Die Elementartransformationen (ETs) kann man auf Vektoren eines Vektorsystems anwenden.

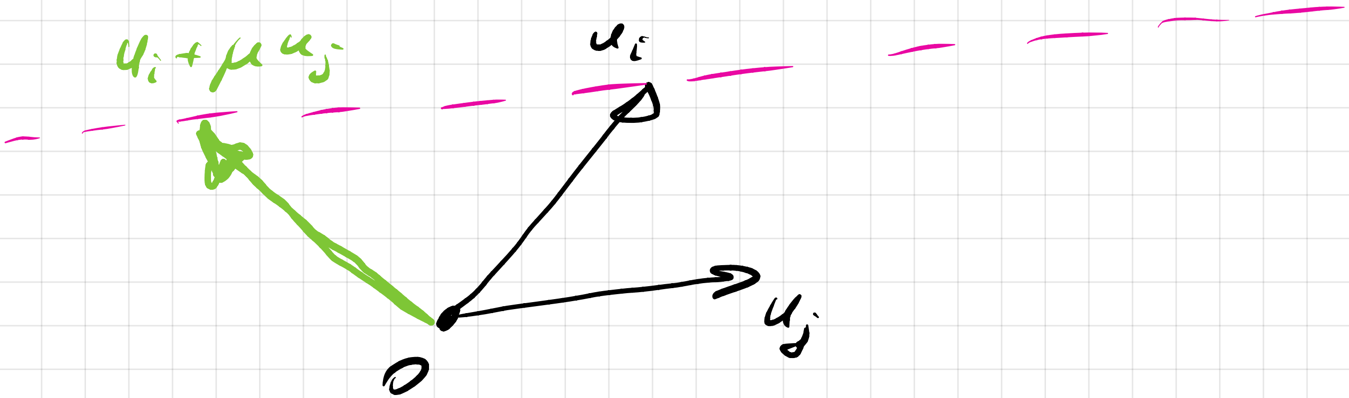
$u_1, \dots, u_k \in V$ (k Vektoren)

ET Typ 1: Zwei Vektoren des Systems vertauschen.

$u_i \leftrightarrow u_j$

ET Typ 2: Einen Vektor skalieren. $u_i := \lambda \cdot u_i$ $(\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\})$

ET Typ 3: $u_i := u_i + \mu \cdot u_j$ $(i \neq j, \mu \in \mathbb{K})$



Proposition Die ETs eines Vektorsystems erhalten die lineare Hülle des Systems (sie bleibt unverändert).

Beim Typ 1 und 2 sofort klar.
Beim Typ 3 wird es nach einer kurzen Überlegung klar.

Bsp. $a, b \in V$ in einem VR V über $\mathbb{R}$.

$$\text{lin}(a, b) = \text{lin}(a, b + 2a)$$

"$\supseteq$"

$$\alpha \cdot a + \beta \cdot (b + 2a)$$
$$= (\alpha + 2\beta) \cdot a + \beta \cdot b$$

"$\subseteq$"

$$\lambda \cdot a + \mu \cdot b = \lambda \cdot a + \mu \cdot (b + 2a - 2a)$$
$$= \lambda \cdot a + \mu \cdot (b + 2a) - 2\mu \cdot a$$
$$= (\lambda - 2\mu) \cdot a + \mu \cdot (b + 2a)$$

Bsp (essentiell für den Rang, den wir in Kürze einführen).

$$A = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & 5 & 7 \end{array}\right] \\ \begin{array}{ccccc} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & s_5 \end{array} \end{array} \in \mathbb{R}^{3\times 5}$$

Eine mögliche Frage: Was ist eine Basis der linearen Hülle $\text{lin}(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5) \subseteq \mathbb{R}^3$

Wenn wir dafür das Gauß-Verfahren einsetzen, transformieren wir die Zeilen der Matrix A

$$x_1 s_1 + x_2 s_2 + x_3 s_3 + x_4 s_4 + x_5 s_5 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} 1\cdot x_1 + 2\cdot x_2 + 1\cdot x_3 + 1\cdot x_4 + 3\cdot x_5 = 0 \\ 1\cdot x_1 + 1\cdot x_2 + 2\cdot x_3 + (-1)\cdot x_4 + 1\cdot x_5 = 0 \\ 1\cdot x_1 + 4\cdot x_2 + (-1)\cdot x_3 + 5\cdot x_4 + 7\cdot x_5 = 0 \end{cases}$$

LGS, dessen Lösungen lineare Abhängigkeiten $(x_1, \dots, x_5)$ der Spalten $s_1 \dots s_5$ sind

Jede Gleichung ist dargestellt durch ihre Zeile der Koeffizienten

$$z_1 = (1 \quad 2 \quad 1 \quad 1 \quad 3)$$
$$z_2 = (1 \quad 1 \quad 2 \quad -1 \quad 1)$$
$$z_3 = (1 \quad 4 \quad -1 \quad 5 \quad 7)$$

3 Räume im Spiel

$\mathrm{lin}(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5) \subseteq \mathbb{R}^3$ der Spaltenraum

$\{(x_1, \dots, x_5) \in \mathbb{R}^5 : x_1 s_1 + \dots + x_5 s_5 = 0\}$

der Raum der linearen Abhängigkeiten der 5 Spalten.

$\mathrm{lin}(z_1, z_2, z_3)$ ist der Raum der Gleichungen, die für lineare Abhängigkeiten von $s_1, \dots, s_5$ gelten.

Diese Gleichungen sind kodiert durch die Koeffizientenvektoren.

Gauß-Verfahren

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 3 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Longrightarrow$$

$$\operatorname{lin}(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5) = \operatorname{lin}\underbrace{(s_1, s_2)}_{\text{eine Basis des Spaltenraums.}}$$

$$\begin{cases} 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 - 3 \cdot x_4 - 1 \cdot x_5 = 0 \\ 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 - 1 \cdot x_3 + 2 \cdot x_4 + 2 \cdot x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\operatorname{lin}(z_1, z_2, z_3) = \operatorname{lin}\Big(\underbrace{(1, 0, 3, -3, -1), (0, 1, -1, 2, 2)}_{\text{Basis dieser linearen Hülle}}\Big)$$

D.h., es gibt zwei linear unabhängige Gleichungen,

die die linearen Abhängigkeiten $(x_1, \dots, x_5)$ erfüllen.

Der Raum der linearen Abhängigkeiten ist 3-dimensional ($5 - 2 = 3$ freie Variablen).

Was wir feststellen:

$$\boxed{\dim \operatorname{lin}(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5) = \dim \operatorname{lin}(z_1, z_2, z_3)}$$

das gilt allgemein!

Fortsetzung des Beispiels Für den Zeilen- und Spaltenraum haben wir je eine Basis angegeben.

Wie findet man eine Basis für die Lösungsmenge unseres homogenen LGS

$$\begin{cases} 1\cdot x_1 + 2\cdot x_2 + 1\cdot x_3 + 1\cdot x_4 + 3\cdot x_5 = 0 \\ 1\cdot x_1 + 1\cdot x_2 + 2\cdot x_3 + (-1)\cdot x_4 + 1\cdot x_5 = 0 \\ 1\cdot x_1 + 4\cdot x_2 + (-1)\cdot x_3 + 5\cdot x_4 + 7\cdot x_5 = 0 \end{cases}$$

Gauß

$$\begin{cases} 1\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 3\cdot x_3 - 3\cdot x_4 - 1\cdot x_5 = 0 \\ 0\cdot x_1 + 1\cdot x_2 - 1\cdot x_3 + 2\cdot x_4 + 2\cdot x_5 = 0 \end{cases}$$

x_3, x_4, x_5 freie Variablen.

$(-3, 1, 1, 0, 0)$

$(3, -2, 0, 1, 0)$

$(1, -2, 0, 0, 1)$

Bsp. Finden Sie eine Basis von

$$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z = 0\}$$

$$\underbrace{(1,-1,0),\ (1,0,-1)}_{\text{linear unabhängig?}} \quad \text{Basis von } U\text{?}$$

$$\alpha \cdot (1,-1,0) + \beta \cdot (1,0,-1) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ -\alpha = 0 \\ -\beta = 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

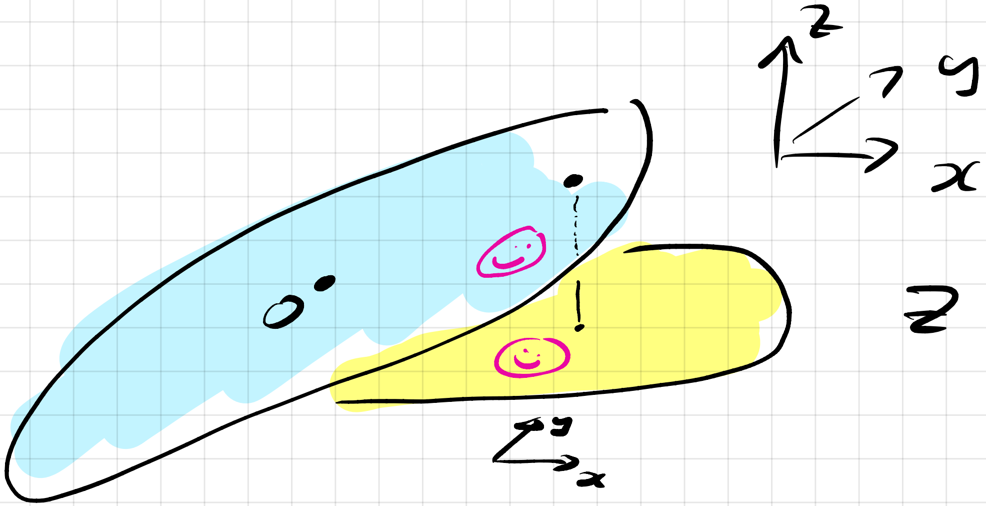
$$\alpha = \beta = 0$$

$\Longrightarrow$ linear unabhängig

$(1,-1,0), (1,0,-1)$ ist erzeugend $\Leftarrow$

Jedes $(x,y,z) \in U$, d.h. $x+y+z=0$, ist Linearkombination der beiden Vektoren $(1,-1,0), (1,0,-1)$.

$$(x,y,z) = (-y)\cdot(1,-1,0) + (-z)\cdot(1,0,-1)$$



$z = -x-y$

$\left.\begin{matrix}(1,0)\\(0,1)\end{matrix}\right\}$ Basis von $\mathbb{R}^2$ $\left.\begin{matrix}(1,0,-1)\\(0,1,-1)\end{matrix}\right\}$ Basis von U

x y x y $z=-x-y$

$(1,0,-1)$
$(0,1,-1)$ } linear unabhängig wegen der ersten Komponenten.

Denn $z = -x-y \Rightarrow$

$$x \cdot (1,0,-1) + y \cdot (0,1,-1)$$
$$= (x, y, -x-y) = (x,y,z).$$

Bezeichnungen für Matrizen

$\mathbb{K}^{m \times n}$ $(m, n \in \mathbb{N})$ ist die Menge der Matrizen mit m Zeilen und n Spalten und den Komponenten aus dem Körper $\mathbb{K}$. Schreibweise für Matrizen

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \in \mathbb{K}^{m \times n}$$

a_{ij} ist die Komponente an der Position (i,j);

i Zeilenindex, j Spaltenindex

z.B. $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{2\times 3}$

Die <u>Transponierte</u> der Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m\times n}$

ist die Matrix $A^T = (a^T_{ij})_{\substack{i=1..n \\ j=1..m}} \in \mathbb{K}^{n\times m}$

mit $a^T_{ij} = a_{ji}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Die lineare Hülle der Zeilen nennt man den

<u>Zeilenraum</u> von A, die lineare Hülle der Spalten

den <u>Spaltenraum</u> von A

Die Dimension des Spaltenraums nennt man den Rang der Matrix A. Bezeichnung: $\operatorname{rang}(A)$.

Bsp

$$\operatorname{rang}\begin{bmatrix} s & s & s & s & s & s \\ s & s & s & s & s & s \\ r & r & r & r & r & r \\ r & r & r & r & r & r \\ g & g & g & g & g & g \\ g & g & g & g & g & g \end{bmatrix} = 1 \qquad \text{bei } s, r \text{ oder } g \neq 0.$$

$$\operatorname{rang}\begin{bmatrix} s & s & r & r & g & g \\ s & s & r & r & g & g \\ s & s & r & r & g & g \\ s & s & r & r & g & g \\ s & s & r & r & g & g \\ s & s & r & r & g & g \end{bmatrix} = 1$$

$$\begin{bmatrix} s \\ s \\ s \\ s \\ s \\ s \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} r \\ r \\ r \\ r \\ r \\ r \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} g \\ g \\ g \\ g \\ g \\ g \end{bmatrix} = g\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

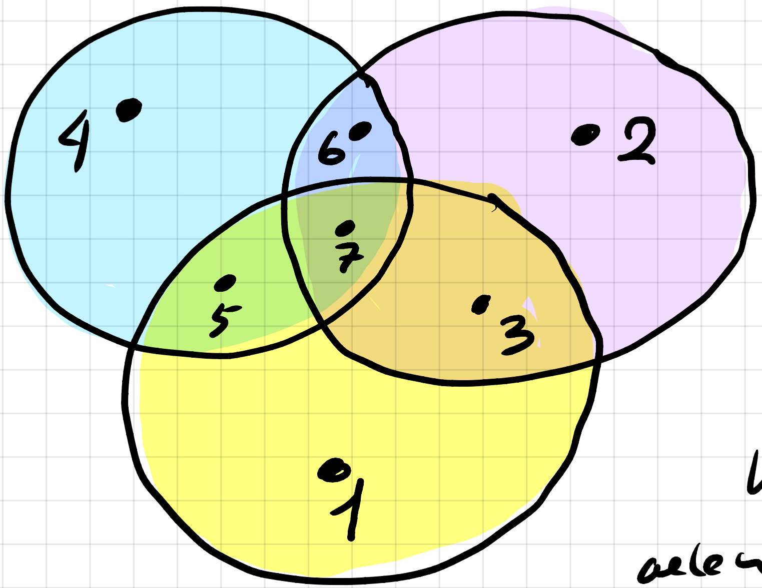
Theorem Sei $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ $(m, n \in \mathbb{N})$. Dann gilt:

$$\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A^T)$$

Mit anderen Worten haben der Spalten- und der Zeilenraum von A die gleiche Dimension.

Weitere Beispiele zu den drei Räumen, die man mit einer Matrix assoziieren kann

Bsp $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2$



$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_5 + x_7 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_6 + x_7 = 0 \\ x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 0 \end{cases}$$

Dieses System definiert einen Untervektorraum C aus allen $x = (x_1, \dots, x_7)$, welche dieses System erfüllen.

Dieses C ist ein sogenannter Hamming-Code.

Was ist $\dim(C)$? Mit anderen Worten: wieviele Bit kann dieser Code übertragen.

Was ist eine Basis von C? Mit anderen Worten, wie bauen wir die Info-Bit in den Code ein?

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = x_3 + x_5 + x_7 \\ x_2 = x_3 + x_6 + x_7 \\ x_4 = x_5 + x_6 + x_7 \end{array}\right]$$ ← das beschreibt C.

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) =$$

$$(x_3+x_5+x_7,\ x_3+x_6+x_7,\ x_3,\ x_5+x_6+x_7,\ x_5,\ x_6,\ x_7) =$$

$$\left.\begin{array}{l} x_3 \cdot (1,1,1,0,0,0,0) + \\ x_5 \cdot (1,0,0,1,1,0,0) + \\ x_6 \cdot (0,1,0,1,0,1,0) + \\ x_7 \cdot (1,1,0,1,0,0,1) \end{array}\right]$$ ← Basisvektoren von U.

Bsp.

$$z_1 = (1, 2, 3, 4)$$
$$z_2 = (5, 6, 7, 8)$$
$$z_3 = (9, 10, 11, 12)$$

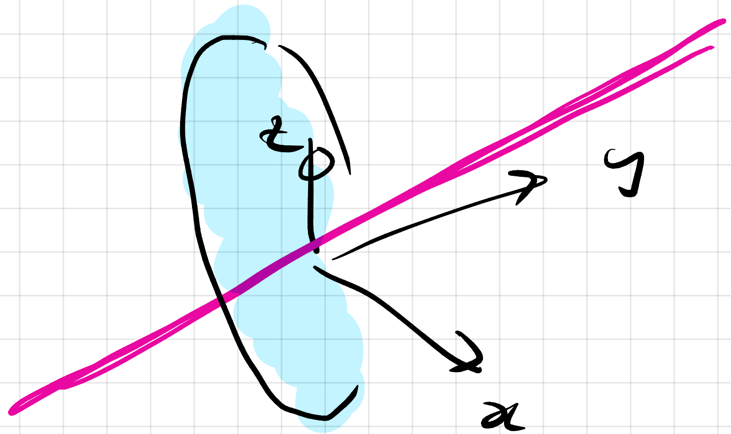
$\mathrm{lin}(z_1, z_2, z_3) \subseteq \mathbb{R}^4$ ist der Zeilenraum

von
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Gauß}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{lin}(z_1, z_2, z_3) = \mathrm{lin}\big((1, 0, -1, -2), (0, 1, 2, 3)\big)$$

Bsp. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1 \times 3}$

Zeilenraum $\quad \mathrm{lin}\big((1,1,1)\big) = \{(\lambda,\lambda,\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$



Spaltenraum $\quad \mathrm{lin}\big((1),(1),(1)\big) = \mathbb{R}$

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \cdot x + 1 \cdot y + 1 \cdot z = 0\}$$

Bsp.

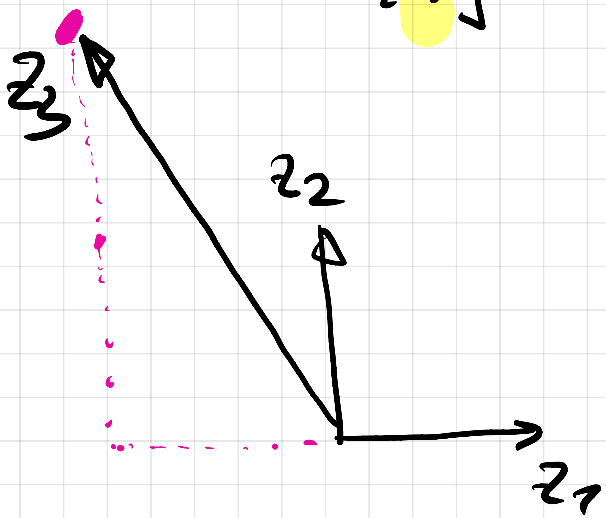
$z_1 = (1, 2, 3, 4)$

$z_2 = (5, 6, 7, 8)$

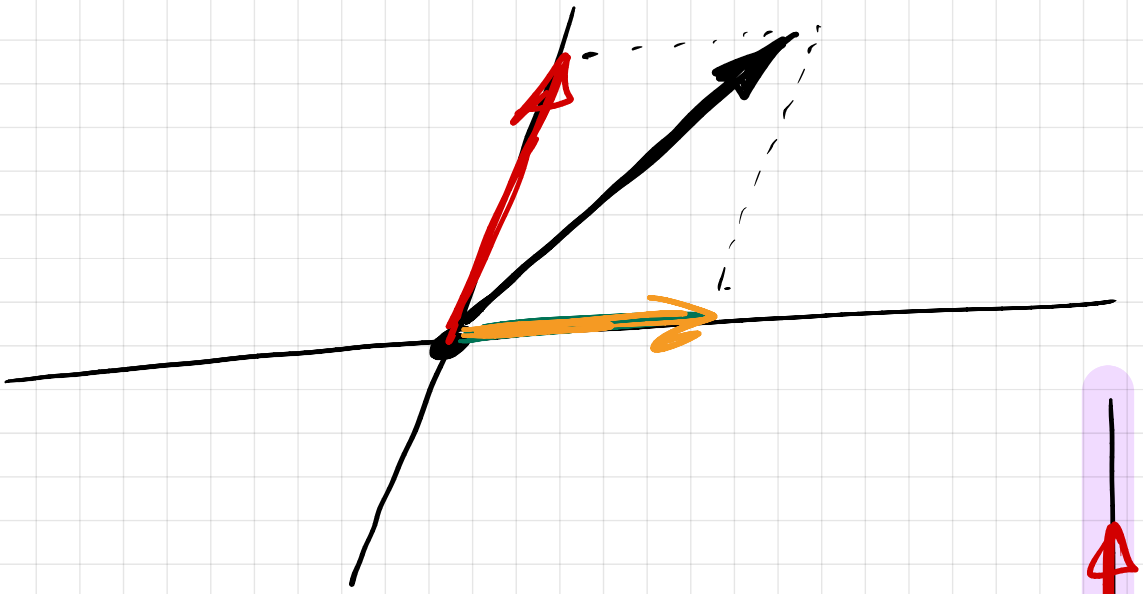
$z_3 = (9, 10, 11, 12)$

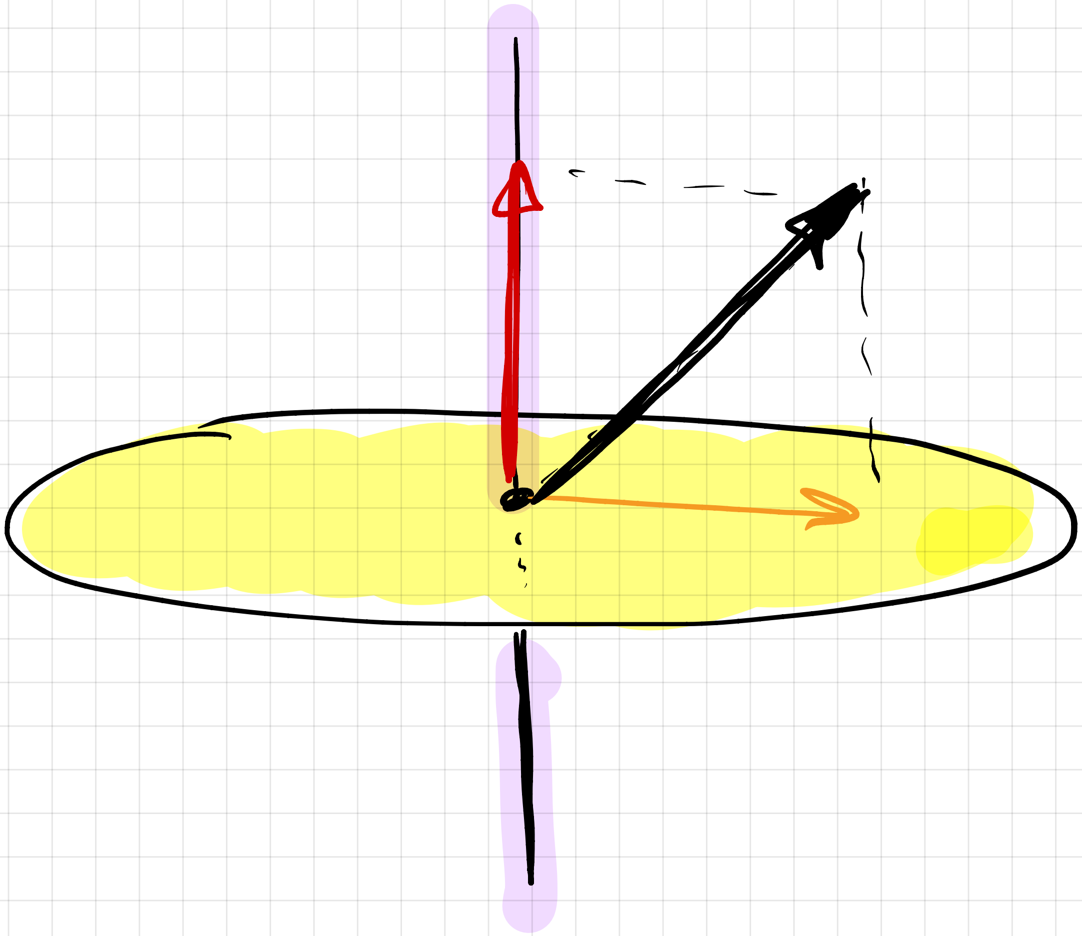
$$\begin{bmatrix} | & | & | \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 11 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Gauß}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(-1) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{bmatrix} \qquad (-1) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



2.4. Summen von Vektorräumen





Def Die Summe von Untervektorräumen U, W eines VR V wird als $U + W = \{u + w : u \in U, w \in W\}$