Agenda

- ✓ $(\cos x)'$, $(\sin x)'$
- ✓ Tangente einer Kurve
- ✓ Höhere Ableitung
- ✓ Fadenpendel
- ✓ Regel von L'Hospital

Fadenpendel (Ruhelage, Auslenkung)

(kleine Abweichung, große Abweichung)

$\lim \rightleftarrows \frac{d}{dx}$

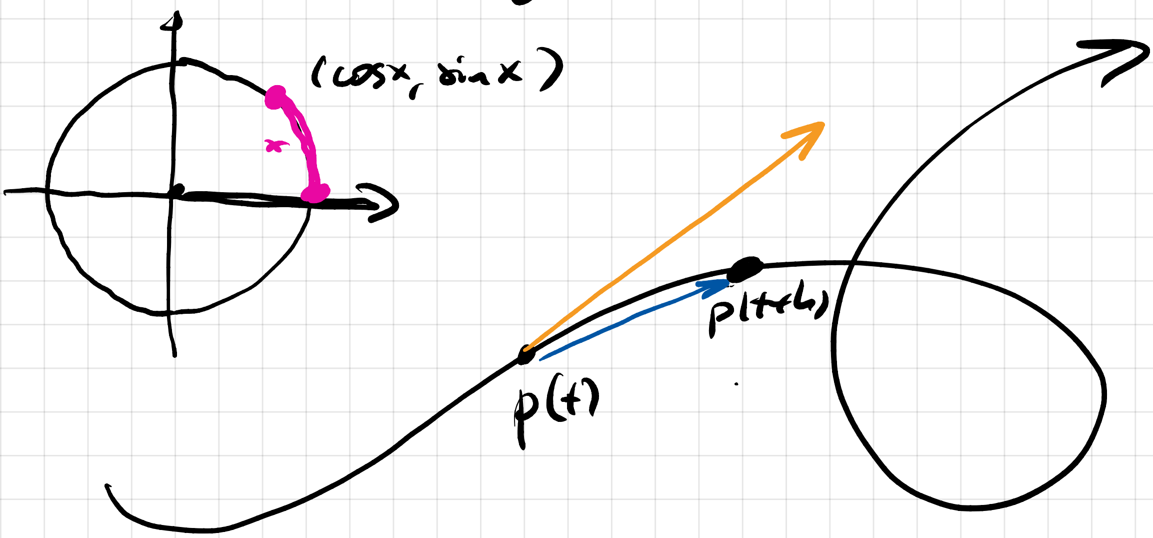
Bsp. mit zweiter Abl.

Monotonie, lokale Optima,

Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Konvexität

$$\left.\begin{aligned}(\cos x)' &= -\sin x\\ (\sin x)' &= \cos x\end{aligned}\right\}\ \text{Warum?}$$



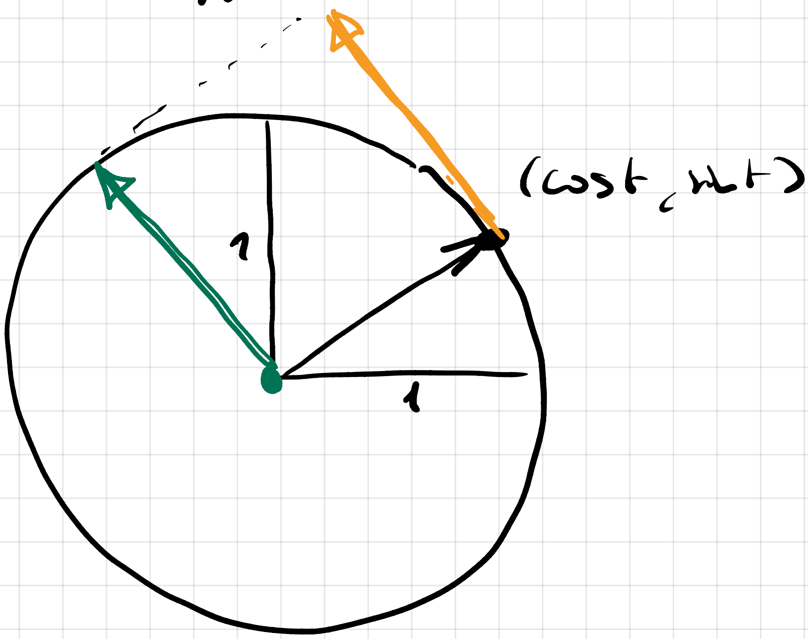
Was ist $p'(t)$? Position $p(t)$ komponentenweise nach Zeit abgeleitet.

$$p'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{p(t+h) - p(t)}{h}$$

Die Richtung von $p'(t)$ ist die momentane Richtung der Bewegung

Die Länge $\|p'(t)\|$ von $p'(t)$ ist die momentane Geschwindigkeit der Bewegung.

$$\|p'(t)\| = \lim_{h \to 0} \frac{\|p(t+h) - p(t)\|}{h}$$



$$(\cos t)' = -\sin t$$
$$(\sin t)' = \cos t.$$

$$(\cos t)^2 + (\sin t)^2 = 1$$

$$((\cos t)^2 + (\sin t)^2)' = 0$$

$$2\cos t \cdot (\cos t)' + 2 \sin t \cdot (\sin t)' = 0$$

$\Downarrow$

$(\cos t, \sin t)$ ist senkrecht zu $((\cos t)', (\sin t)')$.

Höhere Ableitungen

$f(t)$ Wert von f zum Zeitpunkt t

$f'(t)$ die Geschwindigkeit der Änderung von f nach der Zeit

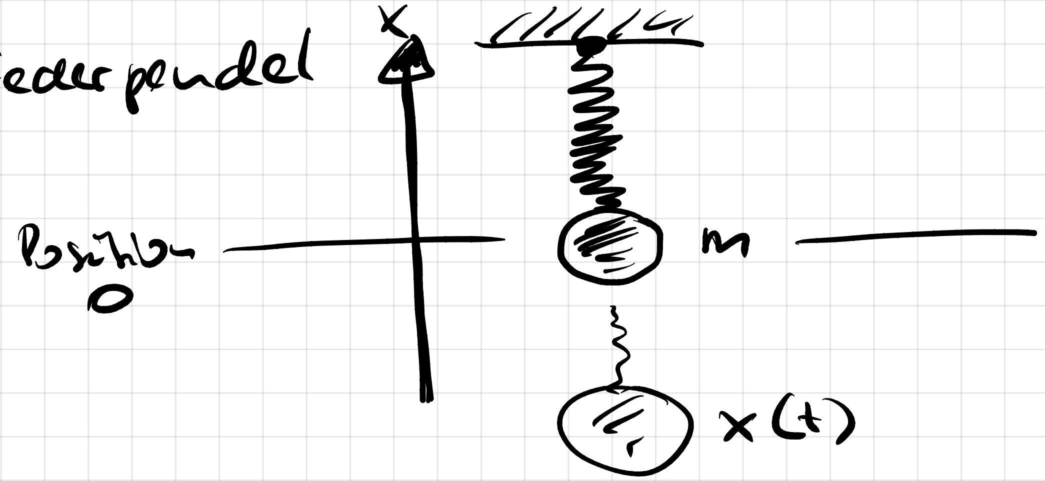
$f''(t)$ die Geschwindigkeit der Änderung der Geschwindigkeit. Also: Beschleunigung.

Allgemein: n-te Ableitung $(n \in \mathbb{N}_0)$.

$$f^{(n)}(t) = \begin{cases} f(t) & \text{, bei } n=0 \\ \left(f^{(n-1)}\right)'(t) & \text{bei } n>0 \end{cases}$$

Die höheren Ableitungen sieht man in den sogenannten Differentialgleichungen, mit denen man verschiedene Naturphänomene modeliert.

Bsp. Federpendel



$$\underbrace{x''(t) = -k^2 \cdot x(t)}_{}$$

Funktion $x(t)$ unbekannt!

$x(t) = \sin t$ | $x(t) = \cos t$
$x'(t) = \cos t$ | $x'(t) = -\sin t$
$x''(t) = -\sin t$ | $x''(t) = -\cos t$

$$\underbrace{x''(t) = -x(t) \qquad x''(t) = -x(t)}$$

$\Downarrow$

$x(t) = a\cos t + b\sin t$ erfüllt immer noch

$$x''(t) = -x(t).$$

$x(t) = \cos(kt)$
$x'(t) = -k\sin(kt)$
$x''(t) = -k^2\cos(kt)$

$\Downarrow$

$x''(t) = -k^2 x(t)$

genau so mit $x(t) = \sin(kt)$

$\Downarrow$

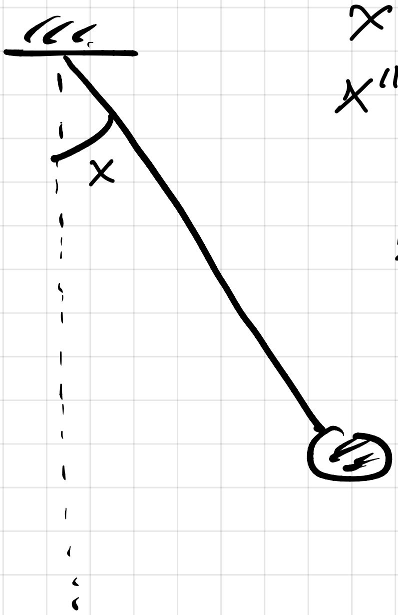
$$\boxed{x(t) = a\cos(kt) + b \cdot \sin(kt)}$$

a, b kann man ermitteln, wenn man

$x(0)$ Startposition und
$x'(0)$ Startgeschwindigkeit

festgelegt hat.

Fadenpendel.



x Winkel

$x'' = -k^2 \sin(x)$

$\Downarrow$

Für die Lösung dieser Gleichung gibt es keine explizite Formel.

$$\begin{cases} x'' = -\sin x \\ x(0) = 1 \\ x'(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v = x' \\ v' = -\sin x \\ x(0) = 1 \\ v(0) = 0 \end{cases}$$

$$x' \approx \frac{x(t+h) - x(t)}{h}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} x(t+h) &\approx x(t) + h \cdot x'(t) \\ \text{Analog: } v(t+h) &\approx v(t) + h \cdot v'(t) \\ &= v(t) + h \cdot (-\sin x(t)). \end{aligned}}$$

$x(0) = 1 \qquad x(h) = x(0) + h\,v(0)$

$v(0) = 0 \qquad v(h) = v(0) + h(-\sin(x(0)))$

$$x(2h) = x(h) + h \cdot v(h)$$
$$v(2h) = v(h) + h \cdot (-\sin(x(h)))$$

usw.

Die Regel von L'Hospital

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} \; ?$$

f, g differenzierbar mit $f(a) = g(a) = 0$.

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \frac{x - a}{g(x) - g(a)}.$$

$$= \frac{f'(a)}{g'(a)}$$, wenn $g'(a) \neq 0$ ist.

Was gilt, wenn $g'(a)$ doch 0 ist?

Dann besagt die Regel von L'Hospital, dass,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$ erfüllt ist

Diese Regel gilt auch für $a = \infty$ und $a = -\infty$.

Bsp.

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{e^{2(x-1)} - 1}$$

$\sqrt{1} - 1 = 0$

$e^{2(1-1)} - 1 = 1 - 1 = 0$

//

// L'Hospital

$$\lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2e^{2(x-1)}} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{1}}}{2 \cdot e^{2(1-1)}} = \frac{1}{4}$$

Bsp.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x \cdot \sin(3x)} \overset{\text{L'Hospital}}{=}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} 1 - \cos 0 = 0 \\ 0 \cdot \sin(3 \cdot 0) = 0 \end{array}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x \cdot 3\cos(3x) + \sin(3x)}$$

$\sin 0 = 0$

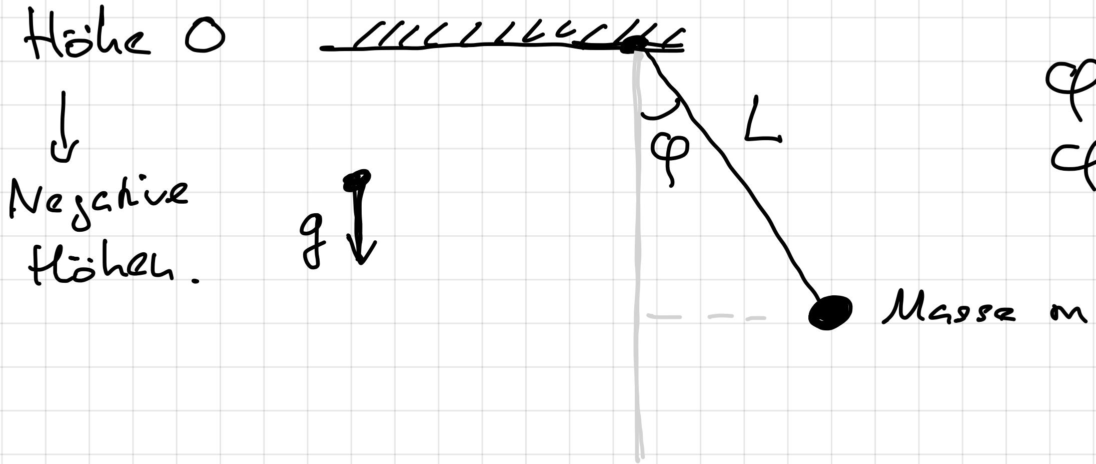
$0 \cdot 3\cos(3 \cdot 0)$
$+ \sin(3 \cdot 0)$
$= 0$

L'Hosp.

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{-x \cdot 9 \cdot \sin(3x) + 3\cos(3x) + 3\cos(3x)}$$

$$= \frac{\cos 0}{0 + 3 + 3} = \frac{1}{6}.$$

Nachtrag zur gestrigen Vorlesung:
Differentialgleichung für das Fadenpendel.



$\varphi = \varphi(t)$
$\varphi' = \varphi'(t)$.

$$E_{pot} = mg \cdot \text{Höhe} = mg \cdot (-L\cos\varphi)$$
$$= -mgL\cos\varphi$$

$$E_{kin} = \frac{m}{2}(\text{Geschwindigkeit})^2 = \frac{m}{2}(L\varphi')^2$$
$$= \frac{1}{2}mL^2(\varphi')^2$$

$$E = E_{pot} + E_{kin} \overset{\boxed{\text{Energieerhaltung}}}{=} \text{const}$$

$$-mgL\cos\varphi + \frac{1}{2}mL^2(\varphi')^2 = \text{const}$$

Ableiten:

$$-mgL\cdot(-\sin\varphi\cdot\varphi') + \frac{1}{2}mL^2 2\cdot\varphi'\cdot\varphi'' = 0.$$

$$mL\varphi'(g\sin\varphi + L\cdot\varphi'') = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi'' = -\frac{g}{L}\sin\varphi}$$

$$\left((\varphi'(t))^2\right)' = 2\cdot\varphi'(t)\cdot\varphi''(t)$$

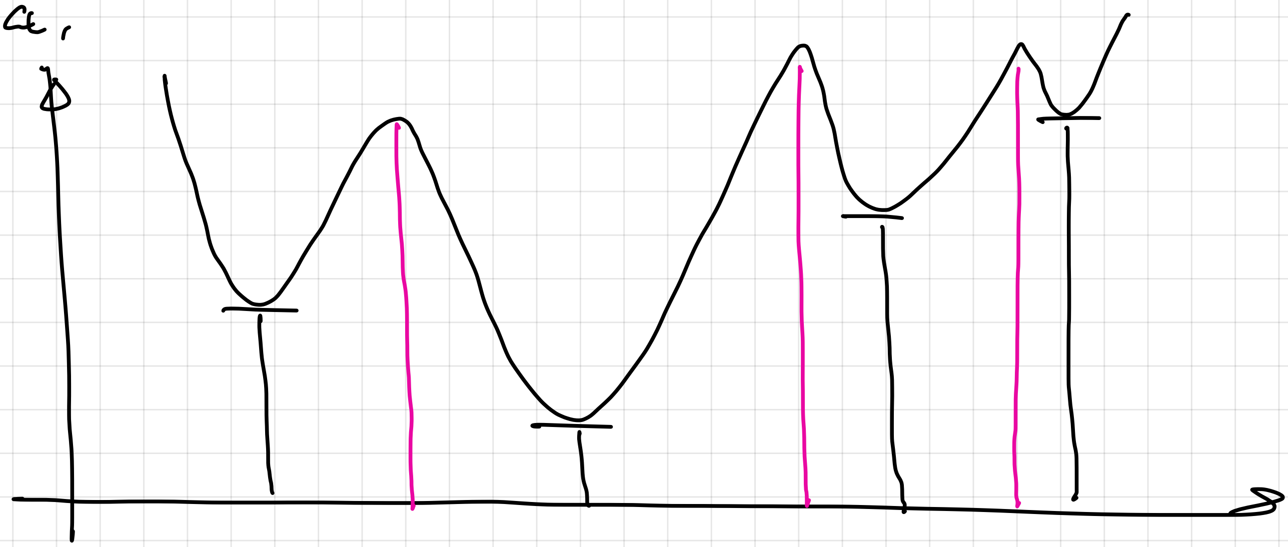
Optimierung

Es geht darum, eine Funktion zu optimieren, evtl. unter Nebenbedingungen. Unsere Funktion ist univariat und hinreichend oft differenzierbar.

Differenzierbare univariate Optimierung

$f'(a)$ enthält lokale Information über f am Wert a. D.h. eine beliebig kleine Umgebung $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ von a, in der wir f kennen, reicht aus, um $f'(a)$ zu bestimmen.

Dafür eignen sich die Ableitungen zur Beschreibung der sogenannten lokalen Optima.



Sei $f: X \to \mathbb{R}$ und $X \subseteq \mathbb{R}$.

Man sagt, dass f an der Stelle $a \in X$ ein lokales Minimum erreicht, wenn:

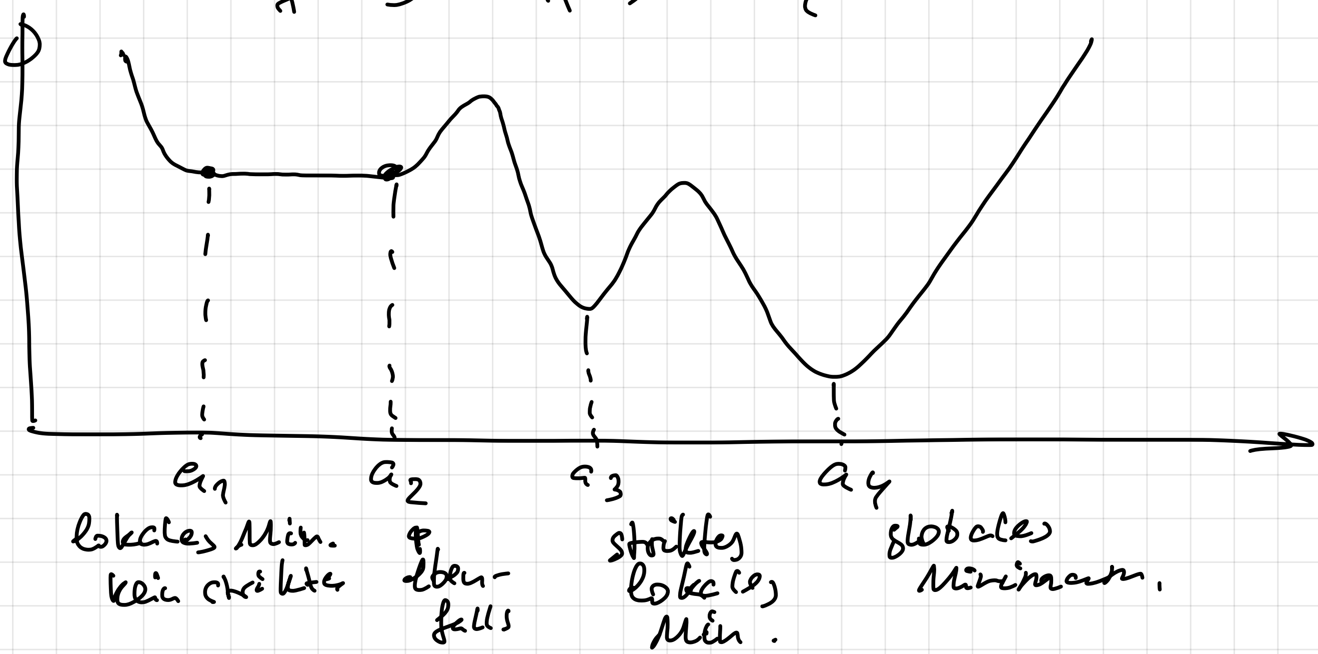
$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\ \forall x \in X : |x-a| < \varepsilon \Rightarrow f(x) \geq f(a).$$

Man sagt, dass f an der Stelle $a \in X$ ein striktes lokales Minimum erreicht:

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\ \forall x \in X : 0 < |x-a| < \varepsilon \Rightarrow f(x) > f(a).$$

Man sagt, dass $f : X \to \mathbb{R}$ in a ein (globales) Minimum erreicht, wenn

$f(x) \geq f(a)$ ist, für alle $x \in X$.



Lokale Maxima, strikte lokale Maxima und globale Maxima werden analog eingeführt.

Ein (lokales) Minimum bzw. Maximum nennt man ein (lokales) Extremum oder ein (lokales) Optimum.

Wir sind auf der Suche nach einer notwendigen Bedingung für ein lokales Extremum.

Monotonie

Bem. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ Funktion auf einem offenen Intervall $\emptyset \neq I \subseteq \mathbb{R}$, die monoton ist (monoton steigend oder monoton fallend). Was gilt für die Ableitung, vorausgesetzt: f ist differenzierbar.

- f mon. steigend auf I $\Rightarrow f' \geq 0$ auf I
- f mon. fallend auf I $\Rightarrow f' \leq 0$ auf I.

Warum?

Angenommen: f ist monoton steigend.

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \underbrace{\frac{f(x) - f(a)}{x-a}}_{\geq 0} \geq 0$$

$(a \in I)$

Fall 1: $x > a \Rightarrow f(x) \geq f(a)$

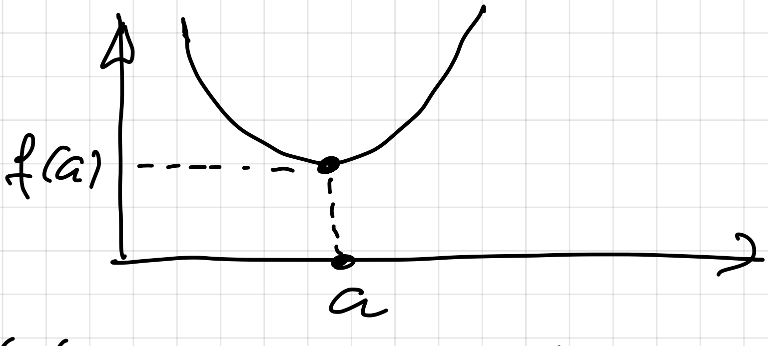
$$\Rightarrow \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$$

Fall 2: $x < a \Rightarrow f(x) \leq f(a)$

$$\Rightarrow \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \geq 0$$

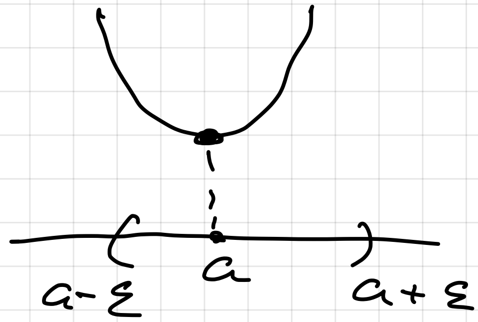
Analog für monoton fallende Funktionen.

Zurück zu lokalen Optima ...



Angenommen, eine differenzierbare Funktion $f: I \to \mathbb{R}$ auf einem offenen Intervall I erreicht ein lokales Minimum in $a \in I$.

D.h. für ein ε gilt
$(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subseteq I$ und
$f(x) \geq f(a)$, wenn
$x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ ist.



Dann ist

$$\underbrace{f'_l(a)}_{\text{Linke Ableitung}} = \lim_{x \uparrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0$$

$$\boxed{\begin{array}{c} f(x)-f(a) \geq 0 \\ x-a < 0 \end{array}}$$

$$\underbrace{f'_r(a)}_{\text{rechte Ableitung}} = \lim_{x \downarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$$

$$f(x)-f(a) \geq 0$$
$$x-a > 0$$

f differenzierbar $\Rightarrow$ $f'(a) = \underbrace{f'_l(a)}_{\leq 0} = \underbrace{f'_r(a)}_{\geq 0}$

$$\Rightarrow \boxed{f'(a) = 0}$$

Notwendige Bedingung an lokale Optima.

Stellen a, an denen $f'(a) = 0$ ist, nennt man kritische Punkte von f bzw. stationäre Punkte.

Um die kritischen Punkte zu finden, muss man die Gleichung $f'(x)=0$ lösen (bzgl. x).

Bsp. $f(x) = x^2 + 3\cos x$. Wir wollen diese Funktion minimieren.

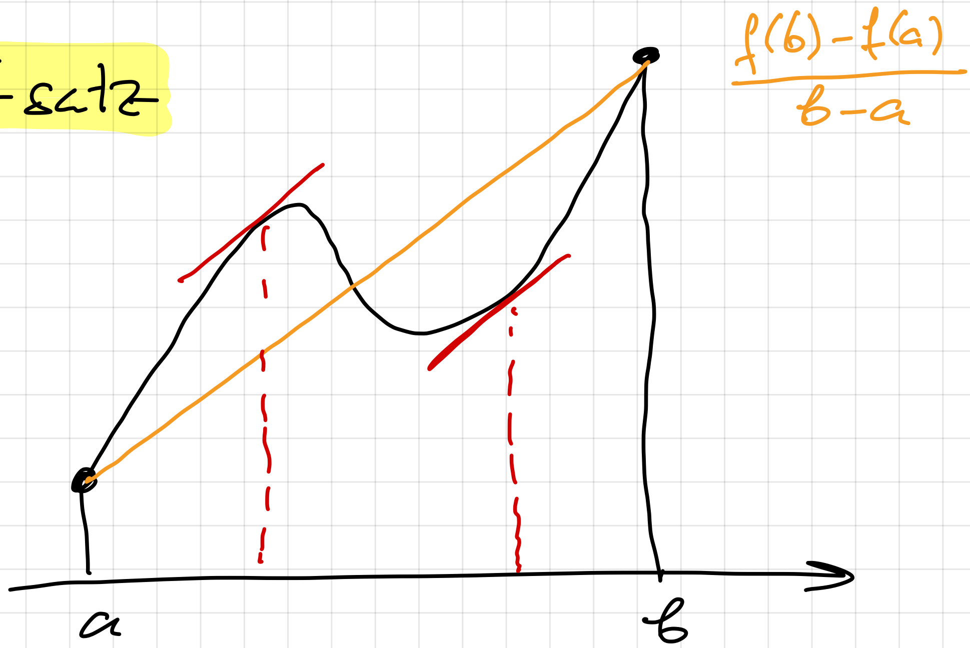
$$f'(x) = 2x - 3\sin x$$

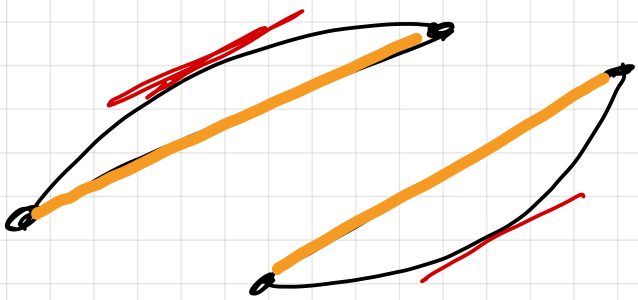
Kritische Punkte ergeben sich aus der Gleichung $2x - 3\sin x = 0$

$x=0$ ist kritischer Punkt.

Um die anderen kritischen Punkte zu finden, braucht man numerische Verfahren.

Der Mittelwertsatz

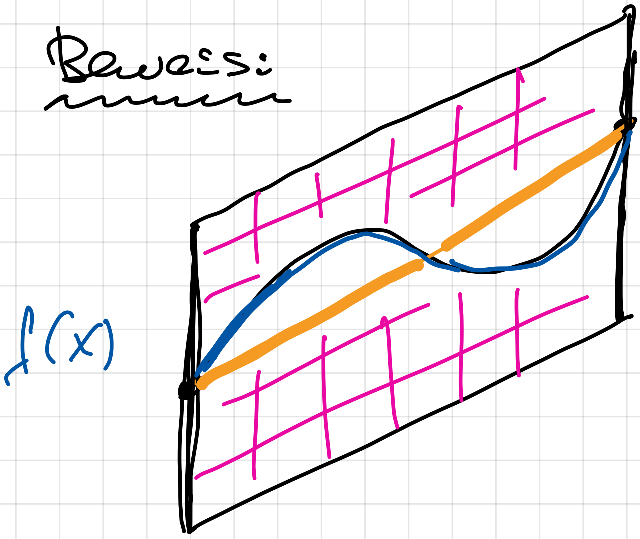


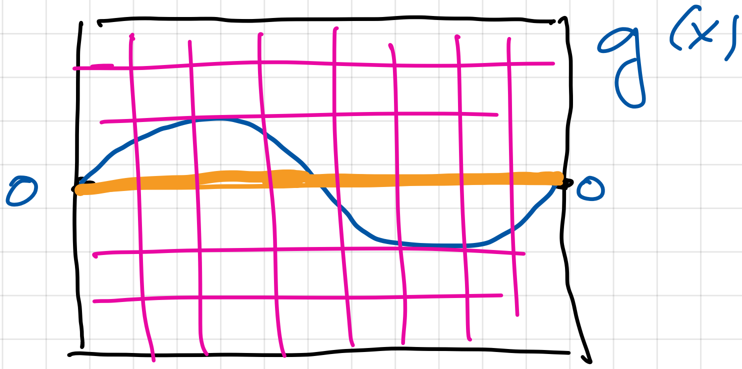


Theorem Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Funktion $(a<b)$, die stetig auf $[a,b]$ und differentierbar auf (a,b) ist. Dann existiert ein $\xi \in (a,b)$ mit

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

Beweis:





$$\text{Sei } g(x) = \underbrace{f(x)} - \underbrace{\left(f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x-a)\right)}$$

Dann gilt:

$$g(a) = 0$$

$$g(b) = 0$$

Ist $g(x) = 0$ für alle $x \in [a,b]$, so gilt $f(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x-a)$, sodass $f'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ für alle $x \in (a,b)$ erfüllt ist. In diesem Fall kann man $\xi \in (a,b)$ beliebig wählen.

Ansonsten hat $g(x)$ an einigen Stellen in (a,b) Werte, die $\neq 0$ sind. Nehmen wir Einfachheit halber an, dass es $x \in (a,b)$ existieren, in denen $g(x)$ strikt negativ ist.
Nach dem Satz von Weierstraß erreicht g als eine stetige Funktion auf $[a,b]$ ein Minimum in einem Punkt $\xi \in [a,b]$.
Aber $\xi \neq a$, denn $g(a) = 0$ und wir haben angenommen, dass g negative Werte erreicht.
Analog gilt auch $\xi \neq b$, sodass $\xi \in (a,b)$ ist.
Da g in ξ ein Minimum erreicht, ist ξ ein kritischer Punkt von g, d.h.

$$g'(\xi) = 0. \Rightarrow f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0.$$

$\square$

$$\frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$