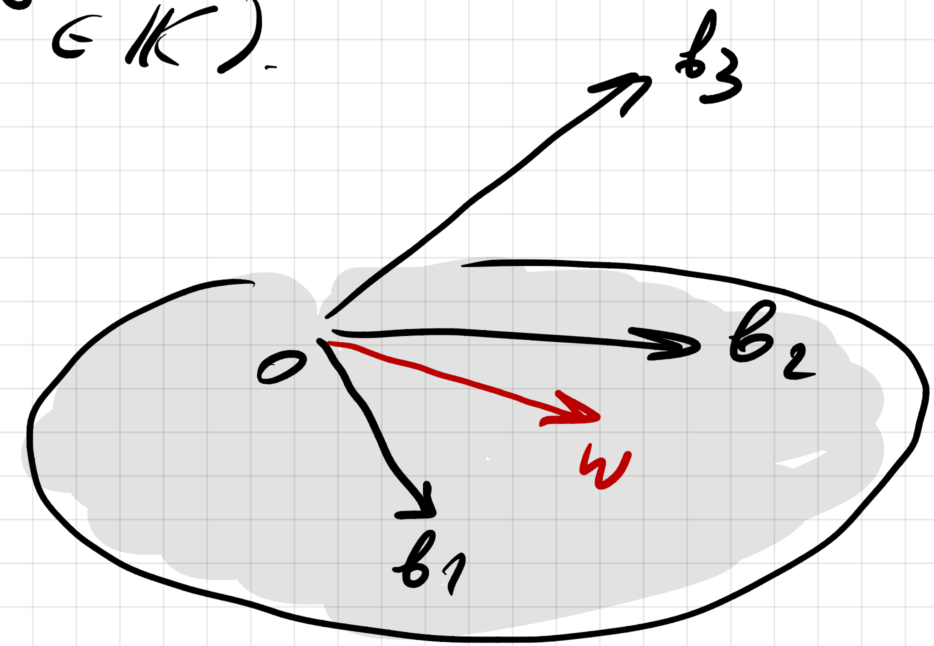
Basisaustausch-Lemma

Gegeben: Basis $b_1, \dots, b_n$ von V
und ein Vektor $w \in V$

Aufgabe: Welche Möglichkeiten gibt es den Vektor w in die Basis $b_1, \dots, b_n$ einzutauschen.
Dafür soll ein Vektor ausgetauscht werden.

Wir betrachten dafür die Darstellung

$$w = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i b_i \qquad (\lambda_i \in \mathbb{K}).$$



$b_1, \dots, b_n$ zusammen mit w und ohne b_i bilden genau dann eine Basis, wenn der Koeffizient λ_i (vgl. oben) ungleich Null ist.

Def Das System $e_1, \dots, e_n$ mit $e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ ← i-te Komponente

heißt Standardbasis von $\mathbb{K}^n$. (Es ist tatsächlich eine Basis.)

Bsp.

$$w = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Eintauschmöglichkeiten}} \underset{\substack{\parallel \\ e_1}}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}, \underset{\substack{\parallel \\ e_2}}{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}, \underset{\substack{\parallel \\ e_3}}{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}, \underset{\substack{\parallel \\ e_4}}{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$$w = 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 2 \cdot e_3 + 3 \cdot e_4$$

<u>Variante 1:</u> w kommt, e_1 geht. Basis?

w, e_2, e_3, e_4 Basis?

Nein: $w = 1\cdot e_2 + 2\cdot e_3 + 3\cdot e_4$

$$(-1)\cdot w + 1\cdot e_2 + 2\cdot e_3 + 3\cdot e_4 = 0$$

Lineare Abhängigkeit!

<u>Variante 2.</u> w kommt, e_2 geht. Basis?

e_1, w, e_3, e_4 ist eine Basis!

Es ist linear unabhängig.

Wir lösen die Gleichung

$$\alpha_1 \cdot e_1 + \alpha_2 \cdot w + \alpha_3 \cdot e_3 + \alpha_4 e_4 = 0$$

$\Downarrow$ bzgl. $\alpha_1, \dots, \alpha_4$

$$\Downarrow \quad \alpha_1 \cdot e_1 + \alpha_2 \cdot (0\cdot e_1 + 1\cdot e_2 + 2\cdot e_3 + 3\cdot e_4) + \alpha_3 \cdot e_3 + \alpha_4 \cdot e_4 = 0$$

$$(\alpha_1 + 0\cdot\alpha_2) e_1 + \alpha_2 \cdot 1 \cdot e_2 + (\alpha_3 + 2\cdot\alpha_2) e_3 + (\alpha_4 + 3\cdot\alpha_2) e_4 = 0$$

$e_1, \dots, e_4$ ist eine Basis.

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \alpha_1 + 0\cdot\alpha_2 = 0 \\ \boxed{\alpha_2 \cdot 1 = 0} \\ \alpha_3 + 2\cdot\alpha_2 = 0 \\ \alpha_4 + 3\cdot\alpha_2 = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \alpha_2 = 0 \\ \\ \alpha_1 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \\ \alpha_4 = 0 \end{array}$$

$\Downarrow$ e_1, w, e_3, e_4 sind linear unabhängig!

Wieso ist dieses System auch erzeugend?

Wir können e_2 in e_1, w, e_3, e_4 darstellen und dann diese Darstellung einsetzen.

Wir nehmen einen beliebigen Vektor

$$\beta_1 \cdot e_1 + \beta_2 \cdot e_2 + \beta_3 \cdot e_3 + \beta_4 \cdot e_4 \quad \text{mit } \beta_1, \dots, \beta_4 \in K.$$

$$e_2 = 0 \cdot e_1 + 1 \cdot w - 2 \cdot e_3 - 3 \cdot e_4$$

$\Downarrow$

$$\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3 + \beta_4 e_4 =$$

$$\beta_1 e_1 + \beta_2 \cdot (0 \cdot e_1 + 1 \cdot w - 2 \cdot e_3 - 3 \cdot e_4) + \beta_3 e_3 + \beta_4 \cdot e_4 =$$

$$(\beta_1 + 0 \cdot \beta_2) e_1 + 1 \cdot \beta_2 \, w + (\beta_3 - 2\beta_2) \cdot e_3 + (\beta_4 - 3\beta_2) e_4$$

Analog kann sich vergewissern, dass man auch e_3 oder e_4 durch w austauschen könnte. Man sieht, das Argument im Beispiel funktioniert allgemein: mit beliebiger Basis $b_1, \ldots, b_n$ an der Stelle von $e_1, \ldots, e_4$.

Basisaustausch-Satz

Gegeben: linear unabhängige Vektoren $w_1, \dots, w_k$ von V und eine Basis $b_1, \dots, b_n$ von V.

Aufgabe: Wir wollen $w_1, \dots, w_k$ in die Basis eintauschen. Dafür sollen gewisse k Vektoren der Basis $b_1, \dots, b_n$ ausgetauscht werden.

Wir können mit Hilfe des Basisaustausch-Lemmas die Vektoren $w_1, \dots, w_k$ sukzessiv eintauschen.

w_1 kommt, ein b_{i_1} geht

w_2 kommt, ein b_{i_2} geht usw. iterativ.

Dabei können wir achten, dass einer der Vektoren $b_1, \dots, b_n$ stets ausgetauscht werden kann.

z.B. $w_1, w_2, w_3 \rightsquigarrow b_1, b_2, b_3, b_4, b_5$

$b_1, w_1, b_3, b_4, b_5 \longrightarrow$

$b_1, w_1, b_3, b_4, w_2 \longrightarrow$

$$\underbrace{w_3 = 0 \cdot b_1 + 2 \cdot w_1 + 0 \cdot b_3 + 0 \cdot b_4 + (-1) \cdot w_2}_{\text{Eigentlich nicht möglich, weil dann } w_1, w_2, w_3 \text{ linear abhängig wären.}}$$

Diese Überlegung zeigt, dass man alle Vektoren $w_1, \dots, w_k$ eines linear unabhängigen Systems in eine Basis $b_1, \dots, b_n$ eintauschen kann.

Folgerung Die Anzahl k der Vektoren in einem linear unabhängigen System eines VR V ist nicht höher als die Anzahl n der Vektoren in einer Basis von V.

Folgerung Alle Basen von V sind gleich lang. D.h. die Dimension von V, als die Länge einer beliebigen Basis, ist wohldefiniert.

Beispiel

$$\begin{array}{ccccc} \left[\begin{matrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{matrix}\right. & \left|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{matrix}\right] \end{array}$$

$$\begin{matrix} \| & \| & \| & \| & \| \\ w_1 & w_2 & b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$\Rightarrow b_1, b_2, b_3$ Basis

$w_1 = 1 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 + 1 \cdot b_3$

$w_2 = 1 \cdot b_1 + 2 \cdot b_2 + 1 \cdot b_3$

Nun wollen wir diese Basis b_1, b_2, b_3 doch nicht und wollen stattdessen eine, die w_1 und w_2 enthält.

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

w_1, b_2, b_3 Basis

$w_2 = w_1 + 2b_2 + 0 \cdot b_3$

in dieser Basis dargestellt

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

w_1, w_2, b_3 Basis

$b_1 = 1 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2 - b_3$

$b_2 = -\frac{1}{2} w_1 + \frac{1}{2} \cdot w_2 + 0 \cdot b_3$

Bem Wie vergleicht man zwei lineare Hüllen

$\mathrm{lin}(u_1, \dots, u_s)$ vs. $\mathrm{lin}(v_1, \dots, v_t)$

Möglichkeiten $=$, $\subseteq$, $\supseteq$

Wie testet man, ob

$$\mathrm{lin}(u_1, \dots, u_s) \subseteq \mathrm{lin}(v_1, \dots, v_t) \;?$$

Das ist äquivalent zu: $u_1, \dots, u_s \in \mathrm{lin}(v_1, \dots, v_t)$.

Wir haben s Bedingungen zu testen:

$u_1 \in \mathrm{lin}(v_1, \ldots, v_t) \Leftrightarrow$ Lösen von $x_1 v_1 + \ldots + x_t v_t = u_1$

$$[v_1\ v_2 \cdots v_t \mid u_1]$$

$u_2 \in \mathrm{lin}(v_1, \ldots, v_t)$

$\vdots$

$u_s \in \mathrm{lin}(v_1, \ldots, v_t) \Leftrightarrow$ Lösen von LGS

$$x_1 v_1 + \ldots + x_t v_t = u_s$$

$$[v_1\ v_2 \cdots v_t \mid u_s]$$

Weil die linken Seiten gleich sind, lassen sich alle die s LGS gleichzeitig mit Gauß lösen.

$$[v_1\ v_2 \cdots v_t \mid u_1 \cdots u_s]$$

Bsp

$$\begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & u_1 & u_2 \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 1 \end{array}\right] \qquad \operatorname{lin}(u_1, u_2) \subseteq \operatorname{lin}(v_1, v_2)?$$

Gauß

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\underbrace{\begin{aligned} u_1 &= 3v_1 + 5v_2 \\ u_2 &= -2v_1 - v_2 \end{aligned}}$$

$$\Downarrow$$

$$\operatorname{lin}(u_1, u_2) \subseteq \operatorname{lin}(v_1, v_2)$$

$$u_1 + u_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} u_1 &= 3v_1 + 5v_2 \\ + \quad u_2 &= -2v_1 - v_2 \\ \hline u_1 + u_2 &= v_1 + 4v_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2u_1 + 3u_2 &= 2(3v_1 + 5v_2) + 3(-2v_1 - v_2) \\ &= 0 \cdot v_1 + 7 \cdot v_2 \end{aligned}$$

Interpretation:

$$\underbrace{x_1 v_1 + x_2 v_2 = y_1 u_1 + y_2 u_2}_{\Downarrow}$$

Das haben wir bzgl. x_1, x_2 gelöst

Gauß-Verfahren hat uns gezeigt:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3y_1 - 2y_2 \\ x_2 = 5y_1 - y_2 \end{cases}$$

So eine Interpretation

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + y_1 u_1 + y_2 u_2 = 0$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} v_1 & v_2 & u_1 & u_2 & 0 \end{array}\right]$$

führt zu der selben Berechnung und den selben Ergebnissen.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 1 \end{array}\right]$$
$$\quad v_1 \quad v_2 \quad w_1 \quad w_2$$

Gleiche Frage:

$$\operatorname{lin}(w_1, w_2) \subseteq \operatorname{lin}(v_1, v_2)\,?$$

Gauß

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow w_2 \notin \operatorname{lin}(v_1, v_2)$$

Basisergänzungssatz In einem endlich dimensionalen Vektorraum lässt sich jedes linear unabhängige System zu einer Basis ergänzen.

Beweis: Man nimmt eine beliebige Basis des Vektorraums und tauscht das gegebene linear unabhängige System in diese Basis ein (das geht nach dem Basisaustauschsatz).

Monotonie der Dimension Sind U und W Untervektorräume eines endlich-dimensionalen Vektorraums, so gilt:

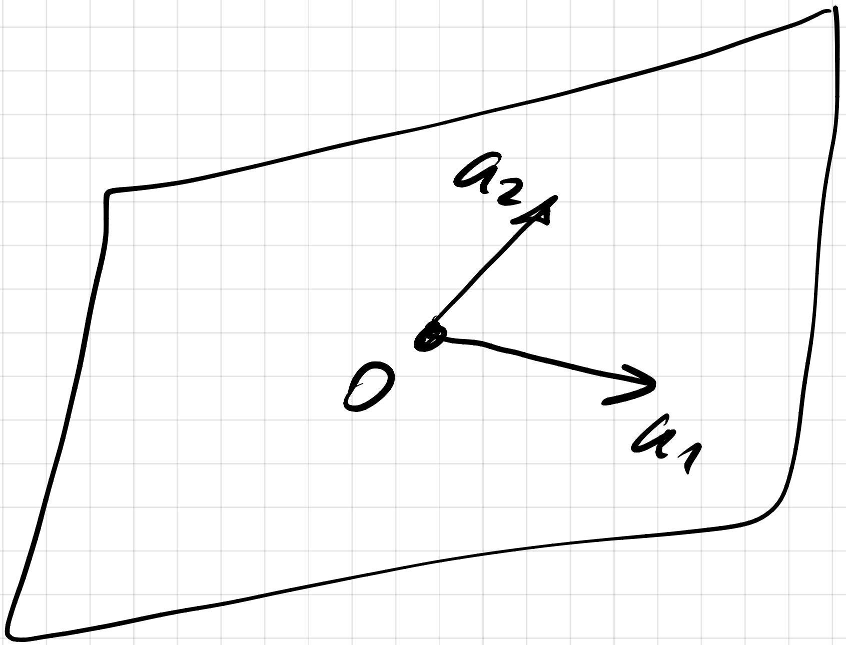
(a) $U \subseteq W \implies \dim(U) \leq \dim(W)$

(b) $U \subseteq W,\ \dim(U) = \dim(W) \implies U = W$

Zum Beweis: folgt aus dem Basisergänzungssatz.

2.3. Rang

Bsp.



$\operatorname{lin}(a_1, a_2)$

$\|$

$\operatorname{lin}(a_1, a_2 - a_1)$

$a_1 = 1 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 \in \operatorname{lin}(a_1, a_2)$

$a_2 - a_1 = (-1) \cdot a_1 + 1 \cdot a_2 \in \operatorname{lin}(a_1, a_2)$

$\Downarrow$

$\operatorname{lin}(a_1, a_2 - a_1) \subseteq \operatorname{lin}(a_1, a_2)$

$a_1 \in \operatorname{lin}(a_1, a_2 - a_1)$, denn $a_1 = 1 \cdot a_1 + 0 \cdot (a_2 - a_1)$

$a_2 \in \mathrm{lin}(a_1, a_2 - a_1)$, denn

$$a_2 = 1 \cdot a_1 + 1 \cdot (a_2 - a_1).$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{lin}(a_1, a_2) = \mathrm{lin}(a_1, a_2 - a_1)$$

Bsp.

$$\mathrm{lin}(a_1, a_2, a_3)$$
$$\|$$
$$\mathrm{lin}(a_1, a_2 - 3a_1, a_3 + 4a_1)$$

$$\mathrm{lin}(a_1, a_2 - 3a_1, a_3 + 4a_1) \subseteq \mathrm{lin}(a_1, a_2, a_3),$$

denn

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + 0 \cdot a_3 \\ a_2 - 3a_1 &= (-3) \cdot a_1 + 1 \cdot a_2 + 0 \cdot a_3 \\ a_3 + 4a_1 &= 4 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + 1 \cdot a_3 \end{aligned}$$

$$\mathrm{li}(a_1, a_2, a_3) \subseteq \mathrm{lin}(a_1, a_2 - 3a_1, a_3 + 4a_1)$$

$$a_1 = 1\cdot a_1 + 0\cdot(a_2-3a_1)+0\cdot(a_3+4a_1)$$

$$a_2 = 3\cdot a_1 + 1\cdot(a_2-3a_1)+0\cdot(a_3+4\cdot a_1)$$

$$a_3 = (-4)\cdot a_1 + 0\cdot(a_2-3a_1)+1\cdot(a_3+4a_1)$$

$$\Rightarrow \operatorname{lin}(a_1,a_2,a_3) \subseteq \operatorname{lin}(a_1,a_2-3a_1,a_3+4a_1).$$

$$\Rightarrow \operatorname{lin}(a_1,a_2,a_3) = \operatorname{lin}(a_1,a_2-3a_1,a_3+4a_1).$$

Bsp

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$z_1,\ z_1+z_2,\ z_3$

Die Zeilen:

$z_1 = (1,1,1,0,0)$

$z_2 = (-1,1,-1,1,0)$

$z_3 = (1,-1,0,-1,1)$

$$\mathrm{lin}(z_1, z_2, z_3) = \mathrm{lin}(z_1, z_1 + z_2, z_3)$$