Agenda

- direkte Summen von Untervektorräumen
- Lineare Abbildungen, Einführung

3.6.4. Charakterisierung der direkten Summe

Thm Seien W_1, W_2 UVR eines VR V. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

(i) $V = W_1 \oplus W_2$.

(ii) Es gibt eine Basis $w_1, \dots, w_k$ von W_1 und eine Basis $w_1', \dots, w_\ell'$ von W_2, sodass $w_1, \dots, w_k, w_1', \dots, w_\ell'$ eine Basis von V bilden.

(iii) $V = W_1 + W_2$ und $\dim(V) = \dim(W_1) + \dim(W_2)$.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii): $V = W_1 \oplus W_2 \iff V = W_1 + W_2$ und $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

Wenn wir den Beweis der Formel
$\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2)$ in 3.6.2
auf den Fall $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ einschränken, so erhalten wir den Beweis von (i) $\Rightarrow$ (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (iii) ist klar, denn die Dimension ist die Anzahl der Vektoren in einer Basis.

(iii) $\Rightarrow$ (i): (iii) $\Rightarrow$

$$\dim(W_1 \cap W_2) \overset{\boxed{3.6.2}}{=} \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 + W_2)$$
$$= \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(V) \overset{(i)}{=} 0.$$

$\Rightarrow W_1 \cap W_2 = \{0\}$. $\square$

3.6.5 Direkter Summand

Kor Sei W UVR eines endlich erzeugten VR V.
Dann existiert ein UVR W' mit $V = W \oplus W'$.

Beweis: Sei $w_1, \dots, w_k$ eine Basis von W. Wir erweitern sie zu einer Basis $w_1, \dots, w_k, w_{k+1}, \dots, w_n$ von V und

setzen dann $W' = \mathrm{lin}(w_{k+1}, \dots, w_n)$.
Laut 3.6.4 hat man $V = W \oplus W'$. $\square$

3.6.6. Direkte Summe endlich vieler Vektorräume

Seien $W_1, \dots, W_k$ $(k \in \mathbb{N})$ UVR eines VR V. Dann heißt V direkte Summe von $W_1, \dots, W_k$ (Bezeichnung: $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$), wenn Folgendes gilt:

(DS1) $V = W_1 + \dots + W_k$

(DS2) Aus $w_1 \in W_1, \dots, w_k \in W_k$ und $w_1 + \dots + w_k = 0$ folgt $w_1 = \dots = w_k = 0$

Bsp Ist $v_1, \dots, v_k$ eine Basis von V, so gilt
$$V = \mathrm{lin}(v_1) \oplus \dots \oplus \mathrm{lin}(v_k)$$

Thm Seien $W_1, \dots, W_k$ $(k \in \mathbb{N})$ UVR eines endlich erzeugten VR V. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

(i) $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$

(ii) Ist B_i eine Basis von W_i für $i = 1, \dots, k$, so ist
$$B = (B_1, \dots, B_k) \text{ eine Basis von } V.$$

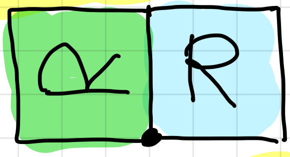
(iii) $V = W_1 + \dots + W_k$ und
$$\dim(V) = \dim(W_1) + \dots + \dim(W_k).$$

Beweis: vgl. Skript.

Kapitel 4 Lineare Abbildungen

4.1. Beispiele von linearen Abbildungen

4.1.1 90°-Drehung



$F(x,y) = (-y, x)$

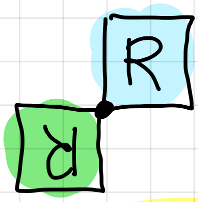
4.1.2 Projektion in $\mathbb{R}^3$

$F(x,y,z) = (x,y,0)$

4.1.3 Projektion von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^2$

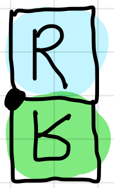
$F(x,y,z) = (x,y)$.

4.1.4. Spiegelung an einem Punkt



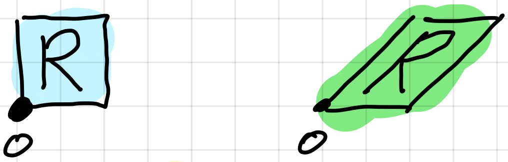
$F(x,y) = (-x,-y)$

4.1.5. Spiegelung an einer Geraden



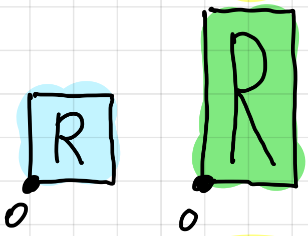
$F(x,y) = (x,-y)$

4.1.6. Scherung



$F(x,y) = (x+y, y)$

4.1.7. Streckung



$F(x,y) = (x, 2y)$

4.1.8. Zyklische Verschiebung

$$F(x_1,\dots,x_n) = (x_2, x_3, \dots, x_n, x_1)$$

4.1.9. Kodierung einer Message

$$F: \mathbb{Z}_5^2 \longrightarrow \mathbb{Z}_5^4$$

$$F(a,b) := (a, a+b, a+2b, a+3b)$$

Alice kodiert ihre Message (a,b) als $F(a,b)$, um das Codewort $F(a,b)$ an Bob zu verschicken.

4.1.10. Lineares Kombinieren

Sei $v_1, \dots, v_m$ ein Vektorsystem mit Vektoren in einem VR V über $\mathbb{K}$

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{K}^m \longmapsto \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m \in V$$

Das ist eine lineare Abbildung $\mathbb{K}^m \to V$.

4.2. Lineare Abbildungen allgemeiner Vektorräume

4.2.1. Lineare Abbildung

Seien V, W Vektorräume über $\mathbb{K}$ und sei $F: V \to W$ eine Abbildung. F heißt linear, wenn Folgendes gilt:

(L1) $F(u+v) = F(u) + F(v)$ für alle $u, v \in V$.

(L2) $F(\alpha v) = \alpha F(v)$ für alle $\alpha \in \mathbb{K}$ und $v \in V$.

Bem (L1), (L2) $\Longleftrightarrow$

$$F(\lambda u + \mu v) = \lambda F(u) + \mu F(v)$$

für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ und $u, v \in V$.