$$Ax = b$$

bei 2x2 System $\quad Ax = b \iff TAx = Tb$

mit $T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Vertauschen der beiden Gleichung

T ist invertierbar, mit $T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = T$.

ET, Typ 1 allgemein, wenn man Gleichungen s und t vertauscht ($s, t = 1, \dots, m$ und $s \neq t$) entspricht der Matrix

$$T = \begin{array}{c} \\ s \\ t \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & \ddots & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 0 & & 1 & \\ & & & 1 \ddots 1 & & \\ & & 1 & & 0 & \\ & & & & & 1 \ddots 1 \end{bmatrix}_{\ \ s \quad t}.$$

Dieses T ist invertierbar mit $T^{-1} = T$.

ET, Typ 2: Gleichung s wird mit $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ multipliziert.

Die entsprechende Matrix ist

$$T_{s,\lambda} := \begin{bmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \lambda & & \\ & & & & 1 & \\ 0 & & & & & \ddots 1 \end{bmatrix}$$

mit $T_{s,\lambda}^{-1} = T_{s,\frac{1}{\lambda}}$

ET, Typ 3: $(\text{Gleichung } s) := (\text{Gleichung } s) + \alpha \cdot (\text{Gleichung } t)$

$(s, t = 1, \dots, m, \ s \neq t, \ \alpha \in \mathbb{K})$

$$T_{s,t,\alpha} := \begin{array}{c} \\ s \\ \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & \alpha & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$
$$\qquad\qquad t$$

$$\boxed{T_{s,t,\alpha}^{-1} = T_{s,t,-\alpha}.}$$

Bsp

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 + \alpha b_4 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

4.4 Das Bild und der Kern

4.4.1 Bild, Kern und Faser

Sei $F: V \to W$ lineare Abbildung. Wir ordnen der Abbildung F die folgenden Mengen zu:

$$\text{im}(F) := F(V) = \{F(v) : v \in V\}, \text{ das Bild von } F,$$
$$\ker(F) := F^{-1}(\{0\}) = \{v \in V : F(v) = 0\}, \text{ der Kern von } F,$$
$$F^{-1}(w) := F^{-1}(\{w\}) = \{v \in V : F(v) = w\},$$
die Faser von $w \in W$ bzgl. F.

Wir nutzen im und ker auch für Matrizen $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$.

$$\text{im}(A) := \{Ax : x \in \mathbb{K}^n\},$$
$$\ker(A) := \{x \in \mathbb{K}^n : Ax = 0\}.$$

Bsp $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$

$$\ker(A) = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 = 0 \\ 2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 6 \cdot x_3 = 0 \end{array} \right\}$$
$$= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \right\} = \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$\text{im}(A) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$
$$= \left\{ x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} \right) = \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$$

4.4.2 Analyse der Surjektivität und Injektivität

Prop Für eine lineare Abbildung $F: V \to W$ gilt:

(a) F surjektiv $\iff \mathrm{im}(F) = W$.

(b) F injektiv $\iff \ker(F) = \{0\}$.

(c) Ist F injektiv und $v_1, \dots, v_n$ $(n \in \mathbb{N})$ linear unabhängige Vektoren aus V, so sind $F(v_1), \dots, F(v_n)$ ebenfalls linear unabhängig.

Beweis: (a) ist klar. (b): Angenommen, F injektiv. Dann gilt $F(v) \neq F(0)$ für $v \neq 0$. Hierbei ist $F(0) = 0$. Also ist $F(v) \neq 0$ für alle $v \in V \setminus \{0\}$ und $F(0) = 0$. D.h. $\ker(F) = \{0\}$. Umgekehrt: sei $\ker(F) = \{0\}$. Man betrachte beliebige $x, y \in V$ mit $F(x) = F(y)$.
Es gilt $F(x-y) = F(x) - F(y) = 0 \implies x - y \in \ker(F) = \{0\}$.
$\implies x - y = 0 \implies x = y$. $\implies$ F ist injektiv.

(c) Seien $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ Skalare mit $\alpha_1 F(v_1) + \dots + \alpha_n F(v_n) = 0$
$\implies F(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = 0$. Ist F injektiv, so folgt man daraus die Gleichung $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0$. Da $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig sind, hat man $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$.
$\implies F(v_1), \dots, F(v_n)$ linear unabhängig. $\square$

4.4.3 Rang

Der Rang einer linearen Abbildung $F: V \to W$ bzw. einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ ist

$$\mathrm{rang}(F) := \dim(\mathrm{im}(F)) \quad \text{bzw.}$$

$$\mathrm{rang}(A) = \dim(\mathrm{im}(A)).$$ ← das entspricht der Definition des Rangs der Matrix, denn $\mathrm{im}(A) = \mathrm{Lin}(\text{Spalten } A)$

Bsp

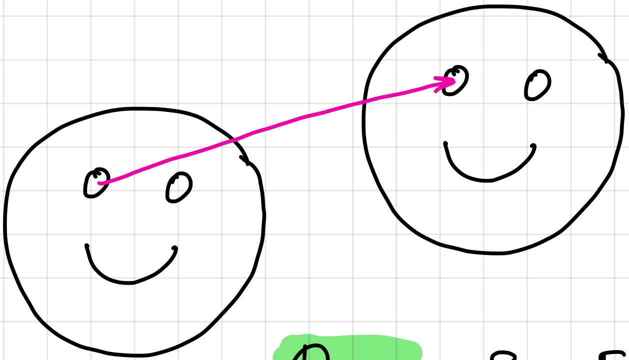
$$\mathrm{rang}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} = 1$$

$$\mathrm{rang}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 4$$

4.4.4. Zusammenhang von Kern und der Fasern.

LGS: $Ax = b$ ⟵ Wie hängt die Lösungsmenge mit dem $\ker(A)$ zusammen?

Lässt sich abstrakt auffassen, indem man eine Gleichung $F(x) = b$ in einem unbekannten $x \in V$ für eine lineare Abbildung $F: V \to W$ betrachtet.



Sei X Teilmenge eines VR V und $a \in V$. Die Verschiebung von X um a ist

$$a + X := \{a + x : x \in X\}.$$

Prop. Sei $F: V \to W$ linear und sei $b = F(x^*)$ mit $x^* \in V$. Dann ist

$$F^{-1}(b) := \{x \in V : F(x) = b\} = x^* + \ker(F).$$

Beweis: $x \in F^{-1}(b) \iff \left.\begin{array}{l} F(x) = b \\ F(x^*) = b \end{array}\right\} \Rightarrow x = x^* + (x - x^*)$ mit $F(x - x^*) = F(x) - F(x^*) = b - b = 0$

$$\Rightarrow x = x^* + \underbrace{(x - x^*)}_{\in \ker(F)} \quad \Rightarrow x \in x^* + \ker(F).$$

Umgekehrt: ist $x \in x^* + \ker(F)$, dann gilt $x = x^* + \tilde{x}$ mit $\tilde{x} \in \ker(F) \Rightarrow x = x^* + \tilde{x}$ und $F(\tilde{x}) = 0$

$$\Rightarrow F(x) = F(x^* + \tilde{x}) = F(x^*) + F(\tilde{x}) = b + 0 = b$$

$$\Rightarrow x \in F^{-1}(b). \qquad \square$$

Bem. Für $F: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ mit $F(x) = Ax$, erhält man eine Version der Proposition, in der es um das LGS $Ax = b$ geht.