

$0 = \mathrm{Rem}(S(f_2,f_4); f_1, f_2, f_3, f_4)$

$0 = \mathrm{Rem}(S(f_3,f_4); f_1, f_2, f_3, f_4)$

$$S(f_1,f_4) = y^4 f_1 + \frac{1}{2}x^2 f_4 = x^2y^4 + 2y^6 - 4y^4 - x^2y^4 + 2x^2y^2 - \frac{1}{2}x^2$$
$$= 2x^2y^2 - \frac{1}{2}x^2 + 2y^6 - 4y^4$$

$$S(f_2,f_4) = y^3 f_2 + \frac{1}{2}x f_4 = xy^4 - y^3 - \frac{1}{2}xy^4 + 2xy^2 - \frac{1}{2}x = 2xy^2 - \frac{1}{2}x - y^3$$

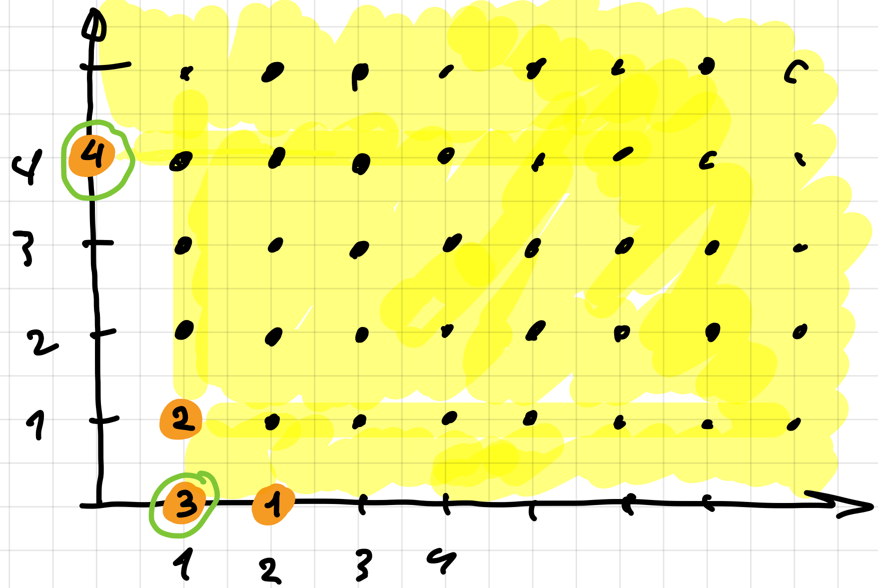
$$S(f_3,f_4) = y^4 f_3 + \frac{1}{2}x f_4 = xy^4 + 2y^7 - 4y^5 - xy^4 + 2xy^2 - \frac{1}{2}x$$
$$= 2xy^2 - \frac{1}{2}x + 2y^7 - 4y^5$$

$$\mathrm{Rem}(S(f_3,f_4); f_1, f_2, f_3, f_4) = 0$$

Zwischenteilen	Operationen
$2xy^2 - \frac{1}{2}x + 2y^7 - 4y^5$	$2y f_2 = 2xy^2 - 2y$
$-\frac{1}{2}x + 2y^7 - 4y^5 + 2y$	$-\frac{1}{2} f_3 = -\frac{1}{2}x - y^3 + 2y$
$2y^7 - 4y^5 + y^3$	$-y^3 f_4 = 2y^7 - 4y^5 + y^3$
0	

Fertig!

$f_1 = x^2 + 2y^2 - 4$
$f_2 = xy - 1$
$f_3 = x + 2y^3 - 4y$
$f_4 = -2y^4 + 4y^2 - 1$



f_1, f_2 überflüssig

f_3, f_4 ist bereits eine Gröbnerbasis

$f_3, -\frac{1}{2} f_4$ ist eine Minimale Gröbnerbasis

is $y^4 - 2y^2 + \frac{1}{2}$

Ist das eine reduzierte Basis?

$$\left.\begin{aligned} g_1 &= x + 2y^3 - 4y \\ g_2 &= y^4 - 2y^2 + \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \text{ ist eine reduzierte Basis.}$$

coeff.	x	y^4	y^3	y^2	y	1
g_1	1	0	2	0	-4	0
g_2	0	1	0	-2	0	$\frac{1}{2}$