(D9) $A = \begin{bmatrix} B & C \\ O & D \end{bmatrix}$.

Kästchen-Theorem

Zu zeigen: $\det(A) = \det(B)\det(D)$.

Mit Hilfe vom Gauß-Verfahren lässt sich B zu einer oberen Dreiecksmatrix B' überführen.
Sei s die Anzahl der Typ-1 Transformationen, die wir dabei ausgeführt haben (wir machen nur Typ 1 und Typ 3). Dann gilt

$$\det(B') = (-1)^s \cdot \det(B) \quad \text{nach (D6) und (D7).}$$

Analog kann man mit Gauß-Verfahren, mit El. Transformationen vom Typ 1 und 3 D zu einer oberen Dreiecksmatrix D' überführen.
Es gilt: $\det(D') = (-1)^t \det(D)$, wobei t die Anzahl der Typ-1-Transformationen ist, die man bei der Änderung von D benutzt hat.

Die beiden Verfahren, für B und D, lassen sich auf A übertragen. Wenn wir das tun, lässt sich A zu einer Matrix $A' = \begin{bmatrix} B' & C' \\ O & D' \end{bmatrix}$ konvertieren, die eine obere Dreiecksmatrix ist.

Nach (D6) und (D7) gilt:

$$\det(A') = (-1)^{s+t} \det(A).$$

Nach (D8) gilt $\det(A') = \det(B') \cdot \det(D')$.

$$\Rightarrow \quad (-1)^{s+t} \det(A) = (-1)^s \det(B) \cdot (-1)^t \det(D)$$

$$\Rightarrow \quad \det(A) = \det(B) \cdot \det(D).$$

(D10) $\det(a_1, \dots, a_n) = 0 \iff a_1, \dots, a_n$ sind linear abhängig.

$n=1$ ist ein trivialer Fall. Sei $n \geq 2$.

Seien $a_1, \dots, a_n$ linear abhängig. Dann ist einer dieser Vektoren Linearkomb. der restlichen. OBdA sei $a_1 = \sum_{i=2}^{n} \lambda_i a_i$ mit $\lambda_2, \dots, \lambda_n \in K$. $\Rightarrow$

$$\det(a_1, \dots, a_n) = \det\left(\sum_{i=2}^{n} \lambda_i a_i, a_2, \dots, a_n\right)$$

$$\overset{(D1)}{=} \sum_{i=2}^{n} \lambda_i \underbrace{\det(a_i, a_2, \dots, a_n)}_{=0} = 0.$$

wegen (D2), denn a_i kommt doppelt vor.

Sei nun $a_1, \dots, a_n$ ein linear unabhängiges System. Mit ETs vom Typ 1 und 3, die man zu Spalten der Matrix A anwendet, lässt sich A zu einer Diagonalmatrix $A' = (\alpha_1 e_1, \alpha_2 e_2, \dots, \alpha_n e_n)$ überführen (Stichwort: Gauß-Jordan).

Einerseits gilt $\det(A') = \pm \det(A)$ mit einem passenden Vorzeichen.

Andererseits ist

$$\det(A') = \alpha_1 \cdots \alpha_n \det(e_1, \dots, e_n) = \alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_n.$$

Des Weiteren ändern die ETs der Spalten den Spaltenraum nicht. Daraus folgt:

$$\operatorname{lin}(\alpha_1 e_1, \dots, \alpha_n e_n) = \operatorname{lin}(a_1, \dots, a_n) = K^n$$

$\Rightarrow \alpha_1, .., \alpha_n \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \Longrightarrow$

$\det(A) = \pm \det(A') = \pm \alpha_1 \cdots \alpha_n \neq 0.$

(D11) Zu zeigen: $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$.

Ist $\operatorname{rang}(B) < n$, dann ist auch $\operatorname{rang}(AB) < n$, sodass man aus (D10) $\det(AB) = 0$ und $\det(B) = 0$ erhält. Also gilt $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$ im Fall $\operatorname{rang}(B) < n$.

Sei nun Rang von B gleich n.

$$B \xrightarrow[\text{ETs vom Typ 1,2,3 auf Spalten}]{\text{Gauß-Jordan}} I_n \quad \text{(Einheitsmatrix)}$$

Jede ET der Spalten kann als Multiplikation mit einer Matrix beschrieben werden:

Bei Typ 1: $C = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{K}^{n \times n}$

c_i, c_j werden vertauscht:

$$C \longmapsto C \cdot S' \quad \text{mit}$$

$$S = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \quad \quad (i) & (j) \end{array} \\ \begin{array}{c} (i) \\ (j) \end{array} & \begin{bmatrix} 1 \ddots & & & \\ & 0 & 1 & \\ & 1 & 0 & \\ & & & \ddots 1 \end{bmatrix} \end{array} = \det(e_1, .., e_{i-1}, e_j, e_{i+1}, .., e_{j-1}, e_i, e_{j+1}, \dots, e_n)$$

$$\begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Wir wissen:

$\det(CS) = -\det(C)$ wegen (D6)

$\det(S) = -\det(e_1, .., e_n) = -1$ wegen (D6) und (D3)

Also ist in diesem Fall

$$\det(CS) = \det(C) \cdot \det(S).$$

Typ 2: i-te Spalte mit einem $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ multiplizieren.

$$C \longmapsto C \cdot S$$

$$S = (e_1, \dots, e_{i-1}, \lambda e_i, e_{i+1}, \dots, e_n)$$

Analog: $\det(CS) = \det(C) \cdot \det(S)$.

Typ 3: i-te Spalte wird durch (i-te Spalte) $+ \lambda \cdot$ (j-te Spalte) ersetzt, $i \neq j$.

Einfachheit halber $i = 1$, $j = 2$.

$$C \longmapsto C \cdot S' \quad \text{mit}$$

$$S' = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ \lambda & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$= [e_1 + \lambda e_2, e_2, \dots, e_n]$$

Man sieht analog, dass

$\det(C \cdot S) = \det(C)$ und $\det(S) = 1$

gilt, woraus sich wieder

$$\det(C \cdot S) = \det(C) \cdot \det(S)$$

ergibt.

$$I_n \xrightarrow{\text{Spaltentransf. vom Typ 1, 2, 3}} B$$

$\Rightarrow \quad B = S_1 \cdot \ldots \cdot S_m$ mit Matrizen

$S_1, \dots, S_m$, die die ETs kodieren.

$$\Rightarrow \det(AB) = \det(A S_1 \cdots S_m)$$
$$= \det(A S_1 \cdots S_{m-1}) \cdot \det(S_m)$$
$$\vdots$$
$$= \det(A)\det(S_1) \cdot \ldots \cdot \det(S_m)$$
$$= \det(A)\det(S_1 S_2)\det(S_3) \cdots \det(S_m)$$
$$\vdots$$
$$= \det(A) \cdot \det(\underbrace{S_1 S_2 \cdots S_m}_{B})$$

Ist A invertierbar, so gilt

$$1 \overset{(D3)}{=} \det(I_n) = \det(A \cdot A^{-1}) = \det(A) \cdot \det(A^{-1})$$
$$\Rightarrow \det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}! \qquad \square$$

5.2 Leibniz-Formel

5.2.1 Permutationen und Determinanten

Erinnerung:

$S_n = \{$ Bijektive Abbildungen von $\{1,..,n\}$ nach $\{1,..,n\}$ $\}$

ist Gruppe bzgl. der Komposition, welche man als Produkt bezeichnet.

Elemente von S_n werden Permutationen genannt.

Schreibweise: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{bmatrix}$

Bsp.

$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ heißt: $\sigma(1) = 3$, $\sigma(2) = 1$, $\sigma(3) = 2$ $\quad \sigma \in S_3$

Für $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n} = (a_1, \dots, a_n) \in K^{n\times n}$

wird eine Formel für $\det(A)$ hergeleitet.

$$\det(A) = \det(a_1,\dots,a_n) = \det\Big(\sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1 1} e_{i_1}, \dots, \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_n n} e_{i_n}\Big)$$

$$\overset{(D1)}{=} \sum_{i_1,\dots,i_n = 1,\dots,n} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} \underbrace{\det(e_{i_1},\dots,e_{i_n})}$$

wenn $i_1,\dots,i_n$ nicht alle unterschiedlich sind, erhält man nach (D2) den Wert 0.

wenn $i_1,\dots,i_n$ alle unterschiedlich sind, entspricht diese Wahl einer Permutation σ mit

$$\sigma(1) = i_1$$
$$\sigma(2) = i_2$$
$$\vdots$$
$$\sigma(n) = i_n$$

$\Rightarrow$

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma(1),1} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma(n),n} \underbrace{\det(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})}$$

der Wert, der nur von σ abhängig ist und noch verstanden werden soll.

Bsp Fall $n=3$. $A=(a_1,a_2,a_3)=(a_{ij})_{i,j=1,2,3}\in K^{3\times 3}$

$$\det(A)=\det(a_1,a_2,a_3)$$

$$=\det\left(\sum_{i=1}^{3}a_{i,1}e_i,\ \sum_{j=1}^{3}a_{j,2}e_j,\ \sum_{k=1}^{3}a_{k,3}e_k\right)$$

$$\overset{(D1)}{=}\sum_{i,j,k=1,2,3}a_{i,1}a_{j,2}a_{k,3}\underbrace{\det(e_i,e_j,e_k)}$$

Nach (D2) ist das Null, wenn unter i,j,k ein Wert mehrfach vorkommt.

$$=\sum_{\substack{i,j,k \text{ sind}\\ \text{drei verschiedene}\\ \text{Indizes in } \{1,2,3\}}}a_{i,1}a_{j,2}a_{k,3}\det(e_i,e_j,e_k)$$

$\det(e_2,e_3,e_1)=-\det(e_1,e_3,e_2)$
$=\det(e_1,e_2,e_3)=1$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}\underbrace{\det\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}_{=1 \text{ nach (D3)}}+a_{21}a_{32}a_{13}\underbrace{\det\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}}_{=1}+a_{31}a_{12}a_{23}\underbrace{\det\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}}_{=1}$$

$$+a_{31}a_{22}a_{13}\underbrace{\det\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}}_{=-1}+a_{21}a_{12}a_{33}\underbrace{\det\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}}_{=-1}+a_{11}a_{32}a_{23}\underbrace{\det\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}}_{=-1}$$

Die 6 Terme entsprechen den $6=3!$ Permutationen auf 3 Elementen { Spaltenindex $\mapsto$ Zeilenindex ;

$1\longmapsto i$
$2\longmapsto j$
$3\longmapsto k$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}$$
$$-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23}.$$

5.2.2 Zerlegung von Permutationen in Transpositionen.

Für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, und Indizes $s, t \in \{1, \dots, n\}$ mit $s \neq t$, heißt $\sigma \in S_n$ die Transposition von s and t, wenn

$$\sigma(i) = \begin{cases} t, & \text{bei } i = s \\ s, & \text{bei } i = t \\ i & \text{sonst} \end{cases}$$

Proposition Jede Permutation ist Produkt endlich vieler Transpositionen.

Beweis: Induktion über n (Details im Skript).

Bsp. $\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

2 5 1 3 4

2 4 1 3 5

2 3 1 4 5

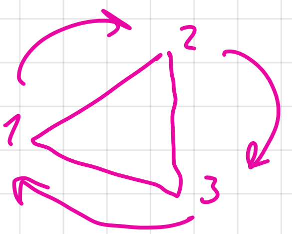
2 1 3 4 5

1 2 3 4 5

$\Rightarrow$ Dieses σ kann als Produkt von 4 Permutationen geschrieben werden.

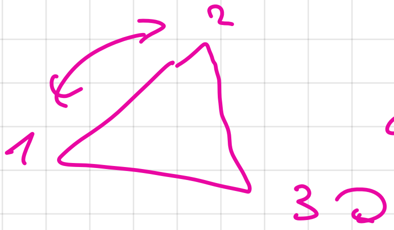
4 Transp.

$$\det(e_2, e_5, e_1, e_3, e_4) = 1 = (-1)^4$$



Drehung

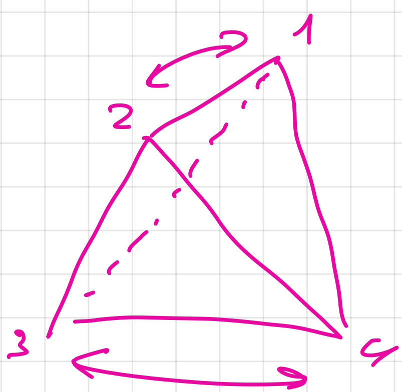
$\det(e_2, e_3, e_1) = 1$



Spiegelung

$\det(e_2, e_1, e_3) = -1$

$\det(e_2, e_1, e_4, e_3) = 1$



5.2.3. Vorzeichen der Permutationen

Als $\binom{X}{2}$ bezeichnen wir die Menge aller zweielementigen Teilmengen der Menge X, d.h.

$$\binom{X}{2} = \{ \{a,b\} : a,b \in X,\ a \neq b \}$$

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $N = \{1, \dots, n\}$.

Wir nennen $I \in \binom{N}{2}$ einen *Fehlstand* der Permutation $\sigma \in S_n$, wenn $I = \{i,j\}$ mit $i<j$ und $\sigma(i) > \sigma(j)$.

Bsp.

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Fehlstände:
$\{1,3\}$
$\underbrace{\{2,3\},\ \{2,4\},\ \{2,5\}}$

Gerade Anzahl an Fehlständen.

Ist k die Anzahl der Fehlstände der Permutation $\sigma \in S_n$ so nennt man

$$\operatorname{sign}(\sigma) = (-1)^k$$

das *Vorzeichen* von σ, auch *Signum* genannt.

Also: $\operatorname{sign}: S_n \longrightarrow \{-1, 1\}$

Prop. Sei $n \in \mathbb{N}$, sei $N = \{1, \dots, n\}$. Dann gilt:

$$\operatorname{sign}(\sigma) = \prod_{\{i,j\} \in \binom{N}{2}} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$$

[Der Ausdruck rechts ist wohldefiniert.
Etwa: bei $\{i,j\} = \{3,4\}$ ergibt die Wahl $i=3, j=4$ den selben Faktor wie die Wahl $i=4, j=3$.]

Proof: Seien $i, j \in N$ mit $i < j$.

Ist $\{i,j\}$ Fehlstand, so gilt

$$\frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i} = (-1) \cdot \frac{|\sigma(j)-\sigma(i)|}{|j-i|}.$$

Ist $\{i,j\}$ kein Fehlstand, so gilt

$$\frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i} = (+1) \frac{|\sigma(j)-\sigma(i)|}{|j-i|}$$

$$\Rightarrow \prod_{\{i,j\} \in \binom{N}{2}} \frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i} = \operatorname{sign} \sigma \cdot \prod_{\{i,j\} \in \binom{N}{2}} \frac{|\sigma(j)-\sigma(i)|}{|j-i|}$$

$$= \operatorname{sign} \sigma \cdot \underbrace{\boxed{\frac{\prod_{\{i,j\} \in \binom{N}{2}} |\sigma(j)-\sigma(i)|}{\prod_{\{i,j\} \in \binom{N}{2}} |j-i|}}}_{= 1} \qquad \square$$

1, denn die Produkte im Zähler und Nenner sind gleich.

$\boxed{5.2.4}$ Vorzeichen und das Produkt von Permutationen

Thm Seien $\sigma, \tau \in S_n$. Dann gilt:

$$\operatorname{sign}(\sigma\tau) = \operatorname{sign}(\sigma) \operatorname{sign}(\tau).$$

Beweis:

$$\operatorname{sign}(\sigma\tau) = \prod_{\{i,j\} \in \binom{N}{2}} \frac{\sigma(\tau(j)) - \sigma(\tau(i))}{j-i}$$

$\boxed{N = \{1, \dots, n\}}$

$$= \prod_{\{i,j\} \in \binom{N}{2}} \frac{\sigma(\tau(j)) - \sigma(\tau(i))}{\tau(j) - \tau(i)} \cdot \frac{\tau(j)-\tau(i)}{j-i}$$

$$= \underbrace{\prod_{\{i,j\} \in \binom{N}{2}} \frac{\sigma(\tau(j)) - \sigma(\tau(i))}{\tau(j) - \tau(i)}}_{\substack{\parallel \\ \operatorname{sign}(\sigma)}} \cdot \underbrace{\prod_{\{i,j\} \in \binom{N}{2}} \frac{\tau(j) - \tau(i)}{j - i}}_{\substack{\parallel \\ \operatorname{sign}(\tau)}}$$

(Das sieht man nach der Substitution
$i' = \tau(i)$
$j' = \tau(j)$)

$\square$