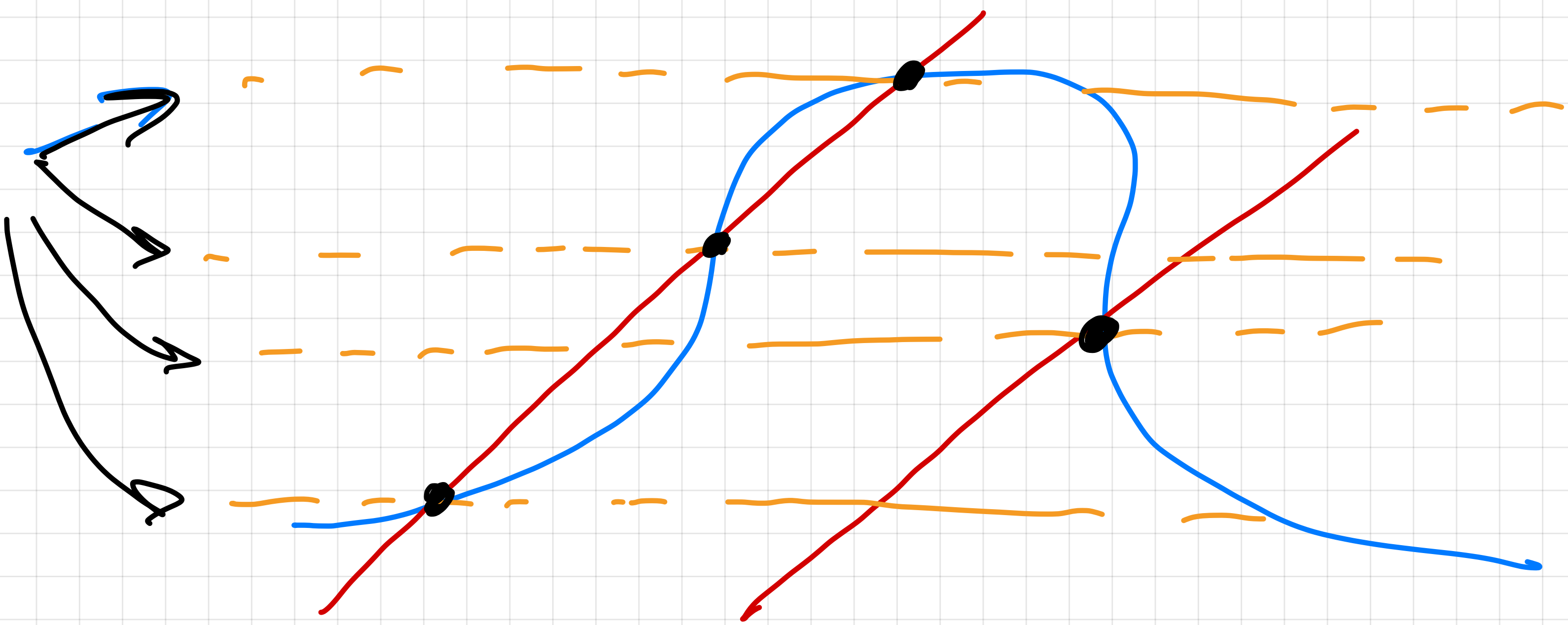
$f = x^2 + y^3 - 5$

$g = x^2 - 2xy + y^2 - 7$

$$\mathrm{Res}(f, g, x) = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2y & 1 \\ y^3-5 & 0 & y^2-7 & -2y \\ 0 & y^3-5 & 0 & y^2-7 \end{bmatrix}$$

$$= y^6 + 2y^5 + y^4 + 4y^3 - 24y^2 + 4$$

$\mathrm{Res} = 0$



⑥ $\mathrm{Res}(f_1, f_2; x)$ mit $f_i = x^2 + p_i x + q_i$

Bis jetzt: gemeinsame Nullstellen von zwei Polynomen.
Wie würde man eine Variable entfernen (mit Resultanten), wenn man mehr als zwei Polynomgleichungen hat?

3.2.13 Theorem. Für $f_1, \dots, f_s \in \mathbb{C}[x] \setminus \mathbb{C}$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

(i) $f_1, \dots, f_s$ haben einen gemeinsamen Faktor

(ii) $f_1, u_2 f_2 + \dots + u_s f_s$ haben als Polynome in $\mathbb{C}(u_2, \dots, u_s)[x]$ einen gemeinsamen Faktor

(iii) $\mathrm{Res}(f_1, u_2 f_2 + \dots + u_s f_s; x) \in \mathbb{C}[u_2, \dots, u_s]$ ist ein Nullpolynom.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii): ist $h \in \mathbb{C}[x] \setminus \mathbb{C}$ gemeinsamer Faktor von $f_1, \dots, f_s$, dann ist das auch ein gemeinsamer Faktor von f_1 und $u_2 f_2 + \ldots + u_s f_s$

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii) folgt aus der Theorie der Resultanten, die dem präsentiert wurde.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Wir zeigen die Kontraposition (nicht (i)) $\Rightarrow$ (nicht (iii))

nicht (i) $\Rightarrow$ $f_1, \ldots, f_s$ haben keine gemeinsame Nullstelle in $\mathbb{C}$. D.h. für jede der endlich vielen Nullstellen $a \in \mathbb{C}$ von f_1 gilt

$$(f_2(a), \ldots, f_s(a)) \neq (0, \ldots, 0). \Longrightarrow$$

Für jede Nullstelle $a \in \mathbb{C}$ von f_1 ist

$$f_2(a) \cdot t^0 + \ldots + f_s(a) \cdot t^{s-2} \in \mathbb{C}[t]$$

kein Nullpolynom.

Das Polynom $u_2 f_2 + \ldots + u_s f_s$

$$= c_0(u_2, \ldots, u_s) x^d + \ldots + c_{d-1}(u_2, \ldots, u_s) \cdot x^1 + c_d(u_2, \ldots, u_s)$$

mit $d = \max\{\deg f_2, \ldots, \deg f_s\}$ und $\deg c_0 = 1$.

Jedes univariate Polynom, das ungleich 0 ist, hat nur endlich viele Nullstellen.

Daher findet man eine $b \in \mathbb{C}$ derart, dass für jede Nullstelle $a \in \mathbb{C}$ von f_1 die Bedingung

$$f_2(a) \cdot b^0 + \dots + f_s(a) \cdot b^{s-2} \neq 0 \text{ erfüllt ist.}$$

Zusätzlich kann bei einer passenden Wahl von $b \in \mathbb{C}$ die Bedingung $c_0(b^0, \dots, b^{s-2}) \neq 0$ garantiert werden, so dass $\deg(b^0 f_2 + \dots + b^{s-2} f_s) = d$ ist. Nach der Konstruktion erfüllt $r(u_2, \dots, u_s) := \mathrm{Res}(f_1, u_2 f_2 + \dots + u_s f_s)$ die Bedingung $r(b^0, \dots, b^{s-2}) \neq 0$.

$\Rightarrow$ r ist kein Nullpolynom $\Rightarrow$ (iii') ist nicht erfüllt.

$\square$

3.2.14. Theorem. Für $f = (x-a_1)\cdot\ldots\cdot(x-a_\ell)$ und $g = (x-b_1)\cdot\ldots\cdot(x-b_m)$ mit $a_1,\ldots,a_\ell, b_1,\ldots,b_m \in \mathbb{C}$ ist

$$\mathrm{Res}(f,g;x) = \prod_{\substack{i=1,\ldots,\ell \\ j=1,\ldots,m}} (a_i - b_j)$$

Beweis: Es reicht aus, die Formel im Fall zu verifizieren, in dem die Werte $a_1,\ldots,a_\ell, b_1,\ldots,b_m$ paarweise verschieden sind. Den allgemeinen Fall erhält man durch einen Grenzwertübergang (die linke und rechte Seite sind stetig in $a_1,\ldots,a_\ell, b_1,\ldots,b_m$).

Sei $v_t(x) = (x^t,\ldots,x^0)$. Wir haben bemerkt:

$$v_{m+\ell-1}(x)\,\mathrm{Syl}(f,g;x) = (x^{m-1}f,\ldots,x^0 f, x^{\ell-1}g,\ldots,x^0 g)$$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} v_{m+l-1}(b_1) \\ \vdots \\ v_{m+l-1}(b_m) \\ v_{m+l-1}(a_1) \\ \vdots \\ v_{m+l-1}(a_l) \end{bmatrix} \mathrm{Syl}(f,g;x) = \begin{bmatrix} b_1^{m-1} f(b_1) & \cdots & b_1^{0} f(b_1) & b_1^{l-1} g(b_1) & \cdots & b_1^{0} g(b_1) \\ & \vdots & & & \vdots & \\ b_m^{m-1} f(b_m) & \cdots & b_m^{0} f(b_m) & b_m^{l-1} g(b_m) & \cdots & b_m^{0} g(b_m) \\ a_1^{m-1} f(a_1) & \cdots & a_1^{0} f(a_1) & a_1^{l-1} g(a_1) & \cdots & a_1^{0} g(a_1) \\ & \vdots & & & \vdots & \\ a_l^{m-1} f(a_l) & \cdots & a_l^{0} f(a_l) & a_l^{l-1} g(a_l) & \cdots & a_l^{0} g(a_l) \end{bmatrix}$$

Die gelben Blöcke sind gleich 0

$$\Longrightarrow \det \begin{bmatrix} v_{m+l-1}(b_1) \\ \vdots \\ v_{m+l-1}(b_m) \\ v_{m+l-1}(a_1) \\ \vdots \\ v_{m+l-1}(a_l) \end{bmatrix} \cdot \mathrm{Res}(f,g;x) = f(b_1)\cdots f(b_m)\, g(a_1)\cdots g(a_l) \cdot \begin{vmatrix} b_1^{m-1} & \cdots & b_1^{0} \\ & \vdots & \\ b_m^{m-1} & \cdots & b_m^{0} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1^{l-1} & \cdots & a_1^{0} \\ & \vdots & \\ a_l^{l-1} & \cdots & a_l^{0} \end{vmatrix}$$

Wir kennen die Vandermonde-Determinante

$$V(y_1,\dots,y_t) := \det\left(y_i^{j-1}\right)_{i,j=1,\dots,t} = \prod_{1\le i<j\le t}(y_j - y_i)$$

z.B. $\begin{vmatrix} 1 & y_1 & y_1^2 \\ 1 & y_2 & y_2^2 \\ 1 & y_3 & y_3^2 \end{vmatrix} = (y_3-y_1)(y_2-y_1)(y_3-y_2)$

$$= \begin{vmatrix} y_3^2 & y_3 & 1 \\ y_2^2 & y_2 & 1 \\ y_1^2 & y_1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$V(a_\ell,\dots,a_1,b_m,\dots,b_1)\,\mathrm{Res}(f,g;x) = f(b_1)\cdots f(b_m)\cdot g(a_1)\cdots g(a_\ell)\cdot V(b_m,\dots,b_1)\cdot V(a_\ell,\dots,a_1).$$

$$\Rightarrow \prod_{\substack{i=1\dots\ell \\ j=1\dots m}}(b_j - a_i)\,\mathrm{Res}(f,g;x) = f(b_1)\cdots f(b_m)\cdot g(a_1)\cdots g(a_\ell)$$

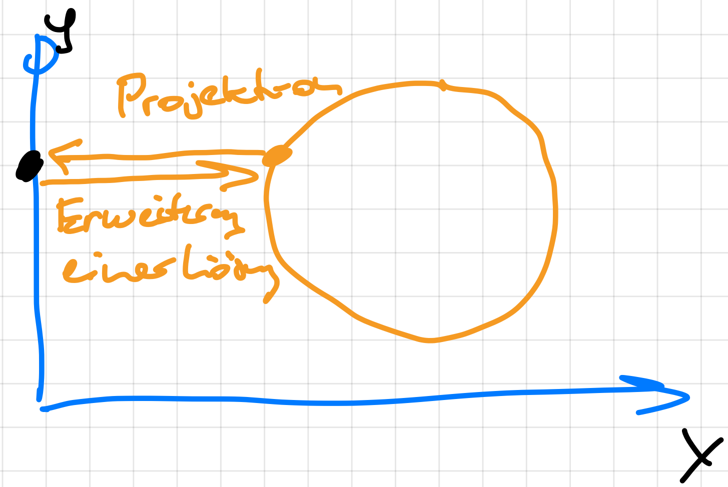
Hier ist $f(b_1) \cdots f(b_m) = \prod_{\substack{i=1,\dots,l \\ j=1,\dots,m}} (b_j - a_i)$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{Res}(f, g; X) = g(a_1) \cdots g(a_l)$$

mit $g(a_1) \cdots g(a_l) = \prod_{\substack{i=1,\dots,l \\ j=1,\dots,m}} (a_i - b_j)$.

$\square$

3.3. Projektion von Varietäten und Erweiterungen von Lösungen.



In diesem Abschnitt haben wir es der Regel mit $k = \mathbb{C}$ zu tun. Wir betrachten das Eliminationsideal

$$I_1 = I \cap k[x_2, \dots, x_n]$$

eines Ideals $I \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ und die Projektion $\pi_1 : k^n \to k^{n-1}$ mit $\pi_1(a_1, \dots, a_n) = (a_2, \dots, a_n)$

Was ist der Zusammenhang von
$\pi_1(V(I))$ und $V(I_1)$?

3.3.1 Theorem (Projektionstheorem = Erweiterungstheorem)

Sei $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$ mit $f_1, \dots, f_s \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \setminus \{0\}$
und seien $c_1, \dots, c_s \in \mathbb{C}[x_2, \dots, x_n]$ die Leitkoeff.
der Polynome $f_1, \dots, f_s$ als Polynome in x_1
mit Koeffizienten in $\mathbb{C}[x_2, \dots, x_n]$.
Sei $J := \langle c_1, \dots, c_s \rangle$. Dann gelten für $\pi_1(V(I))$
die folgenden Inklusionen:

$$V(I_1) \setminus V(J) \subseteq \pi_1(V(I)) \subseteq V(I_1)$$

Oder mit anderen Worten:

- Aus $(a_1, \dots, a_n) \in V(I)$ folgt $(a_2, \dots, a_n) \in V(I_1)$
- Für jedes $(a_2, \dots, a_n) \in V(I_1)$ mit $c_i(a_2, \dots, a_n) \neq 0$ für mindestens ein $i = 1, \dots, s$ gibt es ein $a_1 \in \mathbb{C}$ mit $(a_1, \dots, a_n) \in V(I)$.