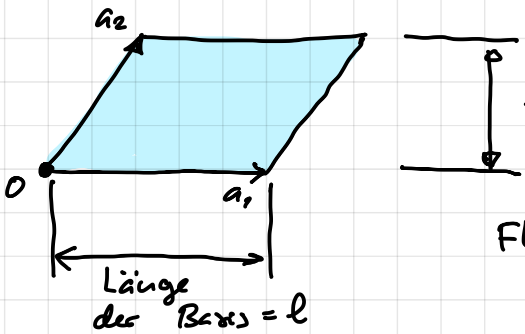
# LINEARE ALGEBRA 2

## SoSe 2025

# Kapitel 5: Determinanten

## 5.1. Grundlagen

### 5.1.1. Geometrische Motivation



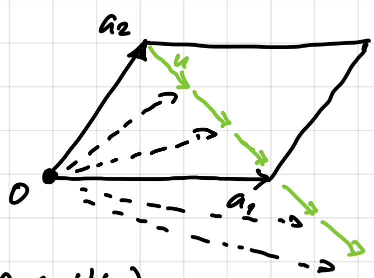

Fläche $= \ell \cdot h$

$$P(a_1, a_2) := \{ \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 : \quad \alpha_1, \alpha_2 \in [0,1] \}$$

Wenn $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^2$ linear unabhängig sind, dann ist $P(a_1, a_2)$ ein Parallelogramm, ansonsten entartet es sich zu einer Strecke.

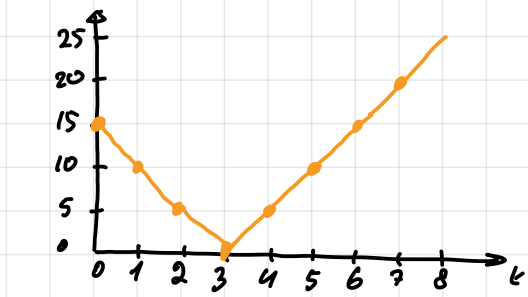
Sei $V(a_1, a_2)$ der Flächeninhalt von $P(a_1, a_2)$.

Wie verhält sich $V(a_1, a_2)$, wenn wir unter $a_1, a_2$ einen der Vektoren variieren und den anderen festhalten? Hier die ersten Einblicke an Beispielen:




$V(a_1, a_2 + tu)$

$t$ "Zeit". Unser Parallelogramm ändert sich mit der Zeit



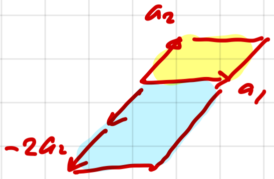

$V(a_1, u+v)$

$= V(a_1, u) + V(a_1, v)$

stimmt "öfter mal" aber doch nicht immer.

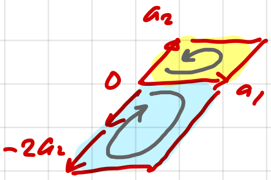
Betrag von $\lambda$:

$$V(a_1, \lambda a_2) = |\lambda| \, V(a_1, a_2)$$



Verbesserung: $V(a_1, a_2)$ mit einem Vorzeichen versehen

$\pm V(a_1, a_2)$, das die Orientierung des Systems $a_1\, a_2$ notiert




$(a_1, a_2) \mapsto 2$

$(a_1, -2a_2) \mapsto -2 \cdot 2 = 4$

Analog in der Dimension $n$:

$$P(\underset{\mathbb{R}^n}{\underset{\cap}{a_1}}, \dots, \underset{\mathbb{R}^n}{\underset{\cap}{a_n}}) := \{\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n : \alpha_1, \dots, \alpha_n \in [0,1]\}$$

Wenn $a_1, \dots, a_n$ linear unabhängig sind, dann ist $P(a_1, \dots, a_n)$ ein $n$-dim. Hyperparallelepiped.

$V(a_1, \dots, a_n)$ ist das $n$-dim. Volumen von $P(a_1, \dots, a_n)$.

**$\det(a_1, \dots, a_n)$ ist $V(a_1, \dots, a_n)$ mit einem passenden Vorzeichen.**

Das ist die intuitive Beschreibung. Die formale Definition kommt...

## 5.1.2. Definierende Eigenschaften

**Thm** Für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert eine eindeutige Funktion $\det : \underbrace{\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \times \dots \times \mathbb{K}^n}_{n} \longrightarrow \mathbb{K}$, die sogenannte <u>Determinante</u>, mit den folgenden Eigenschaften:

(D1) $\det(a_1, \dots, a_{i-1}, \alpha u + \beta v, a_{i+1}, \dots, a_n)$

$= \alpha \det(a_1, \dots, a_{i-1}, u, a_{i+1}, \dots, a_n) +$

$\beta \det(a_1, \dots, a_{i-1}, v, a_{i+1}, \dots, a_n)$

gilt für alle $a_1, \dots, a_n, u, v \in \mathbb{K}^n$, alle $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ und jedes $i = 1, \dots, n$ (d.h. det ist <u>multilinear</u>)

**(D2)** Für alle $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}^n$ folgt aus $a_i = a_j$ für eine Wahl von $i, j = 1, \dots, n$ und $i \neq j$ die Gleichung

$$\det(a_1, \dots, a_n) = 0.$$

(d.h. det ist alternierend)

**(D3)** $\det(\underbrace{e_1, \dots, e_n}_{\text{Standardbasis von } \mathbb{K}^n}) = 1$ (Normierung)

Der Beweis ergibt sich im Laufe des Kapitels.

(D1), (D2), (D3) $\Rightarrow \dots \Rightarrow \dots \Rightarrow \dots$
$\dots \Rightarrow \dots \Rightarrow \dots \Rightarrow$

$\det(a_1, \dots, a_n) =$ Konkrete Formel

Der Aufbau des Beweises.

Frage, ob (D2) durch "Tausch von zwei Vektoren $\Rightarrow$ Vorzeichenwechsel" ersetzbar ist:

$$\det(a_1, a_2) = -\det(a_2, a_1).$$
$$\Downarrow$$
$$\det(a_1, a_1) = -\det(a_1, a_1)$$
$$\Downarrow$$
$$(1+1) \cdot \det(a_1, a_1) = 0$$
$$\Updownarrow$$

ist nur dann äquivalent zu (D2) (bei $n = 2$), wenn $1 + 1 \neq 0$ ist (in unserem Körper $\mathbb{K}$).

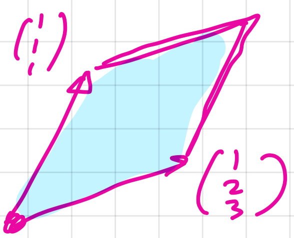
Antwort: nur bei $\mathbb{K}$ mit $1 + 1 \neq 0$.

Weitere Bezeichnungen $\det(A) := \det(a_1, \dots, a_n)$ bei einer $n \times n$ Matrix $A = (a_1 \dots a_n) \in \mathbb{K}^{n \times n}$ mit Spalten $a_1, \dots, a_n$.

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} =: \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \vdots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Weitere Bezeichnung (Vertikale Striche um die Matrix)

Frage zu $d$-Volumen in $\mathbb{R}^n$ bei $d < n$:




Beispiel mit $d = 2, n = 3$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\sqrt{\det(A^T \cdot A)}$$

$2 \times 3$ $\quad$ $3 \times 2$

$2 \times 2$

**Bsp.** Wir leiten die Formel für det im Fall $n=2$ aus (D1), (D2) und (D3) her.

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} = \det\left(\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22}\end{pmatrix}\right)$$

$$= \det(a_{11}e_1 + a_{21}e_2, a_{12}e_1 + a_{22}e_2)$$

$$\overset{(D1)}{=} a_{11}a_{12}\det(e_1,e_1) + a_{11}a_{22}\det(e_1,e_2) + a_{21}a_{12}\det(e_2,e_1) + a_{21}a_{22}\det(e_2,e_2)$$

$$\overset{(D2)}{=} a_{11}a_{22}\underbrace{\det(e_1,e_2)}_{\overset{(D3)}{=}1} + a_{21}a_{12}\underbrace{\det(e_2,e_1)}_{=-1}$$

NR:

$$0 \overset{(D2)}{=} \det(e_1+e_2, e_1+e_2)$$

$$\overset{(D1),(D2)}{=} \det(e_1,e_2) + \det(e_2,e_1)$$

$$\Rightarrow \det(e_2,e_1) = -\det(e_1,e_2) \overset{(D3)}{=} -1$$

$$\Rightarrow \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

## 5.1.3 Weitere Eigenschaften

**Thm.** Sei $n \in \mathbb{N}$. Sei $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Dann gilt:

(D4) $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$

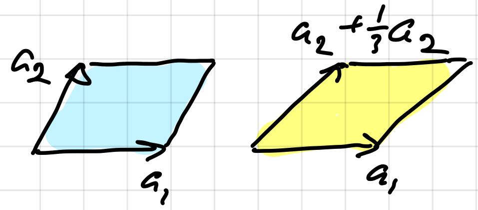
(D5) Enthält $A$ eine Nullspalte, dann gilt $\det(A) = 0$.

(D6) Entsteht $B$ durch Vertauschung von zwei Spalten von $A$, so gilt $\det(B) = -\det(A)$.

[Typ 1 Transf. der Spalten $\rightsquigarrow$ Vorzeichenänderung der det.]

(D7) Entsteht $B$ durch Addition der $\lambda$-fachen $j$-ten Spalte von $A$ zur $i$-ten Spalte ($\lambda \in \mathbb{K}$, $i,j = 1,\dots,n$, $i \neq j$), so gilt $\det(B) = \det(A)$.

[Typ 3. Transf. der Spalten ändert die Det. nicht.]




$$\det(a_1, a_2+\lambda a_1) = \det(a_1, a_2)$$

**(D8)** Ist $A$ eine obere Dreiecksmatrix, so gilt $\det(A) = a_{11}\cdot \ldots \cdot a_{nn}$

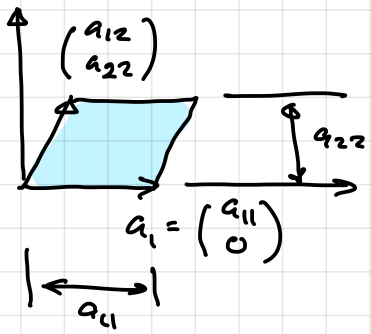
**(D9)** Ist $n \geq 2$ und hat $A$ eine Blockstruktur der Form

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix} \text{ mit } B \in \mathbb{K}^{k\times k}$$

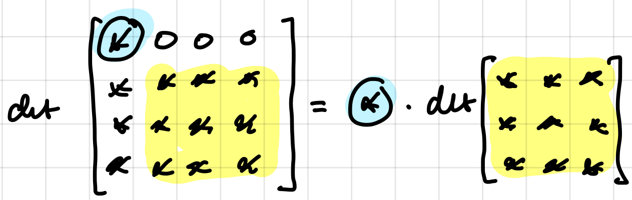
$C \in \mathbb{K}^{k\times(n-k)}$, $D \in \mathbb{K}^{(n-k)\times(n-k)}$

und der Nullmatrix

$0 \in \mathbb{K}^{(n-k)\times k}$, dann gilt $\det(A) = \det(B)\cdot\det(D)$.



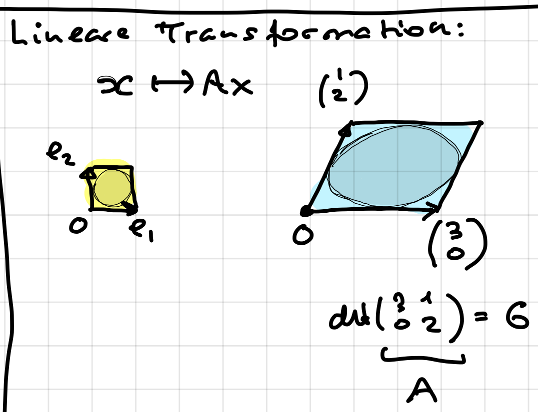

**(D10)** $\det(A) = 0 \iff \operatorname{rang}(A) < n$.




**(D11)** Für alle $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ gilt $\boxed{\det(A\cdot B) = \det(A)\cdot\det(B)}$.

Insbesondere, wenn $A$ invertierbar ist, so ist $\det(A) \neq 0$ und $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$.

**Beweis:** Sei $A = (\underbrace{a_1, \ldots, a_n}_{\text{Spalten von } A})$.




**(D4):** $\det(\lambda A)$

$$= \det(\lambda a_1, \ldots, \lambda a_n) \overset{(D1)}{=\!=}$$

$$= \lambda^n \det(a_1, \ldots, a_n) = \lambda^n \det(A).$$

(D5): Angenommen, $a_i = \mathbf{0}$ für ein $i = 1, \dots, n$. Dann gilt

$$\det(A) = \det(a_1, \dots, a_{i-1}, \mathbf{0}, a_{i+1}, \dots, a_n)$$
$$= \det(a_1, \dots, a_{i-1}, 0 \cdot \mathbf{0}, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

(D6) Einfachheit halber $n = 2$ (der allgemeine Fall analog).

$$0 \overset{(D2)}{=} \det(a_1 + a_2, a_1 + a_2) \overset{(D1)}{=} \det(a_1, a_1) + \det(a_1, a_2) + \det(a_2, a_1) + \det(a_2, a_2)$$
$$\overset{(D2)}{=} \det(a_1, a_2) + \det(a_2, a_1)$$

$$\Rightarrow \det(a_2, a_1) = -\det(a_1, a_2).$$

(D7) Einfachheit halber für $n = 2$ in Bezug auf $\det(a_1, a_2 + \lambda a_1)$. Allgemeiner Fall analog.

$$\det(a_1, a_2 + \lambda a_1) \overset{(D1)}{=} \det(a_1, a_2) + \lambda \det(a_1, a_1)$$
$$\overset{(D2)}{=} \det(a_1, a_2).$$

(D8) Sei $A$ obere Dreiecksmatrix. Dann gilt:

$$\det(A) = \det(a_{11} e_1, a_{12} e_1 + a_{22} e_2, \dots, a_{1n} e_1 + \dots + a_{nn} e_n)$$
$$\overset{(D1)}{=} \sum_{\substack{i_1 = 1 \\ i_2 = 1,2 \\ \vdots \\ i_n = 1, \dots, n}} a_{i_1 1} a_{i_2 2} a_{i_3 3} \cdots a_{i_n n} \det(e_{i_1}, \dots, e_{i_n})$$
$$\underset{*}{=} a_{11} \cdots a_{nn} \det(e_1, \dots, e_n) \overset{(D3)}{=} a_{11} \cdots a_{nn}$$

Denn: wir können $i_2 = 2$ fixieren (sonst wegen (D2) der Term $= 0$) danach $i_3 = 3$ fixieren (sonst der Term $= 0$) usw.