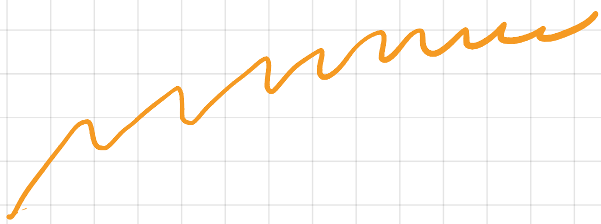
Bemerkung Man gibt oft eine äquivalente Definition des Grenzwertes, in der an der Stelle von $n_0 \in \mathbb{N}$ eine reellwertige Schranke $N \in \mathbb{R}$ benutzt wird:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\ \exists N \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}: (n \geq N) \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$$

für $a \in \mathbb{R}$ heißt, dass $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ ist.

Def Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reeller Zahlen heißt bestimmt divergent gegen ∞ (Schreibweisen: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \infty$ bzw. $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$) wenn Folgendes gilt:



$$\forall C \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}: (n \geq n_0) \Rightarrow x_n > C.$$

Jeder Wert (C) wird ab einem gewissen Index (n_0) durchgehend überstiegen.

Analog wird auch die bestimmte Divergenz gegen $-\infty$ eingeführt:

$$\forall C \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}: (n \geq n_0) \Rightarrow x_n < C.$$

Bemerkung Gibt es eine Diskrepanz zwischen Unbeschränktheit nach oben und der bestimmten Divergenz gegen ∞?

(x_n) nicht beschränkt nach oben:

$$\forall C \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N}: x_n > C.$$

$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ heißt

$$\forall C \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}: (n \geq n_0) \Rightarrow x_n > C.$$

$n(-1)^n$ unbeschränkt nach oben, aber nicht bestimmt divergent gegen ∞.

Bsp.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} = \Big(\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{\to e}\Big)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

e (vgl. letzte)

Abschnitt 2: Reihen

Def Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge reeller Zahlen. Dann nennt man den formalen Ausdruck

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ die Reihe mit den Gliedern a_k $(k\in\mathbb{N})$.

Dies ist eine Reihe, deren Glieder ab 1 indexiert sind. Man kann aber auch Reihen betrachten, deren Glieder ab einem anderen weit indexiert sind (z. B. ab 0).

Wir nennen $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ die n-te <u>Partialsumme</u> unserer Reihe.

Wenn $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent ist, so nennen wir die Reihe konvergent und nennen $s = \lim_{n \to \infty} s_n$ die Summe der Reihe. Schreibweise:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s.$$

Ansonsten spricht man von divergenten bzw. bestimmt divergenten Reihen, wenn die Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ divergent bzw. bestimmt divergent ist.

Bsp. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1.$ Wieso?

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots\cdots + \frac{1}{2^n}$$

$$2s_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots\cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$s_n = 2s_n - s_n = 1 - \frac{1}{2^n}$$

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1 - \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2^n} = 1 - 0 = 1.$$

Bemerkung Sei $q \in \mathbb{R}$. Dann nennt man $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ die geometrische Reihe. Diese Reihe ist genau dann konvergent, wenn $|q| < 1$ ist.

Was ist $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ bei $|q|<1$.

Etwas informell (man kann es formalisieren):

$$s = 1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + \dots$$
$$qs = q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5 + \dots$$

$$s - qs = 1$$
$$\Rightarrow s = \frac{1}{1-q}.$$

$$s_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Proposition (Notwendige Bedingung für die Konvergenz einer Reihe)

Ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent, dann gilt $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

(Man nennt Folgen, die gegen 0 konvergieren, Nullfolgen).

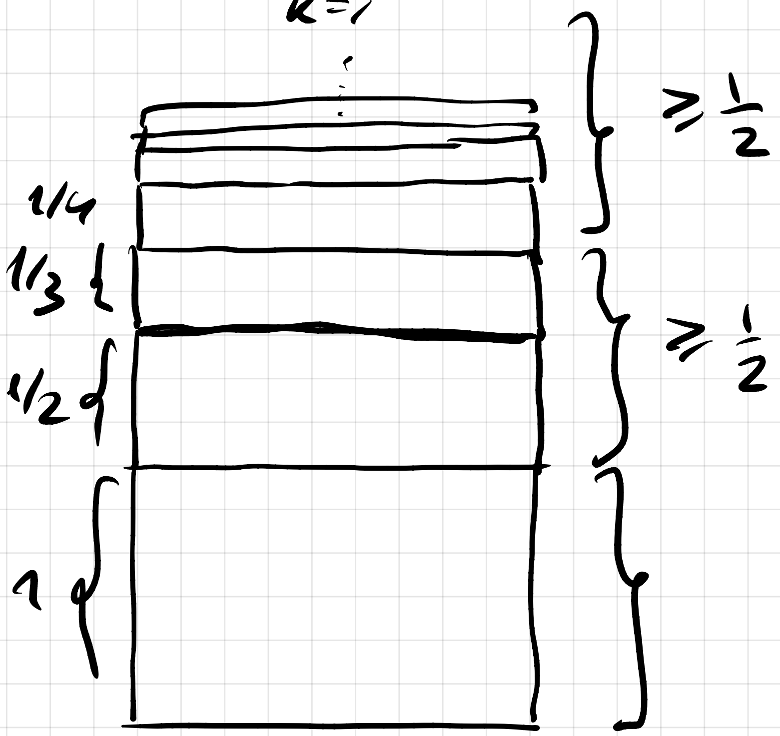
Beweis: Wenn $s_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ bei $n \to \infty$ gegen ein $s \in \mathbb{R}$ konvergiert, so gilt

$a_n = s_n - s_{n-1}$. Dann ist $\lim_{n\to\infty} a_n$
$= \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0.$ $\square$

Bsp Die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$

Obwohl $\frac{1}{n}$ gegen 0 geht

ist $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$.



$$H_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \Theta(\ln n).$$

Theorem (Majorantenkriterium)

Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen mit $a_n \in \mathbb{R}$, $b_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $|a_n| \leq b_n$, so folgt aus der Konvergenz $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ die Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Darüber hinaus gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

Bsp. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k} = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{k^k}}_{\leq \frac{1}{2^k}} \leq 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \infty.$

Bsp $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k$ nicht konvergent, da $(-1)^n$ keine Nullfolge ist.

$s_1 = -1$

$s_2 = -1 + 1 = 0$

$s_3 = -1 + 1 - 1 = -1$

$s_4 = 0$

$s_5 = -1$

Bsp $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ ist konvergent, denn

$$0 \leq \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^k} \qquad (k \geq 4)$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \underbrace{\sum_{k=4}^{\infty} \frac{1}{2^k}}$$

wir wissen bereits dass das ein endlicher Wert ist.

Theorem Existiert für eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mit nichtnegativen Gliedern eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ mit nichtnegativen Gliedern, welche $a_k \geq b_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ erfüllt und divergent ist, so ist auch $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent.

Bsp. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = \infty$, denn $\frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{k}$ und

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$ (vgl. die vorige Vorlesung).

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ist eine sogenannte Minorante für $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Theorem (Zweierpotenzen-Bedingung)

Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge nichtnegativer Zahlen. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ genau dann, wenn

die Reihe $\sum_{\ell=0}^{\infty} 2^{\ell} a_{2^{\ell}}$ konvergiert.

Beweisidee:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + (a_2+a_3) + (a_4+a_5+a_6+a_7) + \dots$$

$$= \sum_{\ell=0}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{k=2^{\ell}}^{2^{\ell+1}-1} a_k \right)}$$

$$\sum_{k=2^{\ell}}^{2^{\ell+1}-1} a_k \leq 2^{\ell} a_{2^{\ell}}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum_{\ell=0}^{\infty} 2^{\ell} a_{2^{\ell}}$$

D.h. wenn $\sum_{\ell=0}^{\infty} 2^\ell a_{2^\ell}$ konvergiert, dann konvergiert auch $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

<u>Umgekehrt:</u>

$$\sum_{k=2^\ell}^{2^{\ell+1}-1} a_k \geq 2^\ell a_{2^{\ell+1}}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \geq \underbrace{\sum_{\ell=0}^{\infty} 2^\ell a_{2^{\ell+1}}} = \frac{1}{2}\left(\left(\sum_{\ell=0}^{\infty} 2^\ell a_{2^\ell}\right) - a_1\right)$$

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} 2^\ell a_{2^{\ell+1}} = \frac{1}{2} \sum_{\ell=0}^{\infty} 2^{\ell+1} a_{2^{\ell+1}} = \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^{\infty} 2^\ell a_{2^\ell} = \frac{1}{2}\left(\left(\sum_{\ell=0}^{\infty} 2^\ell a_{2^\ell}\right) - a_1\right)$$

D.h. wenn $\sum_{\ell=0}^{\infty} 2^\ell a_{2^\ell}$ divergent ist (in diesem Fall, Wert $=\infty$), so ist auch $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent. $\square$

Cormen, Leiserson, Rivest, Stein:
Algorithmen eine Einführung.

Quicksort. $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \Theta(\log n)$

das Muster

Bsp.

- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$ (lässt sich aus dem vorigen Theorem herleiten)
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \ln k} = \infty$ (lässt sich aus dem vorigen Theorem herleiten)
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k (\ln k)^2} < \infty$ (lässt sich aus dem vorigen Theorem herleiten)
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$ (lässt sich aus dem vorigen Theorem herleiten)

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

$$s \longmapsto \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$$ Riemannsche ζ-Funktion.

Theorem (Wurzelkriterium)

Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine Reihe, für welche der Grenzwert $q := \lim_{k \to \infty} |a_k|^{\frac{1}{k}}$ existiert. ($q \in [0, +\infty]$). Dann gilt:

- $0 \leq q < 1 \implies$ die Reihe ist konvergent
- $1 < q \leq \infty \implies$ die Reihe ist divergent
- $q = 1 \implies$ keine Aussage möglich.

Beweisideen: wir beschränken uns auf den Fall

$a_k \geq 0$.

Wir betrachten den Fall $0 \leq q < 1$.

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\ \exists k_0 \in \mathbb{N}\ \forall k \in \mathbb{N} : (k \geq k_0) \Rightarrow \underbrace{|a_k^{1/k} - q| < \varepsilon}$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{q - \varepsilon < a_k^{1/k} < q + \varepsilon}$$

$$\Downarrow$$

$$a_k < (q+\varepsilon)^k$$

Wir können ein $\varepsilon > 0$ so fixieren, dass $q + \varepsilon < 1$ gilt. Wir legen dann ein entsprechendes k_0 fest und erhalten:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{k_0 - 1} a_k + \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$$

$$\leq \sum_{k=1}^{k_0 - 1} a_k + \underbrace{\sum_{k=k_0}^{\infty} (q+\varepsilon)^k}_{\text{endlicher Wert}}$$

$$= \frac{(q+\varepsilon)^{k_0}}{1 - (q+\varepsilon)}$$