

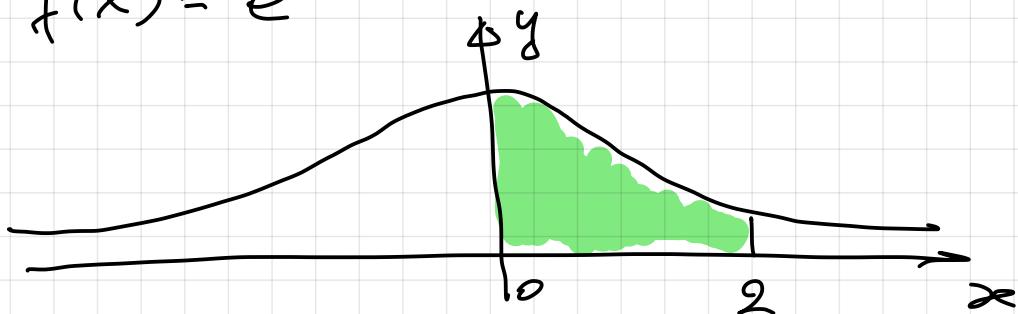
Agenda

- + Riemann - Integral
- + Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung
- + Unbestimmtes Integral

Kapitel 5.

Integralrechnung

Bsp. $f(x) = e^{-x^2}$



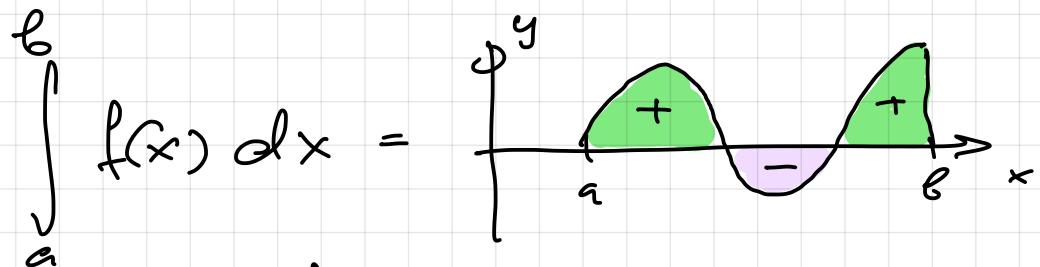
Was ist die Fläche von

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq e^{-x^2}\}$$

Diesen Wert bezeichnet man

$$\int_0^2 e^{-x^2} dx$$

Allgemein: die intuitive geometrische Beschreibung



bei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $a < b$.

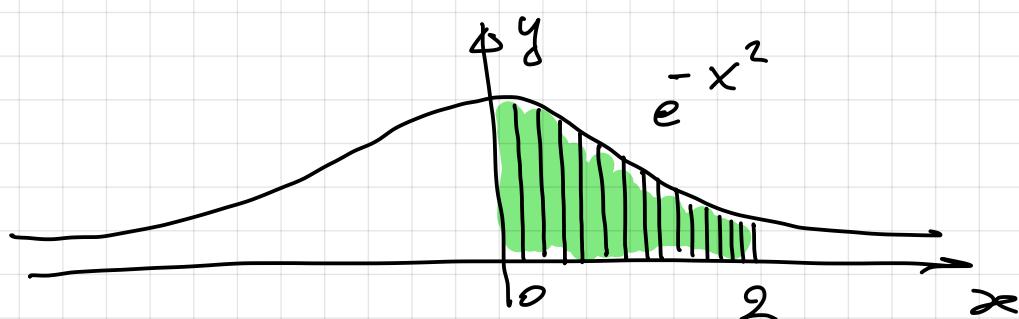
Wir wollen einen formalen Zugang für

$\int_a^b f(x) dx$ festlegen, der uns ermöglicht,

viele interessante Funktionen zu integrieren. Z.B. sind wir davon interessiert,

stetige Funktionen zu integrieren.

Wir führen das Riemann - Integral ein.



$$\max_{[x_i, x_{i+1}]} f \quad \min_{[x_i, x_{i+1}]} f$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \max_{[x_i, x_{i+1}]} f \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \min_{[x_i, x_{i+1}]} f \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

Der Wert
 $\int_0^2 e^{-x^2} dx$

liegt zwischen
den beiden
Werten

$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 2$
Schnitstellen, sortiert.

Def Eine Zerlegung von $[a, b]$ ist eine Unterteilung von $[a, b]$ in Intervalle, die sich nicht überlappen.

Man bestimmt die Zerlegung Z als

$$Z = \{x_0, \dots, x_n\} \text{ durch die Angabe ihrer Stützstellen } a = x_0 < \dots < x_n = b$$

\vdots

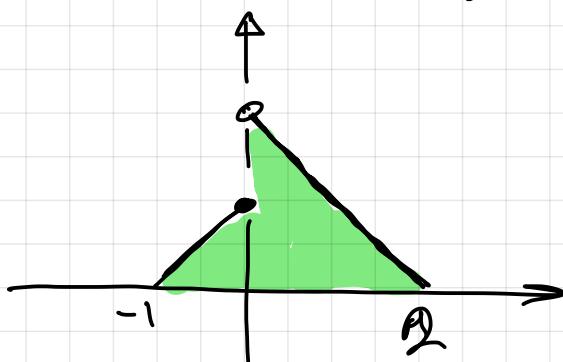
Die Intervalle der Zerlegung Z sind somit

$$[x_i, x_{i+1}] \text{ mit } i=0, \dots, n-1.$$

$$\text{Wir nennen } \Delta(Z) := \max_{i=0, \dots, n-1} (x_{i+1} - x_i)$$

die Feinheit der Zerlegung.

Bem. Manche Funktionen, die beschränkt sind, erreichen das Maximum oder Minimum nicht, man kann sie aber trotzdem integrieren, wenn sie regelmäßig genug sind.



$$f(x) = \begin{cases} x+1, & -1 \leq x < 0 \\ 2-x, & 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$\max_{-1 \leq x \leq 2} f(x)$ gibt es nicht

$$\sup_{-1 \leq x \leq 2} f(x) = 2.$$

Def Für eine Funktion $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ heißt

das kleinste $C \in [-\infty, \infty]$ mit

$f(x) \leq C$ das Supremum von f auf X .

Bezeichnung: $\sup_{x \in X} f(x)$.

für alle $x \in X$

(Supremum ist das Maximum, wenn das Maximum existiert).

Das größte $c \in [-\infty, \infty]$ mit $f(x) \geq c$

für alle $x \in X$ heißt das Supremum von f auf X .

Bem: $\inf_{X \subseteq X} f(x)$ (Es ist das Minimum, falls das Minimum erreicht wird)

Def. Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkte Funktion

Sei $Z = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ mit

$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ eine Zerlegung

von $[a, b]$. Dann haben

$$O_f(Z) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sup_{[x_i, x_{i+1}]} f \right) \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

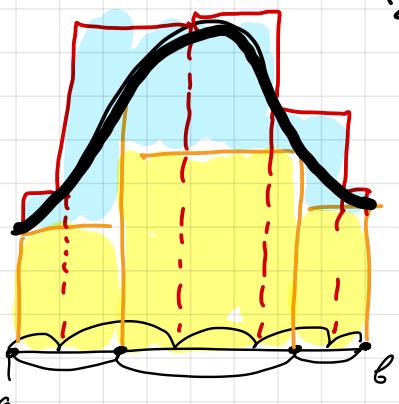
$$U_f(Z) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\inf_{[x_i, x_{i+1}]} f \right) \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

die Ober- bzw. Untergrenze von $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$
bzgl. der Zerlegung Z .

Bem: $U_f(Z) \leq O_f(Z)$

Anzumerken: man hat unterschiedliche Zerlegungen

Z' und Z''



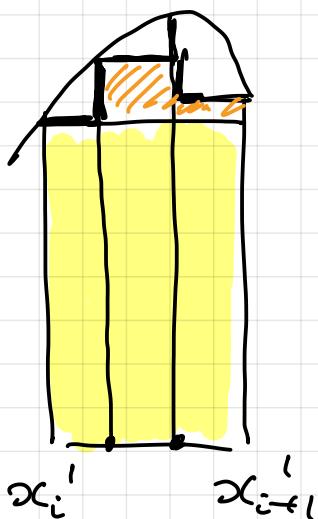
$$U_f(Z') \leq O_f(Z'')$$

↑
vgl. Bild

Das kann so aussehen:

$$U_f(z') \leq U_f(z' \cup z'') \leq O_f(z' \cup z'') \leq O_f(z'')$$

$$U_f(z'') \leq$$

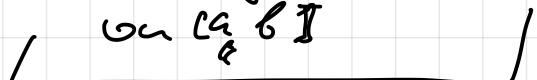
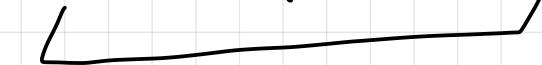


$$\Rightarrow U_f(z') \leq O_f(z'')$$

$$\Rightarrow \sup_{z'} U_f(z') \leq \inf_{z''} O_f(z'')$$

Zerlegung
von $[a, b]$

Zerlegung
von $[a, b]$



//

//

$$\int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx$$

Das untere Riemannintegral
von f über $[a, b]$

Das obere Riemann-
integral von f
über $[a, b]$.

Man nennt f Riemann-integrierbar über $[a, b]$,
wenn die beiden Werte

$$\underline{\int_a^b f(x) dx} \quad \text{and} \quad \overline{\int_a^b f(x) dx}$$

gleich sind. In diesem Fall nennt man
den Wert das Riemann-Integral von f
über $[a, b]$. Bezeichnung:

$$\int_a^b f(x) dx$$

Ein weiterer Zugang zu den Riemann-Integralen
über die Riemann-Summen

$$Z = \{x_0, \dots, x_n\} \text{ mit } a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

Und dann fixiert man noch Werte
in den Intervallen $t_i \in [x_i, x_{i+1}]$,
in denen man die Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$
auswählt.

Dann kann man $\int_a^b f(x) dx$ als

einen Grenzwert definieren:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i) \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

$Z = \{x_0, \dots, x_n\}$

mit

$a = x_0 < \dots < x_n = b$

$t_i \in [x_i, x_{i+1}]$

$\Delta(Z) \rightarrow 0.$

diese Summe
nennt man die
Riemann-Summe.

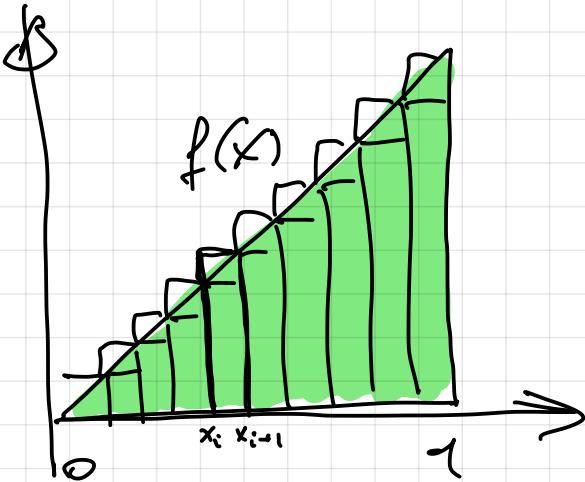
$$\sum_{i=1}^{n-1} f(t_i) \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

$f(x) \cdot dx$

Bsp

$$\int_0^1 x \, dx$$

$$f(x) = x$$



$$x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{n}, x_2 = \frac{2}{n}, x_3 = \frac{3}{n}, \dots, x_n = \frac{n}{n} = 1$$

$$\mathcal{Z} = \left\{ 0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n}{n} \right\}, \quad x_i = \frac{i}{n} \quad i = 0, \dots, n.$$

$$O_f(\mathcal{Z}) = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1}) \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

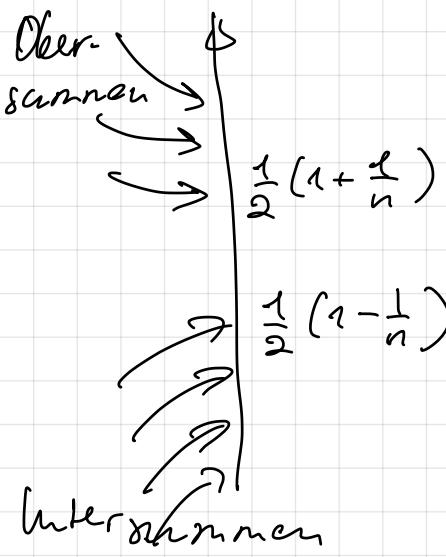
$$= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i+1}{n} \cdot \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} (i+1) = \frac{n \cdot (n+1)}{2n^2}$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right)$$

$$U_f(\mathcal{Z}) = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot (x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{n} \cdot \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{(n-1) \cdot n}{2n^2} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{n} \right).$$



$$\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{n}) \leq \int_0^1 x dx \leq \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{n})$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$.

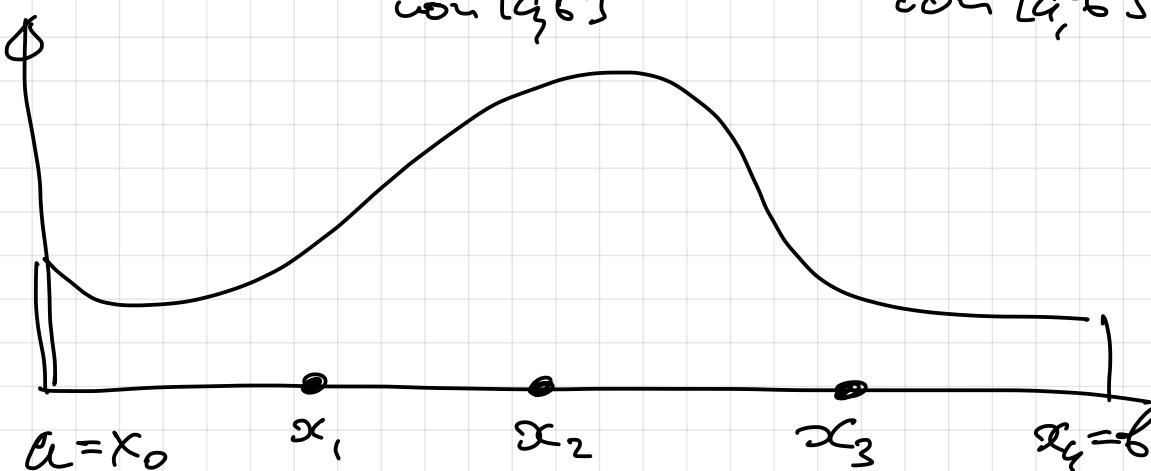
$$\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$$

Weshalb man Differenzieren kann, wie kann man die Riemann-Integrale berechnen?

$$\int_a^b f(x) dx = \sup_{\text{Z}} U_f(z) = \inf_{\text{Z}} O_f(z)$$

Zerlegung von $[a, b]$

Zerlegung von $[a, b]$

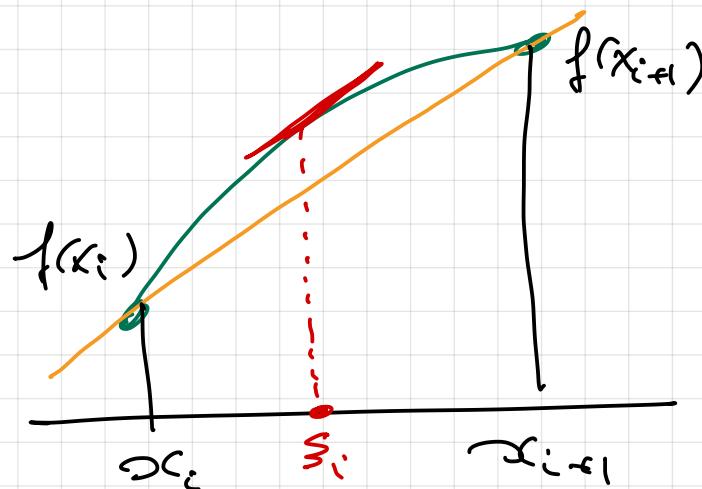


Angenommen, f ist stetig differenzierbar und wir interpretieren f' .

Nach dem Mittelwertsatz gilt

$$\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = f'(\xi_i)$$

für ein $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$



$$f'(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) = f(x_{i+1}) - f(x_i)$$

$$\underbrace{(\min_{[x_i, x_{i+1}]} f')}_{\Downarrow} \cdot (x_{i+1} - x_i) \leq f'(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) \leq \underbrace{(\max_{[x_i, x_{i+1}]} f')}_{\Downarrow} \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{(\min_{[x_i, x_{i+1}]} f')}_{\Downarrow} \cdot (x_{i+1} - x_i) \leq \sum_{i=0}^{n-1} (f(x_{i+1}) - f(x_i)) \leq \sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{(\max_{[x_i, x_{i+1}]} f')}_{\Downarrow} \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

$$\Downarrow U_{f'}(Z) \leq \sum_{i=0}^{n-1} (f(x_{i+1}) - f(x_i)) \leq O_{f'}(Z)$$

für $Z = \{x_0, \dots, x_n\}$

Hierbei ist

$$\sum_{i=0}^{n-1} (f(x_{i+1}) - f(x_i)) = f(x_n) - f(x_0) = f(b) - f(a)$$

$$n = 3$$

$$\cancel{(f(x_1) - f(x_0))} + \cancel{(f(x_2) - f(x_1))} + \cancel{(f(x_3) - f(x_2))} \\ = f(x_3) - f(x_0)$$



$$U_{f,1}(z) \leq f(b) - f(a) \leq O_{f,1}(z)$$

für jede Zerlegung

$$\Rightarrow \int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a).$$

φ

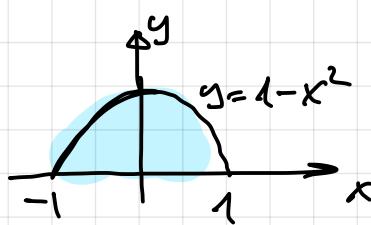
gilt für stetig differenzierbare Funktionen.

Und übrigens: stetige Funktionen sind nach Riemann integrierbar (das haben wir nicht gezeigt aber oben benutzt).

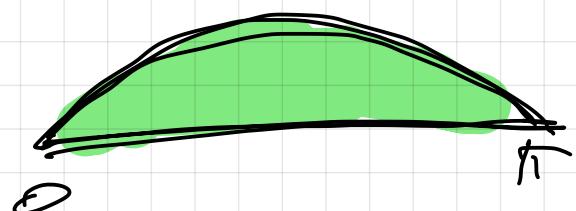
Bsp

$$\int_0^1 x \, dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^2\right)' \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 1^2 - \frac{1}{2} \cdot 0^2 = \frac{1}{2}.$$



$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 (1-x^2) \, dx \\ &= \int_{-1}^1 \left(x - \frac{1}{3}x^3\right)' \, dx \\ &= \left[x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{x=-1}^1 \\ &= \left(1 - \frac{1}{3}1^3\right) - \left((-1) - \frac{1}{3}(-1)^3\right) \\ &= 2\left(1 - \frac{1}{3}1^3\right) \\ &= \frac{4}{3}. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} & \int_0^\pi \sin x \, dx = \int_0^\pi (-\cos x)' \, dx \\ &= -\cos \pi - (-\cos 0) \\ &= 2. \end{aligned}$$

Def.

Ist $g' = f$ so nennt man
 g eine Stammfunktion von f .

Bem.

Ist g eine Stammfunktion von f ,
so ist $g + \text{const}$ auch eine
Stammfunktion von f .

Bei einer Funktion f auf
einem Intervall I nennt die
parametrische Familie aller Stammfunk-
tionen das unbestimmte Integral von f .

Bezeichnung $\int f(x) dx$.

Z.B.

$$\int x dx = \frac{1}{2} x^2 + C$$

+

Konstante

Woraus man die Formeln für Ableitungen
rückwärts liest, kriegt man
Formeln für Stammfunktionen.

$$(x^a)' = a \cdot x^{a-1}$$

$$\int x^a dx = \frac{1}{a+1} \cdot x^{a+1} + C$$

für $a \in \mathbb{R}, a \neq -1,$

$$\int x^{-1} dx = \ln x + C$$

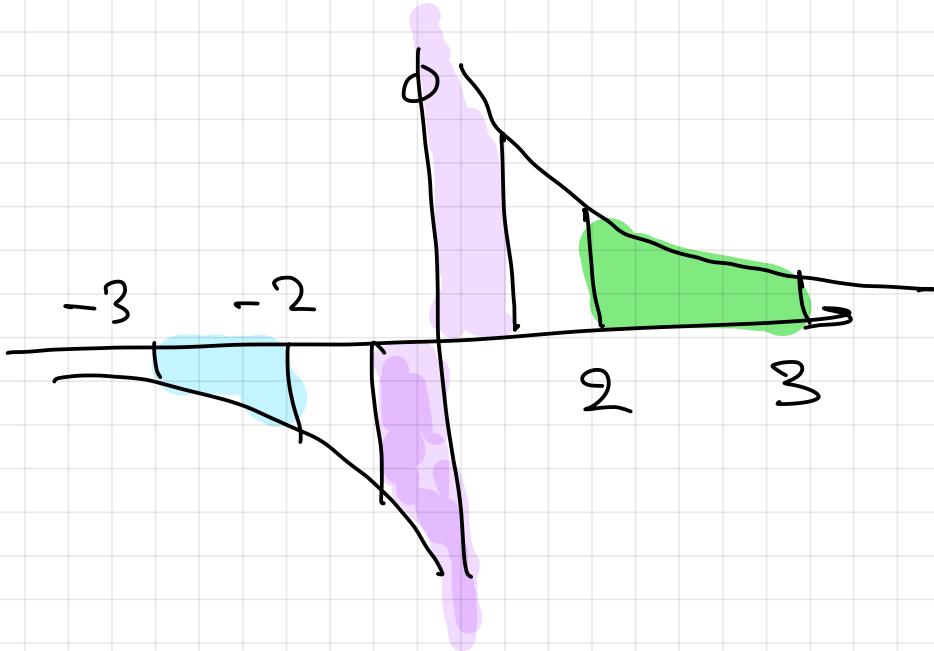
$$(\ln|x|)' = \begin{cases} (\ln x)' & \text{bei } x > 0 \\ (\ln(-x))' & \text{bei } x < 0. \end{cases}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (\ln(-x))' = \frac{1}{x}$$

Update:

$$\int x^{-1} dx = \ln|x| + C$$

↑
nur auf Intervallen gültig.



Bsp

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^2 |x| dx &= \int_{-1}^0 |x| dx + \int_0^2 |x| dx \\
 &= \int_{-1}^0 (-x) dx + \int_0^2 x dx \\
 &= \frac{1}{2} + 2 = 2,5.
 \end{aligned}$$

das nennt man "den Integrationsbereich
zerlegen!"

Bem.

Integral ist ein linearer Funktional, d.h.,

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \cdot \int_a^b g(x) dx$$

Bem

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = \frac{d}{dx} \int_a^x g'(t) dt$$

g Stammfunktion von f

$$= \frac{1}{dx} (g(x) - g(a)) = g'(x) = f(x).$$

⇒ Differenzieren ist das Gegenstück von Integrieren

Bsp.

$$\frac{d}{dx} \int_a^{x^2} f(t) dt = \frac{d}{dx} \int_a^{x^2} g'(t) dt$$

$$\boxed{g' = f}$$

$$= \frac{d}{dx} (g(x^2) - g(a))$$

$$= \frac{d}{dx} g(x^2) = 2 \cdot x \cdot g'(x^2)$$

$$= 2x f(x^2).$$

Bem

Man definiert

$$\int_a^b f(x) dx := - \int_b^a f(x) dx,$$

wenn $a > b$ ist.

Für $a = b$, setzen wir das Integral = 0.

Dies passt:

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$$