3.4.5. Austauschsatz

Thm Sei V ein VR über $\mathbb{K}$. Sei $v_1, \ldots, v_r$ eine Basis von V mit $r \in \mathbb{N}$. Seien $w_1, \ldots, w_n \in V$ linear unabhängige Vektoren, mit $n \in \mathbb{N}_0$.
Dann gilt:
(a) $n \leq r$.
(b) Es existieren $i_1, \ldots, i_n \in \{1, \ldots, r\}$, $i_1 < \ldots < i_n$, derart, dass man nach dem Austausch von $v_{i_1}, \ldots, v_{i_n}$ gegen $w_1, \ldots, w_n$ im System $v_1, \ldots, v_r$ wieder eine Basis von V erhält.

<u>Beweis:</u> Induktion über n.
Induktionsanfang: $n = 0$. In diesem Fall sind (a) und (b) trivialerweise erfüllt.

Induktionsannahme: Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien (a) und (b) für $n-1$ an der Stelle von n erfüllt. D.h. die Behauptung gilt im Fall eines Vektorsystems $w_1, \ldots, w_{n-1}$.
Induktionsschritt: Wir verifizieren die Behauptung für die Vektoren $w_1, \ldots, w_n$.
Nach der Induktionsvoraussetzung ist $n-1 \leq r$ und, nach einer geeigneten Umnummerierung von $v_1, \ldots, v_r$, ist das System $w_1, \ldots, w_{n-1}, v_n, \ldots, v_r$ eine Basis von V. Wir bemerken, dass die Ungleichung $n-1 \leq r$ nicht mit Gleichheit erfüllt sein kann. Denn, wäre $n-1 = r$ so wäre $w_1, \ldots, w_{n-1}, v_n, \ldots, v_r$ gleich $w_1, \ldots, w_{n-1}$.
Das würde heißen, $w_1, \ldots, w_{n-1}$ ist eine Basis. Das steht aber im Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit von $w_1, \ldots, w_n$, da wir die Basen als inklusionsmaximale linear unabhängige Systeme charakterisiert haben. D.h. $n-1 < r$

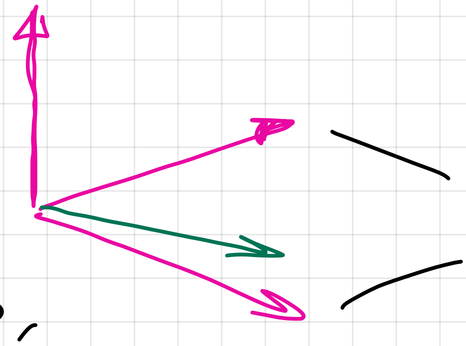
$\Rightarrow n \leq r \Rightarrow$ (a) für $w_1, \dots, w_n$ ist erfüllt.

Es bleibt, (b) zu zeigen.

Da $w_1, \dots, w_{n-1}, v_n, \dots, v_r$ eine Basis von V ist, lässt sich $w_n \in V$ in dieser Basis darstellen:

$$w_n = \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_{n-1} w_{n-1} + \lambda_n v_n + \dots + \lambda_r v_r$$

für gewisse $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$.



Einer der Werte $\lambda_n, \dots, \lambda_r$ ist ungleich 0. Denn wären $\lambda_n = \dots = \lambda_r = 0$, so wäre das System $w_1, \dots, w_n$ linear abhängig. Wir können also ein $i \in \{n, \dots, r\}$ fixieren, mit $\lambda_i \neq 0$, und mit Hilfe des Austauschlemmas in der Basis $w_1, \dots, w_{n-1}, v_n, \dots, v_r$ den Vektor v_i gegen w_n austauschen. Somit ist (b) für das System $w_1, \dots, w_n$ nachgewiesen. $\square$

Bem Der Beweis ist konstruktiv. Es ist ein Kochrezept (genauer gesagt: ein iteratives Verfahren) zum Eintauschen eines linear unabhängigen Systems in eine Basis.

3.4.6. Dimension

Korollar Sei V ein endlich erzeugter Vektorraum über $\mathbb{K}$. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}_0$, sodass jede Basis von V aus genau n Vektoren besteht.

__Beweis:__ Nach dem Basisauswahlsatz besitzt V eine Basis $v_1, \dots, v_r$ aus $r \in \mathbb{N}_0$ Vektoren. Sei $w_1, \dots, w_n$ eine weitere Basis von V. Aus 3.4.5 folgt einerseits $n \leq r$ aber andererseits $r \leq n$. $\Rightarrow r = n$. $\square$

Die <u>Dimension</u> eines Vektorraums V über $\mathbb{K}$ ist

$$\dim_{\mathbb{K}}(V) = \begin{cases} \infty, & \text{wenn } V \text{ nicht endlich erzeugt ist} \\ n \in \mathbb{N}_0, & \text{falls } V \text{ eine Basis aus } n \in \mathbb{N}_0 \text{ Vektoren besitzt.} \end{cases}$$

Bem Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\dim(\mathbb{K}^n) = n$, denn $\mathbb{K}^n$ hat die Basis

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0),$$
$$e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0),$$
$$\vdots$$
$$e_n = (0, \ldots, 0, 1).$$

Das ist die sogenannte <u>Standardbasis</u> von $\mathbb{K}^n$

<u>Bsp.</u>

$$\sigma = \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

0 nichts machen

1 umschalten

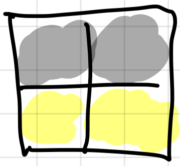
$1 + 1 = 0$

Unser Körper ist $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$

$1 + 1 = 0$

$$a = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline \end{array} \quad b = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array} \quad c = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array} \quad d = \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$a + b = \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array} =$$



2×2 Lights Out für jede Startkonfiguration lösbar $\iff$ a, b, c, d bilden eine Basis von $\mathbb{Z}_2^4$

$\iff$ a, b, c, d sind linear unabhängig.

$$a = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\leadsto$ Gauß-Verfahren.

$$\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc|c} \alpha & \beta & \gamma & \delta & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$\downarrow$ SageMath

$$\begin{array}{cccc|c} \alpha & \beta & \gamma & \delta & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$\Updownarrow$

$$\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0.$$

$\Rightarrow$ a, b, c, d linear unabhängig!

$$\underbrace{\alpha a + \beta \cdot b + \gamma \cdot c + \delta \cdot d = v}$$

$\Updownarrow$

LGS

$\Updownarrow$ $\boxed{\text{SageMath}}$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$\Updownarrow$

$\alpha = 0$

$\beta = 1$

$\gamma = 1$

$\delta = 1$

$\boxed{3.4.7.}$ Dimension von Untervektorräumen

Kor Sei V ein endlich erzeugter VR über $\mathbb{K}$. Sei W ein UVR von V.

Dann gilt:

(i) $\dim(W) \leq \dim(V)$

(ii) $\dim(W) = \dim(V) \iff W = V$.

Beweis: (i) W ist endlich erzeugt, sonst hätte W ein unendliches linear unabhängiges System. Das widerspricht aber dem Basisaustauschsatz (Teil (a) impliziert, dass die linear unabhängige Systeme in V nicht länger als $\dim(V)$ sein können)). Also ist $\dim(W)$ endlich.

Aber, eine Basis in W ist ein linear unabhängiges System in V, sodass mit derselben Begründung $\dim(W) \leq \dim(V)$ gilt.

(ii) ($\Leftarrow$) ist klar. Umgekehrt: sei $\dim(W) = \dim(V)$.

Sei $v_1, \ldots, v_n$ (mit $n \in \mathbb{N}_0$) eine Basis von W. Wäre $W \neq V$, dann könnte man ein $v \in V \setminus W$ fixieren. Dann wäre aber $v_1, \ldots, v_n, v$ ein linear unabhängiges System. Wir hätten dann ein linear unabhängiges System mit $n+1 > \dim(V)$ Elementen, $\lightning$ zum Basisaustauschsatz (Teil (a)). $\square$

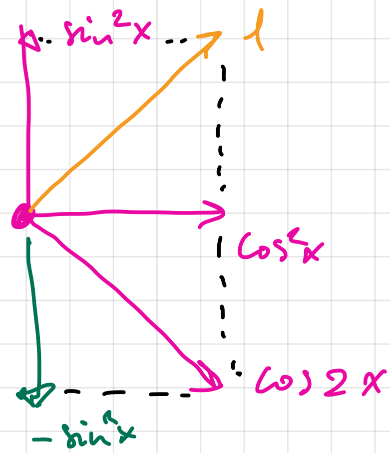
Bsp

- Wir bezeichnen als Y^X die Menge aller Funktionen von X nach Y. Somit ist $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{f : f \text{ ist Funktion von } \mathbb{R} \text{ nach } \mathbb{R}\}$

  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$.

$$\dim(\mathrm{lin}_{\mathbb{R}}(\underbrace{\cos x}_{\in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}}, \underbrace{\sin x}_{\in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}})) = 2$$

$$\dim(\mathrm{lin}_{\mathbb{R}}(\cos^2 x, \sin^2 x, \cos 2x)) = 2$$



- $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$ $\qquad \mathbb{C} = \mathrm{lin}(1, \underset{\sqrt{-1}}{\underset{\shortparallel}{i}})$

- $\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}) = \infty$

- $\dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{lin}_{\mathbb{Q}}(1, \sqrt{2}) = 2$ $\qquad 1, \sqrt{2}$ linear unabhängig über $\mathbb{Q}$

  $\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot \sqrt{2} = 0$

  mit $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Q}$

  $\Downarrow$

  nur für $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ erfüllt.

3.4.8. Ergänzung zu einer Basis.

Thm (Basisergänzungssatz) Sei V ein endlich erzeugter VR über K. Sei $v_1, \dots, v_n \in V$ linear unabhängig ($n \in \mathbb{N}_0$). Dann existieren $v_{n+1}, \dots, v_r \in V$ mit $r = \dim(V)$ derart, $v_1, \dots, v_n, v_{n+1}, \dots, v_r$ eine Basis von V ist.

Beweis: Wir nehmen eine beliebige Basis von V und lassen $v_1, \dots, v_k$ in diese Basis eintauschen. $\square$

Bsp

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad \text{lin. unabhängig}$$

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad \text{Basis von } \mathbb{R}^3$$

$$\boxed{a_1 = 1 \cdot e_1 + e_2 + e_3}$$

a_1, e_2, e_3 . Basis von $\mathbb{R}^3$

$$\boxed{a_2 = 1 \cdot a_1 + 1 \cdot e_2 + 2 \cdot e_3}$$

a_1, a_2, e_3 Basis von $\mathbb{R}^3$.

$$1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Bsp

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 & (1) \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 & (2) \end{cases}$$

$W = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : (1), (2) \text{ erfüllt} \}$

ist ein UVR von $\mathbb{R}^4$.

Wir bestimmen eine Basis von $\mathbb{R}^4$.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 & (1) = (1') \\ \quad x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 & (2) - (1) = (2') \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} x_1 \qquad - x_3 - 2x_4 = 0 & (1') - (2') \\ \quad x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 & (2') \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} x_1 &= x_3 + 2x_4 \\ x_2 &= -2x_3 - 3x_4 \end{aligned}$$

$$W = \{ (x_3 + 2x_4, -2x_3 - 3x_4, x_3, x_4) : x_3, x_4 \in \mathbb{R} \}$$

$$= \{ x_3 \cdot (1, -2, 1, 0) + x_4 \cdot (2, -3, 0, 1) : x_3, x_4 \in \mathbb{R} \}$$

$$= \operatorname{lin}\Big(\underbrace{(1,-2,1,0), (2,-3,0,1)} \Big)$$

Basis von W, denn

aus $(x_3 + 2x_4, -2x_3 - 3x_4, x_3, x_4) = 0$

folgt $x_3 = x_4 = 0$.

3.5. Rang

3.5.1. Matrizen und ihr Rang

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \vdots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

a_{ij}

i Zeilenindex

j Spaltenindex

Größe:

Anz. Zeilen × Anz. Spalten

Für $m, n \in \mathbb{N}$, setzen wir

$$\mathbb{K}^{m \times n} := \mathbb{K}^{\{1,\dots,m\} \times \{1,\dots,n\}}$$

Elemente von $\mathbb{K}^{m \times n}$ nennt man Matrizen der Größe $m \times n$ mit Komponenten aus $\mathbb{K}$.

Schreibweise: $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$

$a_{ij} \in \mathbb{K}$ ist die Komponente in der Position (i,j), d.h. in der i-ten Zeile und der j-ten Spalte.