<u>1.3.3. Def.</u> Sei $V \subseteq k^n$, seien $p_1, \dots, p_n \in k[t_1, \dots, t_m]$ und sei $q \in k[t_1, \dots, t_m] \setminus \{0\}$ derart, dass V die inklusionskleinste affine Varietät ist derart, dass

$$V \supseteq \left\{ \left(\frac{p_1(b)}{q(b)}, \dots, \frac{p_n(b)}{q(b)} \right) : b \in k^m, q(b) \neq 0 \right\}$$

erfüllt ist. In diesem Fall nennt man die Beschreibung

$$x_1 = \frac{p_1(t_1, \dots, t_m)}{q(t_1, \dots, t_m)}$$
$$\vdots$$
$$x_n = \frac{p_n(t_1, \dots, t_m)}{q(t_1, \dots, t_m)}$$

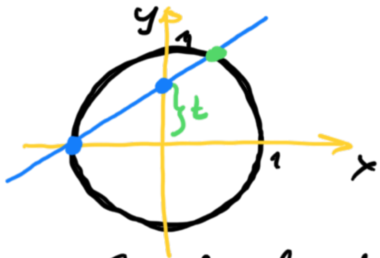
eine rationale parametrische Darstellung von V. Ist $q = 1$, so nennen wir es eine polynomielle parametrische Darstellung von V.

<u>1.3.4 Def.</u> Eine Darstellung einer affinen Varietät V als $V = V(f_1, \dots, f_s)$ mit $f_1, \dots, f_s \in k[x_1, \dots, x_n]$ nennt man eine <u>implizite Darstellung</u>.

Jede aff. Varietät hat laut der Definition eine implizite Darstellung, aber nicht jede hat eine rationale Parametrisierung.

<u>1.3.5 Bsp.</u>

(i)



$x^2 + y^2 = 1$

Wir betrachten eine Gerade durch den festen Punkt $(-1,0)$ und einen "parametrisierten" Punkt $(0,t)$ (die Stelle, wo die Gerade die y-Achse trifft).

(x,y) liegt auf dieser Geraden heißt

$$y = t(x+1)$$

Wir setzen den Ausdruck für y in $x^2+y^2=1$ ein und erhalten

$$x^2 + t^2(x+1)^2 = 1$$
$$x^2 + t^2(x^2+2x+1) = 1$$
$$(1+t^2)x^2 + 2t^2x + t^2-1 = 0.$$

Eine Nullstelle dieses Polynoms in x ist -1. Es gibt auch eine andere

$$(x+1)\cdot\left((1+t^2)\cdot x + t^2-1\right) = 0$$

Check: $\underbrace{(1+t^2)x^2 + 2t^2x + t^2-1}_{\text{ausmultiplizieren.}}$

$$x = \frac{t^2-1}{1+t^2} \Rightarrow y = t(x+1)$$
$$= t\left(\frac{t^2-1}{1+t^2}+1\right)$$

(ii) $V(y-x^2, z-x^3)$:

$$x = t$$
$$y = t^2$$
$$z = t^3$$

<u>Zu Nützlichkeit:</u>

- $V = V(f_1,\dots,f_s) \Rightarrow$ Test ob $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \in V$ ist einfach $f_1(1,2,3) = \dots = f_s(1,2,3)=0$
- Parametrisch ist nützlich für andere Zwecke

Wenn man auf V optimiert und V parametrisch gegeben ist, kann man bzgl. der Parameter optimieren.

1.3.6. Proposition. Für k^n gilt Folgendes:

Parametrisierung. Die Lösungsmenge $X = \{x \in k^n : Ax = b\}$ eines LGSs mit $A \in k^{m \times n}$ und $b \in k^n$, falls $X \neq \emptyset$ ist, kann in einer parametrischen Form als

$$X = \{Ut + v : t \in k^s\}$$

mit $U \in k^{n \times s}$ und $v \in k^n$ beschrieben werden. Es gibt einen Algorithmus, der U und v für gegebene A und b berechnet.

Implizierung. Die Menge $X = \{Ut + v : t \in k^s\}$ mit $U \in k^{n \times s}$ und $v \in k^n$ kann in einer impliziten Form als

$$X = \{x \in k^n : Ax = b\}$$

für $A \in k^{m \times n}$ und $b \in k^m$ gegeben werden.

Es gibt einen Algorithmus, der A und b für gegebene U und v berechnet.

Beweis: Aufgabe

1.3.7. Aufgaben.

1. Warum ist Produkt von zwei Nichtnullpolynomen ein Nichtnullpolynom?
2. Beweisen Sie 1.3.6.
3. Finden Sie eine implizite Darstellung von $V \subseteq k^2$ mit der parametrischen Darstellung

$$x = \frac{1}{1+t^2}$$

$$y = 1 - \frac{1}{t^2}$$

④ Finden Sie eine rationale Parametrisierung der Sphäre $V_{\mathbb{R}}(x^2+y^2+z^2-1)$

⑤ Finden Sie eine rationale Parametrisierung von $V_{\mathbb{R}}(y^2-x^2+x^3)$.

1.4. Ideale.

1.4.1. Def. Eine Teilmenge I von $k[x_1,\dots,x_n]$ heißt Ideal, wenn Folgendes gilt:

(i) $0 \in I$

(ii) Für alle $f, g \in I$ gilt $f+g \in I$.

(iii) Für alle $h \in k[x_1,\dots,x_n]$ und alle $f \in I$ gilt $h \cdot f \in I$.

Vom Gefühl her sieht ein Ideal so ein bisschen wie ein Untervektorraum aus.
Der Unterschied: h ist nicht in k sondern in $k[x_1,\dots,x_n]$.

Genauso kann man Ideale bzgl. beliebiger kommutativer Ringe einführen.:

$m \in \mathbb{Z}_{>0}$, $\quad m\mathbb{Z} = \{m \cdot z : z \in \mathbb{Z}\}$ ein Ideal in $\mathbb{Z}$.

1.4.2. Def. Für $f_1,\dots,f_s \in k[x_1,\dots,x_n]$ nennen wir

$$\langle f_1,\dots,f_s\rangle := \{h_1 f_1 + \dots + h_s f_s : h_1,\dots,h_s \in k[x_1,\dots,x_n]\}$$

das durch $f_1,\dots,f_s$ erzeugte Ideal.

1.4.3. Lem. Seien $f_1,\dots,f_s \in k[x_1,\dots,x_n]$. Dann ist $\langle f_1,\dots,f_s\rangle$ ein Ideal.

Beweis:

(i) $0 = 0 \cdot f_1 + \ldots + 0 \cdot f_s \in \langle f_1, \ldots, f_s \rangle$

(ii) Für $\underset{k[x_1,\ldots,x_n]}{h_1} \cdot f_1 + \ldots + \underset{k[x_1,\ldots,x_n]}{h_s} \cdot f_s \in \langle f_1, \ldots, f_s \rangle$

und $\underset{k[x_1,\ldots,x_n]}{g_1} \cdot f_1 + \ldots + \underset{k[x_1,\ldots,x_n]}{g_s} \cdot f_s \in \langle f_1, \ldots, f_s \rangle$

gilt für die Summe der beiden Polynome

$$\underbrace{(h_1 + g_1)}_{\in k[x_1,\ldots,x_n]} \cdot f_1 + \ldots + \underbrace{(h_s + g_s)}_{\in k[x_1,\ldots,x_n]} \cdot f_s \in \langle f_1, \ldots, f_s \rangle$$

(iii) Ist $h \in k[x_1, \ldots, x_n]$ und

$\underset{k[x_1,\ldots,x_n]}{h_1} \cdot f_1 + \ldots + \underset{k[x_1,\ldots,x_n]}{h_s} \cdot f_s \in \langle f_1, \ldots, f_s \rangle$

so gilt für das Produkt

$$\underbrace{(h \cdot h_1)}_{\in k[x_1,\ldots,x_n]} \cdot f_1 + \ldots + \underbrace{(h \cdot h_s)}_{\in k[x_1,\ldots,x_n]} \cdot f_s \in \langle f_1, \ldots, f_s \rangle$$

$\square$

<u>Bsp.</u> Parametrische Darstellung

$$x = t, y = t^2, z = t^3.$$

Ideal dazu:

$$\langle \underbrace{x - t}, \underbrace{y - t^2}, z - t^3 \rangle,$$

Gilt $y = x^2$ auf dieser parametrisch gegebenen Kurve

$$(x + t) \cdot \underbrace{(x - t)} + (-1) \cdot \underbrace{(y - t^2)}$$

$$= x^2 - t^2 - y + t^2 = x^2 - y$$

1.4.4. Prop. Für alle $f_1, \ldots, f_s, g_1, \ldots, g_t \in k[x_1, \ldots, x_n]$

mit $\langle f_1,\dots,f_s\rangle = \langle g_1,\dots,g_t\rangle$ gilt

$$V(f_1,\dots,f_s) = V(g_1,\dots,g_t).$$

Beweis: Aufgabe.

Konzeptuelle Bemerkung: Das Ideal bestimmt die Varietät.

$$(f_1,\dots,f_s) \longmapsto \langle f_1,\dots,f_s\rangle \longmapsto V(f_1,\dots,f_s)$$

1.4.5. Def. Für $X \subseteq k^n$ heißt

$$I(X) := \{ f \in k[x_1,\dots,x_n] : f(a) = 0 \text{ für alle } a \in X\}$$

das Ideal von X.

1.4.6. Lem. Sei $X \subseteq k^n$. Dann ist $I(X)$ ein Ideal.

Beweis: Aufgabe.

1.4.7. Bsp.

① $V = \{(0,0)\}$, $I(V) = \langle x, y\rangle$

"$\supseteq$": $f = \underbrace{A(x,y)}_{\in k[x,y]} \cdot x + \underbrace{B(x,y)}_{\in k[x,y]} \cdot y$

$f(0,0) = A(0,0)\cdot 0 + B(0,0)\cdot 0 = 0.$

"$\subseteq$": Sei $f \in I(V)$, d.h. $f \in k[x,y]$ und $f(0,0) = 0$.

Wir schreiben f so:

$$f = \underbrace{A(x,y)}_{\in k[x,y]} \cdot x + \underbrace{B(x,y)}_{\in k[x,y]} \cdot y + \underbrace{C}_{\in k}$$

Aus $f(0,0)=0$ folgt

$$A(0,0)\cdot 0 + B(0,0)\cdot 0 + C = 0$$

$\Rightarrow C=0 \Rightarrow$

$$f = A(x,y)\cdot x + B(x,y)\cdot y$$

$\Rightarrow f \in \langle x, y\rangle.$

(2) Sei k unendlicher Körper. Dann ist $I(k^n) = \{0\}$. Vgl. 1.1.6.

(3) $V = V_{\mathbb{R}}(y-x^2, z-x^3).$

Wir zeigen $I(V) = \langle y-x^2, z-x^3\rangle.$

"$\supseteq$" ist ziemlich klar:

$$f = \underset{\substack{\cap\\ k[x,y,z]}}{A(x,y,z)}\cdot(y-x^2) + \underset{\substack{\cap\\ k[x,y,z]}}{B(x,y,z)}\cdot(z-x^3)$$

Jeder Punkt aus V hat die Form (t,t^2,t^3). $\Rightarrow$

$$f(t,t^2,t^3) = A(t,t^2,t^3)\cdot(t^2-t^2) + B(t,t^2,t^3)\cdot(t^3-t^3) = 0.$$

"$\subseteq$": Sei $f\in k[x,y,z]$ gleich 0 auf V.

Wir zeigen zunächst, dass jedes $f\in k[x,y,z]$ die folgende Darstellung besitzt:

$$f = \underset{\substack{\cap\\ k[x,y,z]}}{h_1}\cdot(y-x^2) + \underset{\substack{\cap\\ k[x,y,z]}}{h_2}\cdot(z-x^3) + \underset{\substack{\cap\\ k[x]}}{r}.$$

Es reicht $f = x^\alpha y^\beta z^\gamma$ zu betrachten,

weil jedes $f\in k[x,y,z]$ k-lineare

weil jedes $f \in k[x,y,z]$ [illegible]

Kombination von Monomen ist.

Für $f = x^\alpha y^\beta z^\gamma$ reicht es den Fall $\alpha = 0$ betrachten, weil man aus einer Darstellung von $y^\beta z^\gamma$ eine Darstellung von $x^\alpha y^\beta z^\gamma$ herleiten kann.

Sei $f = y^\beta z^\gamma$.

$$f = y^\beta z^\gamma = ((y-x^2)+x^2)^\beta ((z-x^3)+x^3)^\gamma$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{\beta} \binom{\beta}{i} (y-x^2)^i x^{2(\beta-i)}\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{\gamma} \binom{\gamma}{j} (z-x^3)^j x^{3(\gamma-j)}\right)$$

$$= \sum_{\substack{i \in \{0,\dots,\beta\} \\ j \in \{0,\dots,\gamma\}}} \binom{\beta}{i}\binom{\gamma}{j} (y-x^2)^i (z-x^3)^j x^{2(\beta-i)+3(\gamma-j)}$$

Der Term zu $i=0$, $j=0$ ist nur von x abhängig. Alle anderen Terme haben $(y-x^2)$ oder $(z-x^3)$ als Faktor. Das zeigt, dass für $f = y^\beta z^\gamma$ die gewünschte Darstellung existiert.

$$f = \underset{\in k[x,y,z]}{h_1} \cdot (y-x^2) + \underset{\in k[x,y,z]}{h_2} \cdot (z-x^3) + \underset{\in k[x]}{r}$$

Wenn $f = 0$ auf V ist, dann

$$0 = f(t,t^2,t^3) = h_1(t,t^2,t^3)\cdot(t^2-t^2) + h_2(t,t^2,t^3)\cdot(t^3-t^3) + r(t) = r(t).$$

$\Rightarrow$ r ist $\equiv 0$ auf $k = \mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ r ist das Nullpolynom

$$\Rightarrow f \in \langle y - x^2, z - x^3 \rangle.$$

Wenn $I = \langle f_1,\dots,f_s \rangle$ gilt mit $f_1,\dots,f_s \in k[x_1,\dots,x_n]$ dann nennt man $f_1,\dots,f_s$ eine Basis von I.

Dieser Begriff ist nicht analog zum Begriff einer Basis eines Untervektorraums. Der Begriff ist analog zum Begriff eines Erzeugenden-systems.

$x = \frac{t}{1+t^2}, y = 1 - \frac{1}{t^2}$ $(k = \mathbb{R})$.

Gesucht: Implizite Beschreibung dieser Kurve, die parametrisch in t gegeben ist.

$\boxed{\text{Diskussion einer Aufgabe}}$

$x = \frac{t}{1+t^2}$ $\quad | \cdot (1+t^2)$

$\Downarrow$

$(1+t^2)x = t$ $\quad |$ quadrieren

$\Downarrow$

$(1+t^2)^2 x^2 = t^2$ $\quad | \cdot \frac{1}{t^4}$

$\left(\frac{1}{t^2}+1\right)^2 x^2 = \frac{1}{t^2}$ $\qquad y = 1 - \frac{1}{t^2}$

$\Downarrow$

$(1-y+1)^2 x^2 = 1-y$

$\Downarrow$

$(2-y)^2 x^2 + y - 1 = 0$

Zu zeigen: $V = V_{\mathbb{R}}((2-y)^2 x^2 + y - 1)$ ist die inklusionskleinste affine Varietät, die die Menge $\{(\frac{t}{1+t^2}, 1-\frac{1}{t^2}) : t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\}$

[illegible] $M := \{ (\frac{[illegible]}{1+t^2}, 1 - \frac{[illegible]}{t^2}) : t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \}$

enthält.

Jede Varietät bzgl. $\mathbb{R}$ ist abgeschlossen in der Euklidischen Topologie (d. h. bzgl. der Euklidischen Norm)

Es reicht, dass der topologische Abschluss (in der Euklidischen Topologie) der Menge M gleich V ist.

Zu zeigen:
- $M \subseteq V$ (geht fix, siehe oben!)
- In der Nähe eines jeden Punktes aus V befindet sich ein Punkt aus M.

Für alle $(a,b) \in V$ mit $b \neq 1$ gilt $(a,b) \in M$.

Für alle $(a,1) \in V$ findet man $(a',b') \in M$, bei dem der Abstand von $(a,1)$ und (a',b') beliebig klein ist.

Wir gleichen die folgenden Ideale

$$\langle f_1, \ldots, f_s \rangle \subseteq I(V(f_1, \ldots, f_s))$$

$\langle f_1, \ldots, f_s \rangle = \{ h_1 f_1 + \ldots + h_s f_s : h_1, \ldots, h_s \in k[x_1, \ldots, x_n] \}$

Die Menge aller Polynome, die überall dort $= 0$ sind, wo $f_1, \ldots, f_s$ gleich 0 sind.

D. h. dass beschreibt die Menge aller polynomiellen Gleichungen $g = 0$, die aus dem System $f_1 = \ldots = f_s = 0$ folgen.

1.4.8 Lemma. Seien $f_1, \dots, f_s \in k[x_1, \dots, x_n]$.
Dann gilt $\langle f_1, \dots, f_s \rangle \subseteq I(V(f_1, \dots, f_s))$.
Des Weiteren gibt es $f_1, \dots, f_s$, für welche diese Inklusion strikt ist.

Beweis:

"$\subseteq$" $g = h_1 f_1 + \dots + h_s f_s$, $h_1 \in k[x_1, \dots, x_n]$, $h_s \in k[x_1, \dots, x_n]$

und $a \in V(f_1, \dots, f_s)$, d.h. $f_1(a) = \dots = f_s(a) = 0$

$$\Longrightarrow g(a) = h_1(a) \cdot \underbrace{f_1(a)}_{=0} + \dots + h_s(a) \cdot \underbrace{f_s(a)}_{=0} = 0$$

$$\Rightarrow g \in I(V(f_1, \dots, f_s)).$$

Strikte Inklusion: $s = 1$, $n = 1$.

$$\langle x^2 \rangle \subsetneq I(V(x^2)), \text{ denn:}$$

$$V(x^2) = \{a \in k : a^2 = 0\} = \{a \in k : a = 0\} = \{0\}$$

$$I(V(x^2)) = I(\{0\}) = \{f \in k[x] : f(0) = 0\}$$

$$= \{a_1 x^1 + a_2 x^2 + \dots : a_1, a_2, \dots \in k\}$$

$$\langle x^2 \rangle = \{a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots : a_2, a_3, \dots \in k\}.$$

$$x \in I(V(x^2)) \setminus \langle x^2 \rangle.$$

$\square$

1.4.9 Proposition. Seien $V, W \subseteq k^n$ affine Varietäten. Dann gilt:

(i) $V \subseteq W \Rightarrow I(V) \supseteq I(W)$

(ii) $V = W \Longleftrightarrow I(V) = I(W)$.

Beweis: (i): Sei $V \subseteq W$. Sei $f \in I(W)$

$\Rightarrow f(a) = 0$ für alle $a \in W$

$\underset{(W \supseteq V)}{\Longrightarrow}$ $f(a) = 0$ für alle $a \in V$

$\Longrightarrow$ $f \in I(V)$.

(ii): "$\Longrightarrow$" trivial.

"$\Longleftarrow$": Sei $V = V(f_1, \dots, f_s)$ und

$W = V(g_1, \dots, g_t)$

mit $f_1, \dots, f_s, g_1, \dots, g_t \in k[x_1, \dots, x_n]$.

Sei $I(V) = I(W)$

$f_i \in I(V)$ $(i = 1, \dots, s)$

$\underset{I(V) = I(W)}{\Longrightarrow}$ $f_i(a) = 0$ für alle $a \in W$

$\Longrightarrow$ $f_1(a) = \dots = f_s(a) = 0$ für alle $a \in W$

$\Longrightarrow$ jedes a aus W gehört zu V

$\Longrightarrow$ $W \subseteq V$.

Wenn wir die Rollen von V und W vertauschen, erhalten wir analog $V \subseteq W$. $\square$

1.4.10. Aufgaben

① Man betrachte das System

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ xy - 1 = 0 \end{cases}$$

Bestimmen Sie eine Gleichung $f(x) = 0$ mit $f \in k[x] \setminus \{0\}$, die aus diesem System folgt. Liegt Ihr Polynom f in $\langle x^2 + y^2 - 1, xy - 1 \rangle$?

② $f_1, \dots, f_s \in k[x_1, \dots, x_n]$, I Ideal mit $f_1, \dots, f_s \in I$

dann ist $\langle f_1, \dots, f_s \rangle \subseteq I$.

③ ...

(3) Zeigen Sie:

$$\langle x,y\rangle = \langle x+y, x-y\rangle = \langle x+xy, y+xy, x^2, y^2\rangle$$

$$\langle 2x^2+3y^2-11, x^2-y^2-3\rangle = \langle x^2-4, y^2-1\rangle$$

(4) $V(x+xy, y+xy, x^2, y^2) = V(x,y)$

(5) Zeigen Sie $\langle x\rangle = \langle x+x^2, x^2\rangle$

und $\langle x+x^2\rangle \subsetneq \langle x\rangle$

sowie $\langle x^2\rangle \subsetneq \langle x\rangle$.

(6) Ein Ideal I nennt man ein Radikalideal, wenn aus $f^m \in I$, $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ folgt, dass f auch in I liegt.

Zeigen Sie, dass für jedes $X \subseteq k^n$, $I(X)$ ein Radikalideal ist.

(7) Zeigen Sie, dass $V := \{(t, t^3, t^4) : t \in \mathbb{K}\}$ eine affine Varietät ist und bestimmen Sie eine Basis von $I(V)$.

(8) Die Gleiche Aufgabe wie bei (7) mit $V = \{(t^2, t^3, t^4) : t \in \mathbb{K}\}$ (ein wenig kniffliger als (7)).

(9) Zeigen Sie $I(\mathbb{F}_2^2) = \langle x^2-x, y^2-y\rangle$

1.5. Polynome in einer Variablen.

1.5.1 Def. Sei $f = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m \in k[x] \setminus \{0\}$ mit $a_0 \in k \setminus \{0\}$.

Wir nennen $LT(f) = a_0x^m$ Leitterm von f.

1.5.2 Prop. Für jedes $f \in k[x]$ und $g \in k[x]\setminus\{0\}$

[illegible]

existiert eine eindeutige Zerlegung

$$f = q \cdot g + r$$

mit $q, r \in k[x]$ und $\deg(r) < \deg(g)$ ($r = 0 \Rightarrow \deg(r) = -\infty$). Die Polynome q und r können anhand von f und g algorithmisch berechnet werden.

Beweis: Wir präsentieren einen Algorithmus, der die gewünschten q und r ausrechnet. Der Algorithmus startet mit $q := 0$ und $r := f$. Die Bedingung $f = q \cdot g + r$ wird die Invariante des Algorithmus sein.

Ist $\deg(r) < \deg(g)$, dann terminiert man. Ansonsten benutzt man

$$f = \underbrace{\left(q + \frac{LT(r)}{LT(g)}\right)}_{\text{das neue } q.} g + \underbrace{r - \frac{LT(r)}{LT(g)} g}_{\substack{\deg \text{ davon} < \deg(r) \\ \text{Das ist das neue } r}}$$

Durch die Updates

$$q := q + \frac{LT(r)}{LT(g)}$$

$$r := r - \frac{LT(r)}{LT(g)} g$$

sinkt der Grad von r, die Invariante bleibt erhalten. D.h. nach endlich vielen Iteration terminiert dieser Prozess mit dem gewünschten Ergebnis.

Pseudocode:

Univariate-Division(f, g)

Annahme: $f \in k[x]$, $g \in k[x] \setminus \{0\}$

Ergebnis: Rückgabe von Quotient q und Rest r der Division von f durch g

```
r := f          ▷ Rest im Aufbau
q := 0          ▷ Quotient im Aufbau
▷ Invariante: f = q·g + r
while deg(r) > deg(g)
        T := LT(r) / LT(g)
        q := q + T
        r := r − T·g
end
return q, r.
```

Es bleibt Eindeutigkeit zu zeigen.

Sei
$$f = q \cdot g + r \qquad \deg r < \deg g$$
$$f = Q \cdot g + R \qquad \deg R < \deg g$$
verschiedene Darstellung, d.h.
$$(q, r) \neq (Q, R).$$

Ist $q = Q$, so gilt
$$r = f - q \cdot g = f - Q \cdot g = R \quad \lightning.$$

Ist $q \neq Q$, so gilt
$$q \cdot g + r = Q \cdot g + R$$
$$\Rightarrow \underbrace{\underbrace{(Q-q)}_{\neq 0} \cdot \underbrace{g}_{\neq 0}}_{} = \underbrace{r - R}_{\text{hat Grad} < \deg g}$$

hat Grad

$\geq \deg g$ $\quad$ $\lightning$ $\quad$ $\square$

1.5.3 Korollar. Jedes $f \in k[x] \setminus \{0\}$