$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -A & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & B \\ A & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & B \\ A & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -A & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & B \\ 0 & 1-AB \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1-BA & B \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sylvester's Gleichung

$$\boxed{\det(1-AB) = \det(1-BA)}$$

$A \in \mathbb{K}^{m \times n}$

$B \in \mathbb{K}^{n \times m}$

$F(v) = \lambda v$, $v \neq 0$

$A \cdot v = \lambda \cdot v$, $v \neq 0$

6.1.3. Diagonalisierbarkeit von linearen Abbildungen

Sei F lin. Abbildung von V nach V mit $n = \dim(V) < \infty$.
F heißt <u>diagonalisierbar</u>, wenn es eine Basis $\mathcal{B}$ von V existiert, für die $F_{\mathcal{B}}$ diagonal ist.

Prop. Für eine lin. Abb. $F: V \to V$ auf einem endlich-dim. V. Raum V sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

(i) F ist diagonalisierbar

(ii) V besitzt eine Basis aus Eigenvektoren von F.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii) F diagonalisierbar ergibt, dass für eine Basis $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ die Matrix $F_{\mathcal{B}}$ die Gestalt $F_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$ hat, mit gewissen $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. $\Rightarrow$

$$F(b_1) = \lambda_1 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 + \dots + 0 \cdot b_n$$
$$\vdots$$
$$F(b_n) = 0 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 + \dots + 0 \cdot b_{n-1} + \lambda_n \cdot b_n$$

$\Rightarrow F(b_i) = \lambda_i \cdot b_i \quad \forall i = 1 \dots n \Rightarrow$

$b_1, \dots, b_n$ sind Eigenvektoren von F

(ii) $\Rightarrow$ (i): Besitzt V eine Basis $\mathcal{B} = (b_1 \dots, b_n)$ aus Eigenvektoren von F, so gilt $F(b_i) = \lambda_i \cdot b_i$ mit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. $\Rightarrow$

$$F_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \Rightarrow F \text{ diagonalisierbar.} \qquad \square$$

Bem. Den Diagonalisierbarkeitsbegriff kann auch für Matrizen $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ benutzt werden.

Prop Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ (mit $n \in \mathbb{N}$) ist genau dann diagonalisierbar, wenn es eine invertierbare Matrix $B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ existiert, für die $B^{-1} \cdot A \cdot B$ diagonal ist.

Beweis: A diagonalisierbar $\overset{\text{vorige Prop.}}{\Longleftrightarrow}$

es gibt eine Basis $b_1, \dots, b_n$ von $\mathbb{K}^n$, die aus Eigenvektoren von A besteht, d.h.

$$A b_i = \lambda_i b_i \quad \text{mit } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}.$$

$$A \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_n \end{bmatrix}}_{\substack{\| \\ B \in \mathbb{K}^{n \times n}}} = \begin{bmatrix} Ab_1 & Ab_2 & \cdots & Ab_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 b_1 & \cdots & \lambda_n b_n \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_n \end{bmatrix}}_{B''} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad A \cdot B = B \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad B^{-1} \cdot A \cdot B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}. \qquad \square$$

Bsp

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad 1, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ Eigenpaar.}$$

$$A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = (-1) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad -1, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ Eigenpaar.}$$

$$\mathcal{B} = \Big(\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}}_{} \Big)$$

lin. unabhängig, wenn $1+1 \neq 0$ ist.

$$A_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad B^{-1} \cdot A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ mit}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Gut für Physik: $\dot{x}$ - Zeitableitung

$$\dot{x} = A x$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{gathered} B^{-1} \cdot A \cdot B = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{= \Lambda} \\ A = B \cdot \Lambda B^{-1} \end{gathered}}$$

$$\dot{x} = B \Lambda B^{-1} x$$

$$\dot{(B^{-1}x)} = \Lambda \cdot (B^{-1}x)$$

$$\Updownarrow \qquad \boxed{x = By} \iff \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$\dot{y} = \Lambda \cdot y$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = 1 \cdot y_1 \iff y_1(t) = c_1 \cdot e^{t} \\ \dot{y}_2 = -1 \cdot y_2 \iff y_2(t) = c_2 \cdot e^{-t} \end{cases}$$

Bsp

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \leftarrow$$ nicht diagonalisierbar! Aber Warum

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{I} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{M}$$

$$Av = \lambda v \Rightarrow (I + M)v = \lambda v$$

$$Mv = (\lambda - 1)v$$

$Mv = \mu v \quad \Rightarrow \quad (I+M)v = (1+\mu)v$

$\Rightarrow \quad Av = (1+\mu)v$

$$B^{-1}AB = B^{-1}(I+M)B = I + B^{-1}MB$$

Diagonalisierbarkeit von $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \iff$

Diagonalisierbarkeit von $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$M \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow$ die einzigen Eigenvektoren sind $\begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix}$ mit $x_1 \neq 0$, der Eigenwert dazu ist 0.

$\Rightarrow$ M nicht diagonalisierbar

$\Rightarrow$ A nicht diagonalisierbar.

$\boxed{6.1.4.}$ Diagonalisierbarkeit: eine hinreichende Bedingung.

Lem Sei $F: V \to V$ lineare Abbildung und seien $(\lambda_1, v_1), \dots, (\lambda_m, v_m)$ Eigenpaare von F mit $\lambda_i \neq \lambda_j$ bei $i \neq j$. Dann sind $v_1, \dots, v_m$ linear unabhängig.

Beweis: Induktion über m. Für $m = 1$ ist die Behauptung wahr, denn v_1 als Eigenvektor ist $\neq 0$.

Sei $m > 1$ und sei die Behauptung für $m-1$ Eigenpaare bereits verifiziert.

Man betrachte beliebige $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in K$ mit

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m = 0$$

$$\Downarrow$$

$$F(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha_1 F(v_1) + \dots + \alpha_m F(v_m) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \alpha_m \lambda_m v_m = 0$$

$\lambda_m \cdot$

$$\alpha_1 \lambda_m v_1 + \dots + \alpha_m \lambda_m v_m = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_m) v_1 + \dots + \alpha_{m-1} (\lambda_{m-1} - \lambda_m) v_{m-1} = 0$$

$$\Downarrow \quad \text{I.V.: } v_1, \dots, v_{m-1} \text{ sind lin. unabh.}$$

$$\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_m) = \dots = \alpha_{m-1} (\lambda_{m-1} - \lambda_m) = 0$$

$$\Downarrow \quad \lambda_i - \lambda_m \neq 0 \text{ für } i = 1, \dots, m-1$$

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_{m-1} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} \alpha_m v_m &= 0 \\ v_m &\neq 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \alpha_m = 0.$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0.$$

$\Rightarrow$ $v_1, \dots, v_m$ sind linear unabhängig. $\square$

Thm Ist $F: V \to V$ eine lineare Abbildung auf einem n-dim. VR V $(n \in \mathbb{N})$ und n paarweise verschiedenen Eigenwerten, so ist F diagonalisierbar.

Beweis: Folgt aus dem vorigen Lemma. $\square$

$\boxed{6.1.5.}$ Der Eigenraum

Für eine lineare Abbildung $F: V \to V$ und ein $\lambda \in \mathbb{K}$ heißt

$$\mathrm{Eig}(F, \lambda) := \{v \in V : F(v) = \lambda v\}$$

der Eigenraum von F bezgl. λ.

Ist λ kein Eigenwert, so ist $\mathrm{Eig}(F, \lambda) = \{0\}$.

Prop. Für eine lineare Abbildung $F: V \to V$ und ein $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt:

(i) $\mathrm{Eig}(F, \lambda)$ ist UVR von V.

(ii) λ Eigenwert von F $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Eig}(F, \lambda) \neq \{0\}$.

(iii) Ist λ Eigenwert von F so gilt:

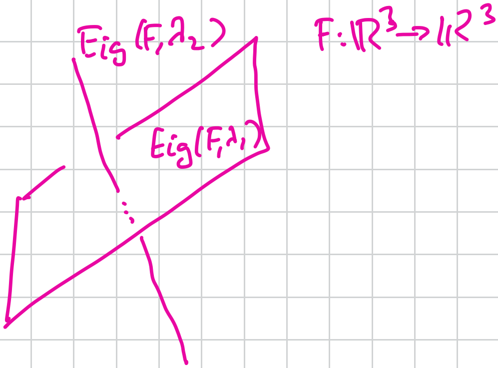
$v \in V$ ist Eigenvektor zu λ $\Longleftrightarrow$ $v \in \mathrm{Eig}(F, \lambda) \setminus \{0\}$.

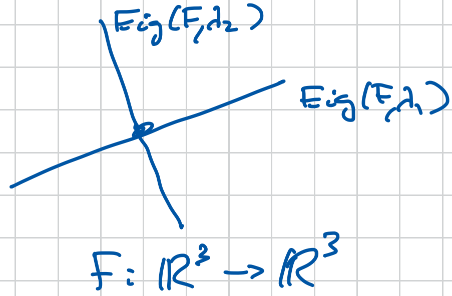
(iv) $\mathrm{Eig}(F, \lambda) = \ker(\lambda\, \mathrm{id}_V - F)$

(v) Wenn $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ verschieden sind, so gilt:

$$\mathrm{Eig}(F, \lambda_1) \cap \mathrm{Eig}(F, \lambda_2) = \{0\}.$$

Beweis: direkt verifizierbar. $\square$





Bsp

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

4 ist Eigenwert von A.

Wie berechnen wir $Eig(A, 4)$?

$$\underbrace{Ax = 4x}_{\text{Gauß-Verfahren}} \iff (A - 4I)x = 0$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

weiter mit Gauß...

6.2. Das charakteristische Polynom.

Wir haben die Polynomringe eingeführt (vgl. Kap. 2) und können somit den Ring $\mathbb{K}[t]$ der Polynome mit den Koeffizienten im Körper $\mathbb{K}$ in der Unbestimmten t betrachten.

Jedes Polynom $f \in \mathbb{K}[t]$ kann auf $\mathbb{K}$ ausgewertet werden. Somit bestimmt f die Polynomfunktion $\lambda \mapsto f(\lambda)$, $\mathbb{K} \to \mathbb{K}$. Aber f ist im Allgemeinen nicht mit der jeweiligen Polynomfunktion identifizierbar. z.B.: $t^2+t+1 \in \mathbb{Z}_2[t]$

$$\left.\begin{aligned} 0^2+0+1 &= 1 \\ 1^2+1+1 &= 1 \end{aligned}\right]$$ t^2+t+1 definiert die konstante Funktion 1, wie $1 \in \mathbb{Z}_2[t]$,

aber die Polynome sind ungleich:

$$t^2+t+1 \neq 1 \quad \text{in } \mathbb{Z}_2[t]$$

(per Definition).

6.2.1 Das charakteristische Polynom einer Matrix

Prop. Für $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ $(n \in \mathbb{N})$ ist λ genau dann ein Eigenwert von A, wenn $\det(\lambda I - A) = 0$ ist.

Beweis: λ Eigenwert von $A \Leftrightarrow \operatorname{Eig}(A,\lambda) = \ker(\lambda I - A) \neq \{0\}$
$\Leftrightarrow$ $\lambda I - A$ ist nicht invertierbar $\Leftrightarrow$ $\det(\lambda I - A) = 0$.
$\square$

Man definiert das charakteristische Polynom von $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ als $p_A(t) := \det(tI - A) \in \mathbb{K}[t]$.

Nach der vorigen Proposition sind die Eigenwerte von A genau die Nullstellen von $p_A(t)$.

Aber moment mal.... Ist $\det(tI - A)$ definiert?

$$tI - A \in \mathbb{K}[t]^{n \times n}.$$

z.B. $tI - A = \begin{bmatrix} t-a_{11} & -a_{12} \\ -a_{12} & t-a_{22} \end{bmatrix}$.

Wir haben aber die Determinante über einem Körper $\mathbb{K}$ definiert, nicht über einem Ring wie $\mathbb{K}[t]$. Damit wir die Theorie der Determinanten über einem Körper nutzen können, brauchen wir eine Rechtfertigung für diese Definition von $p_A(t)$.

$\boxed{6.2.2.}$ Rechtfertigung für die Definition von $p_A(t)$.

Sei R kommutativer Ring mit 1, z.B. $R = \mathbb{Z}$ oder $R = \mathbb{K}[t]$.

Ein Element $a \in R \setminus \{0\}$ heißt Nullteiler, wenn für ein $b \in R \setminus \{0\}$ die Bedingung $a \cdot b = 0$ gilt.

Bsp. In $\mathbb{Z}_6$: $[2] \cdot [3] = 0$

Nullteiler in $\mathbb{Z}_6$.

Einen kommutativen Ring mit Eins nennen wir Integritätsring, wenn er keine Nullteiler hat.

Bsp. $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{K}[t]$ sind Integritätsringe.

Für einen Integritätsring R wird der Quotientenkörper von R, Bezeichnung $\mathrm{Quot}(R)$, wie folgt eingeführt:

Wir führen eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf $R \times R\setminus\{0\}$ ein, durch:

$$(a,b) \sim (c,d) \quad \text{für } ac = bd.$$

$$(a,c \in R,\ b,d \in R\setminus\{0\}).$$

Als $\frac{a}{b}$ bezeichnen wir die Äquivalenzklasse von (a,b) bzgl. dieser Relation.

$\mathrm{Quot}(R)$ ist die Menge aller Äquivalenzklassen, die noch mit den folgenden zwei Operationen ausgestattet wird:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \qquad a,c \in R,\ b,d \in R\setminus\{0\}.$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Da R Integritätsring ist, ist $b \cdot d \neq 0$, sodass die rechte Seiten jeweils eine Äquivalenzklasse darstellen. Ansonsten sind $+$ und $\cdot$ wohldefiniert, da das Ergebnis dieser Operation nicht von der Wahl der Vertreter bei den den Operanden abhängig ist (vgl. Aufgaben aus LinA 1).

Wir können R als Teilmenge von $\mathrm{Quot}(R)$ auffassen, indem wir $a \in R$ als $\frac{a}{1} \in \mathrm{Quot}(R)$ interpretieren. Es kann gezeigt werden, dass $\mathrm{Quot}(R)$ ein Körper ist.

Bsp. $\mathrm{Quot}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}$.

$\mathrm{Quot}(\mathbb{K}[t])$ bezeichnet man als $\mathbb{K}(t)$. $\mathbb{K}(t)$ wird der Körper der rationalen Funktion in t mit Koeffizienten in $\mathbb{K}$ genannt.

Nun hat man $tI - A \in \mathbb{K}[t]^{n \times n} \subseteq \mathbb{K}(t)^{n \times n}$

$\Rightarrow$ $\det(tI - A)$ existiert bzgl. des Körpers der rationalen Funktion (das ist $\mathbb{K}(t)$).

Aber nach der Leibniz-formel, in der nicht geteilt wird, gilt

$$\det(tI - A) \in \mathbb{K}[t].$$

Bsp

A	p_A
$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\det\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} = t^2$
$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\det\begin{pmatrix} t & -1 \\ 0 & t \end{pmatrix} = t^2$
$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\det\begin{pmatrix} t-1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} = (t-1)t = t^2 - t$
$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\det\begin{bmatrix} t-1 & -1 \\ 0 & t-1 \end{bmatrix} = (t-1)^2$
$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\det\begin{bmatrix} t-1 & -1 \\ -1 & t-1 \end{bmatrix} = (t-1)^2 - 1 = t(t-2)$