Mathematik IT-1

Diskrete Mathematik für Informatik-Studiengänge

8. Oktober 2021

Prof. G. Averkov

Institut für Mathematik, Fakultät 1

Fachgebiet Algorithmische Mathematik

Brandenburgische Technische Universität Cottbus-Senftenberg

Inhaltsverzeichnis

Organisatorisches

0.1 (Vorlesung)**.**

(a) In Präsenz, digitale Mitschrift im Moodle, bei Bedarf Aufzeichnungen

(b) In der Vorlesung geht es um die Theorie und ihre Rolle bei der Lösung von Aufgaben.

(c) Theorie ist ein Werkzeug zur Lösung von Problemen und Aufgaben.

konkreten und allgemeinen

→ Theorie: hilf enorm weiter, wenn man sie wirklich beherrscht und mit praktischen Erfahrungen ergänzt

→ Z.B. kann eine mathematische Theorie helfen, drastisch den Zeitaufwand zur Lösung von (Rechen) Aufgaben zu reduzieren

"Theorie ohne Empirie ist leer, Empirie ohne Theorie ist blind" — Kant

0.2 (Übung)**.**

(a) Zwei Übungstermine pro Woche.

(b) Eine synchron und eine asynchron über BigBlueButton

(c) Die Teilnehmer werden <u>nicht</u> in zwei Übungsgruppen eingeteilt. Jede Woche kann eine der beiden Übungen frei gewählt werden.

(d) Aufgabenblatt Nummer x (mit $x \geq 1$) wird in der Vorlesungswoche $x + 1$ diskutiert und zum Ende der Woche x abgegeben.

(e) Abgabe der Blätter digital über Moodle.

(f) Blatt Nummer 0 wird in der ersten Woche diskutiert und wird nicht abgegeben.

0.3 (Prüfung)**.**

(a) Zulassung zur Klausur bei mind. 50% aller Punkte für die Aufgabenblätter

(b) Bei mind. 75% aller Punkte für die Aufgabenblätter gibt es einen 10% Bonus in der Klausur

(c) Keine Rechengeräte in der Klausur zugelassen

Einleitung

1 Wissenschaftliche Prinzipien

1.1.

- Möglichst wenig Annahmen, insb. keine überflüssigen Annahmen.
- Behauptungen werden validiert (Beobachtungen, Experimente, Argumente. Bei Mathe - nur Argumente = Beweise).
- Die Autorität zählt nicht ("Aber mein Lehrer hat gesagt, dass das so richtig ist"), es zählen verifizierte Behauptungen.
- Begriffe/Bezeichnungen werden möglichst eindeutig festgelegt (bei Mathe - extrem eindeutig), so dass man möglichst keinen Spielraum für eine Interpretation haben soll. ("War das die wahre Liebe?" - kann man die Liebe eindeutig definieren? Wenn nicht, dann kann man so eine Art Frage endlos diskutieren, ohne Ergebnis.). "Die Erde ist rund" - was heißt genau "die Erde"? Was heißt genau "rund"? Begriffsklärung sehr wichtig.

- Natur- und Strukturwissenschaften. Die reale Welt und Modelle zur realen Welt und einfach nur Modelle.

- Grundlagenwissenschaften: wenn man oft genug “Warum?” fragt, kommt man zu grundlegenden Fragen, deren Antworten einen bleibenden Wert und – auf Dauer – breite Anwendungsmöglichkeiten haben. Wichtige Frage: Warum? Warum gibt uns die pq-Formel das richtige Ergebnis? Die Antwort ist für die Mathe-Gemeinschaft interessanter als die Formel selbst. Das Interessante in der Mathematik ist genau das, was man in den Formeltafeln nicht findet.

Abstrakte Modelle

Situationen in der Realen Welt

2 Mathematische Prinzipien

2.1.

- Für eine mathematische Theorie legt man Grundbegriffe und Grundbezeichnungen (eindeutig) fest.

- Auf der Basis der bereits vorhandenen Begriffen und Bezeichnungen führt man immer neue Begriffe und Bezeichnungen (eindeutig) ein.

- Mit Hilfe von vorhandenen Begriffen und Bezeichnungen werden Aussagen formuliert, die dann durch Argumentation bestätigt ($=$ bewiesen) oder widerlegt werden.

- Wahre mathematische Beweise sind widerspruchsfrei und vollständig.

- In der Theorie interessiert man sich vor allem für noch offene Aussagen, die aktuell weder bestätigt noch widerlegt worden sind.

- Mathematik $\neq$ Rechnen. Rechnen, ohne dass man versteht, was die Rechenschritte

Beispiel einer Definition:

Eine positive ganze Zahl heißt Primzahl, wenn sie größer als eins ist und durch keine positive ganze Zahl als die Eins und sich selbst teilbar ist.

(Wir nehmen natürlich an, dass die Begriffe "teilbar" und "ganze Zahl" bereits definiert wurden).

Aussage: Es gibt unendlich viele Primzahlen n, für welche $n+2$ ebenfalls eine Primzahl ist.

Ob diese Aussage falsch oder wahr ist, ist noch nicht geklärt.

bedeuten, ist keine mathematische Tätigkeit. Wichtig ist der Sinn hinter den Rechenschritten. Erkennt man beim Rechnen den Sinn nicht, dann ist man ein menschlicher Computer (echte Computer machen weniger Fehler und sind etwas schneller beim Rechnen :)) Hatten Sie in der Schule Mathe?.. Oder nur Rechnen?

Kapitel I

Mathematische Grundlagen

1 Aussagen

1.1 Aussage

1.1 Def. Eine Aussage ist ein Satz (eine Folge von Zeichen mit mathematischer Bedeutung), die einen eindeutigen Wahrheitswert (entweder falsch oder wahr) hat. Den Wahrheitswert kodiert man oft mit Zahlen 0 (falsch) und 1 (wahr).

1.2 Bsp.

- $2 < 1$ (falsch)
- $2 = 1$ (falsch)
- $2 > 1$ (wahr)
- 2 ist eine Primzahl (wahre Aussage, Primzahl definiert).
- 2 ist eine schöne Zahl (keine Aussage, es sei denn, die Eingeschaft einer Zahl schön zu sein, wurde definiert).
- Es gibt unendlich viele Primzahlen n, für welche $n + 2$ ebenfalls eine Primzahl ist. (eine Aussage, Wahrheitswert ist noch nicht geklärt).
- Die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ hat keine Lösungen. (an sich keine Aussage, es sei denn, ein Kontext war vorher gegeben, in dem die Rolle von x geklärt wuirde.)

- Die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ hat keine reellwertigen Lösungen (wahre Aussage).

1.2 Logische Verknüpfungen

1.3 Def. Seien A und B Aussagen. Dann definiert man anhand von A und B die folgenden Aussagen:

- $A \wedge B$ Konjunktion („und“) ist genau dann wahr, wenn A und B beide wahr sind.
- $A \vee B$ Disjunktion („oder“) ist genau dann falsch, wenn A und B beide falsch sind.
- $A \Rightarrow B$ Implikation ist genau dann falsch, wenn A wahr und B falsch ist.
- $A \Leftrightarrow B$ Äquivalenz ist genau dann wahr, wenn die Wahrheitswerte von A und B gleich sind.

0 <=> falsch
1 <=> wahr

Wahrheitswert von A	Wahrheitswert von B	Wahrheitswert von $A \wedge B$	W.w. von $A \vee B$	W.w. $A \Rightarrow B$	W.w. $A \Leftrightarrow B$	W.w. $A \dot{\vee} B$
0	0	0	0	1	1	0
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	0

Ausschließende Disjunktion

W.w. A	W.w. $\overline{A}$
0	1
1	0

$\neg A$

f	f
f	w
w	f
w	w

0	0
0	1
1	0
1	1

- $A \dot{\vee} B$ ausschließende Disjunktion ist genau dann wahr, wenn die Wahrheitswerte von A und B verschieden sind.

- $\neg A$ (wir auch als $\bar{A}$ bezeichnet), Negation (Verneinung) ist genau dann wahr, wenn A falsch ist.

1.4 Bsp.

- Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt die Implikation: $x = y \Rightarrow x^2 = y^2$ (wahr)
- Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt die Implikation $x, y \in \mathbb{R}, x^2 = y^2 \Rightarrow x = y$ (falsch für $x = 1$ und $y = -1$)

Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$x^2 = y^2 \iff |x| = |y|$$

$$|x| = |y| \iff (x = y) \vee (-x = y)$$

$$|x| = |y| \iff x \geq 0,\ y \geq 0,\ x = y \text{ oder}$$
$$x \geq 0,\ y \leq 0,\ x = -y \text{ oder}$$
$$x \leq 0,\ y \leq 0,\ -x = -y \text{ oder}$$
$$x \leq 0,\ y \geq 0,\ -x = y \text{ oder}$$

$$\Longrightarrow x = y \text{ oder } -x = y$$

$$x = y \text{ oder } -x = y \Rightarrow |x| = |y| \text{ oder } |-x| = |y|$$

$$\Rightarrow |x| = |y| \text{ oder } |x| = |y|$$

$$\Rightarrow |x| = |y|.$$

Beweis von $x^2 = y^2 \iff ((x=y) \text{ oder } (-x=y))$.

$$x^2 = y^2 \iff x^2 - y^2 = 0$$
$$\iff (x-y)\cdot(x+y) = 0$$
$$\iff x-y=0 \text{ oder } x+y=0$$
$$\iff x=y \text{ oder } -x=y.$$

$\bar{a}$ $\quad a\cdot b \quad a \vee b$

$$a\cdot b\cdot \bar{c} \vee (c\,a \vee \bar{b})$$

$$(a \wedge b) \Rightarrow c$$

Wie legen wir die Prioritäten von $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ fest? 2

[Wie machen es die SAT-Solver?]

1.5. Alternativbezeichnungen für $\Rightarrow$ und $\Leftrightarrow$ sind $\rightarrow$ bzw. $\leftrightarrow$.

1.6. Wenn man in Mathe-Argumenten eine Folge von Implikationen benutzt, so schreibt man auch oft kurz so etwas wie $A \Rightarrow B \Rightarrow C$. Damit meint man $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$, d.h., aus A folgt B und aus B folgt C. Das Gleiche auch für $\Leftrightarrow$.

Sei z positive ganze Zahl. Dann gilt:

z ist durch 9 teilbar $\Longleftrightarrow$

die Quersumme von z (d.h. die Summe der Ziffern in der Dezimal-Darstellung von z) durch 9 teilbar.

Erstmal ein Beispiel:

$$522 = 5 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 2 \cdot 1$$
$$= 5 \cdot (99+1) + 2 \cdot (9+1) + 2$$
$$= \underbrace{5 \cdot 99 + 2 \cdot 9}_{\text{Teilbar durch } 9} + \underbrace{5 + 2 + 2}_{\text{Quersumme}}$$

dieses Beispiel kann man zu einem Beweis ausbauen.

Bemerkung: Die Formeln

$$A \Leftrightarrow B$$

und

$$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$$

sind äquivalent, d.h. sie haben für alle Aussagen A und B den gleichen Wahrheitswert.

Frage:

$$F := ((A \land \neg B) \Rightarrow (C \lor A))$$

$$G := C \lor (B \Leftrightarrow \neg A)$$

Äquivalent?

A	B	C	F	G
0	0	0	1	
0	0	1	1	
0	1	0	1	1
0	1	1	1	
1	0	0	1	
1	0	1	1	
1	1	0	~~0~~ 1	0
1	1	1	1	

$$F = \overline{A \land B \land \overline{C}}$$

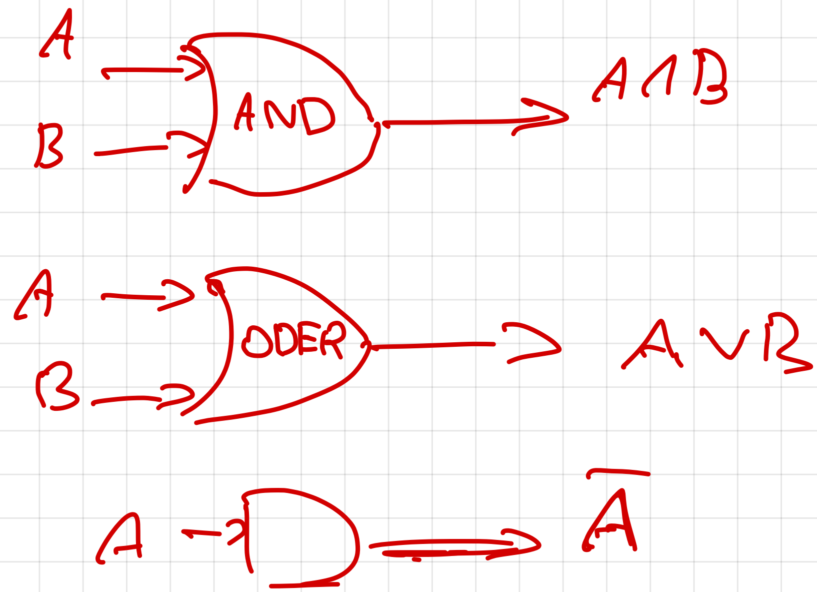
$$= \overline{A} \lor \overline{B} \lor C$$

$(A \lor C) \land \neg B$ ist falsch $\Leftrightarrow$

$A \lor C$ falsch und B wahr $\Leftrightarrow$

A falsch, C falsch, B wahr.

Computer-Chips

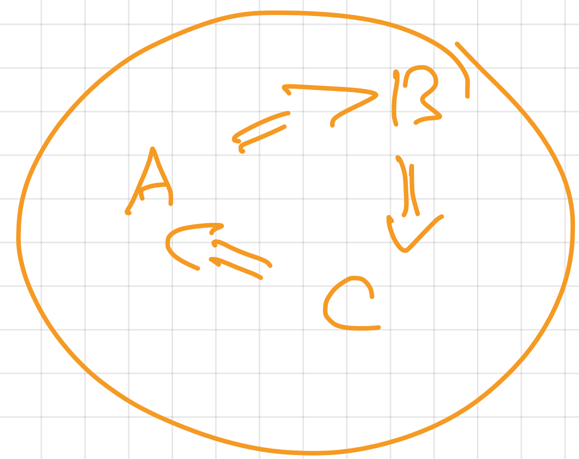


Bsp. Addition in Chips

$\boxed{c = a + b}$ Adder

a_i	b_i	u_i	u_{i+1}	c_i
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

- $A \iff B$ and $B \iff C$
- $A \iff B$ and $B \iff C$ and $A \iff C$
- $A \Rightarrow B$ and $B \Rightarrow C$ and $C \Rightarrow A$



Volladdierer.

$1 + 1 = 10$

$$
\begin{aligned}
1 &= 1 \\
1+1 &= 10 \\
1+1+1 &= 11 \\
1+1+1+1 &= 100
\end{aligned}
$$

Binäre Darstellung von Zahlen

$$
\begin{array}{r}
101101 \\
+\ 10110 \\
\hline
1000011
\end{array}
$$

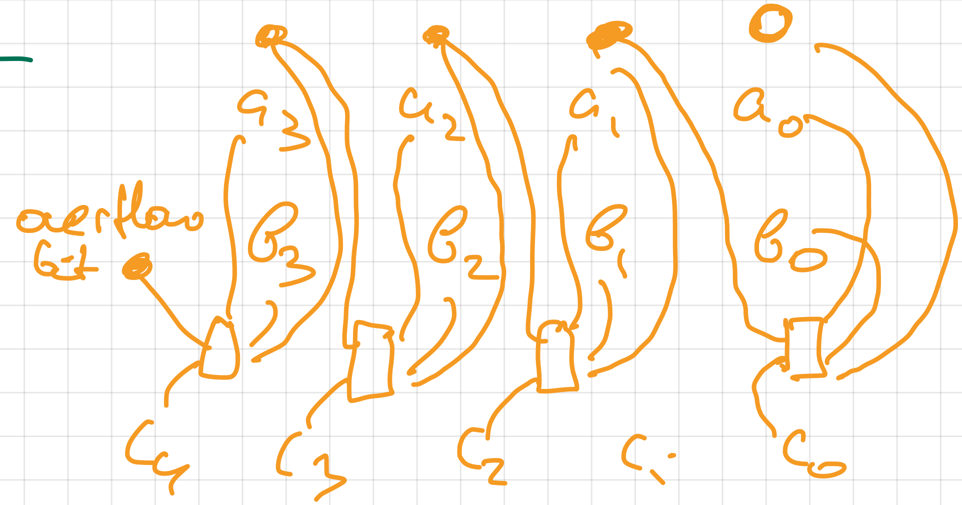
Eingabe des Volladdierers

- a_i: i-te Stelle des 1. Summanden
- b_i: i-te Stelle des 1. Summanden
- u_i: Übertrag.

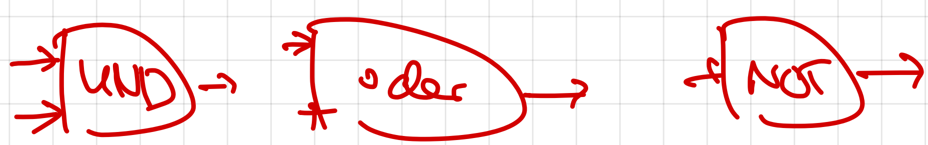
Rückgabe:

- c_i: i-te Stelle der Summe
- u_{i+1}: der nächste Übertrag.

a_i	b_i	u_i	u_{i+1}	c_i
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1



Aufgabe: Volladdierer selber basteln mit



1.7. Die Aussagenlogik ist die Studie der logischen Vernknüpfungen von Aussagen. Dabei spielt die Natur in den Formeln verwendeten Aussagen, die man mit Symbolen bezeichnet, etwa $a, b, c, d, \ldots$, an sich keine Rolle. Alles, was zählt, ist der Wahrheitswert. Daher kann man auch $a, b, c, d \ldots$ als Variablen aus $\{0, 1\}$ auffassen, ohne dass sich an der Studie was ändert. Mehr über die Aussagenlogik erfahren wir später in diesem Kurs.

2 Mengen

2.1 Menge

2.1 Def. Eine Menge X ist durch die Eindeutige Angabe definiert, welche Objekte Elemente der Menge sind. Man schreibt in diesem Fall $x \in X$ dafür, dass das Objekt x Element der Menge X ist, und $x \notin X$ dafür, dass x kein Element der Menge x. Mit anderen Worte: für die Angabe einer Menge X soll für jedes Objekt x geklärt sein, ob für dieses Objekt $x \in X$ oder $x \notin X$ gilt.

2.2. Unser Definition der Menge ist etwas intuitiv (und ist somit streng genommen keine echte Definition), sie reicht aber für unsere Zwecke völlig aus. Die genaue Definition einer Menge ist durch das Axiomensystem von Zermelo-Fraenkel gegeben. Dieses System legt Folgendes fest:

- die Existenz der leeren Mengen,
- die Bedingung für die Gleichheit von zwei Mengen
- die Möglichkeit Mengenfamilien zu vereinigen,
- die Existenz einer sogenannten Potenzmenge für eine beliebige Menge
- Fundierungsaxiom (ist etwas technisch)
- die Möglichkeit Mengen, durch eine Bedingung zu definieren.

- Ersetzungsaxiom (ist etwas technisch)

Zu den obigen Axiomen nimmt man noch zusätzlich das sogenannte Auswahlaxiom dazu.

$\boxed{\text{ZFC}}$

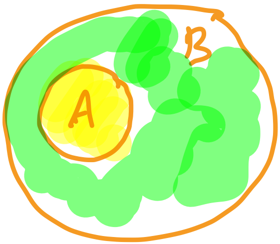
2.3. Eine Weise, Mengen zu definieren, ist durch die Auflistung ihrer Elemente. Dabei stehen die geschweiften Klammern für Mengen, die drei Punkte bedeuten „usw".

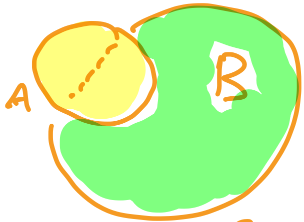
- $\{1, 2, 5, 7\} = X$ $\quad 1 \in X \quad 5 \in X \quad -30 \notin X$ $\quad 2 \in X \quad 7 \in X$
- $\{1\} = X$ $\quad 1 \in X, \ 2 \notin X$
- $\{1, \{2, 5\}, \{6\}\} = X$ $\quad 1 \in X, \quad \{2,5\} \in X, \quad \{6\} \in X$
- $\{1, 2, 3, \ldots\}$ – die Menge der natürlichen Zahlen

$$\{1, \{2,5\}, \{6\}\} \neq \{1, 2, 5, 6\}$$

$$1 \in \qquad 2 \notin \qquad\qquad 1 \in \qquad 2 \in$$

2.4 Def. Seien A und B Mengen. Dann ist A genau dann eine Teilmenge von B, wenn jedes Element von A auch Element von B ist ($A \subseteq B \Leftrightarrow \forall\, x \in A : x \in B$).





$\{1,2,7\} \subseteq \{1,2,3,5,6,7\}$

$\{1,2,7\} \not\subseteq \{1,2,3,4\}$

2.5. In einigen mathematischen Quellen bezeichnet man die Inklusion als $\subset$ und nicht als $\subseteq$. Es ist schwer zu sagen, welche Bezeichnung in der Mehrheit der Quellen benutzt wird. Es gibt aber auch Quellen, in denen $\subset$ die strikte Inklusion bezeichnet. Daher ziehe ich persönlich $\subseteq$ vor.

2.6 Def. Zwei Mengen A und B heißen genau dann gleich, wenn $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$ gilt. A heißt genau dann echte Teilmenge einer Menge B, wenn $A \subseteq B$ und $A \neq B$ erfüllt sind. Bezeichnung: $A \subsetneq B$.

$A \subsetneq B :\Longleftrightarrow A \subseteq B,\ A \neq B$

2.7 (Definition durch eine Bedingung)**.** Eine sehr verbreite Weise, Mengen zu definieren, ist durch Bedingungen, nach dem Format $\{AUSDRUCK : BEDINGUNG\}$. Der Doppelpunkt bedeutet „sodass“, „mit der Bedingung“. In manchen Quellen wird ein Strich an der Stelle des Doppelpunktes benutzt.

2.8 Aufgabe.

- Was ist der Durchschnitt der Menge $\{k^2 : k \in \mathbb{N}, k \text{ ungerade}\}$ mit der Menge $\{1, \ldots, 100\}$?

- Wie viele Elemente hat die Menge $\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 5x + 6\}$? Welche Elemente sind es genau?

$X = \{k^2 : k$ positive ungerade ganze Zahl$\}$

$1 \in X$ ($k=1$) ungerade positive Zahl

$2 \notin X$

$3 \notin X$

$\vdots$

$8 \notin X$

$9 \in X$, denn $9 = k^2$ für $k = 3$

$X = \{k^2 : k$ ungerade positive ganze Zahl$\}$

D.h. X ist die Menge der Quadrate von ungeraden positiven ganzen Zahlen.

$X = \{1^2, 3^2, 5^2, 7^2, 9^2, 11^2, \ldots\}$

$3 \in X$?

Ist 3 Element von X ?

Ist 3 Quadrat einer ungeraden positiven ganzen Zahl?

2.9 Def. Die leere Menge ist die Menge, die keine Elemente enthält. Bezeichnung: $\emptyset$.

$\emptyset$

2.10 Def (Potenzmenge)**.** Sei X eine Menge. Dann ist die Potenzmenge von X die Menge aller Teilmengen von X. Bezeichnung: 2^X, Formal: $2^X := \{A : A \subseteq X\}$.

$$2^{\{1,2\}} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$$

$$\begin{tikzcd} & \{1,2\} & \\ \{1\} \arrow[ur, phantom, "\subseteq" sloped] & & \{2\} \arrow[ul, phantom, "\subseteq" sloped] \\ & \emptyset \arrow[ul, phantom, "\subseteq" sloped] \arrow[ur, phantom, "\subseteq" sloped] & \end{tikzcd}$$

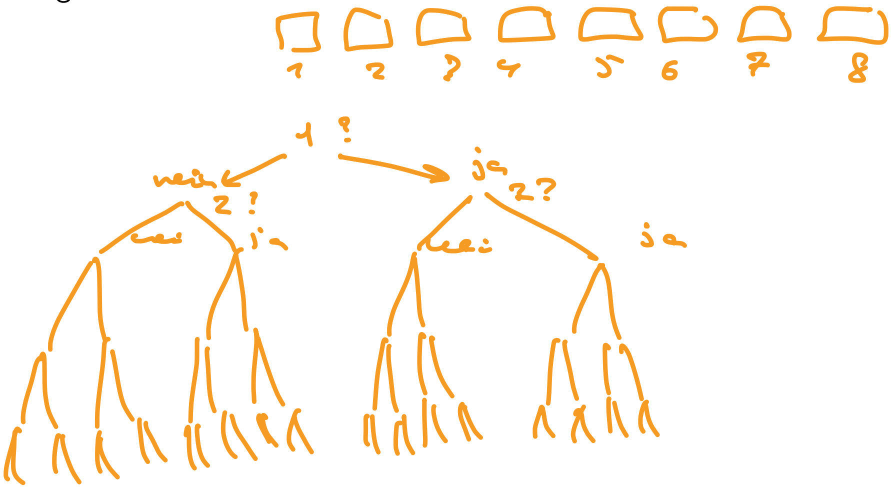
$$2^{\{1,2,3\}} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\}$$

$$2^{\{1,\dots,27\}} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \dots, \{27\}, \{1,2\},$$

$2^{27} = 134217728$ Elemente

2.11 Aufgabe. Wenn X genau $n \in \mathbb{N}$ Elemente hat, wie viele Elemente hat 2^X? Was wäre Ihre Begründung dazu?

$n = 8$



2.12. Eine weitere Bezeichnung für die Potenzmengen, die man in der Literatur benutzt, ist $\mathcal{P}(X)$. Ich persönlich finde 2^X einleuchtender.

2.2 Zahlenmengen

$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$

$2^{\mathbb{N}}$

Sei $n \in \mathbb{N}$ und X eine n-elementige Menge. Dann hat 2^X genau 2^n Elemente

2.13. Zahlenbereiche, die Sie evtl. aus der Schule schon kennen:

$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$ natürliche Zahlen. Uns fehlt dort die Null, daher...

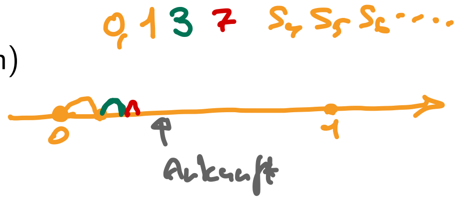
$\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \ldots\}$. Hier können wir nicht beliebig subtrahieren, daher...

$\mathbb{Z} := \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$ ganze Zahlen. Hier können wir nicht beliebig dividieren, daher...

$\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$ rationale Zahlen. In dieser Menge gibt es “Löcher” , die man merkt, wenn man Geometrie oder Analysis macht, daher...

$\mathbb{R}$ reelle Zahlen (saubere Definition etwas trickreich)

$\mathbb{C}$ komplexe Zahlen (werden demnächst diskutiert)



2.14. Es gelten die Inklusionen. $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}_0 \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ All diese Inklusionen sind natürlich strikt.

2.15. Manche Quellen definieren die Menge der natürlichen Zahlen als $\{0, 1, 2, \ldots\}$, es ist mittlerweile sogar die ISO-Norm 80000-2. Nach meiner Erfahrung gibt es viel mehr Quellen, wo man die Menge der natürlichen Zahlen als $\{1, 2, 3, \ldots\}$ definiert. Daher ziehe ich die Definition $\{1, 2, 3, \ldots\}$ vor.

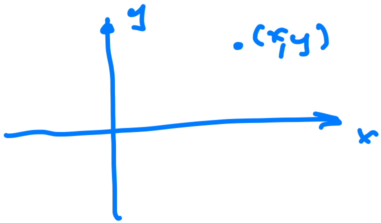
2.16. Die Erweiterung der Zahlenbereiche zu immer größeren Bereichen ist durch den Wunsch nach einer Vollständigkeit motiviert....

2.3 Mengenoperationen

2.17 Def. Seien A, B Mengen. Dann heißt

- $A \cap B := \{x : (x \in A) \wedge (x \in B)\}$ Durchschnitt von A und B
- $A \cup B := \{x : (x \in A) \vee (x \in B)\}$ Vereinigung von A und B
- $A \setminus B := \{x : (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$ Mengendifferenz von A und B
- $A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, Symmetrische Differenz von A und B

$\mathbb{R}^2$

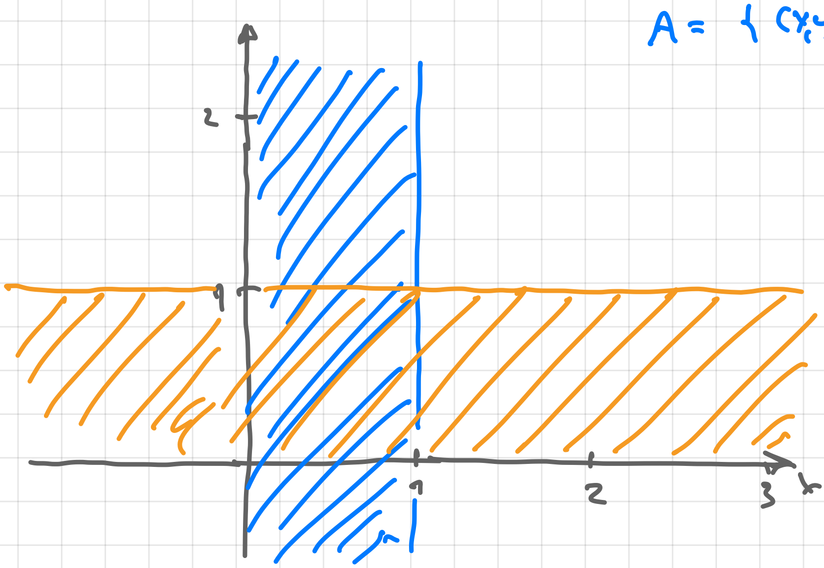


$A = \{(x,y) : x \in [0,1], y \in \mathbb{R}\}$

$B = \{(x,y) : x \in \mathbb{R}, y \in [0,1]\}$

$A = \{(x,y) : x \in [0,1],\ y \in \mathbb{R}\}$

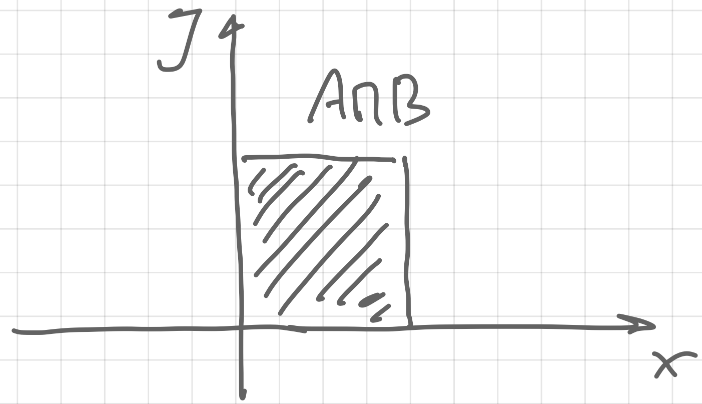
$B = \{(x,y) : x \in \mathbb{R},\ y \in [0,1]\}$

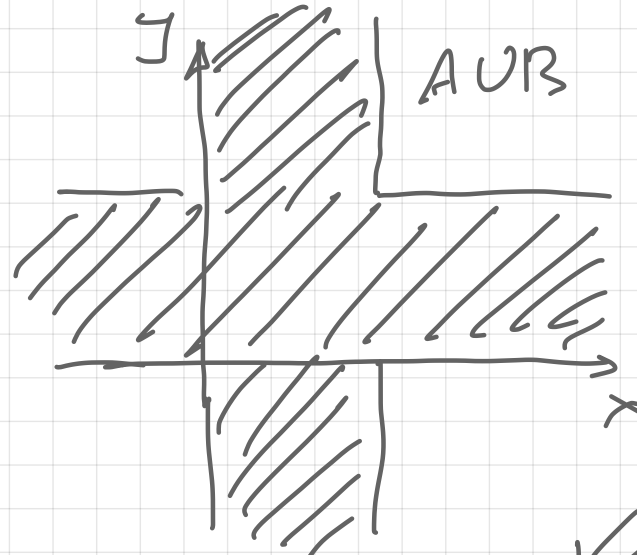


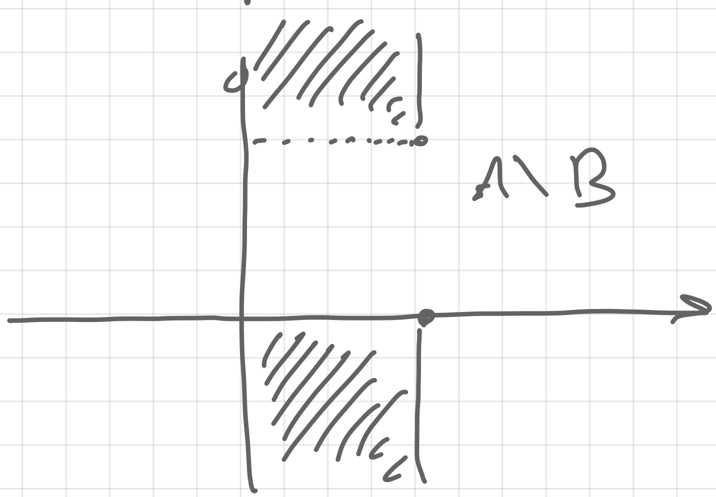
$A \cap B = \{(x,y) : (x,y) \in A \text{ and } (x,y) \in B\}$

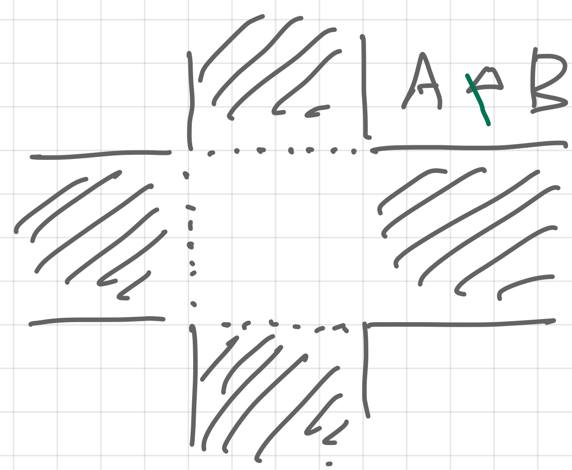
$= \{(x,y) : x \in [0,1],\ y \in [0,1]\}$

0/1-Quadrat

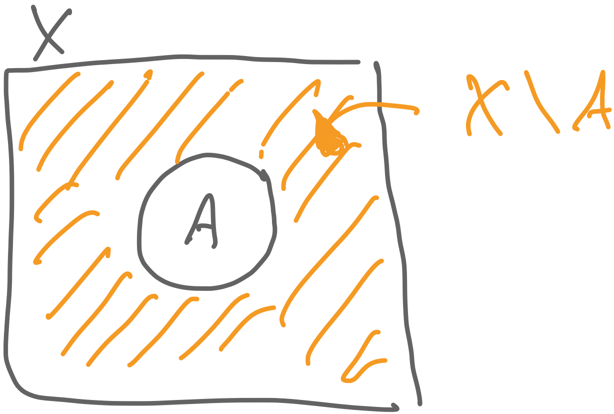








2.18. Für eine Grundmenge X wird die Menge 2^X aller Teilmengen von X zu einer sogenannten booleschen Algera der Teilmengen von X, indem man 2^X mit den Verknüpfungen $A \cap B$, $A \cap B$ und der unären Verknüpfung $\overline{A} := X \setminus A$ ausstattet.



2.19 Def. Seinen A, B Mengen. A und B heißen genau dann disjunkt, wenn $A \cap B = \emptyset$.

disjunkt

nicht disjunkt