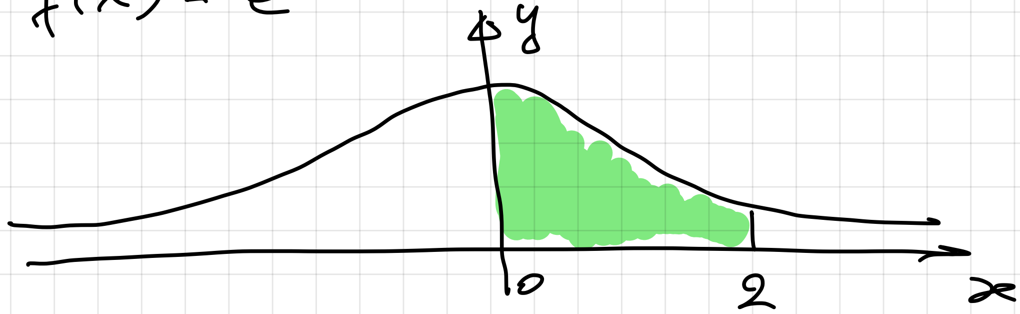
Agenda

+ Riemann-Integral
+ Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung
+ Unbestimmtes Integral

Kapitel 5. Integralrechnung

Bsp. $f(x) = e^{-x^2}$



Was ist die Fläche von

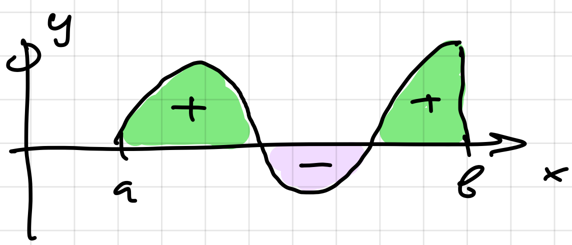
$$\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad 0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq e^{-x^2} \}$$

Diesen Wert bezeichnet man

$$\int_0^2 e^{-x^2} \, dx$$

Allgemein: die intuitive geometrische Beschreibung

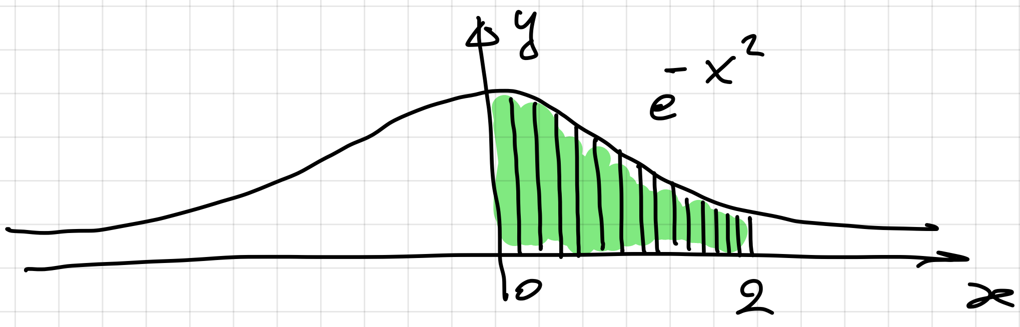
$$\int_a^b f(x)\,dx =$$

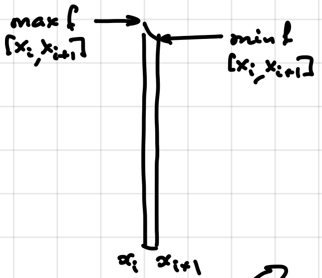


bei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $a < b$.

Wir wollen einen formalen Zugang zu $\int_a^b f(x)\,dx$ festlegen, der uns ermöglicht, viele interessante Funktionen zu integrieren. Z.B. sind wir daran interessiert, stetige Funktionen zu integrieren.

Wir führen das Riemann-Integral ein.





$$\sum_{i=0}^{n-1} \max_{[x_i,x_{i+1}]} f \cdot (x_{i+1}-x_i)$$

Der Wert $\int_0^2 e^{-x^2}\,dx$ liegt zwischen den beiden Werten

$$\sum_{i=0}^{n-1} \min_{[x_i,x_{i+1}]} f \cdot (x_{i+1}-x_i)$$

$$0 = \underbrace{x_0 < x_1 < \dots < x_n}_{\text{Stützstellen, sortiert.}} = 2$$

Def Eine Zerlegung von $[a,b]$ ist eine Unterteilung von $[a,b]$ in Intervalle, die sich nicht überlappen.

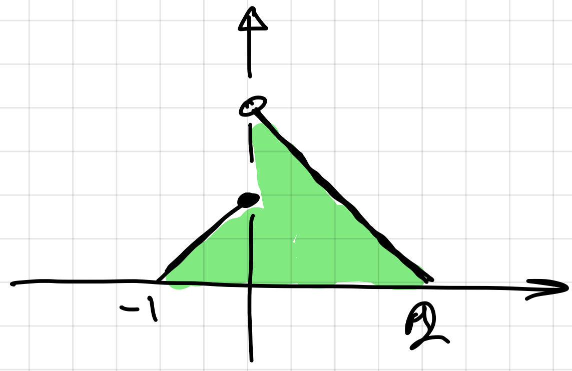
Man bestimmt die Zerlegung Z als
$Z = \{x_0, \ldots, x_n\}$ durch die Angabe ihrer Stützstellen $a = x_0 < \ldots < x_n = b$

Die Intervalle der Zerlegung Z sind somit
$[x_i, x_{i+1}]$ mit $i = 0, \ldots, n-1$.

Wir nennen $\Delta(Z) := \max\limits_{i=0,\ldots,n-1} (x_{i+1} - x_i)$

die Feinheit der Zerlegung.

Bem. Manche Funktionen, die beschränkt sind, erreichen das Maximum oder Minimum nicht, man kann sie aber trotzdem integrieren, wenn sie regelmässig genug sind.



$$f(x) = \begin{cases} x+1, & -1 \le x \le 0 \\ 2-x, & 0 \le x \le 2 \end{cases}$$

$\max\limits_{-1 \le x \le 2} f(x)$ gibt es nicht

$\sup\limits_{-1 \le x \le 2} f(x) = 2.$

Def Für eine Funktion $f: X \to \mathbb{R}$ heißt das kleinste $C \in [-\infty, \infty]$ mit $f(x) \le C$ (für alle $x \in X$) das Supremum von f auf X.

Bezeichnung: $\sup\limits_{x \in X} f(x)$.

(Supremum ist das Maximum, wenn das Maximum existiert).

Das größte $c \in [-\infty, \infty]$ mit $f(x) \geq c$ für alle $x \in X$ heißt das Infimum von f auf X.

Bez.: $\inf_{x \in X} f(x)$ (Es ist das Minimum, falls das Minimum erreicht wird)

Def. Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkte Funktion.

Sei $Z = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ mit $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ eine Zerlegung von $[a,b]$. Dann heißen

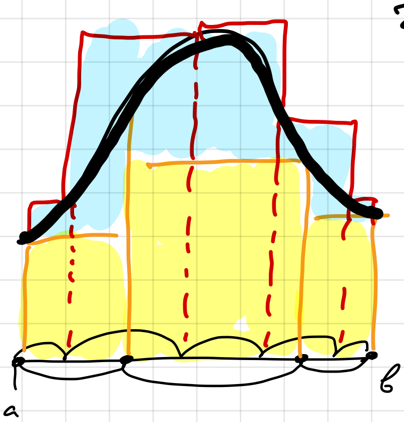
$$O_f(Z) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sup_{[x_i, x_{i+1}]} f \right) \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

$$U_f(Z) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\inf_{[x_i, x_{i+1}]} f \right) \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

die Ober- bzw. Untersumme von $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ bzgl. der Zerlegung Z.

Bem $U_f(Z) \leq O_f(Z)$

Angenommen man hat unterschiedliche Zerlegungen Z' und Z''



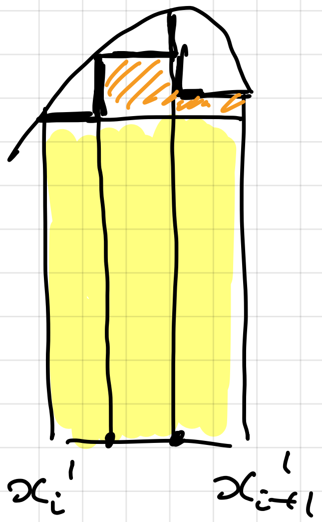
$$U_f(Z') \leq O_f(Z'').$$

vgl. Bild

Das kann man so sehen:

$$U_f(Z') \le U_f(Z' \cup Z'') \le O_f(Z' \cup Z'') \begin{array}{l} \le O_f(Z') \\ \le O_f(Z'') \end{array}$$

$$U_f(Z'') \le U_f(Z' \cup Z'')$$



$$\Rightarrow \quad U_f(Z') \le O_f(Z'')$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\sup_{\substack{Z' \\ \text{Zerlegung} \\ \text{von } [a,b]}} U_f(Z')}_{\substack{\| \\ \underline{\int_a^b} f(x)\,dx}} \le \underbrace{\inf_{\substack{Z'' \\ \text{Zerlegung} \\ \text{von } [a,b]}} O_f(Z'')}_{\substack{\| \\ \overline{\int_a^b} f(x)\,dx}}$$

Das untere Riemannintegral von f über $[a,b]$

Das obere Riemann-Integral von f über $[a,b]$.

Man nennt f Riemann-integrierbar über $[a,b]$, wenn die beiden Werte

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \quad \text{und} \quad \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

gleich sind. In diesem Fall nennt man den Wert das Riemann-Integral von f über $[a,b]$. Bezeichnung:

$$\int_a^b f(x)\,dx \, .$$

Ein weiterer Zugang zu den Riemann-Integralen

Über die Riemann-Summen

$Z = \{x_0, \dots, x_n\}$ mit

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b .$$

Und dann fixiert man noch Werte in den Intervallen $t_i \in [x_i, x_{i+1}]$, in denen man die Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ auswertet.

Dann kann man $\int_a^b f(x)\,dx$ als

einen Grenzwert definieren:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)\cdot(x_{i+1}-x_i)}$$

$Z = \{x_0, \ldots, x_n\}$
mit
$a = x_0 < \ldots < x_n = b$

$t_i \in [x_i, x_{i+1}]$

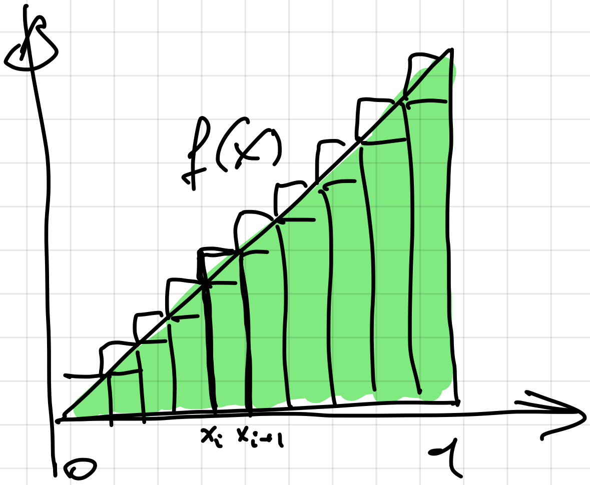
$\Delta(Z) \longrightarrow 0.$

diese Summe
nennt man die
Riemann-Summe.

$$\sum_{i=1}^{n-1} f(t_i)\cdot(x_{i+1}-x_i)$$

$$\int_a^b f(x)\cdot dx$$

Bsp $\int_0^1 x\,dx$



$f(x) = x$

$x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{n},\ x_2 = \frac{2}{n},\ x_3 = \frac{3}{n}, \ldots, x_n = \frac{n}{n} = 1$

$Z = \{0, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{n}{n}\}, \quad x_i = \frac{i}{n} \quad i = 0, \ldots, n.$

$$O_f(Z) = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1}) \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

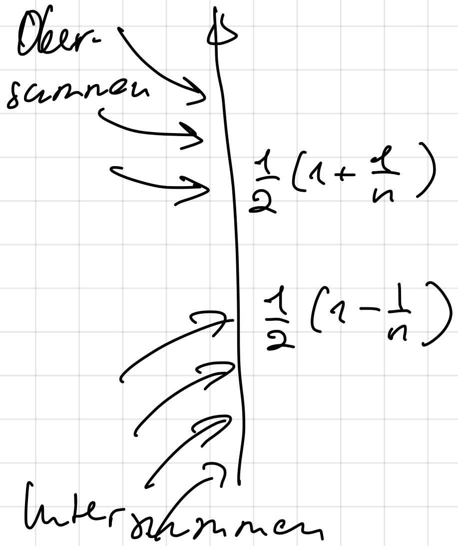
$$= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i+1}{n} \cdot \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} (i+1) = \frac{n \cdot (n+1)}{2n^2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$U_f(Z) = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot (x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{n} \cdot \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{(n-1) \cdot n}{2n^2} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right).$$



$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right) \le \int_0^1 x\,dx \le \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

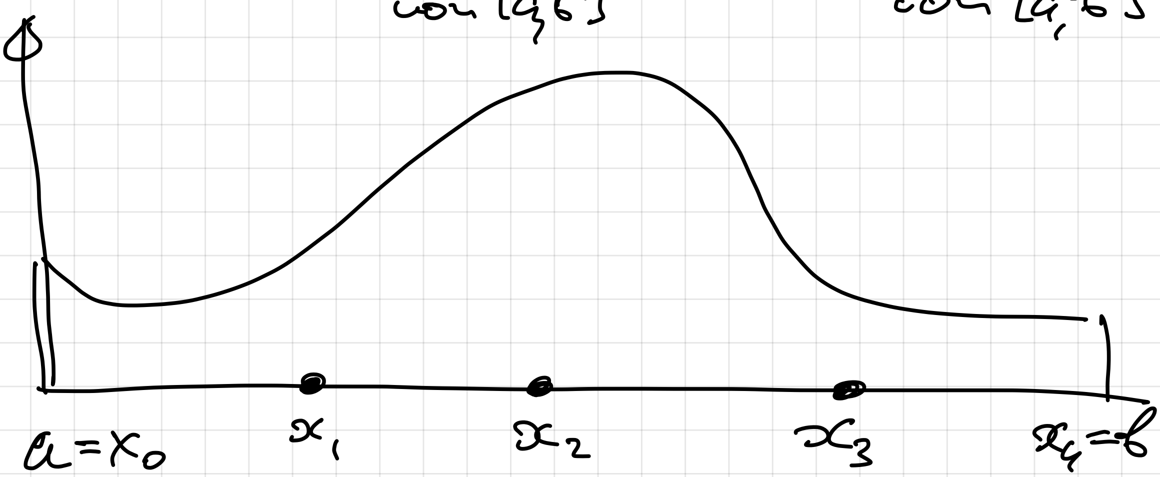
für jedes $n \in \mathbb{N}$.

$$\Downarrow$$

$$\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$$

Wenn man Differenzieren kann, wie kann man die Riemann-Integrale berechnen?

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sup_{\substack{Z \\ \text{Zerlegung} \\ \text{von } [a,b]}} U_f(Z) = \inf_{\substack{Z \\ \text{Zerlegung} \\ \text{von } [a,b]}} O_f(Z)$$

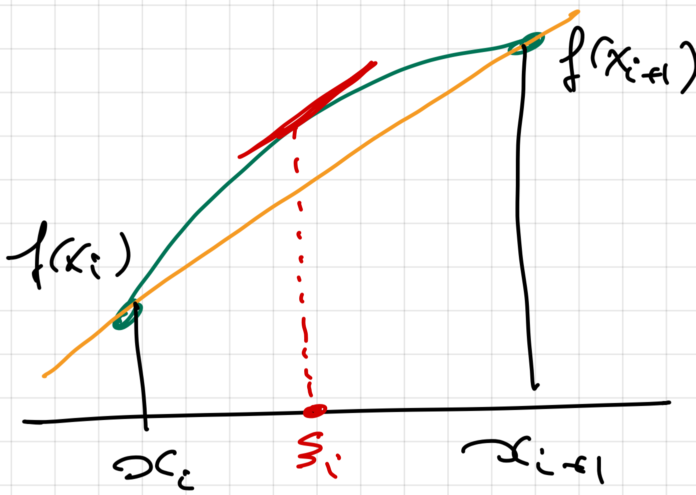


Angenommen, f ist stetig differenzierbar und wir integrieren f'.

Nach dem Mittelwertsatz gilt

$$\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = f'(\xi_i)$$

für ein $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$



$$\Rightarrow \quad f'(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) = f(x_{i+1}) - f(x_i)$$

$$\left(\min_{[x_i, x_{i+1}]} f'\right) \cdot (x_{i+1} - x_i) \leq \overbrace{f'(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)}^{f(x_{i+1}) - f(x_i)} \leq \left(\max_{[x_i, x_{i+1}]} f'\right) \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

$\Downarrow$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left(\min_{[x_i, x_{i+1}]} f'\right) \cdot (x_{i+1} - x_i) \leq \sum_{i=0}^{n-1} \left(f(x_{i+1}) - f(x_i)\right) \leq \sum_{i=0}^{n-1} \left(\max_{[x_i, x_{i+1}]} f'\right) \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

$\Downarrow$

$$U_{f'}(Z) \leq \sum_{i=0}^{n-1} \left(f(x_{i+1}) - f(x_i)\right) \leq O_{f'}(Z)$$

für $Z = \{x_0, \ldots, x_n\}$

Hierbei ist

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left(f(x_{i+1}) - f(x_i)\right) = f(x_n) - f(x_0) = f(b) - f(a)$$

$\boxed{n=3}$

$$\left(f(\cancel{x_1}) - f(x_0)\right) + \left(\cancel{f(x_2)} - \cancel{f(x_1)}\right) + \left(f(x_3) - \cancel{f(x_2)}\right)$$
$$= f(x_3) - f(x_0)$$

$\Downarrow$

$$U_{f'}(Z) \leq f(b) - f(a) \leq O_{f'}(Z)$$

für jede Zerlegung

$$\Rightarrow \boxed{\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a).}$$

gilt für stetig differenzierbare Funktionen.

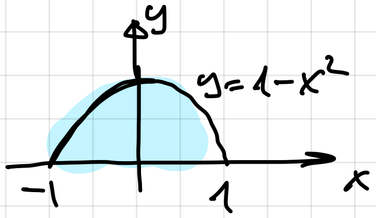
Und übrigens: stetige Funktionen sind nach Riemann integrierbar (das haben wir nicht gezeigt aber oben benutzt).

Bsp

$$\int_0^1 x\,dx = \int_0^1 \left(\tfrac{1}{2}x^2\right)' dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\cdot 1^2 - \tfrac{1}{2}\cdot 0^2 = \tfrac{1}{2}.$$

Bsp



$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(x - \tfrac{1}{3}x^3\right)' dx$$

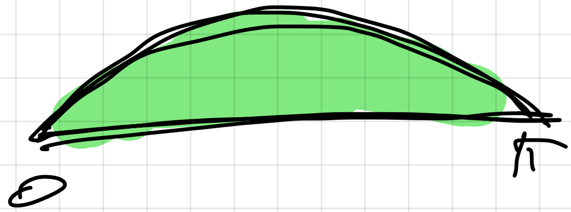
$$= \left[x - \tfrac{1}{3}x^3\right]_{x=-1}^{1}$$

$$= \left(1 - \tfrac{1}{3}1^3\right) - \left((-1) - \tfrac{1}{3}(-1)^3\right)$$

$$= 2\left(1 - \tfrac{1}{3}1^3\right)$$

$$= \frac{4}{3}.$$

Bsp



$$\int_0^{\pi} \sin x\,dx = \int_0^{\pi} (-\cos x)'\,dx$$

$$= -\cos\pi - (-\cos 0)$$

$$= 2.$$

Def. Ist $g' = f$ so nennt man g eine Stammfunktion von f.

Bem. Ist g eine Stammfunktion von f, so ist $g + \text{const}$ auch eine Stammfunktion von f.

Bei einer Funktion f auf einem Intervall I nennt die parametrische Familie aller Stammfunktionen das unbestimmte Integral von f.

Bezeichnung $\int f(x)\,dx$.

Z.B. $\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C$

Konstante

Wenn man die Formeln für Ableitungen rückwärts liest, kriegt man Formeln für Stammfunktionen.

$$(x^a)' = a \cdot x^{a-1}$$

$$\int x^a \, dx = \frac{1}{a+1} \cdot x^{a+1} + C$$

für $a \in \mathbb{R}$, $a \neq -1$.

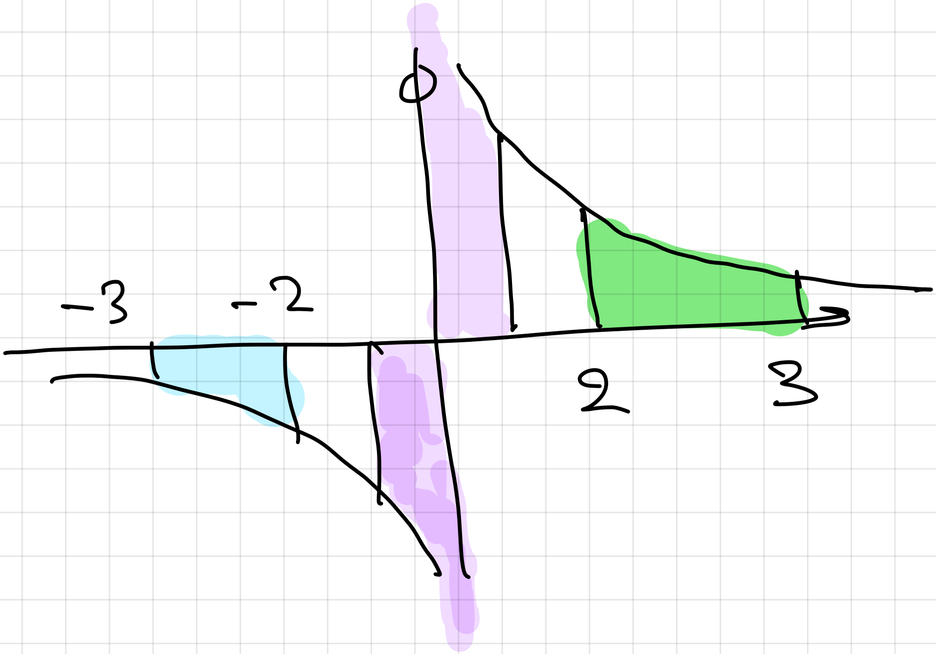
$$\int x^{-1} \, dx = \ln x + C$$

$$(\ln|x|)' = \begin{cases} (\ln x)' & \text{bei } x > 0 \\ (\ln(-x))' & \text{bei } x < 0. \end{cases}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \qquad (\ln(-x))' = \frac{1}{x}$$

<u>Update:</u>

$$\underbrace{\int x^{-1} \, dx = \ln|x| + C}_{\text{nur auf Intervallen gültig.}}$$



Bsp

$$\int_{-1}^{2} |x|\, dx = \int_{-1}^{0} |x|\, dx + \int_{0}^{2} |x|\, dx$$

$$= \int_{-1}^{0} (-x)\, dx + \int_{0}^{2} x\, dx$$

$$= \frac{1}{2} + 2 = 2{,}5 .$$

das nennt man "den Integrationsbereich zerlegen"!

Bem. Integral ist ein lineares Funktional, d.h.

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \cdot \int_a^b g(x)\, dx$$

Bem

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = \frac{d}{dx}\int_a^x g'(t)\,dt$$

g Stammfunktion von f.

$$= \frac{d}{dx}\left(g(x)-g(a)\right) = g'(x) = f(x).$$

$\Rightarrow$ Differenzieren ist das Gegenteil von Integrieren

Bsp.

$$\frac{d}{dx}\int_a^{x^2} f(t)\,dt = \frac{d}{dx}\int_a^{x^2} g'(t)\,dt$$

$\boxed{g'=f}$

$$= \frac{d}{dx}\left(g(x^2)-g(a)\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\, g(x^2) = 2\cdot x\cdot g'(x^2)$$

$$= 2x\, f(x^2).$$

Bem

Man definiert

$$\int_a^b f(x)\,dx := -\int_b^a f(x)\,dx,$$

wenn $a>b$ ist. Für $a=b$ setzt man das Integral $=0$.

Das passt.

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$$