Agenda
Körper komplexer Zahlen (2.3.3)
Vektorräume Definition
Grundeigenschaften.

2.3.3. Körper komplexer Zahlen

Es gibt Polynome vom Grad ≥ 1 mit reellen Koeffizienten, die keine reellen Nullstellen haben. z.B. x^2+1.

Einen Körper $\mathbb{K}$ nennt man algebraisch abgeschlossen, wenn jedes Polynom $f \in \mathbb{K}[t]$ vom Grad ≥ 1 eine Nullstelle in $\mathbb{K}$ hat.

Also ist $\mathbb{R}$ kein algebraisch abgeschlossener Körper.

Der Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ entsteht aus $\mathbb{R}$, indem man zu $\mathbb{R}$ ein formales Element i mit $i^2+1=0$ hinzufügt (eine formale Nullstelle von t^2+1).

$$\mathbb{C} := \mathbb{R}[i] := \{ f(i) : f \in \mathbb{R}[t] \}$$
$$= \{ a+bi : a,b \in \mathbb{R} \}$$

Bsp

$$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] := \{ f(\sqrt{2}) : f \in \mathbb{Q}[t] \}$$

$\alpha = \sqrt{2}$ kann man formal anhand $\boxed{\alpha^2 = 2}$ nutzen.

$$(1+\alpha)^2 = 1+2\alpha+\alpha^2 = 1+2\alpha+2$$
$$= 3+2\alpha$$

Theorem $\mathbb{C}$ ist ein algebraisch abgeschlossener Körper.

Hier ohne Beweis.

Korollar Jedes Polynom $f \in \mathbb{C}[t]$ vom Grad ≥ 1 ist als Produkt

$$f = c \cdot (t-a_1) \cdot \ldots \cdot (t-a_n)$$

mit $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ darstellbar.

Beweis: Induktion über $n = \deg f$.

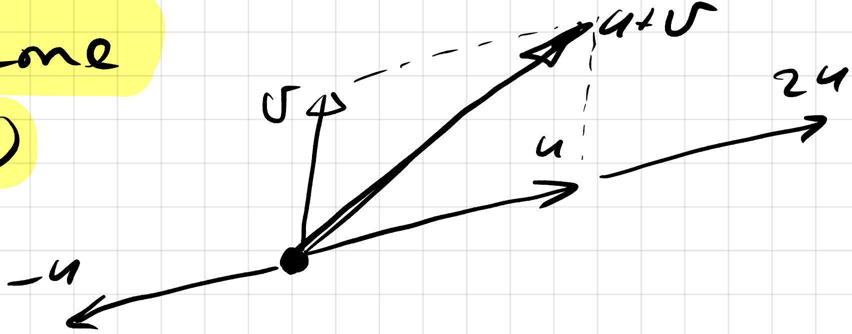
Ist $n=1$, so ist die Aussage klar.

Ist $n \geq 2$, so gibt es eine Nullstelle $a_1 \in \mathbb{C}$ von f, sodass man f als $f = (t-a_1) \cdot g$ faktorisieren kann, wo $g \in \mathbb{C}[t]$ ein Polynom vom Grad $n-1$ ist, zu dem man die Induktionsvoraussetzung anwenden kann. $\square$

Kapitel 3: Vektorräume

3.1. Vektorräume (VR)

3.1.1. Vektorraum $\mathbb{K}^n$



Sei $\mathbb{K}$ Körper und $n \in \mathbb{N}$. Dann führen wir auf $\mathbb{K}^n$ zwei Operationen ein:

$+ : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$ (Vektoraddition)

$\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$ (Skalarmultiplikation)

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n).$$

$$\alpha \cdot (x_1, \dots, x_n) := (\alpha \cdot x_1, \dots, \alpha \cdot x_n).$$

Bei $\mathbb{K}^n$ sind die Komponenten durch die Zahlen $1, \dots, n$ indexiert. Allgemeiner besitzt die Menge $\mathbb{K}^X$ aller Funktion $f : X \to \mathbb{K}$ auf einer Menge X eine analoge Struktur.

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$$

$$(\alpha \cdot f)(x) := \alpha \cdot f(x).$$

Der Fall $X = \{1, \dots, n\}$ entspricht der Menge $\mathbb{K}^n$.

CHF	1,10
CNY	0,15
EUR	1,19
GBP	1,34

} Vektor mit 4 Komponenten.

3.1.2. Ein allgemeiner Vektorraum über $\mathbb{K}$.

Ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$ ist eine Menge V, die mit zwei Verknüpfungen

$$+ : V \times V \longrightarrow V \quad \text{(Vektoraddition)}$$

$$\cdot : \mathbb{K} \times V \longrightarrow V \quad \text{(Skalarmultiplikation)}$$

versehen ist, welche die folgenden Eigenschaften erfüllen:

(V1) $(V,+)$ ist abelsche Gruppe

(V2) $(\alpha+\beta)\cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$,

$\alpha \cdot (u+v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$,

$(\alpha \cdot \beta) \cdot u = \alpha \cdot (\beta \cdot u)$,

$1 \cdot u = u$

gelten für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ und $u, v \in V$.

$u + v = v + u$
$(u+v)+w = u+(v+w)$
$u + 0 = u$
$u + (-u) = 0$

Bem Die Null von $(V,+)$ heißt der Nullvektor.
Elemente von V heißen Vektoren. Elemente von $\mathbb{K}$ heißen Skalare.

Proposition Sei V Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$. Seien $\lambda \in \mathbb{K}$ und $v \in V$.
Dann gilt:

(i) $\lambda \cdot v = 0 \iff \lambda = 0$ oder $v = 0$.

(ii) $(-1)\cdot v = -v$

Beweis: Übungsaufgabe.

3.2. Untervektorräume (UVR)

3.2.1. Untervektorraum

Sei W Teilmenge eines Untervektorraums V über $\mathbb{K}$. Dann heißt W Untervektorraum von V, wenn Folgendes gilt:

(UV1) $W \neq \emptyset$

(UV2) $u, v \in W \Rightarrow u + v \in W$

(UV3) $\alpha \in \mathbb{K}, v \in W \Rightarrow \alpha \cdot v \in W$

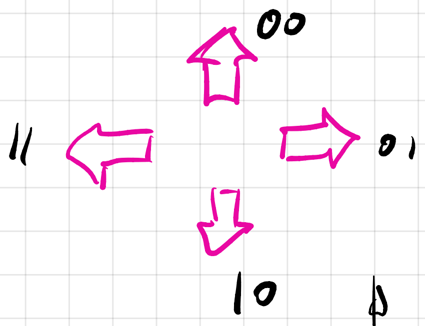
Bsp Die Lösungsmenge eines LGS, das homogen ist (homogen heißt: rechte Seiten sind alle 0) ist ein UVR.

Bsp Sei $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2$. Dann ist

$$W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{K}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$$

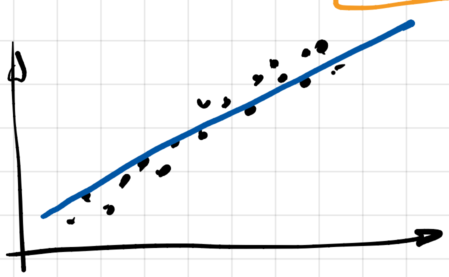
ein UVR von $\mathbb{K}^3$.

$$W = \{(0,0,0), (1,1,0), (1,0,1), (0,1,1)$$



000
011
101
110

Bsp



3.2.2. Kriterium für Untervektorräume

Thm Sei W Teilmenge eines VR V über $\mathbb{K}$. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

(i) W ist UVR von V

(ii) $+$ und $\cdot$ von V lassen sich auf W einschränken und darüber hinaus ist W VR über $\mathbb{K}$ bzgl. dieser Operationen.

Beweis: Übungsaufgabe.

3.2.3. Durchschnitt von UVR.

Proposition Sei V VR über $\mathbb{K}$ und W_i (mit i in einer Indexmenge I) Untervektorräume von V. Dann ist auch der Durchschnitt

$$W := \bigcap_{i \in I} W_i$$

ein UVR von V.

Zum Beweis: man verifiziert, dass $0 \in W$ ist. Der Rest folgt direkt. $\square$

3.2.4. Vereinigung von Untervektorräumen

Im Folgenden steht $\mathbb{K}$ für einen Körper.

Prop Sei V VR über $\mathbb{K}$. Seien W und W' UVR von V derart, dass $W \cup W'$ ebenfalls ein UVR von V ist. Dann gilt: $W \subseteq W'$ oder $W' \subseteq W$.

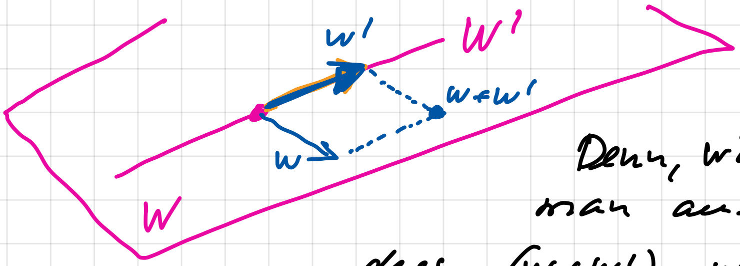
Logik:

$A \Rightarrow (B \vee C)$

äquivalent zu

$A \wedge \overline{B} \Rightarrow C$

Beweis: Wir nehmen an, $W \nsubseteq W'$ und zeigen, dass $W' \subseteq W$ erfüllt ist. Da $W \nsubseteq W'$ ist, ist $W \setminus W' \neq \emptyset$, sodass wir ein $w \in W$ fixieren können. Sei $w' \in W'$ beliebig. Wir zeigen, dass w' in W liegt. Es gilt $w, w' \in W \cup W'$. Da $W \cup W'$ ein UVR ist, folgt, dass $w + w' \in W \cup W'$ ist.



Es stellt sich heraus, dass $w+w'$ nicht in W' liegt. Denn, wäre $w+w' \in W'$, so würde man aus $w', w+w' \in W'$ folgern, dass $\underbrace{(w+w')}_{\in W'} - \underbrace{w'}_{\in W'} = w$ in W', denn W' ist ein UVR.

Das widerspricht aber der Wahl von $w \in W \setminus W'$! Also ist $w+w' \notin W'$. Da $w+w'$ in $W \cup W'$ ist, gilt damit $w+w' \in W$. Aus $w, w+w' \in W$ folgt, dass $w' = \underbrace{(w+w')}_{\in W} - \underbrace{w}_{\in W}$ in W liegt, denn W ist ein UVR. □

3.3 Linearkombinationen

3.3.1. Linearkombination Seien $v_1, \dots, v_r$ Vektoren eines Vektorraums V über $\mathbb{K}$ $(r \in \mathbb{N}_0)$. Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$. Dann heißt $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r$ die <u>Linearkombination</u> der Vektoren $v_1, \dots, v_r$ mit den Koeffizienten $\lambda_1, \dots, \lambda_r$. Im entarteten Fall $r=0$ ist die Linearkombination als der Nullvektor $0 \in V$ definiert. Die Menge aller Linearkombinationen der Vektoren $v_1, \dots, v_r$

$$\mathrm{lin}_{\mathbb{K}}(v_1, \dots, v_r) := \{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r : \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}\}$$

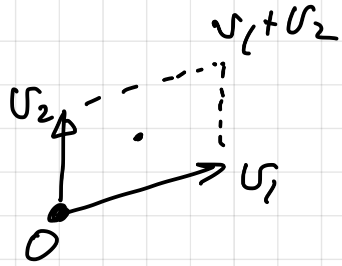
nennt man die <u>lineare Hülle</u> der Vektoren $v_1, \dots, v_r$.

Ist die Wahl vom Körper $\mathbb{K}$ aus dem Kontext klar, so wird das untergestellte $\mathbb{K}$ in der Bezeichnung $\mathrm{lin}_{\mathbb{K}}$ oft weggelassen. Für allgemeine Vektorsysteme $(v_i)_{i \in I}$ mit $v_i \in V$ (die auch unendlich sein können) definiert man die lineare Hülle von $(v_i)_{i \in I}$ als

$$\mathrm{lin}(v_i)_{i \in I} = \{\lambda_1 v_{i_1} + \dots + \lambda_r v_{i_r} : r \in \mathbb{N},\ i_1, \dots, i_r \in I,\ \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}\}$$

Des Weiteren definiert man die lineare Hülle einer Teilmenge M von V als

$$\mathrm{lin}(M) := \{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r : r \in \mathbb{N}_0,\ v_1, \dots, v_r \in M,\ \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}\}$$



$0 = 0\cdot v_1 + 0\cdot v_2 \in \operatorname{lin}(v_1,v_2)$

$v_1+v_2 = 1\cdot v_1 + 1\cdot v_2 \in \operatorname{lin}(v_1,v_2)$

$v_1 = 1\cdot v_1 + 0\cdot v_2 \in \operatorname{lin}(v_1,v_2)$

$v_2 = 0\cdot v_1 + 1\cdot v_2 \in \operatorname{lin}(v_1,v_2)$

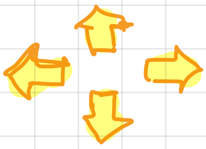
$\frac{1}{2}\cdot v_1 + \frac{1}{2}\cdot v_2 \in \operatorname{lin}(v_1,v_2)$

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$

$\operatorname{lin}_{\mathbb{Z}_2}(v_1,v_2)$ $\quad v_1 = (1,0,1) \in \mathbb{Z}_2^3$

$v_2 = (0,1,1) \in \mathbb{Z}_2^3$

$$\operatorname{lin}_{\mathbb{Z}_2}(v_1,v_2) = \{(0,0,0),\ (1,0,1),\ (0,1,1),\ \underbrace{(1,1,0)}_{=(1,0,1)+(0,1,1)}\}$$

Vgl. 

Prop Sei $(v_i)_{i\in I}$ Vektorsystem aus Vektoren eines Vektorraums V über $\mathbb{K}$. Dann gilt:

(i) $\operatorname{lin}(v_i)_{i\in I}$ ist ein UVR von V.

(ii) Gilt für einen UVR W von V, dass alle v_i $(i \in I)$ in W liegen, so ist $\operatorname{lin}(v_i)_{i\in I} \subseteq W$.

Beweis: direkt. $\square$

$\operatorname{lin}(v)$ mit $v \neq 0$ — Gerade, die 0 enthält

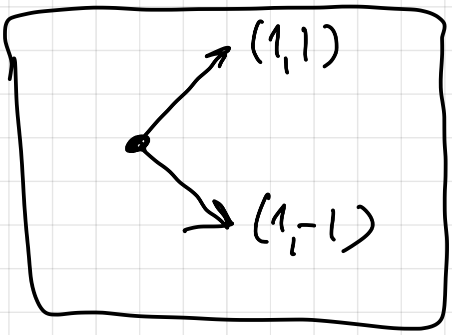
$\operatorname{lin}(v,w)$ mit $v \neq 0$, $w \notin \operatorname{lin}(v)$ — Ebene

3.3.2. Lineare Unabhängigkeit und Abhängigkeit

Vektoren $v_1,\dots,v_r$ $(r \in \mathbb{N}_0)$ in einem VR V über $\mathbb{K}$ heißen linear unabhängig, wenn aus der

Bedingung $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r = 0$ für beliebige $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ stets die Gleichungen $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_r = 0$ erfüllt sind. D.h., die lineare Kombination von linear unabhängigen Vektoren nur dann 0, wenn alle Koeffizienten der Linearkombination gleich 0 sind.

Bsp $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ $\quad v_1 = (1,1),\ v_2 = (1,-1)$



Wann ist $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0$?
Für welche λ_1, λ_2?

$$\lambda_1 \cdot (1,1) + \lambda_2 \cdot (1,-1) = (0,0)$$

wir lösen diese Vektorgleichung bzgl. λ_1, λ_2

$$\begin{cases} 1 \cdot \lambda_1 + 1 \cdot \lambda_2 = 0 & \leftarrow \text{1. Komponente} \\ 1 \cdot \lambda_1 + (-1) \cdot \lambda_2 = 0 & \leftarrow \text{2. Komponente} \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \end{array} \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \quad +\mathrm{I} \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 = 0 \end{cases} \iff \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

$\Longrightarrow$ v_1, v_2 sind linear unabhängig.

Vektoren, die nicht linear unabhängig sind, nennt man <u>linear abhängig</u>.
Mit anderen Worten: $v_1, \dots, v_r$ sind linear abhängig, wenn $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ existieren, die nicht alle gleich 0 sind und die Gleichung
$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r = 0 \text{ erfüllen.}$$