$F: V \to V$ lineare Abbildung,

$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ Basen von V. Dann gilt:

$$\boxed{F_{\mathcal{A}} = T_{\mathcal{A}\leftarrow\mathcal{B}} \, F_{\mathcal{B}} \, T_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}}$$

Wie kann man diese Formel herleiten?

Wir multiplizieren die Formel mit $x_{\mathcal{A}}$ und erhalten:

$$\boxed{F_{\mathcal{A}} \, x_{\mathcal{A}} = T_{\mathcal{A}\leftarrow\mathcal{B}} \, F_{\mathcal{B}} \, T_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}} \, x_{\mathcal{A}}}$$

Sobald die vorige Gleichung für jedes $x \in V$ verifiziert ist, ist unsere Formel verifiziert.

Wenn wir die Dimension von V als n bezeichnen, dann ist $x_{\mathcal{A}} \in \mathbb{K}^n$. Wenn wir x in V variieren, erhalten wir als $x_{\mathcal{A}}$ alle möglichen Vektoren aus $\mathbb{K}^n$.

Wenn aber für zwei Matrizen M und N für jede Wahl von $u \in \mathbb{K}^n$ die Gleichheit $Mu = Nu$ erfüllt ist, dann sind die Matrizen M und N gleich.

$$\Longleftrightarrow \quad F(x)_A = T_{A \leftarrow B} F_B \, x_B$$

$$\Longleftrightarrow \quad F(x)_A = T_{A \leftarrow B} F(x)_B$$

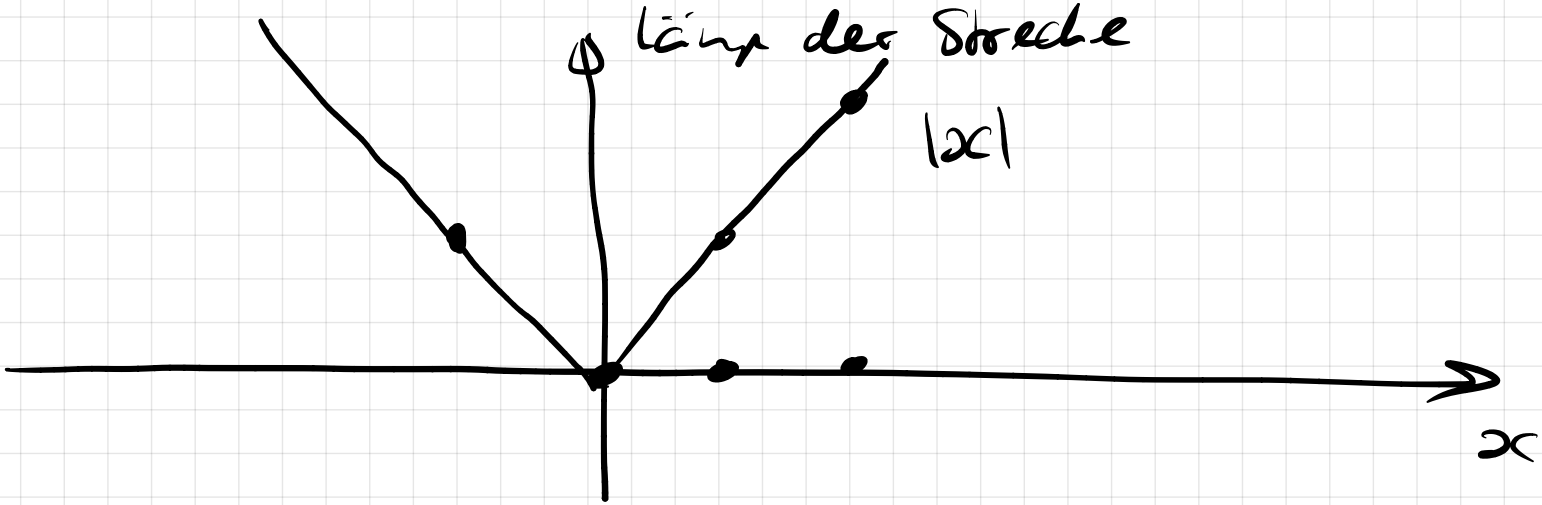
$$\Longleftrightarrow \quad F(x)_A = F(x)_A \qquad \checkmark$$

4 Determinanten

4.1. Motivation

Volumen betrachtet man in der Mathematik im n-dimensionalen Fall. Für $n=1$ heißt es die Länge und für $n=2$ der Flächeninhalt.

Nehmen wir eine Strecke die $0 \in \mathbb{R}$ mit $x \in \mathbb{R}$ verbindet. Wie lang ist diese Strecke?



$|x|$ – irgendwie doof.

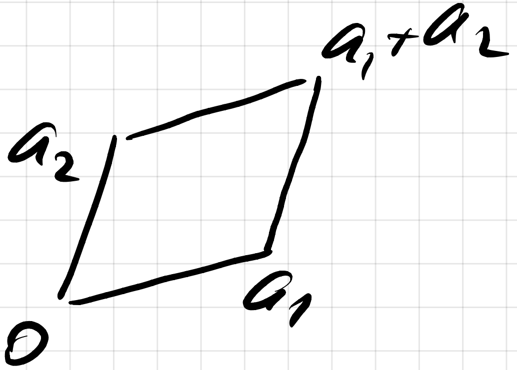
x – viel besser, da es linear in x ist.

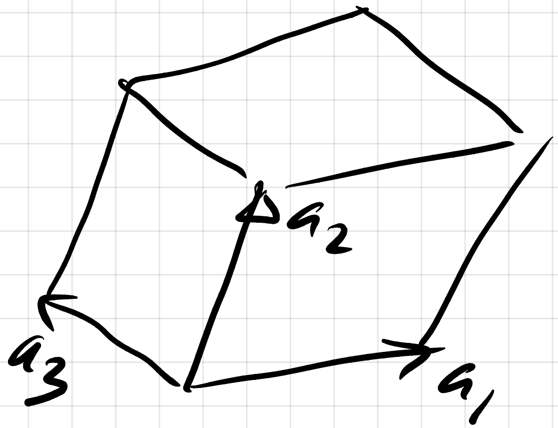
α speichert die Länge und die Orientierung!

In höheren Dimensionen:

Wir führen einen durch $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$ erzeugten Spat ein:

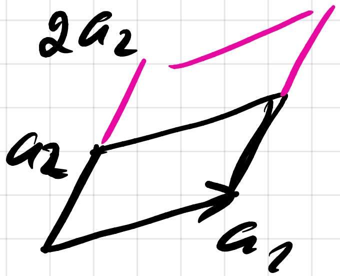
$$P(a_1, \dots, a_n) = \{ \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n : 0 \le \lambda_i \le 1 \ (i = 1, \dots, n) \}$$





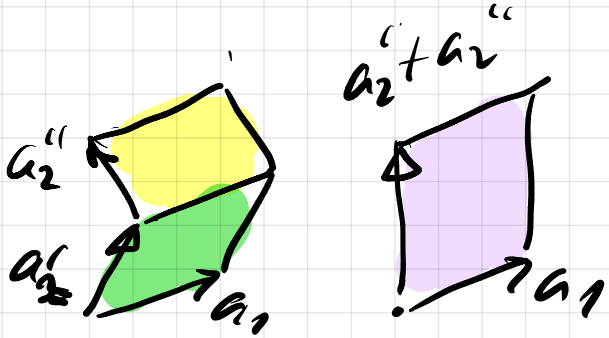
$P(a_1, \dots, a_n)$ hat ein n-dimensionales Volumen $V(a_1, \dots, a_n)$, das wir in Abhängigkeit von einzelnen Vektoren a_i untersuchen könnten.

Man hat ähnliche Effekte wie bei $|x|$ im eindimensionalen Beispiel.



$$V(a_1, 2a_2) = 2\,V(a_1, a_2)$$
$$V(a_1, 3a_2) = 3\,V(a_1, a_2)$$
$$V(a_1, -3a_2) = 3\,V(a_1, a_2)$$

$$V(2a_1, a_2) = 2\,V(a_1, a_2)$$
$$V(-3a_1, a_2) = 3\,V(a_1, a_2)$$



$$V(a_1, a_2' + a_2'') = V(a_1, a_2') + V(a_1, a_2'')$$

gilt in diesem Bild, aber im Allgemeinen nicht unbedingt.

Es stellt sich heraus: wenn $V(a_1, \dots, a_n)$ mit einem Vorzeichen versehen wird, das von der Orientierung des Systems abhängig ist, so erhält man ein Funktional, das in jedem der Untervektoren $a_1, \dots, a_n$ linear ist (also viel gutartiger als $V(a_1, \dots, a_n)$). Und dieses Funktional nennt man die Determinante des Vektorsystems $a_1, \dots, a_n$.

Das ist die geometrische Intuition hinter der Determinante.

Hier noch ein algebraischer Zugang zur Determinante:

Wir betrachten ein <u>allgemeines</u> LGS der Größe 2×2 und wollen dieses durch Elimination lösen.

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 = b_1 & (1) \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 = b_2 & (2) \end{cases}$$

$a_{ij} \in \mathbb{K}$ (die Koeffizienten) und $x_j \in \mathbb{K}$ die Unbekannten.

$a_{22}\cdot(1)$ ist $a_{11}\cdot a_{22}x_1 + a_{12}\cdot a_{22}x_2 = a_{22}b_1$

$a_{12}\cdot(2)$ ist $a_{12}\cdot a_{21}\cdot x_1 + a_{12}\cdot a_{22}x_2 = a_{12}\cdot b_2$

$a_{22}\cdot(1) - a_{12}\cdot(2)$ ist:

$$(a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21})\, x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}\cdot b_2$$

wenn $a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21} \neq 0$, dann ist x_1

durch $$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}}$$ gegeben.

Das gleiche Spiel für x_2:

$a_{21}\cdot(1)$ ist $a_{11}\cdot a_{21}\cdot x_1 + a_{12}\cdot a_{21}\cdot x_2 = a_{21}\cdot b_1$

$a_{11}\cdot(2)$ ist $a_{11}\cdot a_{21}\cdot x_1 + a_{11}\cdot a_{22}\cdot x_2 = a_{11}\, b_2$

Aus $a_{11}\cdot(2) - a_{21}(1)$ ergibt sich

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}\cdot b_1}{a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}}$$, wenn der Wert im Nenner $\neq 0$ ist.

Was ist der „magische" Wert im Nenner?

$$a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Das ist die Determinante der 2x2 Matrix

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

$\boxed{4.2}$ Die definierenden Eigenschaften.

Theorem. Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann existiert ein eindeutiges Funktional $\det : \underbrace{\mathbb{K}^n \times \dots \times \mathbb{K}^n}_{n} \longrightarrow \mathbb{K}$ mit den folgenden Eigenschaften:

(D1) $\det(a_1, \dots, a_n)$ ist linear in jedem der n Vektoren $a_1, \dots, a_n$, d.h.

$$\det(a_1, \dots, a_{i-1}, \alpha u + \beta v, a_{i+1}, \dots, a_n) =$$

$\alpha \det(a_1,\dots,a_{i-1},u,a_{i+1},\dots,a_n) +$

$\beta \det(a_1,\dots,a_{i-1},v,a_{i+1},\dots,a_n)$

gilt für alle $a_1,\dots,a_n,u,v \in \mathbb{K}^n$ und $\alpha,\beta \in \mathbb{K}$.

(D2) $\det(a_1,\dots,a_n)$ ist alternierend, d.h.

Ist $a_i = a_j$ für gewisse $i,j \in \{1,\dots,n\}$ mit $i \neq j$,

dann gilt: $\det(a_1,\dots,a_n) = 0$.

(D3) $\det(\underbrace{e_1,\dots,e_n}_{\text{Standardeinheitsvektoren}}) = 1$

Ohne Beweis:

Def Die Funktion det nennt man die Determinante des Vektorsystems $a_1,\dots,a_n$. Man nennt es auch die Determinante der Matrix mit den Spalten $a_1,\dots,a_n$.

Frage: Wie ändert sich $\det(a_1, \dots, a_n)$ durch das Vertauschen von zwei Vektoren unter $a_1, \dots, a_n$?

Wir betrachten den Fall $n = 2$:

$$0 \overset{(D2)}{=} \det(a_1 + a_2, a_1 + a_2) \overset{(D1)}{=}$$

$$= \det(a_1, a_1 + a_2) + \det(a_2, a_1 + a_2)$$

$$\overset{(D1)}{=} \det(a_1, a_1) + \det(a_1, a_2) + \det(a_2, a_1) + \det(a_2, a_2)$$

$$\overset{(D2)}{=} \det(a_1, a_2) + \det(a_2, a_1)$$

$$\Rightarrow \quad \det(a_2, a_1) = -\det(a_1, a_2).$$

Für ein allgemeines $n \in \mathbb{N}$ argumentiert man genauso und erhält, dass das Vertauschen von zwei Vektoren in der det zu einem Vorzeichenwechsel führt.

Bsp $n=2$. Sei $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{n \times n}$

$$\det(A) = \det(a_1, a_2) = \det\left(\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} \right)$$

$$= \det(a_{11} e_1 + a_{21} e_2, \; a_{12} e_1 + a_{22} e_2)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \det(e_1, e_1) &= 0 \\ \det(e_2, e_2) &= 0 \end{aligned}}$$

$$\overset{(D1),(D2)}{=} a_{11} a_{22} \det(e_1, e_2) + a_{12} a_{21} \det(e_2, e_1)$$

$$\overset{(D3)}{=} a_{11} a_{22} \cdot 1 + a_{12} a_{21} \det(e_2, e_1)$$

$$= a_{11} a_{22} \cdot 1 + a_{12} a_{21} (-\det(e_1, e_2))$$

$$\overset{(D1)}{=} a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} a_{21}.$$

D.h.

(D1), (D2), (D3) $\Longrightarrow$ für $n=2$

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

(ET)

Welche auswirkungen haben die Elementartransformationen des Vektorsystems $a_1, \dots, a_n$ auf $\det(a_1, \dots, a_n)$?

Wir fokussieren uns auf $n=2$. Der allgemeine Fall ist analog (wird auch analog behandelt.)

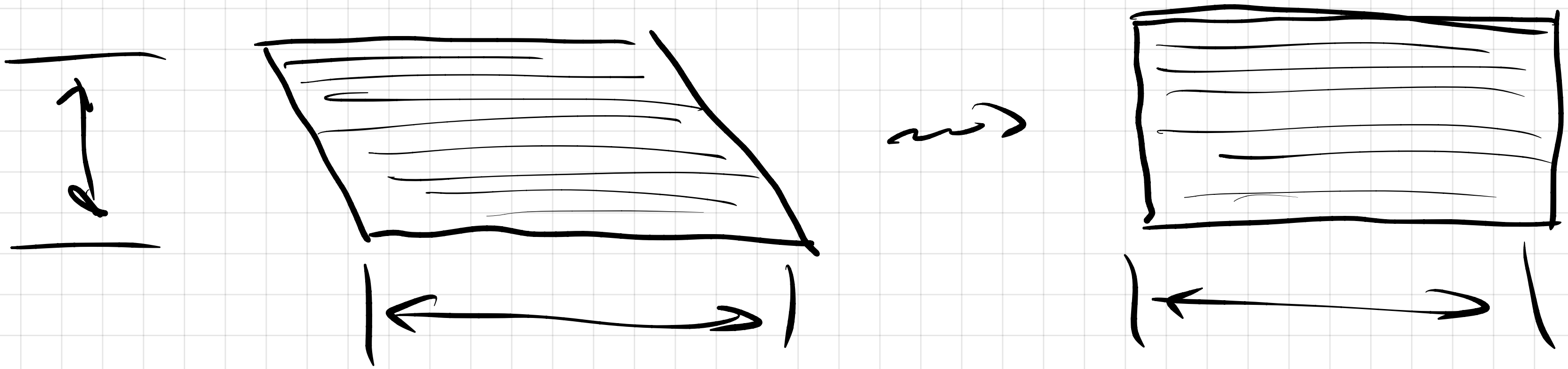
ET Typ 1: $a_1 \leftrightarrow a_2$.

- $\det(a_2, a_1) = -\det(a_1, a_2)$. Das ist bereits diskutiert worden.
- $\det(\lambda a_1, a_2) = \lambda \det(a_1, a_2)$
- $\det(a_1, a_2 + \mu a_1) \overset{(D1)}{=} \det(a_1, a_2) + \mu \det(a_1, a_1)$

$$\overset{(D2)}{=} \det(a_1, a_2) + \mu \cdot 0$$

$$= \det(a_1, a_2)$$

$$\Rightarrow \quad \det(a_1, a_2 + \mu a_1) = \det(a_1, a_2).$$



Wie könnte man die Determinante effizient ausrechnen?

Wir können das Gauß-Verfahren nutzen!

Schon wieder!

Bemerkung Die Determinante wird auch oft als $|A|$ für $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ bezeichnet.

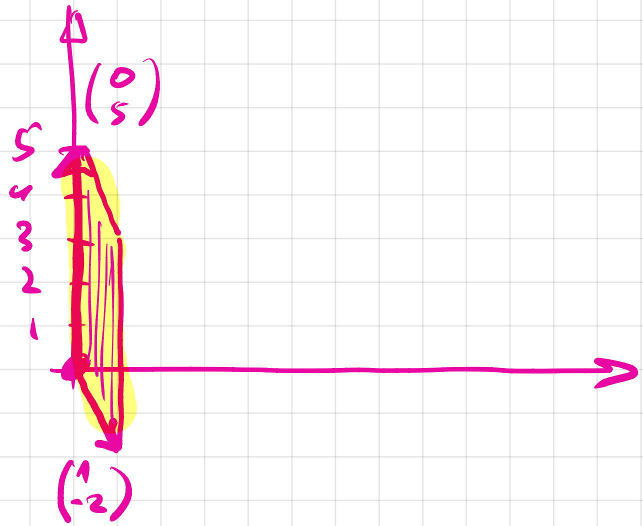
Bsp.

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&-1&2\end{vmatrix} \overset{?}{=} \begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&-1&2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&0&0\\1&1&2\\1&-2&1\end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&-2&5\end{vmatrix} = 1\cdot 1\cdot 5 = 5$$

Wie begründet man das?

$$\begin{vmatrix}1&0\\-2&5\end{vmatrix} \overset{?}{=}$$



Bemerkung Wieso ist $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}$?

$$\det(a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + a_{31}e_3,\ a_{22}e_2 + a_{32}e_3,\ a_{33}e_3)$$

$\overset{(D1)}{=}$ "ausmultiplizieren"

$$a_{11}a_{22}a_{33}\det(e_1, e_2, e_3)$$

$$+\ a_{21}a_{22}a_{33}\det(e_2, e_2, e_3)$$

$$\vdots$$

$$+\ a_{31}a_{32}a_{33}\det(e_3, e_3, e_3) \overset{(D2),(D3)}{=} a_{11}a_{22}a_{33}.$$

Das Argument hier das allgemeine n ist analog.

Fazit: Ist A eine obere oder eine untere Dreiecksmatrix, so ist $\det(A)$ das Produkt der Diagonalelemente.

Bsp Bestimmen wir eine Formel für $\det(A)$ im Fall $n=3$, d.h. $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit $n=3$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

$\det(A) =$

$$\det(a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + a_{31}e_3, a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + a_{32}e_3, a_{13}e_1 + a_{23}e_2 + a_{33}e_3)$$

(D1)

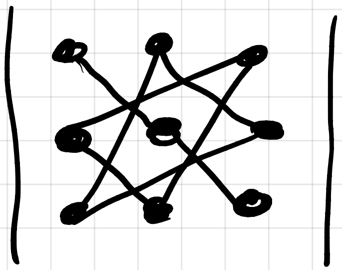
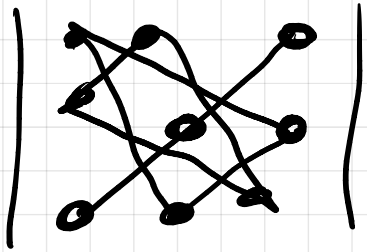
Es sind $3\cdot3\cdot3 = 27$ Terme, aber irgendwie hat man keine Lust, all die Terme hinzuschreiben.

Die Terme sind $a_{i1}a_{j2}a_{k3}\det(e_i, e_j, e_k)$

Wegen (D2) ist aber ein solcher Term gleich 0, wenn unter den Indizes i, j, k zwei gleich sind. Nach dem Weglassen dieser Terme bleiben $3! = 6$ Terme übrig.

$$
\begin{aligned}
= \;& a_{11} a_{22} a_{33} \overbrace{\det(e_1, e_2, e_3)}^{=1 \,(D3)} && 123 \\
+ \;& a_{31} a_{12} a_{23} \overbrace{\det(e_3, e_1, e_2)}^{=1} && 312 \\
+ \;& a_{21} a_{32} a_{13} \overbrace{\det(e_2, e_3, e_1)}^{=1} && 231 \\
+ \;& a_{31} a_{22} a_{13} \overbrace{\det(e_3, e_2, e_1)}^{=-1} && 321 \\
+ \;& a_{11} a_{32} a_{23} \overbrace{\det(e_1, e_3, e_2)}^{=-1} && 132 \\
+ \;& a_{21} a_{12} a_{33} \overbrace{\det(e_2, e_1, e_3)}^{=-1} && 213
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{
\begin{aligned}
&\det(e_3, e_1, e_2) = -\det(e_1, e_3, e_2) = \det(e_1, e_2, e_3) \\
&\det(e_2, e_3, e_1) = -\det(e_3, e_2, e_1) = \det(e_1, e_2, e_3)
\end{aligned}
}
$$

$+$  $-$ 

Bemerkung Um eine allgemeine Formel für $\det(A)$ zu erstellen ($n \in \mathbb{N}$ ist allgemein und $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$) müssen wir $\det(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})$ für eine Permutation σ auf n Elementen analysieren.

Erinnerung (vgl. (T-1)): eine Permutation ist eine bijektive Abbildung $\sigma : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$.

Meistens schreibt man sie als Tabelle:

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \cdots & \sigma(n) \end{bmatrix}$$

Es ist klar dass

$$\det(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}) \in \{-1, 1\} \text{ gilt.}$$

Den Wert nennt man das Vorzeichen der Permutation σ. Bezeichnung ist $\operatorname{sign} \sigma$.

Definition Eine Transposition ist eine Permutation, die genau zwei Elemente aus $\{1, \dots, n\}$ vertauscht und die anderen unverändert lässt.

D.h.
$$t(i) = \begin{cases} i & \text{für } i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{s, t\} \\ s & \text{für } i = t \\ t & \text{für } i = s \end{cases}$$

ist eine Transposition von s und t, mit $s, t \in \{1, \dots, n\}$ und $s \neq t$.

Definition Das Produkt von Permutationen ist die Komposition: $(\sigma \cdot \tau)(i) := \sigma(\tau(i))$

Bemerkung Jede Permutation σ ist Produkt $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_k$ endlich vieler Transpositionen $\tau_1, \dots, \tau_k$. Für so eine Darstellung gilt Folgendes:

$$\det(a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(n)}) = (-1)^k \cdot \det(a_1, \dots, a_n)$$

Daraus lässt sich Folgendes schließen:

Sind α und β Permutationen auf n Elementen, so ist $\operatorname{sign}(\alpha\beta) = \operatorname{sign}(\alpha)\operatorname{sign}(\beta)$

Insbesondere ist $\operatorname{sign}(\tau) = -1$ für jede Transposition τ und

$$\det(a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(n)}) = \operatorname{sign}(\sigma) \cdot \det(a_1, \dots, a_n)$$