Agenda

+ Rang
+ Summen von Untervektorräumen.

Eine $m\times n$ Matrix $A=(a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}} \in \mathbb{K}^{m\times n}$

kann man Zeilen- oder Spaltenweise auffassen. Somit ist

$$A=\underbrace{\begin{bmatrix} | & & | \\ s_1 & \cdots & s_n \\ | & & | \end{bmatrix}}_{\text{Die } n \text{ Spalten von } A} = \underbrace{\begin{bmatrix} — & z_1 & — \\ & \vdots & \\ — & z_m & — \end{bmatrix}}_{\text{Die } m \text{ Zeilen von } A.}$$

$\mathrm{Lin}(s_1,\dots,s_n)$ heißt der <u>Spaltenraum</u> von A

$\mathrm{Lin}(z_1,\dots,z_m)$ heißt der <u>Zeilenraum</u> von A

$\dim(\mathrm{Lin}(s_1,\dots,s_n))$ heißt der <u>Rang</u> von A.

3.5.2 Elementartransformationen (ET) von Vektorsystemen

Für ein System $v_1, \dots, v_n$ von Vektoren eines VR V über $\mathbb{K}$ führen wir ET ein:

Typ 1: v_i und v_j vertauschen für gegebene $i, j = 1, \dots, n$.

Typ 2: Einen Vektor v_i $(i = 1, \dots, n)$ um einen Wert $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, d.h. v_i durch αv_i ersetzen.

Typ 3: Für gegeben $i, j = 1, \dots, n$ mit $i \neq j$ und ein $\alpha \in \mathbb{K}$, den Vektor v_i durch $v_i + \alpha v_j$ ersetzen.

Lem Die ET eines Vektorsystems ändern die lineare Hülle des Systems nicht.

Beweis: Typ 1 — klar.

Typ 2: Wir nehmen an, wir strecken den ersten Vektor um $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Zu zeigen:

$$\mathrm{Lin}(\alpha v_1, v_2, \dots, v_n) = \mathrm{Lin}(v_1, \dots, v_n)$$

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \frac{\lambda_1}{\alpha} \cdot (\alpha v_1) + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n$$

gilt für alle $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, sodass die Inklusion $\supseteq$ erfüllt ist.

Umgekehrt: $\lambda_1 \cdot (\alpha v_1) + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n$

$= (\lambda_1 \cdot \alpha) \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \dots + \lambda_n \cdot v_n$, sodass die Inklusion $\subseteq$ ebenfalls erfüllt ist.

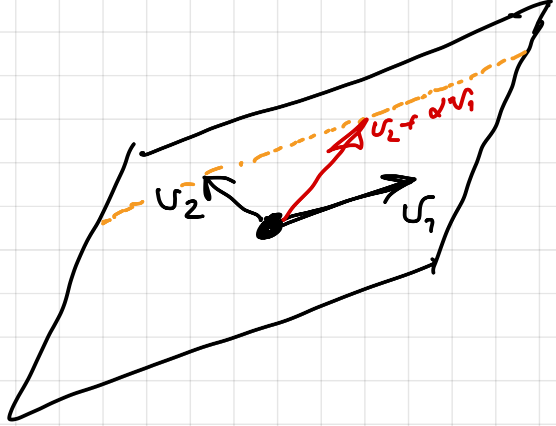
Typ 3. Da diese Operation zwei Vektoren nutzt, reicht es aus ein System aus zwei

Vektoren zu analysieren.

Wir zeigen:

$$\mathrm{lin}(v_1, v_2) = \mathrm{lin}(v_1, v_2 + \alpha v_1)$$

für $\alpha \in \mathbb{K}$.



$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 (v_2 + \alpha v_1) - \lambda_2 \alpha v_1$$

$$= (\lambda_1 - \lambda_2 \alpha) v_1 + \lambda_2 (v_2 + \alpha v_1)$$

gilt für alle $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$, sodass die Inklusion $\subseteq$ erfüllt ist.

Umgekehrt: $\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot (v_2 + \alpha v_1) =$

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \lambda_2 \cdot \alpha \cdot v_1 =$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2 \cdot \alpha) v_1 + \lambda_2 v_2,$$

sodass die Inklusion $\supseteq$ erfüllt ist. $\square$

3.5.2 Der Rang der transponierten Matrix

Die *transponierte Matrix* zu einer Matrix

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \in \mathbb{K}^{m \times n}$$ ist die Matrix

$$A^T = (a^T_{ji})_{\substack{j=1,\dots,n \\ i=1,\dots,m}} \in \mathbb{K}^{n \times m}$$ mit

$$a^T_{ji} = a_{ij} \quad \text{für alle } i = 1,\dots,m \text{ und } j = 1,\dots,n.$$

Insb.: Zeilen von A sind Spalten von A^T,
Spalten von A sind Zeilen von A^T.

Thm Sei $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ $(m, n \in \mathbb{N})$. Dann gilt:

$$\mathrm{rang}(A^T) = \mathrm{rang}(A).$$

Beweis:

Sei $A = \begin{bmatrix} | & & | \\ s_1 & \cdots & s_n \\ | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} — & z_1 & — \\ & \vdots & \\ — & z_m & — \end{bmatrix}$.

Zu zeigen: $\underbrace{\dim(\mathrm{lin}(s_1, \dots, s_n))}_{\mathrm{rang}(A)} = \underbrace{\dim(\mathrm{lin}(z_1, \dots, z_m))}_{\mathrm{rang}(A^T)}$.

Wir betrachten die Gleichung $\lambda_1 s_1 + \dots + \lambda_n s_n = 0$ in den unbekannten $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. Diese Vektorgleichung lässt sich als ein homogenes LGS ausschreiben

$$\underbrace{\begin{array}{ccc|c} \lambda_1 & \cdots & \lambda_n & \\ \hline a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & 0 \end{array}}_{A} \xrightarrow{\text{Gauß-Jordan}} \underbrace{\begin{array}{ccccccc|c} \lambda_1 & \cdots & \lambda_r & \lambda_{r+1} & \cdots & \lambda_n & \\ \hline 1 & & 0 & * & \cdots & * & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & & 1 & * & \cdots & * & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}}_{}$$

Das Ergebnis des Gauß-Jordan-Verfahrens, wenn die Spalten $s_1, \dots, s_n$ passend geordnet sind.

Hier: $*$ ist ein Platzhalter für ein beliebiges Element aus $\mathbb{K}$.

Wir bezeichnen die Matrix, die als das Ergebnis von Gauß-Jordan berechnet wird, als A'.

Sei $A' = \begin{bmatrix} | & & | \\ s_1' & \cdots & s_n' \\ | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} — & z_1' & — \\ & \vdots & \\ — & z_m' & — \end{bmatrix}$.

Es gilt: $\mathrm{lin}(z_1', \dots, z_m') = \mathrm{lin}(z_1, \dots, z_m)$ nach 3.5.2.

Man hat $z_{r+1}' = \dots = z_m' = 0$ und $z_1', \dots, z_r'$ sind linear unabhängig, sodass $\dim(\mathrm{lin}(z_1, \dots, z_m)) = r$ ist.

Andererseits zeigt uns das Ergebnis vom Gauß-Jordan, dass $\mathrm{lin}(s_1, \dots, s_n) = \mathrm{lin}(s_1, \dots, s_r)$ ist und dass $s_1, \dots, s_r$ linear unabhängig sind:

Wenn wir unter den $\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n$ genau einen Wert -1 setzen und die anderen Null, etwa $\lambda_k = -1$ für ein $k = r+1, \dots, n$ und die anderen $\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n$ Null, dann bestimmt das Ergebnis vom Gauß-Jordan Verfahren die jeweiligen Werte für $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ derart, dass $\lambda_1 s_1 + \dots + \lambda_r s_r - s_k = 0$ ist.

Das zeigt: $s_{r+1}, \dots, s_n \in \mathrm{lin}(s_1, \dots, s_r)$.

Wenn wir alle $\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n$ gleich Null setzen, dann sagt das Ergebnis vom Gauß-Jordan-Verfahren, dass $\lambda_1 s_1 + \dots + \lambda_r s_r$ genau dann gleich Null ist, wenn $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ alle Null sind.

Also ist $s_1, \dots, s_r$ eine Basis von $\mathrm{lin}(s_1, \dots, s_n)$.

D.h. $\dim(\mathrm{lin}(s_1, \dots, s_n)) = r$. $\square$

Bsp

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 5 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 7 & 6 \\ 3 & 6 & 1 & 9 & 7 \end{bmatrix}$$

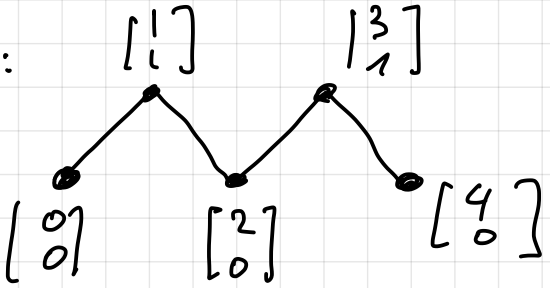
SageMath

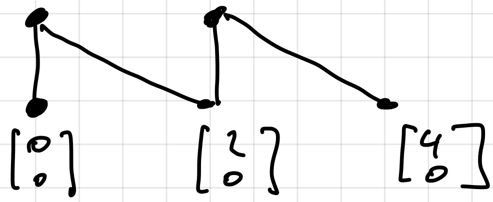
Kor Die ET der Zeilen und Spalten einer Matrix ändern den Rang der Matrix nicht.

Bem Der Beweis enthält einen Algorithmus zur Auswahl einer Basis von $\mathrm{lin}(s_1,\dots,s_n)$ unter den Vektoren $s_1,\dots,s_n$ und zur Berechnung einer "einfachen" strukturierten Basis $z_1',\dots,z_r'$ von $\mathrm{lin}(z_1,\dots,z_m)$.

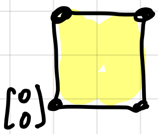
Bem Wenn man zeilenweise Gauß-Verfahren auf den Zeilen von A ausführt, so verursachen die ET lineares Transformieren der Spalten von A.

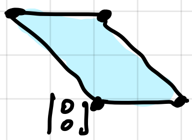
z. B.:





$$-1 \circlearrowleft \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$





$$-1 \circlearrowleft \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3.6 Summen von Vektorräumen

3.6.1 Summe von Vektorräumen

Die Summe von UVR $W_1,\dots,W_k$ eines VR V ist als

$$W_1+\dots+W_k = \{w_1+\dots+w_k : w_1\in W_1,\dots,w_k\in W_k\}.$$

Bem $W_1+\dots+W_k$ ist ein UVR von V, den man auch als $W_1+\dots+W_k = \mathrm{lin}(W_1\cup\dots\cup W_k)$ beschreiben kann.

Des Weiteren gilt: $\dim(W_1 + \ldots + W_k) \leq \dim(W_1) + \ldots + \dim(W_k)$.