Agenda: Wurzelkriterium ✓

Quotientenkriterium ✓

Alternierende Reihen ✓

Absolute Konvergenz ✓

Vertauschen der Glieder ✓

Cauchy-Produkt ✓

Anwendungen in der Wahrscheinlichkeitstheorie ✓

Bsp. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k + 3^k}$ konvergiert.

Eine Begründung wäre wie folgt:

$$\frac{1}{2^k+3^k} \leq \frac{1}{3^k} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k+3^k} \leq \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k}}_{\substack{\text{konvergente} \\ \text{geometrische Reihe.}}} < \infty$$

Alternativ können wir auch das Wurzelkriterium nutzen:

$$\left(\frac{1}{2^k+3^k}\right)^{1/k} = \frac{1}{(2^k+3^k)^{1/k}} = \frac{1}{(3^k)^{1/k}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^k+1\right)^{1/k}}$$

$$= \frac{1}{3\cdot\left(\left(\frac{2}{3}\right)^k+1\right)^{1/k}} \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{1}{3\cdot(0+1)^0} = \frac{1}{3}$$

Theorem (Quotientenkriterium) Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine Reihe, für welche der Grenzwert

$$q := \lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}$$

existiert. Dann gilt:

- $q < 1 \implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent.
- $q > 1 \implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent
- $q = 1 \implies$ keine Aussage möglich.

Beweisidee: Einfachheit halber betrachten wir nur den Fall $a_k \geq 0$ (für alle $k \in \mathbb{N}$) und zeigen die Konvergenz im Fall $q < 1$. Nach der Grenzwertdefinition:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\ \exists k_0 \in \mathbb{N}\ \forall k \in \mathbb{N}: (k \geq k_0) \Rightarrow \left|\frac{a_{k+1}}{a_k} - q\right| < \varepsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$|a_{k+1} - a_k q| < \varepsilon a_k$$

$$\Downarrow$$

$$a_{k+1} < a_k q + \varepsilon a_k$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{a_{k+1} < a_k (q + \varepsilon).}$$

Wir fixieren $\varepsilon > 0$ so klein, dass $q + \varepsilon < 1$ gilt. Nun schauen wir uns an, wie wir die Glieder a_k mit $k \geq k_0$ abschätzen können:

$$a_{k_0}$$

$$a_{k_0+1} \leq a_{k_0} \cdot (q+\varepsilon)$$

$$a_{k_0+2} \leq a_{k_0+1} \cdot (q+\varepsilon) \leq a_{k_0} \cdot (q+\varepsilon)^2$$

$$a_{k_0+3} \leq a_{k_0+2} \cdot (q+\varepsilon) \leq a_{k_0} \cdot (q+\varepsilon)^3$$

$$\vdots$$

Für ein beliebiges k mit $k \geq k_0$:

$$a_k \leq a_{k_0} \cdot \underbrace{(q+\varepsilon)^{k-k_0}}$$

Das ist das Glied einer konvergenten geometrischen Reihe.

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{k_0-1} a_k + \underbrace{\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k}$$

$$\leq \sum_{k=k_0}^{\infty} a_{k_0} \cdot (q+\varepsilon)^{k-k_0}$$

$$= \underbrace{a_{k_0} \cdot \frac{1}{1-(q+\varepsilon)}}$$

endlicher Wert, denn $0 \leq q+\varepsilon < 1$.

$\square$

Bsp $\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2^k+3^k}}_{a_k}$ Wir nutzen das Quotientenkrit. um die Konvergenz nachzuweisen.

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{2^k+3^k}{2^{k+1}+3^{k+1}} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^k+1}{2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^k+3} \xrightarrow{k\to\infty} \underbrace{\frac{0+1}{2\cdot 0+3}}_{\frac{1}{3}}$$

$\Downarrow$

Die Reihe konvergiert.

Bsp. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergent, aber das Quotientenkriterium ist nicht fein genug, um das zu erkennen.

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{k}{k+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{k}} \xrightarrow[k\to\infty]{} 1.$$

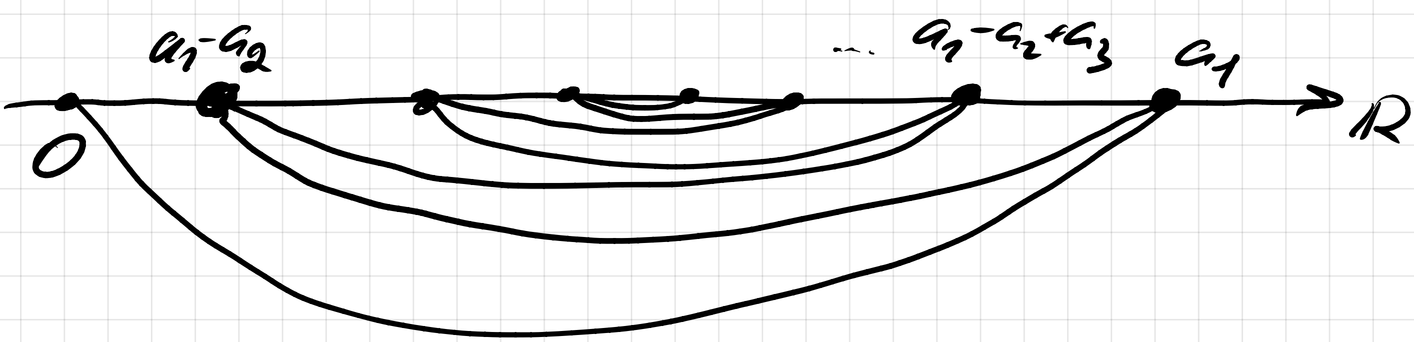
Genauso bei $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. Die Reihe ist konvergent, aber aus dem Quotientenkriterium sieht man es nicht, denn

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{k^2}{(k+1)^2} \xrightarrow[k\to\infty]{} 1.$$

Def. Reihen der Formen $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$ mit $a_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ heißen alternierend.

Theorem (Leibniz-Kriterium) Ist $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge nichtnegativer Zahlen, so ist die alternierende Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$ konvergent.

Beweisidee:



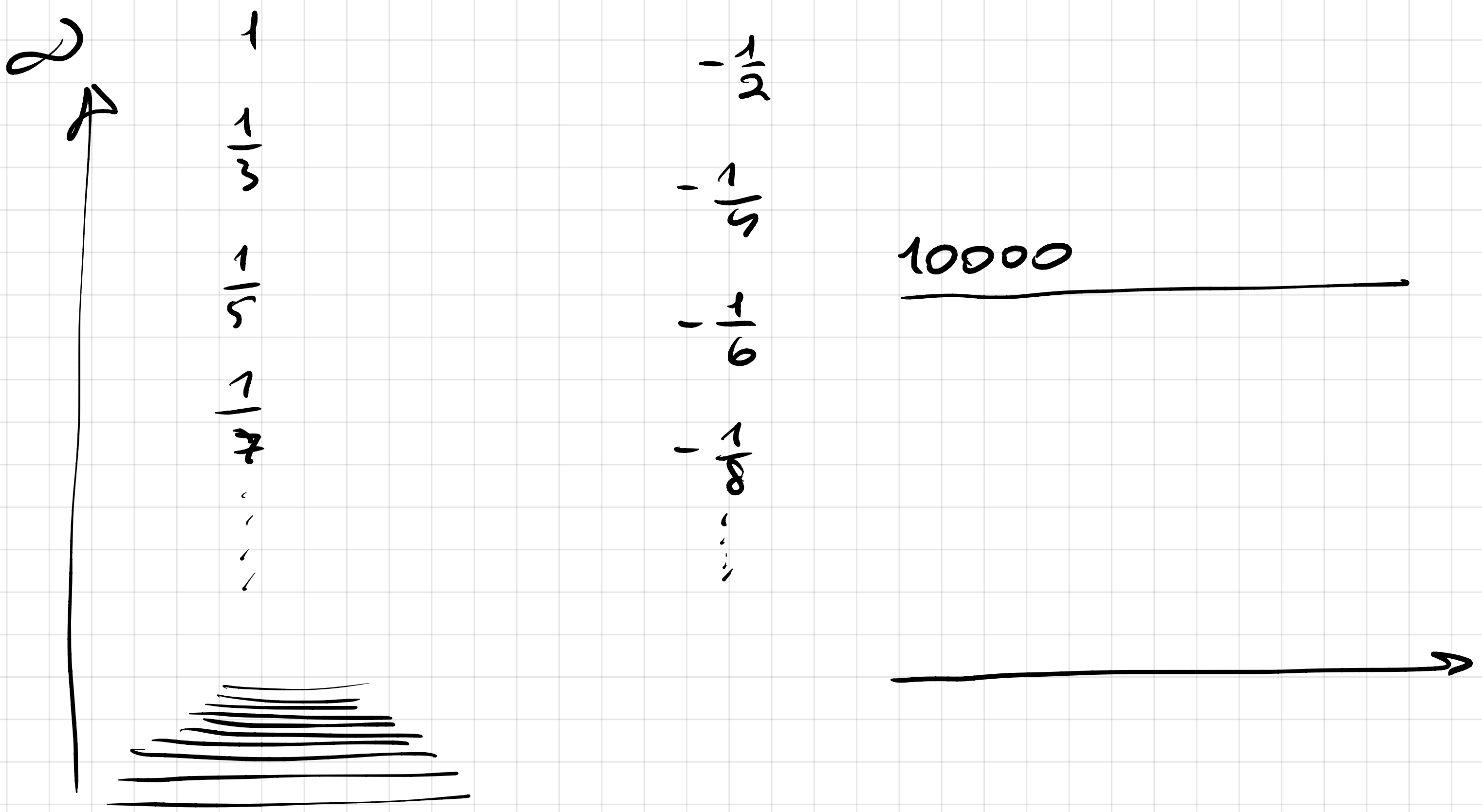
$$\begin{array}{ccc}
a_1 - a_2 & \leq & a_1 \\
\wedge | & & \vee | \\
a_1 - a_2 + a_3 - a_4 & \leq & a_1 - a_2 + a_3 \\
\wedge | & & \vee | \\
a_1 - a_2 + a_3 - a_4 & \leq & a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 \\
\wedge | & & \vee | \\
a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 & \leq & a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_7
\end{array}$$

Für $S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_k$

gilt $|S_{2n} - S_{2n-1}| \le a_{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ $\square$

Bsp $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$ konvergiert nach dem Leibniz-Kriterium, denn $\frac{1}{k}$ bildet eine nicht-negative monoton fallende Nullfolge.

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = \ln 2$$ (wir wissen noch nicht wieso, aber wir kommen noch dazu)



Definition. Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nennt man <u>absolut konvergent</u>, wenn die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

Bemerkung Absolute Konvergenz ist eine stärkere Eigenschaft als die Konvergenz:

absolute Konvergenz $\Longrightarrow$ Konvergenz,

aber im Allgemeinen nicht umgekehrt.

Bsp $\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{k}{2^k}}_{= a_k}$ konvergiert nach dem Quotientenkriterium

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{(k+1)2^k}{k \cdot 2^{k+1}} = \frac{k+1}{k} \cdot \frac{1}{2} = \left(1+\frac{1}{k}\right)\cdot\frac{1}{2} \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{1}{2}$$

X = die Runde in der man das erste mal die Zahl geworfen hat beim sukzessiven Werfen einer fairen Münze.

Wir sind also interessiert an $E(X)$, dem Erwartungswert von X.

Wert	Seine Wahrscheinlichkeit
$X=1$	$1/2$
$X=2$	$1/4$
$X=3$	$1/8$
$\vdots$	
$X=k$	$\frac{1}{2^k}$

$$\Rightarrow E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X=k)\cdot k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}.$$

Wir wollen ein Produkt von zwei Reihen als Reihe einführen.

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4
a_0	$a_0 b_0$	$a_0 b_1$	$a_0 b_2$	$a_0 b_3$	$a_0 b_4$
a_1	$a_1 b_0$	$a_1 b_1$	$a_1 b_2$	$a_1 b_3$	
a_2	$a_2 b_0$	$a_2 b_1$	$a_2 b_2$	$a_2 b_3$	
a_3	$a_3 b_0$	$a_3 b_1$	$a_3 b_2$	$a_3 b_3$	
a_4	$a_4 b_0$	$a_4 b_1$	$a_4 b_1$	$a_4 b_3$	

Def Das Cauchy-Produkt von Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ ist die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \quad \text{mit}$$

$$c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}.$$

Theorem (Cauchy ist cool) Sind Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ absolut konvergent, so ist ihr Cauchy-Produkt $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ ebenfalls absolut konvergent und es gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right).$$

Bsp

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2$$

$$4 = 2^2 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}\right)^2 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}\right)$$

	1	1/2	1/4
1	1	1/2	1/4
1/2	$\frac{1}{2}$	1/4	
1/4	1/4		

Cauchy-Produkt

$$= 1 + 2\,\frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + \ldots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \cdot \frac{1}{2^k}$$

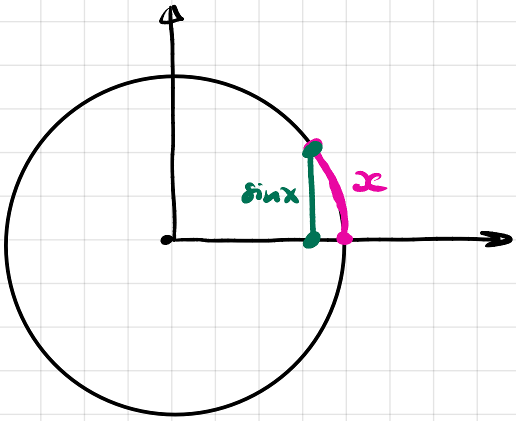
$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \cdot \frac{1}{2^k} = 4 \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{1}{2^k} = 4-2 = 2.$$

Der Erwartungswert oben ist $E(X) = 2$.

Kapitel 2: Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen.

1. Grenzwert einer Funktion

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$



Wenn wir eine Funktion $f: X \to \mathbb{R}$ auf einem Bereich $X \subseteq \mathbb{R}$ betrachten, wo können wir $x \in X$ hinschicken, im Sinne: $x \to a$. Welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ wären möglich.

$$(0,1] \cup \{2\}$$

Def Sei $X \subseteq \mathbb{R}$. Dann ist der topologische <u>Abschluss</u> $\overline{X}$ von X die Menge aller $a \in \mathbb{R}$ derart, dass für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ ein $x \in X$ existiert, welches $|x-a| < \varepsilon$ erfüllt.

$$a \in \overline{X} \;:\Longleftrightarrow\; \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\; \exists x \in X : |x-a| < \varepsilon.$$

Bsp. $\overline{(0,1] \cup \{2\}} = [0,1] \cup \{2\}$.

$X \subseteq \mathbb{R}$

$a \in \overline{X} \;:\Longleftrightarrow\; \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\, \exists x \in X : |x-a| < \varepsilon$.

Def Für $X \subseteq \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$ heißt a Häufungspunkt von X, wenn $a \in \overline{X \setminus \{a\}}$ gilt.

Bem a ist Häufungspunkt von X heißt:

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\, \exists x \in X : 0 < |x-a| < \varepsilon$.

Bsp $X = (0,1] \cup \{2\}$

	in X	in $\overline{X}$	ist Häufungspunkt von X
0	nein	ja	ja
1	ja	ja	ja
2	ja	ja	nein