Bem Da jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ eine lineare Abbildung bestimmt, und zwar die Abbildung $x \mapsto Ax$ von $\mathbb{K}^n$ nach $\mathbb{K}^m$, nutzen wir die Begriffe Bild und Kern auch für Matrizen:
$\operatorname{im}(A) = \{Ax : x \in \mathbb{K}^n\}$, $\ker(A) = \{x \in \mathbb{K}^n : Ax = 0\}$.

$\operatorname{im}(A)$ ist die lineare Hülle der Spalten von A:

Ist $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$, so ist $\operatorname{im}(A) = \{Ax : x \in \mathbb{K}^n\} =$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} | & & | \\ a_1 & \cdots & a_n \\ | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K} \right\}$$

$$= \{ x_1 a_1 + \dots + x_n a_n : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K} \}$$

$$= \operatorname{lin}(a_1, \dots, a_n).$$

Auf der anderen Seite ist der Kern von A die Lösungsmenge eines homogenen LGS ($Ax = 0$ ist das LGS).

Bem Sowohl das Bild als auch der Kern sind Untervektorräume.
Das ist klar.

Wie hängen dim(im(F)) und dim(kern(F)) zusammen?

Theorem (Der Rangsatz) Sei $F: V \to W$ lineare Abbildung auf endlich-dimensionalen Vektorräumen V und W über $\mathbb{K}$. Dann gilt:

$$\dim(\mathrm{im}(F)) + \dim(\mathrm{kern}(F)) = \dim(V).$$

Beweis: Wir fixieren eine Basis $a_1, \dots, a_k$ des Kerns von F und erweitern diese zu einer Basis $a_1, \dots, a_n$ von V. Da $\dim(\mathrm{kern}(F)) = k$ und $\dim(V) = n$ sind, reicht es zu zeigen, dass $\mathrm{im}(F)$ $(n-k)$-dimensional ist. Um das zu zeigen, verifizieren wir, dass $F(a_{k+1}), \dots, F(a_n)$ eine Basis von $\mathrm{im}(F)$ bilden. Die Vektoren $F(a_{k+1}), \dots, F(a_n)$ liegen in $\mathrm{im}(F) := \{F(x) : x \in V\}$. Um zu zeigen, dass diese Vektoren erzeugend für $\mathrm{im}(F)$ sind, reicht es aus, für jedes $x \in V$ den Vektor $F(x)$ als eine Linearkombination von $F(a_{k+1}), \dots, F(a_n)$ darzustellen. Wir können x in der Basis $a_1, \dots, a_n$ von V darstellen: $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i$. $\Rightarrow$

$$F(x) = F\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{da } F \text{ linear ist}}}{=} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i F(a_i) \underset{\substack{\uparrow \\ a_1, \dots, a_k \text{ liegen im Kern}}}{=} \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i F(a_i).$$

$\Rightarrow F(x) \in \text{lin}(F(a_{k+1}), \dots, F(a_n))$.

Es bleibt zu zeigen, dass $F(a_{k+1}), \dots, F(a_n)$ linear unabhängig sind.
Seien $\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ beliebige Werte mit

$\lambda_{k+1} F(a_{k+1}) + \dots + \lambda_n F(a_n) = 0$. Nach der Linearität von F erhalten wir $F\left(\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i a_i\right) = 0$. $\Rightarrow \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i a_i \in \text{kern}(F)$

$$\underset{\boxed{\substack{a_1, \dots, a_k \text{ bilden Basis} \\ \text{von kern}(F)}}}{\Longrightarrow} \quad \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i a_i = \sum_{j=1}^{k} \mu_j a_j \quad \text{gilt}$$

für gewisse $\mu_1, \dots, \mu_k \in \mathbb{K}$. $\Longrightarrow$

$$-\mu_1 a_1 - \mu_2 a_2 - \dots - \mu_k a_k + \lambda_{k+1} a_{k+1} + \dots + \lambda_n a_n = 0$$

$$\underset{\boxed{\substack{a_1, \dots, a_n \text{ bilden} \\ \text{eine Basis von } V}}}{\Longrightarrow} \quad -\mu_1 = -\mu_2 = \dots = -\mu_k = \lambda_{k+1} = \dots = \lambda_n = 0$$

$\Rightarrow F(a_{k+1}), \dots, F(a_n)$ sind linear unabhängig. $\square$

Korollar Seien V und W endlich-dimensionale Vektorräume über $\mathbb{K}$. Dann gilt:

(a) Eine lineare Abbildung $F: V \to W$ ist genau dann injektiv, wenn $\ker(F) = \{0\}$ ist.

(b) Gilt $\dim(V) = \dim(W)$, so ist eine lineare Abbildung $F: V \to W$ genau dann injektiv, wenn sie surjektiv ist.

Beweis: **(a)** Ist $\ker(F) \neq \{0\}$, so findet man ein $v \in V \setminus \{0\}$ mit $F(v) = 0$. Somit hat man $F(v) = F(0) = 0$, aber $v \neq 0$. $\Rightarrow$ F ist nicht injektiv. Umgekehrt: Ist F nicht injektiv, so gilt $F(v') = F(v'')$ für gewisse $v', v'' \in V$ mit $v' \neq v''$
$\Rightarrow F(v' - v'') = F(v') - F(v'') = 0 \Rightarrow v' - v'' \in \ker(F) \setminus \{0\}$.

(b) F injektiv $\Leftrightarrow \ker(F) = \{0\} \Leftrightarrow \dim(\ker(F)) = 0$
$\underset{\text{Rangsatz}}{\Longleftrightarrow} \dim(\operatorname{im}(F)) = \dim(V) \Leftrightarrow \dim(\operatorname{im}(F)) = \dim(W)$
$\underset{(\operatorname{im}(F) \subseteq W)}{\Longleftrightarrow} \operatorname{im}(F) = W \Leftrightarrow F$ surjektiv. $\square$

Korollar Seien V und W endlich-dimensionale Vektorräume über $\mathbb{K}$ und sei $F: V \to W$ eine bijektive lineare Abbildung. Dann gilt: $\dim(V) = \dim(W)$

Beweis:
$$\left.\begin{array}{l} F \text{ surjektiv} \Rightarrow \operatorname{im}(F) = W. \\ F \text{ injektiv} \Rightarrow \ker(F) = \{0\} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\dim(V) = \dim(\operatorname{im}(F)) + \dim(\ker(F)) = \dim(W) + 0 = \dim(W).$$ $\square$

Bemerkung Ist eine lineare Abbildung $F: V \to W$ bijektiv, so ist die inverse Abbildung auch eine lineare Abbildung.

3.5. Invertieren von linearen Abbildungen und Matrizen

Durch welche Matrix $I \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ist die identische Abbildung $id: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ gegeben?

Identisch heißt: $id(x) = x$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Allgemeiner hat man:

$$\sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} x_j = x_i \quad \text{bei } \delta_{ij} := \begin{cases} 0, & \text{bei } i \neq j \\ 1, & \text{bei } i = j \end{cases}$$

Den Koeffizienten δ_{ij} nennt man das Kronecker-Delta.

Dementsprechend beschreibt die Matrix

$I = (\delta_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}} \in \mathbb{K}^{n \times n}$ die identische Abbildung, d.h.

$Ix = x$ gilt für alle $x \in \mathbb{K}^n$. Manchmal wird I mit einem untergestellten n versehen, um die Größe zu notieren. Man nennt I die Einheitsmatrix.

Def Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ nennt man regulär bzw. invertierbar, wenn eine Matrix $B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ existiert, für welche $A \cdot B = B \cdot A = I$ gilt. In diesem Fall nennt man B die inverse Matrix von A (sie ist eindeutig).

Bezeichnung: $B = A^{-1}$.

Bemerkung $y = Ax \iff x = A^{-1}y$

bei einer regulären Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Die Aufgabe A^{-1} zu berechnen ist somit die Aufgabe die Gleichung $Ax = y$ nach x aufzulösen.

Es ist ein LGS mit einer variablen rechten Seite y.

Beispiel $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Ist A invertierbar? Ggf. was ist A^{-1}?

$$Ax = y$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 = 1 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 \\ 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 = 0 \cdot y_1 + 1 \cdot y_2 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

	x_1	x_2	y_1	y_2
(1)	1	2	1	0
(2)	3	4	0	1

$\Updownarrow$ Gauß-Verfahren

	x_1	x_2	y_1	y_2
(1)	1	0	-2	1
(2)	0	1	$3/2$	$-1/2$

$$\Updownarrow \quad \begin{cases} x_1 = -2y_1 + 1\cdot y_2 \\ x_2 = 3/2\, y_1 - 1/2\, y_2 \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ A invertierbar

mit $A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$

Beispiel

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

A invertierbar?

$$Ax = y \iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1\cdot y_1 + 0\cdot y_2 + 0\cdot y_3 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0\cdot y_1 + 1\cdot y_2 + 0\cdot y_3 \\ x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 0\cdot y_1 + 0\cdot y_2 + 1\cdot y_3 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{Gauß-Jordan}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1/3 & 0 & -5/6 & 1/6 \\ 0 & 1 & 4/3 & 0 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right]$$

Die Frage war: ist A invertierbar?
Mit anderen Worten:
ist die Abbildung $x \mapsto y = Ax$ bijektiv?

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{3}x_3 = -\frac{5}{6}y_2 + \frac{1}{6}y_3 \\ x_2 + \frac{4}{3}x_3 = \frac{1}{6}y_2 + \frac{1}{6}y_3 \\ 0 = y_1 + \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}y_3 \end{cases}$$

Die Gleichung zeigt, dass die Abbildung nicht surjektiv ist, denn für $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$ wird zu $0 = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$

$= 1{,}5$

$0 = 1{,}5$ ist ein Widerspruch

Das heißt, für diese Wahl von y gibt es kein x mit $Ax = y$. Auch für viele andere, wie $y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Nach dem vorletzten Korollar ist unsere Abbildung

$$\underset{\mathbb{K}^n}{\underset{\cap}{x}} \longmapsto \underset{\mathbb{K}^n}{\underset{\cap}{y}} = Ax$$

auch nicht injektiv. Wir wollen es mit konkreten Daten nachweisen.

Für $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$ hat man $y = Ax = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Also,
$$A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Wenn wir anspruchsvoll sind, können versuchen die Kenntnisse über A erweitern, indem wir ker(A) und im(A) in irgendeiner Weise ausrechnen.

$$\ker(A) = \{ x \in \mathbb{R}^3 : Ax = 0 \}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \; x_1 + \frac{1}{3} x_3 = 0, \; x_2 + \frac{4}{3} x_3 = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} x_3 \\ -4/3\, x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{lin} \begin{bmatrix} -1/3 \\ -4/3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{im}(A) = \{ y \in \mathbb{R}^3 : y = Ax \text{ für ein } x \in \mathbb{R}^3 \}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{y_1 + \tfrac{1}{2} y_2 - \tfrac{1}{2} y_3 = 0}_{\circ} \right\}$$

Beschreibung von im(A) durch eine Gleichung (im Allgemeinen wäre das ein homogenes LGS).

3.6 Komposition von linearen Abbildungen

Bem $\left(W \xleftarrow{G} V \xleftarrow{F} U \right)$

Sind $F: U \to V$ und $G: V \to W$ lineare Abbildungen, dann ist die Abbildung

$$G \circ F \quad \text{mit} \quad (G \circ F)(x) = G(F(x))$$

ebenfalls linear.

Unser entspricht $G \circ F$, wenn wir in den Räumen wie $\mathbb{K}^n$ arbeiten und die linearen Abbildungen F und G durch Matrizen beschreiben.

$$\boxed{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{aligned} y_1 &= 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \\ y_2 &= 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \end{aligned}}$$

$x \mapsto y$ ist dann eine lineare Abbildung

Für $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \in \mathbb{K}^{m \times n}$ hat man die Abbildung $x \longmapsto y = Ax$,

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j$$

Nun betrachten wir noch eine weitere Matrix

$$B = (b_{si})_{\substack{s=1,\dots,k \\ i=1,\dots,m}} \in \mathbb{K}^{k\times m}, \text{ wie auch}$$

die Abbildung $y \longmapsto z = By$ mit

$$z_s = \sum_{i=1}^{m} b_{si}\, y_i$$

Nun kombinieren wir die beiden Abbildungen und erhalten die Abbildung $x \longmapsto z$

$$= By = B(Ax).$$

Durch welche Matrix ist diese kombinierte Abbildung gegeben?

$$z_s = \sum_{i=1}^{m} b_{si}\, y_i = \sum_{i=1}^{m} b_{si} \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \Big)$$

$$= \sum_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} b_{si} a_{ij} x_j$$

$$= \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} b_{si} a_{ij} \right)}_{} x_j$$

Formel für das Produkt von zwei Matrizen.

Die Abbildung $x \mapsto z$ ist durch die Matrix $B \cdot A$ gegeben.

Bsp.

x_1 Apfelsaft

x_2 Cola

x_3 Mineralwasser

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \quad \begin{cases} y_1 = \frac{1}{4}x_1 + \frac{3}{4}x_2 + 0\cdot x_3 & \text{Mezzo Mix} \\ y_2 = 0\cdot x_1 + \frac{3}{4}x_2 + \frac{1}{4}x_3 & \text{Cola Light} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \quad \begin{cases} z_1 = \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 \\ z_2 = \frac{1}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 \end{cases}$$

$$z = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} x$$

$$= \begin{bmatrix} 1/8 & 3/4 & 1/8 \\ 1/12 & 3/4 & 1/6 \end{bmatrix} x$$

$$\begin{cases} z_1 = 1/8\, x_1 + 3/4\, x_2 + 1/8\, x_3 \\ z_2 = 1/12\, x_1 + 3/4\, x_2 + 1/6\, x_3 \end{cases}$$

$$z_1 = \frac{1}{2} y_1 + \frac{1}{2} y_2$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} x_1 + \frac{3}{4} x_2\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4} x_2 + \frac{1}{4} x_3\right)$$

$$= \frac{1}{8} x_1 + \frac{3}{4} x_2 + \frac{1}{8} x_3$$

$z_2 = \ldots\ldots$