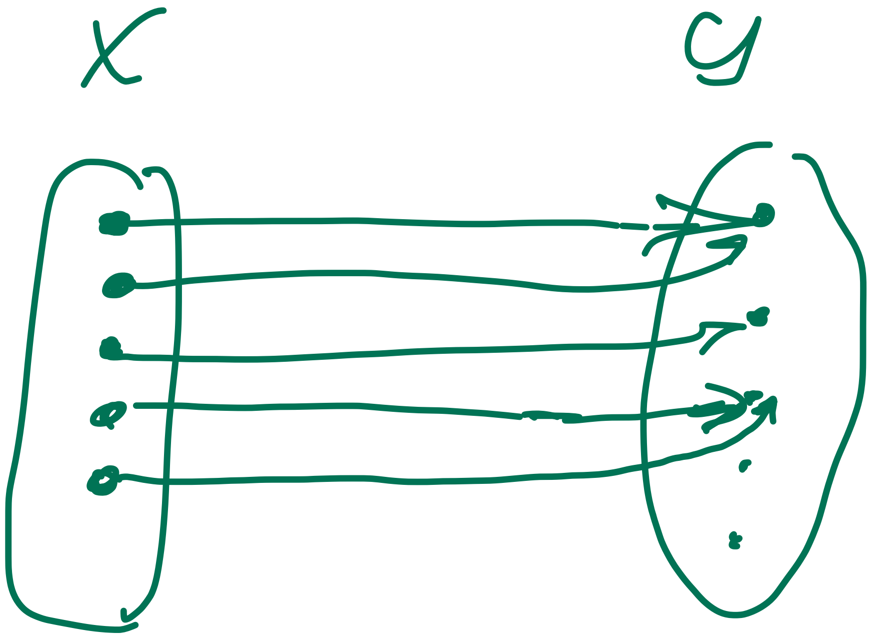
3 Abbildungen

3.1 Abbildung



3.1 Def. Seien X, Y Mengen. Eine Abbildung f von X nach Y ist eine Vorschrift, die jedem $x \in X$ genau ein Element aus Y zuordnet. Dieses Element aus Y wird durch $f(x)$ bezeichnet. Wenn f eine Abbildung von X nach Y ist, dann bezeichnet man das durch: $f : X \to Y$. Die Menge X heißt der Definitionsbereich von f, Y heißt der Wertebereich von f.

meine Mama = Mama(ich).

3.2 Bsp.

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
  $f(x) := x^2 - 2x + 7 \; \forall \, x \in \mathbb{R}$

- $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$,
  $f(x) := \frac{1}{x-1} \; \forall \, x \in \mathbb{R}$

- $\operatorname{sign} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cancel{= \{-1, 0, 1\}}$

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

- $f : 2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}, f(A) := \min(A) \; \forall \, A \subseteq \mathbb{N}$, z.B. $f(\{1, 7, 43\}) = 1$

- $f : \mathbb{N} \to 2^{\mathbb{N}}, f(k) := \{1, \ldots, k\} \; \forall \, k \in \mathbb{N}$

3.3. Zwei Abbildungen $f, g : X \to Y$ heißen gleich, falls $f(x) = g(x)$ für alle $x \in X$ gilt.

3.4. Für Mengen X und Y, bezeichnet man als Y^X die Menge aller Abbildungen von X nach Y.

0	1	2
0	0	0
0	0	1
0	0	2
0	1	0
0	1	1
0	1	2
0	2	0
0	2	1
1	0	0
1	0	1
1	0	2
1	1	0
1	1	1
1	1	2
1	2	0
1	2	1
1	2	2
2	0	0
2	0	1
2	0	2
2	1	0
2	1	1

$f: \{0,1,2\} \longrightarrow \{0,1,2\}$

$\{0,1,2\}^{\{0,1,2\}}$

2	1	2
2	2	0
2	2	1
2	2	2

$f: \{0,1,2\} \to \{0,1,2\}$

$f(0) = 1$

$f(1) = 0$

$f(2) = 2$

3.5 Aufgabe. Aus wie vielen Abbildungen besteht die Menge $\{1,2,3\}^{\{1,2\}}$? Zählen Sie diese Abbildungen auf? Was ist mit $\{1,2\}^{\{-1,0,1\}}$?

	1	2
f_1	1	1
f_2	1	2
f_3	1	3
f_4	2	1
f_5	2	2
f_6	2	3
f_7	3	1
f_8	3	2
f_9	3	3

$f_8 : \{1,2\} \to \{1,2,3\}$

$f_8(1) = 3$

$f_8(2) = 2$

3.2 Bild und Urbild

3.6 Def. Seien X, Y, A, B Mengen mit $A \subseteq X$ und $B \subseteq Y$. Sei $f : X \to Y$. Dann heißt $f(A) := \{f(x) : x \in A\}$ das Bild von A bzgl. f und $f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\}$ das Urbild von B bzgl. f.

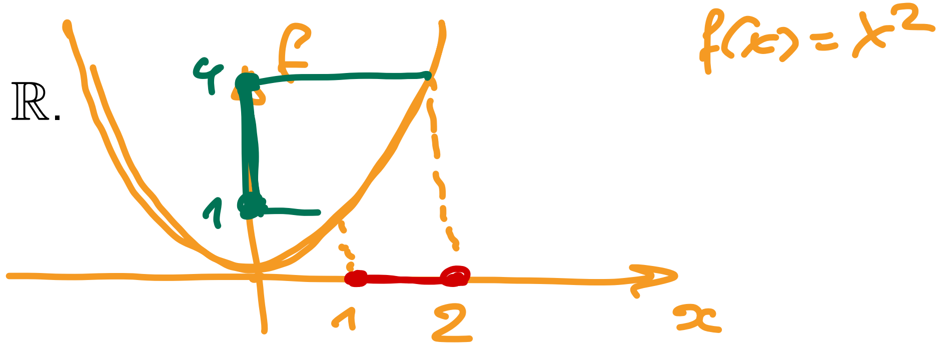
$$f : \{1, \dots, 25\} \to \{1,2,3,4,5\}$$

$f(x) =$ die Note für den [illegible] des Schülers bzw. der Schülerin Nummer x aus dem Klassenbuch.

$$f(\{1,3,7\}) = \{2,4\}$$

$$f^{-1}(\{1,2\}) = \{1, 10, 13, 25\}$$

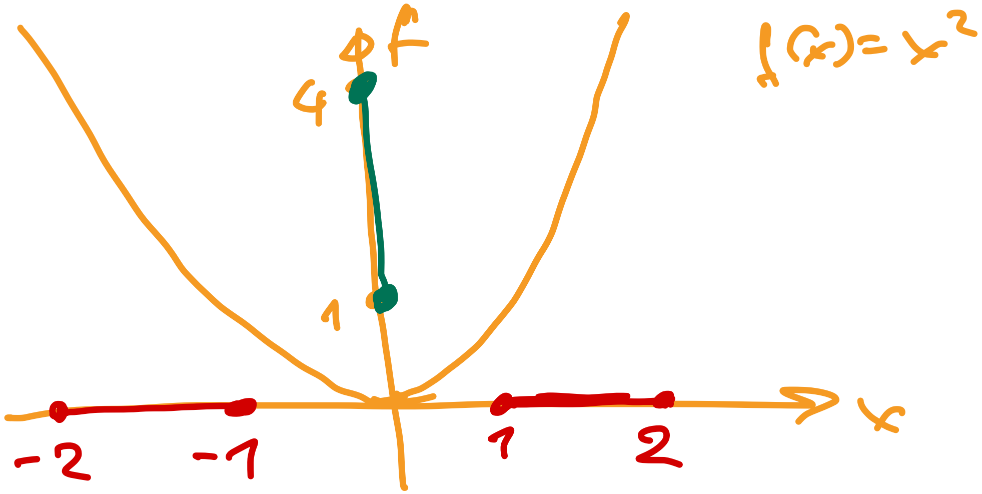
3.7 Bsp. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := x^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$.



- $f([1,2]) = [1,4] \nearrow$ Abb. 1

- $f^{-1}([1,4]) = [1,2] \cup [-2,-1] \nearrow$ Abb. 2

- $$f^{-1}([-7,8]) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in [-7,8]\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} : -7 \leq f(x) \leq 8\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} : -7 \leq x^2 \leq 8\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 8\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq \sqrt{8}\}$$
$$= [-\sqrt{8}, \sqrt{8}]$$



$1 \leq x^2 \leq 4 \iff 1 \leq x \leq 2$ oder $-2 \leq x \leq -1$

3.8 (Intervalle)**.** Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$. Dann können Intervalle wie folgt definiert werden:

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$
$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$
$$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$
$$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$$

3.3 Injektivität, Surjektivität und Bijektivität

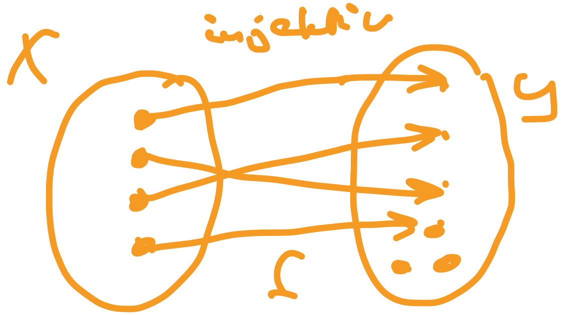
3.9 Def. Seien X, Y Mengen und sei $f : X \to Y$. Dann heißt f:

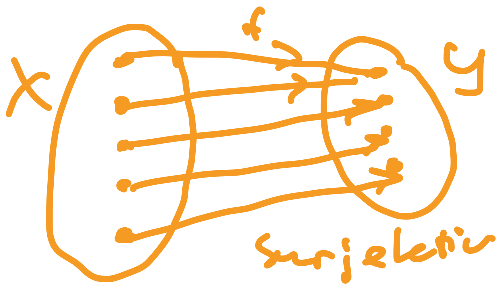
- injektiv, falls für alle $x_1, x_2 \in X : x_1 \neq x_2$ die Bedingung $f(x_1) \neq f(x_2)$ gilt.
- surjektiv, falls für jedes $y \in Y$ ein $x \in X$ mit der Eigenschaft $f(x) = y$ existiert.
- bijektiv, falls f injektiv und surjektiv ist.

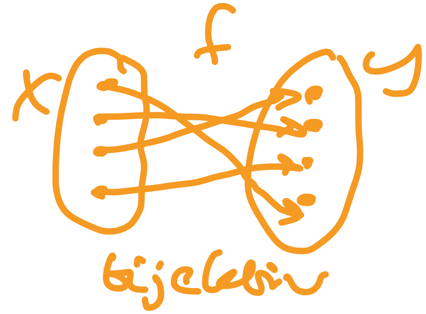
$f:$ Teilnehmende Leute $\longrightarrow$ Sitzplätze bei Audimax 1

$y = f(x) \iff$ x sitzt auf dem Platz y.

Injektiv aber nicht surjektiv.







3.10 Bsp. Untersuche folgende Funktionen auf Bijektivität:

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) := x^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$
  surjektiv ? nein, $-1 \neq f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$
  injektiv ? nein, $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$

- $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty), f(x) := x^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$
  surjektiv ? ja
  injektiv ? nein (analog)

- $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$ für alle $x \in \mathbb{R}$
  surjektiv ? nein, 0 wird nicht angenommen
  injektiv ? ja

- $f : \mathbb{R} \to R, f(x) = 2x + 3$ für alle $x \in \mathbb{R}$

bijektiv ? ja

3.4 Umkehrfunktion

3.11 Def. Seien X, Y Mengen und sei $f : X \to Y$ bijektiv. Die Abbildung, die jedem $y \in Y$ das eindeutige $x \in X$ mit $f(x) = y$ zuordnet, heißt die Umkehrabbildung von f und wird durch f^{-1} bezeichnet.

$f: \{1,2,3\} \to \{3,4,5\}$ $\qquad$ $f^{-1}: \{3,4,5\} \to \{1,2,3\}$

$f(1) = 4$ $\qquad$ $f^{-1}(3) = 3$

$f(2) = 5$ $\qquad$ $f^{-1}(4) = 1$

$f(3) = 3$ $\qquad$ $f^{-1}(5) = 2$

$1 \xmapsto{f} 4 \xmapsto{f^{-1}} 1$

$2 \xmapsto{f} 5 \xmapsto{f^{-1}} 2$

$3 \xmapsto{f} 3 \xmapsto{f^{-1}} 3$

3.12 Aufgabe. Was ist die Umkehrfunktion von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) := 2x + 3$?

3.5 Komposition

$y = 2x + 3$

$\Updownarrow$

$\frac{y-3}{2}$

$$\boxed{\begin{aligned} f^{-1} &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f^{-1}(y) &= \frac{y-3}{2} \end{aligned}}$$

3.13 Def. Seien X, Y, Z Mengen, $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$. Dann heißt $g \circ f : X \to Z$ mit $(g \circ f)(x) := g(f(x))$ für alle $x \in X$ die Komposition von g und f.

$(x)f$ $f(x)$

3.14 Bsp. Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = 2x + 3$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : g(x) = x^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann ist $(f \circ g)(x) = 2x^2 + 3$ und $(g \circ f)(x) = (2x + 3)^2$.

3.6 Identische Abbildung

3.15 Def. Sei X eine Menge. Dann heißt die Abbildung $\mathrm{id}_X : X \to X$ mit $\mathrm{id}_X(x) := x$ für alle $x \in X$ die identische Abbildung auf X. Man schreibt auch häufig id, wenn X nicht angegeben werden muss.

3.16. Seien X, Y Mengen und sei $f : X \to Y$ bijektiv. Dann gilt

- $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y$,
- $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X$.

3.7 Vereinigung und Durchschnitt einer indexierten Mengenfamilie

3.17 Def. Seien I, X Mengen und sei $A : I \to 2^X$. Man schreibt auch in diesem Fall A_i statt $A(i)$ für $i \in I$, $(A_i)_{i \in I}$ ist eine Familie (Schar) von Teilmengen von X.

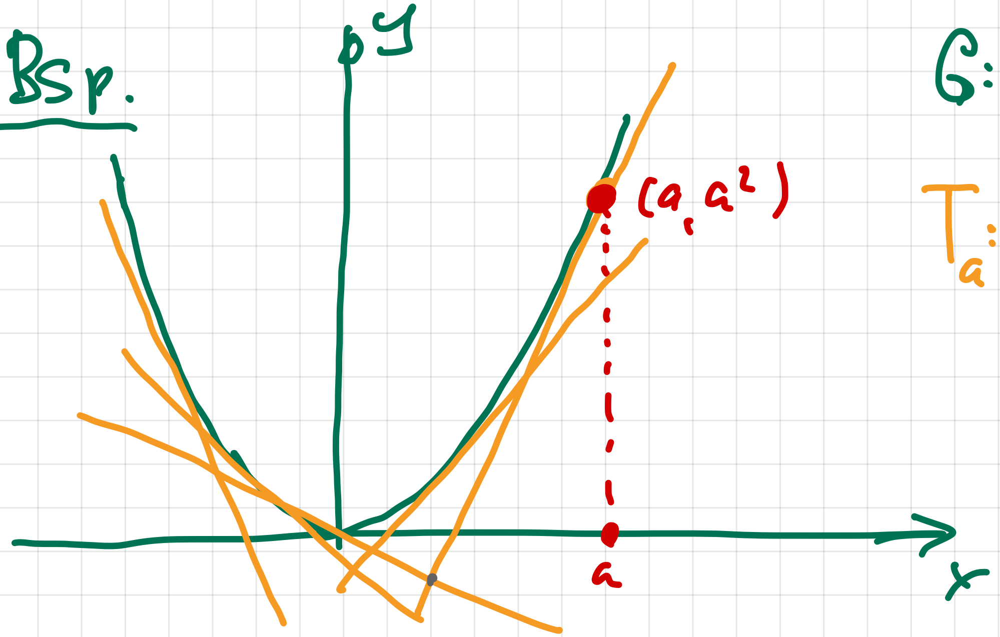
Für die Familie $(A_i)_{i \in I}$ definiert man

den Durchschnitt $$\bigcap_{i \in I} A_i := \{x \in X : x \in A_i \text{ für alle } i \in I\},$$

die Vereinigung $$\bigcup_{i \in I} A_i := \{x \in X : x \in A_i \text{ für ein } i \in I\}.$$

$A_i \subseteq X \quad (i \in I)$

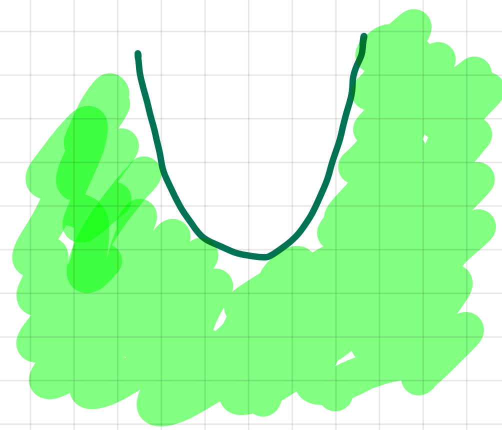
Bsp.



$G := \{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\}$

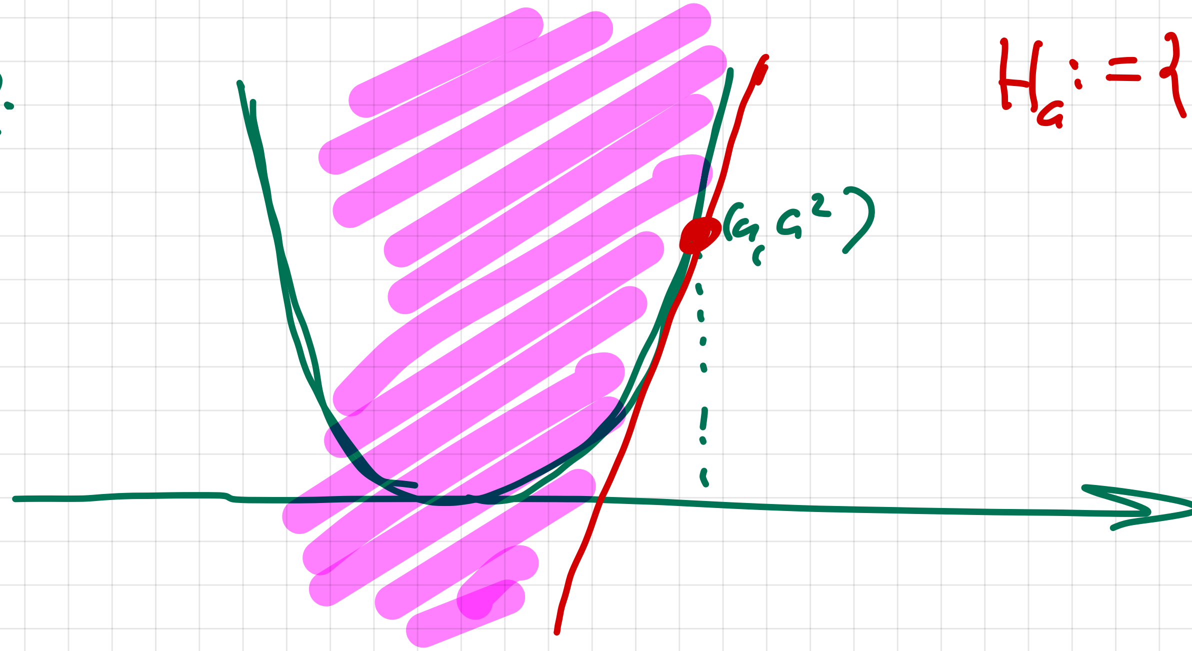
$T_a := \{(x, a^2 + 2a\cdot(x-a)) : x \in \mathbb{R}\}$

$$\bigcup_{a\in\mathbb{R}} T_a = \{(x,y) : x,y \in \mathbb{R},\ y \le x^2\}$$

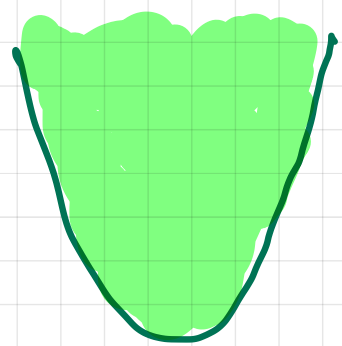


Bsp.

$$H_a := \{(x,y) : x,y \in \mathbb{R},\ y \geq a^2 + 2a(x-a)\}$$



$$\bigcap_{a \in \mathbb{R}} H_a = \{(x,y) : x,y \in \mathbb{R},\ y \geq x^2\}$$



3.18 Bsp. Sei $\alpha \in (0, \pi)$ und $v_0 > 0$ ($\nearrow$ Abb. 3). K_α ist die Flugbahn beim Auswurf eines Objekts mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 unter dem Winkel α zu Erde.

$$K_\alpha := \{(x, y) \in R^2 : x = \cos(\alpha)t, y = \sin(\alpha)t - \frac{gt^2}{2}, y \geq 0, t \geq 0\}$$

$$(K_\alpha)_{\alpha \in (0,\pi)}$$

$$\bigcap_{\alpha \in (0,\pi)} K_\alpha = \{(0, 0)\}$$

$$\bigcup_{\alpha \in (0,\pi)} K_\alpha = \text{alle Werte unter der Parabel } (\nearrow \text{ Abb. } 4)$$

3.8 Summen und Produkte

3.19 Def. Eine Menge X heißt endlich, falls $X = \emptyset$ oder falls eine bijektive Abbildung von $\{1, \ldots, n\}$ nach X existiert mit $n \in \mathbb{N}$. Der Wert n heißt die Anzahl der Elemente (Kardinalität) von X und wird durch $|X|$ bezeichnet. Man setzt die Kardinalität von $\emptyset$ gleich 0. Bei einer unendlichen Mengen X setzt man $|X| = \infty$.

$$|\{1, 2, \{3,7\}, 8\}| = 4$$

$$\{1, 2, 3, 4\}$$

$$\begin{aligned} 1 &\longmapsto 1 \\ 2 &\longmapsto 2 \\ 3 &\longmapsto \{3,7\} \\ 4 &\longmapsto 8 \end{aligned}$$

Bijektion von $\{1,2,3,4\}$ in unsere Menge $\{1, 2, \{3,7\}, 8\}$

$$|\mathbb{N}| = \infty$$

3.20. $|X|$ ist wohl definiert, d.h. eine Menge kann nicht zwei unterschiedliche Kardinalitäten haben.

3.21 Def. Sei X eine nichtleere endliche Menge. Dann kann X als $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ dargestellt werden mit $x_i \neq x_j \Leftrightarrow i \neq j$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

Für eine Abbildung $f : X \to \mathbb{R}$ definiert man

$$\sum_{x \in X} f(x) := f(x_1) + \ldots + f(x_n),$$
$$\prod_{x \in X} f(x) := f(x_1) \cdot \ldots \cdot f(x_n).$$

Im Fall $X = \emptyset$ definiert man für $f : X \to \mathbb{R}$ und $\sum\limits_{x \in X} f(x) = 0$ und $\prod\limits_{x \in X} f(x) = 1$.

Bsp

$$\sum_{i=1}^{n} i = \sum_{i \in \{1,\dots,n\}} i = 1 + 2 + \dots + n$$

$$2\sum_{i=1}^{n} i = (1 + \dots + n) + (n + \dots + 1)$$
$$= (1 + n) + \dots + (n + 1)$$
$$= n \cdot (n+1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2} n \cdot (n+1)$$

Bsp

$$\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^0 + 2^1 + \dots + 2^n$$

$$\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^0 + 2^1 + \dots + 2^n$$

$$2 \sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{n+1}$$

$$\Downarrow$$

$$2 \sum_{i=0}^{n} 2^i - \sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$$

$$2^0 + 2^1 + \dots + 2^8 = S$$

$$2^1 + 2^2 + \dots + 2^9 = 2S$$

$$S = 2S - S = 2^9 - 2^0 = 2^9 - 1$$

Bsp.

$$\sum_{i=1}^{4} i^2 =$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$$

$$= 1 + 4 + 9 + 16$$

$$= 10 + 20 = 30$$

3.22. Die Summe und das Produkt über eine Menge X sind wohldefiniert (d.h., die beiden Werte sind von der Nummerierung $x_1, \ldots, x_n$ der Elemente von X unabhängig).

3.9 Tupel

3.23 Def. Für Objekte a, b kann man das *geordnete Paar* (a, b) definieren. Für Objekte a, b, c, d definiert man die Gleichheit $(a, b) = (c, d)$ durch $a = c$ und $b = d$. a heißt das erste Element des Paares (a, b) und b heißt das zweite Element.

3.24 Def. Für Mengen X, Y definiert man das *Kreuzprodukt* $A \times B$ durch $A \times B := \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$. Analog definiert man geordnete Tupel und das Kreuzprodukt $A \times B \times C$ von Mengen X, Y und Z. Noch allgemeiner kann man für jedes $n \in \mathbb{N}$ geordnete n-Tupel $(x_1, \ldots, x_n)$ einführen und das Kreuzprodukt $X_1 \times \ldots \times X_n := \{(x_1, \ldots, x_n) : x_1 \in X_1, \ldots, x_n \in X_n\}$ von Mengen $X1, \ldots, X_n$.

$X \times Y = \{ (x, y) : x \in X, y \in Y \}$

$X = \{ a, b, c \}$

$Y = \{ 1, 2, 3, 4 \}$

$X \times Y = \{ (a, 1), (b, 1) \ldots \ldots$

3.25. Für eine Menge X führt man die Bezeichnung

$$X^n := \underbrace{X \times \ldots \times X}_{n \text{ mal}} = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_1, \ldots, x_n \in X\}.$$

Das Element x_i mit $i \in \{1, \ldots, n\}$ im n-Tupel $(x_1, \ldots, x_n)$ heißt die i-te *Komponente* des Tupels.

7.12. Es gilt sogar eine stärkere Aussage: jeder Körper besitzt eine Körpererweiterung, die algebraisch abgeschlossen ist, und die kleinste solche Erweiterung ist eindeutig

7.3 Der Körper der komplexen Zahlen

i ein formales Element, welches zu $\mathbb{R}$ hinzukommt und $i^2+1=0$ erfüllt.

Das ist die sogenannte imaginäre Einheit.

$\mathbb{C} = \{ x + yi : x, y \in \mathbb{R}\}$

$z = x + yi$

$\operatorname{Re} z = x$

$\operatorname{Im} z = y$

$\bar{z} = x - yi$

$z\bar{z} = x^2 + y^2$

$\sqrt{z\bar{z}} =: |z|$ Betrag von z.

1.4 Lemma. Seien A und B endliche Menge. Dann gilt:

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

paarweise verschieden

$$\{\underbrace{a_1, \dots, a_k}\} \times B = \dot{\bigcup_{i=1}^{k}} \{a_i\} \times B$$

$$\Rightarrow |A \times B| = \Big| \dot{\bigcup_{i=1}^{k}} \{a_i\} \times B \Big|$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \underbrace{|\{a_i\} \times B|}_{\substack{\| \\ \{(a_i, b_1), \dots, (a_i, b_m)\}}} = \sum_{i=1}^{k} m = km$$

$B = \{b_1, \dots, b_m\}$

$b_1, \dots, b_m$ paarweise verschieden

Korollar: $|X_1 \times \ldots \times X_k| = |X_1| \cdot \ldots \cdot |X_k|$.

2 X^k und B^A

$$X^k = \underbrace{X \times \ldots \times X}_{k \text{ mal}} = \underbrace{|X| \cdot \ldots \cdot |X|}_{k \text{ mal}} = |X|^k.$$

$A = \{\underbrace{a_1, \ldots,}_{\text{paarweise verschieden}} a_k\}$.

$F : B^A \longrightarrow B^k$ mit

$$F(\varphi) = (\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_k)).$$

Die Abbildung ist eine Bijektion.

Sind $\varphi, \psi \in B^A$ verschieden, so ....

Für jedes $(b_1, \ldots, b_k)$ ...

2.1 Thm. *Sei X eine endliche Menge mit n Elementen und sei $k \in \mathbb{N}$. Dann hat die Menge X^k genau n^k Elemente (d.h., $|X^k| = |X|^k$).*

Beweis. Die Formel ist trivial für $n = 0$ (d.h., $X = \emptyset$). Wir nehmen also $n \in \mathbb{N}$ an. Wir beweisen nun die Behauptung durch Induktion über k.

Die Formel ist trivial für $k = 1$: es gilt $|X^1| = |X|$. Sei $k \geq 2$ und sei die Formel $|X^{k-1}| = n^{k-1}$ bereits verifiziert.

Sei $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ mit paarweise verschiedenen X. Das letzte Element eines k-Tupels aus X^k ist eines der n Elemente $x_1, \ldots, x_n$. Daher ist die Menge X^k disjukte Vereinigung der n Mengen $X^{k-1} \times \{x_i\}$ mit $i = 1, \ldots, n$. Für jede der n Mengen $X^{k-1} \times \{x_i\}$ ist die Abbildung von $X^{k-1} \times \{x_i\}$ nach X^{k-1}, welche die letzte (fixierte) Komponente x_i weglässt, eine Bijektion. Somit hat $X^{k-1} \times \{x_i\}$ genauso viele Elemente wie X^{k-1}. Wir haben also X^k als die Disjunkte Vereinigung von n Mengen dargestellt, die jeweils n^{k-1} Elemente haben. Es folgt, dass X^k genau $n \times n^{k-1} = n^k$ Elemente hat. $\square$

3 $\binom{X}{k}$

4 Zählen der bijektiven und injektiven Abbildungen

Sei A eine k-elementige Menge und B eine n-elementige Menge. Dann ist die Anzahl der injektiven Abbildungen von A nach B gleich $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$.

Beweis: Induktion über k.

Korollar: Die Anzahl der bijektiven Abbildungen von X nach X ist $|X|!$

Thm. $\left|\binom{X}{k}\right| = \binom{|X|}{k}$.

Beweis: Injektive Abbildungen von $\{1,\dots,k\}$ nach X betrachten.

$$\{f \in X^{\{1,\dots,k\}} : f \text{ injektiv}\} = \dot{\bigcup_{Y \in \binom{X}{k}}} \{f \in Y^{\{1,\dots,k\}} : f \text{ bijektiv}\}$$

$$n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1) = \left|\binom{X}{k}\right| \cdot k!$$

$$\Rightarrow \left|\binom{X}{k}\right| = \frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$