Bem. zur Bestimmung rationaler Nullstellen eines Polynoms. Man betrachte ein Polynom vom Grad $d \in \mathbb{N}$:

$$f = a_d t^d + a_{d-1} t^{d-1} + \dots + a_0 t^0$$

mit $a_0, \dots, a_d \in \mathbb{Z}$, $a_0 \neq 0$ und $a_d \neq 0$.

Dann gilt Folgendes: ist eine rationale Zahl

$r = \frac{u}{v}$ mit $u, v \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ mit $\gcd(u,v) = 1$ Nullstelle von f

so ist a_0 durch u teilbar und a_d durch v teilbar.

Diese Bedingung bestimmt einen endlichen Suchraum für die rationalen Nullstellen von f.

$$\left.\begin{array}{l} a_0 = 18, \\ a_d = 20 \end{array}\right] \rightsquigarrow \begin{array}{l} 1, 2, 3, 6, 9, 18 \\ 1, 2, 4, 5, 10, 20 \end{array}$$

$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm 18$

$\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{5}{2},$

$\pm \frac{1}{4}$ ....

$\boxed{6.3.3}$ Die geometrische und algebraische Vielfachheit des Eigenwerte

Sei $\lambda \in \mathbb{K}$ Eigenwert einer linearen Abbildung $F: V \Rightarrow V$ mit $\dim(V) \in \mathbb{N}$. Die *algebraische Vielfachheit* von λ ist die Vielfachheit von λ als Nullstelle von p_F. Die *geometrische Vielfachheit* von λ ist $\dim \mathrm{Eig}(F,\lambda) = \dim \ker(F - \lambda\, \mathrm{id})$.

Thm Sei $\lambda \in \mathbb{K}$ Eigenwert eines linearen Abbildung $F: V \Rightarrow V$ auf einem VR V mit $n = \dim(V) \in \mathbb{N}$. Sei k die geometrische und ℓ die algebraische Vielfachheit von λ. Dann gilt: $k \leq \ell$.

Beweis: Wir fixieren eine Basis $b_1, \dots, b_k$ von $\mathrm{Eig}(F,\lambda)$ und erweitern diese zu einer Basis $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ von V. In dieser Basis hat $F_\mathcal{B}$ die folgende Struktur:

$$F_\mathcal{B} = \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix}\lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda\end{matrix} & C \\ \hline \underbrace{\quad 0 \quad}_{k} & \underbrace{\quad D \quad}_{n-k}\end{array}\right], \quad \text{mit } C \in \mathbb{K}^{k \times (n-k)} \text{ und } D \in \mathbb{K}^{(n-k)\times(n-k)}.$$

$$\Rightarrow p_F = p_{F_\mathcal{B}} = \det \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix}t-\lambda & & \\ & \ddots & \\ & & t-\lambda\end{matrix} & C \\ \hline \underbrace{\quad 0 \quad}_{k} & \underbrace{\boxed{t I_{n-k} - D}}_{n-k}\end{array}\right]$$

$$= (t-\lambda)^k \, p_D(t)$$

$\Rightarrow$ die algebraische Vielfachheit ist mindestens k. $\square$

$\Rightarrow \ell \geq k$.

Bsp

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$Ae_1 = 2e_1 \Rightarrow 2$ Eigenwert von A.

$p_A = (t-2)^4 \Rightarrow 4$ ist die alg. Vielfachheit vom Eigenwert 2.

$$\mathrm{Eig}(A) = \ker(A - 2I) = \ker \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

← 2-dimensional
⇒ die geom. Vielfachheit vom Eigenwert 2 ist 2.

$$= \mathrm{lin}(e_1, e_3)$$

6.3.4 Charakterisierung des Diagonalisierbarkeit

Thm Sei $F: V \to V$ lineare Abbildung auf einem VR V mit $\dim(V) =: n \in \mathbb{N}$. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

(i) F ist diagonalisierbar.

(ii) p_F zerfällt in lineare Faktoren und für jeden Eigenwert $\lambda \in K$ von F ist die geom. Vielfachheit von λ gleich der algebraischen Vielfachheit.

Beweis: (i) ⇒ (ii): Angenommen, F ist diagonalisierbar. Dann ist $F_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{bmatrix}$ für eine Basis $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ von V. ⇒

$$p_F = p_{F_{\mathcal{B}}} = (t - \mu_1) \cdots (t - \mu_n). \Rightarrow$$

p_F zerfällt in lineare Faktoren.

Sei λ Eigenwert von F, d.h. $\lambda = \mu_i$ für ein $i = 1, \dots, n$. Dann ist die Anzahl der Indizes in $\{i = 1, \dots, n : \mu_i = \lambda\}$ die algebraische Vielfachheit von λ. Aber zu jedem der Indizes i mit $\lambda = \mu_i$ hat man einen Eigenvektor b_i von λ in der Basis $\mathcal{B}$. Also ist die geom. Vielfachheit von λ mindestens so groß wie die algebraischen. Angesichts 6.3.? sind die beiden Vielfachheiten gleich.

Umgekehrt: angenommen, (ii) sei erfüllt. Wir zeigen (i).

Man hat $P_F = (t-\lambda_1)^{r_1} \cdot \ldots \cdot (t-\lambda_k)^{r_k}$ mit paarweise verschiedenen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}$, $r_1, \ldots, r_k \in \mathbb{N}$ und $r_1 + \ldots + r_k = n$. Da die algebraischen und die geometrischen Vielfachheit übereinstimmen, gilt $r_i = \dim \mathrm{Eig}(F, \lambda_i)$. Wir zeigen, dass V direkte Summe der Räume $\mathrm{Eig}(F, \lambda_i)$ $(i = 1, .., k)$ ist.

Dafür zeigen zeigen wir die Implikation:

$$v_i \in \mathrm{Eig}(F, \lambda_i),\ v_1 + \ldots + v_k = 0 \Rightarrow v_1 = v_2 = \ldots = v_k = 0.$$

Wenn in der Summe $v_1 + \ldots + v_k$, die Null ist, mit Vektoren $v_i \in \mathrm{Eig}(F, \lambda_i)$, einige der Vektoren ungleich Null wären, dann wären das Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten, deren Summe gleich Null ist. Das widerspricht aber der linearen Unabhängigkeit der Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten.

Also ist $\mathrm{Eig}(F, \lambda_1) + \ldots\ldots + \mathrm{Eig}(F, \lambda_k)$ eine direkte Summe. $\Rightarrow$

$$\dim(\mathrm{Eig}(F, \lambda_1) \oplus \ldots\ldots \oplus \mathrm{Eig}(F, \lambda_k))$$
$$= \dim(\mathrm{Eig}(F, \lambda_1)) + \ldots + \dim(\mathrm{Eig}(F, \lambda_k))$$
$$= r_1 + \ldots + r_k = n = \dim(V)$$

$\Rightarrow$ $\mathrm{Eig}(F, \lambda_1) \oplus \ldots \oplus \mathrm{Eig}(F, \lambda_k) = V.$

$\Rightarrow$ Durch das Zusammensetzen von Basen der Räume $\mathrm{Eig}(F, \lambda_i)$ erhalten wir eine Basis von V, die aus Eigenvektoren besteht.

$\Rightarrow$ F ist diagonalisierbar. □

Bem. $F: V \to V$ linear diagonalisierbar?

→ Alle Nullstellen von P_F bestimmen.

→ Zerfällt P_F in lineare Faktoren? (Falls nicht, nicht diagonalisierbar)

→ $P_F = (t-\lambda_1)^{r_1} \cdot \ldots\ldots \cdot (t-\lambda_k)^{r_k}$

$\Rightarrow$ $\dim \mathrm{Eig}(F, \lambda_i) = r_i$ für alle $i = 1, \ldots, k$ $\Rightarrow$ diagonalisierbar. Sonst nicht.

6.4. Die Jordansche Normalform (JNF).

6.4.1 Die Voraussetzung

Die Hauptresultate dieses Abschnitts werden unter der folgenden Voraussetzung formuliert:

Sei $F: V \to V$ lineare Abbildung auf einem VR V der Dimension $n := \dim(V) \in \mathbb{N}$ und sei p_F Produkt von linearen Faktoren:

$$p_F = (t-\lambda_1)^{r_1} \cdot \ldots \cdot (t-\lambda_k)^{r_k}$$

mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ und $r_1, \ldots, r_k \in \mathbb{N}$.

6.4.2 Das Ziel und der Ansatz

Ziel: eine Basis $\mathcal{B}$ finden, für die $F_{\mathcal{B}}$ möglichst wenig Nichtnullelemente außerhalb der Diagonale hat.

Der Ansatz: wenn ein Versuch nicht gereicht hat, versuch's nochmal.

Konkreter: $\mathrm{Eig}(F, \lambda_i)$ Eigenraum von λ_i.

$u \in \mathrm{Eig}(F, \lambda_i) = \ker(F - \lambda_i\, \mathrm{id})$

$\Rightarrow (F - \lambda_i\, \mathrm{id})u = 0.$

Es gibt aber unter Umständen Vektoren $v \in \ker(F - \lambda_i\, \mathrm{id})^2 \setminus \ker(F - \lambda_i\, \mathrm{id})$. D.h.

$$\left.\begin{array}{l} 0 \neq u = (F - \lambda_i \, id) \, v \\ 0 = (F - \lambda_i \, id) \, u \end{array}\right] \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} F(v) = \lambda_i v + u \\ F(u) = \lambda_i \cdot u \end{array}\right.$$

$$F_{\mathcal{B}} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \textcircled{u} \\ \textcircled{v} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ \lambda_i & 1 \\ 0 & \lambda_i \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{array}\right] \\ \begin{array}{cc} \textcircled{u} & \textcircled{v} \end{array} \end{array}$$