$$\begin{cases} f_1(x,y,z)=0 \\ f_2(x,y,z)=0 \\ f_3(x,y,z)=0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} g_1(x,y,z)=0 \\ g_2(y,z)=0 \\ g_3(z)=0 \end{cases}$$

Lemma 3.3.0 Sei $I \subseteq k[x_1,\dots,x_n]$ Ideal mit einer Gröbnerbasis $G=\{g_1,\dots,g_s\}$ bzgl. der Lex-Ordnung mit $c_i = c_{g_i} \in k[x_2,\dots,x_n]$ und $d_i = d(g_i)$ und sei

$$\bar{a} = (a_2,\dots,a_n) \in V(I_1)\setminus V(c_1,\dots,c_s)$$

Man betrachte diejenige $m=1,\dots,s$ mit $c_m(\bar{a})\neq 0$, und bei dem d_m kleinstmöglich ist. Dann gilt:

(a) $I(x_1,\bar{a}) = \{ f(x_1,\bar{a}) : f \in I\} \subseteq k[x_1]$ ist ein Ideal, das durch $g_m(x_1,\bar{a})$ erzeugt ist.

(b) $d_m > 0$.

(c) Für jede Nullstelle a_1 von $g_m(x_1,\bar{a})$ ist

$$(a_1,\dots,a_n) = (a_1,\bar{a}) \in V(I).$$

Beweis: (a): Nach Proposition 3.3.7. ist $I(x_1, \bar{a})$
$= \langle g_1(x_1, \bar{a}), \dots, g_s(x_1, \bar{a}) \rangle$. Als nächsten Schritt zeigen
wir, dass $g_m(x_1, \bar{a})$ alleine das gesamte Ideal
$I(x_1, \bar{a})$ erzeugt. Dafür sollen wir zeigen, dass
alle anderen Polynome $g_i(x_1, \bar{a})$ mit $i \neq m$ redundant
sind.
Wir bemerken, dass $d_i \geq \deg g_i(x_1, \bar{a})$ für alle
$i = 1, \dots, s$ gilt: beim Einsetzen von $(x_2, \dots, x_n) = \bar{a}$
wird der Grad bzgl. x_1 nicht steigen können;
darüber hinaus wird der Grad bzgl. x_1 geringer, genau dann,
wenn $c_i(\bar{a}) = 0$ ist.
D.h. $d_i = \deg g_i(x_1, \bar{a}) \iff c_i(\bar{a}) \neq 0$.
D.h. m ist so gewählt, dass $d_m = \deg g_m(x_1, \bar{a})$
gilt und dabei d_m kleinstmöglich ist.
Ein solches m existiert, weil wegen $\bar{a} \in V(c_1, \dots, c_s)$.

Wir betrachten ein beliebiges $j = 1, \dots, s$. Man hat entweder $d_j \geq d_m$ oder $d_j < d_m$. Wir betrachten den Fall $d_j < d_m$. Nach der Wahl von m ist $c_j(\bar{a}) = 0$.

<u>Hilfsbehauptung</u> $d_j < d_m \implies g_j(x_1, \bar{a}) = 0$ in $k[x_1]$.

<u>Beweis der Hilfsbehauptung</u>: Widerspruchsargument.

Angenommen, es gäbe j mit $d_j < d_m$ und $g_j(x_1, \bar{a}) \neq 0$.

Wir fixieren ein $b = 1, \dots, s$ mit $d_b < d_m$ und $g_b(x_1, \bar{a}) \neq 0$ derart, dass $\delta := d_b - \deg g_b(x_1, \bar{a}) > 0$ kleinstmöglich ist. Zu diesem b konstruieren wir das Polynom

$$S := c_m x_1^{d_m - d_b} g_b - c_b g_m.$$

Es gilt $S \in \langle g_b, g_m \rangle \subseteq \langle G \rangle = I$. Des Weiteren gilt $d(S) < d_m$ nach der Konstruktion.

Wir spezialisieren S und erhalten

$$S(x_1, \bar{a}) = \underbrace{c_m(\bar{a})}_{\neq 0} x_1^{d_m - d_b} g_b(x_1, \bar{a}) - \underbrace{c_b(\bar{a})}_{=0} g_m(x_1, \bar{a})$$

$$\Rightarrow \quad S(x_1, \bar{a}) = c_m(\bar{a})\, x_1^{d_m - d_b}\, g_b(x_1, \bar{a}).$$

Für den Grad von $S(x_1, \bar{a})$ gilt:

$$\deg S(x_1, \bar{a}) = d_m - d_b + \deg g_b(x_1, \bar{a}) = d_m - \delta.$$

Wegen $S \in I$, lässt sich S durch G ohne Rest teilen, sodass man für S die Standarddarstellung

$$S = \sum_{j=1}^{s} B_j g_i$$

erhält. Aus $g_b(x_1, \bar{a}) \neq 0$ folgt $S(x_1, \bar{a}) \neq 0 \Longrightarrow$

$B_j(x_1, \bar{a})\, g_j(x_1, \bar{a}) \neq 0$ für mindestens ein $j = 1, \ldots, s$.

Für jedes solche j gilt:

$$\deg B_j(x_1, \bar{a})\, g_j(x_1, \bar{a}) \leq d(B_j g_j) = d(B_j) + d(g_j)$$
$$= d(B_j) + d_j.$$

Es gilt $d(B_j) + d_j < d(S)$ nach Lemma 3.3.8(a).

Oben haben wir $d(S) < d_m$ gezeigt.

$\Rightarrow \deg B_j(x_1,\bar{a})g_j(x_1,\bar{a}) \leq d(B_j) + d_j < d_m$

im Fall $B_j(x_1,\bar{a})g_j(x_1,\bar{a}) \neq 0$.

$\Rightarrow d_j < d_m$

$\Rightarrow d_j - \deg g_j(x_1,\bar{a}) \geq \delta$. Das ergibt:

$$\begin{aligned}\deg B_j(x_1,\bar{a})g_j(x_1,\bar{a}) &= \deg B_j(x_1,\bar{a}) + \deg g_j(x_1,\bar{a})\\ &\leq \deg B_j(x_1,\bar{a}) + d_j - \delta\\ &< \deg B_j(x_1,\bar{a}) + d_m - \delta\\ &\leq d_m - \delta\end{aligned}$$

$\Rightarrow \deg S(x_1,\bar{a}) < d_m - \delta$ $\lightning$ zu $\deg S(x_1,\bar{a}) = d_m - \delta$.

Ende des Beweises ~~der~~ Hilfsbehauptung.

Wir benutzen die Hilfsbehauptung als Induktionsanfang für einen Beweis von $g_j(x_1,\bar{a}) \in \langle g_m(x_1,\bar{a})\rangle$.

Im Fall $d_j < d_m$ folgt das aus der Hilfsbehauptung.

Sei $d_j \geq d_m$ und sei $g_i(x_1, \bar{a}) \in \langle g_m(x_1, \bar{a}) \rangle$ für alle $i = 1, \dots, s$ mit $d_i < d_j$. Wir betrachten das Polynom

$$S := c_m g_j - c_j X_1^{d_j - d_m} g_m$$

Nach der Konstruktion gilt $d(S) < d_j$. Wegen $S \in I$ besitzt S eine Standarddarstellung

$$S = \sum_{\ell=1}^{s} B_\ell g_\ell .$$

Ist $B_\ell g_\ell \neq 0$ so gilt $d(B_\ell g_\ell) = d(B_\ell) + d(g_\ell)$

$$\overset{\text{Nach Lemma 3.3.8 (a)}}{\leq} d(S) < d_j$$

$\Rightarrow \quad d_\ell = d(g_\ell) < d_j$

$\xRightarrow{\text{Induktionsvoraussetzung}}$ $g_\ell(x_1, \bar{a}) \in \langle g_m(x_1, \bar{a}) \rangle$.

$$\Longrightarrow \quad S(x_1,\bar a) = \underbrace{c_m(\bar a)}_{\neq 0}\, g_j(x_1,\bar a) - c_j(\bar a)\, x_1^{d_j - d_m}\, g_m(x_1,\bar a)$$

$$\Longrightarrow \quad g_j(x_1,\bar a) = \frac{1}{c_m(\bar a)}\Big(S(x_1,\bar a) + c_j(\bar a)\, x_1^{d_j-d_m}\, g_m(x_1,\bar a)\Big)$$

$$= \frac{1}{c_m(\bar a)}\Bigg(\sum_{\substack{\ell=1,\dots,s:\\ B_\ell(x_1,\bar a)\, g_\ell(x_1,\bar a)\neq 0}} B_\ell(x_1,\bar a)\, \underbrace{g_\ell(x_1,\bar a)}_{\in \langle g_m(x_1,\bar a)\rangle} + c_j(\bar a)\, x_1^{d_j-d_m}\, g_m(x_1,\bar a)\Bigg)$$

$$\in \langle g_m(x_1,\bar a)\rangle .$$

(b): Wäre $d_m = 0$, so wär g_m nicht von x_1 abhängig.
Dann wäre $g_m = c_m \in k[x_2,\dots,x_n]$.
Einerseits ist $c_m(\bar a)\neq 0$ nach der Wahl von m.

Andererseits ist $g_m \in I$ und wegen $g_m \in k[x_2,\dots,x_n]$
hat man $g_m \in I_1$. Wegen $\bar a \in V(I_1)$

gilt $g_m(\bar{a}) = 0$ $\lightning$ zu $g_m(\bar{a}) = c_m(\bar{a}) \neq 0$.

(c) Sei $a_1 \in k$ Nullstelle von $g_m(x_1, \bar{a})$, d.h.

$$g_m(a_1, \bar{a}) = g_m(a_1, \ldots, a_n) = 0.$$

Nach (a) ist $I(x_1, \bar{a}) = \{ f(x_1, \bar{a}) : f \in I \}$

$$\parallel \quad \langle g_m(x_1, \bar{a}) \rangle$$

Also

ist $a_1 \in V(I(x_1, \bar{a}))$

und damit $f(a_1, \bar{a}) = 0$ für alle $f \in I$

$$\Rightarrow (a_1, \bar{a}) = (a_1, \ldots, a_n) \in V(I). \qquad \square$$

Wir sind bereit das Erweiterungs- und Projektionstheorem zu beweisen.

<u>Beweis von Theorem 3.3.1.</u>

Formulierung: $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$, $f_1, \dots, f_s \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \setminus \{0\}$

$c_1, \dots, c_s$ die Leitkoeffizienten von $f_1, \dots, f_s$ bzgl. x_1

$J := \langle c_1, \dots, c_s \rangle$. Dann gilt:

$V(I_1) \setminus V(J) \subseteq \pi_1(V(I)) \subseteq V(I_1)$

Sei $G = \{g_1, \dots, g_t\}$ Gröbnerbasis von I bzgl. der Lex-Ordnung. Sei $\bar{a} \in V(I_1) \setminus V(J)$.

Um Lemma 3.3.9 zu benutzen müssen wir zeigen, dass $c_{g_j}(\bar{a}) \neq 0$ ist für mindestens ein $j = 1, \dots, t$.

Wegen $\bar{a} \notin V(J)$ gibt es ein $i = 1, \dots, s$ mit $c_i(\bar{a}) = c_{f_i}(\bar{a}) \neq 0$ ist. Wir betrachten die Standarddarstellung von f_i bzgl. G:

$$f_i = \sum_{j=1}^{t} A_j g_j$$

Nach Lemma 3.3.8 (2) ist $\quad c_i = \sum_{\substack{j=1,\dots,t \\ d(A_j) + d(g_j) = d(f_i)}} c_{A_j} \cdot c_{g_j}$

Wegen $c_i(\bar{a}) \neq 0$ gilt $c_{g_j}(\bar{a}) \neq 0$ für mindestens ein $j = 1, \dots, t$. Die Voraussetzungen von Lemma 3.3.9 sind also erfüllt: $\bar{a} \in V(I_1) \setminus V(c_{g_1}, \dots, c_{g_t})$.

Es gibt also ein $m = 1, \dots, t$ derart, dass $d(g_m) = \deg g_m(x_1, \bar{a}) > 0$ und für jede Nullstelle $a_1 \in \mathbb{C}$ von $g_m(x_1, \bar{a})$ die Bedingung $(a_1, \bar{a}) = (a_1, \dots, a_n) \in V(I)$ erfüllt ist.

Wegen $\deg g_m(x_1, \bar{a}) > 0$ hat $g_m(x_1, \bar{a})$ mindestens eine Nullstelle nach dem fundamentalen Satz von Algebra (hier brauchen wir den Körper $\mathbb{C}$).

Das zeigt $V(I_1) \setminus V(c_1, \dots, c_s) \subseteq \pi_1(V(I))$.

Die Inklusion $\pi_1(V(I)) \subseteq V(I_1)$ kann direkt verifiziert werden.

Für jedes $(a_1, \dots, a_n) \in V(I)$ gilt
$f(a_1, \dots, a_n) = 0$ für alle $f \in I$.
I_1 enthält aber die Elemente von I, die nicht von x_1 abhängig sind

$\Rightarrow$ $f(a_2, \dots, a_n) = 0$ für alle $f \in I_1$

$\Rightarrow$ $f(\bar{a}) = 0$ für alle $f \in I_1$. $\square$

3.3.10 Korollar. Sei

$$C := \{ (p_1(a), \dots, p_n(a)) : a \in \mathbb{C} \}$$

mit $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{C}[t] \setminus \{0\}$. Sei G Gröbnerbasis des Ideals

$$I = \langle x_1 - p_1(t), \dots, x_n - p_n(t) \rangle$$

bzgl. der Lex-Ordnung mit der Reihung der Variablen $t \succ x_1 \succ \dots \succ x_n$. Dann gilt für
$H = G \cap \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ die Gleichung $C = V(H)$

D.h. insbesondere, dass C eine affine Varietät ist, die durch die Gleichungen

$$h(x_1,\dots,x_n) = 0 \qquad (h \in H)$$

implizit beschrieben ist.

Beweis: Nach Theorem 3.1.4 erzeugt H das Eliminationsideal $I \cap \mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]$.
Die Projektion $(a, b_1,\dots,b_n) \longmapsto (b_1,\dots,b_n)$ von $V(I)$ ist gleich C. Nach Theorem 3.3.1. gilt $V(H) \setminus V(c_1,\dots,c_n) \subseteq C \subseteq V(H)$, wobei c_i der Leitkoeffizient von $x_i - p_i(t)$ bzgl. t ist. Man hat aber $c_i \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. D.h. $V(c_1,\dots,c_n) = \emptyset$

$$\Longrightarrow \quad C = V(H).$$

$\square$

3.3.11 Beispiel.

Parametrisch gegeben Kurve in $\mathbb{C}^3$:

$$x = t^3 - t^2$$
$$y = \cancel{t}^2 - 2t$$
$$z = t^2 - 1$$

In Sage:

```
I = R.ideal(x - t^3 + t^2, y - t^2 + 2t, z - t^2 + 1)
I1 = I.elimination_ideal(t)
```

`I1.gens()` besteht aus 5 Polynomen in x, y (welche die Gröbnerbasis von I1 bilden).

3.3.12 Bemerkung.

Für rationale Kurven

$$C := \left\{ \left(\frac{p_1(a)}{q_1(a)}, \ldots, \frac{p_n(a)}{q_n(a)} \right) : a \in \mathbb{C}, \; q_i(a) \neq 0 \; (i = 1 \ldots n) \right\}$$

Man benutzt das Ideal

$$I = \langle q_1(t)x_1 - p_1(t), \ldots, q_n(t)x_n - p_n(t) \rangle$$

Die Leitkoeffizienten $c_1, \ldots, c_n$ sind in diesem Fall Polynome vom Grad höchstens:

$c_i \in \mathbb{C}[x_i]$ mit $\deg c_i \leq 1$.

Das Bild unter $V(c_1, \ldots, c_n)$ ist sehr einfach strukturiert. Sie ist sogar leer, wenn mindestens ein c_i in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist.

Zum Beispiel:

$$x = \frac{1+t}{1+t^6}, \quad y = \frac{1-t^3}{1+t^4}$$

$$C = \left\{ \left(\frac{1+a}{1+a^6}, \frac{1-a^3}{1+a^4} \right) : a \in \mathbb{C}, 1+a^6 \neq 0 \neq 1+a^4 \right\}$$

Sage macht:

$$f_1 = (1+t) - (1+t^6)x$$
$$f_2 = (1-t^3) - (1+t^4)y$$

I = ideal(f_1, f_2)

I1 = I.elimination_ideal(t)

I1.groebner_basis()

$$\underbrace{x^4 y^6 - 3 \cdot x^4 \cdot y^5 \cdots\cdots - \tfrac{1}{2} x}_{g}$$

Was sagt das Theorem über den Zusammenhang von C und V(g).

Wie groß kann die Diskrepanz sein?

$$V(g) \setminus V(c_1, c_2) \subseteq C \subseteq V(g)$$

c_1 = Leitkoeffizient von f_1 bzgl. t

c_2 = Leitkoeffizient von f_2 bzgl. t

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= -x \\ c_2 &= -y \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &V(c_1, c_2) \\ &= V(x, y) \\ &= \{(0,0)\} \end{aligned}$$

$$\underbrace{1-x}\ +\underbrace{t}\ \underbrace{-x}\ t^6$$

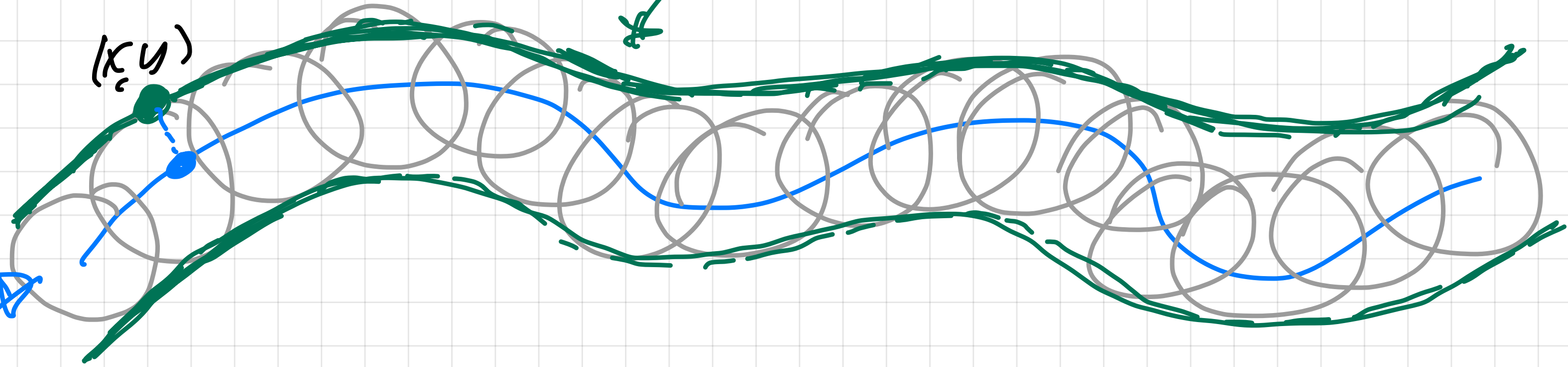
$$\underbrace{1-y} = t^3 \underbrace{-y}\ t^4$$

$$V(g)\setminus\{(0,0)\} \subseteq C \subseteq V(g)$$

$\Rightarrow$ Unsere Parametrisierung parametrisiert die Varietät $V(g)$.

3.3.13 Beispiel.

Was ist die Gleichung dafür?



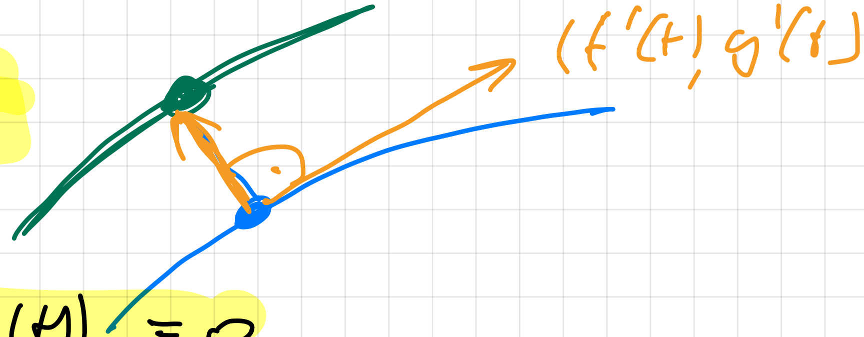
$x = f(t)$
$y = g(t)$

$f, g \in \mathbb{C}[t]$

Ein Einheitskreis bewegt sich entlang einer parametrisierten Kurve und hinterlässt eine Spur.

Was ist die algebraische Gleichung für den Rand dieser Spur?

(x,y) und $(f(t), g(t))$ haben Abstand 1 für ein t.



$$\left\{\begin{array}{l} (x - f(t))^2 + (y - g(t))^2 = 1 \\ f'(t)(x - f(t)) + g'(t)(y - g(t)) = 0 \end{array}\right.$$

$$\underbrace{\left\langle (x - f(t))^2 + (y - g(t))^2 - 1,\ f'(t)(x - f(t)) + g'(t)\cdot(y - g(t)) \right\rangle \cap \mathbb{C}[x,y]}$$

Wir brauchen die Erzeuger dieses Ideals.

Kapitel 4: Der Nullstellensatz

Wann hat ein System $f_1 = \dots = f_s = 0$ keine Lösung in $\mathbb{C}^n$ ($f_1, \dots, f_s \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$)?

Wie können wir diese Situation abfangen?

Mit Idealen formuliert: wann ist

$$V(I) = \emptyset \quad ?$$

4.1. Eine Variante des S-Paar-Kriteriums.

4.1.1. Theorem. Sei $I = \langle g_1, \dots, g_s \rangle$ mit $g_1, \dots, g_s \in k[x_1, \dots, x_n] \setminus \{0\}$. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

(i) $G := \{g_1, \dots, g_s\}$ ist Gröbnerbasis von I

(ii) Jedes Polynom $S(g_i, g_j)$ mit $1 \le i < j \le s$

besitzt eine Darstellung

$$S(g_i, g_j) = \sum_{e=1}^{s} A_e g_e$$

mit $A_e \in K[x_1, \dots, x_n]$ und

$$\mathrm{mdeg}(g_i) \vee \mathrm{mdeg}(g_j) > \mathrm{mdeg}(A_e g_e)$$

für alle $e = 1, \dots, s$.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii): Sei G Gröbnerbasis von I. Dann lässt sich jedes Polynom aus I und insbesondere das S-Polynom $S(g_i, g_j)$ durch G ohne Rest teilen. Dadurch erhält man eine Darstellung

$$S(g_i, g_j) = \sum_{e=1}^{s} A_e g_e \quad \text{mit}$$

$$\mathrm{mdeg}(A_e g_e) \overset{?}{>} \mathrm{mdeg}(S(g_i, g_j))$$

Das S-Polynom ist so definiert, dass

$\operatorname{mdeg}(S(g_i, g_j)) < \operatorname{mdeg}(g_i) \vee \operatorname{mdeg}(g_j)$

$\Longrightarrow$ (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (i): Der Beweis ist analog zum Beweis des herkömmlichen S-Paar-Kriteriums.

Sei (ii) erfüllt und sei $f \in I \setminus \{0\}$, das heißt

$$f = \sum_{i=1}^{s} h_i g_i \text{ mit } h_1, \ldots, h_s \in k[x_1, \ldots, x_n].$$

Zu zeigen: $LT(f) \in \langle LT(g_1), \ldots, LT(g_s) \rangle$.

Wir wählen $h_1, \ldots, h_s$ dann so, dass

$\delta := \max\{\operatorname{mdeg}(h_1 g_1), \ldots, \operatorname{mdeg}(h_s g_s)\}$

kleinstmöglich ist (max bezgl. der Monomordnung).

Wir behaupten, dass dann $\delta = \mathrm{mdeg}(f)$ gilt. Angenommen, das wäre nicht so. Dann wäre $\mathrm{mdeg}(f) < \delta$. Seien

$$\mathcal{I} := \{ i = 1, \dots, s : \mathrm{mdeg}(h_i g_i) = \delta \}$$
$$\mathcal{J} := \{ j = 1, \dots, s : \mathrm{mdeg}(h_j g_j) < \delta \}.$$

Es gilt:

$$\underbrace{f}_{\substack{\mathrm{mdeg} \\ < \delta}} = \sum_{i \in \mathcal{I}} \underbrace{LT(h_i) g_i}_{\text{hat Multigrad } \delta.} + \underbrace{\sum_{i \in \mathcal{I}} (h_i - LT(h_i)) g_i + \sum_{j \in \mathcal{J}} h_j g_j}_{\text{hat Multigrad } < \delta.}$$

Nach Lemma 2.5.9 gilt

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} LT(h_i) g_i = \sum_{\ell, m \in \mathcal{I}} c_{\ell, m} \, S(LT(h_\ell) g_\ell, LT(h_m) g_m)$$

mit gewissen $c_{\ell, m} \in k$.

Hierbei ist

$$S(LT(h_\ell)g_\ell, LT(h_m)g_m) = S(\underbrace{x^{\mathrm{mdeg}(h_\ell)} g_\ell}_{\mathrm{mdeg}\ \delta}, \underbrace{x^{\mathrm{mdeg}(h_m)} g_m}_{\mathrm{mdeg}\ \delta})$$

$$= \frac{x^\delta}{x^{\mathrm{mdeg}(h_\ell)} LT(g_\ell)} \cdot x^{\mathrm{mdeg}(h_\ell)} g_\ell - \frac{x^\delta}{x^{\mathrm{mdeg}(h_m)} LT(g_m)} g_m$$

$$= x^{\delta - (\mathrm{mdeg}(h_\ell) \vee \mathrm{mdeg}(h_m))} S(g_\ell, g_m).$$

$\delta = \mathrm{mdeg}(h_\ell) + \mathrm{mdeg}(g_\ell)$

$\delta = \mathrm{mdeg}(h_m) + \mathrm{mdeg}(g_m).$

Nach (ii) besitzt $S(g_\ell, g_m)$ eine Darstellung

$$S(g_\ell, g_m) = \sum_{t=1}^{s} a_{\ell,m,t}\, g_t$$

mit $a_{\ell,m,t} \in k[x_1, \dots, x_n]$, $\mathrm{mdeg}(a_{\ell,m,t}\, g_t) \leq \mathrm{mdeg}(g_\ell) \vee \mathrm{mdeg}(g_m)$

$\Longrightarrow$

$$f = \sum_{\ell,m \in \tilde{J}} \sum_{t=1}^{s} c_{\ell,m}\, x^{\delta - (\mathrm{mdeg}(g_\ell) \vee \mathrm{mdeg}(g_m))}\, a_{\ell,m,t}\, g_t$$

$$+ \sum_{i \in \tilde{I}} (h_i - LT(g_i)) \cdot g_i + \sum_{j \in \mathcal{J}} h_j g_j.$$

Die Terme in dieser Darstellung haben einen der Polynome $g_1, \dots, g_s$ als Faktor auch der Multigrad von jedem Term ist geringer als δ (Bzgl. der Monomordnung).

$\Rightarrow$ $\lightning$ zur Wahl von δ.

Das heißt, $\mathrm{mdeg}(f) = \delta$.

$\Rightarrow \quad \mathrm{mdeg}(f) = \mathrm{mdeg}(h_i g_i)$ für ein $i = 1, \ldots, s$.

$\qquad \mathrm{mdeg}(h_i g_i) = \mathrm{mdeg}(h_i) + \mathrm{mdeg}(g_i)$

$\Rightarrow \quad \mathrm{mdeg}(f) \geq \mathrm{mdeg}(g_i)$

$\Rightarrow \quad LT(f) \in \langle LT(g_1), \ldots, LT(g_s) \rangle$.

$\Rightarrow$ G ist Gröbnerbasis. $\square$

4.1.2 Beispiel!

Die Rest-gleich-Null-Bedingung für $S(f_i, f_j)$ (für gegebene i, j) ist i.A. nicht äquivalent zur Bedingung aus dem vorigen Theorem.