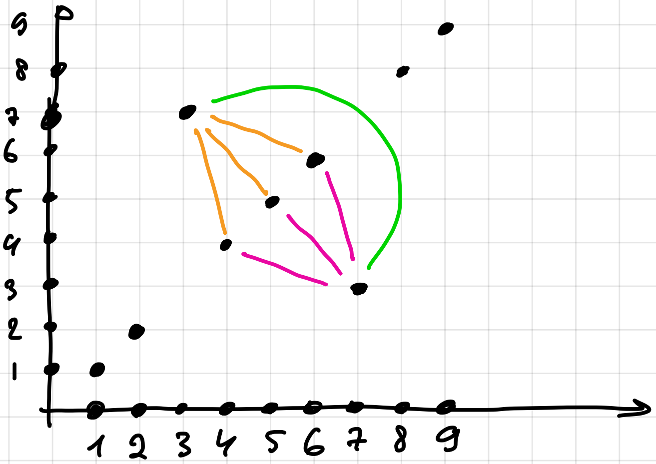
5.2.5 Leibniz-Formel

Bem. Das Vorzeichen einer Transposition ist -1.



Vgl. das Bild mit der Permutation von 3 und 7 in S_9.

Nach (D6) gilt somit

$$\det(b_{\tau(1)},\dots,b_{\tau(n)}) = -\det(b_1,\dots,b_n)$$
$$= (\operatorname{sign}\tau)\cdot\det(b_1,\dots,b_n)$$

für jede Transposition τ und alle $b_1,\dots,b_n \in \mathbb{K}^n$.

Wenn wir nun eine allgemeine Permutation $\sigma \in S_n$ betrachten, so können wir diese als Produkt von Transpositionen $\sigma = \tau_1\cdot\ldots\cdot\tau_m$ darstellen und erhalten dann

$$\det(b_{\sigma(1)},\dots,b_{\sigma(n)}) = \underbrace{\operatorname{sign}\tau_1\cdot\ldots\cdot\operatorname{sign}\tau_m}_{\overset{5.2.4}{=}\ \operatorname{sign}(\tau_1\cdot\ldots\cdot\tau_m)\ =\ \operatorname{sign}\sigma}\cdot\det(b_1,\dots,b_n)$$

$$\Rightarrow \det(b_{\sigma(1)},\dots,b_{\sigma(n)}) = \operatorname{sign}\sigma\cdot\det(b_1,\dots,b_n)$$

Insbesondere gilt

$$\det(e_{\sigma(1)},\dots,e_{\sigma(n)}) = \operatorname{sign}\sigma \cdot \det(e_1,\dots,e_n) \overset{(D3)}{=} \operatorname{sign}\sigma.$$

Nun können wir die Herleitung aus 5.2.1 fortsetzen.
Wir erhalten

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in S_n} a_{\sigma(1),1}\cdot\ldots\cdot a_{\sigma(n),n}\cdot\det(e_{\sigma(1)},\dots,e_{\sigma(n)})$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\det(A) = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}\sigma\cdot a_{\sigma(1),1}\cdot\ldots\cdot a_{\sigma(n),n}}$$

Es ist die sogenannte Leibniz-Formel.

Wenn eine Funktion $\det : \underbrace{\mathbb{K}^n\times\dots\times\mathbb{K}^n}_{n}\to\mathbb{K}$ existiert, die (D1), (D2), (D3) erfüllt, so ist sie also durch die Leibniz-Formel gegeben. Die Existenz haben wir aber noch nicht gezeigt; Dafür müssen wir zeigen, dass die Funktion aus der Leibniz-Formel (D1), (D2) und (D3) erfüllt.

Wir zeigen das und schließen somit den Beweis von Theorem 5.1.2 ab.

(D1) folgt aus der Beobachtung, dass die rechte Seite der Leibnitzformel Linearkomb. der Ausdrücke

$a_{\sigma(1),1}\cdot\ldots\cdot a_{\sigma(n),n}$ ist

$$a_1 = \begin{bmatrix} \\ a_{\sigma(1),1} \\ \\ \end{bmatrix}$$

Jeder dieser Ausdrücke ist multilinear in den Spalten $a_1,\dots,a_n$.

(D2): Um uns die Schreibarbeit zu erleichtern zeigen wir (D2) im Fall $a_1 = a_2$.

Unter Permutationen in S_n bilden wir Paare.

Wir wählen $n-2$ verschiedene Werte $i_3, i_4, \ldots, i_n \in \{1, \ldots, n\}$ und betrachten die Permutationen $\sigma \in S_n$ mit $\sigma(3) = i_3, \ldots, \sigma(n) = i_n$.

Es bleiben zwei Werte übrig, die noch nicht vergeben sind, das sind s und t mit

$$\{s, t\} = \{1, \ldots, n\} \setminus \{i_3, \ldots, i_n\}.$$

Sobald die Werte $\sigma(3), \ldots, \sigma(n)$ fixiert sind, gibt es nur zwei mögliche Permutationen, α mit $\alpha(1) = s$, $\alpha(2) = t$ und β mit $\beta(1) = t$, $\beta(2) = s$. Betrachten wir die jeweiligen Terme auf der rechten Seite der Leibniz-Formel. Das sind

$\operatorname{sign} \alpha \quad a_{s,1}\, a_{t,2}\, a_{i_3,3} \cdot \ldots \cdot a_{i_n,n}$ und

$\operatorname{sign} \beta \quad a_{t,1}\, a_{s,2}\, a_{i_3,3} \cdot \ldots \cdot a_{i_n,n}$

$a_{s,1} = a_{s,2}$ denn $a_1 = a_2$,

$a_{t,1} = a_{t,2}$ denn $a_1 = a_2$

und

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sign} \alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ s & t & i_3 & \ldots & i_n \end{bmatrix} \\[2ex] \operatorname{sign} \beta = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ t & s & i_3 & \ldots & i_n \end{bmatrix} \end{array}\right] \Rightarrow \operatorname{sign} \alpha = -\operatorname{sign} \beta$$

denn α und β unterscheiden sich um eine Transposition.

$\Rightarrow$ Die beiden Terme kompensieren sich.

$\Rightarrow$ die rechte Seite der Leibniz-Formel ist 0 bei $a_1 = a_2$.

(D3) Sei $I_n = (\delta_{ij})_{i,j=1\ldots n}$ die Einheitsmatrix,

mit $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{bei } i=j \\ 0, & \text{bei } i \neq j. \end{cases}$

Wir werten die rechte Seite der Leibniz-Formel auf $A = I_n$ aus.

$$\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) \underbrace{\delta_{\sigma(1),1}}_{\neq 0 \text{ nur bei } \sigma(1)=1} \cdot \ldots \cdot \underbrace{\delta_{\sigma(n),n}}_{\neq 0 \text{ nur bei } \sigma(n)=n}$$

Nur für die identische Permutation erhalten wir einen Nichtnullterm, und dieser Term ist 1. Also ist (D3) auch erfüllt.

Also existiert die Determinante tatsächlich.

$\boxed{5.2.6.}$ Die Determinante der Transponierten Matrix

Wir betrachten $A = (a_1, \ldots, a_n) = (a_{ij})_{i,j=1..n} \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Wir verbinden $\det(A)$ mit $\det(A^T)$. $A^T = (a^T_{ij})_{i,j=1\ldots n}$ mit

$$a^T_{ij} = a_{ji}.$$

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) \prod_{k=1}^{n} a_{\sigma(k),k}$$

Substitution $\boxed{i = \sigma(k)}$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma^{-1}(i)}$$

$$\boxed{\operatorname{sign}(\sigma^{-1}) = \operatorname{sign} \sigma, \text{ denn } \operatorname{sign}(\sigma^{-1}\sigma) = 1}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma^{-1}) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma^{-1}(i)}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a^T_{\sigma(i),i}$$

$$= \det(A^T).$$

Thm Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Dann gilt: $\det(A^T) = \det(A)$.

Bem. Das ergibt, dass unsere Regeln (z.B. bzgl. Spalten) transponiert werden können.

5.3 Determinante, Rang, Minoren und Invertierung von Matrizen

5.3.1 Cramer'sche Regel

Wir betrachten ein LGS $Ax = b$ mit n Gleichungen und n Variablen, d.h. $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{K}^n$ und $x \in \mathbb{K}^n$ ist der Vektor der n Unbekannten. Wenn A invertierbar ist, d.h. $\operatorname{rang}(A) = n$, und das heißt $\det(A) \neq 0$, dann besitzt $Ax = b$ eine eindeutige Lösung x.

Wir wünschen uns eine Formel für die Lösung in Abhängigkeit von A und b, genauer gesagt, in Abhängigkeit von den Komponenten von A und b.

Sei $A = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$ und $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$. Dann:

$$Ax = b \implies \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = b$$

$$\implies x_1 a_1 + x_2 a_2 + \ldots + x_n a_n = b$$

$$\iff \sum_{j=1}^{n} x_j a_j = b$$

$$\implies$$

$$\det\left(a_1, \ldots, a_{i-1}, \sum_{j=1}^{n} x_j a_j, a_{i+1}, \ldots, a_n\right) = \underbrace{\det(a_1, \ldots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \ldots, a_n)}_{{}^{"}\Delta_i{}^{"}}$$

$$\overset{(D1)}{\implies} \sum_{j=1}^{n} x_j \underbrace{\det(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_j, a_{i+1}, \ldots, a_n)}_{\substack{\text{nur bei } j=i \\ \text{ungleich } 0 \text{, denn} \\ \text{sonst hat man } a_j \\ 2\text{mal (vgl. (D2))}}} = \Delta_i$$

$$\implies x_i \det(A) = \Delta_i$$

$$\implies \boxed{x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} \quad \text{mit } \Delta_i = \det(a_1, \ldots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \ldots, a_n), \ \Delta = \det(A).}$$

Diese Formel nennt man die Cramersche Regel.

Bsp.

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 = b_2 \end{cases} \implies x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

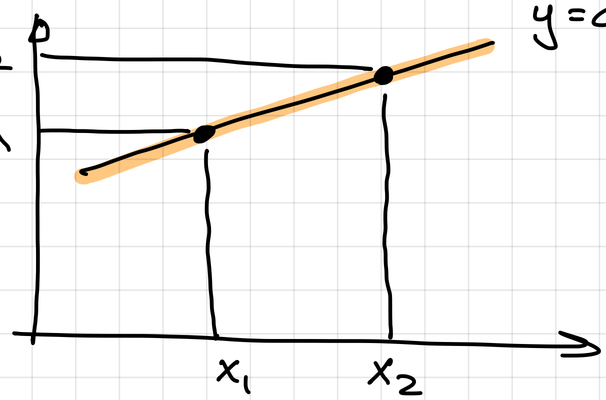
unter der Voraussetzung, dass $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ ist.

$$
\begin{array}{l} a_{22}\times \\ -\ a_{12}\times \end{array}
\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}
$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1 a_{22} - b_2 a_{12}$$

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

Bsp



$y = ax + b$

$f(x) = ax + b.$

Wunsch:

$$\boxed{\begin{array}{l} f(x_1) = y_1 \\ f(x_2) = y_2 \end{array}} \Rightarrow$$

$(x_1 \neq x_2).$

$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

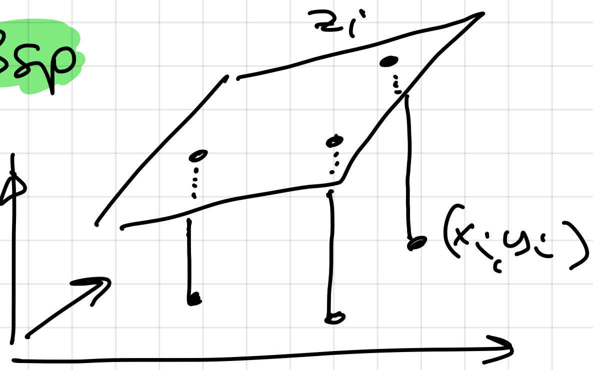
Cramer'sche Regel

$\Longrightarrow$

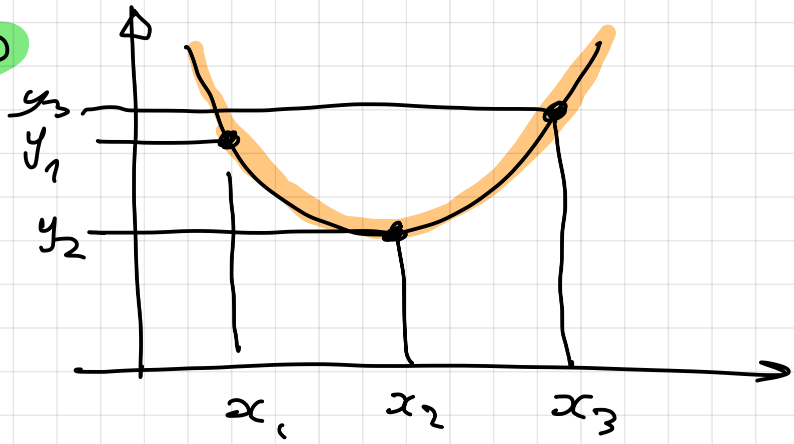
$$a = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ y_2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{vmatrix}}$$

$$b = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{vmatrix}}$$

Bsp



Bsp



$f(x_i) = y_i \quad (i = 1, 2, 3)$ ← Bedingung

mit $f(x) = ax^2 + bx + c$

Gesucht ist f, gegeben durch a, b, c.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{bmatrix}}_{} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

Det. davon nennen wir Δ (es ist im Wesentlichen die Vandermonde-Determinante).

$$a = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & x_1 & 1 \\ y_2 & x_2 & 1 \\ y_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}}{\Delta} \qquad b = \frac{\begin{vmatrix} x_1^2 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}{\Delta}$$

$$c = \frac{\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & y_1 \\ x_2^2 & x_2 & y_2 \\ x_3^2 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}}{\Delta}$$

5.3.2. Laplace-Entwicklung

Gewünscht ist eine rekursive Formel

für die Determinante: Größe n in Größe $n-1$ beschreiben.

Sei $A = (a_1, \dots, a_n) = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \in \mathbb{K}^{n \times n}$ mit $n \geq 2$. Wir betrachten eine der Spalten, a_j mit $j = 1, \dots, n$, und betrachten deren Entwicklung

$$a_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$$

$\Rightarrow$

$$\det(A) = \det\Big(a_1, \dots, a_{j-1}, \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot e_i, a_{j+1}, \dots, a_n\Big)$$

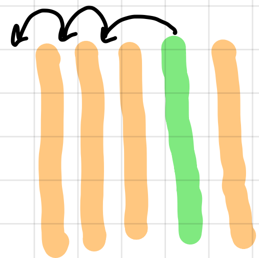
$$\overset{(D1)}{=} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \underbrace{\det(a_1, \dots, a_{j-1}, e_i, a_{j+1}, \dots, a_n)}_{=: \Delta_{ij}}$$

Was ist Δ_{ij}? Kann man es einfach beschreiben?

$$\Delta_{ij} = \det \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} \mathrm{NW} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \mathrm{NO} \\ a_{i,1} \cdots a_{i,j-1} & 1 & a_{i,j+1} \cdots a_{i,n} \\ \mathrm{SW} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \mathrm{SO} \end{bmatrix} & i \\ \qquad\qquad\qquad j & \end{array}$$

Wenn wir die j-te Spalte nutzen, um die anderen Spalten mit ET3 passend zu transformieren erhalten wir

$$\Delta_{ij} = \det \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccccc} NW & & \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix} & & NO \\ 0 \cdots 0 & & 1 & & 0 \cdots 0 \\ SW & & \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix} & & SO \end{array}\right] \begin{matrix} \\ i \\ \\ \end{matrix} \\ \qquad\qquad j \end{array}$$



Durch passende ET1 für Zeilen und Spalten erhalten wir

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \cdots & \cdots 0 \\ 0 & \boxed{NW} & \boxed{NO} \\ \vdots & \boxed{SW} & \boxed{SO} \\ 0 & & \end{bmatrix}$$

$$= (-1)^{i+j} \underbrace{\det \begin{bmatrix} \boxed{NW} & \boxed{NO} \\ \boxed{SW} & \boxed{SO} \end{bmatrix}}_{\text{"} A'_{i,j} \text{"}}$$

– die Matrix, die aus A durch das Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte entstanden ist.

$$\Rightarrow \det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} (-1)^{i+j} \det(A'_{i,j}) .$$

Das ist eine rekursive Formel für die Determinante.

Thm (Der Entwicklungssatz von Laplace)

Sei $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Dann gilt:

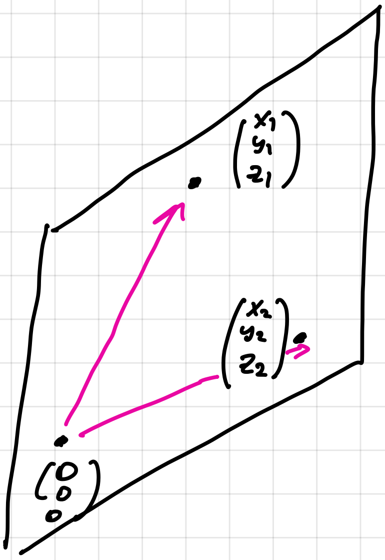
$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} (-1)^{i+j} \det(A'_{ij}) \quad \text{für alle } j = 1,\dots,n,$$

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (-1)^{i+j} \det(A'_{ij}) \quad \text{für alle } i = 1,\dots,n.$$

wobei A'_{ij} die Matrix ist, die aus A durch das Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht.

<u>Beweis:</u> die erste Formel für $\det(A)$ wurde oben hergeleitet. Die zweite Formel folgt aus der ersten mit der Verwendung von $\det(A^T) = \det(A)$. $\square$

Bsp



Ebene in $\mathbb{R}^3$, die durch Punkte $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ gegeben ist.

(wir nehmen an, dass diese Vektoren linear unabhängig sind).

Was ist die Formel für die Gleichung dieser Ebene?

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ liegt in der Ebene $\iff$ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$ sind linear abhäng. $\iff$

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} x & x_1 & x_2 \\ y & y_1 & y_2 \\ z & z_1 & z_3 \end{pmatrix} < 3 \iff \det\begin{bmatrix} x & x_1 & x_2 \\ y & y_1 & y_2 \\ z & z_1 & z_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x & x_1 & x_2 \\ y & y_1 & y_2 \\ z & z_1 & z_2 \end{vmatrix} \overset{\text{Laplace}}{=\!=} x\cdot \begin{vmatrix} y_1 & y_2\\ z_1 & z_2\end{vmatrix} - y \cdot \begin{vmatrix} x_1 & x_2\\ z_1 & z_2\end{vmatrix} + z\cdot\begin{vmatrix} x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{vmatrix}$$

Die Gleichung: $ax + by + cz = 0$

mit $a = \begin{vmatrix} y_1 & y_2\\ z_1 & z_2\end{vmatrix}$, $b = -\begin{vmatrix} x_1 & x_2\\ z_1 & z_2\end{vmatrix}$, $c = \begin{vmatrix} x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{vmatrix}$

Fun fact: $\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}$ hat einen Namen....

Kreuzprodukt von $\begin{pmatrix} x_1\\ y_1\\ z_1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} x_2\\ y_2\\ z_2\end{pmatrix}$

5.3.3. Die komplementäre Matrix

Es wäre schön, eine Formel für A^{-1} zu haben ...

Sei $A = (a_1, \dots, a_n) = (a_{ij})_{i,j=1\dots n} \in \mathbb{K}^{n\times n}$.

$$\det(a_1, \dots, a_{j-1}, a_k, a_{j+1}, \dots, a_n) = \det(A)\cdot\delta_{jk}$$

gilt für $j, k = 1, \dots, n$.

$$\Rightarrow \quad \det\Big(a_1, \dots, a_{j-1}, \sum_{i=1}^{n} a_{ik} e_i, a_{j+1}, \dots, a_n\Big) = \det(A)\delta_{jk}$$

$$\overset{(D1)}{\Rightarrow} \quad \sum_{i=1}^{n} a_{ik} \underbrace{\det(a_1, \dots, a_{j-1}, e_i, e_{j+1}, \dots, a_n)}_{\Delta_{i,j} = (-1)^{i+j}\det(A'_{ij})} = \det(A)\delta_{jk}$$

Die Bezeichnungen aus 5.3.2.

Die inverse Matrix ist die Matrix $B = (b_{ij})_{i,j=1..n}$

mit $B \cdot A = I_n$, d.h.

$$\sum_{i=1}^{n} b_{ji} a_{ik} = \delta_{jk}.$$

Vgl. mit $$\sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta_{ij}}{\det(A)} \cdot a_{jk} = \delta_{jk}$$

D.h., wenn A invertierbar ist, das ist äquivalent zu $\det(A) \neq 0$, dann ist

$$b_{ji} = \frac{\Delta_{ij}}{\det(A)}$$ die Formel für die Komponenten der inversen Matrix.