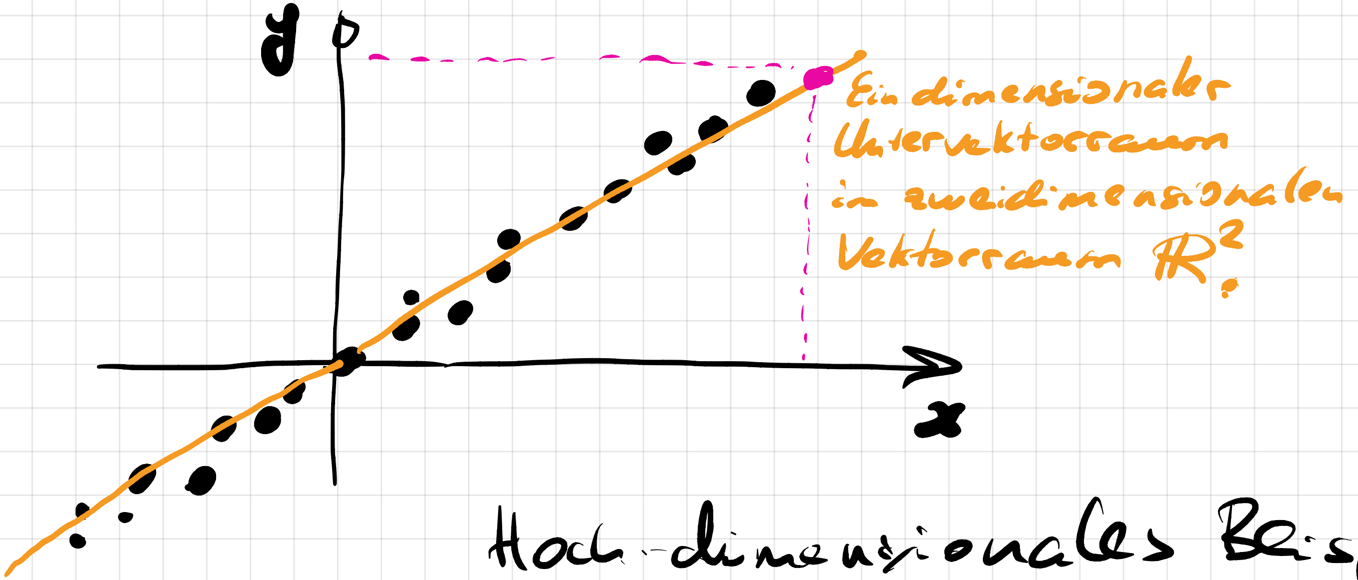
Bsp. Untervektorräume in Data Science, KI usw.



Hoch-dimensionales Beispiel:

1 100×100 Bild ist ein Vektor aus $\mathbb{R}^{10000}$. Wenn wir eine Datenbank an Bildern haben, die wir analysieren wollen, dann haben wir Vektoren im Raum $\mathbb{R}^{10000}$ der Dimension 10000.

Wir sind an einem Untervektorraum W von $\mathbb{R}^{10000}$ einer kleinen Dimension interessiert derart, dass die Vektoren (bzw. die Bilder) nah dran an W liegen.

Linear unabhängige Vektoren geben uns ein Koordinaten-system in der linearen Hülle.

Theorem Seien $v_1, \dots, v_m$ linear unabhängige Vektoren eines Vektorraums V. Dann lässt sich jeder Vektor $v \in \mathrm{lin}(v_1, \dots, v_m)$ in eindeutiger Weise als die Linearkombination

$$v = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i \qquad \text{mit } \lambda_i \in \mathbb{K}$$

darstellen.

<u>Beweis:</u> Angenommen, man könnte ein $v \in \mathrm{lin}(v_1, \dots, v_m)$ auf zwei verschiedene Weisen linear kombinieren, d.h.

$$v = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i \qquad (\lambda_i \in \mathbb{K})$$

$$v = \sum_{i=1}^{m} \mu_i v_i \qquad (\mu_i \in \mathbb{K})$$

mit $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \neq (\mu_1, \dots, \mu_m)$. $\Longrightarrow$

$$0 = v - v = \sum_{i=1}^{m} (\lambda_i - \mu_i) v_i \text{ , wobei}$$

$\lambda_i - \mu_i$ mit $i = 1, \dots, m$ nicht alle gleich Null sind.

$\Longrightarrow$ $v_1, \dots, v_m$ sind linear abhängig $\Longrightarrow$ $\lightning$.

$\Longrightarrow$ Eindeutigkeit. $\square$

Bem. Wann hat man in einem Vektorsystem garantiert lineare Abhängigkeit?

- Ein System mit einem Nullvektor.

$$\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\3\\5\end{bmatrix}$$

$$1 \cdot \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix}2\\3\\5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

- Ein System, in dem ein Vektor mehrfach vorkommt.

$$\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\3\\5\end{bmatrix}$$

$$1 \cdot \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} + (-1) \cdot \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix}2\\3\\5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}.$$

Thm. Seien $v_1, \dots, v_m$ Vektoren eines Vektorraums V. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

(i) $v_1, \dots, v_m$ sind linear unabhängig

(ii) keiner der Vektoren $v_1, \dots, v_m$ lässt sich als eine Linearkombination der übrigen Vektoren darstellen.

Beweis: Wir zeigen (nicht (i)) $\Leftrightarrow$ (nicht (ii)).

Angenommen, $v_1, \dots, v_m$ sind linear abhängig, d.h.

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i = 0, \text{ wobei } \lambda_t \neq 0 \text{ (für ein } t = 1, \dots, m).$$

$$\Longrightarrow \lambda_t v_t + \sum_{\substack{i=1,\dots,m \\ i \neq t}} \lambda_i v_i = 0$$

$$\Longrightarrow \lambda_t v_t = \sum_{\substack{i=1,\dots,m \\ i \neq t}} (-\lambda_i v_i)$$

$$\Rightarrow \quad v_t = \sum_{\substack{i=1,\dots,m \\ i \neq t}} \left(-\frac{\lambda_i}{\lambda_t}\right) v_i$$

$$\Rightarrow \quad v_t \in \operatorname{lin}(v_1, \dots, v_{t-1}, v_{t+1}, \dots, v_m).$$

$\Rightarrow$ nicht (ii).

Umgekehrt: sei (nicht (ii)) erfüllt, d.h.

$v_t \in \operatorname{lin}(v_1, \dots, v_{t-1}, v_{t+1}, \dots, v_m)$ für ein $t = 1, \dots, m$.

$$\Rightarrow v_t = \sum_{\substack{i=1,\dots,m \\ i \neq t}} \mu_i v_i$$

$$\Rightarrow 0 = (-1) \cdot v_t + \sum_{\substack{i=1,\dots,m \\ i \neq t}} \mu_i v_i = \sum_{i=1}^{m} \mu_i v_i,$$

wobei wir $\mu_t = -1$ setzen

$\Rightarrow$ $v_1, \dots, v_m$ sind linear abhängig $\Rightarrow$ nicht (i). $\square$

Def. Ein VR V heißt endlich erzeugt oder endlich-dimensional, wenn V als lineare Hülle $V = \text{lin}(v_1, \dots, v_m)$ von endlich vielen Vektoren $v_1, \dots, v_m \in V$ gegeben werden kann.
In diesem Fall nennt man $v_1, \dots, v_m$ ein Erzeugendensystem von V.

Def. Ein Erzeugendensystem für V, das zusätzlich linear unabhängig ist, nennt man eine Basis von V.

Theorem. Jeder endlich erzeugte Vektorraum V hat eine Basis. Alle Basen von V sind gleich lang.

Def. Die Länge einer jeden Basis eines endlich erzeugten VR V nennt man die Dimension von V. Bezeichnung: $\dim(V)$.
Bei nicht endlich erzeugten Vektorräumen V setzt man $\dim(V) = \infty$.

Bsp.

$$\underset{v_1}{\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}} \quad \underset{v_2}{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}} \quad \underset{v_3}{\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}} \quad \underset{v_4}{\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}} \qquad \text{in } \mathbb{R}^2.$$

Aufgabe: Finde eine Basis von $\mathrm{Lin}(v_1, v_2, v_3, v_4)$.

Wir sind daran interessiert, die linearen Abhängigkeiten unter den Vektoren $v_1, \ldots, v_4$ zu verstehen.

Dafür stellen wir die Gleichung

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 + x_4 v_4 = 0$$

in den Unbekannten x_1, x_2, x_3, x_4 auf.

Jede nichttriviale Lösung dieser Gleichung ist eine lineare Abhängigkeit.

Z. B.: $v_3 = 2 v_2$ oder anders gesagt,

$$-2v_2 + v_3 = 0$$ oder anders gesagt

$$0 \cdot v_1 + (-2) v_2 + 1 \cdot v_3 + 0 \cdot v_4 = 0$$

D.h. die Lösung $x_1 = 0, x_2 = -2, x_3 = 1, x_4 = 0$ gibt uns <u>eine</u> lineare Abhängigkeit.

Mit dem Gauß-Verfahren können wir alle linearen Abhängigkeiten verstehen.

$$x_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sichtweise mit Linearkomb.

$$\underset{v_1}{\parallel} \qquad \underset{v_2}{\parallel} \qquad \underset{v_3}{\parallel} \qquad \underset{v_4}{\parallel}$$

$$\Updownarrow$$

Sichtweise mit Gleichungen.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0 & (1) \\ 2x_1 + x_1 + 2x_3 + 5x_4 = 0 & (2) \end{cases} \qquad (2) := (2) - 1$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0 & (1) \\ -x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + x_4 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$x_1 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}$$

$$\;\;\, \| \qquad\;\; \| \qquad\;\; \| \qquad\;\; \|$$

$$\;\, w_1 \qquad w_2 \qquad w_3 \qquad w_4$$

haben die selben linearen Abhängigkeiten (nach Gauß)

$2v_2 = v_3$ $\qquad\qquad$ $2w_2 = w_3$

w_1, w_2, w_3, w_4 sind die gleichen Vektoren wie $v_1, \dots, v_4$, nur transformiert.

Noch ein weiterer Schritt vom Gauß-Verfahren:

$$\begin{cases} 3x_1 + 1 \cdot x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0 & (1) \qquad (1) := (1) - 4(2) \\ -x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\left\{\begin{array}{l} 7x_1 + 1\cdot x_2 + 2\cdot x_2 + 0\cdot x_4 = 0 \quad (1) \\ -1\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 + 1\cdot x_4 = 0 \quad (2) \end{array}\right.$$

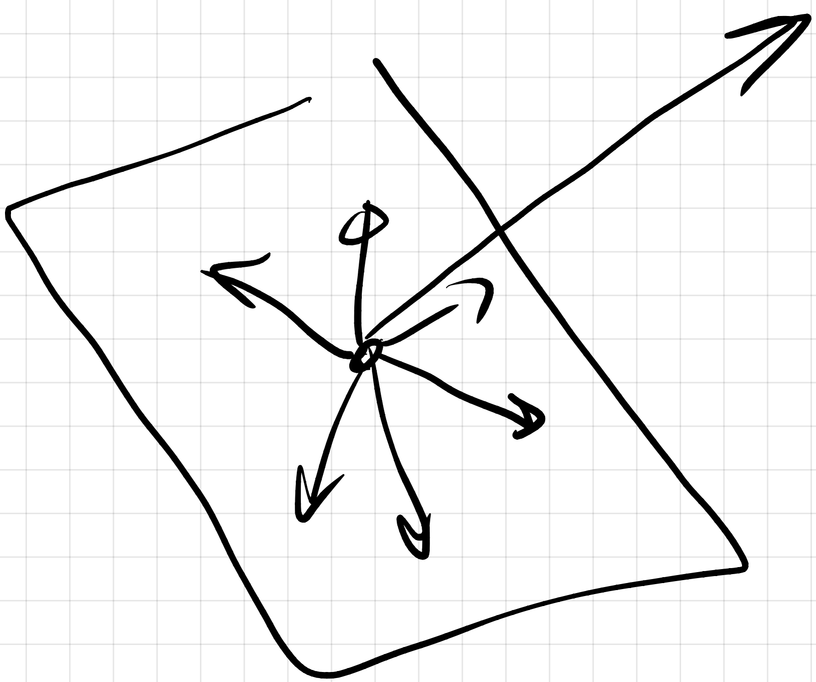
$$\Leftrightarrow \quad x_1 \underbrace{\begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix}}_{= u_1} + x_2 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{= u_2} + x_3 \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{= u_3} + x_4 \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{= u_4} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

u_1, u_2, u_3, u_4 haben die gleichen linearen Abhängigkeiten wie v_1, v_2, v_3, v_4.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix}}_{u_1} = 7 \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{= u_2} + (-1) \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{= u_4}$$

$$u_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = u_2$$

Fazit: die Spalten zu den Leitvariablen bilden eine Basis der linearen Hülle.



$$\left[\begin{array}{cccc|c} 7 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

v_2, v_4 Basis von $\operatorname{lin}(v_1, v_2, v_3, v_4)$

$$v_1 = 7 v_2 + (-1) \cdot v_4$$

$$v_3 = 2 \cdot v_2 + 0 \cdot v_4$$

Eine etwas andere Perspektive: Angenommen man wüsste $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ und $v_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ ist eine Basis von $\operatorname{lin}(v_1, v_2, v_3, v_4)$ mit $v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ und $v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

und man würde versuchen v_1 und v_3 in der Basis v_2, v_4 zu schreiben.

Man könnte es mit einer doppelten des Gauß-Verfahrens machen:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \end{array}\right]$$

Das ist aber nicht notwendig wenn wir wie oben das System

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 + x_4 v_4 = 0$$

mit dem Gauß-Verfahren gelöst haben.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \end{array}\right] \iff \begin{cases} 1 \cdot x_2 + 4 \cdot x_4 = 3 \\ 1 \cdot x_2 + 5 \cdot x_4 = 2 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$x_2 \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{= v_2} + x_4 \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}}_{= v_4} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}}_{= v_1}$$

$$\underbrace{x_1 \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_4 \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = 0}_{\text{wir lösen das und setzen } x_1 = -1.}$$

Oder:

$$x_1 \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} + x_4 \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

wird gelöst und wir setzen dann $x_1 = -1$

$x_3 = 0$

Genauso für v_1, v_2, v_3, v_4:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= 7 v_2 + (-1) v_4 \\ v_3 &= 2 v_2 \end{aligned}\right] \Rightarrow$$

$$\mathrm{lin}(v_1, v_2, v_3, v_4) = \mathrm{lin}(v_2, v_4).$$

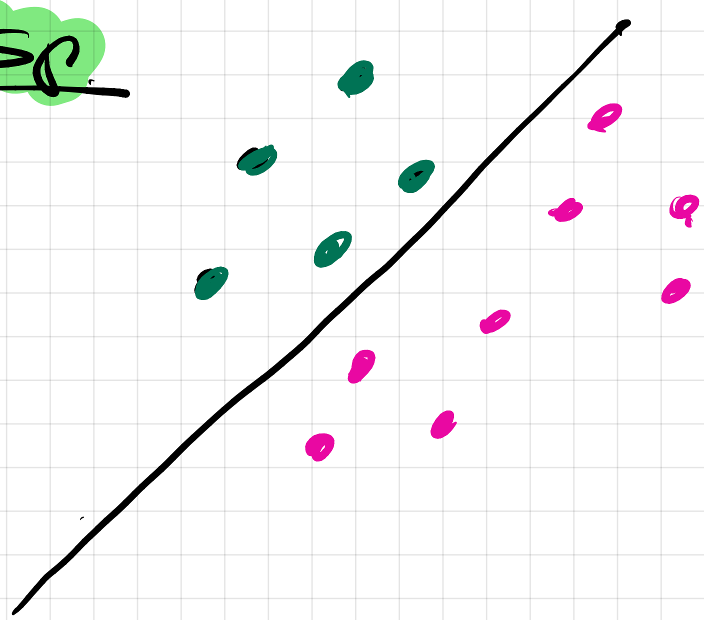
Sind u_2, u_4 linear unabhängig?

$$x_2 \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{= u_2} + x_4 \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{= u_4} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff x_2 = x_4 = 0.$$

u_2 und u_4 sind linear unabhängig.

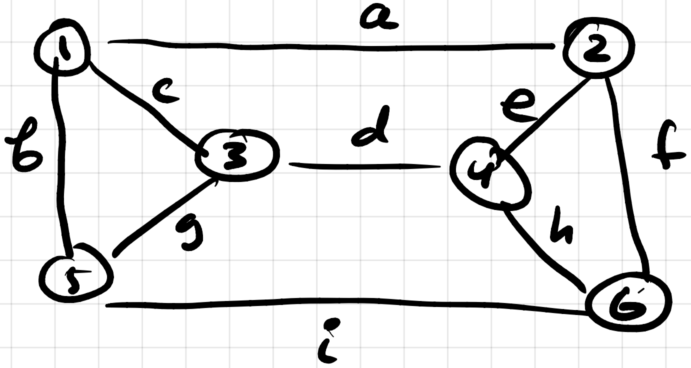
Dementsprechend sind auch v_2 und v_4 linear unabhängig.

Bsp



$0{,}3\sigma$, $0{,}5\sigma$, σ

Bsp. Wir betrachten einen Graphen, z.B.



$a = \{1,2\}$
$b = \{1,5\}$
$c = \{1,3\}$
$\vdots$
$i = \{5,6\}$

Jedem Knoten und jeder Kante wird ein Vektor zugeordnet.

$$1 \leftrightarrow \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix} \qquad 2 \leftrightarrow \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix} \qquad \dots \qquad 6 \leftrightarrow \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$\bar{a} = \begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \quad \dots\dots, \quad \bar{i} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\1\end{bmatrix}$$

Unser Körper ist $\mathbb{Z}_2$. D.h. $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$ und $1+1=0$

$\bar{a} + \bar{e} + \bar{d} + \bar{c} = 0$, sprich

$\bar{a}, \bar{e}, \bar{d}, \bar{c}$ sind linear abhängig.

Kreise entsprechen den inklusionsminimalen linear abhängigen Systemen.

Kantenmenge ohne Kreise (Wälder) entsprechen den linear unabhängigen Systemen.

Was ist mit den Basen von

$$\mathrm{lin}(\bar{a}, \bar{b}, \ldots, \bar{i})$$

$$\bar{d} = \bar{a} + \bar{c} + \bar{e}.$$

Basen entsprechen den Spannbäumen.

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \bar{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \bar{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \bar{b}, \bar{c}, \bar{g}$ sind linear abhängig.

Basis-Austausch-Lemma.

Sei $v_1, \dots, v_n$ Basis von V und $w \in V$. Wir schreiben w als

$$w = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n.$$

Die Frage: wie kann man w in die Basis $v_1, \dots, v_n$ eintauschen?