PLAN FÜR DEN ANFANG.

1 Die Basics

- 1.1 Lineare Algebra: Was ist das? Wozu?
  $\mathbb{K}$, zuerst ohne Definition, LGS, Elimination
- 1.2 $\mathbb{K}^n$, Punkte = Vektoren, Linearkombination
- 1.3 Was ist $\mathbb{K}$? Ringe, Körper, und Gruppen
  Restklassen

2 Vektorräume

- Vektorräume
- Untervektorräume, Affine Unterräume
- Dimension, Basis
- Rang einer Matrix
- Koordinatensystem

3 Lineare Abbildungen

1 Die Basics

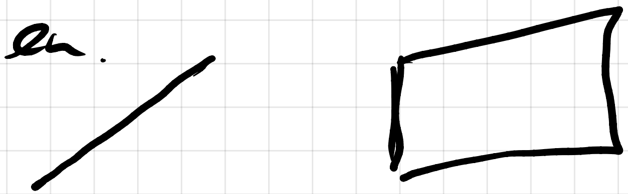
Worum geht es in der linearen Algebra?

Es geht um den <u>linearen</u> Fall.

Lineare Gleichungen.

Lineare Transformationen.

"Lineare Geometrie"



Lineare Koordinatensysteme

<u>Wozu?</u>

Computergraphik

Robotik

Fehler corrigierende Codes (3G, 4G, QR-Codes)

KI und Data Science

Page Rank der Internet-Seiten

Optimierung und und und

Wir befassen uns zunächst mit den linearen Gleichungssystemen (LGS).

Eine lineare Gleichung ist so etwas wie:

$$\underbrace{3x - 5y + 7z}_{\text{Die Koeffizienten der linken Seite}} = 80 \leftarrow \text{Der Koeffizient der rechten Seite}$$

x, y, z sind die Variablen bzw. die Unbekannten.

Wir brauchen einen Zahlenbereich auf dem wir die linearen Gleichungen behandeln einen sogenannten Körper: einen Zahlenbereich auf dem man $+, \cdot, -, \div$ nutzen kann wie bei $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$. Die Definition eines Körpers kommt noch. Wir nennen unseren zugrundeliegenden Körper $\mathbb{K}$.

Ein lineares Gleichungssystem in Unbekannten $x_1, \dots, x_n$ $(n \in \mathbb{N})$ is ein System der Form

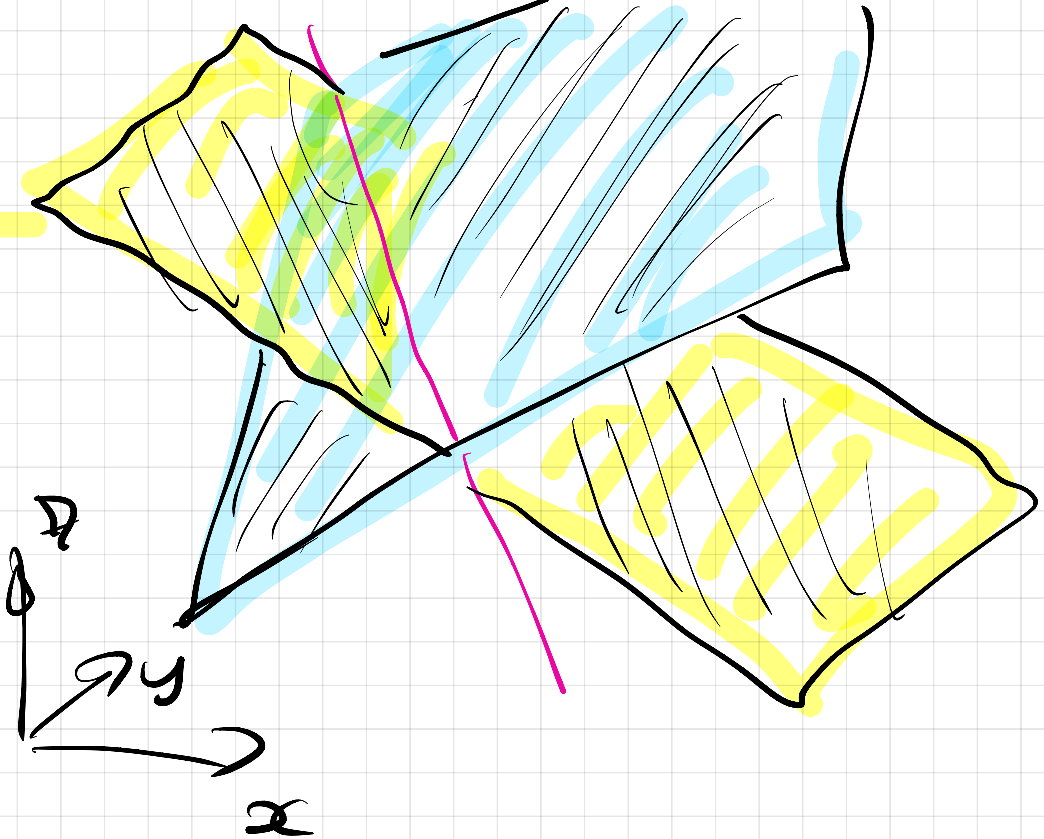
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad (i = 1, \dots, m) \qquad (LGS)$$

mit $a_{ij}, b_i \in \mathbb{K}$. Die Koeffizienten von LGS werden in einer Tabelle aufgehoben (m Zeilen, $n+1$ Spalten), einer sogenannten erweiterten Matrix vom LGS:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

<u>Bsp.</u>

$$\begin{cases} x + y - z = 5 \\ 4x + 3y + 2z = 6 \end{cases}$$



$n = 3$

$x_1 = x$

$x_2 = y$

$x_3 = z$

$m = 2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 6 \end{array}\right]$$

Wie können wir die Lösungsmenge (das ist eine Gerade) parametrisch beschreiben?

$$\begin{cases} x + y - z = 5 & (g1) \\ 4x + 3y + 2z = 6 & (g2) \end{cases}$$

Labels für Gleichungen.

$$(g2) := (g2) - 4(g1)$$

$$\begin{cases} x + y - z = 5 & (g1) \\ -y + 6z = -14 & (g2) \end{cases}$$

$$(g1) := (g1) + (g2)$$

$$\begin{cases} x \quad 5 \cdot z = -9 \\ -y + 6 \cdot z = -14 \end{cases}$$

$(g2) := \underbrace{(g2) - 4(g1)}$ LANGSAM ERKLÄRT

$$= \left(4x + 3y + 2z = 6\right) - 4 \cdot \left(x + y - z = 5\right)$$

$$4x + 3y + 2z - 4(x + y - z) = 6 - 4 \cdot 5$$

$$4x - 4x + 3y - 4y + 2z - 4z = 6 - 4 \cdot 5$$

$$0 \cdot x - 1 \cdot y + 6 \cdot z = -14$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= -9 - 5z \\ y &= 14 + 6 \cdot z \\ z &\in K \end{aligned}}$$

Eine parametrische Beschreibung der Lösungsmenge
(z ist ein freier Parameter)

Anzahl Gleichungen

Anzahl der Variablen

Bsp. Lösen wir das 3×3 LGS

$$\begin{cases} x + y - z = 5 & (g1) \\ 4x + 3y + 2z = 6 & (g2) \\ x + 2y + z = 1 & (g3) \end{cases}$$

x	y	z		
1	1	-1	5	(g1)
4	3	2	6	(g2)
1	2	1	1	(g3)

$(g2) := (g2) - 4(g1)$

1	1	-1	5	(g1)
0	-1	6	-14	(g2)
1	2	1	1	(g3)

$(g3) := (g3) - (g1)$

1	1	-1	5	(g1)
0	-1	6	-14	(g2)
0	1	2	-4	(g3)

$(g3) := (g3) + (g2)$

Ein System mit zwei Variablen (y und z) und zwei Gleichungen.
Ein kleineres System, das wir nach dem selben Prinzip sukzessiv bearbeiten können.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 6 & -14 \\ 0 & 0 & 8 & -18 \end{array}\right) \begin{array}{l} (g1) \\ (g2) \\ (g3) \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rl} x + y - z = 5 & (g1) \\ -y + 6z = -14 & (g2) \\ 8z = -18 & (g3) \end{array}\right.$$

Jetzt rückwärts einsetzen:

$(g3) \Rightarrow \quad z = -\frac{18}{8} = -\frac{9}{4}$

$(g2) \Rightarrow \quad y = 14 + 6 \cdot z = \frac{1}{2}$

$(g1) \Rightarrow \quad x = 5 - y + z = \frac{9}{4}$

$x = \frac{9}{4}, \; y = \frac{1}{2}, \; z = -\frac{9}{4}$ ist die eindeutige Lösung unseres LGS.

1.1. Das Eliminationsverfahren

Wir führen drei Elementartransformationen ein (ET).

ET, Typ 1: $g_i \leftrightarrow g_\ell$. Vertauschen der i-ten und ℓ-ten Gleichung. [Zum Aufräumen]

ET, Typ 2: $g_i := \alpha \cdot g_i$ mit $\alpha \in K \setminus \{0\}$.

i-te Gleichung mit einer Nichtnull-Konstante multiplizieren. [Manchmal möchte man Gleichungen skalieren]

ET, Typ 3: $g_\ell := g_\ell + \alpha \cdot g_i$ mit $\alpha \in K$
$i \neq \ell$.

Zur ℓ-ten Gleichung wird das α-fache der i-ten Gleichung dazu addiert.

Mit Typ 3 können wir Variablen aus Gleichungen entfernen.

Das Eliminationsverfahren zur Lösung von (LGS).

Bestimme eine Variable x_j, die in einer Gleichung $g_i : a_{i1} x_1 + \ldots\ldots + a_{in} x_n = b_i$ enthalten ist, d.h. $a_{ij} \neq 0$. Das so gewählte a_{ij} nennt man das Pivot-Element. Nutze die i-te Gleichung, um die Variable x_j aus allen anderen Gleichungen zu entfernen. Wir meiden i-te Gleichung für die j-te Variable zuständig. So eine gewählte Variable x_j nennen wir Leit-Variable.

Iteration: unter allen Gleichungen, die noch für keine Variable zuständig sind, eine wählen, die eine Variable enthält.
Und diese Variable (=die nächste Leitvariable) aus allen Gleichungen entfernen.
Und so weiter, solange man noch Variablen findet. Nebenbei sortiert man gerne Gleichungen durch das Vertauschen (ET, Typ 1).

Bemerkung: Die obige Variante des Verfahrens nennt man das Gauß-Jordan-Verfahren Verfahren.

Wenn wir

"aus allen Gleichungen entfernen."

durch

"aus allen Gleichungen entfernen, die noch für keine Variable zuständig sind"

ersetzen, erhalten wir das sogenannte

<u>Gauß-Verfahren</u>.

<u>Bemerkung</u>. Standard-Strategie bei der Wahl einer Leitvariablen ist, unter $x_1, \dots, x_n$ stets die Variable mit dem kleinstmöglichen Index zu wählen.

Bei dieser Variante erhält man als Ergebnis ein System in einer sogenannten <u>Stufenform</u>.

$*$ steht für Element von $\mathbb{K}$

$\circledast$ steht für ein Element von $\mathbb{K} \setminus \{0\}$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} \circledast & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \circledast & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \circledast & * \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{ccccc|c} \circledast & * & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & \circledast & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \circledast & * \end{array}\right]$$

Ein mögliches Output von Gauß

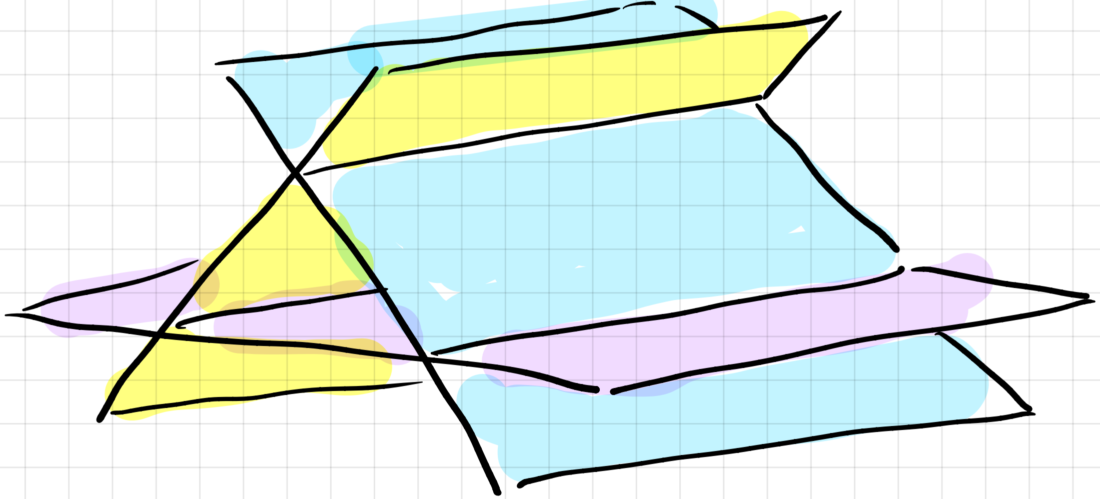
Ein mögliches Output von Gauß-Jordan.

<u>Bemerkung.</u> Nach dem Terminieren von Gauß-Jordan sind die Variablen in zwei Arten unterteilt: die Leitvariablen und die Restlichen, die wir *freie* Variablen nennen.

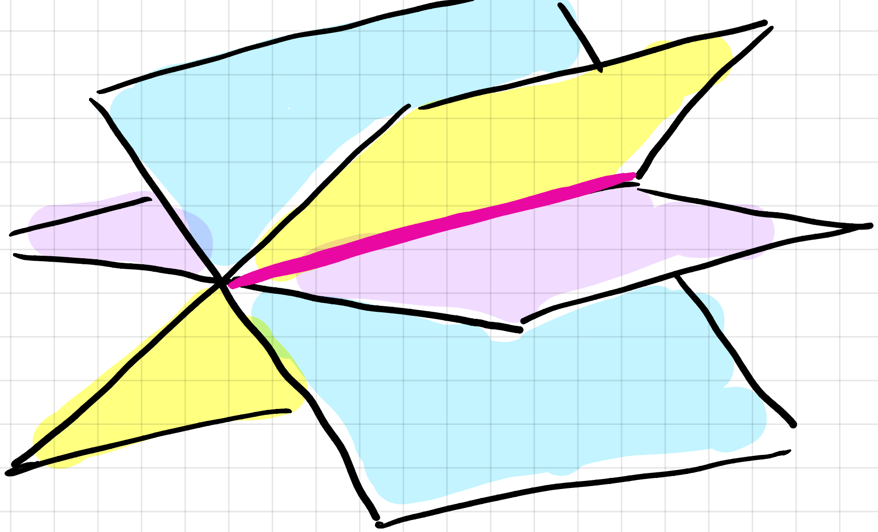
Das Gauß-Jordan liefert einem eine Darstellung der Leit-Variablen in den freien Variablen.

Auf diese Weise können wir die Lösungsmenge analysieren:

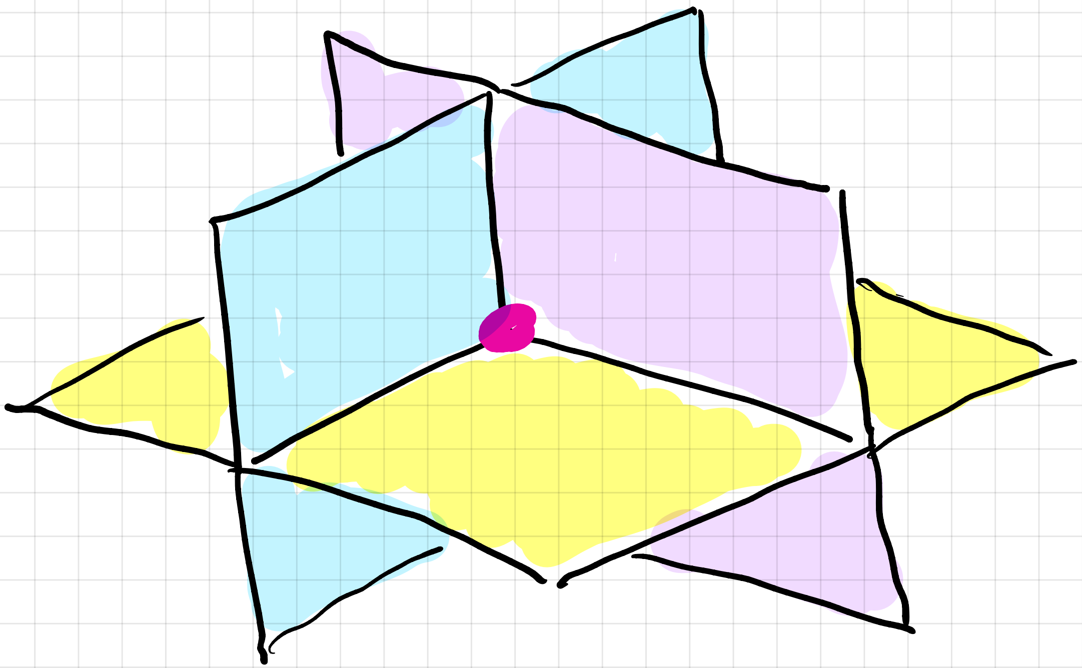
- Die Lösungsmenge ist genau dann leer, wenn das Ergebnis des Verfahrens eine Gleichung $0 = b_i$ mit $b_i \neq 0$ enthält (linke Seite $= 0$, rechte Seite $\neq 0$).
- Man hat genau dann mehr als eine Lösung, wenn die Lösungsmenge nicht leer ist (vgl. oben) und im System freie Variablen vorkommen.
- In allen anderen Fällen hat man genau eine Lösung.



leer



mehr als eine Lösung



genau eine Lösung

Bemerkung Man kann nachweisen, dass das Eliminationsverfahren tatsächlich die Lösungsmenge bestimmt. Denken Sie an den Unterschied zwischen $\Rightarrow$ und $\Leftrightarrow$. Durch ET kommt man stets auf ein äquivalentes System, d.h. die Lösungsmenge ändert sich nicht. Der Grund: ETs sind umkehrbar.

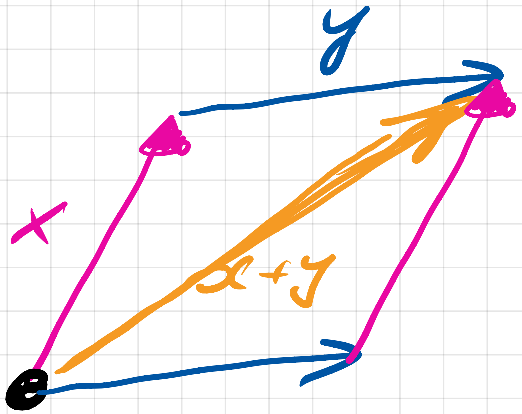
1.2. Vektoren aus $\mathbb{K}^n$:

Ein Vektor aus $\mathbb{K}^n$ ist $x = (x_1, \ldots, x_n)$ mit $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$. Zwei Vektoren

$x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n$

$$x + y := (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

$(1,2,3) + (2,1,0)$
$= (1+2, 2+1, 3+0)$
$= (3, 3, 3)$



$-x$ und $x-y$ kann man analog einführen.

Sonst kann man einen Vektor $x=(x_1,\dots,x_n)$ mit einer Zahl $\alpha\in\mathbb{R}$ multiplizieren:

$$\alpha\cdot x := (\alpha x_1,\dots,\alpha x_n).$$