Agenda

- A^{-1} mit Gauß-Jordan.
- Rang von A und $(A|\vec{b})$ bei der Lösung von $Ax=b$
- Koordinatensysteme: $T_{B\leftarrow A}$ und $F_{A,B}$

Bsp

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

$$Ax = y \iff \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$\iff \left\{ \begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= y_1 \\ 4x_1 + 5x_2 &= y_2 \end{aligned} \right.$$

Wir wollen dieses LGS mit dem Gauß-Jordan nach x_1 und x_2 auflösen

$$\Updownarrow$$

$$\left\{ \begin{aligned} x_1 + \tfrac{3}{2}x_2 &= \tfrac{1}{2}y_1 \\ 4x_1 + 5x_2 &= y_2 \end{aligned} \right. \quad -4\times$$

$$\Updownarrow$$

$$\left\{ \begin{aligned} x_1 + \tfrac{3}{2}x_2 &= \tfrac{1}{2}y_1 \\ -x_2 &= -2y_1 + y_2 \end{aligned} \right.$$

$$\Updownarrow$$

$$\left\{ \begin{aligned} x_1 + \tfrac{3}{2}x_2 &= \tfrac{1}{2}y_1 \\ x_2 &= 2y_1 - y_2 \end{aligned} \right. \quad -\tfrac{3}{2}\times$$

$$\Updownarrow$$

$$\left\{ \begin{aligned} x_1 &= -2\tfrac{1}{2}y_1 + 1\tfrac{1}{2}y_2 \\ x_2 &= 2y_1 - y_2 \end{aligned} \right.$$

Mit Matrizen würde man es so aufschreiben:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\vdots$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2\frac{1}{2} & 1\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right]$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2\frac{1}{2} & 1\frac{1}{2} \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

die Matrix, mit

$$Ax = y \iff x = A^{-1}y.$$

4.4.11 Der Rang der Komposition

Thm. Seien $F: V \to W$ und $G: U \to V$ lineare Abbildungen.

Dann gilt:

$$\boxed{W \xleftarrow{F} V \xleftarrow{G} U}$$

$$\underbrace{}_{\mathrm{rang}(F) + \mathrm{rang}(G) - \dim(V)} \leq \mathrm{rang}(F \circ G) \leq \min\{\mathrm{rang}(F), \mathrm{rang}(G)\}$$

Beweis: vgl. Skript.

Bem. Man kann dieses Theorem in der Sprache der Matrizen umformulieren, vgl. Skript.

4.4.12 Rang und die Lösbarkeit von LGS.

Ein LGS $Ax = b$ hat die <u>Matrix</u> $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ der <u>linken Seiten</u>. Sonst ordnen wir dem System die Matrix $(A \mid b) \in \mathbb{K}^{m \times (n+1)}$ zu, die sogenannte <u>erweiterte Matrix</u> (darauf läuft das Gauß-Verfahren).

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 7 \\ 4x_1 + 5x_2 = 8 \end{cases} \qquad \underbrace{\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 7 \\ 4 & 5 & 8 \end{array}\right]}_{\text{die erweiterte Matrix von } Ax=b}$$

$$\Updownarrow$$

$$Ax = b.$$

die Matrix A der linken Seiten

b der Vektor der rechten Seiten

die erweiterte Matrix von $Ax = b$

Thm Sei $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ und sei $b \in \mathbb{K}^m$ $(m, n \in \mathbb{N})$.

Dann gilt:

(a) $\operatorname{rang}(A) \leq \operatorname{rang}(A|b) \leq \operatorname{rang}(A) + 1$.

(b) Das System $Ax = b$ besitzt genau dann eine Lösung $x \in \mathbb{K}^n$, wenn $\operatorname{rang}(A|b) = \operatorname{rang}(A)$ ist.

(c) Das System $Ax = b$ besitzt genau dann eine eindeutige Lösung x, wenn

$$\operatorname{rang}(A|b) = \operatorname{rang}(A) = n.$$

Beweis: Seien $a_1, \dots, a_n$ die Spalten von A.

Dann ist $Ax = b$ äquivalent zu

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b$$

mit $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$. D.h.:

$Ax = b$ lösbar $\Longleftrightarrow$ $b \in \operatorname{lin}(a_1, \dots, a_n)$.

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rang}(A) &= \dim \operatorname{lin}(a_1, \dots, a_n). \\ \operatorname{rang}(A|b) &= \dim \operatorname{lin}(a_1, \dots, a_n, b)). \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

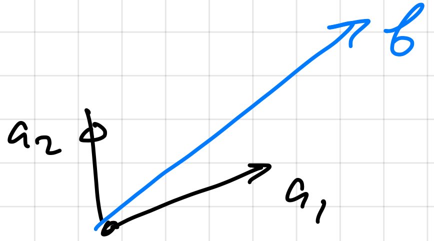
$\operatorname{rang}(A) \leq \operatorname{rang}(A|b)$. Ist

$Ax = b$ lösbar, so gilt sogar

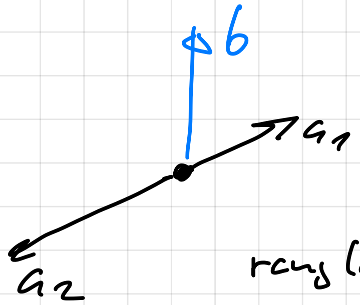
$\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A|b)$, wegen

$b \in \operatorname{lin}(a_1, \dots, a_n)$.

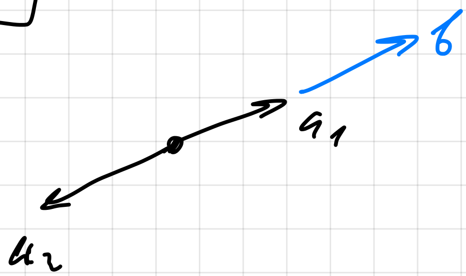
Hat $Ax = b$ keine Lösung, so ist



$\operatorname{rang}(A) = 2$
$\operatorname{rang}(A|b) = 2$



$\operatorname{rang}(A) = 1$
$\operatorname{rang}(A|b) = 2$



$\operatorname{rang}(A) = 1$
$\operatorname{rang}(A|b) = 1$

$\operatorname{rang}(A|b) = \operatorname{rang}(A) + 1$, weil durch das Hinzufügen von b zum System $a_1, \dots, a_n$ die Dimension der linearen Hülle im Fall $b \notin \operatorname{lin}(a_1, \dots, a_n)$ genau um eins steigt.

Das ergibt (a) und (b).

(c): Die Lösbarkeit von $Ax = b$ ist äquivalent zu $\operatorname{rang}(A|b) = \operatorname{rang}(A)$. Hat man die Lösbarkeit, so ist die eindeutige Lösbarkeit äquivalent zu $\ker(A) = \{0\}$. Hierbei ist

$$\ker(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n : a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0 \right\}.$$

D.h., $\ker(A) = 0 \iff a_1, \dots, a_n$ linear unabhängig

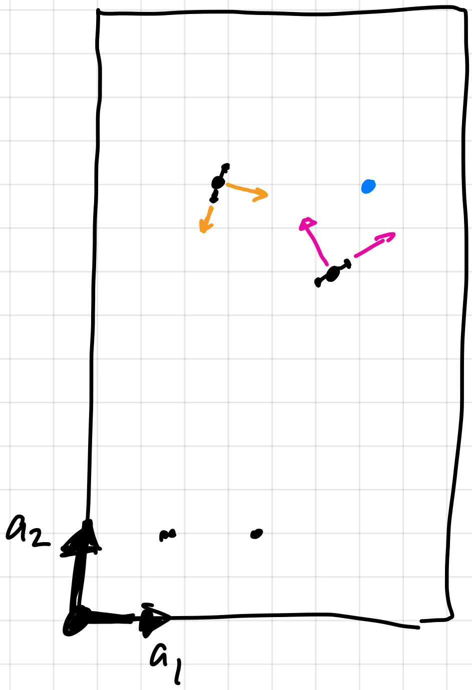
$\ker(A) = \{0\} \iff \dim(\ker(A)) = 0 \iff$

$0 = \dim(\ker(A)) = n - \dim(\operatorname{im}(A)) = n - \operatorname{rang}(A)$

$\iff \operatorname{rang}(A) = n.$ $\square$

4.5. Koordinatensysteme

4.5.1 Basisdarstellung von Vektoren



Sei V ein VR über $\mathbb{K}$ der Dimension $n \in \mathbb{N}$.

Sei $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ eine Basis von V.

Ist $x = \beta_1 b_1 + \dots + \beta_n b_n$ mit $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{K}$,

so heißt $$x_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

der Vektor der Koordinaten von x in der Basis $\mathcal{B}$.

Bsp

$$\mathcal{E} = (e_1, e_2) \qquad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

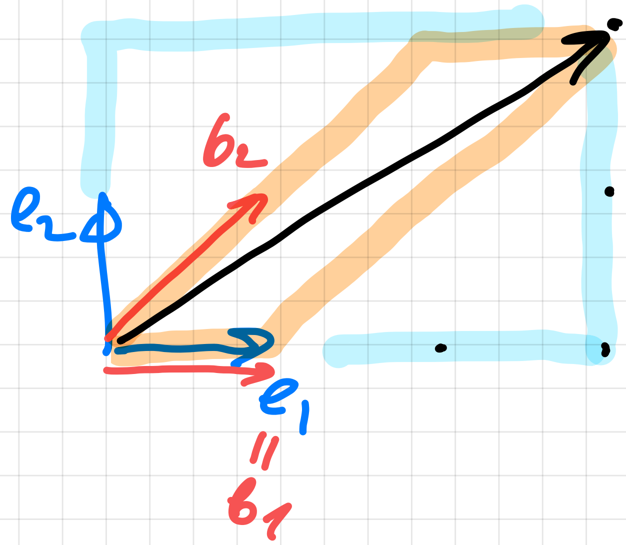
$$x = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow x_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{B} = (b_1, b_2)$ $\qquad b_1 = e_1 = \binom{1}{0}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad b_2 = e_1 + e_2 = \binom{1}{1}$

$x_{\mathcal{B}} = \binom{1}{2}$, denn

$1 \cdot b_1 + 2 \cdot b_2 = 1 \cdot \binom{1}{0} + 2 \cdot \binom{1}{1} = \binom{3}{2}$



Bem $x \longmapsto x_{\mathcal{B}}$ ist eine bijektive lineare Abbildung von V nach $\mathbb{K}^n$ mit $n = \dim(V)$.

Bsp

$$\boxed{x'(t) = x(t) \iff x(t) = C \cdot e^{t} \quad (C \text{ Konstante}).}$$

$$\boxed{x'(t) = k\, x(t) \iff x(t) = C \cdot e^{kt} \quad (C \text{ Konstante})}$$

$$\left\{\begin{aligned} x_1'(t) &= x_1 + x_2 \\ x_2'(t) &= x_1 - x_2 \end{aligned}\right. \quad \xleftrightarrow{\text{Basiswechsel}} \quad \text{zwei unabhängige Gleichungen.}$$

4.5.2 Basiswechsel

Seien $\mathcal{A} = (a_1, \dots, a_n)$ und $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ Basen eines n-dim. VR V, mit $n \in \mathbb{N}$.

Dann heißt

$$T_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{A}} = \begin{bmatrix} | & & | \\ (a_1)_{\mathcal{B}} & \cdots & (a_n)_{\mathcal{B}} \\ | & & | \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{n \times n}$$

die Basiswechselmatrix bzw. die Matrix des Wechsels von der Basis $\mathcal{A}$ zur Basis $\mathcal{B}$.

Mit anderen Worten:

$$T_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{A}} = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \cdots & \tau_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_{n1} & \cdots & \tau_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{mit}$$

$$a_1 = b_1 \tau_{11} + \dots + b_n \tau_{n1}$$

$$\vdots$$

$$a_n = b_1 \tau_{1n} + \dots + b_n \tau_{nn}$$

Thm Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Basen eines n-dimensionalen VR V, $n \in \mathbb{N}$. Sei $x \in V$. Dann gilt:

$$\boxed{x_{\mathcal{B}} = T_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{A}} \, x_{\mathcal{A}}}$$

Beweis: Sei $\mathcal{A} = (a_1, \dots, a_n)$, sei $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$

sei $x = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n = \beta_1 b_1 + \dots + \beta_n b_n$

$T_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{A}} = (\tau_{ij})_{i,j = 1, \dots, n}$ mit

$$a_i = b_1 \tau_{1i} + \dots + b_n \tau_{ni}.$$

$$\beta_1 b_1 + \dots + \beta_n b_n = x = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\sum_{j=1}^{n} b_j \tau_{ji} \right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \tau_{ji} \alpha_i \right) b_j$$

$$\Rightarrow \quad \beta_j = \sum_{i=1}^{n} \tau_{ji} \alpha_i \iff x_{\mathcal{B}} = T_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{A}} x_{\mathcal{A}} \qquad \square$$

Bsp

$$\mathcal{E} = (e_1, e_2) \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{B} = (b_1, b_2) \quad b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 e_1 + 2 e_2$$

$$x_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{E}}$

$$\left.\begin{aligned} e_1 &= 1 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 \\ e_2 &= -1 \cdot b_1 + 1 \cdot b_2 \end{aligned}\right] \Rightarrow$$

$$x = 3 e_1 + 2 \cdot e_2$$

$$= 3 \cdot (1 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2) + 2 \cdot (-1 \cdot b_1 + 1 \cdot b_2)$$

$$= (3 \cdot 1 + 2 \cdot (-1)) \cdot b_1 + (3 \cdot 0 + 2 \cdot 1) \cdot b_2$$

$$= 1 \cdot b_1 + 2 \cdot b_2 \quad \Rightarrow \quad x_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{x_{\mathcal{B}}}{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}} = \underset{T_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{E}}}{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} \underset{x_{\mathcal{E}}}{\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}}$$

$\boxed{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}}$ Wie kann man es machen?

4.5.3 Wiederholter Basiswechsel

Thm Seien $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ Basen eines n-dim. VR V, $n \in \mathbb{N}$.

Dann gilt:

$$T_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{A}} = T_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} \, T_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{A}}$$

Beweis: Übung.

$$T_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{A}} x_{\mathcal{A}} = T_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} T_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{A}} x_{\mathcal{A}}$$

$\Downarrow$ ← wieso?

Behauptung

Korollar. Seien $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ Basen eines n-dim. VR V, mit $n \in \mathbb{N}$.
Dann ist die Matrix $T_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{A}}$ invertierbar, mit

$$(T_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{A}})^{-1} = T_{\mathcal{A} \leftarrow \mathcal{B}}.$$

Beweis:

$$T_{\mathcal{A} \leftarrow \mathcal{B}} \, T_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{A}} = T_{\mathcal{A} \leftarrow \mathcal{A}} = I \quad \text{(die Einheitsmatrix)}$$

$\Rightarrow$ Behauptung. $\square$

Bsp

$\mathcal{E} = (e_1, e_2)$ $\quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\mathcal{B} = (b_1, b_2)$ $\quad b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$x = (\alpha_1, \alpha_2) = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$, d.h. $x_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$.

$x = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2$, d.h. $x_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 \\ &= \alpha_1 \cdot (1 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2) + \alpha_2 \cdot ((-1) \cdot b_1 + 1 \cdot b_2) \\ &= \underbrace{(1 \cdot \alpha_1 + (-1) \cdot \alpha_2)}_{\beta_1} \cdot b_1 + \underbrace{(0 \cdot \alpha_1 + 1 \cdot \alpha_2)}_{\beta_2} \cdot b_2 \end{aligned}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}}_{x_{\mathcal{B}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{T_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{E}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}}_{x_{\mathcal{E}}}$$

α_1	α_2	β_1	β_2
1	-1	1	0
0	1	0	1

$1\times$

α_1	α_2	β_1	β_2
1	0	1	1
0	1	0	1

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}}_{x_{\mathcal{E}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}}_{x_{\mathcal{B}}}$$

Man hätte es auch direkt sehen können (in unserem einfachen Beispiel):

$$b_1 = 1\cdot e_1 + 0\cdot e_2$$
$$b_2 = 1\cdot e_1 + 1\cdot e_2$$

$$T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4.5.4. Basisdarstellung von linearen Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} W & \xleftarrow{F} & V \\ \text{Basis} & & \text{Basis} \\ \mathcal{A} & & \mathcal{B} \end{array}$$

Ziel: Bzgl. der festgelegten Basen, F mit einer Matrix zu beschreiben.

Sei V ein n-dim. VR, mit $n \in \mathbb{N}$, und $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ eine Basis von V. Sei W ein m-dim. VR, mit $m \in \mathbb{N}$, und $\mathcal{A} = (a_1, \dots, a_m)$ eine Basis von W. Sei $F: V \to W$ linear.

Dann nennt man

$$F_{\mathcal{A},\mathcal{B}} := \begin{bmatrix} F(b_1)_{\mathcal{A}} & \dots & F(b_n)_{\mathcal{A}} \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{m\times n}$$

die Matrix der Abbildung F bzgl. der Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$.

D.h. $F_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \cdots\cdots & \varphi_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_{m1} & & \varphi_{mn} \end{bmatrix}$ mit $\varphi_{ij} \in \mathbb{K}$

und
$$F(b_1) = a_1 \varphi_{11} + \dots + a_m \varphi_{m1}$$
$$\vdots$$
$$F(b_n) = a_1 \varphi_{1n} + \dots + a_m \varphi_{mn}$$

Thm. Seien V und W endlich-dim. VR und sei $F: V \to W$ linear. Sei $\mathcal{A} = (a_1, \dots, a_m)$ Basis von W und $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ Basis von V. Gilt $y = F(x)$ mit $x \in V$ und $y \in W$, so hat man

$$y_{\mathcal{A}} = F_{\mathcal{A},\mathcal{B}} \, x_{\mathcal{B}}.$$

Beweis: Sei $x = \beta_1 b_1 + \dots + \beta_n b_n$, sei $y = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_m a_m$ und sei $F_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = [\varphi_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$.

$$y = F(x) = F\left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j b_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \beta_j F(b_j)$$
$$\| \quad \sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_i$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \beta_j \left(\sum_{i=1}^{m} a_i \varphi_{ij}\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{m} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij} \beta_j\right)}_{\alpha_i} a_i \qquad \square$$

Bsp

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}}_{y}$$

$$x \xmapsto{F} y \qquad F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$\begin{cases} y_1 = 3x_1 + x_2 \\ y_2 = x_1 + 3x_2 \end{cases}$$

$\mathcal{E} = (e_1, e_2)$, $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$F_{\mathcal{E},\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

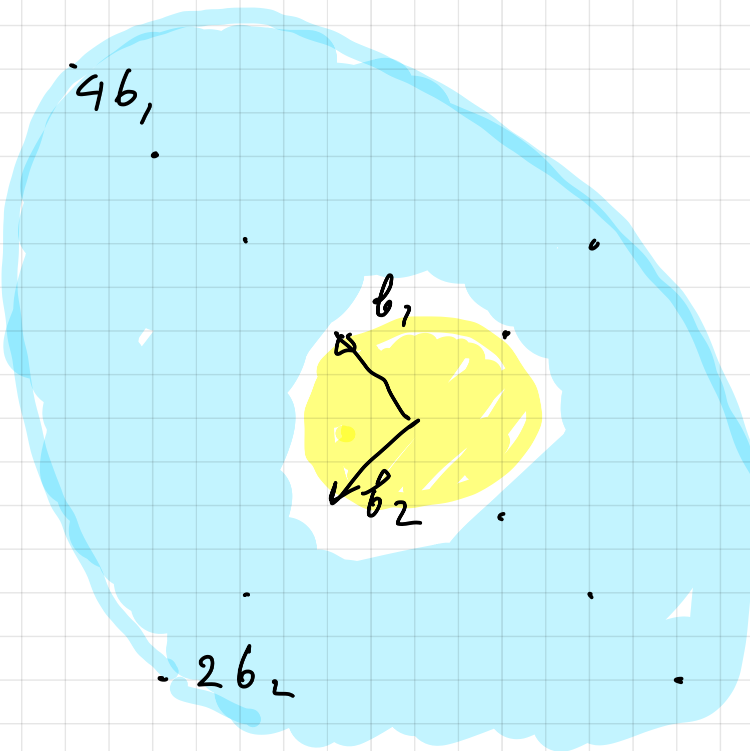
$\mathcal{B} = (b_1, b_2)$, $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Wir rechnen $F_{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ aus.

$$F(b_1) = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = 4 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 \iff F(b_1)_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$F(b_2) = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} = 0 \cdot b_1 + 2 \cdot b_2 \iff F(b_2)_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow F_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$



Fortsetzung des Beispiels (für Physik)

Unsere Vektoren und Koordinaten sind zeit-abhängig. Mit Punkt wird die Zeit-Ableitung bezeichnet (die Geschwindigkeit).

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + 3x_2 \end{cases}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} x \qquad x = x_\varepsilon = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Wir wollen aber x so führen:

$$x = \beta_1 \cdot b_1 + \beta_2 \cdot b_2$$

(β_1, β_2 zeit-abhängig, wie x_i
$\mathcal{B} = (b_1, b_2)$ aber nicht.

$$\dot{\beta}_1 \cdot b_1 + \dot{\beta}_2 \cdot b_2 = \beta_1 \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} b_1}_{4b_1} + \beta_2 \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} b_2}_{2b_2}$$

$$\dot{\beta}_1 \cdot b_1 + \dot{\beta}_2 \cdot b_2 = 4\beta_1 b_1 + 2\beta_2 b_2$$

$$\begin{cases} \dot{\beta}_1 = 4\beta_1 \\ \dot{\beta}_2 = 2\beta_2 \end{cases}$$

unabhängige Gleichungen

$$\beta_1 = C_1 \cdot e^{4t} \qquad \beta_2 = C_2 \cdot e^{2t}$$

$$X = \beta_1 \cdot b_1 + \beta_2 \cdot b_2 = c_1 e^{4t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = c_1 e^{4t} + c_2 e^{2t} \\ x_2 = c_1 e^{4t} - c_2 e^{2t} \end{cases}$$