1.4. Abbildungen

1.4.1 Abbildung

Seien X, Y Mengen. Dann nennt man eine Vorschrift f, die jedem $x \in X$ ein eindeutiges $y \in Y$ zuordnet, eine Abbildung von X nach Y.

Schreibweise: $f: X \to Y$.

X nennt man den Definitionsbereich, Y den Wertebereich. Das y, das durch f dem x zugeordnet wird, wird als $f(x)$ bezeichnet.

Bsp.
- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ Abbildung, die mit einer Formel definiert ist.
- $v: \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$

0 $\hat{=}$ falsch
1 $\hat{=}$ wahr

x	y	$x \vee y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Die Oder-Operation als eine Abbildung, die wir tabellarisch definiert haben.

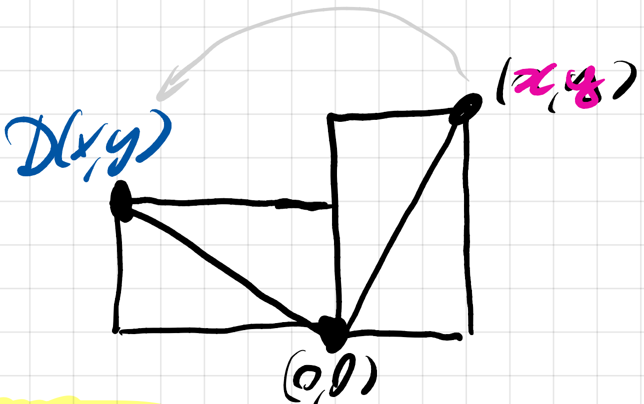
- $+ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ Addition von zwei reellen Zahlen.
- $sort: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,$

$$sort(x,y) := \begin{cases} (x,y), & \text{wenn } x \leq y \\ (y,x), & \text{wenn } x > y \end{cases}$$

- Drehung um 90^0 im Gegenuhrzeigersinn (um den Nullpunkt), in der Ebene.

$$D: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$D(x,y) := (-y, x)$$



1.4.2 Bild und Urbild

Ist $f: X \to Y$ Abbildung und $A \subseteq X$, so heißt $f(A) := \{f(x) : x \in A\}$ das Bild von A unter der Abbildung f.

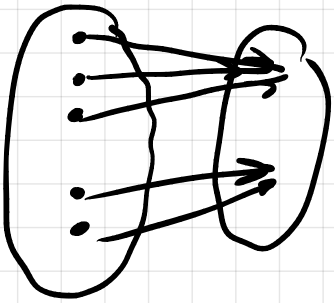
Für $B \subseteq Y$ nennt man

$$f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\}$$

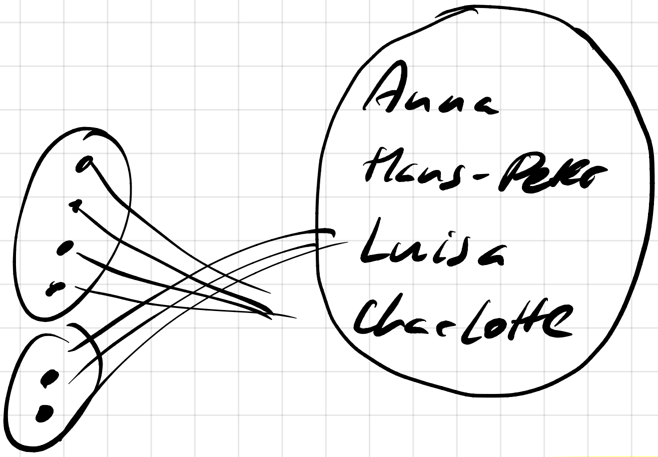
nennt man das Urbild von B bzgl. f.

$f(x)$ = die Mutter von x

$f(A)$ = die Menge der Mütter der Personen aus A.



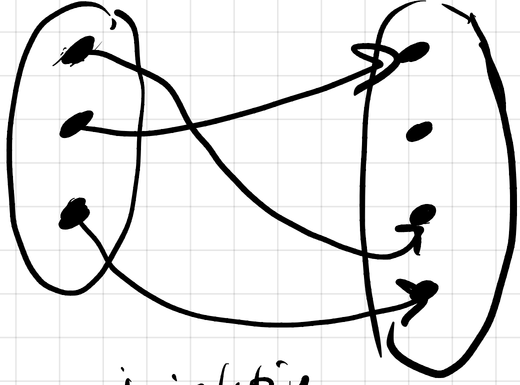
$f^{-1}(B)$ = die Menge der Personen x, bei denen die Mutter zur Menge B gehört.



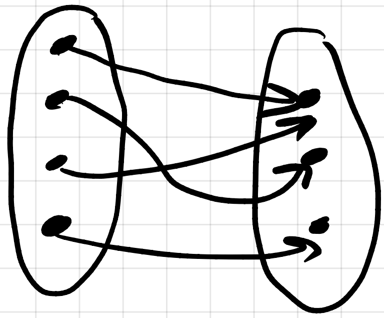
1.4.3. Injektivität, Surjektivität und Bijektivität

Eine Abbildung $f: X \to Y$ heißt:

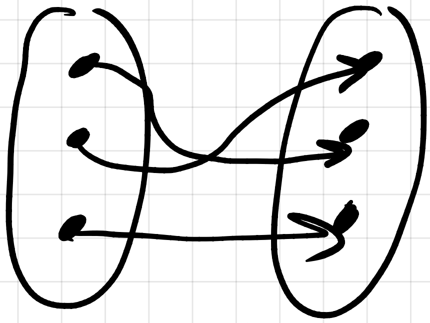
- injektiv, wenn für alle $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2$ die Bedingung $f(x_1) \neq f(x_2)$ erfüllt ist.
- surjektiv, wenn für jedes $y \in Y$ ein $x \in X$ mit $f(x) = y$ existiert.
- bijektiv, wenn f sowohl injektiv als auch surjektiv ist.



injektiv



surjektiv



bijektiv

1.4.4. Umkehrfunktion

Ist $f: X \to Y$ bijektiv, so ist die Umkehrabbild. $f^{-1}: Y \to X$ die Abbildung, die jedem $y \in Y$ das eindeutige x mit $f(x) = y$ zuordnet.

Bsp.

$$D: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$D(x,y) = (-y, x)$$

$$D^{-1}(x,y) = (y, -x)$$

1.4.5. Komposition

$$Z \xleftarrow{g} Y \xleftarrow{f} X$$

Seien $f: X \to Y$ und $g: Y \to Z$ Abbildungen

Dann nennt man die Abbildung

$$g \circ f : X \longrightarrow Z \text{ mit}$$

$$(g \circ f)(x) := g(f(x))$$ die Komposition

von g und f.

1.4.6. Die identische Abbildung Ist X Menge, so nennt man die Abbildung $id_X : X \to X$ mit $id_X(x) := x$ die identische Abbildung auf X (oder kurz, Identität)

Bem Ist $f: X \to Y$ bijektiv, so gilt

$$f^{-1} \circ f = id_X$$

$$f \circ f^{-1} = id_Y$$

1.4.7. Vereinigung und Durchschnitt einer Indexierten Mengenfamilie

Seien I und X Mengen und sei eine Abbildung $I \to 2^X$ gegeben, d.h. einem $i \in I$ wird ein $A_i \subseteq X$ zugeordnet.

Man spricht in diesem Fall von einer Schar $(A_i)_{i \in I}$ von Teilmengen von X.

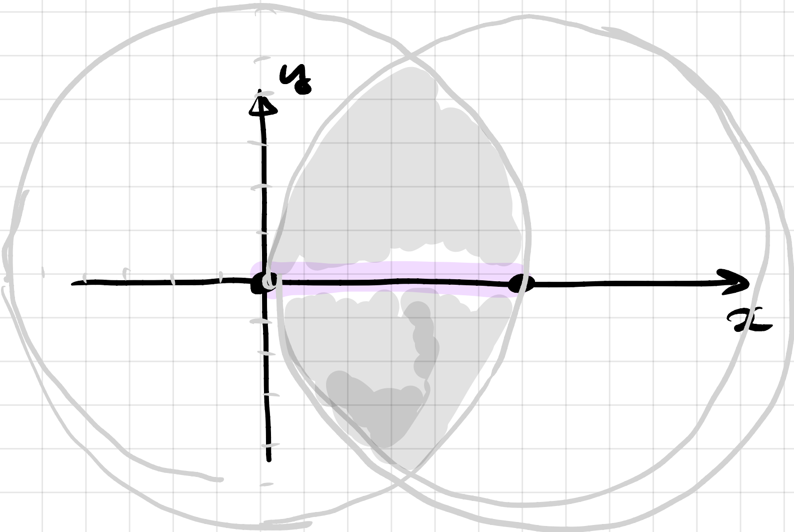
Wir definieren den Durchschnitt und die Vereinigung dieser Schar wie folgt:

Der Durchschnitt $\bigcap_{i \in I} A_i := \{x \in X : x \in A_i \text{ für alle } i \in I\}$

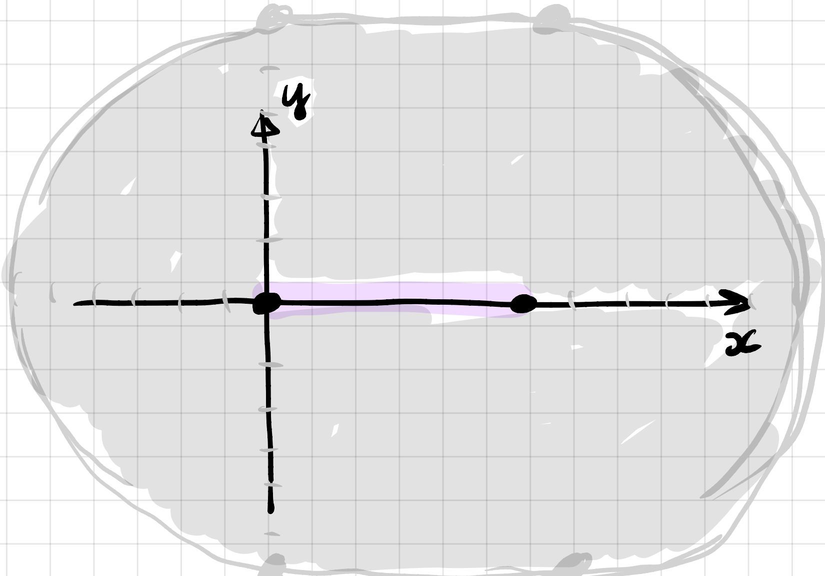
Die Vereinigung $\bigcup_{i \in I} A_i := \{x \in X : x \in A_i \text{ für ein } i \in I\}$

Bsp. $I = [0,1]\times\{0\}$

$A_i :=$ ist die Kreisscheibe mit Radius 1 und Zentrum in $i=(x,y)$



$\bigcap_{i\in I} A_i$



$\bigcup_{i\in I} A_i$

1.4.8 Kardinalität, Summen und Produkte

Eine Menge X heißt <u>endlich</u>, wenn $X=\emptyset$ ist oder eine bijektive Abbildung von X nach $\{1,\dots,n\}$ mit $n\in\mathbb{N}$ existiert. Den Wert n nennt man die <u>Kardinalität</u> bzw. die <u>Größe</u> bzw. die <u>Anzahl der Elemente</u> von X. Bezeichnung: $|X|$.
Man setzt $|\emptyset| := 0$. Die Kardinalität ist wohldefiniert, d.h. $|X|$ ist eindeutig durch X bestimmt.

Sei X ein n-elementige Menge ($n\in\mathbb{N}$), sodass wir X als $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$,

mit $x_i \neq x_j$ bei $i \neq j$, darstellen können.

Sei $f: X \to \mathbb{R}$.

Dann definieren wir

$$\sum_{x \in X} f(x) := f(x_1) + \dots + f(x_n),$$

$$\prod_{x \in X} f(x) := f(x_1) \cdot \ldots \cdot f(x_n).$$

X endlich heißt es gibt eine bijektive Abbildung $f: X \to \{i \in \mathbb{Z} : 1 \leq i \leq n\}$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$.

Ist $X = \emptyset$, so setzen wir $\sum_{x \in X} f(x) = 0$.

und $\prod_{x \in X} f(x) = 1$.

$\sum_{x \in X} f(x)$ und $\prod_{x \in X} f(x)$ sind wohldefiniert, weil diese Wert nicht von der Nummerierung von X abhängig sind.

Bei $\sum_{i=1}^{n}$ und $\prod_{i=1}^{n}$ handelt es sich um die Summen und Produkte über $\{i \in \mathbb{Z} : 1 \leq i \leq n\}$, mit $n \in \mathbb{N}_0$.

1.5. Prädikate

1.5.1. Prädikat

Ein Prädikat auf einer Menge X ist eine Abbildung $P: X \to \{\text{falsch}, \text{wahr}\}$

Bsp $P: \mathbb{N} \to \{\text{falsch}, \text{wahr}\}$

$P(k) :=$ " $k(k+1)$ ist durch 3 teilbar ".

$P(1)$ falsch
$P(2)$ wahr
$P(3)$ wahr
$P(4)$ falsch

Ein Prädikat $P: X \to \{\text{falsch}, \text{wahr}\}$ entspricht der Teilmenge $\{x \in X : P(x) \text{ gilt}\}$ von A.

Umgekehrt ergibt eine jede Teilmenge $A \subseteq X$ das Prädikat $P: X \to \{\text{falsch}, \text{wahr}\}$ mit $P(x) := $ "$x \in A$".

Bsp. $P: \mathbb{N} \to \{\text{falsch}, \text{wahr}\}$

$P(k) :=$ "k ist gerade"

$A = \{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$

1.5.2. Quantoren

$\forall$ Allgemeinheitsquantor (für Alle)

$\exists$ Existenzquantor (Existiert)

Für ein Prädikat P auf einer Menge X ist $\forall x \in X : P(x)$ die Aussage, dass für alle $x \in X$ die Bedingung $P(x)$ erfüllt ist. Des weiteren ist $\exists x \in X : P(x)$ die Aussage, dass ein $x \in X$ existiert, für welches die Bedingung $P(x)$ erfüllt ist.

Bem

$$\overline{\forall x \in X : P(x)} \iff \exists x \in X : \overline{P(x)},$$

$$\overline{\exists x \in X : P(x)} \iff \forall x \in X : \overline{P(x)}.$$

Bsp.

$P(x,b) =$ "Person x hat ein Konto bei der Bank b"

$P: X \times B \longrightarrow \{\text{falsch}, \text{wahr}\}$

X: eine Menge von Personen

B: eine Menge von Banken

$\forall x \in X\ \exists b \in B : P(x,b)$. ← jeder Person $x \in X$ hat ein Konto bei einer der Banken aus B

$\exists b \in B\ \forall x \in X : P(x,b)$ ← Es gibt eine Bank, wo alle Personen aus X ein Konto haben.

im Allgemeinen nicht äquivalent