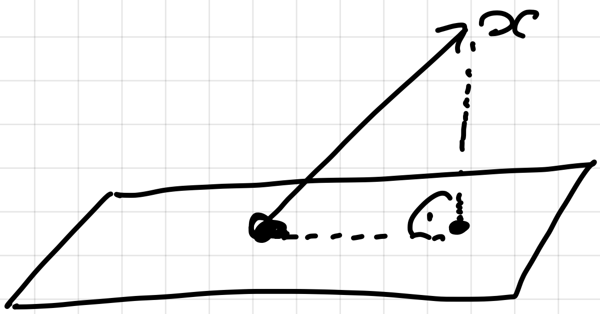
$$\left[\underbrace{A^TA}_{3\times 3} \quad \underbrace{A^T}_{3\times 5}\right] \qquad A = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & 5 \end{bmatrix} \\ \;\; a_1 \;\;\; a_2 \;\;\; a_3 \end{array}$$

Gauß

$$\left[\begin{array}{ccc|c} * & * & * & - \; b_1 \; - \\ 0 & * & * & - \; b_2 \; - \\ 0 & 0 & * & - \; b_3 \; - \end{array}\right] \qquad \underbrace{\mathrm{lin}(b_1, b_2, b_3)}_{\text{Orthogonalbasis}} = \mathrm{lin}(a_1, a_2, a_3)$$

$\boxed{7.1.5}$ Orthogonale Projektion



Thm Sei $\mathcal{U}$ Untervektorraum eines n-dimensionalen Euklidischen Raums V über $\mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

(i) Zu jedem $x \in V$ existiert ein eindeutiger Vektor $\pi(x) \in \mathcal{U}$, welcher den Abstand zwischen x und $\pi(x)$ minimiert, d.h.

$$\| x - \pi(x) \| = \min_{u \in \mathcal{U}} \| x - u \|$$

(ii) Der Vektor $\pi(x)$ aus (i) ist der eindeutige Vektor $y \in \mathcal{U}$ mit der Eigenschaft, dass $x - y$ zu jedem Vektor aus $\mathcal{U}$ orthogonal ist.

(iii) Die Abbildung $x \mapsto \pi(x)$ ist linear.

<u>Beweis:</u> Sei $u_1, \dots, u_m$ Orthonormalbasis von U.

Wir zeigen, dass die Behauptungen für

$$\pi(x) = \langle x, u_1 \rangle u_1 + \dots + \langle x, u_m \rangle u_m =: y$$

erfüllt sind. Es gilt

$$\langle y - x, u_i \rangle = \langle y, u_i \rangle - \langle x, u_i \rangle$$
$$= \langle \langle x, u_i \rangle u_i, u_i \rangle - \langle x, u_i \rangle$$
$$= \langle x, u_i \rangle - \langle x, u_i \rangle = 0$$

$\Rightarrow$ $\langle y - x, u \rangle = 0$ für alle $u \in U = \mathrm{lin}(u_1, \dots, u_m)$

$\Rightarrow$ (ii).

Nun betrachten wir den Abstand zwischen x und $u \in U$ (den quadrierten Abstand):

$$\|x - u\|^2 = \|x - y + y - u\|^2$$
$$= \|x - y\|^2 + \langle x - y, y - u \rangle + \langle y - u, x - y \rangle$$
$$+ \|y - u\|^2$$
$$= \|x - y\|^2 + \|y - u\|^2$$

, denn $x - y$ ist orthogonal zu jedem Vektor aus U und $y - u \in U$.

$\Rightarrow$ $\|x - u\|^2$ wird bei $u \in U$ genau dann minimiert wenn $u = y$ ist.

Es bleibt die Eindeutigkeit in (ii) zu verifizieren.

Sei $z \in U$ Vektor mit $\langle z - x, u \rangle = 0$ für alle $u \in U$.

Dann ist $z = \beta_1 u_1 + \dots + \beta_m u_m$

mit $\beta_1, \dots, \beta_m \in \mathbb{K}$ und

$$\langle z - x, u_i \rangle = 0 \Rightarrow \langle z, u_i \rangle = \langle x, u_i \rangle$$

$$\Rightarrow \beta_i = \langle x, u_i \rangle \Rightarrow z = y = J(x). \qquad \square$$

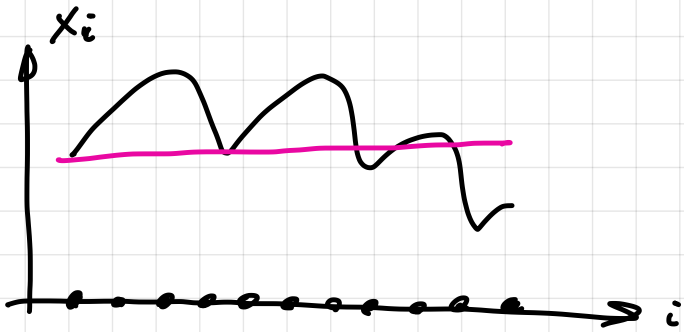
Bsp

$$1_n = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$$

$$U = \operatorname{lin}(1_n)$$

$$(x_1, \dots, x_n) = x \in \mathbb{R}^n \longmapsto \frac{\langle x, 1_n \rangle}{\langle 1_n, 1_n \rangle} 1_n$$

$$= \frac{x_1 + \dots x_n}{n} \cdot 1_n$$



7.1.6 Orthogonale Untervektorräume und das Orthogonalkomplement.

Sei X Teilmenge eines Euklidischen Raums V.

Dann heißt $X^\perp := \{ v \in V : \langle v, x \rangle = 0$ für alle $x \in X \}$

Orthogonalkomplement von X in V.

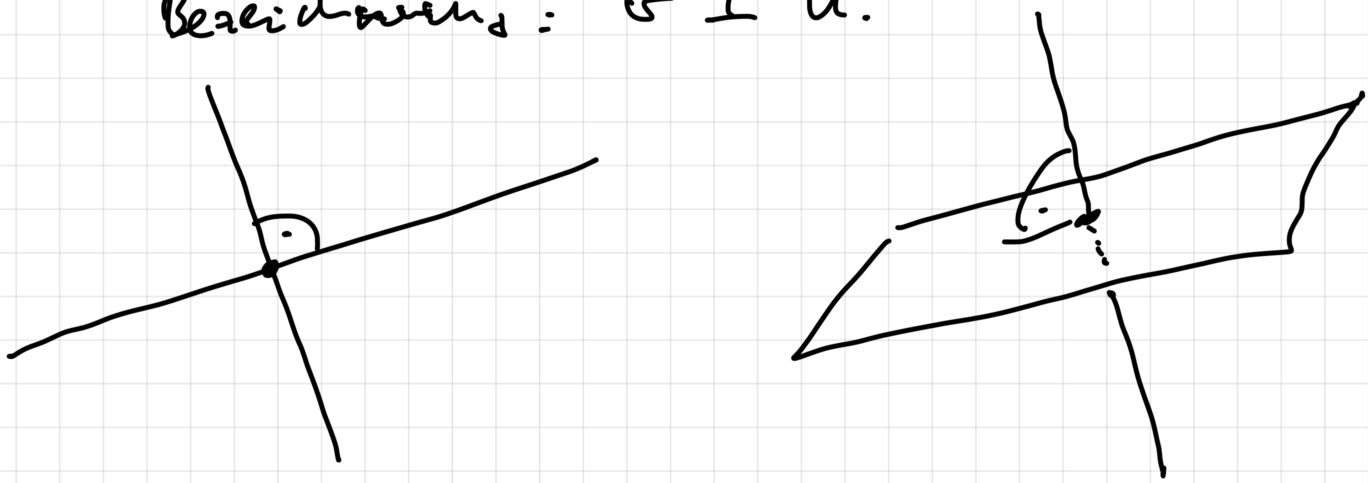
$X^\perp$ ist stets ein Untervektorraum von V.

Untervektorräume U und W von V heißen orthogonal, wenn $\langle u, w \rangle = 0$ ist, für alle $u \in U$ und $w \in W$.

Bezeichnung: $U \perp W$.

Vektor v heißt orthogonal zum Untervektorraum U, wenn $\langle v,u\rangle = 0$ für alle $u \in U$.

Bezeichnung: $v \perp U$.



Die Summe $U_1 + \dots + U_k$ von Untervektorräumen $U_1, \dots, U_k$ heißt orthogonal wenn $\langle u_i, u_j\rangle = 0$ für alle $1 \le i < j \le k$ und alle $u_i \in U_i$ und $u_j \in U_j$. Bezeichnung:

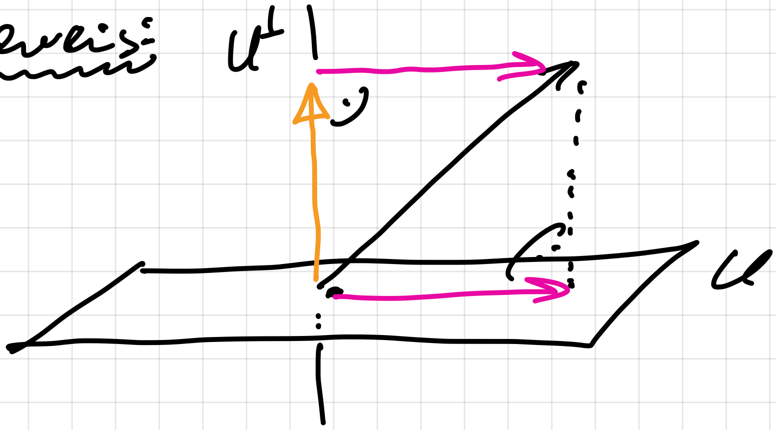
$$U_1 \obot \dots\dots \obot U_k.$$

Jede Orthogonalsumme ist direkt.

Thm Sei U UVR eines n-dim. Euklidischen Raums V über $\mathbb{K}$, mit $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$V = U \obot U^\perp \quad \text{und} \quad (U^\perp)^\perp = U.$$

Beweis:



$U \perp U^\perp$ laut der Definition von $U^\perp$.

Also ist Summe $U + U^\perp$ tatsächlich orthogonal. Wir betrachten eine beliebige orthonormale Basis $u_1, \dots, u_m$ von U und erweitern diese zu einer orthonormalen Basis $u_1, \dots, u_n$ von V.

Dann folgt aus $U = \mathrm{lin}(u_1, \dots, u_m)$

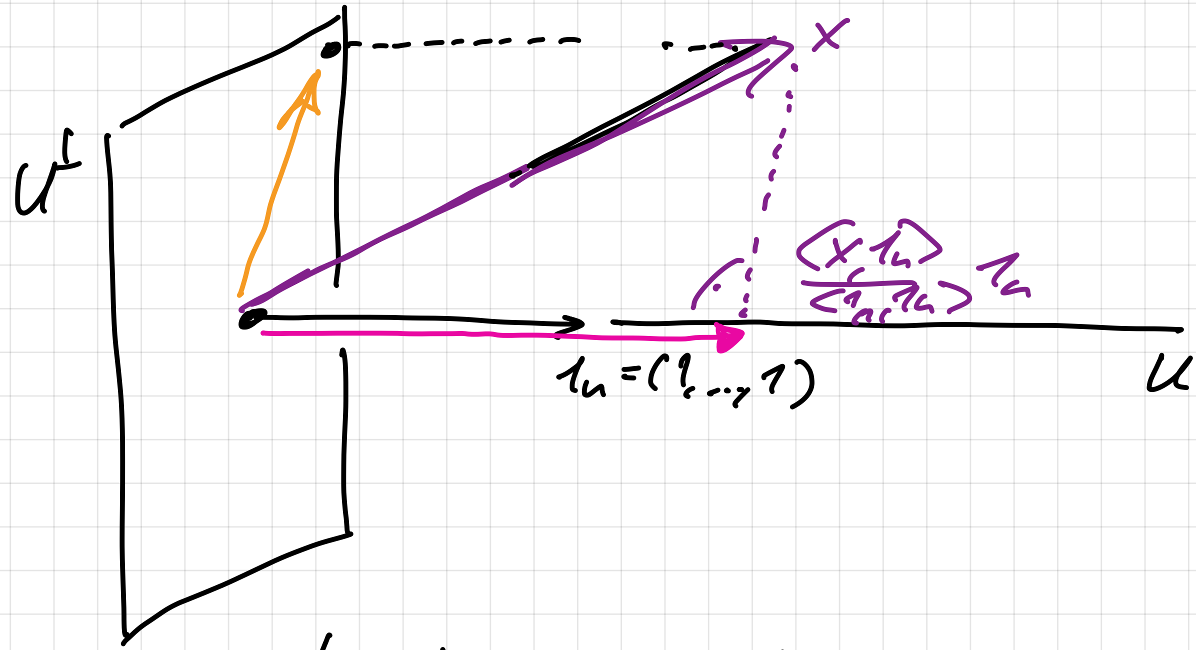
$$U^\perp = \mathrm{lin}(u_1, \dots, u_m)^\perp$$

$$= \{ x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i : \langle x, u_1 \rangle = \dots = \langle x, u_m \rangle = 0, \ \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K} \}$$

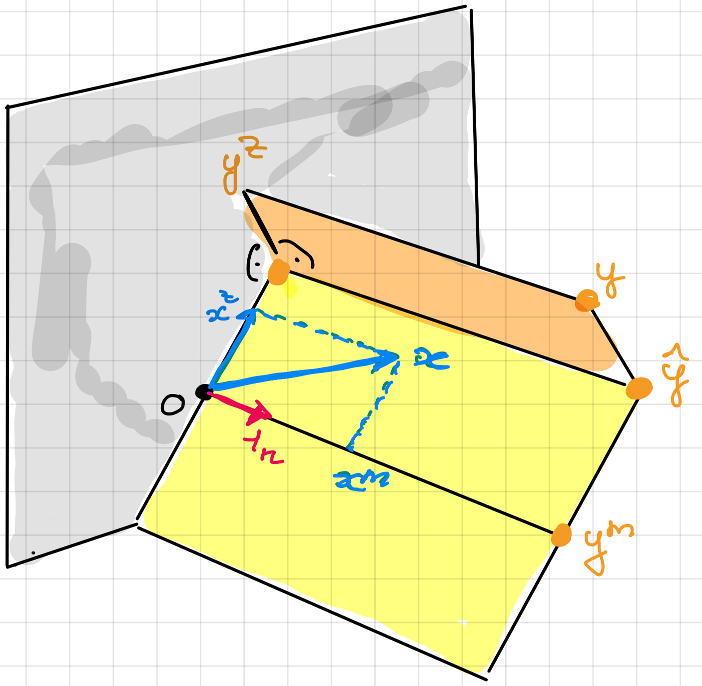
$$= \mathrm{lin}(u_{m+1}, \dots, u_n).$$

Daraus folgen die beiden Gleichungen aus der Behauptung. $\square$

Bsp.



$$U^\perp = \{ v : \langle v, 1_n \rangle = 0 \}$$



Lineare Regression als orthogonale Projektion auf $\text{lin}(1_n, X)$.

$1_n = (1, \dots, 1)$

Mitteln: $u^m := \frac{\langle u, 1_n \rangle}{\langle 1_n, 1_n \rangle} 1_n$ orthogonale Projektion auf $\text{lin}(1_n)$.

Zentrieren: $u^z = u - u^m$ orthogonale Projektion auf $1_n^\perp$, den UVR aus Vektoren deren Komponentensumme gleich 0 ist.

Schätzen mit Hilfe von X (lineare Regression):

$\hat{u}$ = Orthogonale Projektion von u auf $\text{lin}(1_n, x)$. Wir haben es für ein y so gemacht:

$y \rightsquigarrow y^z \rightsquigarrow \frac{\langle y^z, x^z \rangle}{\langle x^z, x^z \rangle} y^z$ (das ist die Projektion von y^z auf $\text{lin}(x^z)$) und dann

$$\hat{y} = \frac{\langle y^z, x^z \rangle}{\langle x^z, x^z \rangle} y^z + y^m$$

7.2 Lineare Abbildungen Euklidischer Räume

7.2.1 Adjungierte Abbildung

Thm Sei $F: V \to V$ lineare Abbildung eines Euklidischen Raums V der Dimension $n = \dim(V) \in \mathbb{N}$. Dann existiert eine lineare Abbildung $F^*: V \to V$, die durch F eindeutig mit Hilfe der Gleichung

☺ $$\langle F(u), v \rangle = \langle u, F^*(v) \rangle \quad \forall u, v \in V$$

bestimmt ist. Des Weiteren gilt für die Operation $F \mapsto F^*$ Folgendes:

(i) $(F^*)^* = F$

(ii) $(\alpha F + \beta G)^* = \bar{\alpha} F^* + \bar{\beta} G^*$

(iii) $(F \circ G)^* = G^* \circ F^*$

(iv) $id^* = id$

(v) Ist F invertierbar, dann ist auch F^* invertierbar und es gilt $(F^*)^{-1} = (F^{-1})^*$

(hier für lineare $F, G: V \to V$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$).

Die Abbildung F^* nennt man die adjungierte Abbildung zu F.

Beweis: Wir fixieren eine Orthonormalbasis $b_1, \dots, b_n$ von V und berechnen F^* mit ☺ in dieser Basis.

☺ $$\Rightarrow \langle F^*(x), b_i \rangle = \overline{\langle b_i, F^*(x) \rangle}$$

$$= \overline{\langle F(b_i), x \rangle}$$
$$= \langle x, F(b_i) \rangle$$

$$\Rightarrow \quad F^*(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle F^*(x), b_i \rangle \, b_i$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \langle x, F(b_i) \rangle \, b_i \, .$$

Das zeigt die Eindeutigkeit, denn in unserer festen Basis $b_1, \dots, b_n$ haben wir eine eindeutige Beschreibung von $F^*(x)$. Um die Existenz zu verifizieren müssen wir die Umkehrung zeigen:

$F^*(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, F(b_i) \rangle b_i \Longrightarrow$ ☺ gilt.

$$\langle u, F^*(v) \rangle = \left\langle u, \sum_{i=1}^{n} \langle v, F(b_i) \rangle \, b_i \right\rangle$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \overline{\langle v, F(b_i) \rangle} \, \langle u, b_i \rangle$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \langle F(b_i), v \rangle \, \langle u, b_i \rangle$$
$$= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \langle u, b_i \rangle F(b_i), v \right\rangle$$
$$= \left\langle F\left(\sum_{i=1}^{n} \langle u, b_i \rangle b_i \right), v \right\rangle$$
$$= \langle F(u), v \rangle \, .$$

(i) – (v) – Aufgaben. $\square$