Hi Leute!

$$\begin{array}{ccc} W & \xleftarrow{F} & V \\ \mathcal{A} & & \mathcal{B} \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ (a_1,\dots,a_m) & & (b_1,\dots,b_n) \end{array}$$

Basen: $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$

$$F_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} F(b_1)_{\mathcal{A}} & \dots & F(b_n)_{\mathcal{A}} \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{m\times n}$$

$$\dot{x} = F(x)$$

$$\Updownarrow$$

$$\dot{x}_{\mathcal{B}} = F_{\mathcal{B}} \cdot x_{\mathcal{B}}$$

Wenn $F_{\mathcal{B}}$ diagonal ist, hat man gewonnen!

$\boxed{4.5.5}$ Basendarstellung für eine Komposition.

Thm Seien $F: V \to W$ und $G: \mathcal{U} \to V$ lineare Abbildungen und seien $\mathcal{U}, V, W$ endlichdimensional. Sei $\mathcal{A}$ Basis von W, $\mathcal{B}$ Basis von V und $\mathcal{C}$ Basis von $\mathcal{U}$. Dann gilt:

$$(F \circ G)_{\mathcal{A},\mathcal{C}} = F_{\mathcal{A},\mathcal{B}} \cdot G_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$$

Beweis: Übung. Folgt aus $y_{\mathcal{A}} = F_{\mathcal{A},\mathcal{B}} \cdot x_{\mathcal{B}}$

für $y = F(x)$.

Diese Formel kann man für F, G und $F\circ G$ nutzen, passend formuliert. $\square$

4.5.6 Basiswechsel für lineare Abbildungen.

Thm Seien V, W endlich-dim. VR und sei $F: V \to W$ linear.
Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}'$ Basen von W und $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ Basen von V.
Dann gilt:
$$F_{\mathcal{A}',\mathcal{B}'} = T_{\mathcal{A}' \leftarrow \mathcal{A}} F_{\mathcal{A},\mathcal{B}} T_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'}$$

<u>Beweis:</u> Sei $x \in V$ und $y = F(x)$. Dann gilt:

$$\left.\begin{aligned} F_{\mathcal{A}',\mathcal{B}'} x_{\mathcal{B}'} &= y_{\mathcal{A}'} \\ T_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'} x_{\mathcal{B}'} &= x_{\mathcal{B}} \\ F_{\mathcal{A},\mathcal{B}} \cdot x_{\mathcal{B}} &= y_{\mathcal{A}} \\ T_{\mathcal{A}' \leftarrow \mathcal{A}} y_{\mathcal{A}} &= y_{\mathcal{A}'} \end{aligned}\right] \Rightarrow F_{\mathcal{A}',\mathcal{B}'} x_{\mathcal{B}'} = y_{\mathcal{A}'} = T_{\mathcal{A}' \leftarrow \mathcal{A}} F_{\mathcal{A},\mathcal{B}} \cdot T_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'} \cdot x_{\mathcal{B}'}$$

Wenn wir x in V variieren, erhalten wir als $x_{\mathcal{B}'}$ einen beliebigen Vektor in $\mathbb{K}^n$, mit $n = \dim(V)$.

Da die Abbildung $x \in V \mapsto x_{\mathcal{B}'} \in \mathbb{K}^n$ bijektiv ist, kann jeder Vektor aus $\mathbb{K}^n$ als $x_{\mathcal{B}'}$ für ein passendes x realisiert werden.

$$\Rightarrow F_{\mathcal{A}',\mathcal{B}'} = T_{\mathcal{A}' \leftarrow \mathcal{A}} F_{\mathcal{A},\mathcal{B}} \cdot T_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'}. \quad \square$$

Kommentare zum Stoff bis Kapitel 4.

$A \in \mathbb{K}^{m \times n}$.

Möglichkeiten: Zeilen-, Spaltentransformationen.

A hat den Zeilenraum, den Spaltenraum und den Kern.

(Z) Für Zeilentransformationen:

(Z1) Ändert sich der Zeilenraum?

(Z2) Ändert sich der Spaltenraum?

(Z3) Ändert sich der Kern?

Z1 Zeilenraum bleibt unverändert.

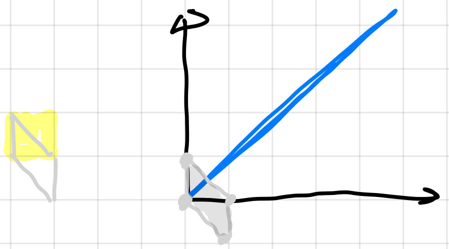
Z2 Der Spaltenraum kann sich ändern.

$$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{-1\cdot}\;\rightsquigarrow\;\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

Spaltenraum



Z3 Das Beispiel oben:

$\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$. Der Kern ist die Lösungsmenge von

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\x_1+x_2+x_3=0\end{cases}\xrightarrow{-1\cdot}\quad\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\0=0\end{cases}$$

Der Kern ändert sich nicht (auch allgemein).

S Für Spaltentransformationen:

S1 Ändert sich der Zeilenraum?

S2 Ändert sich der Spaltenraum?

S3 Ändert sich der Kern?

S1 Im Allgemeinen ändert sich der Zeilenraum.

S2 Der Spaltenraum ändert sich nicht.

S3 Der Kern ändert sich im Allgemeinen.

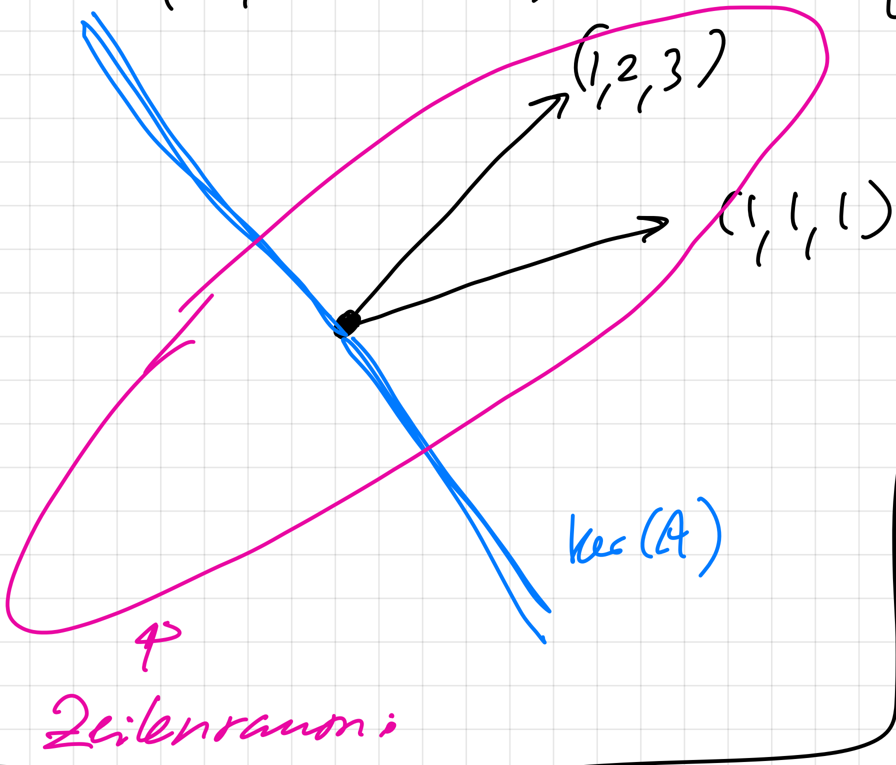
Beispiele?

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{-1\cdot}\;\rightsquigarrow\; B=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}$$

$\ker(B)=\{x : x_2+x_3=0\}$

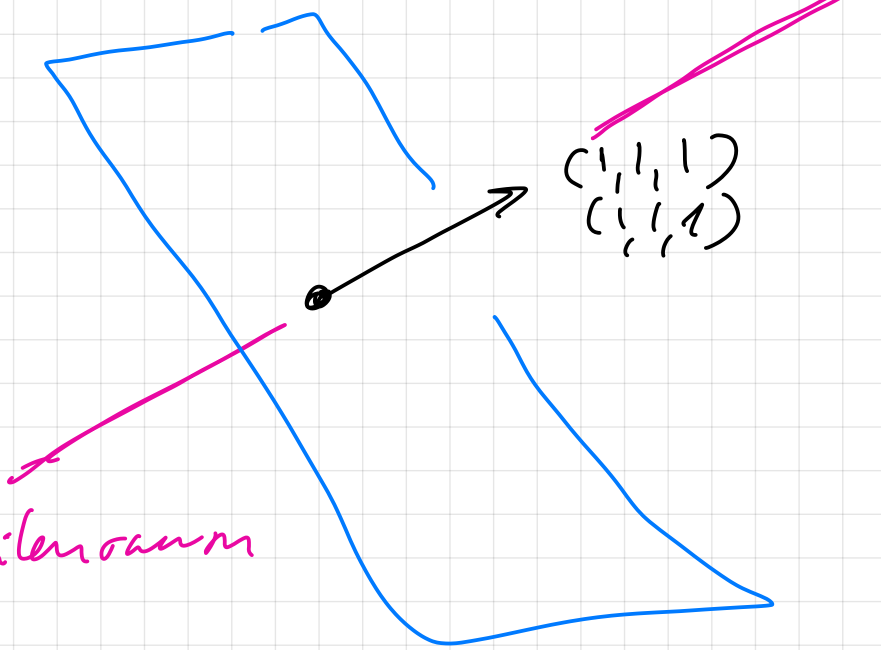
$\ker(A)=\{x : x_1+x_2+x_3=0\}$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \leftarrow \text{Lösungsmenge ist } \ker \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{A}$$

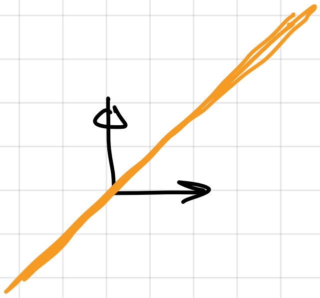


Der Spaltenraum befindet sich innerhalb von $\mathbb{R}^2$. Eigentlich genau $\mathbb{R}^2$ in unserem Beispiel.

DAS Beispiel $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$



Spaltenraum in $\mathbb{R}^2$:



Ergänzung: Basiswechsel in der Sprache der Matrizen

- Wie kann man den Basiswechsel im Raum K^n beschreiben?

Sei $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ Basis von K^n.

$$x_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \text{ heißt } x = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n,$$

was man mit Matrizen als

$$x = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_n \end{bmatrix}}_{\text{"}B\text{"}} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

B ist die Matrix, deren Spalten die Vektoren der Basis $\mathcal{B}$ sind.

Durch die Matrix B können wir die Basis $\mathcal{B}$ festlegen. Somit gilt: $x = B \cdot x_{\mathcal{B}}$

Da man $x = x_{\mathcal{E}}$ mit $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ hat, ist

$B = T_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}}$ – also, die Matrix des Wechsels von $\mathcal{B}$ zur Standardbasis $\mathcal{E}$.

- Lineare Abbildungen und deren Basisdarstellung in der Sprache der Matrizen.

Hier wollen die linearen Abbildungen $F: V \to V$ auf einem n-dimensionalen Vektorraum V behandeln ($n \in \mathbb{N}$). Wir fixieren eine Basis $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ von V und bezeichnen $F_{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ als $F_{\mathcal{B}}$. D.h. $F_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} F(b_1)_{\mathcal{B}} & \cdots & F(b_n)_{\mathcal{B}} \end{bmatrix} \in K^{n \times n}$

Wenn unser $V = \mathbb{K}^n$ ist, so können wir jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit $F(x) = Ax$ identifizieren. Dementsprechend nutzen wir die Bezeichnung $A_\mathcal{B}$ für Matrizen $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$.

D.h.

$$A_\mathcal{B} = \left[(Ab_1)_\mathcal{B} \; \cdots \; (Ab_n)_\mathcal{B} \right].$$

Man kann $A_\mathcal{B}$ in der Sprache der Matrizen beschreiben.

$$x = B \cdot x_\mathcal{B} \implies x_\mathcal{B} = B^{-1}x \implies$$

$$\begin{aligned}
A_\mathcal{B} &= B^{-1} \cdot \left[Ab_1 \; \cdots \; Ab_n \right] \\
&= B^{-1} A \cdot \left[b_1 \; \cdots \; b_n \right] \\
&= B^{-1} \cdot A \cdot B
\end{aligned}$$

Bsp.

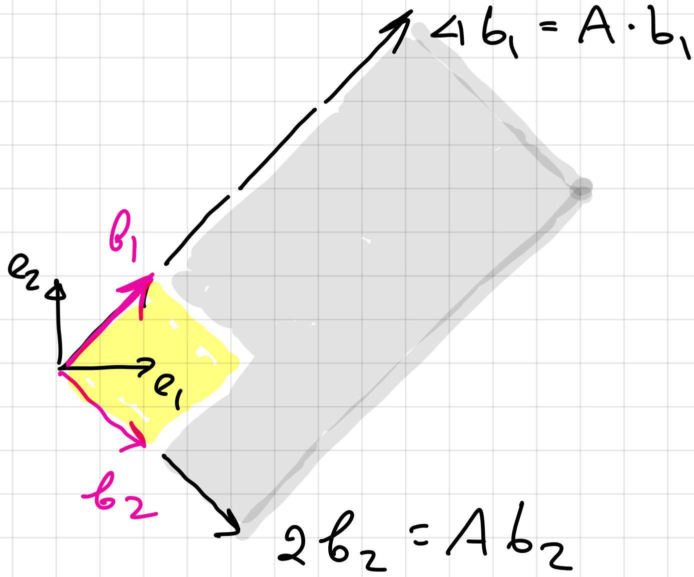
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad F(x_1, x_2) = (3x_1 + x_2, x_1 + 3x_2)$$

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \longleftrightarrow B = \begin{bmatrix} \underbrace{\begin{matrix}1\\1\end{matrix}}_{b_1} & \underbrace{\begin{matrix}1\\-1\end{matrix}}_{b_2} \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4b_1 & 2b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

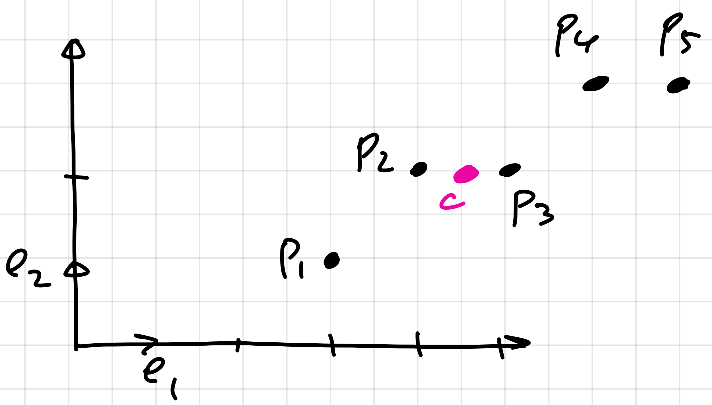
$$= B \cdot \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\iff B^{-1} \cdot A \cdot B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = A_\mathcal{B}$$



Anhang: Teaser für LinA2.
Anwendungsbeispiel für lineare Algebra: die Hauptkomponentenanalyse

Auf engl.: PCA = principal component analysis.



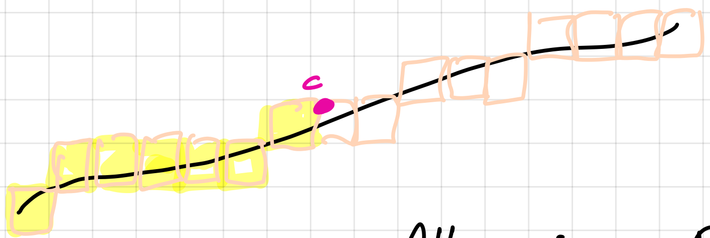
$P_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

$P_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

$P_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$

$P_4 = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$

$P_5 = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}$



Allgemein: $P_1, \dots, P_n \in \mathbb{R}^d$

In der Statistik nennt man es eine Stichprobe.

Schwerpunkt der Stichprobe:

$$c = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} p_i$$

Statt p_i direkt zu nutzen nutzen wir die Abweichungen vom Schwerpunkt: $v_i = p_i - c$.

Jedes v_i ergibt eine Matrix, und zwar:

$$v_i \cdot v_i^T$$

$$\boxed{v \cdot v^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \text{was ist } v\,?}$$

$v_i \cdot v_i^T$ "kennt" das v_i fast vollständig.

Für $v \in \mathbb{R}^d$: was ist $\operatorname{im}(v \cdot v^T)$?

$$\begin{aligned} \operatorname{im}(v \cdot v^T) &= \{ v \cdot v^T \cdot x : x \in \mathbb{R}^d \} \\ &= \{ v \cdot \underbrace{(v^T \cdot x)}_{\in \mathbb{R}} : x \in \mathbb{R}^d \} \\ &= \operatorname{lin}(v) \end{aligned}$$

Nimmt man einen Vektor αv aus $\operatorname{lin}(v)$, so hat man

$$v \cdot v^T \cdot \alpha v = \alpha \cdot v \cdot (v^T v) = (v^T \cdot v) \cdot (\alpha v).$$

D.h. die Vektoren aus dem Bild werden um den Faktor $v^T v$ gestreckt.

$\sqrt{v^T v}$ ist die Länge von v (vgl. Lin A 2).

D.h. $v v^T$ "kennt" die Richtung und die Länge von v. D.h. $v v^T$ kennt v bis auf das Vorzeichen ($v v^T$ kann v von $-v$ nicht unterscheiden.)

Nun bilden wir den Durchschnitt der Matrizen $v_i v_i^T$:

$$A := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} v_i v_i^T .$$

Diese Matrix ist symmetrisch: $A^T = A$.

Es stellt sich heraus, dass eine orthonormale Basis existiert, $B = (b_1, \dots, b_n)$, in der A diagonal ist.

D.h. $A_B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} =: \Lambda$

mit $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$.

Orthonormal heißt: $b_i^T b_j = \delta_{ij}$

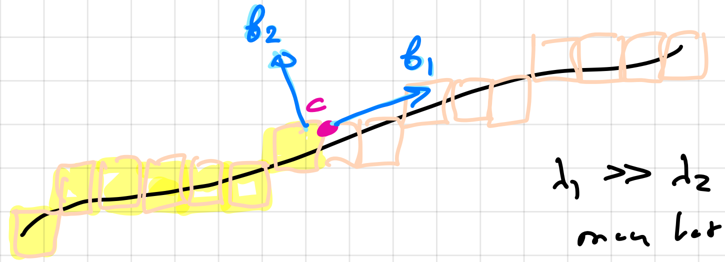
(d.h. die Vektoren haben Länge 1 und sind paarweise senkrecht).

In der Sprache der Matrizen:

$$B^{-1} \cdot A \cdot B = \Lambda := \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_d \end{bmatrix}$$

$$B^T B = \begin{bmatrix} b_1^T \\ \vdots \\ b_d^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & \dots & b_d \end{bmatrix} = I,$$

und insbesondere $B^{-1} = B^T$.



$\lambda_1 >> \lambda_2$, denn man hat in der Stichprobe viel mehr Variation in b_1-Richtung als in b_2-Richtung.

In der Basis $\mathcal{B}$ hat ein Vektor x die Darstellung

$$x = \sum_{i=1}^{d} b_i \underbrace{(b_i^T x)}_{\text{i-te Koordinate von } x \text{ in der Basis } \mathcal{B}.}$$

Man nennt $b_1^T x$ die Hauptkomponente bzw. die erste Komponente der PCA.

$b_i^T x$ nennt man die i-te Komponente der PCA.