λ_i Eigenwert von $F : V \to V$

$$(F - \lambda_i\, id)\, v_4 = v_3 \qquad F(v_4) = \lambda_i v_4 + v_3$$

$$(F - \lambda_i\, id)\, v_3 = v_2 \qquad F(v_3) = \lambda_i v_3 + v_2$$

$$(F - \lambda_i\, id)\, v_2 = v_1 \qquad F(v_2) = \lambda_i v_2 + v_1$$

$$(F - \lambda_i\, id)\, v_1 = 0 \qquad F(v_1) = \lambda_i v_1$$

$$\mathcal{B} = (\ldots\ldots, v_1, v_2, v_3, v_4, \ldots\ldots) \text{ Basis von } V$$

$$F_{\mathcal{B}} = \begin{array}{c c} \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} & \left[\begin{array}{cccc} \lambda_i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_i \end{array}\right] \\ & \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \end{array}$$

6.4.3. Über das Addieren eines Vielfachen der identischen Abbildung

Prop. Sei $F: V \to V$ linear Abbildung auf einem VR V der Dimension $n \in \mathbb{N}$. Sei $\alpha \in \mathbb{K}$. Dann gilt:

(i) $\mathrm{Eig}(F + \alpha\, \mathrm{id}, \lambda + \alpha) = \mathrm{Eig}(F, \lambda)$ gilt für alle $\lambda \in \mathbb{K}$

(ii) $P_{F+\alpha \cdot \mathrm{id}}(t + \alpha) = P_F(t)$

Insbesondere gilt:

(iii) Ist λ Eigenwert von F mit der geometrischen Vielfachheit k und der algebraischen Vielfachheit ℓ, so ist $\lambda + \alpha$ Eigenwert von $F + \alpha \cdot \mathrm{id}$ mit der geometrischen Vielfachheit k und der algebraischen Vielfachheit ℓ.

<u>Beweis:</u> $v \in \mathrm{Eig}(F + \alpha \cdot \mathrm{id}, \lambda + \alpha)$

$\iff (F + \alpha\, \mathrm{id})(v) = (\lambda + \alpha) \cdot v$

$\iff F(v) + \alpha v = (\lambda + \alpha) \cdot v$

$\iff F(v) = \lambda \cdot v$

$\iff v \in \mathrm{Eig}(F, \lambda)$. Das zeigt (i).

(ii): $P_{F+\alpha \cdot \mathrm{id}}(t + \alpha) = P_{(F+\alpha \cdot \mathrm{id})_{\mathcal{B}}}(t + \alpha)$

für eine beliebige Basis $\mathcal{B}$ von V.

Aber: $(F + \alpha \cdot \mathrm{id})_{\mathcal{B}} = F_{\mathcal{B}} + \alpha \cdot \mathrm{id}_{\mathcal{B}}$

$= F_{\mathcal{B}} + \alpha \cdot I$

die Einheitsmatrix

$$\Rightarrow \quad p_{(F+\alpha\, id)_\mathcal{B}}(t+\alpha) = \det\big((t+\alpha)I - (F_\mathcal{B}+\alpha I)\big)$$
$$= \det(tI - F_\mathcal{B}) = p_{F_\mathcal{B}}(t)$$
$$= p_F(t).$$

(iii) folgt aus (i) und (ii).

$\square$

6.4.4. Das Lemma von Fitting

$F: V \to V$ mit Eigenwert λ $\qquad G = F - \lambda \cdot id$

$\mathrm{Eig}(F,\lambda)$ ═════════ $\mathrm{Eig}(G,0) = \ker G$

$p_F(t) = (t-\lambda)^\ell \cdot (\text{weitere Faktoren})$ $\qquad p_G(t) = t^\ell \cdot (\text{weitere Faktoren})$

Lemma Sei $G: V \to V$ lineare Abbildung auf einem VR V mit $n = \dim(V) \in \mathbb{N}$. Sei $\ker G \neq \{0\}$ (d.h. G ist nicht invertierbar oder mit anderen Worten, 0 ist der Eigenwert von G). Sei $r \in \mathbb{N}$ die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts 0 von G. Für $i \in \mathbb{N}_0$ seien $U_i = \ker(G^i)$ und $W_i = \mathrm{im}(G^i)$. Dann existiert ein $d \in \{1,\dots,r\}$ mit den folgenden Eigenschaften:

(a1) $\{0\} = U_0 \subsetneq U_1 \subsetneq \dots \subsetneq U_d = U_{d+1} = U_{d+2} = \dots\dots$

(a2) $V = W_0 \supsetneq W_1 \supsetneq \dots \supsetneq W_d = W_{d+1} = W_{d+2} = \dots\dots$

(b) $V = U_d \oplus W_d$

(c1) Die Einschränkung $S = G|_{U_d} : U_d \to U_d$ erfüllt $S^d = 0$.

(c2) Die Einschränkung $T = G|_{W_d} : W_d \to W_d$ ist bijektiv.

(d) Für die charakteristischen Polynome von G, S und T gilt:

$$p_G = p_S \cdot p_T, \quad p_S = t^r, \quad p_T(0) \neq 0$$

(e) $\dim(U_d) = r$ und $\dim(W_d) = n - r$.

Beweis: Wir zeigen zuerst die Behauptungen, ohne $d \leq r$ zu zeigen, sondern für ein $d \in \mathbb{N}$. Irgendwann ergibt sich dann, dass $d \leq r$ gilt.

(a1): Sei $i \in \mathbb{N}_0$. Zu zeigen: $U_i \subseteq U_{i+1}$.

Ist $v \in U_i \Rightarrow G^i(v) = 0 \Rightarrow G(G^i(v)) = G(0) = 0$

$\Rightarrow G^{i+1}(v) = 0 \Rightarrow v \in U_{i+1}$. Wir zeigen nun, dass aus $U_i = U_{i+1}$ für ein $i \in \mathbb{N}_0$ die Gleichheit $U_{i+1} = U_{i+2}$ folgt.

Sei $x \in U_{i+2}$, d.h. $G^{i+2}(x) = 0 \Rightarrow G^{i+1}(G(x)) = 0$

$$\Rightarrow G(x) \in U_{i+1} \underset{U_{i+1}=U_i}{\Longrightarrow} G(x) \in U_i \Rightarrow G^i(G(x)) = 0$$

$$\Rightarrow G^{i+1}(x) = 0 \Rightarrow x \in U_{i+1}.$$

$$\Rightarrow U_{i+2} \subseteq U_{i+1} \underset{(U_{i+1} \subseteq U_{i+2})}{\Longrightarrow} U_{i+2} = U_{i+1}.$$

Die Folge der Dimensionen $\dim(U_i)$ ist nicht strikt monoton steigend in $i \in \mathbb{N}_0$. Da $\dim(U_i)$ in der endlichen Menge $\{1, \dots, n\}$ liegt gibt es ein $d \in \mathbb{N}$ mit $\dim(U_d) = \dim(U_{d+1})$. Wir fixieren das kleinste d mit dieser Eigenschaft. Man hat dann:

$$\dim(U_0) < \dots < \dim(U_d) = \dim(U_{d+1})$$

$$U_0 \subsetneq \dots \subsetneq U_d = U_{d+1} = U_{d+2} = \dots$$

(a2):

$$\dim(U_i) + \dim(W_i)$$

$$= \dim(\ker(G^i)) + \dim(\operatorname{im}(G^i))$$

$$\underset{\text{Rangsatz}}{=} \dim(V) = n$$

$\Rightarrow \dim(U_i) + \dim(W_i) = n$. D.h.

$\forall i \in \mathbb{N}_0$

$$\dim(U_i) < \dim(U_{i+1}) \iff \dim(W_i) > \dim(W_{i+1})$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$$U_i \subsetneq U_{i+1} \qquad\qquad W_i \supsetneq W_{i+1}$$

sobald wir geklärt haben, dass $W_i \supseteq W_{i+1}$ gilt.

$$W_{i+1} = \operatorname{im}(G^{i+1}) = \{ G^{i+1}(x) : x \in V \}$$
$$= \{ G^i(G(x)) : x \in V \}$$
$$\subseteq \operatorname{im}(G^i) = W_i .$$

(b) Zu zeigen: $V = U_d \oplus W_d$. Wir wissen bereits: $\dim(U_d) + \dim(W_d) = n = \dim(V)$. Es bleibt $U_d \cap W_d = \{0\}$ zu zeigen. Sei $x \in U_d \cap W_d$, d.h. $G^d(x) = 0$ und $x = G^d(v)$ für ein $v \in V$.

$$\Rightarrow 0 = G^d(x) = G^d(G^d(v)) = G^{2d}(v). \Rightarrow$$

$$(U_0 \subsetneq \dots \subsetneq U_d = U_{d+1} = \dots = U_{2d})$$

$$v \in U_{2d} \underset{*}{\Longrightarrow} v \in U_d \Rightarrow G^d(v) = 0$$

($U_{2d} = U_d$ nach der Wahl von d)

$$\Rightarrow x = G^d(v) = 0.$$

$$\Longrightarrow U_d \cap W_d = \{0\} \Rightarrow V = U_d \oplus W_d.$$

(c1) $S = G|_{U_d} : U_d \to U_d$ ist wohldefiniert, weil man durch das Anwenden von G auf Vektoren in U_d in U_d bleibt: $G(U_d) \subseteq U_d$, denn:

$$G(U_i) = \{ G(x) : x \in U_i \}$$
$$= \{ G(x) : x \in V, \; G^i(x) = 0 \}$$
$$= \{ G(x) : x \in V, \; G^{i-1}(G(x)) = 0 \}$$
$$\subseteq U_{i-1}$$

$$\Rightarrow G(U_d) \subseteq U_{d-1} \underset{\substack{* \\ (a1)}}{\subseteq} U_d .$$

Wenn $x \in U_d$ ist, dann ist $S^d(x) = G^d(x) \underset{*}{=} 0$ wegen $x \in U_d$.

(c2): Wir zeigen $G(W_i) = W_{i+1}$:

$$G(W_i) = \{G(y) : y \in W_i\}$$
$$= \{G(y) : y = G^i(x),\ x \in V\}$$
$$= \{G(G^i(x)) : x \in V\}$$
$$= \{G^{i+1}(x) : x \in V\}$$
$$= W_{i+1}.$$

Insbesondere ist $G(W_d) = W_{d+1} \underset{\substack{\uparrow \\ (a2)}}{=} W_d$

$\Rightarrow \quad G(W_d) = W_d \quad \Rightarrow$

$T = G|_{W_d} : W_d \to W_d$ ist surjektiv.

$\Rightarrow \quad T$ ist bijektiv

$\uparrow$

Definitionsbereich und Wertebereich sind derselbe endlich-dim. Raum (vgl. Lin A 1).