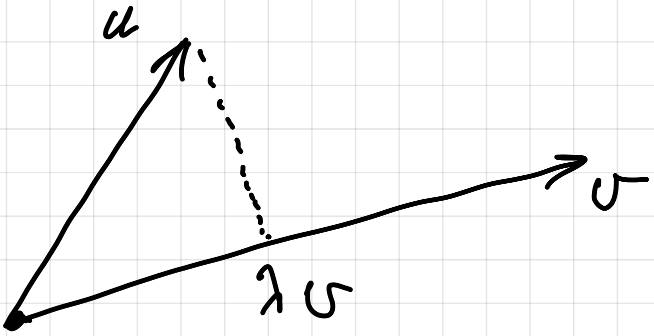
$$\boxed{\begin{array}{c}\|a+b\|^2 = \|a\|^2 + 2\langle a,b\rangle + \|b\|^2 \\ \text{für alle } a,b \in V. \\ V \text{ Euklidischer Raum über } \mathbb{R}\end{array}}$$



$$\min_{\lambda \in \mathbb{R}} \|u - \lambda v\|^2$$

$$\begin{aligned}
\|u-\lambda v\|^2 &= \langle u-\lambda v, u-\lambda v\rangle \\
&= \langle u,u\rangle - \langle \lambda v, u\rangle - \langle u, \lambda v\rangle + \langle \lambda v, \lambda v\rangle \\
&= \|u\|^2 - 2\lambda\langle u,v\rangle + \lambda^2\|v\|^2 \\
&= \left(\lambda \cdot \|v\| - \frac{\langle u,v\rangle}{\|v\|}\right)^2 + \|u\|^2 - \frac{\langle u,v\rangle^2}{\|v\|^2}
\end{aligned}$$

Wenn wir als $\lambda = \dfrac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2}$ fixieren,

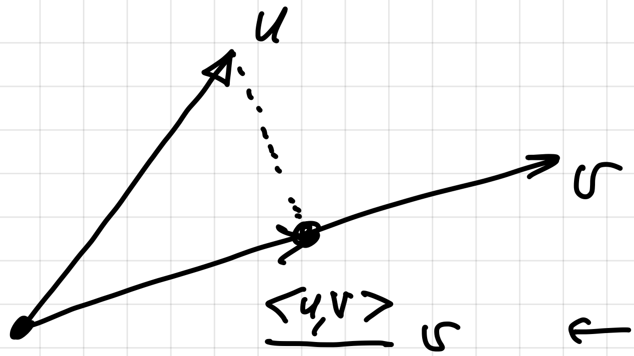
wird $\|u-\lambda v\|^2$ minimal.

Wir erhalten also $\underbrace{\left\| u - \dfrac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2} v \right\|^2}_{\geq 0} = \|u\|^2 - \dfrac{\langle u,v\rangle^2}{\|v\|^2}$

$$\Rightarrow \|u\|^2 - \frac{\langle u,v\rangle^2}{\|v\|^2} \geq 0 \Rightarrow |\langle u,v\rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|.$$

Wenn man den Gleichheitsfall dieser Herleitung verfolgt, sieht man, dass $|\langle u,v\rangle| = \|u\| \cdot \|v\|$ genau dann erfüllt ist, wenn u und v linear abhängig sind. $\square$

Bemerkung Nebenbei haben wir gelernt, einen Vektor auf eine Achse senkrecht zu projizieren.



$\frac{\langle u,v\rangle}{\langle v,v\rangle} v$ ← linear in u

Es ist eine elementare aber nützliche Operation.

In einem Euklidischen Raum V über $\mathbb{K}$ heißen $u \in V$ und $v \in V$ <u>senkrecht</u> bzw. <u>orthogonal</u>, wenn $\langle u,v\rangle = 0$ ist.

Des Weiteren definiert man den Winkel zwischen $u \in V \setminus \{0\}$ und $v \in V \setminus \{0\}$ als den Wert $\varphi \in [-\pi, \pi]$ mit

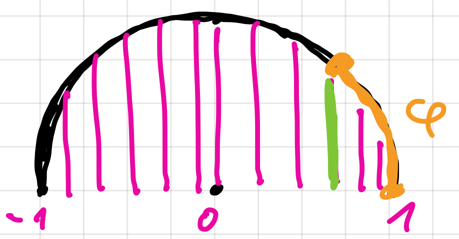
$$\cos\varphi = \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}$$

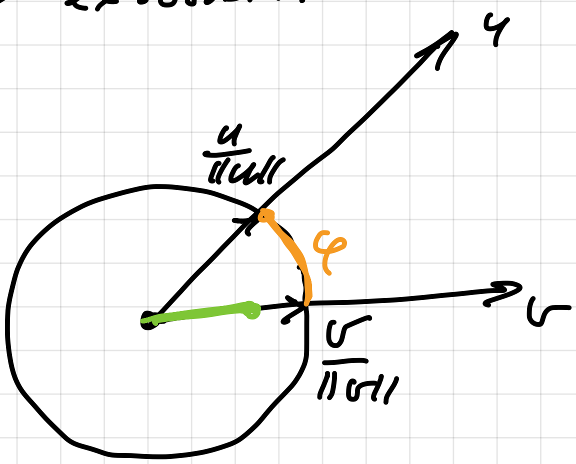
(im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

Nach der Ungleichung von Cauchy-Schwarz gilt

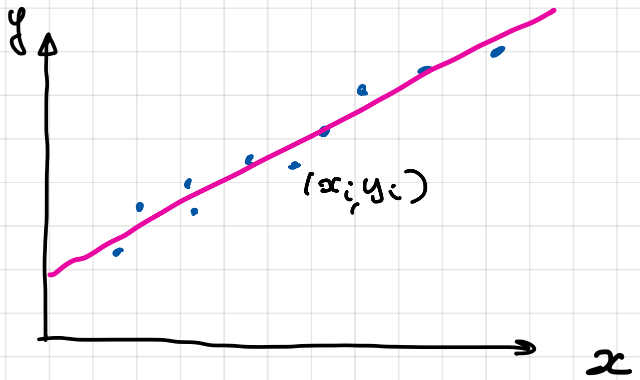
$$-1 \le \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\cdot\|v\|} \le 1,$$

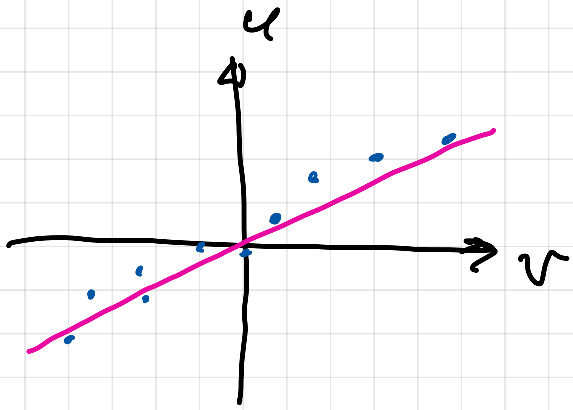
sodass tatsächlich ein solches φ existiert.





Bsp





Sie haben eine Stichprobe aus (x,y)-Paaren (x_i, y_i) mit $i = 1,\dots,n$ (n ist die Größe der Stichprobe). Gesucht sind zwei Werte $a, b \in \mathbb{R}$ derart, dass

y_i durch $a x_i + b$ möglichst gut approximiert wird. Wir wollen

$$y_i \approx a x_i + b \qquad (i = 1, \dots, n)$$

Wir berechnen die Mittelwerte der Stichproben

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad \text{und} \quad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

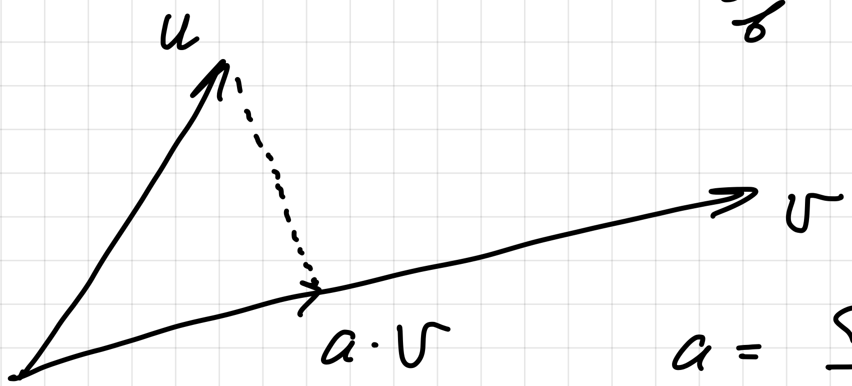
und zentriert y und x jeweils zu u und v

$$u = (u_1, \dots, u_n) \qquad u_i = y_i - \bar{y}$$
$$v = (v_1, \dots, v_n) \qquad v_i = x_i - \bar{x}$$

Wir wollen nun u_i durch v_i als

$u_i \approx a v_i$ approximieren. Dazu hat man $y_i - \bar{y} \approx a(x_i - \bar{x}) \iff$

$$y_i \approx a x_i + \underbrace{\bar{y} - a\bar{x}}_{b}$$

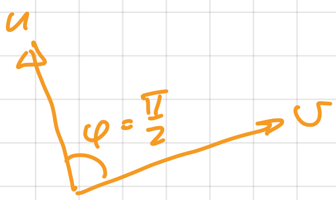


$$a = \frac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle}$$

Diese Weise y_i als $a x_i + b$ zu approximieren nennt man die lineare Regression.

Der Winkel zwischen u und v ist das $\varphi \in [-\pi, \pi]$ mit

$$\cos\varphi = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\| \cdot \|v\|} \leftarrow$$ Stichproben-korrelation (bei Stichproben x und y).



unkorreliert (x und y)

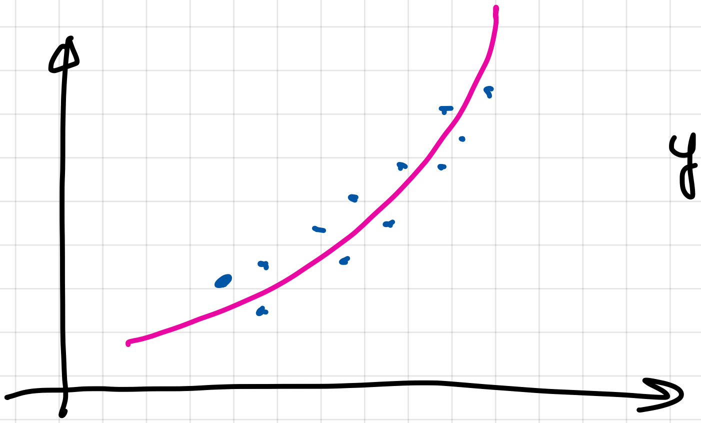
stark positiv korreliert (x und y)

x und y negativ korreliert

Varianten dazu: $z_i \approx a x_i + b y_i + c$

gesuchte Werte

Weitere Variante



$$y_i \approx c \cdot e^{a x_i}$$

$$\underbrace{\ln y_i}_{} \approx a x_i + \underbrace{\ln c}_{= b}$$

7.1.3 Eigenschaften der Norm und des Abstands

Prop. Sei V Euklidischer Raum über $\mathbb{K}$. Dann gilt:

(i) $\|u\| \geq 0$ und $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$ für alle $u \in V$

(ii) $\|\alpha u\| = |\alpha| \cdot \|u\|$ für alle $\alpha \in \mathbb{K}$ und alle $u \in V$

(iii) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ gilt für alle $u, v \in V$

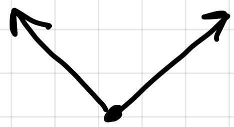
Beweis: Übung.

7.1.4 Orthogonale bzw. orthonormale Systeme und das Gram-Schmidt-Verfahren

Ein Vektorsystem $b_1, \dots, b_n$ aus Vektoren in einem Euklidischen Raum V heißt orthogonal, wenn $b_i \neq 0$ ist für alle $i = 1, \dots, n$ und $\langle b_i, b_j \rangle = 0$ für alle $i, j = 1, \dots, n$ mit $i \neq j$.

orthogonales System

Ein orthogonales System $b_1, \dots, b_n$ heißt orthonormal wenn $\| b_i \| = 1$ ist, für alle $i = 1, \dots, n$.



orthonormales System.

Orthogonale Systeme sind notwendigerweise linear unabhängig.
Man spricht von orthogonalen bzw. orthonormalen Basen, wenn es Basen von V sind.

Ist $b_1, \dots, b_n$ eine orthogonale Basis von V so kann ein Vektor $v \in V$ ohne großen Aufwand in der Basis dargestellt werden:

$$v = \beta_1 b_1 + \dots + \beta_n b_n$$

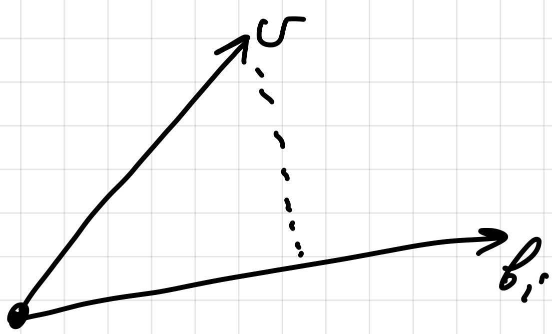
$$\Downarrow$$

$$\langle v, b_i \rangle = \langle \beta_1 b_1 + \dots + \beta_n b_n, b_i \rangle$$

$$\Downarrow$$

$$\langle v, b_i \rangle = \beta_i \langle b_i, b_i \rangle$$

$$\beta_i = \frac{\langle v, b_i \rangle}{\langle b_i, b_i \rangle}$$



D.h. $v_B = \begin{pmatrix} \langle v, b_1 \rangle / \langle b_1, b_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle v, b_1 \rangle / \langle b_n, b_n \rangle \end{pmatrix}$ mit $B = (b_1, \dots, b_n)$

Bei einer Orthonormalbasis gilt

$$v_B = \begin{pmatrix} \langle v, b_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle v, b_n \rangle \end{pmatrix}$$ oder mit anderen

Worten $$v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, b_i \rangle b_i$$