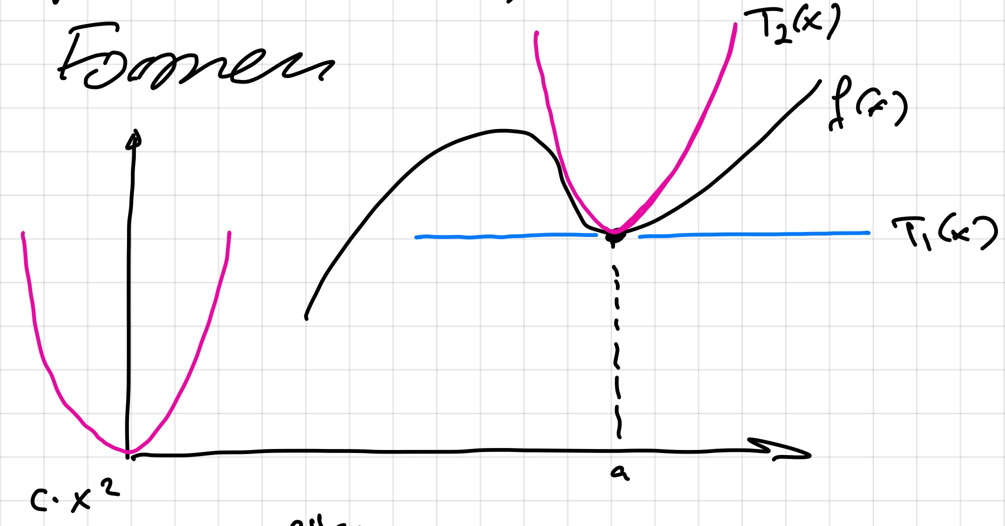
Agenda:

+ Definitheit von quadratischen Formen



$$c = \frac{f''(a)}{2}$$

$$\left.\begin{array}{lll} c > 0 & \Rightarrow & c x^2 > 0 \text{ bei } x \neq 0. \\ c < 0 & \Rightarrow & c x^2 < 0 \text{ bei } x \neq 0. \\ c = 0 & \Rightarrow & c x^2 = 0 \text{ für alle } x. \end{array}\right\} \text{univariate Welt.}$$

Multivariat: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$f(x) = f(a) + \langle \nabla f(a), x-a \rangle + \frac{1}{2} \langle \nabla^2 f(a)(x-a), x-a \rangle$$

$$= f(a) + \nabla f(a)^T \cdot (x-a) + \frac{1}{2} (x-a)^T \nabla^2 f(a) \cdot (x-a)$$

Für die Optimalität, lokal an der Stelle a, ist $\nabla f(a) = 0$ notwendig.

$f(a)$ spielt keine Rolle bei der Analyse.

Wir analysieren

$$q(x) = \frac{1}{2} x^T \nabla^2 f(a) \cdot x$$

Das ist die quadratische Form zur Matrix $A = \frac{1}{2} \nabla^2 f(a)$:

$$q(x) = q_A(x) = x^T A x = \langle Ax, x \rangle.$$

Hierbei ist A eine symmetrische Matrix mit reellwertigen Komponenten.

4 Begriffe für quadratische Formen.

	definit	semidefinit
positiv	$q > 0$ auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$	$q \geq 0$ auf $\mathbb{R}^n$.
negativ	$q < 0$ auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$	$q \leq 0$ auf $\mathbb{R}^n$.

Des Weiteren heißt q indefinit, wenn q sowohl positive als auch negative Werte annimmt. Man nutzt diese Begriffe auch für die jeweilige Matrix A von $q = q_A$.

Hinreichende und notwendige Bedingungen für die lokale Optimalität an der Stelle $a \in \mathbb{R}^n$:

für ein lokales	Notwendig	Hinreichend
Minimum	$\nabla f(a)=0$, $\nabla^2 f(a)$ positiv semidefinit	$\nabla f(a)=0$, $\nabla^2 f(a)$ positiv definit
Maximum	$\nabla f(a)=0$, $\nabla^2 f(a)$ negativ semidefinit	$\nabla f(a)=0$, $\nabla^2 f(a)$ negativ definit

Darüber hinaus: Ist $\nabla^2 f(a)$ indefinit, so hat man in a weder ein lokales Maximum noch ein lokales Minimum (es ist ein sogenannter Sattelpunkt).

Wie kann man eine gegebene quadratische Form $q = q_A$ in die ~~oben~~ genannten Arten unterteilen (algorithmisch)?

In der linearen Algebra wird es geklärt.

Bsp. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$q_A(x_1, x_2) = [x_1 \;\; x_2] \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= 3x_1^2 + 1 \cdot x_1 x_2 + 1 \cdot x_2 x_1 + 2x_2^2$$

$$= 3x_1^2 + 2x_1 x_2 + 2x_2^2$$

Wir können eine symmetrisierte Variante vom Gauß-Verfahren nutzen. D.h. iterativ: Eine Spaltentransformation und danach die gleiche Zeilentransformation. Ziel: die Matrix diagonal zu machen.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}\cdot} \begin{bmatrix} 2\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}\cdot} \begin{bmatrix} 2\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

fertig!

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}}_{M} = \begin{bmatrix} 2\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\overbrace{\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}^{M^T} \overbrace{\begin{bmatrix} 2\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}^{AM} = \begin{bmatrix} 2\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$M^T A M = D := \begin{bmatrix} 2\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{u^T D u} = u^T M^T A M u = (Mu)^T A M u$$

$$= x^T A x$$

$$\parallel$$

$$2\tfrac{1}{2} u_1^2 + 2 u_2^2$$

für $x = Mu$.

$x = Mu$ heißt $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} x_1 = u_1 \\ x_2 = -\frac{1}{2}u_1 + u_2 \end{cases}$$

D.h. nach diesem Koordinatenwechsel hat man

$$q_A(x) = q_D(u).$$

$$q_A(x) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2$$

$$q_D(u) = \underbrace{2\tfrac{1}{2}u_1^2 + 2u_2^2}_{D}$$

Also ist unsere Matrix A (bzw. die quadratische Form q_A)

$\Rightarrow$ A ist positiv definit (denn alle Diagonalelemente von D sind strikt positiv).

Übrigens: wir können u_1 und u_2 in x_1, x_2 darstellen.

$$\begin{cases} u_1 = x_1 \\ u_2 = \frac{1}{2}x_1 + x_2 \end{cases}$$

$$q_A(x_1, x_2) = 2\tfrac{1}{2}u_1^2 + 2u_2^2 = 2\tfrac{1}{2}x_1^2 + 2\cdot\left(\tfrac{1}{2}x_1 + x_2\right)^2$$

Bsp. $q_A(x_1, x_2) = 2x_1x_2$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \overset{\mathrm{I.}}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \overset{\mathrm{I}'}{\underset{+1\cdot}{\rightsquigarrow}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$+1\cdot$ $\qquad$ $-\frac{1}{2}\cdot$

$$\overset{\mathrm{II}}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \overset{\mathrm{II}'}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ A ist indefinit (denn auf der Diagonale dieser Matrix hat man sowohl positive als auch negative Elemente).

$$\overset{\mathrm{II}'}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}} \overset{\mathrm{I}'}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} A \overset{\mathrm{I.}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}} \overset{\mathrm{II}}{\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

$$A \rightsquigarrow M^T A M = D.$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$q(x) = x^T A x = \underbrace{u^T D u}_{=\, 2u_1^2 - \frac{1}{2}u_2^2} \quad \text{für} \quad x = Mu$$

$$\begin{cases} x_1 = u_1 - \frac{1}{2} u_2 \\ x_2 = u_1 + \frac{1}{2} u_2 \end{cases}$$

Wie sieht der allgemeine Algorithmus aus?

$$\begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix} \rightsquigarrow \text{ iterativ weiter.}$$

Anfang   Nach Runde 1

$$\begin{bmatrix} 0 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}$$

Strategie für den Sonderfall, in dem auf der Diagonale eine 0 steht.

Bemerkung. Eine Variante dieses Verfahrens ist auch innerhalb des Newtonverfahrens nützlich.

Im Newton-Verfahren löst man

$$\nabla f(x) = 0.$$

$$\boxed{p_{k+1} = p_k - \nabla^2 f(p_k)^{-1} \cdot \nabla f(p_k).}$$

Wir müssen also

$Ax = b$ lösen, mit

$A = \nabla^2 f(p_k)$ und

$b = \nabla f(p_k)$.

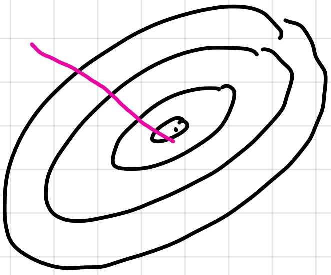
A ist dabei eine symmetrische Matrix.

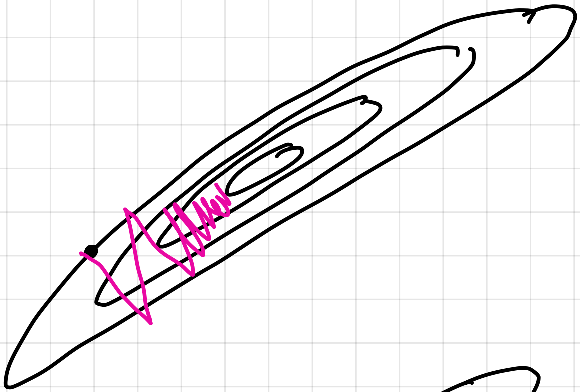
Um $Ax = b$ zu lösen zerlegt man A als

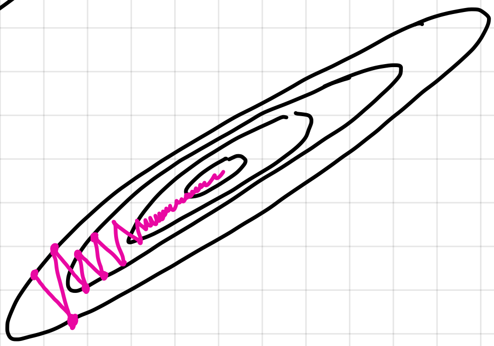
$A = L \cdot L^T$, wo L eine untere Dreiecksmatrix ist.

$$L = \begin{bmatrix} \ast & 0 & \cdots & 0 \\ \ast & \ast & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ \ast & \cdots & \ast & \ast \end{bmatrix}$$

Das nennt man Cholesky-Zerlegung.







<u>Das letzte mal wurde gezeigt:</u>

Zu jeder symmetrischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ existiert eine invertierbare Matrix M derart, dass $M^T A M$ diagonal ist.

<u>Man kann diese Aussage verstärken:</u>

Zu jeder symmetrischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ existiert eine Matrix U mit $U^T U = I$ derart, dass $U^T A U$ diagonal ist.

Was hat die Matrix U mit $U^T U = I$ für besondere Merkmale?

Ist $U = \begin{bmatrix} u_1 & \cdots & u_n \end{bmatrix}$, so hat man

$$U^T U = \begin{bmatrix} u_1^T \\ \vdots \\ u_n^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 & \cdots & u_n \end{bmatrix}$$

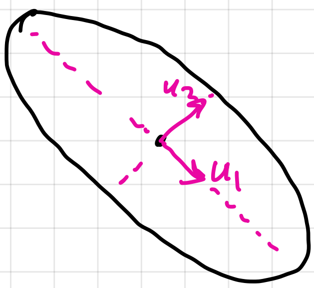
$$= \left(u_i^T u_j \right)_{i,j=1,\dots,n}$$

$$u_i^T u_j = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

d.h. $u_1, \dots, u_n$ bilden eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$. Oder, alternativ können wir U als eine Abbildung $x \mapsto Ux$ auffassen:

$$\|Ux\| = \sqrt{(Ux)^T Ux} = \sqrt{x^T U^T U x}$$
$$= \sqrt{x^T x}$$
$$= \|x\|.$$

D.h. U entspricht einer Bewegung.



Wir schreiben die Gleichung

$$U^T A U = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} = \Lambda.$$

mit Hilfe der Spalten von U um.

$$U^T A U = \Lambda$$
$$\Updownarrow$$
$$U U^T A U = U \Lambda$$
$$\Updownarrow$$
$$A U = U \Lambda$$
$$\Updownarrow$$
$$A \begin{bmatrix} u_1 & \cdots & u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & \cdots & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} A u_1 = \lambda_1 u_1 \\ A u_2 = \lambda_2 u_2 \\ \vdots \\ A u_n = \lambda_n u_n \end{cases}$$

Wenn $u \neq 0$ ist und λ ein Wert mit $Au = \lambda u$, so nennt man:

(λ, u) Eigenpaar von A

λ Eigenwert von A

u Eigenvektor von A zum Eigenwert λ.

Konformulierung:

Die Eigenwerte einer jeden symmetrischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sind reell und darüber hinaus hat man zu jeder solchen Matrix A eine orthonormale Basis von $\mathbb{R}^n$, die aus Eigenvektoren von A besteht.

Beispiel. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ist der Eigenvektor von A zum Eigenwert 1.

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ Eigenvektor von A zum Eigenwert 3.

$$\rightsquigarrow \quad u_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

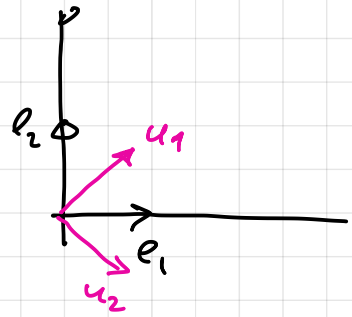
$$A \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix}}_{U} = \begin{bmatrix} Au_1 & Au_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & 3u_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot U = U \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$U^T A \cdot U = \underbrace{U^T U}_{I} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \\ \quad u_1 \qquad\quad u_2 \end{array}$$



Was bedeutet das für die quadratische Form

q_A ?

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{\parallel} = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2$$

$$x^T A x$$

$$\parallel$$

$$x^T \underbrace{UU^T}_{} A \underbrace{UU^T}_{} x$$

$$\parallel$$

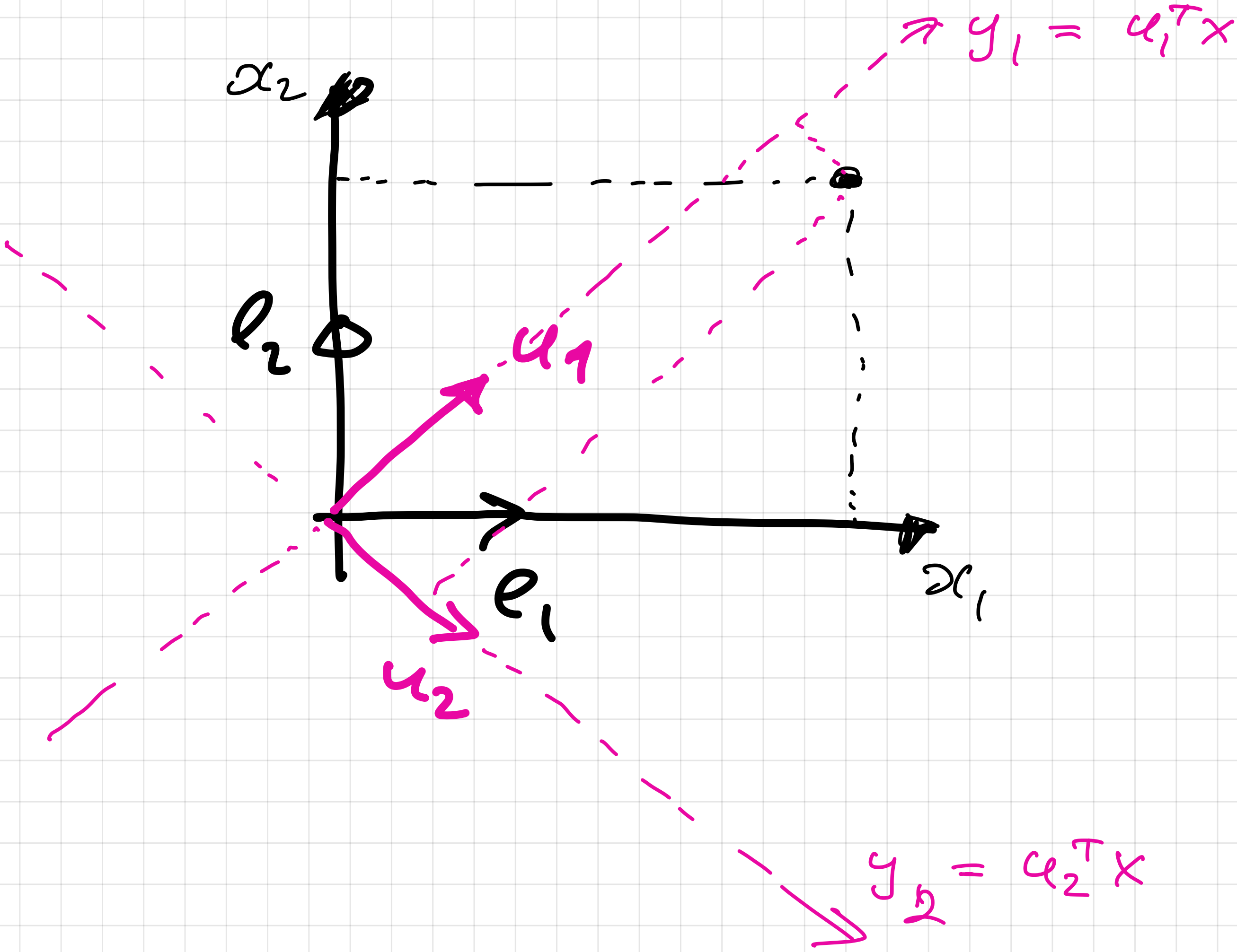
$$x^T U \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} U^T x$$

$$\parallel$$

$$(U^T x)^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} U^T x$$

$$\parallel$$

$$\begin{bmatrix} u_1^T x & u_2^T x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^T x \\ u_2^T x \end{bmatrix} = 1 \cdot (u_1^T x)^2 + 3 \cdot (u_2^T x)^2.$$



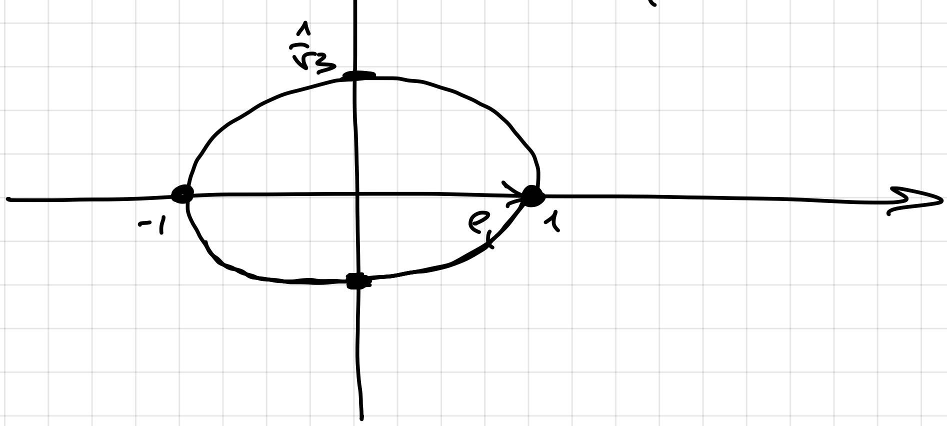
$$q_A(x) = 1 \cdot y_1^2 + 3 \cdot y_2^2$$

$$y_1 = u_1^T x = \frac{1}{\sqrt{2}} x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} x_2$$

$$y_2 = u_2^T x = \frac{1}{\sqrt{2}} x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} x_2$$

$$y_1^2 + 3y_2^2$$

$$y_1^2 + 3y_2^2 = 1$$



Wie kann man die Eigenwerte und -Vektoren finden?

Wir sind auf der Suche nach einem λ, für welches ein $v \neq 0$ mit $Av = \lambda v$ existiert.

$$Av = \lambda v \iff Av = \lambda I v$$
$$\iff Av - \lambda I v = 0$$
$$\iff (A - \lambda I) \cdot v = 0.$$

Wir wollen also, dass ein homogenes LGS zur Matrix $A - \lambda I$ eine Nichtnull-Lösung besitzt. Das ist genau dann der Fall, wenn $\det(A - \lambda I) = 0$ ist.

$\det(A - \lambda I) = 0$ ist also eine Gleichung zur Bestimmung von Eigenwerten.

Bsp. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

$$\det(A - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)^2 - (-1)^2$$

$$(2-\lambda)^2 - 1 = 0$$
$$(2-\lambda)^2 = 1$$
$$2 - \lambda = \pm 1$$
$$\lambda = 2 \pm 1 \iff \lambda \in \{1, 3\}.$$

$$(A-\lambda I)\cdot v = 0$$

$\lambda = 1$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\lambda = 3$

$$(A - I)\cdot v = 0 \qquad\qquad (A - 3I)\cdot v = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad\qquad \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$$v_1 = v_2 \qquad\qquad v_1 + v_2 = 0$$

Sein $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die Eigenwert einer symmetrischen Matrix A:

Dann gilt:

A pos. def. $\iff$ $\lambda_1 > 0, \dots, \lambda_n > 0$

A pos. sem.-def. $\iff$ $\lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_n \geq 0$

A neg. def. $\iff$ $\lambda_1 < 0, \dots, \lambda_n < 0$

A neg. sem.-def. $\iff$ $\lambda_1 \leq 0, \dots, \lambda_n \leq 0$

A indefinit $\iff$ Es gibt i mit $\lambda_i > 0$ und i mit $\lambda_i < 0$