Bsp $n=2$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} \Delta_{11} & -\Delta_{21} \\ -\Delta_{12} & \Delta_{22} \end{bmatrix}$$

Für eine Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \in \mathbb{K}^{n\times n}$

heißt die Matrix $A^{\#} = (a^{\#}_{ij})_{i,j=1\dots n} \in \mathbb{K}^{n\times n}$

mit $a^{\#}_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{j,i} = (-1)^{i+j} \det(A'_{j,i})$

$\quad\quad\quad\quad\not\Leftarrow$

oben definiert

die <u>komplementäre Matrix</u> zur Matrix A.

Wir haben gezeigt, dass $A^{\#}A = \det(A)\cdot I$ gilt.

Insbesondere, wenn A invertierbar ist, dann

ist $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^{\#}$.

Analog zu $A^{\#}A = \det(A)\cdot I$ gilt auch

$AA^{\#} = \det(A)\cdot I$.

5.3.4 Rang und Minoren

Sei $A = (a_{ij})_{\substack{i=1\dots m\\ j=1\dots n}} \in \mathbb{K}^{m\times n}$. Für $I = \{i_1,\dots,i_k\} \subseteq \{1,\dots m\}$

mit $1 \le i_1 < \dots < i_k \le m$ und $J = \{j_1,\dots,j_k\} \subseteq \{1,\dots,n\}$
$1 \le j_1 < \dots < j_k \le n$

ist $A_{I,J} := \begin{bmatrix} a_{i_1,j_1} & \cdots & a_{i_1,j_k} \\ & \vdots & \\ a_{i_k,j_1} & \cdots & a_{i_k,j_k} \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{k\times k}$ mit eine Untermatrix von A der Größe $k \times k$.

$\det(A_{I,J})$ nennt man ein $k \times k$ Minor von A

Bsp. $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$ $I = \{1,2\} \subseteq \{1,2\}$ $\quad i_1 = 1,\ i_2 = 2$

$J = \{1,3\} \subseteq \{1,2,3\}$ $\quad j_1 = 1,\ j_2 = 3$

$$A_{I,J} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{bmatrix} \qquad \det(A_{I,J}) = \underbrace{a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13}}_{\text{ein } 2\times 2 \text{ Minor}}$$

Theorem Sei $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ $(m, n \in \mathbb{N})$ und sei $r \in \mathbb{N}$ Zahl mit $r \leq \min\{m,n\}$. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

(i) $\operatorname{rang}(A) \geq r$

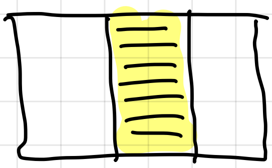
(ii) mindestens ein $r \times r$ Minor ist ungleich 0.

Beweis: Neben der Bezeichnung $A_{I,J}$ nutzen wir auch $A_{*,J}$ und $A_{I,*}$:

$$A_{*,J} = A_{\{1,\dots,m\},J} = (a_{i j_s})_{\substack{i=1..m \\ s=1..r}} \quad \text{mit } J = \{j_1, \dots, j_r\}$$

und $$A_{I,*} = (a_{i_s, j})_{\substack{s=1,\dots,r \\ j=1,\dots,n}} \quad \text{mit } I = \{i_1, \dots, i_r\}.$$

(i) $\Rightarrow$ es gibt r linear unabhängige Spalten von A. Sei also J die r-elementige Indexmenge dieser Spalten. $\Rightarrow \operatorname{rang}(A_{*,J}) = r$



$\Rightarrow$ Zeilen von $A_{*,J}$ spannen $\mathbb{K}^r$ auf.

$\Rightarrow$ Unter den Zeilen von $A_{*,J}$ findet man eine Basis von $\mathbb{K}^r$; sei I die Indexmenge einer solchen Basis.

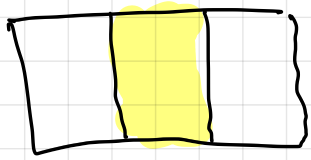
$\Rightarrow \operatorname{rang}(A_{I,J}) = r \quad \Rightarrow \det(A_{I,J}) \neq 0.$

(ii) $\Rightarrow$ $\det(A_{I,J}) \neq 0$ für gewisse $I \subseteq \{1,\dots,m\}$ und $J \subseteq \{1,\dots,n\}$ mit $|I| = |J| = r$.

$\Rightarrow$ Die Zeilen von $A_{I,J}$ spannen $\mathbb{K}^r$ auf.

$\Rightarrow$ Die Zeilen von $A_{*,J}$ spannen K^r auf.

$\Rightarrow$ Die Spalten von $A_{*,J}$ spannen einen r-dimensionalen Raum auf.



$|J|=r$

$\Rightarrow$ Die Spalten von A spannen einen Raum auf, dessen Dimension mindestens r ist.

$\Rightarrow$ $\operatorname{rang}(A) \geq r$.

$$\begin{array}{cc} I=\{1,3\} & \begin{array}{c} \rightarrow \\ \\ \rightarrow \end{array}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \\ & \begin{array}{ccc} & \uparrow & \uparrow \end{array} \\ & J=\{2,3\} \end{array}$$

$\square$

Bsp

$$\left\{ A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \in K^{2\times 3} : \underbrace{\operatorname{rang}(A) \leq 1} \right\}$$

$\Updownarrow$

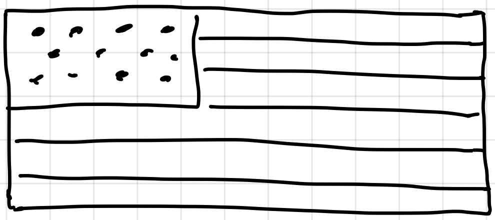
Alle 2×2 Minoren von A sind Null:

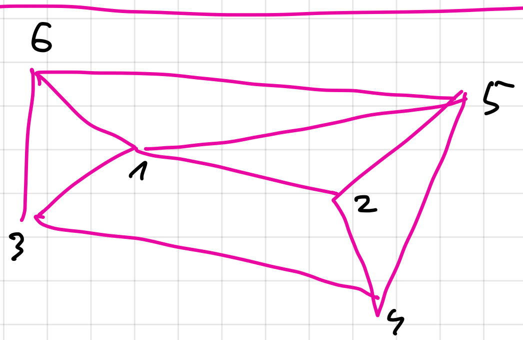
$a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 0,$

$a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13} = 0,$

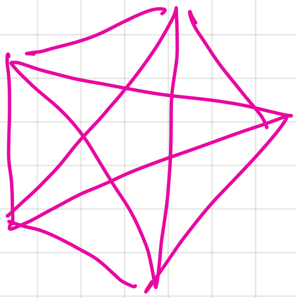
$a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13} = 0.$

die Menge ist eine sogenannte algebraische Varietät.





$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 4 & -1 & -1 & & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & & -1 & -1 & \\ 3 & -1 & & 3 & -1 & & -1 \\ 4 & & -1 & -1 & 3 & -1 & \\ 5 & -1 & -1 & & -1 & 4 & -1 \\ 6 & -1 & & -1 & & -1 & 3 \end{array}$$

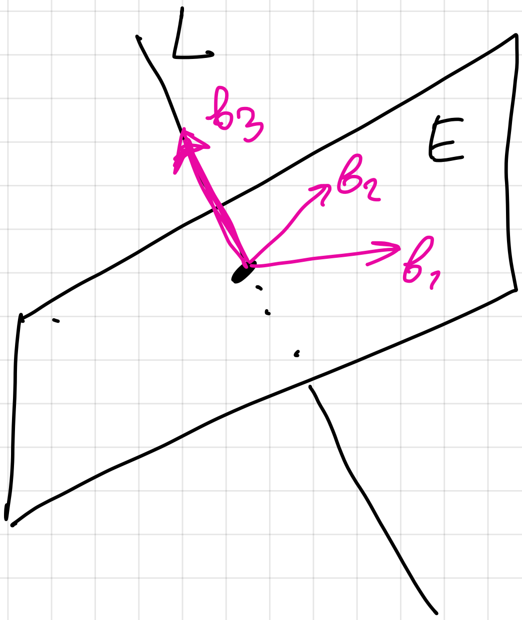


K_n hat n^{n-2} Spannbäume

6 Eigenwerte und Eigenvektoren

6.1 Grundlagen

6.1.1 Beispiele und Motivation



Spiegelung an einer Ebene E

$F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

Wir können F in der Basis $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ darstellen

$$F(b_1) = b_1$$
$$F(b_2) = b_2$$
$$F(b_3) = -b_3$$

$$F_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \leftarrow \text{Diagonalmatrix}$$

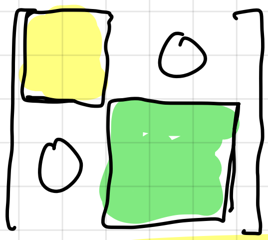
$$\left.\begin{aligned} F(b_1) &= 1\cdot b_1 \\ F(b_2) &= 1\cdot b_2 \\ F(b_3) &= (-1)\cdot b_3 \end{aligned}\right\}$$

← b_1, b_2, b_3 sind die sogenannten Eigenvektoren von F zu den Eigenwerten jeweils 1, 1 und -1.

$$F_{\mathcal{B}} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ -\alpha_3 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_1 \mapsto \alpha_1$$
$$\alpha_2 \mapsto \alpha_2$$
$$\alpha_3 \mapsto -\alpha_3$$

Wenn keine Basis existiert in der eine lineare Abbildung $F: V \to V$ durch eine Diagonalmatrix dargestellt ist, will man mindestens eine blockdiagonale Matrix haben.



6.1.2 Definition von Eigenwerten und Eigenvektoren

Sei V Vektorraum über $\mathbb{K}$ und sei $F: V \to V$ linear. Ein Paar (v, λ) mit $v \in V\setminus\{0\}$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ heißt Eigenpaar von F, wenn $F(v) = \lambda v$ erfüllt ist. Hierbei heißt λ der Eigenwert zum Eigenvektor v und v heißt der Eigenvektor zum Eigenwert λ.

Die Aufgabe der Bestimmung von Eigenpaaren nennt man die Eigenwertaufgabe.

Die oben eingeführten Begriffe können auch für Matrizen $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ $(n \in \mathbb{N})$ benutzt werden,

indem man A mit der Abbildung
$F(x) = Ax$ identifiziert.

Bem In der numerischen linearen Algebra beschäftigt man sich vorrangig mit zwei Aufgaben: $Ax = b$ (LGS lösen)

$Av = \lambda v$ (Eigenwertaufgabe)