$$G = \{ \text{Reis}, \text{Nudeln}, \text{Kartoffeln} \}$$

$$T = \{ \text{Cola}, \text{Fanta}, \text{Sprite} \}$$

$$G \times T = \{ (\text{Reis}, \text{Cola}), (\text{Reis}, \text{Fanta}), (\text{Reis}, \text{Sprite}), (\text{Nudeln}, \text{Cola}), (\text{Nudeln}, \text{Fanta}), (\text{Nudeln}, \text{Sprite}), (\text{Kart.}, \text{Cola}), (\text{Kart.}, \text{Fanta}), (\text{Kart.}, \text{Sprite}) \}$$

6.2 Def (Tupel und Kreuzprodukt)**.** Komplett analog zu (geordneten) Paaren definiert man auch (geordnete) Tripel (a, b, c), (geordnete) Quadrupel (a, b, c, d) und noch allgemeiner (geordnete) n-Tupel $(x_1, \ldots, x_n)$ mit $n \in \mathbb{N}_0$. Dem entsprechend betrachtet man auch das Kreuzprodukt $A \times B \times C$ von drei Mengen, das Kreuzprodukt $A \times B \times C \times D$ von vier Mengen und allgemein auch das Kreuzprodukt

$$X_1 \times \ldots \times X_n := \{(x_1, \ldots, x_n) : x_1 \in X_1, \ldots, x_n \in X_n\}$$

von Mengen $X_1, \ldots, X_n$.

Das Element x_i mit $i \in \{1, \ldots, n\}$ im n-Tupel $(x_1, \ldots, x_n)$ heißt die i-te *Komponente* des Tupels.

0-Tupel $()$
1-Tupel $(a) = a$

Für eine Menge X führt man die Bezeichnung

$$X^n := \underbrace{X \times \ldots \times X}_{n \text{ mal}} = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_1, \ldots, x_n \in X\}$$

ein.

$$[0,1]^3 = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$$

$$= \{ (x,y,z) : x,y,z \in [0,1] \}$$

$$= \{ (x,y,z) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1 \}$$

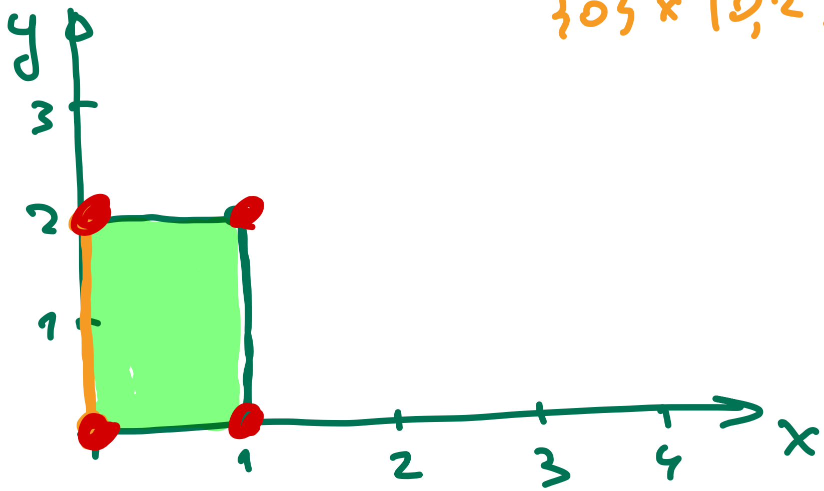
6.3 Aufgabe. Was stellen die folgenden Kreuzprodukte geometrisch dar? Zeichnen Sie diese Mengen:

- $[0,1] \times [0,2]$, $\{0\} \times [0,2]$ und $\{0,1\} \times \{0,2\}$
- $[0,1]^3$, $[0,1]^2 \times \{0\}$, $[0,1]^2 \times \{1\}$ und $\{0\}^2 \times [0,1]$.

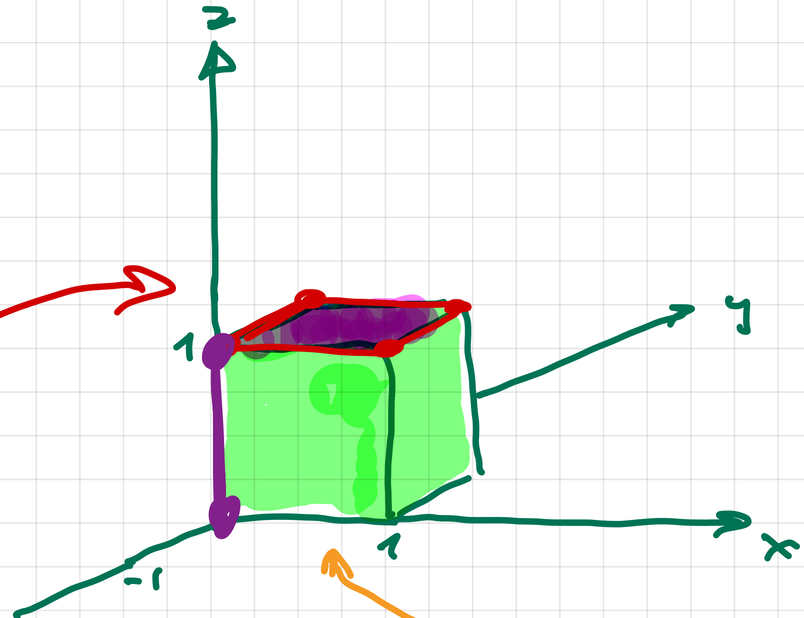
$[0,1] \times [0,2] = \{ (x,y) : x \in [0,1], y \in [0,2] \}$

$= \{ (x,y) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2 \}$

$\{0\} \times [0,2] = \{ (x,y) : x = 0, 0 \le y \le 2 \}$



$[0,1]^3$



$$[0,1]^2 \times \{0\} =$$
$$= [0,1] \times [0,1] \times \{0\}$$
$$= \{(x,y,z) : \; 0 \le x \le 1, \; 0 \le y \le 1, \; z = 0\}$$

Die Seitenfläche unten.

$$[0,1]^2 \times \{1\} = \{(x,y,z) : \; 0 \le x \le 1, \; 0 \le y \le 1, \; z = 1\}$$

$$\{0\}^2 \times [0,1] = \{(x,y,z) : \; x = y = 0, \; 0 \le z \le 1\}$$

7 Prädikate und Quantoren

7.1 Def. Sei X Menge. Dann heißt $P : X \to \{\text{falsch}, \text{wahr}\}$ *Prädikat* auf X.

7.2. Informell beschrieben ist ein Prädikat:

- eine Aussage mit einer Variablen x , die man mit Werten aus dem vorgegeben Bereich X belegen kann. Dabei hängt im Allgemeinen der Wahrheitswert der Aussage von der Wahl von x ab.

- eine Eigenschaft, die für ein variables $x \in X$ erfüllt oder nicht erfüllt ist.

7.3 Bsp. $P : \mathbb{N} \to \{\text{falsch}, \text{wahr}\}$ mit $P(k) :=$ „$k(k+1)$ ist durch 3 teilbar".

$P(12) =$ " $12 \cdot 13$ ist durch 3 teilbar" $\leftarrow$ ist Wahr

$P(12) =$ Wahr

$P(13) =$ " $13 \cdot 14$ ist durch 3 teilbar" $\leftarrow$ ist falsch

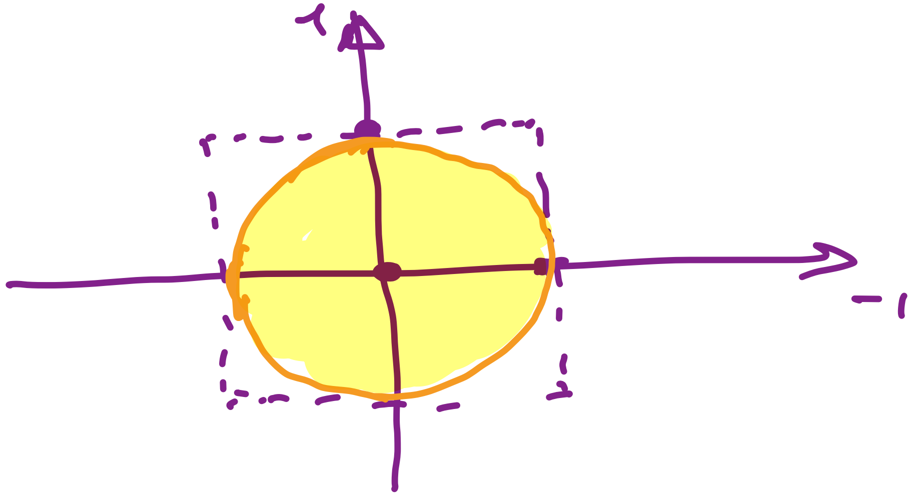
$P(13) =$ Falsch

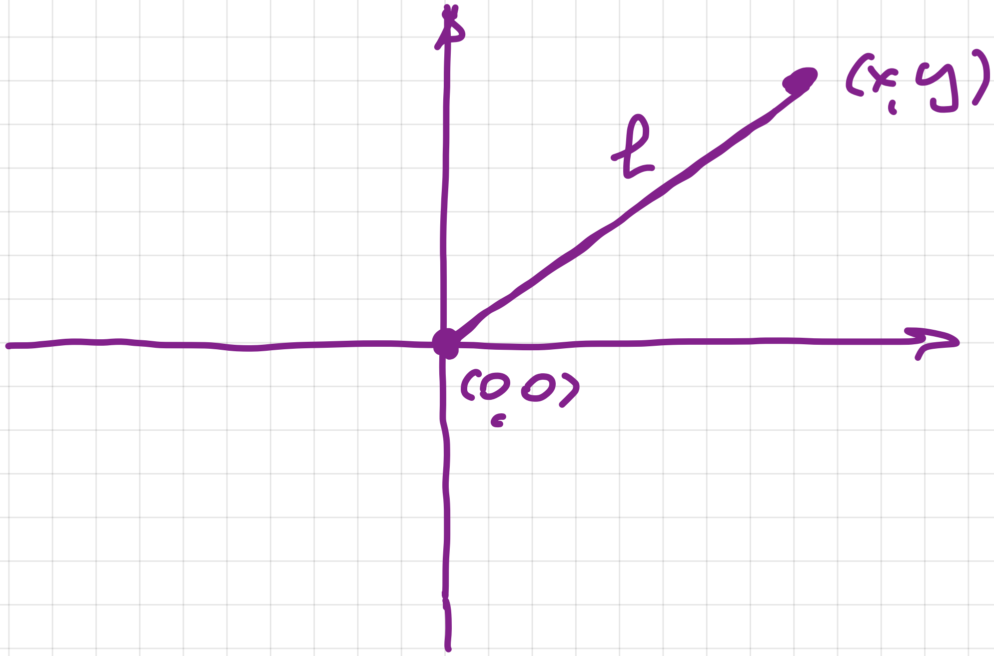
7.4 Bsp. $P : \mathbb{R}^2 \to \{\text{falsch}, \text{wahr}\}$ mit $P(x, y) :=$ „$x^2 + y^2 \leq 1$“.

$P(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}) =$ "$(\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{3})^2 \leq 1$" $\leftarrow$ ist wahr

$P(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}) =$ "$(\frac{2}{3})^2 + (\frac{4}{3})^2 \leq 1$" $\leftarrow$ ist falsch

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : P(x,y)\} \subseteq [-1,1]^2$$





$$\ell^2 = x^2 + y^2$$

$$\ell = \sqrt{x^2 + y^2}$$

7.5. Für eine gegebene Menge X hat man eine natürliche Bijektion zwischen der Menge $\{\text{falsch}, \text{wahr}\}^X$ aller Prädikate auf X und der Menge 2^X aller Teilmengen von X. Jedes Prädikat $P : X \to \{\text{falsch}, \text{wahr}\}$ erzeugt die Menge $\{x \in X \;:\; P(x)\}$ und jede Menge $A \subseteq X$ erzeugt das Prädikat $P(x) :=$ „$x \in \cancel{X} A$“.

7.6 Def. $\forall\, x \in X : P(x)$ für ein Prädikat P auf eine Menge X steht für die Aussage „die Bedingung $P(x)$ gilt für alle $x \in X$." $\forall$ heißt das *Allgemeinheitsquantor* (Bedeutung: für $\forall$lle).

$\exists\, x \in X : P(x)$ bezeichnet die Aussage „die Bedingung $P(x)$ gilt für ein $x \in X$." $\exists$ heißt *Existenzquantor* (Bedeutung: es $\exists$xistiert).

M Menge aller Menschen

$\forall x \in M \ \exists y \in M :$ y ist Mutter von x.

$$\overline{\forall x \in X : P(x)} \Longleftrightarrow \exists x \in X : \overline{P(x)}$$

$$\overline{\exists x \in X : P(x)} \Longleftrightarrow \forall x \in X : \overline{P(x)}$$

7.7. Negierung von Aussagen:

1. $\overline{\forall\, x \in X : P(x)} \Leftrightarrow \exists\, x \in X : \overline{P(x)}$

2. $\overline{\exists\, x \in X : P(x)} \Leftrightarrow \forall\, x \in X : \overline{P(x)}$

7.8. $\forall$ und $\exists$ lassen sich kombinieren. Seien X, Y Mengen. Wenn man ein Prädikat P auf $X \times Y$ hat, so kann man dafür die Aussagen wie

$$\forall x \in X \, \exists \, y \in Y : P(x, y),$$

$\exists y \in Y \forall x \in X : P(x,y)$

und

$$\exists x \in X \forall y \in Y : P(x, y)$$

$\forall y \in Y \exists x \in X : P(x,y)$

usw. einführen.

7.9. In vorigen Bemerkung ist die Reihenfolge des Quantifizierens relevant. Sei X eine Menge von Personen und A eine Menge von Adressen im Stadtteil Sandow. Die Aussage

$$\forall x \in X\, \exists a \in A\ :\ x \text{ wohnt unter der Adresse } a.$$

lautet, dass alle Personen aus X irgendwo in Sandow wohnen. Die Aussage

$$\exists a \in A\, \forall x \in X\ :\ x \text{ wohnt unter der Adresse } a.$$

lautet dagegen, dass alle Personen aus X unter einer und der selben Adresse in Sandow wohnen (z.B. als Wohngemeinschaft). Man sieht, die letztere Aussage ist eine stärkere Bedingung.

7.10 Bsp. Hier ein Beispiel einer Definition aus der Analysis, die man kompakt mit Quantoren und Prädikaten einführen kann.

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge reeller Zahlen (mit anderen Worten: $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$) und sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann heißt α Grenzwert von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, falls das Folgende gilt:

$$\forall\, \epsilon \in \mathbb{R}_{>0}\, \exists\, N \in \mathbb{R}\, \forall\, n \in \mathbb{N} : ((n \geq N) \Rightarrow (|a_n - \alpha| < \epsilon))$$

$\Longleftrightarrow$: a_n geht gegen α für $n \to \infty$

8 Relationen

8.1 Relation

8.1 Def. Seien X, Y Mengen. Dann heißt eine Teilmenge R von $X \times Y$ eine (binäre) *Relation* zwischen X und Y. Bei $X = Y$, heßt R eine (binäre) Relation auf X.

8.2. Da man Prädikate auf $X \times Y$ mit Teilmengen von $X \times Y$ identifizieren kann, lassen sich Relationen auch als Prädikate auf $X \times Y$ auffassen.

(x, y)

$x \in X$

$y \in Y$

$(x, y) \in R$

x und y befinden sich in einer Relation R.

8.3. Wenn für $x \in X$ und $y \in Y$ die Bedingung $(x, y) \in R$ gilt, so schreibt man $x\,R\,y$.

8.4 Bsp.

- X - Menge von Fahrzeugen

  Y - Menge von Features von Fahrzeugen

	Ersatzrad	Radio	Navi	Automatik
f_1	1	1	1	1
f_2	1	1	1	0
f_3	0	0	1	1
f_4	0	1	1	0

$X = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$

$Y = \{$Ersatzrad, Radio, Navi, Automatik$\}$

$R = \{$(f_1, Ersatzrad), (f_1, Radio), (f_1, Navi), ... (f_4, Navi)$\}$

- $\leq, <, \geq, >$ auf $\mathbb{R}$ $\neq$, $=$

- $\subseteq$ als Relation auf 2^X für eine Menge X

- Für $a, b \in \mathbb{N}$ schreibt man $a|b$, wenn b durch a ohne Rest teilbar ist.

8.2 Äquivalenzrelation

8.5 Def. Sei X Menge und $\sim$ eine Relation auf X. Dann heißt $\sim$ eine Äquivalenzrelation, falls:

1. $\sim$ ist *reflexiv*, d.h. $x \sim x$ für alle $x \in X$.
2. $\sim$ ist *symmetrisch*, d.h. $x \sim y$ ist äquivalent zu $y \sim x$ für alle $x \in X$.
3. $\sim$ ist *transitiv*, d.h. aus $x \sim y$ und $y \sim z$ folgt $x \sim z$ für alle $x, y, z \in X$.

Für eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf einer Menge X und ein $x \in X$ heißt

$$[x]_\sim := \{y \in X : x \sim y\}$$

die Äquivalenzklasse von x bzgl. $\sim$. Die Menge aller Äquivalenzklassen von $\sim$ ist

$$X/\sim := \{[x]_\sim : x \in X\}.$$

X Menge von Personen

$\sim$ den selben Hauptwohnsitz haben

$x \sim y \;:\Longleftrightarrow\;$ x und y haben den selben Hauptwohnsitz.

Ist Äquivalenzrelation

1. $x \sim x$
2. $x \sim y \implies y \sim x$
3. $x \sim y \wedge y \sim z \implies x \sim z$

$[x]_\sim$ = die Wohngemeinschaft einer Person x

$X/_\sim$ = die Menge der Wohngemeinschaften.

8.6 Bsp.

- Sei V endliche Menge und sei $\binom{V}{2} := \{\{u,v\} : u,v \in V, u \neq v\}$. Das Paar (V,E) mit $E \subseteq \binom{V}{2}$ heißt *Graph* mit Kantenmenge V und Knotenmenge E.

  $G = (V,E), G = \{1,\ldots,6\}, E = \{\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{4,1\},\{1,3\},\{5,6\}\}$

  Für $a,b \in V$ heißt b von a aus *erreichbar* (im Graphen $G = (V,E)$), falls ein $k \in \mathbb{N}_0$ und Elemente $u_0,\ldots,u_k \in V$ existieren mit $u_0 = a$, $u_k = b$ und $\{u_i, u_{i+1}\} \in E$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$ mit $i < k$.

  Die Erreichbarkeit ist eine Äquivalenzklasse auf V. Die Äquivalenzklassen (Zusammenhangskomponenten) für dieses Beispiel sind $\{1,2,3,4\}$ und $\{5,6\}$.

- Sei $m \in \mathbb{N}$. Für $a,b \in \mathbb{Z}$ sagt man, dass a kongruent zu b modulo m ist, falls $a-b \in m\mathbb{Z}$, wobei $m\mathbb{Z} := \{mz : z \in Z\}$.

Bsp. $m \in \mathbb{N}$. $\sim$:= Kongruent modulo m auf $\mathbb{Z}$

Definition:

$a \sim b \;:\Longleftrightarrow\; a - b$ durch m teilbar

z.B. $m = 5$

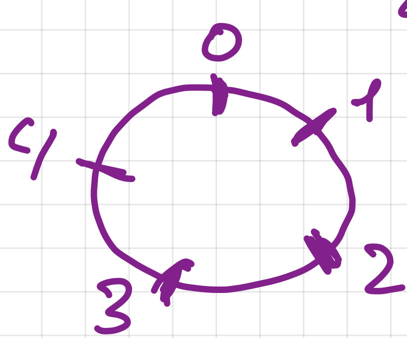
Ist $2 \sim 13$? nein

Ist $2 \sim 14$? nein

Ist $2 \sim 15$? nein

$2 \sim 16$? nein

$2 \sim 17$! ja



Schreibweise: $a \equiv b \mod m$.

Die Kongruenz modulo m ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$.

- Sei $\sim$ Relation auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, definiert durch $(a, b) \sim (c, d)$ für $a, c \in \mathbb{Z}, b, d \in \mathbb{N}$, wenn $ad = bc$ gilt.

  Diese Relation ist eine Äquivalenzrelation (Aufgabe).

  D.h. jede rationale Zahl ist eine Äquivalenzklasse von diesem $\sim$.

8.3 Partialordnungen

$\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$

8.7 Def. Eine Menge X mit einer binären Relation $\succeq$ darauf heißt Poset (partiell geordnete Menge), wenn für alle $x, y, z \in X$ folgendes gilt:

- $x \preceq x$ (Reflexivität)
- $x \preceq y,\ y \preceq z \Rightarrow x \preceq z$ (Transitivität).
- $x \preceq y,\ y \preceq x \Rightarrow x = y$ (Antisymmetrie).

Die binäre Relation $\succeq$ heißt in diesem Fall die partielle Ordnung auf X.

Bsp. X Menge von Schüler:innen

für jedes $x \in X$ führt man

drei Noten: $M(x)$ Mathe-Note von x

$D(x)$ Deutsch-Note von x

$K(x)$ Kunst-Note von x

und wir nehmen an, dass man jedes $x \in X$ an den drei Noten von den anderen unterscheiden kann

$x, y \in X$

$$x \precsim y \iff \begin{array}{l} M(x) \leq M(y) \\ D(x) \leq D(y) \\ K(x) \leq K(y) \end{array}$$

① $x \precsim x$ ✓

② $x \precsim y,\ y \precsim z \Rightarrow x \precsim z$

③ $x \precsim y,\ y \precsim x \Rightarrow x = y.$

x $\quad M(x) = 3$

$D(x) = 1$

$K(x) = 2$

y $\quad M(x) = 1$

$D(x) = 2$

$K(x) = 1$

Für diese Wahl gilt weder $x \succsim y$ noch $y \succsim x$

8.8 Def. Wenn für ein Poset $(X, \succeq)$ für alle $x, y \in X$, die Bedingung $x \succeq y$ oder die Bedingung $y \succeq x$ erfüllt ist, so nennt man $(X, \succeq)$ eine total geordnete Menge und $\succeq$ eine totale Ordnung auf X.

8.9 Bsp.

- 2^X mit Inklusion.
- $\mathbb{N}$ mit Teilbarkeit.
- Substring-Relation auf Strings.