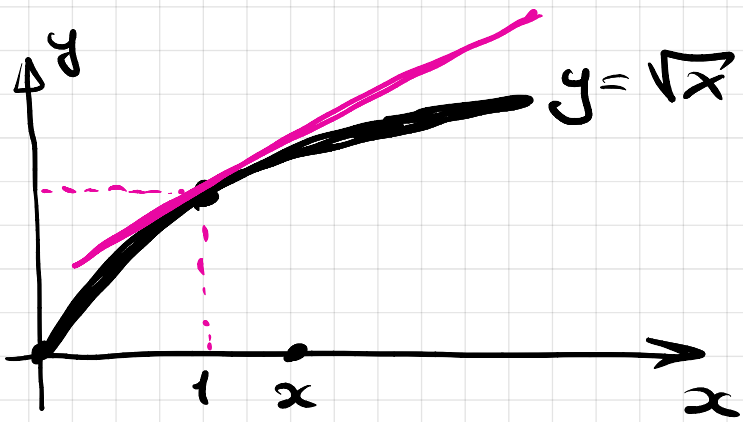
Def Sei $f: X \to \mathbb{R}$ Funktion auf $X \subseteq \mathbb{R}$ und sei a Häufungspunkt von X.
Wir sagen, dass $f(x)$ gegen ein $y \in \mathbb{R}$ konvergiert, bei $x \to a$, wenn Folgendes erfüllt ist
(Schreibweise: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = y$)

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \exists \delta \in \mathbb{R}_{>0} \forall x \in X: 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-y| < \varepsilon.$$

Bemerkung Die Theorie der Grenzwerte von reellwertigen Funktionen ist in vielen Stellen analog zur Theorie der Grenzwerte von Folgen.
Es gelten analoge Rechenregeln usw.

Bsp.



$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{1}}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x-1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{\sqrt{1}+1} = \frac{1}{2}$$

Def. Sei $f: X \to \mathbb{R}$ Funktion auf $X \subseteq \mathbb{R}$ und sei $a \in X$ Häufungspunkt von X.
Dann heißt f stetig in a, wenn

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \text{ gilt.}$$

Mit anderen Worten: die Reihenfolge des Grenzwertübergangs und der Auswertung lassen sich vertauschen.

Wir sagen, f ist stetig (auf X), wenn alle $a \in X$ Häufungspunkte sind und f in jedem $a \in X$ stetig ist.

Bsp.

$$\left.\begin{array}{l} \lfloor x \rfloor \\ \lceil x \rceil \end{array}\right\} \text{ keine stetigen Funktionen (unstetig in jedem } a \in \mathbb{Z}\text{).}$$

$\operatorname{sign} x$ ist nicht stetig in 0.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{bei } x \neq 0 \\ 0 & \text{bei } x = 0 \end{cases} \quad \text{nicht stetig in } 0.$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & \text{bei } x \neq 0 \\ 0, & \text{bei } x = 0 \end{cases} \quad \text{nicht stetig.}$$

Wie kann man die Unstetigkeit einer Funktion nachweisen?

Def Sei $X \subseteq \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$ Wert mit der folgenden Eigenschaft:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \; \exists x \in X : a - \varepsilon < x < a.$$

Mit anderen Worten: a ist Häufungspunkt von $X \cap (-\infty, a]$.

Wir definieren den linksseitigen Grenzwert

$$\lim_{x \to a-} f(x) = \lim_{x \uparrow a} f(x)$$ als den Wert $y \in \mathbb{R}$

mit der folgenden Eigenschaft:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\ \exists \delta \in \mathbb{R}_{>0}\ \forall x \in X: a-\delta < x < a \Rightarrow |f(x) - y| < \varepsilon.$$

Der rechtsseitige Grenzwert wird analog eingeführt:

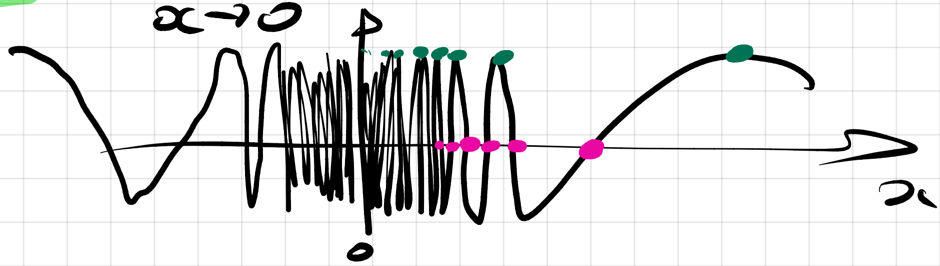
$$\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \downarrow a} f(x)$$

Bemerkung

Wenn $\lim_{x \to a} f(x) \in \mathbb{R}$ existiert, so

gilt $$\underbrace{\lim_{x \uparrow a} f(x) = \lim_{x \downarrow a} f(x)}_{\text{Notwendige Bedingung.}} = \lim_{x \to a} f(x)$$

Bsp $\lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$ existiert nicht



$$\lim_{k \to \infty} \sin \frac{1}{1/\pi k} = \lim_{k \to \infty} 0 = 0$$

$x = \frac{1}{\pi k}$ ist beliebig nah an 0, bei steigendem $k \in \mathbb{N}$.

$$\lim_{k\to\infty} \sin \frac{1}{1/(\frac{\pi}{2}+2\pi k)} = \lim_{k\to\infty} \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)}_{=1} = 1$$

$x = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi k}$ ist beliebig nah an 0, bei steigendem $k \in \mathbb{N}$.

Hier haben wir zwei Folgen

x_k' und x_k'' mit

$x_k' \neq a \neq x_k''$ mit

$\lim\limits_{k\to\infty} x_k' = \lim\limits_{k\to\infty} x_k''$ und

$\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k') \neq \lim\limits_{k\to\infty} f(x_k'')$.

Das ist ein Zertifikat der Nichtkonvergenz von $f(x)$ bei $x \to a$.

Aufgabe Definieren Sie die bestimmte Divergenz

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$

oder schauen Sie im Skript nach, wie sie definiert ist.

Welche Ihnen bekannte Funktionen sind stetig?

Welche qualitative Konsequenzen in Bezug auf konkrete Rechenaufgaben bringt die Stetigkeit?

Stetige Funktionen:

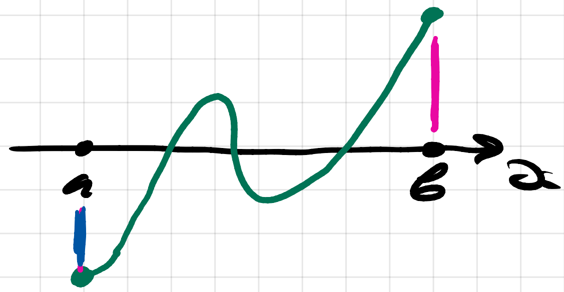
- a^x (mit $a \in \mathbb{R}_{>0}$) stetig in x
- $\log_a x$ stetig in $x > 0$ ($a \in \mathbb{R}_{>0}$)
- $\cos x$, $\sin x$ stetig in $x \in \mathbb{R}$
- x^a mit $a \in \mathbb{R}$ stetig in $x > 0$
- x^a mit $a \in \mathbb{R}_{>0}$ stetig in $x \geq 0$.

Summen, Produkte, Quotienten von stetigen Funktionen sind stetig auf ihren natürlichen Definitionsbereichen.

Theorem (Zwischenwertsatz)

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktion ($a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$) mit $f(a) \cdot f(b) < 0$

(die Vorzeichen der Werte von f in den Endpunkten des Intervalls $[a,b]$ sind unterschiedlich).



Dann existiert ein $\xi \in \mathbb{R}$ mit $a < \xi < b$ mit $f(\xi) = 0$. D.h. die Gleichung $f(x) = 0$ hat eine Lösung im offenen Intervall (a,b).

Beweisidee: Wir machen eine Art binäre Suche

Annahme: $f(a)\cdot f(b)\leq 0$, f stetig auf $[a,b]$

Gesucht: Approximationen einer Nullstelle $\xi\in[a,b]$ von f

```
l_1 := a, r_1 := b, k := 0
while True:
    ▷ Invariante: es gibt eine Nullstelle zwischen l_k und r_k
    m_k := 1/2 (l_k + r_k)   ▷ Mittelpunkt der Strecke [l_k, r_k]
    if f(l_k) · f(m_k) ≤ 0:
        ▷ rechts zur Mitte, links unverändert
        l_{k+1} := l_k
        r_{k+1} := m_k
    else:   ▷ f(m_k) · f(r_k) ≤ 0
        ▷ links zur Mitte, rechts unverändert
        l_{k+1} := m_k
        r_{k+1} := r_k
    k := k+1   ▷ nächste Runde ...
```

Dieser iterative Prozess generiert Folgen $(l_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$ zwischen deren Gliedern wir eine Nullstelle von f einfangen.

In der Praxis würde man den unendlichen Prozess abbrechen, sobald $r_k - l_k$ klein genug ist: d.h. $\boxed{\text{While True}}$ würde man durch $\boxed{\text{While } r_k - l_k \geq \delta}$ ersetzen, mit $\delta\in\mathbb{R}_{>0}$.

$(l_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist nach der Konstruktion eine monoton steigende, beschränkte und somit eine konvergente Folge.

$(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine monoton fallende, beschränkte und somit eine konvergente Folge.

Da sich der Abstand zwischen l_k und r_k mit jeder Iteration halbiert gilt $r_k - l_k = \frac{b-a}{2^k}$. $\Longrightarrow$

$$0 = \lim_{k\to\infty} \frac{b-a}{2^k} = \lim_{k\to\infty} (b_k - a_k) = \lim_{k\to\infty} b_k - \lim_{k\to\infty} a_k$$

$\Longrightarrow$ Wir können ξ als $\xi := \lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k$

einführen. Warum ist $f(\xi) = 0$?

$f(l_k)\cdot f(r_k) \leq 0$ nach der Konstruktion

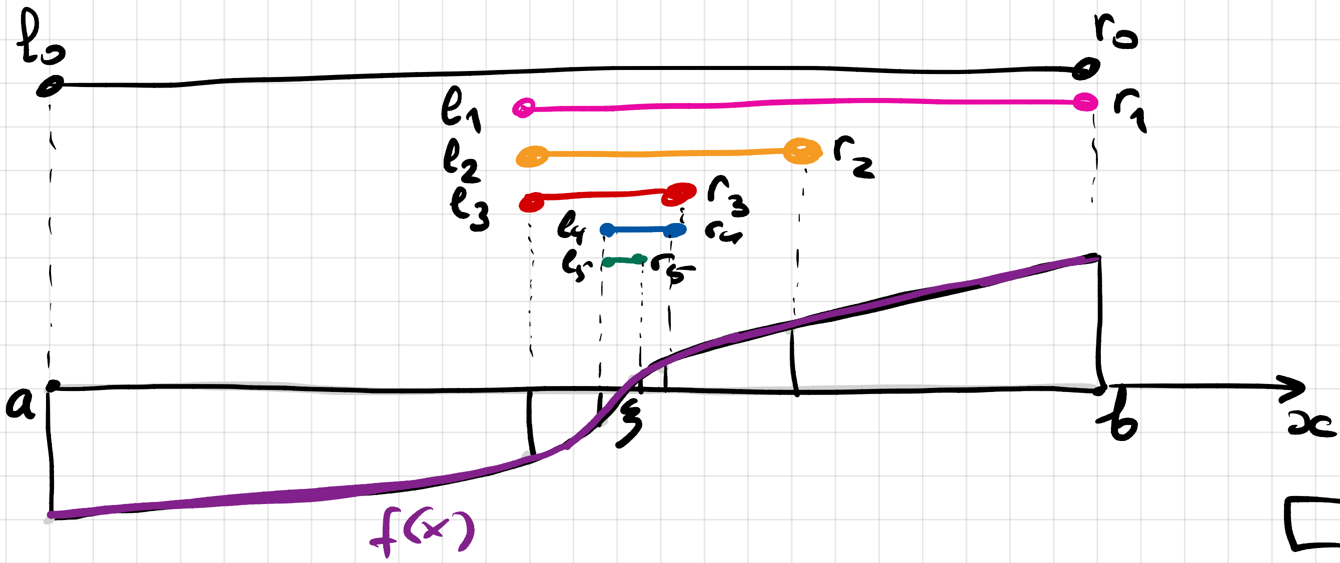
$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} f(l_k)\, f(r_k) \leq 0$ (Grenzwertübergang in der Ungleichung)

$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} f(l_k) \lim_{k\to\infty} f(r_k) \leq 0$ (Produktregel)

$\Rightarrow f(\lim_{k\to\infty} l_k)\, f(\lim_{k\to\infty} r_k) \leq 0$ (wegen der Stetigkeit von f)

$\Rightarrow f(\xi)^2 \leq 0$

$\Rightarrow f(\xi) = 0.$



$\square$

Satz von Weierstraß

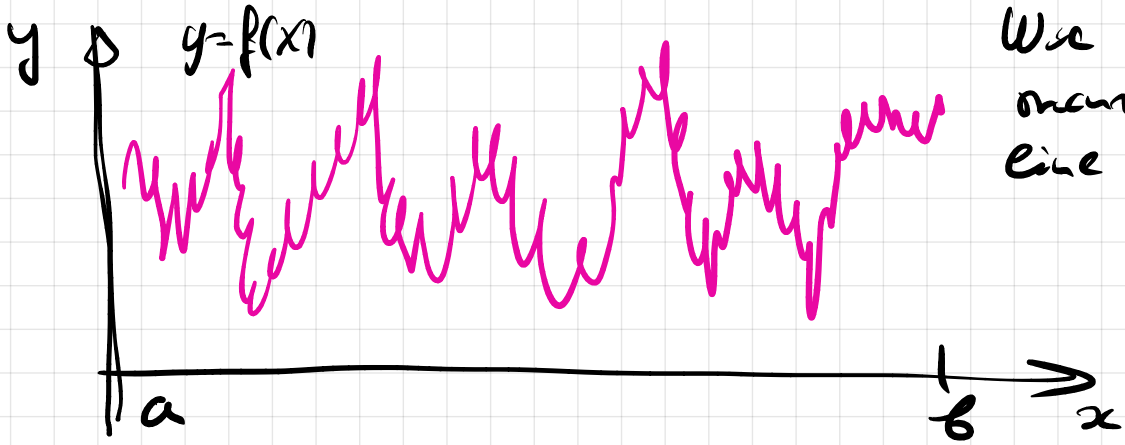
Es gibt Funktionen, die kein Minimum erreichen, selbst dann, wenn sie nach unten beschränkt sind, z. B. $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{x}$.
Minimierungsaufgaben für solche Funktionen sind irregulär, weil das Minimum nicht erreicht wird, so dass man keine optimale Lösung hat. Es ist daher empfehlenswert, eine Bedingung zu formulieren, unter welcher die Existenz von Minimum garantiert werden kann.

Nach Weierstraß reichen die Kompaktheit des Definitionsbereiches und die Stetigkeit der Funktion aus.

Theorem (Weierstraß) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig.
Dann erreicht f sowohl ein Minimum als auch ein Maximum auf $[a, b]$. D.h., es existieren $x_* \in [a, b]$ und $x^* \in [a, b]$

$$\text{mit} \quad f(x_*) \leq f(x) \leq f(x^*)$$

für alle $x \in [a, b]$.



Wie optimiert man so eine Funktion?

Bemerkungen. Definitionen von

$$\lim_{x \to \infty} f(x)$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x)$$

Sei $f: X \to \mathbb{R}$ Funktion auf einer Menge $X \subseteq \mathbb{R}$.

X heißt nach oben beschränkt, wenn

$$\exists C \in \mathbb{R} \; \forall x \in X : x \leq C.$$

Ist X nicht nach oben beschränkt, so definieren wir

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = y \in \mathbb{R}$$

auf die folgende Weise:

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \, \exists N \in \mathbb{R} \, \forall x \in X: x \geq N \Rightarrow |f(x) - y| < \varepsilon.$

Bem

Wir haben die folgenden Informationen nach:
Die inversen trigonometrischen Funktion (arctan, arccos, arcsin) sind stetig auf ihren natürlichen Definitionsbereichen.

Kapitel 3: Differentialrechnung I.

1 Ableitung

Def Sei $f: X \to \mathbb{R}$ Funktion auf $X \subseteq \mathbb{R}$ und sei $a \in X$ Häufungspunkt von X. Dann definieren wir die Ableitung $f'(a)$ von f in a als den Grenzwert

$$f'(a) := \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Wenn der Grenzwert als ein Wert in $\mathbb{R}$ existiert, so nennt man f differenzierbar in a.
Ist jeder Punkt von X ein Häufungspunkt von X und ist f in jedem $a \in X$ differenzierbar, so nennt man f differenzierbar (auf X).

Bemerkung Äquivalente Formel

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$