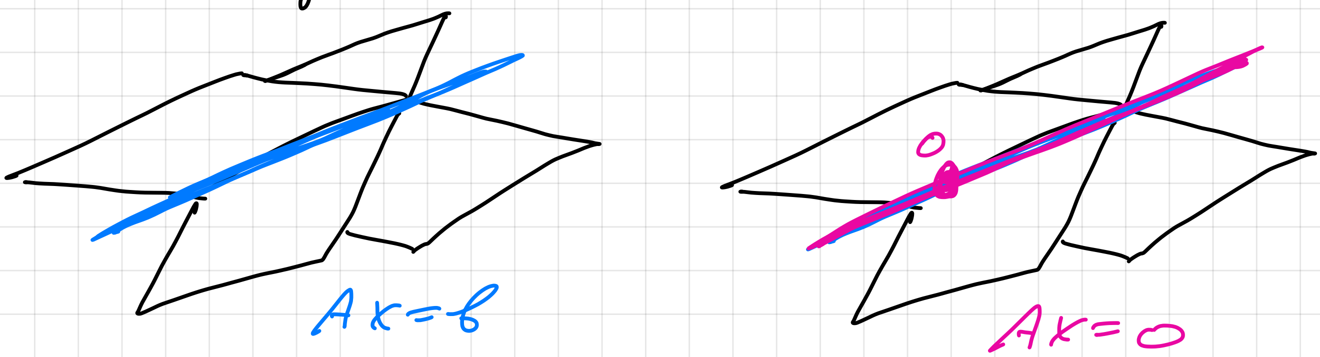
eine Lösung

Die vorige Proposition besagt:

Eine Lösung von $Ax=b$ plus alle Lösungen von $Ax=0$ ergeben die Lösungsmenge von $Ax=b$.



4.4.5. Affine Unterräume

Ein affiner Unterraum eines VR V ist die leere Menge oder eine Verschiebung eines Untervektorraums von V.

Einer Menge $X \subseteq V$ ordnen wir die Differenzenmenge von X zu; das ist $X - X := \{x' - x'' : x', x'' \in X\}$

Prop Sei X ein nichtleerer affiner Untervektorraum eines VR V. Dann ist $X-X$ ein UVR von V.

Darüber hinaus gilt $X - p = X - X$ für alle $p \in X$

Beweis: X ist eine Verschiebung eines UVR U von V, d.h. $X = a + U$ für ein $a \in V$. Also ist

$$\begin{aligned} X - X &= (a+U) - (a+U) \\ &= \{(a+u') - (a+u'') : u', u'' \in U\} \\ &= \{u' - u'' : u', u'' \in U\} = U. \end{aligned}$$

da U ein UVR ist.

Sei $p \in X$ beliebig. Dann gilt: $X-p = (a+U)-p$

$$= U + \underbrace{(\underset{X}{\overset{\cap}{a}} - \underset{X}{\overset{\cap}{p}})}_{\in\, X-X=U} = U \qquad \square$$

da $a-p \in U$ ist und U ein UVR von V ist.

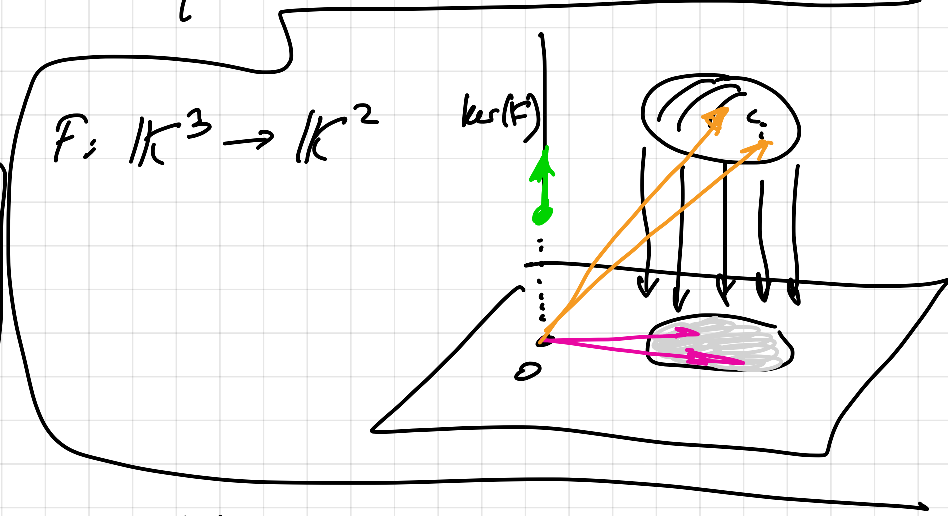
Durch die vorige Proposition sind wir berechtigt, die Dimension $\dim(X)$ eines affinen UVR X eines VRs V wie folgt einzuführen:

$$\dim(X) := \begin{cases} -1 & \text{, bei } X = \emptyset \\ \dim(X-X) & \text{, bei } X \neq \emptyset \end{cases}$$

4.4.6. Der Rangsatz

$$[\;]\quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+2y+z \\ x+y+z \end{bmatrix}$$

$$[\;]\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Thm Sei $F: V \to W$ lineare Abbildung auf einem endlich-dimensionalen VR V. Dann gilt:

$$\dim(V) = \dim(\operatorname{im}(F)) + \dim(\ker(F)).$$

__Beweis:__ Sei $v_1, \dots, v_k$ eine Basis von $\ker(F)$.

Sei $w_1, \dots, w_r$ eine Basis von $\operatorname{im}(F)$, d.h. unter anderem, man hat $F(u_1) = w_1, \dots, F(u_r) = w_r$ für gewisse $u_1, \dots, u_r \in V$. Es reicht zu zeigen, dass $u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_k$ eine Basis von V bilden. Wir zeigen zuerst, dass dieses System erzeugend für V ist. Sei $v \in V$.

Dann ist $F(v) \in \operatorname{im}(F)$, sodass $F(v)$ als

$$F(v) = \beta_1 w_1 + \dots + \beta_r w_r \quad \text{mit gewissen } \beta_1, \dots, \beta_r \in \mathbb{K}$$

darstellbar ist.

Sei $v' = \beta_1 u_1 + \dots + \beta_r u_r$. Für v' gilt $F(v') =$

$$= F(\beta_1 u_1 + \dots + \beta_r u_r) = \beta_1 F(u_1) + \dots + \beta_r F(u_r)$$
$$= \beta_1 w_1 + \dots + \beta_r w_r = F(v) \Rightarrow$$

$$F(v - v') = 0 \Rightarrow v - v' \in \ker(F) \Rightarrow$$
$v - v' = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k$ für gewisse $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}$

$$\Rightarrow v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_r u_r.$$

$\Rightarrow$ $v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_r$ erzeugend für V.

Wir zeigen noch die lineare Unabhängigkeit. Angenommen, $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_r \in \mathbb{K}$ sind Skalare mit

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_r u_r = 0.$$

$$\Rightarrow F(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_r u_r) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_1 \underbrace{F(v_1)}_{=0} + \dots + \alpha_k \underbrace{F(v_k)}_{=0} + \beta_1 F(u_1) + \dots + \beta_r F(u_r) = 0$$

$$\Rightarrow \beta_1 w_1 + \dots + \beta_r w_r = 0$$

$\Rightarrow \beta_1 = \dots = \beta_r = 0$, da $w_1, \dots, w_r$ linear unabhängig ist.

$$\Rightarrow \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0$$

$\Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$, da $v_1, \dots, v_k$ linear unabhängig sind. $\square$

Bsp

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad w_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{Basis von im}(A)}$$

$\ker(F)$:
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} (-1).$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ \quad -y - 2z = 0 \end{cases} (+2). \Leftrightarrow \begin{cases} x \quad - z = 0 \\ -y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ker(F) = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ -2z \\ z \end{pmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{lin}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nach dem Argument aus dem Beweis vom Rangsatz ist v_1, u_1, u_2 eine Basis von $\mathbb{R}^3$.

$\boxed{4.4.7.}$ Die Dimension der Faser

Korollar Sei $F: V \to W$ lineare Abbildung auf einem endlich-dimensionalen VR V. Sei $w \in W$ mit $F^{-1}(w) \neq \emptyset$. Dann gilt: $\dim F^{-1}(w) = \dim(V) - \underbrace{\dim(\operatorname{im}(F))}_{\text{der Rang von } F}$.

<u>Beweis:</u> Aufgabe.

$\boxed{4.4.8.}$ Klassifikation endlichdimensionaler Vektorräume

Kor Seien V und W endlichdimensionale Vektorräume über einem Körper $\mathbb{K}$. Dann existiert eine bijektive lineare Abbildung von $V \to W$ genau dann, wenn $\dim(V) = \dim(W)$ gilt. <u>Beweis:</u> Aufgabe.

$\boxed{4.4.9}$ Injektivität und Surjektivität von linearen Abbildungen

Thm Seien V und W endlichdimensionale Vektorräume über $\mathbb{K}$ mit $\dim(V) = \dim(W)$. Sei $F: V \to W$ lineare Abbildung. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

(i) F injektiv
(ii) F surjektiv
(iii) F bijektiv
(iv) $\operatorname{rang}(F) = n$, mit $n := \dim(V) = \dim(W)$.

<u>Beweis:</u> (i) $\Rightarrow$ (iv): Sei F injektiv. Dann ist $\ker(F) = \{0\} \Rightarrow$
$\dim(\ker(F)) = 0 \Rightarrow \operatorname{rang}(F) = \dim(\operatorname{im}(F)) \underset{\text{Rangsatz}}{=} \underbrace{\dim(V)}_{=n} - \underbrace{\dim(\ker(F))}_{=0} = n$.

(iv) $\Rightarrow$ (ii): Sei $\operatorname{rang}(F) = n$. Dann ist $\dim(\operatorname{im}(F)) = n = \dim(W)$
$\Rightarrow \operatorname{im}(F) = W \Leftrightarrow F$ surjektiv.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Sei F surjektiv. $\Rightarrow \operatorname{im}(F) = W \Rightarrow \dim(\operatorname{im}(F)) = \underbrace{\dim(W)}_{=n}$
$\Rightarrow \dim(\ker(F)) \underset{\text{Rangsatz}}{=} \dim(V) - \dim(\operatorname{im}(F)) = n - n = 0 \Rightarrow \ker(F) = \{0\}$.

$\Rightarrow F$ injektiv. Da F auch surjektiv ist, folgt, dass F bijektiv ist.

(iii) $\Rightarrow$ (i) ist trivial. $\square$

Bemerkung Bijektivität $\Longleftrightarrow$ Invertierbarkeit.

Das heißt, dass voriges Theorem ein Kriterium für Invertierbarkeit von Matrizen impliziert: $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ invertierbar $\Longleftrightarrow$ $\operatorname{rang}(A) = n$. Außerdem gilt nach dem Rangsatz:

$$\operatorname{rang}(A) = n \Longleftrightarrow \ker(A) = \{0\}.$$

(Man beachte A hat Größe $n \times n$.)

$\boxed{4.4.10.}$ Verfahren zur Invertierung von Matrizen

Gegeben: $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$

Rechenaufgabe: testen, ob A invertierbar ist, und ggf. A^{-1} ausrechnen.

Diese Aufgabe können wir mit Hilfe von Gauß-Jordan lösen.

Wir haben $x \in \mathbb{K}^n$ (die Eingabe für A; n Variablen) und $y = Ax$ (die Rückgabe für A, n Variablen).

Z.B.
$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}}_{y} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{x} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = y_1 \\ x_1 - x_2 = y_2 \end{cases}$$

Invertieren heißt, von y zu x zu kommen.

$Ax = y$ bringt uns von x zu y. Wir wollen dieses Gleichungssystem nach den x-Variablen lösen. Die rechte Seite dieses Systems enthält y-Variablen. Das hindert uns aber nicht daran, das Gauß-Jordan-Verfahren dafür zu nutzen.

Gauß- Jordan

```
A = matrix(QQ,[(1,2,3),(1,-1,1),(2,1,4)])
print(A)
I = identity_matrix(QQ,3)
print()
print(I)
M = block_matrix([[A,I]])
print()
print(M)
print()
M.echelon_form()
```

```
[ 1  2  3]
[ 1 -1  1]
[ 2  1  4]
```

$= A$

```
[1 0 0]
[0 1 0]
[0 0 1]
```

$= I$

```
[ 1  2  3| 1  0  0]
[ 1 -1  1| 0  1  0]
[ 2  1  4| 0  0  1]
```

$= [A \mid I]$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = y_1 + 0\cdot y_2 + 0\cdot y_3 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0\cdot y_1 + y_2 + 0\cdot y_3 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 0\cdot y_1 + 0\cdot y_2 + y_3 \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$Ax = y$

$\Updownarrow$ Gauß-Jordan

```
[   1    0  5/3|    0  1/3  1/3]
[   0    1  2/3|    0 -2/3  1/3]
[   0    0    0|    1    1   -1]
```

$$\begin{cases} x_1 + 5/3\, x_3 = \frac{1}{3} y_2 + \frac{1}{3} y_3 \\ x_2 + 2/3\, x_3 = -\frac{2}{3} y_2 + \frac{1}{3} y_3 \\ 0 = y_1 + y_2 - y_3 \end{cases}$$

A nicht invertierbar; $\operatorname{rang}(A) = 2 < 3$.

$\operatorname{rang}(A) = 2 \iff \operatorname{im}(A)$ ist zwei-dimensional, aber $\mathbb{R}^3$ ist drei-dimensional.

$x \mapsto Ax$ ist nicht injektiv, denn der Kern von A ist ein-dimensional (nach dem Rangsatz).

Wir können auch nach einer Basis von $\operatorname{im}(A)$ und nach einer Basis von $\ker(A)$ fragen.

$$\ker(A) = \{x : Ax = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 5/3\, x_3 = 0,\ x_2 + 2/3\, x_3 = 0\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} -5/3\, x_3 \\ -2/3\, x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} -5/3 \\ -2/3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

Basis des Kerns.

$$A = \begin{bmatrix} | & | & | \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}$$

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 = 0$$

$$\iff \begin{cases} x_1 + 5/3\, x_3 = 0 \\ x_2 + 2/3\, x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{x_3 = -1} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = +5/3 \\ x_2 = 2/3 \end{matrix} \Rightarrow \frac{5}{3} a_1 + \frac{2}{3} a_2 = a_3$$

bei $x_3 = 0$ nur $x_1 = x_2 = 0$ die Lösung. D.h.

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0.$$

D.h., a_1, a_2 linear unabhängig.

Fazit: $\operatorname{im}(A) = \operatorname{lin}(a_1, a_2) = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Check: $\frac{5}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Man kann noch mehr sehen:

$$\{y \in \mathbb{R}^3 : y_1 + y_2 - y_3 = 0\} = \operatorname{im}(A)$$

$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \notin \operatorname{im}(A) \qquad 0 \neq y_1 + y_2 - y_3$ bei $\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix} \in \operatorname{im}(A) \qquad 0 = y_1 + y_2 - y_3$ bei $\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}$.

Was ist ein x mit $Ax = \begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}$?

$$Ax = \begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix} \iff \begin{cases} x_1 + 5/3\, x_3 = \frac{1}{3} y_2 + \frac{1}{3} y_3 \\ x_2 + 2/3\, x_3 = -\frac{2}{3} y_2 + \frac{1}{3} y_3 \\ 0 = y_1 + y_2 - y_3 \end{cases} \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} y_1 &= 2 \\ y_2 &= 1 \\ y_3 &= 3, \end{aligned}$$

d.h.
$$\begin{cases} x_1 + \frac{5}{3} x_3 = 1\frac{1}{3} \\ x_2 + \frac{2}{3} x_3 = \frac{1}{3} \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$Ax = \begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}$ gilt z. B. für

$$x = \begin{bmatrix}1\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}\\ 0\end{bmatrix}$$