(d) $V = U_d \oplus W_d$. Sei $\mathcal{A}$ Basis von U_d und $\mathcal{B}$ Basis von W_d. Dann ist $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ Basis von V.

Dann ist
$$P_F = P_{F_{(\mathcal{A},\mathcal{B})}} = \det \underbrace{\begin{bmatrix} tI - F_{\mathcal{A}} & 0 \\ 0 & tI - F_{\mathcal{B}} \end{bmatrix}}_{\substack{\text{denn } F(U_d) \subseteq U_d \\ F(W_d) \subseteq W_d}}$$

$$= \det \begin{bmatrix} tI - S_{\mathcal{A}} & 0 \\ 0 & tI - T_{\mathcal{B}} \end{bmatrix} = \det(tI - S_{\mathcal{A}}) \det(tI - T_{\mathcal{B}})$$
$$= P_S \cdot P_T.$$

Um $P_S = t^r$ zu zeigen, fixieren wir eine Basis von U_d auf eine besondere Weise. Es gilt: $U_1 \subsetneq U_2 \subsetneq \dots \subsetneq U_d$. Wir fixieren eine Basis $\mathcal{A}_1$ von U_1 und erweitern diesen durch Vektoren aus U_2 zu einer Basis $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$ von U_2 und so weiter, bis wir eine Basis $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_d)$ von U_d konstruiert haben. Die Matrix $S_{\mathcal{A}}$ hat dann die folgende Struktur:

$$S_{\mathcal{A}} = \begin{array}{c} \mathcal{A}_1 \\ \mathcal{A}_2 \\ \vdots \\ \mathcal{A}_{d-1} \\ \mathcal{A}_d \end{array} \begin{bmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$
$$\qquad\quad \mathcal{A}_1 \quad \mathcal{A}_2 \quad \cdots \quad \mathcal{A}_d$$

0 steht für ein Nullblock
$*$ für einen beliebigen Block.

$\mathcal{A}_1$ in U_1 $\mathcal{A}_2$ in $U_2 \setminus U_1$ $\mathcal{A}_d$ in $U_d \setminus U_{d-1}$

$$U_1 \subsetneq U_2 \subsetneq U_3 \subsetneq \cdots \subsetneq U_d$$

$$U_1 = \ker F$$

$\Rightarrow$ $S_{\mathcal{A}}$ ist eine ~~obere~~ Dreiecksmatrix mit Nullen auf der Diagonale.

$$\Rightarrow P_S = P_{S_A} = t^{\dim(U_d)}$$

Darüber hinaus gilt $P_T(0) \neq 0$, denn

$T = F|_{W_d} : W_d \to W_d$ ist bijektiv.

Fazit:

$$P_F = P_S \cdot P_T$$

hat 0 als r-fache Nullstelle   ist $t^{\dim(U_d)}$ hat 0 nicht als eine Nullstelle.

$$\Rightarrow \dim(U_d) = r.$$

(e) folgt direkt aus (d), denn

$\dim(U_d) = r$ und wegen $V = U_d \oplus W_d$

gilt $\dim(W_d) = \dim(V) - \dim(U_d) = n - r$.

Es bleibt zu zeigen, dass $d \le r$ ist.

Wegen $U_1 \subsetneq U_2 \subsetneq \dots \subsetneq U_d$ gilt

$$r = \underset{\ge d}{\dim(U_d)} > \underset{\ge d-1}{\dim(U_{d-1})} > \dim(U_{d-2}) \dots > \underset{\ge 1}{\dim(U_1)}$$

$\square$

Bsp

$$G = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

$$p_G(t) = \det(tI - G) = \begin{vmatrix} t+1 & -1 & 0 \\ 0 & t+1 & -1 \\ -1 & 0 & t+1 \end{vmatrix}$$

$$= (t+1)^3 - 1 = t^3 + 3t^2 + 3t = t(t^2+3t+1)$$

0 mit alg. Vielfachheit 1.

$$\{0\} = \ker(G^0) \subsetneq \ker(G^1) = \ker(G^2) = \ker(G^3) = \dots$$

$$\mathbb{R}^3 = \operatorname{im}(G^0) \supsetneq \operatorname{im}(G^1) = \operatorname{im}(G^2) = \operatorname{im}(G^3) =$$

$$\mathbb{R}^3 = \underbrace{\ker(G^1)}_{= \operatorname{lin}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right) =: \mathcal{A}} \oplus \underbrace{\operatorname{im}(G^1)}_{= \operatorname{lin}\left(\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right) =: \mathcal{B}}.$$

$$G_{(\mathcal{A},\mathcal{B})} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \mathcal{B} & \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathcal{A} \\ \mathcal{B} \\ \\ \end{array} & \left[\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{array}\right] \end{array}$$

$$G\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} = (-2)\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$$G\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} + (-1)\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

Bsp.

$$G(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2, x_3, x_3 + x_4, x_4)$$

6.4.5 Haupträume

Thm Sei $F: V \to V$ lineare Abbildung auf einem n-dimensionalen Vektorraum V sowie $n \in \mathbb{N}$.
Sei λ Eigenwert von F mit der algebraischen Vielfachheit r. Sei $H = \ker(F - \lambda\, id)^r$.
Dann gilt:

(i) $F(H) \subseteq H$

(ii) Das charakteristische Polynom von $F|_H : H \to H$ ist $(t-\lambda)^r$.

Beweis: Da λ Eigenwert von F ist, mit der algebraischen Vielfachheit r, ist 0 Eigenwert von $F - \lambda\, id$, mit derselben algebraischen Vielfachheit. Wir können also das Lemma von Fitting zu $G = F - \lambda\, id$ anwenden:

$$\{0\} = U_0 \subsetneq U_1 \subsetneq \dots \subsetneq U_d = \dots = U_r$$

In den Bezeichnungen des Lemmas von Fitting ist $H = U_r = U_d$.

Nach (a) gilt also: $G(H) \subseteq H$.

D.h. $F(v) - \lambda v \in H$ für alle $v \in H$

$$\Rightarrow \quad F(v) = \underbrace{\lambda v}_{\in H} + \underbrace{(F(v) - \lambda v)}_{\in H} \in H \quad \text{für alle } v \in H$$

$\Rightarrow \quad F(H) \subseteq H.$ Nach dem Lemma von Fitting ist $P_G = t^r$ somit ist

$$P_F = P_{G+\lambda id} = (t-\lambda)^r. \qquad \square$$

Der Raum H aus dem vorigen Theorem wird der Hauptraum von F zum Eigenwert λ genannt. Die Elemente von H nennt man Hauptvektoren zum Eigenwert λ.

$\boxed{6.4.6.}$ Hauptraumzerlegung

Thm Unter den Voraussetzungen 6.4.1 ist V direkte Summe der Haupträume von $F: V \to V$ zu den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in K$, d.h. $V = H_1 \oplus \dots \oplus H_k$ mit

$$H_i = \ker(F - \lambda_i\, id)^{r_i}$$

für $i = 1, \dots, k$.

Beweis: Wir verifizieren die Behauptung exemplarisch im Fall $k=3$. Der allgemeine Fall kann analog behandelt werden.

Sei $P_F = (t-\lambda_1)^{r_1} (t-\lambda_2)^{r_2} (t-\lambda_3)^{r_3}$

Wir zeigen, dass die Summe $H_1 + H_2 + H_3$ direkt ist. Seien $v_1 \in H_1$, $v_2 \in H_2$, $v_3 \in H_3$ Vektoren mit $v_1 + v_2 + v_3 = 0$.

Zu zeigen: $v_1 = v_2 = v_3 = 0$.

$$0 = (F - \lambda_1 \mathrm{id})^{r_1} (v_1 + v_2 + v_3)$$

$$= \underbrace{(F-\lambda_1 \mathrm{id})^{r_1} v_1}_{= 0} + (F - \lambda_1 \mathrm{id})^{r_1} (v_2 + v_3)$$

$$\Rightarrow 0 = (F - \lambda_2 \mathrm{id})^{r_2} \left((F - \lambda_1 \mathrm{id})^{r_1} (v_2 + v_3) \right)$$

$$= (F - \lambda_1 \mathrm{id})^{r_1} \left((F - \lambda_2 \mathrm{id})^{r_2} (v_2 + v_3) \right)$$

$$= (F - \lambda_1 \mathrm{id})^{r_1} (F - \lambda_2 \mathrm{id})^{r_2} v_3$$

$(A - I)(A - 2I) =$

$A^2 - A - 2A + 2I = A^2 - 3A + 2I$

$(A - 2I)(A - I)$

$= A^2 - 2A - A + 2I = A^2 - 3A + 2I$

$(A^2 + A + I)(A^3 - 7A + I) =$

$(A^3 - 7A + I)(A^2 + A + I)$

Eingeschränkt auf H_3 hat F nur den Eigenwert λ_3:

$F|_{H_3}$ hat Eigenwert λ_3 als einzigen Eigenwert.

$(F - \lambda_1 \mathrm{id})|_{H_3}$ hat nur den Eigenwert $\lambda_1 - \lambda_3$.

Da aber $\lambda_1 \neq \lambda_3$, ist dieser einzige Eigenwert ungleich 0, sodass diese Abbildung invertierbar ist.

Analog ist $(F - \lambda_2 \mathrm{id})|_{H_3}$ ebenfalls invertierbar.

$$\underbrace{(F - \lambda_1 \mathrm{id})^{r_1} (F - \lambda_2 \mathrm{id})^{r_2}}_{\substack{\Uparrow \\ \text{Verkettung von} \\ \text{invertierbaren Abbildungen}}} \underset{\substack{\cap \\ H_3}}{v_3} = 0. \Rightarrow v_3 = 0$$

Komplett analog wird auch $v_1 = 0$ und $v_2 = 0$ gezeigt.

D.h. $H_1 + H_2 + H_3$ ist direkte Summe

wegen $\dim(H_1) + \dim(H_2) + \dim(H_3) = r_1 + r_2 + r_3 = n$
$$= \dim(V)$$

gilt $H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 = V$. $\square$