Agenda

+ Reihenfolge der Themen: Diff. Rechnung 2 vor Fourier-Reihen, Mehrdimensionales Integrieren entfällt aus
+ Es gibt spezielle Klassen von Funktionen, die man integrieren lernen kann (rational, trigonometrisch). Wir machen das in der Vorlesung nicht. Vgl. aber das Skript und die Übung.
- Wenn wir die Analysis auf der Geraden $\mathbb{R}$ verlassen, wo gehen wir hin?

Reihenfolge:

Kap. 6: Multivariates Differenzieren ✓

Kap. 5: Fourier-Reihen ✓

Kap. 7: Multivariates Integrieren ✗

$\boxed{\text{Kapitel 6}}$ Differentialrechnung 2.

Unser Umgebungsraum war bisher $\mathbb{R}$, eine Gerade. Was gibt es für Möglichkeiten, $\mathbb{R}$ durch was anderes auszutauschen, um dann ähnliche Fragen zu betrachten?

- $\mathbb{R} \rightsquigarrow \mathbb{C}$ (Funktionentheorie – Analysis auf $\mathbb{C}$)
- $\mathbb{R} \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ (Analysis in n reellen Variablen oder, anders formuliert, Analysis auf einem endlich dimensionalen Vektorraum über $\mathbb{R}$. Dafür brauchen wir MT-2.

Noch viel allgemeiner wäre:
- $\mathbb{R} \rightsquigarrow$ metrischer Raum
- $\mathbb{R} \rightsquigarrow$ topologischer Raum (mega krass allgemein)

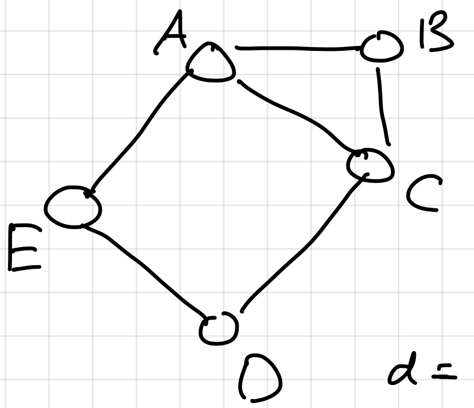
Def (Metrischer Raum) Sei X Menge und $d: X \times X \to \mathbb{R}$. Die Funktion d heißt <u>Metrik</u> auf X, wenn Folgendes gilt:

1. $d(x,y) \geq 0$ für alle $x,y \in X$
   mit $d(x,y) = 0 \iff x = y$.
2. $d(x,y) = d(y,x)$ für alle $x,y \in X$.
3. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ für alle $x,y,z \in X$
   (Die Dreiecksungleichung).

Eine Menge X, die mit einer Metrik d ausgestattet ist, nennt man einen <u>metrischen Raum</u>.

Bsp $(\mathbb{R}, d)$ mit $d(x,y) = |x-y|$.

Bsp.



$d(A,B) = d(B,C) = d(C,A) = 1$

$d(A,E) = d(D,E) = d(C,D) = 1$

$d(E,C) = d(A,D) = 2$

$d =$ Länge des kürzesten Weges zwischen den Eingabeknoten.

Hier ist der metrische Raum (X,d) mit $X = \{A,B,C,D,E\}$ endlich.

Die Analysis macht man auf unendlichen metrischen Räumen.

Folgen in metrischen Räumen

Def (Konvergenz einer Folge)

Sei (X,d) metrischer Raum und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge mit $x_n \in X$. Sei $a \in X$.
Wir sagen dass x_n für $n \to \infty$ gegen a konvergiert, wenn Folgendes gilt:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\ \exists N \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} : (n \geq N) \Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon.$$

Man kann es auch anders formulieren:

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, a) = 0.$$

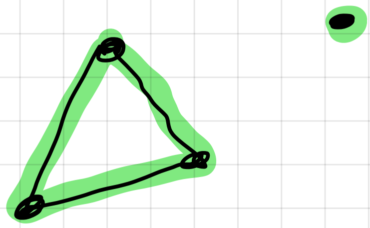
In $\mathbb{R}$:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\ \exists N \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} : (n \geq N) \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$$

Ab dieser Stelle könnten wir die Theorie der Folgen für metrische Räume entwickeln.
Wir könnten beschränkte Folgen einführen, zeigen, dass konvergente Folgen beschränkt sind.
Teile der Theorie der Folgen für $\mathbb{R}$ kann man verallgemeinern.

Konvergenz von Abbildungen und Stetigkeit für metrische Räume

Def (Häufungspunkt)



Sei (X,d) metrischer Raum und sei $A \subseteq X$.
Dann heißt $x^* \in X$ Häufungspunkt von A, wenn folgendes gilt:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\ \exists a \in A : 0 < d(a, x^*) < \varepsilon.$$

Def (Konvergenz & Stetigkeit)

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, sei $A \subseteq X$ und sei $f: A \to Y$. Sei $x^* \in X$ Häufungspunkt von A. Wir sagen:

$f(a) \to y^* \in Y$ bei $a \to x^*$,

wenn folgendes gilt:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \; \exists \delta \in \mathbb{R}_{>0} \; \forall a \in A :$$
$$d_X(a, x^*) < \delta \implies d_Y(f(a), y^*) < \varepsilon .$$

Bsp.

$$\lim_{a \to 0} \frac{\sin(a)}{a} = 1$$

$f(a) = \frac{\sin a}{a}$ $\qquad f: \underbrace{\mathbb{R} \setminus \{0\}}_{\substack{= \\ A}} \to \mathbb{R}$

$(X, d_X) = (\mathbb{R}, d_X)$ $\qquad d_X(a,b) = |a-b|$

$(Y, d_Y) = (\mathbb{R}, d_Y)$ $\qquad d_Y(a,b) = |a-b|$

$y^* = 1$

$f: A \to Y$ heißt stetig wenn für jede Folge $(a_n)_{n \in A}$, die gegen ein Element $a \in A$ konvergiert, die

Gleichung

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\lim_{n\to\infty} a_n)$$

erfüllt ist.

Abstand in $\mathbb{R}^n$:

$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ heißt die Euklidische Norm von $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

$d(x,y) = \|x-y\|$ heißt der Euklidische Abstand zwischen $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}$.

$(\mathbb{R}^n, d)$ ist metrischer Raum (vgl. IT-2).
Es ist sogar ein Euklidischer Raum mit dem Skalarprodukt:

$$\langle x, y\rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$ für

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \text{ und } y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Grenzwerte von Funktionen und Folgen sowie Stetigkeit von Funktionen betrachten wir in Bezug auf die Metrik $d(x,y) = \|x-y\|$.

Def. Eine Teilmenge A eines metrischen Raums X mit einer Metrik $d: X \times X \to \mathbb{R}$ heißt beschränkt, wenn Folgendes gilt:

$$\exists c \in X \; \exists r \in \mathbb{R}_{>0} \; \forall a \in A: \; d(c, a) \leq r.$$

Def Eine Teilmenge A eines metrischen Raums (X, d) heißt abgeschlossen, wenn der Grenzwert jeder konvergenten Folge von Elemente aus A ebenfalls ein Element von A ist.

Theorem (Weierstraß). Sei X eine nichtleere, beschränkte und abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$. Sei $f: X \to \mathbb{R}$ stetige Funktion. Dann erreicht f sowohl ein Maximum als auch ein Minimum auf X. D.h. es existieren $x_* \in X$ und $x^* \in X$ mit:

$$f(x_*) \leq f(x) \leq f(x^*)$$

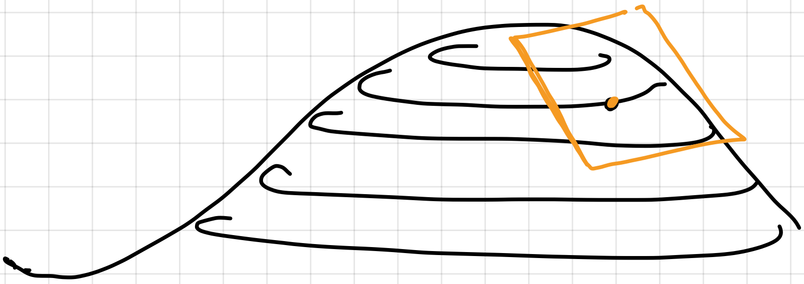
für alle $x \in X$.

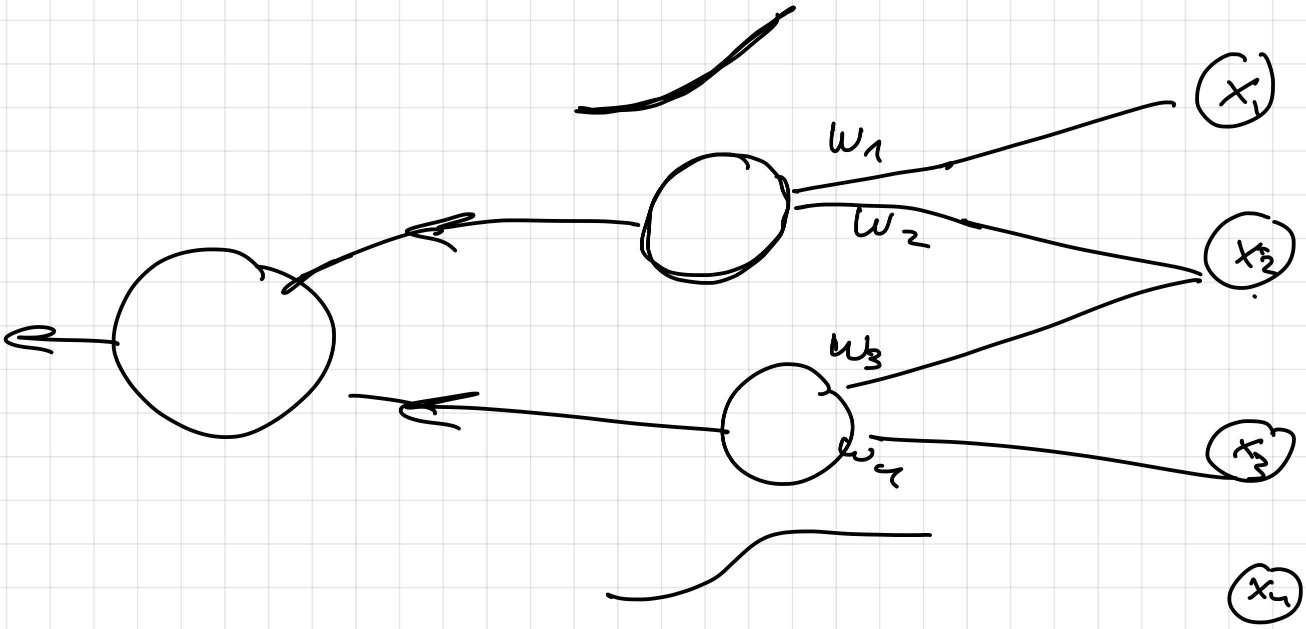
Multivariates Differenzieren

$$f(x, y) = e^{x+y} \sin(x - y)$$

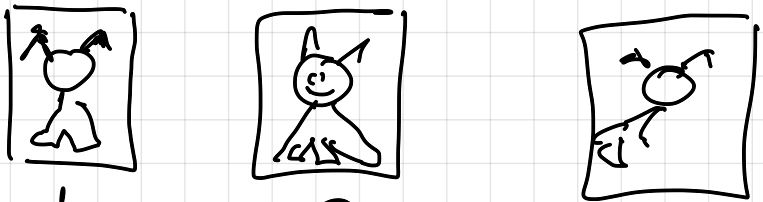
$$f(x_1, x_2) = e^{x_1 + x_2} \sin(x_1 - x_2)$$

Variablen können wir (x, y) nennen oder (x_1, x_2) – beides verbreitet.





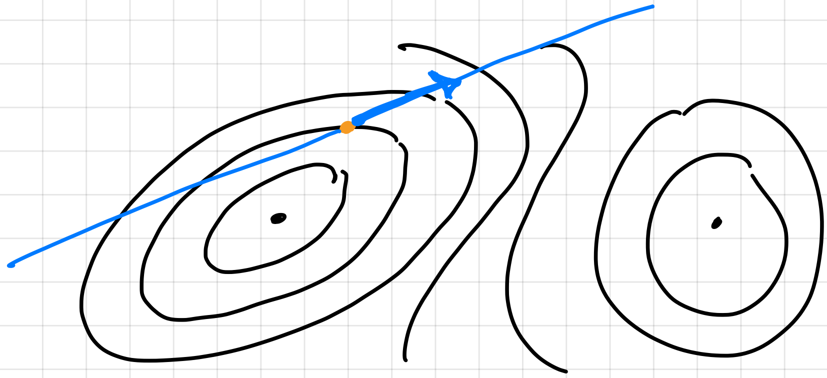
$$y = F(W, x)$$



1   0   1

$x(1)$	$x(2)$	$x(3)$		$x(N)$
$y(1) = 1$	$y(2) = 0$	$y(3) = 1$	.....	$y(N)$.

$$\min_{W} \sum_{i=1}^{N} \mathrm{Strafe}\left(F(W, x(i)), y(i)\right)$$



Sei $f(x_1,\dots,x_n)$ n-variate Funktion

Für einen Vektor $u \in \mathbb{R}^n$ definieren wir die Richtungsableitung von f bzgl. des Richtungsvektors u als

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x+tu)-f(x)}{t} =: (\partial_u f)(x)$$

Insbesondere nennt man die Richtungsableitungen bzgl. der Koordinatenrichtungen $e_1,\dots,e_n$ die partiellen Ableitungen.

Bezeichnung: $\partial_{e_i} f = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$

(Diese Ableitungen müssen nicht existieren. Z.B. kann eine Funktion partiell differenzierbar sein oder nicht.)

Den Vektor aller partiellen Ableitungen nennt man den Gradient von f:

Bezeichnung:
$$\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} f \end{bmatrix}.$$

Bsp. $$f(x,y) = e^{x+y} \sin(x-y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} e^{x+y} \sin(x-y)$$

$$\overset{\text{P.R.}}{=} \left(\frac{\partial}{\partial x} e^{x+y}\right) \cdot \sin(x-y) + e^{x+y} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} \sin(x-y)\right)$$

$$\overset{\text{K.R.}}{=} \frac{\partial}{\partial x}(x+y) \cdot e^{x+y} \cdot \sin(x-y) + e^{x+y} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(x-y) \cdot \cos(x-y)$$

$$= e^{x+y} \cdot (\sin(x-y) + \cos(x-y)).$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{x+y} \sin(x-y)\right)$$

$$= e^{x+y} \cdot \sin(x-y) + e^{x+y} \cdot (-\cos(x-y))$$

$$= e^{x+y} (\sin(x-y) - \cos(x-y))$$

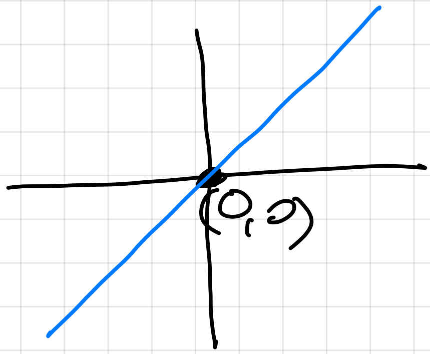
$$\nabla f = e^{x+y} \begin{bmatrix} \sin(x-y) + \cos(x-y) \\ \sin(x-y) - \cos(x-y) \end{bmatrix}$$

In dem regulären Fall erhält man alle Richtungsableitungen aus ∇f.

Bsp. (irregulärer Fall)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{bei } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{bei } x = y = 0 \end{cases}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} f\right)(0,0) = 0$$



$$\left(\frac{\partial}{\partial y} f\right)(0,0) = 0$$

$$\left(\partial_h f\right)(0,0) \stackrel{?}{=} \quad \text{für } h = (1,1)$$

$$\left(\partial_h f\right)(0,0) =$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(0+t\cdot 1, 0+t\cdot 1) - f(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\frac{2t^2}{t^2+t^2} - 0}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}$$

existiert nicht.

Bsp.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Was kommt hier als

$\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ und $\partial_h f$ bei $h = (1,1)$

raus?

Differenzierbarkeit

Man sagt, dass $R(h)$ die Ordnung $o(h)$, bei $h \to 0$ hat, wenn

$$\lim_{h \to 0} \frac{R(h)}{\| h \|} = 0$$

Hierbei ist R eine Funktion in n-Variablen.

Man schreibt auch $o(h)$ (klein o von h) für anonyme Funktion dieser Art.

Für eine Abbildung $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist die Ableitung $F'(x)$ als eine Matrix aus $\mathbb{R}^{m \times n}$ definiert mit:

$$F(x+h) = \underbrace{F(x)}_{} + \underbrace{F'(x) \cdot h}_{} + \underbrace{o(h)}_{}, \text{ für } h \to 0.$$

↑ Wert in x

↑ Lineare Korrektur in h

↑ Kleinere Terme

$F'(x)$ nennt man auch Jacobi-Matrix von F

Bezeichnung: $J_f(x)$

Bsp $F(x_1, x_2) = (x_1^2 - x_2^2,\ 2x_1x_2)$

$$F(x_1+h_1,\ x_2+h_2) = \left((x_1+h_1)^2 - (x_2+h_2)^2,\ 2(x_1+h_1)(x_2+h_2) \right)$$

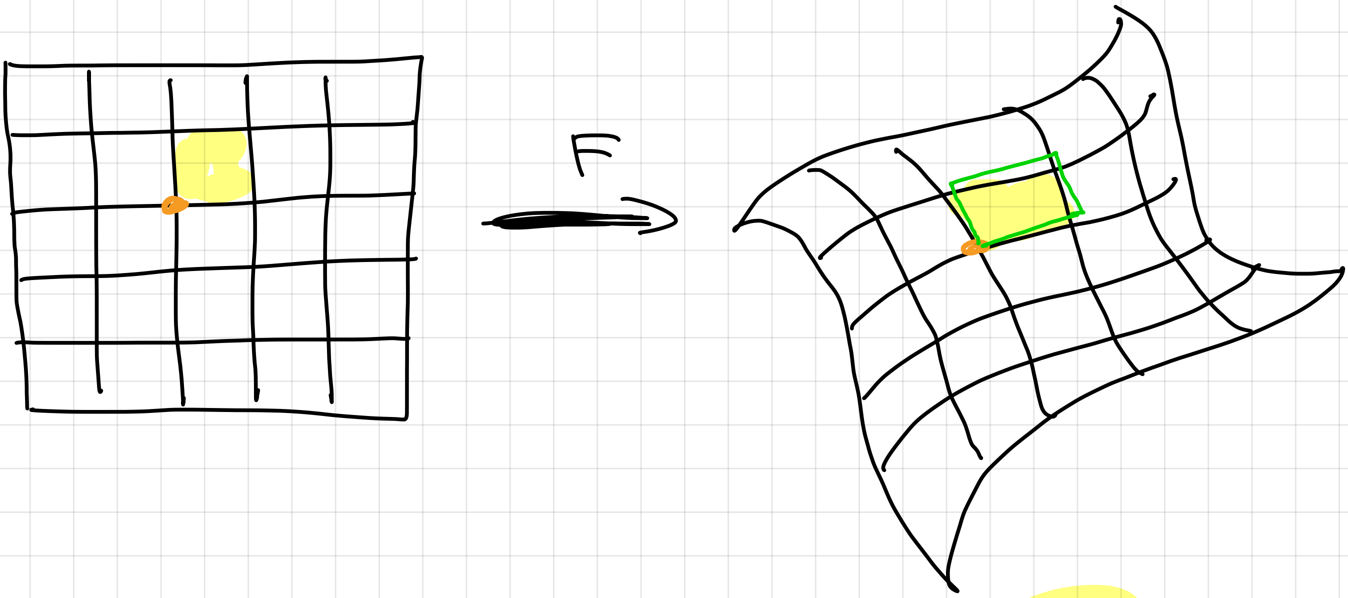
$$= \left(x_1^2 - x_2^2 + 2x_1h_1 - 2x_2h_2 + h_1^2 - h_2^2,\ 2x_1x_2 + 2x_2h_1 + 2x_1h_2 + 2h_1h_2 \right)$$

$$= F(x_1, x_2) + \underbrace{\begin{bmatrix} 2x_1 & -2x_2 \\ 2x_2 & 2x_1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \underbrace{(h_1^2 - h_2^2,\ 2h_1h_2)}_{R(h)}$$

↑ Das ist $F'(x)$, wenn $R(h) = o(h)$ ist, bei $h \to 0$.

$$\frac{\|R(h)\|}{\|h\|} = \frac{\sqrt{(h_1^2 - h_2^2)^2 + (2h_1h_2)^2}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \frac{\sqrt{h_1^4 - 2h_1^2h_2^2 + h_2^4 + 4h_1^2h_2^2}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}$$

$$= \frac{h_1^2 + h_2^2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \sqrt{h_1^2 + h_2^2} \xrightarrow[h_1, h_2 \to 0]{} 0$$



Wie berechnet man $F'(x) = J_F(x)$?

bei $F(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{bmatrix}$ ist

$$F'(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix}$$

Bsp.

$$F(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1^2 - x_2^2 \\ 2x_1x_2 \end{bmatrix}$$

$$f_1(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$$

$$f_2(x_1, x_2) = 2x_1x_2$$

$$F'(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} \end{matrix}$$

Wenn unsere Abbildung eine Funktion ist ($m=1$), etwa $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

dann ist $f'(x) = J_f(x) = (\nabla f)^T$

Bei $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist die Jacobi Matrix von f der transponierte Gradient von f.

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

$$f' = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$