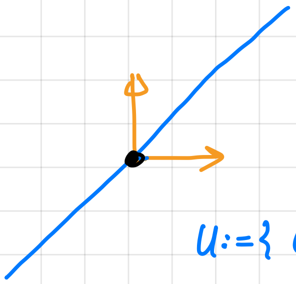
$\boxed{\begin{matrix} W10, V1 \\ W7, V1 \end{matrix}}$

Evaluation

Woche 10.



$\mathbb{R}^2$

$U := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$

$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ Basis von U ?

$\boxed{4.2.2.}$ Lineare Abbildungen und Grundbegriffe für Vektorräume

Proposition Sei $F: V \to W$ lineare Abbildung.

Dann gilt:

(i) $F(0) = 0$ und $F(v-w) = F(v) - F(w)$ für alle $v, w \in V$

(ii) $F(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 F(v_1) + \dots + \lambda_n F(v_n)$ für alle $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ und $v_1, \dots, v_n \in V$ $(n \in \mathbb{N}_0)$

(iii) Ist $(v_i)_{i \in I}$ eine linear abhängiges System aus V, so ist $(F(v_i))_{i \in I}$ ebenfalls linear abhängig.

(iv) Ist V' ein UVR von V, so ist $F(V')$ ein UVR von W.

(v) Ist W' ein UVR von W, so ist $F^{-1}(W')$ ein UVR von V.

(vi) $\dim(F(V)) \leq \dim(V)$

(vii) Ist F bijektiv, dann ist auch $F^{-1}: W \to V$ ebenfalls linear.

Beweis: (i) $F(x) = F(x+0) \overset{F \text{ linear}}{=} F(x) + F(0)$

$\Rightarrow F(0) = F(x) + (-F(x)) = 0$
(mit $x \in V$).

$$F(v) = F(v - w + w) \underset{F \text{ linear}}{=} F(v-w) + F(w)$$

$\Rightarrow F(v-w) = F(v) - F(w)$ für alle $v, w \in V$.

(ii) $n=0$ ist klar $F(0)=0$. Das wurde in (i) erledigt.

$n=1$: $F(\lambda_1 v_1) \overset{(L2)}{=} \lambda_1 F(v_1)$

$n=2$: $F(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) \overset{(L1)}{=} F(\lambda_1 v_1) + F(\lambda_2 v_2)$

$\overset{(L2)}{=} \lambda_1 F(v_1) + \lambda_2 F(v_2)$

$n=3$: $F(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3) \overset{(L1)}{=}$

$$\underbrace{F(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2)}_{\boxed{n=2}} + \underbrace{F(\lambda_3 v_3)}_{(L2)} =$$

$$= \lambda_1 F(v_1) + \lambda_2 F(v_2) + \lambda_3 F(v_3)$$

Und so weiter iterativ. Man hätte das Argument auch als Induktion über n aufschreiben können.

(iii) $(v_i)_{i \in I}$ linear abhängig. Dann gilt $\lambda_1 v_{i_1} + \dots + \lambda_n v_{i_n} = 0$ (*).
für gewisse $i_1, \dots, i_n \in I$ und gewisse $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$, die nicht alle gleich 0 sind.

$(*) \Rightarrow \quad 0 = F(0) = F(\lambda_1 v_{i_1} + \ldots + \lambda_n v_{i_n})$

$\overset{(ii)}{=} \lambda_1 F(v_{i_1}) + \ldots + \lambda_n F(v_{i_n})$

$\Rightarrow \quad (F(v_i))_{i \in I}$ linear abhängig

(iv) $F(V') \neq \emptyset$, denn $0 \in V'$ und somit

$0 = F(0) \in F(V')$.

Angenommen, $w_1, w_2 \in F(V')$, d.h.

$w_1 = F(v_1)$ und $w_2 = F(v_2)$ für gewisse $v_1, v_2 \in V'$.

Dann ist $w_1 + w_2 = F(v_1) + F(v_2) \overset{(L1)}{=} F(v_1 + v_2)$,

wobei $v_1 + v_2$ in V' liegt, da V' ein UVR ist.

Analog: ist $\lambda \in \mathbb{K}$ und $w \in F(V')$, so gilt

$w = F(v)$ mit einem $v \in V'$, sodass

$\lambda w = \lambda F(v) \overset{(L2)}{=} F(\lambda v)$ erfüllt ist.

Da V' ein UVR ist, ist $\lambda v \in V'$. $\Rightarrow$

$\lambda w \in F(V')$.

(v) W' UVR $\Rightarrow 0_W \in W'$. Da $F(0_V) = 0_W$ ist,

folgt, dass $0_V \in F^{-1}(W')$. $\Rightarrow$

$F^{-1}(W') \neq \emptyset$.

Seien $v_1, v_2 \in F^{-1}(W')$, d.h. $F(v_1) \in W'$

und $F(v_2) \in W'$. $\Longrightarrow$

$F(v_1 + v_2) \overset{(L1)}{=} \underbrace{F(v_1)}_{\in W'} + \underbrace{F(v_2)}_{\in W'} \in W'$, da

W' ein UVR ist. $\Rightarrow \quad v_1 + v_2 \in F^{-1}(W')$.

Analog: ist $\lambda \in \mathbb{K}$ und $v \in F^{-1}(W')$ so gilt:

$F(\lambda v) \overset{(L2)}{=} \lambda \underbrace{F(v)}_{\in W'} \in W' \Longrightarrow \lambda v \in F^{-1}(W')$.

(vi), (vii) Übung. $\square$

4.2.3. Komposition von linearen Abbildungen

Proposition Seien $F: V \to U$ und
$G: W \to V$
lineare Abbildungen.

$$U \xleftarrow{F} V \xleftarrow{G} W$$

Dann ist $F \circ G : W \to U$
ebenfalls eine lineare Abbildung.

Beweis:

$$(F\circ G)(u_1+u_2) = F(G(u_1+u_2)) \underset{}{\overset{\text{(L1) für } G}{=}} F(G(u_1)+G(u_2))$$

$$\underset{\text{(L1) für } F}{=} F(G(u_1)) + F(G(u_2)) = (F\circ G)(u_1) + (F\circ G)(u_2)$$

und

$$(F\circ G)(\lambda u) = F(G(\lambda u)) \overset{\text{(L2) für } G}{=} F(\lambda G(u))$$

$$\underset{\text{(L2) für } F}{=} \lambda F(G(u)) = \lambda (F\circ G)(u)$$

für alle $u, u_1, u_2 \in U$ und alle $\lambda \in \mathbb{K}$.

$\Rightarrow$ $F\circ G$ linear. $\square$

4.2.4. Vektorräume der linearen Abbildungen

Sei $\mathrm{Lin}_{\mathbb{K}}(V,W)$ die Menge aller linearen Abbildungen $F: V \to W$ für zwei gegebene Vektorräume V und W über $\mathbb{K}$.
Auf diese Menge führen wir Addition und Skalarmultiplikation wie folgt ein:

$$(F+G)(v) := F(v) + G(v),$$
$$(\lambda \cdot F)(v) := \lambda \cdot F(v),$$
mit $F, G \in Lin(V,W)$ und $\lambda \in \mathbb{K}$.

Proposition. Für Vektorräume V, W über $\mathbb{K}$ ist $Lin(V,W)$ ein Vektorraum.

Beweis: vgl. Skript.

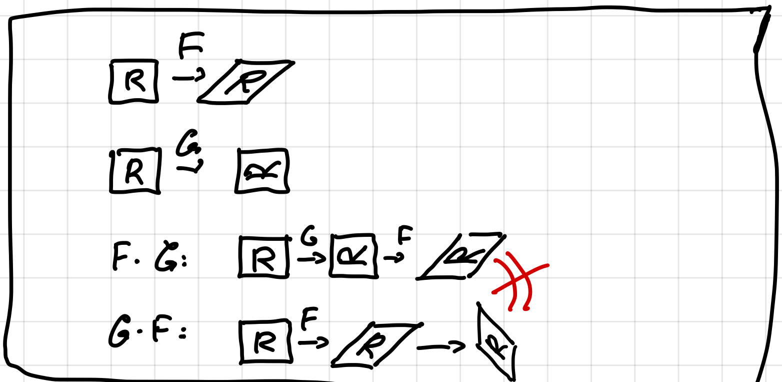
$\boxed{4.2.5.}$ Lineare Abbildungen eines Vektorraums.

Für einen VR V sei $Lin(V) := Lin(V,V)$, die Menge aller linearen Abbildungen $V \to V$. Nach 4.2.4 ist das ein VR, aber nicht nur ein VR. Wir führen in $Lin(V)$ ein Produkt wie folgt ein:

$$(F \cdot G)(v) = (F \circ G)(v) = F(G(v))$$

mit $F, G \in Lin(V)$

Ist das Produkt kommutativ?



Prop Sei V VR. Dann ist $Lin(V)$ ein Ring mit 1. Bei $\dim(V) \geq 2$ ist das ein nichtkommutativer Ring. Die Eins von $Lin(V)$ ist id_V (die identische Abbildung auf V).

4.3 Multiplikation von Matrizen und lineare Abbildungen auf den Räumen $\mathbb{K}^n$

4.3.1 Multiplikation von Matrizen

Man betrachte Matrizen $A = (a_{ik})_{i,k} \in \mathbb{K}^{m \times n}$

und $B = (b_{kj})_{k,j} \in \mathbb{K}^{n \times p}$

mit $m, n, p \in \mathbb{N}$. Dann ist das Produkt $C = A \cdot B$ die Matrix $C = (c_{ij})_{i,j} \in \mathbb{K}^{m \times p}$

mit

$$\boxed{c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}}$$

$$\underbrace{\begin{array}{c|c|} & j \\ \hline i & c_{ij} \\ & \end{array}}_{C} = \underbrace{i \begin{bmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix} j}_{B}$$

$C \qquad A \rightarrow \qquad B \downarrow$

$$\begin{array}{c|c} & \text{Eier} \\ \text{Max} & \\ \text{Jonas} & \\ \text{Gero} & \\ \vdots & \\ \text{Jolina} & \end{array} \begin{bmatrix} 5 & 4 & \cdots \\ 4 & 6 & \\ & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \cdot \begin{array}{c} \\ \text{Eier} \\ \text{Kaffee} \\ \text{Butter} \\ \text{Salami} \\ \text{Salz} \end{array} \begin{array}{c} \text{Kohl.H.} \quad \text{Ei.W.} \quad \text{Fett} \quad \text{Wasser} \\ \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \end{array}$$

Bem. Wenn wir $\mathbb{K}^n$ als $\mathbb{K}^{n \times 1}$ interpretieren, dann haben wir insbesondere das Produkt von $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ und $x \in \mathbb{K}^n$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \vdots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{x} = \begin{bmatrix} a_{11} x_1 + \cdots + a_{1n} x_n \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + \cdots + a_{mn} x_n \end{bmatrix}$$

Auf diese Weise erhalten wir eine Schreibweise für LGS mit Hilfe von Matrizen: $Ax = b$.
Hier ist A die Matrix der linken Seiten, x ist der Vektor der Unbekannten und b der Vektor der rechten Seiten.

Wenn wir A spaltenweise führen, als

$$A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ | & | & & | \end{bmatrix},$$ dann ist

$$Ax = \begin{bmatrix} | & & | \\ a_1 & \dots & a_n \\ | & & | \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \underbrace{a_1 x_1 + \dots + a_n x_n}_{\text{linearkomb. der Spalten von } A.}$$

Bem Wenn wir B spaltenweise interpretieren

$$A \cdot B = A \cdot \begin{bmatrix} | & & | \\ b_1 & \dots & b_p \\ | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & & | \\ Ab_1 & \dots & Ab_p \\ | & & | \end{bmatrix}$$

$\boxed{4.3.2}$ Die Matrix einer linearen Abbildung $K^n \to K^m$.

Prop Sei $F: K^n \to K^m$ $(m, n \in \mathbb{N})$ eine lineare Abbildung. Dann existiert eine eindeutige Matrix $A \in K^{m \times n}$ mit $F(x) = Ax$ für alle $x \in K^n$. Es gilt:

$$A = \begin{bmatrix} | & & | \\ F(e_1) & \dots\dots & F(e_n) \\ | & & | \end{bmatrix}.$$

Dieses A heißt die Matrix der linearen Abbildung F.

Beweis: Sei $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$. Dann ist

$$F(x) = F(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n)$$
$$= x_1 F(e_1) + x_2 F(e_2) + \dots + x_n F(e_n)$$
$$= \begin{bmatrix} | & & | \\ F(e_1) & \cdots & F(e_n) \\ | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

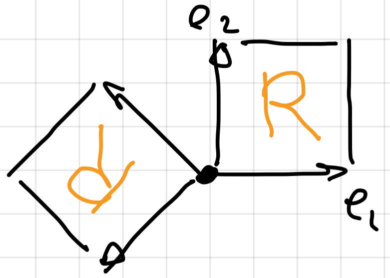
Die Existenz ist somit gezeigt und es bleibt, die Eindeutigkeit zu zeigen.

Sei $A = \begin{bmatrix} | & & | \\ a_1 & \cdots & a_n \\ | & & | \end{bmatrix}$ eine Matrix mit $F(x) = Ax$ $\forall x \in K^n$.

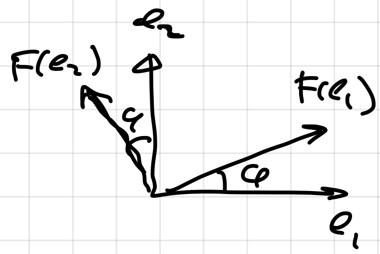
$$\Rightarrow F(e_1) = A e_1 = \begin{bmatrix} | & & | \\ a_1 & \cdots & a_n \\ | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = a_1$$
$$\vdots$$
$$F(e_n) = A e_n = \begin{bmatrix} | & & | \\ a_1 & \cdots & a_n \\ | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = a_n$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} | & & | \\ F(e_1) & \cdots & F(e_n) \\ | & & | \end{bmatrix}.$$ Das zeigt die Eindeutigkeit. $\square$

Bsp φ - Drehung



$$F(x) = F(x_1 e_1 + x_2 e_2)$$
$$= x_1 F(e_1) + x_2 F(e_2)$$
$$= \begin{bmatrix} | & | \\ F(e_1) & F(e_2) \\ | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$



$$F(e_1) = \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{bmatrix} \qquad F(e_2) = \begin{bmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{bmatrix}$$

$$F(x) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \cos\varphi - x_2 \sin\varphi \\ x_1 \sin\varphi + x_2 \cos\varphi \end{bmatrix}$$

$\boxed{4.3.3.}$ Matrix der Komposition der linearen Abbildungen

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}^m & \mathbb{K}^n \arrow[l] & \mathbb{K}^p \arrow[l] \arrow[ll, bend right, "A \cdot B"'] \end{tikzcd}$$

$$A \in \mathbb{K}^{m \times n} \qquad B \in \mathbb{K}^{n \times p}$$

Prop Seien $F: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ und $G: \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$ lineare Abbildungen, die durch deren Matrizen $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ und $B \in \mathbb{K}^{n \times p}$ gegeben sind $(n, m, p \in \mathbb{N})$. Dann ist $A \cdot B$ die Matrix von $F \circ G: \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^m$

<u>Beweis:</u> Sei $A = (a_{ik}) \in \mathbb{K}^{m \times n}$,

$$B = (b_{kj}) \in \mathbb{K}^{n \times p},$$

$$x = (x_j) \in \mathbb{K}^p$$

$$y = (y_k) \in \mathbb{K}^n.$$

Dann ist

$$G(x) = Bx = \left(\sum_{j=1}^{p} b_{kj} x_j \right)_{k=1,\dots,n} \in \mathbb{K}^n$$

$$F(y) = Ay = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} y_k \right)_{i=1,\dots,m} \in \mathbb{K}^m$$

$$\Rightarrow (F \circ G)(x) = F(G(x)) = A \cdot (B \cdot x)$$

$$= (A \cdot B) \cdot x$$

das wird gezeigt.

$$\left.\begin{aligned} Bx &= \left(\sum_{j=1}^{p} b_{kj} x_j \right)_{k=1,\dots,n} \\ Ay &= \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} y_k \right)_{i=1,\dots,m} \end{aligned}\right] \Rightarrow$$

$$A \cdot (Bx) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \left(\sum_{j=1}^{p} b_{kj} x_j \right) \right)_{i=1,\dots,m}$$

$$= \left(\sum_{\substack{k=1,\dots,n \\ j=1,\dots,p}} a_{ik} b_{kj} \cdot x_j \right)_{i=1,\dots,m}$$

$$A \cdot B = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right)_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,p}} \Rightarrow$$

$$(A \cdot B) \cdot x = \left(\sum_{j=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right) \cdot x_j \right)_{i=1,\dots,m}$$

$$= \left(\sum_{\substack{k=1,\dots,n \\ j=1,\dots,p}} a_{ik} b_{kj} \cdot x_j \right)_{i=1,\dots,m}$$

$$\Rightarrow \quad A \cdot (B \cdot x) = (A \cdot B) \cdot x.$$

$\boxed{4.3.4}$ Rechenregeln für Matrizen

Matrizen der gleichen Größe kann man addieren

$$(a_{ij})_{\substack{i=1,\dots m\\ j=1,\dots n}} + (a'_{ij})_{\substack{i=1,\dots m\\ j=1,\dots n}} := (a_{ij}+a'_{ij})_{\substack{i=1,\dots m\\ j=1,\dots n}}$$

Eine Matrix können wir mit einem Wert $\lambda \in \mathbb{K}$ multiplizieren:

$$\lambda \cdot (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots m\\ j=1,\dots n}} = (\lambda \cdot a_{ij})_{\substack{i=1,\dots m\\ j=1,\dots n}}$$

Man kann eine Matrix transponieren.

Man kann zwei Matrizen passender Größen multiplizieren.

Irgendwelche Rechenregeln? Ja!

Thm Seien $A, A' \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $B, B' \in \mathbb{K}^{n\times k}$, $C \in \mathbb{K}^{k\times p}$ $(m,n,k,p \in \mathbb{N})$ und sei $\lambda \in \mathbb{K}$.

Dann gilt:

(i) $A\cdot(B+B') = A\cdot B + A\cdot B'$

(ii) $(A+A')\cdot B = A\cdot B + A'\cdot B$

(iii) $A\cdot(\lambda\cdot B) = (\lambda\cdot A)\cdot B = \lambda\cdot(A\cdot B)$

(iv) $A\cdot(B\cdot C) = (A\cdot B)\cdot C$

(v) $(A\cdot B)^T = B^T\cdot A^T$

Beweis: direkt (alles ausschreiben!)

4.3.5 Die Einheitsmatrix und die Nullmatrix

$id: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ $(n\in\mathbb{N})$ ist die Abbildung $id(x_1,\dots,x_n) = (x_1,\dots,x_n)$. Die Matrix von id nennt man die Einheitsmatrix.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\substack{\shortparallel \\ I_n}} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$I_n \leftarrow$ die Einheitsmatrix der Größe $n \times n$.

Mit anderen Worten: $I_n = (\delta_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$

mit $\delta_{ij} := \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & \text{bei } i \neq j. \end{cases}$

Das δ_{ij} nennt man Kronecker-Delta.

Wir bemerken dass für alle $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, die Gleichungen $I_m \cdot A = A = A \cdot I_n$ erfüllt sind.

Eine Matrix, deren alle Komponenten gleich 0 sind, nennt man die Nullmatrix.

Bezeichnung: $O \in \mathbb{K}^{m \times n}$.

$\boxed{4.3.6.}$ Invertierbarkeit von Matrizen

Sei $n \in \mathbb{N}$. Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ heißt invertierbar bzw. regulär, wenn eine Matrix $B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ existiert, mit

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n.$$

Ist A invertierbar, so ist das B wie oben eindeutig bestimmt; es heißt die inverse Matrix von A und wird als $B = A^{-1}$ bezeichnet.

Wieso ist A^{-1} eindeutig? Aufgabe (vgl. den Abschnitt zu Gruppen).

Prop Sei $F: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ lineare Abbildung, die durch ihre Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ als $F(x) = Ax$ gegeben ist. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

(i) F invertierbar (d.h. bijektiv)

(ii) A invertierbar.

Darüber hinaus: sind (i) und (ii) erfüllt, so ist $F^{-1}(x) = A^{-1}x$, d.h. A^{-1} ist die Matrix von F^{-1}.

Beweis: folgt aus 4.3.2 und 4.3.3. $\square$

4.3.7. Eigenschaften der inversen Matrix

Prop Seien $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ invertierbar ($n \in \mathbb{N}$). Dann sind A^{-1}, A^T und AB ebenfalls invertierbar. Darüber hinaus gilt:

$$(A^{-1})^{-1} = A$$
$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$
$$(A\cdot B)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1}$$

Beweis: Aufgabe.

4.3.8. Allgemeine lineare Gruppe

Sei $GL_n(\mathbb{K}) := \{A \in \mathbb{K}^{n\times n} : A \text{ invertierbar}\}$.

(GL steht für "general linear" engl.)

Prop Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $GL_n(\mathbb{K})$ bzgl. des Produkts der Matrizen eine Gruppe. Für jedes $n \geq 2$ ist die Gruppe $GL_n(\mathbb{K})$ nicht kommutativ.

Beweis: Die Behauptung folgt aus den vorigen Beobachtungen.

4.3.9 Elementartransformationen der LGS in der Sprache der Matrizen

Man betrachte ein LGS in den Unbekannten $x = (x_j)_{j=1,\dots,n}$:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad (i = 1,\dots,m)$$

mit $a_{ij} \in \mathbb{K}$ und $b_i \in \mathbb{K}$. In der Matrixform kann das LGS als $Ax = b$ formuliert werden, mit $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ und $b = (b_i)_{i=1,\dots,m}$. Z. B.

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 = b_2 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

Wir wollen die ET vom Typ 1, 2 und 3 mit Matrizen formulieren. Format:

$$Ax = b \iff TAx = Tb.$$

Hierbei ist $T \in \mathbb{K}^{n \times n}$, die eine ET darstellt.

Z. B.: bei einem 2×2 System, die beiden Gleichungen vertauschen:

$$T \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_2 \\ b_1 \end{bmatrix} \text{ gilt für } T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$