4.3 Die Leibnitz-Formel

Wir sind auf der Suche nach einer Formel für die Determinante.

Gegeben: $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n} = \begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{n \times n}$

Die Formel für det(A):

$$\det(A) = \det(a_1, \dots, a_n)$$

$$= \det\left(\sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1,1} e_{i_1}, \dots\dots, \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_n,n} e_{i_n} \right)$$

$$\overset{(D1)}{=} \sum_{i_1,\dots,i_n=1}^{n} a_{i_1,1} a_{i_2,2} \cdot \dots \cdot a_{i_n,n} \underbrace{\det(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n})}_{\substack{=0, \text{ wenn unter den Indizes} \\ i_1,\dots,i_n \text{ mindestens zwei} \\ \text{gleich gesetzt sind}}}$$

Es reicht, die Summe auf die $i_1, \ldots, i_n$ einzuschränken, bei denen $i_1, \ldots, i_n$ die n Zahlen von $1, \ldots, n$ sind (in irgendeiner Reihenfolge). Das entspricht einer Permutation. Wir bezeichnen als S_n die Menge aller Permutationen auf $\{1, \ldots, n\}$.

$$\Rightarrow \det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma(1),1} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma(n),n} \underbrace{\det(e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(n)})}_{= \operatorname{sign} \sigma}.$$

$$\Rightarrow \boxed{\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}\sigma \cdot a_{\sigma(1),1}\, a_{\sigma(2),2} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma(n),n}}$$

Das ist die Leibnitz-Formel.

Wir haben das Folgende gemacht:

(D1), (D2), (D3) $\Longrightarrow$ Leibnitz-Formel.

Um die Existenz und die Eindeutigkeit der Determinante nachzuweisen, müsste man noch die Rückrichtung zeigen:

(D1), (D2), (D3) $\Longleftarrow$ Leibnitz-Formel.

Was ist die Determinante der Transponierten Matrix?

$$
\begin{array}{c|ccccc|}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
\hline
1 & O & \boxed{O} & O & O & O \\
2 & O & O & O & \boxed{O} & O \\
3 & \boxed{O} & O & O & O & O \\
4 & O & O & \boxed{O} & O & O \\
5 & O & O & O & O & \boxed{O}
\end{array}
$$

$n=5$

$$\operatorname{sign}\sigma \; a_{\sigma(1),1}\, a_{\sigma(2),2}\, a_{\sigma(3),3}\, a_{\sigma(4),4}\, a_{\sigma(5),5}$$

$\sigma(1)=3 \quad \sigma(2)=1 \quad \sigma(3)=4 \quad \sigma(4)=2 \quad \sigma(5)=5$

3 1 4 2 5

1 3 4 2 5

1 2 4 3 5

1 2 3 4 5

$\operatorname{sign}\sigma = -1.$

Einer der 5! in der Leibnitz-Formel für $n=5$.

j	$\sigma(j)$
1	3
2	1
3	4
4	2
5	5

Spalte

i	$\sigma^{-1}(i)$
1	2
2	4
3	1
4	3
5	5

Den Term könnte man auch so schreiben

$$\operatorname{sign}\sigma \; a_{1,\sigma^{-1}(1)}\, a_{2,\sigma^{-1}(2)} \cdots a_{5,\sigma^{-1}(5)}$$

Was ist der Zusammenhang zwischen $\operatorname{sign}\sigma$ und $\operatorname{sign}\sigma^{-1}$?

Man hat $\operatorname{sign}\sigma = \operatorname{sign}\sigma^{-1}$.

Es gilt Folgendes:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign} \sigma^{-1} \cdot a_{1,\sigma^{-1}(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n,\sigma^{-1}(n)}.$$

1	1	1	2	2	3	3
2	2	3	1	3	1	2
3	3	2	3	1	2	1

1	1	1	2	3	2	3
2	2	3	1	1	3	2
3	3	2	3	2	1	1

$1 \longmapsto 2$

$2 \longmapsto 3$

$3 \longmapsto 1$

Wir nutzen die Substitution $\sigma^{-1} = \tau$

und erhalten

$$\boxed{\det(A) = \sum_{\tau \in S_n} \operatorname{sign}\tau \cdot a_{1,\tau(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n,\tau(n)}}$$

Es ist genauso wie die Leibnitz-Formel oben, nur sind die Rollen von Zeilen und Spalten vertauscht worden.

Also:

Korollar Für $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ gilt: $\det(A) = \det(A^T)$.

Bemerkung Das bedeutet insbesondere, dass alle Eigenschaften von A bzgl. der Spalten auch bzgl. der Zeilen gelten.

4.4 Cramersche Regel

Wir haben ein LGS $Ax = b$ der Größe $n \times n$ mit $A = (a_{ij})_{i,j=1..n} \in \mathbb{K}^{n \times n}$ und $b = (b_i)_{i=1..n}$ und wollen eine Formel für die Lösung $x = (x_j)_{j=1..n}$ herleiten, falls vorhanden.

Seien $a_1, ..., a_n$ die Spalten von A. Dann ist unser LGS als

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b$$

darstellbar.

$$\Rightarrow \det\left(\sum_{j=1}^{n} a_j x_j, a_2, ..., a_n\right) = \det(b, a_2, ..., a_n)$$

(D1)

$$\Longrightarrow \sum_{j=1}^{n} x_j \det(a_j, a_2, \ldots, a_n) = \det(b, a_2, \ldots, a_n).$$

(D2)

$$\Longrightarrow x_1 \det(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \det(b, a_2, \ldots, a_n)$$

$$\Longrightarrow x_1 \det(A) = \det(b, a_2, \ldots, a_n)$$

Wenn $\det(A) \neq 0$, dann ist

$$x_1 = \frac{\det(b, a_2, \ldots, a_n)}{\det(A)}$$

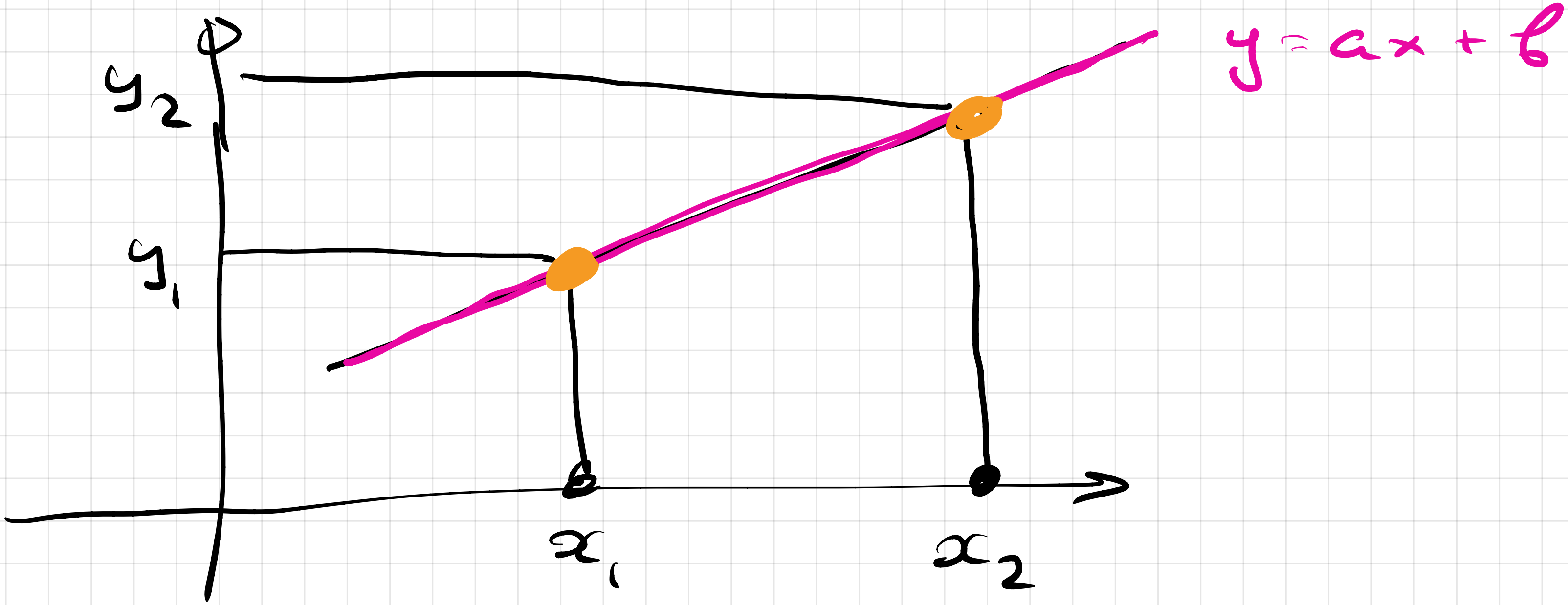
Allgemein hat man:

$$\boxed{x_j = \frac{\det(a_1, \ldots, a_{j-1}, b, a_{j+1}, \ldots, a_n)}{\det(A)}}$$

wenn $\det(A) \neq 0$ ist.

Diese Formel nennt man die Cramersche Regel.

Bsp.



$$\begin{cases} a x_1 + b = y_1 \\ a x_2 + b = y_2 \end{cases}$$

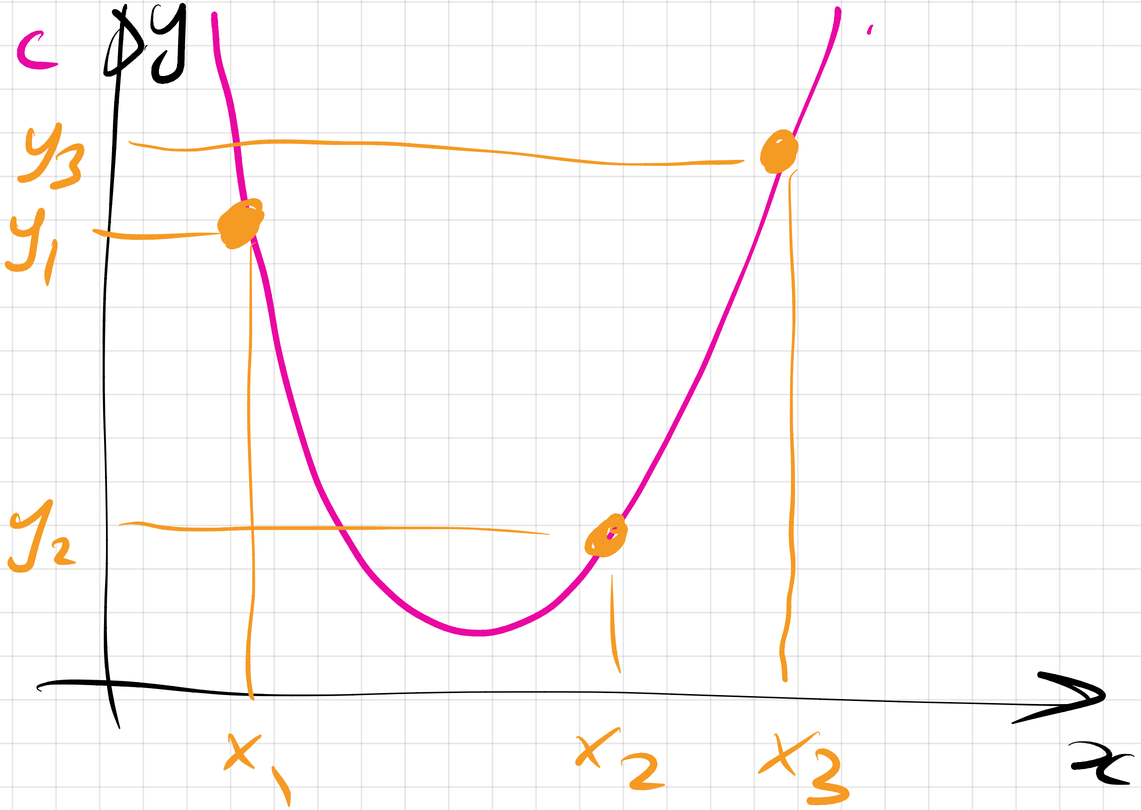
$$\begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$a = \frac{\det\begin{bmatrix} y_1 & 1 \\ y_2 & 1 \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{bmatrix}} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

$$b = \frac{\det\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{bmatrix}} = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1 - x_2}$$

Bsp

$y = ax^2 + bx + c$



Was sind a, b, c in Abhängigkeit von x_i, y_i $(i = 1, 2, 3)$?

$$\begin{cases} a x_1^2 + b x_1 + c = y_1 \\ a x_2^2 + b x_2 + c = y_2 \\ a x_3^2 + b x_3 + c = y_3 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$a = \frac{\det \begin{bmatrix} y_1 & x_1 & 1 \\ y_2 & x_2 & 1 \\ y_3 & x_3 & 1 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{bmatrix}} \qquad b = \frac{\det \begin{bmatrix} x_1^2 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & y_3 & 1 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{bmatrix}} \qquad c = \frac{\det \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 & y_1 \\ x_2^2 & x_2 & y_2 \\ x_3^2 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{bmatrix}}$$

Frage: Wir wollen die Bedingung $\det(A) = 0$ verstehen, denn $\det(A)$ steht im Nenner der Cramerschen Regel, sodass man in diesem Fall die Cramersche Regel nicht nutzen kann.

Proposition Für eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ gilt $\det(A) = 0$ genau dann wenn die Spalten von A linear abhängig sind.

Beweis: Sind die Spalten $a_1, \dots, a_n$ von A linear abhängig, so lässt sich eine der Spalten als Linearkombination der übrigen darstellen. Nach dem Vertauschen der Spalten können wir annehmen, dass a_1 eine Linearkombination von

$a_2, \ldots, a_n$ ist. Das Vertauschen der Spalten kann das Vorzeichen von $\det(A)$ ändern und ist daher irrelevant. Man hat also

$$a_1 = \sum_{i=2}^{n} \alpha_i a_i$$

für gewisse $\alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K$. Man hat somit

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \det(a_1, a_2, \ldots, a_n) \\
&= \det\Big(\sum_{i=2}^{n} \alpha_i a_i, a_2, \ldots, a_n\Big) \\
&\overset{(D1)}{=} \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \underbrace{\det(a_i, a_2, \ldots, a_n)}_{\overset{(D2)}{=} 0} = 0.
\end{aligned}$$

0, da man die Spalte a_i in der Determinante doppelt hat.

Betrachten wir nun den Fall der linear unabhängigen Spalten $a_1, \dots, a_n$. Wenn wir das Gauß-Verfahren auf $a_1, \dots, a_n$ ausführen (das Gauß-Jordan Verfahren, um genauer zu sein) erhalten wir die Standardbasis $e_1, \dots, e_n$. Das Gauß-Verfahren ändert aber die Determinante lediglich bis auf einen Nichtnull-Faktor. D.h.

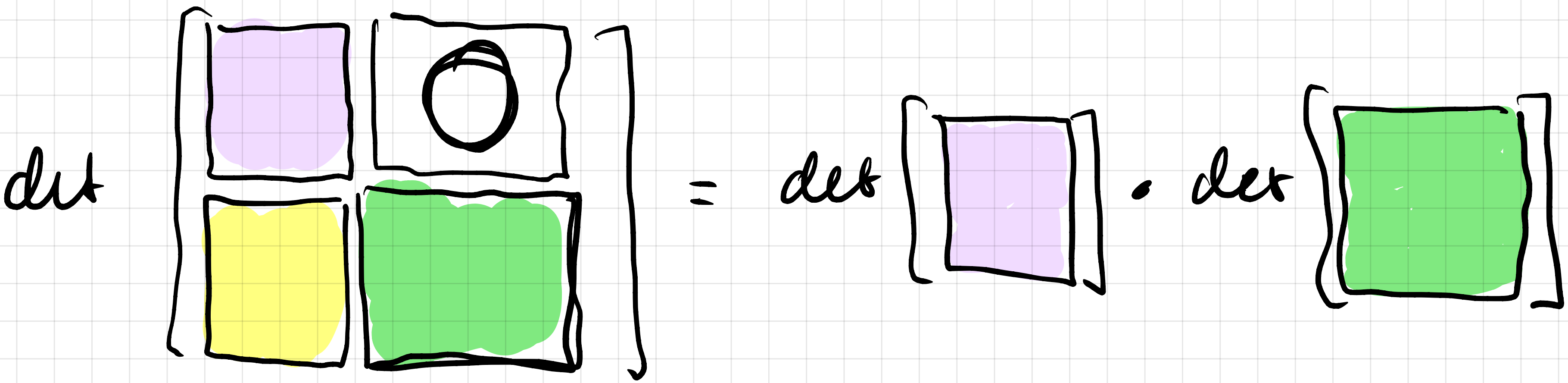
$$\det(A) = \det(a_1, \dots, a_n) = \lambda \cdot \underbrace{\det(e_1, \dots, e_n)}_{\overset{(D3)}{=} 1}$$

mit $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

Also ist $\det(A) = \lambda \neq 0$.

4.5 Weiterer Stoff zu den Determinanten

Eine weitere Formel: Laplace-Entwicklung (eine rekursive Formel). Vgl. Skript.



$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B) \quad \text{für } A, B \in K^{n \times n}.$$

$\boxed{5}$ Euklidische Räume