Bsp. Produkt von Matrizen im Rechnungswesen.

L = Menge von Lebensmitteln

I = Menge von Ingredienten

N = Nutrienten

$A \in \mathbb{R}^{L \times I}$

$A = (a_{li})_{\substack{l \in L \\ i \in I}}$

a_{li} Beschreibt, wie viel Einheiten von i in einer Einheit von l enthalten sind

$B \in \mathbb{R}^{I \times N}$

$B = (b_{in})_{\substack{i \in I \\ n \in N}}$

b_{in} Beschreibt wie viel Einheiten von n in einer Einheit von i enthalten sind.

$$C = A \cdot B \in \mathbb{R}^{L \times N}$$

$$C = (c_{l,n})_{\substack{l \in L \\ n \in N}}$$

$$c_{l,n} = \sum_{i \in I} a_{l,i} \cdot b_{i,n}$$

Beschreibt, wie viele Einheiten von $n \in N$ in $l \in L$ enthalten sind.

$\boxed{3.7.}$ Die Strukturen auf der Menge der Matrizen

Betrachten wir $\mathbb{K}^{n \times n}$, die Menge der quadratischen Matrizen der Größen $n \times n$ über $\mathbb{K}$. Auf dieser Menge gibt es die folgenden Operationen:

$$\alpha \in \mathbb{K},\ A \in \mathbb{K}^{n \times n} \longmapsto \alpha \cdot A$$

$$A, B \in \mathbb{K}^{n \times n} \longmapsto A \cdot B$$

$$A, B \in \mathbb{K}^{n \times n} \longmapsto A + B$$

Des Weiteren hat $\mathbb{K}^{n\times n}$ die Einheitsmatrix I, für welche $I \cdot A = A \cdot I = A$ erfüllt ist.

$A \cdot B$ haben wir bereits eingeführt. $\alpha \cdot A$ und $A+B$ werden auf die folgende naheliegende Weise eingeführt

$$\alpha \cdot A := (\alpha \cdot a_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \qquad \text{bei } A = (a_{ij})_{i,j}$$

und

$$A + B := (a_{ij} + b_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \qquad B = (b_{ij})_{i,j}$$

Welche Eigenschaften haben diese Operationen?

$(\mathbb{K}^{n\times n}, +)$ bilden abelsche Gruppe

$$A + O = A$$

O ist dabei die Nullmatrix

$$A + B = B + A$$

$$(A+B)+C = A + (B+C)$$

$$A + (-A) = O$$

In $(\mathbb{K}^{n\times n}, \cdot)$ gilt das Assoziativgesetz und es gibt ein neutrales Element.

$$(A\cdot B)\cdot C = A\cdot (B\cdot C)$$

$$A\cdot I = I\cdot A = A$$

Das Kommutativgesetz gilt aber im Allgemeinen nicht, d.h. im Allgemeinen ist $A\cdot B \neq B\cdot A$.

Des Weiteren gilt das Distributivgesetz:

$$(A+B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C$$

$$C\cdot (A+B) = C\cdot A + C\cdot B$$

Die Eigenschaften oben gelten für alle $A, B, C \in \mathbb{K}^{n\times n}$.

Eine Struktur mit Eigenschaften wie oben nennt man einen <u>unitären Ring</u> (das $\cdot$ muss nicht kommutativ sein)

Des Weiteren ist $\mathbb{K}^{n\times n}$ bzgl. $+: \mathbb{K}^{n\times n} \times \mathbb{K}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{K}^{n\times n}$

und der Skalarmultiplikation

$$\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{K}^{n\times n}$$

ein Vektorraum. Und all diese Operationen sind kompatibel im folgenden Sinne:

$$\alpha \cdot (A \cdot B) = (\alpha \cdot A) \cdot B$$

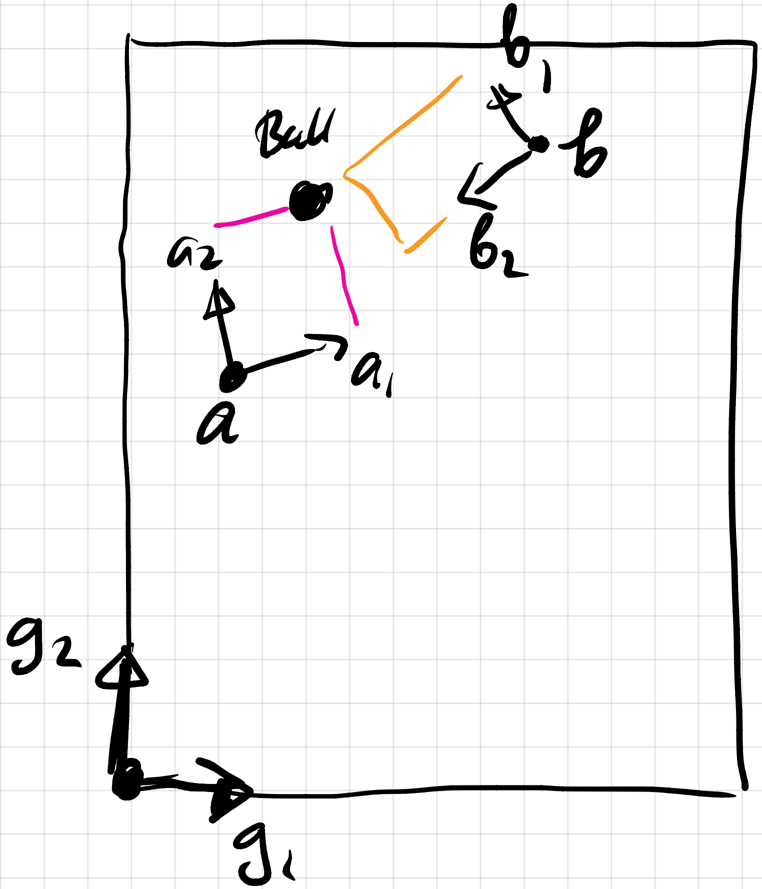
Eine Struktur wie ~~diese~~ nennt man eine Algebra über $\mathbb{K}$.

Bemerkung Die oben aufgeführten Rechenregeln gelten nicht nur für quadratische Matrizen, sondern auch für Matrizen passender Größen. z.B.:

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

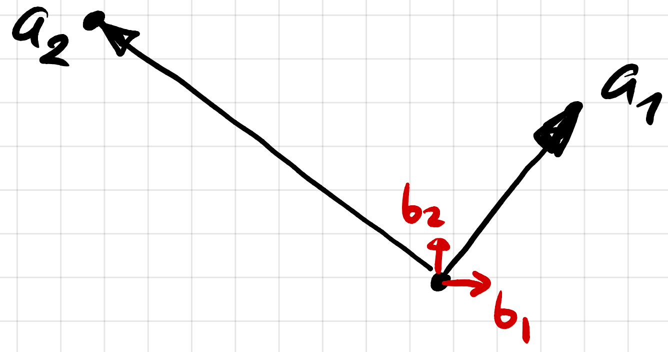
für alle $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{K}^{n \times k}$, $C \in \mathbb{K}^{k \times s}$.

$\boxed{3.8}$ Basisdarstellung und Basiswechsel.



$$G = (g_1, g_2)$$

Bsp



$$a_1 = 3 \cdot b_1 + 4 \cdot b_2$$
$$a_2 = -8 \cdot b_1 + 6 \cdot b_2$$

Wir haben zwei Basen in einem zweidimensionalen Raum:

$$\mathcal{A} = (a_1, a_2)$$
$$\mathcal{B} = (b_1, b_2).$$

Wir haben einen Vektor x, der in der Basis $\mathcal{A}$ dargestellt ist:

$$x = \alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2$$

Wie kriegt man x in der Basis $\mathcal{B}$ dargestellt?

Man nennt dabei $\mathcal{A}$ die alte Basis und $\mathcal{B}$ die neue Basis. Antwort: Ausmultiplizieren!

$$x = \alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 = \alpha_1 \cdot (3 b_1 + 4 b_2) + \alpha_2 \cdot (-8 b_1 + 6 \cdot b_2)$$

$$= (3\alpha_1 - 8\alpha_2) b_1 + (4\alpha_1 + 6\alpha_2) b_2$$

ausmultiplizieren und dann b_1 und b_2 jeweils ausklammern.

D.h. $x = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2$

mit $\beta_1 = 3\alpha_1 - 8\alpha_2$

$\beta_2 = 4\alpha_1 + 6\alpha_2$

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -8 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$$

die Koordinaten von a_1 in der Basis $\mathcal{B}$

die Koordinaten von a_2 in der Basis $\mathcal{B}$.

Def Sei $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ Basis eines n-dim. Vektorraums V mit $n \in \mathbb{N}$. Ist $x = \beta_1 \cdot b_1 + \ldots + \beta_n \cdot b_n$, so nennen wir $\beta_1, \ldots, \beta_n$ die Koordinaten von x in der Basis $\mathcal{B}$ und bezeichnen den Vektor

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} \text{ als } x_{\mathcal{B}}.$$

Ist $\mathcal{A} = (a_1, \ldots, a_n)$ eine weitere Basis von V und gilt

$$a_j = \sum_{i=1}^{n} \tau_{ij} b_i \qquad (\tau_{ij} \in \mathbb{K})$$

so nennt man

$$T_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{A}} = [\tau_{ij}]_{i,j=1,\ldots,n} \in \mathbb{K}^{n \times n}$$

die Matrix des Wechsels von der Basis $\mathcal{A}$ zur Basis $\mathcal{B}$.

Theorem Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ Basen eines n-dim. Vektorraums V mit $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$x_{\mathcal{B}} = T_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{A}} \, x_{\mathcal{A}}$$

für alle $x \in V$.

<u>Beweis:</u> Seien $x_{\mathcal{A}} = [\alpha_j]_{j=1,\dots,n}$

$$x_{\mathcal{B}} = [\beta_i]_{i=1,\dots,n}$$

$$T_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{A}} = [\tau_{ij}]_{i,j=1,\dots,n}$$

d.h.

$$x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j a_j = \sum_{i=1}^{n} \beta_i b_i$$

$$a_j = \sum_{i=1}^{n} \tau_{ij} b_i$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \beta_i b_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j a_j = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \left(\sum_{i=1}^{n} \tau_{ij} b_i \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \tau_{ij} \alpha_j \right) b_i$$

$\Rightarrow$ $\mathcal{B}$ Basis

$$\beta_i = \sum_{j=1}^{n} \tau_{ij} \alpha_j$$

$$\Rightarrow x_{\mathcal{B}} = T_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{A}} x_{\mathcal{A}} \qquad \square$$

Bemerkungen

- $T_{\mathcal{A} \leftarrow \mathcal{B}} T_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{A}} = I \Rightarrow T_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{A}}$ ist invertierbar

  und $(T_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{A}})^{-1} = T_{\mathcal{A} \leftarrow \mathcal{B}}$

Bei drei Basen $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ von V hat man

$$T_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} \cdot T_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{A}} = T_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{A}}.$$

- Für $\mathcal{A} = (a_1, \ldots, a_n)$ gilt:

$$T_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{A}} = \begin{bmatrix} (a_1)_{\mathcal{B}} & \cdots & (a_n)_{\mathcal{B}} \end{bmatrix}$$

Mit Worten: j-te Spalte von $T_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{A}}$ enthält die Koeffizienten der Darstellung des Vektor a_j der alten Basis $\mathcal{A}$ in der neuen Basis $\mathcal{B}$.

Basisdarstellung von linearen Abbildungen $F: V \to V$ war an der Tafel präsentiert