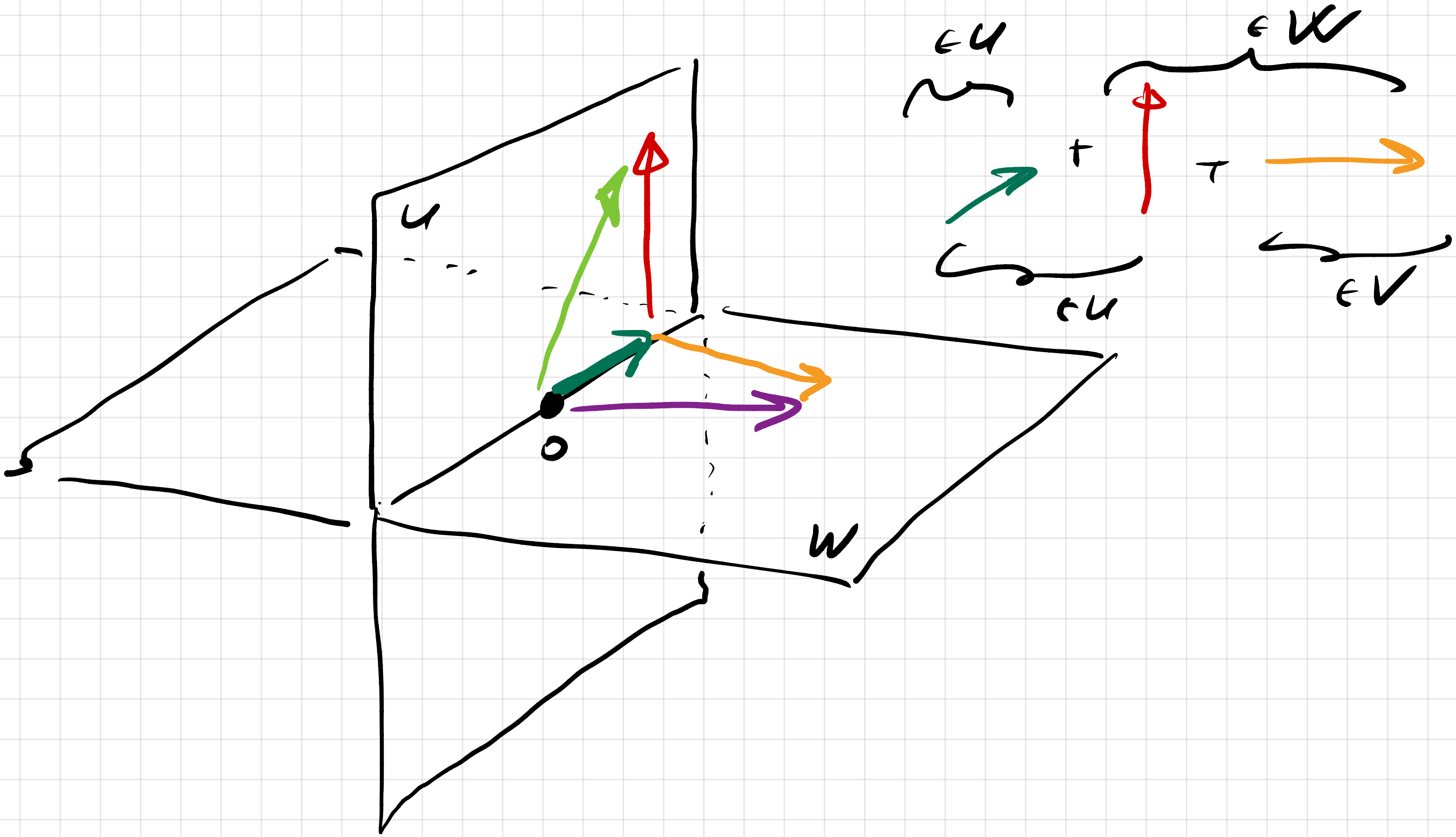


Proposition Seien U und W Untervektorräume eines VR V.
Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

(i) Jeder Vektor aus $U+W$ lässt sich eindeutig als $u+w$ mit $u \in U$ und $w \in W$ darstellen.

(ii) $U \cap W = \{0\}$

Beweis: (ii) $\Rightarrow$ (i): Sei $U \cap W = \{0\}$. Wir betrachten

Darstellungen $u+w$ und $u'+w'$ mit $u, u' \in U$ und $w, w' \in W$ von einem und demselben Vektor in $U+W$, d.h. $u+w = u'+w'$!

$$\Rightarrow \underbrace{u-u'}_{\in U} = \underbrace{w'-w}_{\in W}$$

$$\boxed{\begin{aligned} u+w &= u'+w' \\ u-u'+w &= w' \\ u-u' &= w'-w \end{aligned}}$$

$$\Downarrow$$

$$u-u' = w'-w \in U \cap W = \{0\}$$

$$\Downarrow$$

$$u-u' = w'-w = 0$$

$$\Downarrow$$

$u = u'$ und $w = w'$.

<u>nicht (ii) $\Rightarrow$ nicht (i):</u> Sei $U \cap W \neq \{0\}$, d.h.

$U \cap W$ enthält einen Vektor $a \in (U \cap W) \setminus \{0\}$.

Dann gilt $a = u + w = u' + w'$ mit

und $u = a \in U$ $\quad u' = 0 \in U$

$w = 0 \in W$ $\quad w' = a \in W$.

$\Rightarrow$ a hat keine eindeutige Darstellung.

$\square$

Def. Die Summe $U+W$ von Untervektorräumen, die $U \cap W = \{0\}$ erfüllen, nennt man <u>direkt</u>.

Bezeichnung: $U + W =: U \oplus W$.

Wie definiert man passend die direkte Summe von mehr als zwei Untervektorräumen?

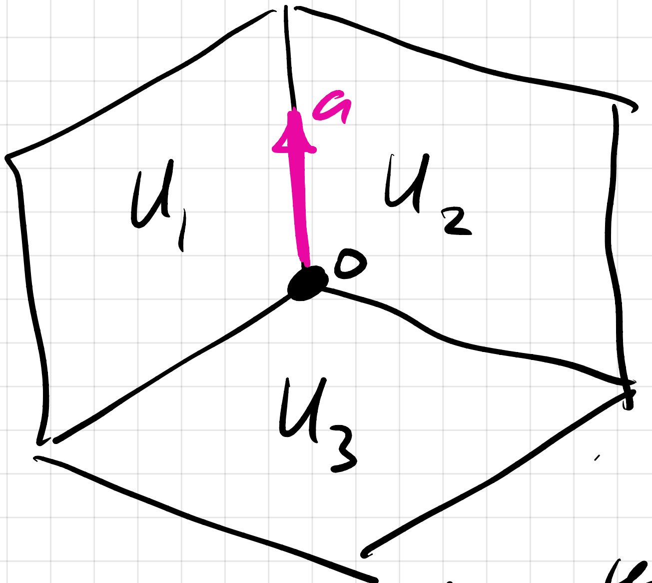
Def. Wir nennen die Summe $U_1 + \dots + U_k$

$$U_1 + \dots + U_k := \{u_1 + \dots + u_k : u_i \in U_i, i = 1, \dots, k\}$$

von Untervektorräumen $U_1, \dots, U_k$ eines Vektorraums V direkt, wenn jeder Vektor in $U_1 + \dots + U_k$ eindeutig als $u_1 + \dots + u_k$ mit $u_i \in U_i$ dargestellt ist.

Bezeichnung: $U_1 \oplus \dots \oplus U_k$

Bsp.



$\mathbb{R}^3$

$$U_1 + U_2 + U_3 = \mathbb{R}^3$$

$$U_1 \cap U_2 \cap U_3 = \{0\}$$

$$a = \underset{\in U_1}{a} + \underset{\in U_2}{0} + \underset{\in U_3}{0}$$

$$= \underset{U_1}{0} + \underset{U_2}{a} + \underset{U_3}{0}$$

Thm Seien $U_1, \dots, U_k$ Untervektorräume eines endlich dimensionalen Vektorraums V. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

(i) Die Summe $U_1 + \dots + U_k$ ist direkt.

(ii) Bei <u>jeder</u> Wahl von Basen $\mathcal{B}_i$ von U_i $(i = 1, \dots, k)$ ist das System $\underbrace{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_k}_{k \text{ Basen zusammengefügt}}$ eine Basis von $U_1 + \dots + U_k$.

(iii) Bei <u>einer</u> Wahl von Basen $\mathcal{B}_i$ von U_i $(i = 1, \dots, k)$ ist das System $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_k$ eine Basis von $U_1 + \dots + U_k$

(iv) $\dim(U_1 + \dots + U_k) = \dim(U_1) + \dots + \dim(U_k)$.

Die Dimensionsformel für die Summe von zwei Untervektorräumen

Theorem Seien U, W Untervektorräume eines endlich-dimensionalen Vektorraums V.

$$\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$$

$\dim(U)$
$\dim(W)$
$\dim(U+W)$
$\dim(U \cap W)$

Beweis: Wir fixieren eine Basis $\mathcal{C}$ von $U \cap W$ und lassen diese zu einer Basis $\mathcal{A}, \mathcal{C}$ von U und einer Basis $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ von W erweitern. Es reicht nun zu zeigen, dass $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ eine Basis von $U+W$ bildet:

$$\underbrace{\dim(U+W)}_{\overset{\shortparallel}{|\mathcal{A}|+|\mathcal{B}|+|\mathcal{C}|}} = \underbrace{\dim(U)}_{|\mathcal{A}|+|\mathcal{C}|} + \underbrace{\dim(W)}_{|\mathcal{B}|+|\mathcal{C}|} - \underbrace{\dim(U \cap W)}_{|\mathcal{C}|}$$

Durch $|\cdot|$ bezeichnen wir die Länge von Basen.

$$U + W = \text{lin}(\mathcal{A}, \mathcal{C}) + \text{lin}(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \text{lin}(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C})$$

$\Longrightarrow$ $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ erzeugend $U + W$.

Nun zeigen wir die lineare Unabhängigkeit von $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$.

Sei

$$\mathcal{A} = (a_1, \dots, a_m)$$

$$\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$$

$$\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_k).$$

Wir zeigen

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_i + \sum_{j=1}^{n} \beta_j b_j + \sum_{s=1}^{k} \gamma_s c_s = 0 \quad (*)$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha_i = 0 \quad \beta_j = 0 \quad \gamma_s = 0$$

$$(i = 1, \dots, m) \quad (j = 1, \dots, n) \quad (s = 1, \dots, k)$$

$$(*) \Rightarrow \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \beta_j b_j + \sum_{s=1}^{k} \gamma_s c_s}_{\in W} = \underbrace{-\sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_i}_{\in U}$$

$\Rightarrow$ D.h. sowohl die linke als auch die rechte Seite gehören zu $U \cap W$ und lassen sich dadurch als $\sum_{t=1}^{k} \delta_t c_t$ darstellen.

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{j=1}^{n} \beta_j b_j + \sum_{s=1}^{k} \gamma_s c_s = -\sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_i = \sum_{t=1}^{k} \delta_t c_t}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_i + \sum_{t=1}^{k} \delta_t c_t = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha_i = 0 \quad (i = 1, \dots m)$$

A, C linear unabhängig

$$\delta_t = 0 \quad (t = 1, \dots k)$$

$\square$ reduziert sich somit zu

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_j b_j + \sum_{s=1}^{k} \gamma_s c_s = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \beta_j = 0 \quad (j = 1, \dots n)$$

B, C lin. unabhängig

$$\gamma_s = 0 \quad (s = 1, \dots k)$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha_i = 0 \quad (i = 1, \dots m)$$

$$\beta_j = 0 \quad (j = 1, \dots n)$$

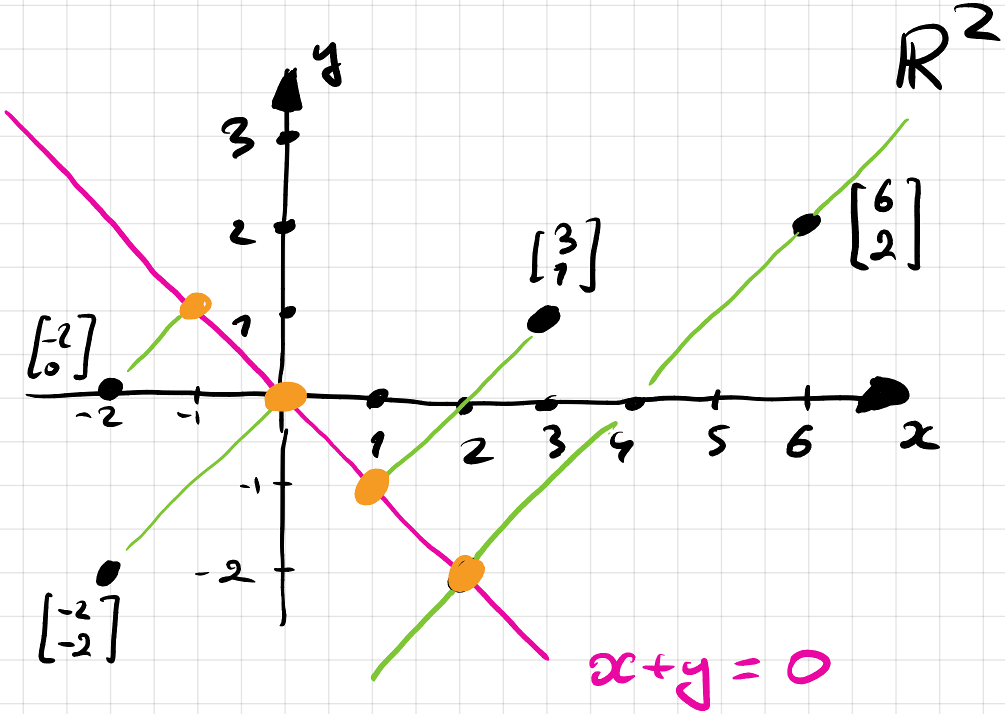
$$\gamma_s = 0 \quad (s = 1, \dots k)$$

Also ist A, B, C linear unabhängig. $\square$

3 Lineare Abbildungen

3.1 Erste Beispiele

Bsp



In Richtung $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ auf die Gerade $x+y=0$ projizieren.

Wir ziehen durch $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ eine Gerade $\left\{\begin{bmatrix}x+t\\y+t\end{bmatrix} : t \in \mathbb{R}\right\}$

und ordnen dem $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ den Schnittpunkt dieser Geraden und der Geraden, die durch $x+y=0$ gegeben ist, zu.

Die Abbildung nennen wir $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$F: \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto ???$$

$$(x+t)+(y+t)=0$$
$$\Downarrow$$
$$x+y+2t=0$$
$$\Downarrow$$
$$2t=-(x+y)$$
$$t=-\frac{x+y}{2}$$

$$\Rightarrow \quad F: \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} x-\frac{x+y}{2} \\ y-\frac{x+y}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y \\ -\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y \end{bmatrix}$$