3.3.3. Kriterien für lineare Unabhängigkeit

Thm Sei $(v_i)_{i\in I}$ ein Vektorsystem aus Vektoren eines Vektorraums V über $\mathbb{K}$. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

(i) $(v_i)_{i\in I}$ ist linear unabhängig

(ii) Jeder Vektor von $\operatorname{lin}(v_i)_{i\in I}$ lässt sich in eindeutiger Weise als Linearkombination von $\operatorname{lin}(v_i)_{i\in I}$ darstellen.

Beweis: (ii) $\Rightarrow$ (i):

$0 \in \operatorname{lin}(v_i)_{i\in I}$ ist $0 = \sum_{i\in I} \lambda_i v_i$

mit $\lambda_i = 0$ für alle $i \in I$.

Wenn 0 mit keiner anderen Wahl von Lambdas so wie oben darstellbar ist, so ist $(v_i)_{i\in I}$ laut der Definition linear unabhängig.

$\overline{(ii)} \Rightarrow \overline{(i)}$: $\overline{(ii)} \Rightarrow$ es gibt ein $v \in \operatorname{lin}(v_i)_{i\in I}$

mit $v = \sum_{i\in I} \alpha_i v_i = \sum_{i\in I} \beta_i v_i$ mit gewissen

$\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{K}$ derart, dass $\alpha_i \neq \beta_i$ ist, für mindestens ein $i \in I$.

$$\Rightarrow \quad 0 = v - v = \sum_{i\in I} \alpha_i v_i - \sum_{i \in I} \beta_i v_i$$

$$= \sum_{i \in I} (\alpha_i - \beta_i) v_i \text{ , wobei}$$

$\alpha_i - \beta_i \neq 0$ für mindestens ein $i \in I$.

$\Rightarrow (v_i)_{i\in I}$ ist linear abhängig $\Rightarrow \overline{(i)}$. $\square$

3.3.4. Eigenschaften der linearen Abhängigkeit

Prop Sei V VR über $\mathbb{K}$. Dann gilt:

(i) Ein einziger Vektor $v \in V$ ist genau dann linear abhängig, wenn $v = 0$ ist.

(ii) Gehört 0 zum vorliegenden System von Vektoren, so ist das System linear abhängig.

(iii) Kommt ein Vektor aus V in einem System von Vektoren mehrfach vor, so ist das System linear abhängig.

(iv) Für $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$ ist ein Vektorsystem $v_1, \ldots, v_r$ genau dann linear abhängig, wenn für ein $k = 1, \ldots, r$ die Bedingung

$$v_k \in \text{Lin}(v_i)_{i \in \{1,\ldots,r\} \setminus \{k\}}$$

erfüllt ist.

<u>Beweis:</u>

(i) $\lambda \cdot v = 0 \iff \lambda = 0$ oder $v = 0$

$(\lambda \in \mathbb{K},\ v \in \mathbb{K})$.

Somit ist $0 \in V$ linear abhängig, wegen $1 \cdot 0 = 0$.

Außerdem ist jedes $v \in V \setminus \{0\}$ linear unabhängig, denn: $\lambda \cdot v = 0 \iff \lambda = 0$.

(ii) ist klar.

(iii) auch klar denn $(-1)\cdot v + 1\cdot v = 0$.

(iv) Angenommen, $v_1, \dots, v_r$ sind linear abhängig, d.h. $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i = 0$ für gewisse $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$, wobei für ein $k = 1, \dots, r$ $\lambda_k \neq 0$ ist.

$$\Rightarrow \quad \lambda_k v_k + \sum_{\substack{i=1,\dots,r, \\ i\neq k}} \lambda_i v_i = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_k v_k = \sum_{\substack{i=1,\dots,r \\ i\neq k}} (-\lambda_i)\cdot v_i$$

$$\Rightarrow \quad v_k = \sum_{\substack{i=1,\dots,r \\ i\neq k}} \left(-\frac{\lambda_i}{\lambda_k}\right) v_i$$

$$\Rightarrow \quad v_k \in \operatorname{lin}(v_1, \dots, v_{k-1}, v_{k+1}, \dots, v_r).$$

Umgekehrt: Angenommen $v_k \in \operatorname{lin}(v_1, \dots, v_{k-1}, v_{k+1}, \dots, v_r)$

$\Rightarrow$ $v_k = \alpha_1 \cdot v_1 + \dots + \alpha_{k-1}\cdot v_{k-1} + \alpha_{k+1}\cdot v_{k+1} + \dots + \alpha_r \cdot v_r$ für gewisse $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_r \in \mathbb{K}$.

$\Rightarrow$

$$\underbrace{\alpha_1 \cdot v_1 + \dots + \alpha_{k-1}\cdot v_{k-1} + (-1)\cdot v_k + \alpha_{k+1}\cdot v_{k+1} + \dots + \alpha_r\cdot v_r}_{\text{einer der Koeffizienten ist } -1 \text{, also } \neq 0.} = 0$$

$\Rightarrow$ $v_1, \dots, v_r$ sind linear abhängig.

3.4. Basis und Dimension

3.4.1 Erzeugendensysteme und Basen

Sei: V VR über $\mathbb{K}$. Dann heißt ein Vektorsystem $(v_i)_{i \in I}$ Erzeugendensystem von V, wenn $\operatorname{lin}(v_i)_{i \in I} = V$ ist.

Des Weiteren heißt ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von V eine Basis von V.

Ein VR heißt endlich erzeugt, wenn er eine endliche Basis besitzt.

Bsp $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ $\quad V = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0 \}$

$v_1 = (1, 1, -2)$

$v_2 = (1, -2, 1)$ $\quad v_1, v_2, v_3 \in V$

$v_3 = (-2, 1, 1)$

$V \overset{?}{=} \operatorname{lin}(v_1, v_2, v_3)$ $\quad$ ist (v_1, v_2, v_3) erzeugend für V

v_1, v_2, v_3 linear unabhängig $?$

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = (x, y, z)$$

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

λ_1	λ_2	λ_3	x	y	z	
1	1	-2	1	0	0	
1	-2	1	0	1	0	$(2) := (2) - (1)$
-2	1	1	0	0	1	$(3) := (3) + 2 \cdot (1)$

λ_1	λ_2	λ_3	x	y	z	
1	1	-2	1	0	0	
0	-3	3	-1	1	0	
0	3	-3	2	0	1	$(3) := (3) + (2)$

λ_1	λ_2	λ_3	x	y	z
1	1	-2	1	0	0
0	-3	3	-1	1	0
0	0	0	1	1	1

λ_1	λ_2	λ_3	x	y	z
1	1	-2	1	0	0
0	1	-1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0
0	0	0	1	1	1

$(1) := (1) - (2).$

λ_1	λ_2	λ_3	x	y	z
1	0	-1	$2/3$	$1/3$	0
0	1	-1	$1/3$	$-1/3$	0
0	0	0	1	1	1

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \iff \boxed{\begin{aligned} \lambda_1 - \lambda_3 &= \tfrac{2}{3}x + \tfrac{1}{3}y \\ \lambda_2 - \lambda_3 &= \tfrac{1}{3}x - \tfrac{1}{3}y \\ 0 &= x + y + z \end{aligned}}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \underbrace{\lambda_1}_{\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y} \cdot v_1 + \underbrace{\lambda_2}_{\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y} \cdot v_2 \quad \underbrace{\lambda_3}_{0} \cdot v_3 \quad \text{gilt}$$

wenn $x + y + z = 0$ ist

$\Rightarrow$ (v_1, v_2, v_3) ist erzeugend für V.

linear unabhängig?

$$\lambda_1 - \lambda_3 = 0$$
$$\lambda_2 - \lambda_3 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\lambda_1}_{=\lambda_3} \cdot v_1 + \underbrace{\lambda_2}_{=\lambda_3} \cdot v_2 + \underbrace{\lambda_3}_{=1} \cdot v_3$$

mit anderen Worten $x = y = z = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3$$

$\Rightarrow (v_1, v_2, v_3)$ linear abhängig

(v_1, v_2) sind linear unabhängig und erzeugend für V:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \boxed{\begin{aligned} \lambda_1 &= \tfrac{2}{3} x + \tfrac{1}{3} y \\ \lambda_2 &= \tfrac{1}{3} x - \tfrac{1}{3} y \\ 0 &= x + y + z \end{aligned}}$$

wir haben die vorige Berechnung auf den Fall $\lambda_3 = 0$ spezialisiert.