# Agenda: Basics zu Ableitungen

- ✓ Momentane Änderung von f im Verhältnis zur Änderung von x.
- ✓ Leibniz $\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$
- ✓ Sekante $\Rightarrow$ Tangente
- ✓ $o(\Delta x)$ Beschreibung

  Lokale Approxim. einer Funkt. durch $ax+b$.
- ✓ Geschwindigkeit als Zeitableitung

  Dynamik in der Natur, Technik und der Wirtschaft lässt sich durch GDG beschreiben.
- ✓ Differenzierbarkeit $\Rightarrow$ Stetigkeit
- ✓ Linke, rechte Ableitung
- ✓ Formeln herleiten
- ✓ Rechenregeln herleiten
- ✓ Kettenregel nach Leibniz

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Äquivalente Formel:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

## Schreibweise von Leibniz:

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

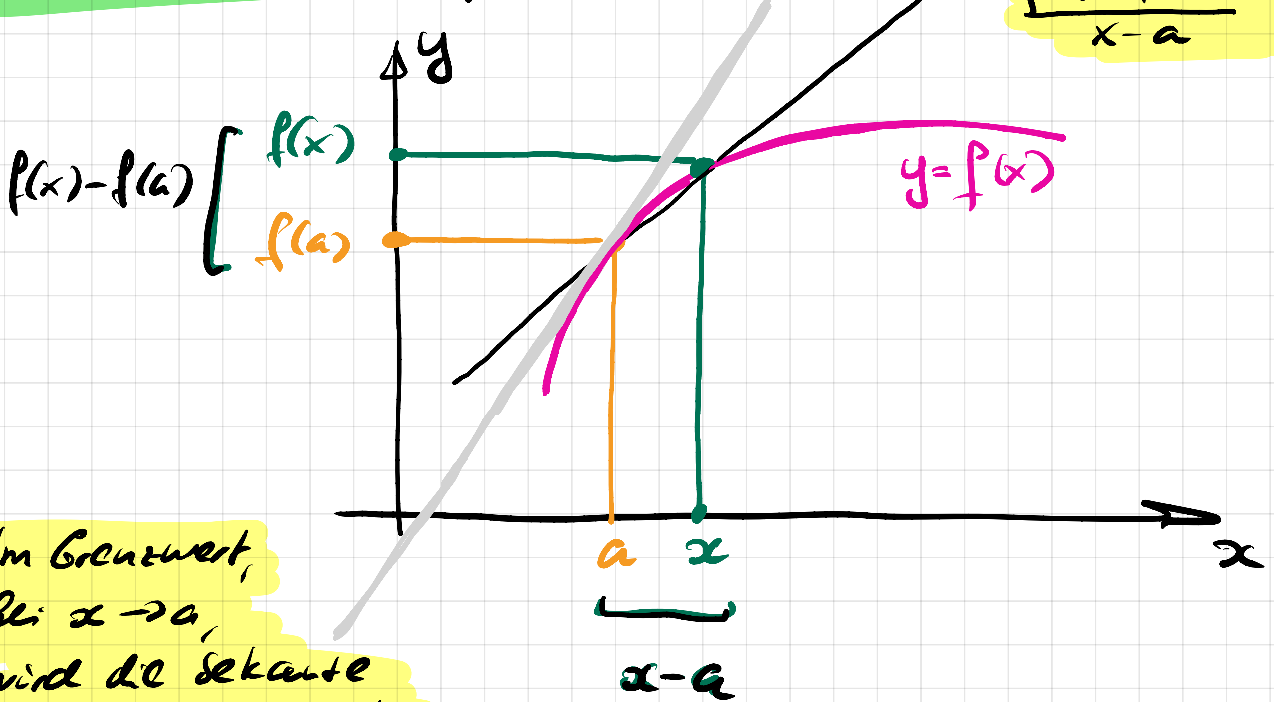
$\Delta x$ ist das $h$ von oben

$$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x).$$

Intuitiv: unendlich kleine Änderung $df$ von $f$ im Verhältnis zur unendlich kleinen Änderung $dx$ von $x$.

## Geometrische Interpretation:

hat Neigung $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$




Im Grenzwert, bei $x \to a$, wird die Sekante zur einen Tangente, deren Neigung $f'(a)$ ist

Somit hat die Gleichung der Tangente die Form:

$$y = f(a) + f'(a)\cdot(x-a)$$

Richtige Formel, weil: die Neigung ist richtig – $f'(a)$, und der Wert an der Stelle $x=a$ auch richtig: $f(a) + f'(a)\cdot(a-a) = f(a)$.

Oder mit anderen Worten ist unsere Funktion $f(a) + f'(a)\cdot(x-a)$ eine Approximation der Funktion $f(x)$ für die Werte $x$, die nah bei $a$ liegen.

Wenn wir den Fehler der Approximation als $R(x)$ bezeichnen: d.h.

$$f(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a) + \underbrace{R(x)}_{\text{ein sogenanntes Restglied.}}$$

so haben wir $R(a)=0$ und

$$\frac{R(x)}{x-a} = \frac{f(x)-f(a)-f'(a)\cdot(x-a)}{x-a}$$

$$= \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) \xrightarrow[x\to a]{} f'(a)-f'(a) = 0.$$

Man nennt es: $R$ hat eine geringere Ordnung als $x-a$ bei $x\to a$.

Schreibweise: $R(x) = o(x-a)$, für $x \to a$.

klein o.

Ähnliche Notation wie $O$ und $\Omega$ bei Folgen.

Tatsächlich kann man $o, O, \Omega$ sowohl für Folgen als auch für Funktionen einführen.

**Physikalische Bedeutung:** Ableitung nach Zeit ist die Geschwindigkeit; Geschwindigkeit der Geschwindigkeit ist die Beschleunigung.

**Bsp**

$$x' = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)-x}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1.$$

**Bsp**

$$(x^2)' = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^2+2hx+h^2-x^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} (2x+h) = 2x.$$

**Bsp**

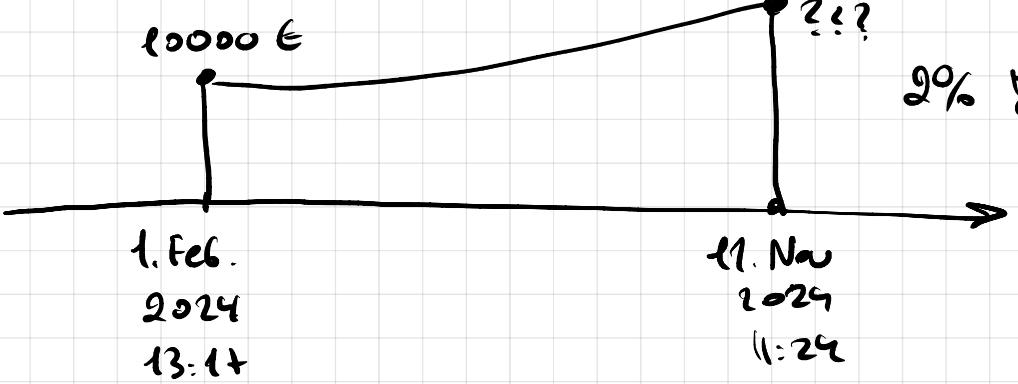
$$(e^x)' = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h}-e^x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{e^x \cdot e^h - e^x}{h}$$

$$= e^x \cdot \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h}}$$

es stellt sich heraus, dass dieser Wert 1 ist.

$$(e^x)' = e^x.$$




2% Jahreszins

**Bemerkung** Aus der Differenzierbarkeit folgt die Stetigkeit.

Sei $f$ differenzierbar $a$, d.h.

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R}. \text{ Dann ist}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} f(x) &= \lim_{x \to a} (f(x) - f(a)) + f(a) \\
&= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a) + f(a) \\
&= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \to a} (x - a) + f(a) \\
&= f'(a) \cdot 0 + f(a) = f(a)
\end{aligned}$$

Produktregel, die wir hier anwenden können, weil die beiden Faktoren endliche Grenzwerte besitzen

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

$$\Downarrow$$

$f$ ist stetig in $a$.

**Bsp.** $|x|$ ist stetig überall auf $\mathbb{R}$, aber nicht differenzierbar in $0$.

Um die Nichtdifferenzierbarkeit an der

Stelle 0 nachzuweisen können wir die linke und die rechte Ableitung an der Stelle a einführen:

$$f_l'(a) := \lim_{x \uparrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$f_r'(a) := \lim_{x \downarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Bei einer differenzierbaren Funktion gilt $f_l' = f_r' = f'$.

Ist $f_l'(a) \neq f_r'(a)$, so ist $f$ in a nicht differenzierbar.

Für $f(x) = |x|$, gilt

$$f_l'(0) = -1$$

$$f_r'(0) = 1.$$

Bsp

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x-(x+h)}{x(x+h)h}$$

$$= \lim_{h\to 0} -\frac{h}{x(x+h)\cdot h}$$

$$= \lim_{h\to 0} -\frac{1}{x\cdot(x+h)}$$

$$= -\frac{1}{x^2} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

**Bsp**

$$(\sqrt{x})' = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}_{>0}$$

## Rechenregeln für die Ableitungen

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$

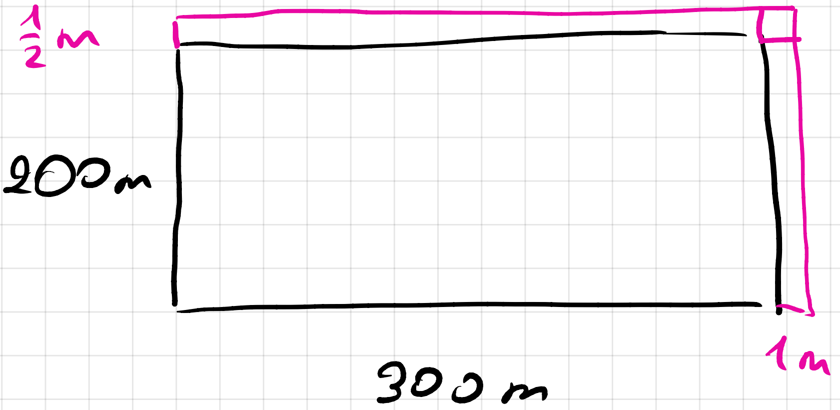
Summen-Differenzen-regel für differenzierbare Funktionen $f, g$

$$(c\cdot f)' = c\cdot f'$$

für eine differenzierbare Funktion $f$ und eine Konstante $c \in \mathbb{R}$.

Was ist aber die Ableitung des Produkts?

$$(f\cdot g)' = f\cdot g' + f'\cdot g$$




$60000\,m^2$

Herleitung

$$(fg)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)\cdot g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(g(x+h)\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)$$

$$= \underbrace{\lim_{h\to 0} g(x+h)}_{=\,g(x)} \cdot \underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}_{=\,f'(x)} + f(x)\cdot \underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}_{=\,g'(x)}$$

denn, wenn g differenzierbar ist, dann ist g auch stetig.

wenn f differenzierbar ist

wenn g differenzierbar ist

$$= g(x)f'(x) + f(x)\cdot g'(x).$$

Bsp $$(x^2)' = (x \cdot x)' = x' \cdot x + x \cdot x'$$
$$= 1 \cdot x + x \cdot 1$$
$$= 2x$$

$$(x^3)' = (x^2 \cdot x)' = (x^2)' \cdot x + x^2 \cdot x'$$
$$= (2x) \cdot x + x^2 \cdot 1$$
$$= 3x^2$$

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$ für alle $n \in \mathbb{N}$
(z.B. durch Induktion nach $n$).

Bsp $$(x^2 \cdot e^x)' = (x^2)' \cdot e^x + x^2 \cdot (e^x)'$$
$$= 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x$$
$$= (x^2 + 2x) \cdot e^x.$$

Quotientenregel

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \Bigg(f(x) \cdot \underbrace{\frac{1}{g(x)}}\Bigg)' = ???$$

Verkettung von $g(x)$ und $\frac{1}{x}$

Es lohnt sich vorher, die Kettenregel herzuleiten.

Kettenregel

$$f(g(x))' = ???$$

$$f(g(x))' = \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{\underbrace{g(x+h)-g(x)}_{}} \cdot \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

unter der Voraussetzung, dass dieser Nenner $\neq 0$ ist (es ist eine Beweisskizze)

$$= \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{g(x+h)-g(x)}}_{} \cdot \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}}_{}$$

$g$ differenzierbar

$\Rightarrow$ $g$ stetig

$\Rightarrow$

$g(x+h) \xrightarrow[h\to 0]{} g(x)$

$\Rightarrow$ dieser Grenzwert gleich $f'(g(x))$

$\| \; g'(x)$ unter der Voraussetzung, dass $g$ differenzierbar ist

$$\Rightarrow \quad f(g(x))' = f'(g(x))\, g'(x)$$

---

**Bsp**

$(e^x)' = e^x$

$(x^2)' = 2x$

$$(e^{x^2})' = e^{x^2} \cdot (x^2)' = e^{x^2} \cdot 2 \cdot x$$

$$= 2xe^{x^2}$$

$$(\sin(x^3))' = \sin'(x^3)\cdot(x^3)'$$
$$= \cos(x^3)\cdot 3\cdot x^2$$

$\sin(x)' = \cos x$
$(x^3)' = 3x^2$

## Die Kettenregel aus der Perspektive von Leibniz

$$z = \sin x^3$$

Gesucht: $\frac{dz}{dx}$

$$\begin{cases} z = \sin y \\ y = x^3 \end{cases}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = \cos y\cdot(3x^2)$$
$$= \cos x^3\cdot 3x^2$$
$$= 3x^2\cos x^3.$$

**Bsp.**

$$f(f(x))' = f'(f(x))\cdot f'(x)$$

$$f(f(f(f(x))))' = \dots$$

**Bsp**

$$(f(x)^4)' = 4\cdot f(x)^3\cdot f'(x)$$

$$f(x^4)' = f'(x^4)\cdot 4\cdot x^3.$$

## Zurück zur Quotientenregel

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \left(f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right)'$$

$$= f'(x)\cdot\frac{1}{g(x)} + f(x)\cdot\left(\frac{1}{g(x)}\right)'$$

$$= f'(x)\cdot\frac{1}{g(x)} + f(x)\cdot\left(-\frac{1}{g(x)^2}\right)\cdot g'(x)$$

$$= \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - f\cdot g'}{g^2}}$$

Quotienten-regel.

**Bsp**

$$\left(\frac{\sin x}{x^2}\right)' = \frac{(\sin x)'\cdot(x^2) - (\sin x)\cdot(x^2)'}{(x^2)^2}$$

$$= \frac{(\cos x)\cdot x^2 - (\sin x)\cdot 2x}{x^4}$$

$$= \frac{x\cos x - 2\sin x}{x^3}$$

**Bsp**

$$(f\cdot g\cdot h)' = ((f\cdot g)\cdot h)'$$

$$= (f\cdot g)'\cdot h + f\cdot g\cdot h'$$

$$= f' \cdot g \cdot h + f \cdot g' \cdot h + f \cdot g \cdot h'$$

$$(x^3 \cdot e^{x^2} \cdot \sin x)' =$$

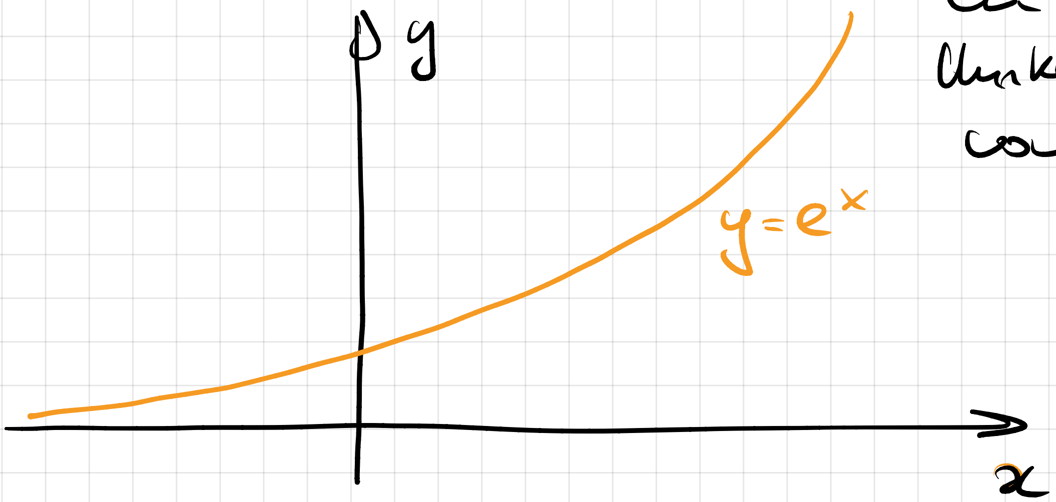
$$3x^2 \cdot e^{x^2} \cdot \sin x + x^3 \cdot (2x \cdot e^{x^2}) \cdot \sin x$$

$$+ x^3 \cdot e^{x^2} \cdot \cos x .$$

$$(f \cdot g \cdot h \cdot r)' = \ldots\ldots$$

**Bsp** $(\ln x)' =$

$\ln x$ ist Umkehrfunktion von $e^x$




$$y = e^x \iff x = \ln y$$

$$\ln e^x = x \qquad e^{\ln x} = x$$

**Was ist die Ableitung der Umkehrfunktion?**

Zu einer Funktion $f$ haben wir die Umkehrfunktion $f^{-1}$ (falls $f$ invertierbar ist) mit $f(f^{-1}(x)) = x$.

Wir leiten diese Gleichung ab.

$$f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1}(x))' = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}}$$

wenn $f$ differenzierbar ist und $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$ ist.

**Bsp.** Warum ist $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$$e^{\ln x} = x$$

$$\Downarrow$$

$$(e^{\ln x})' = 1 \qquad \boxed{(e^x)' = e^x}$$

$$\Downarrow$$

$$e^{\ln x} \cdot (\ln x)' = 1$$

$$\Downarrow$$

$$x \cdot (\ln x)' = 1$$

$$\Downarrow$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

**Bsp** $(a^x)'$ mit $a>0,\ a\neq 1$.

$$(a^x)' = \left(e^{\ln a \cdot x}\right)' = e^{\ln a \cdot x} \cdot (\ln a \cdot x)' = e^{\ln a \cdot x} \cdot \ln a = \ln a \cdot a^x$$

$(e^x)' = e^x$

$(\ln a \cdot x)' = \ln a$