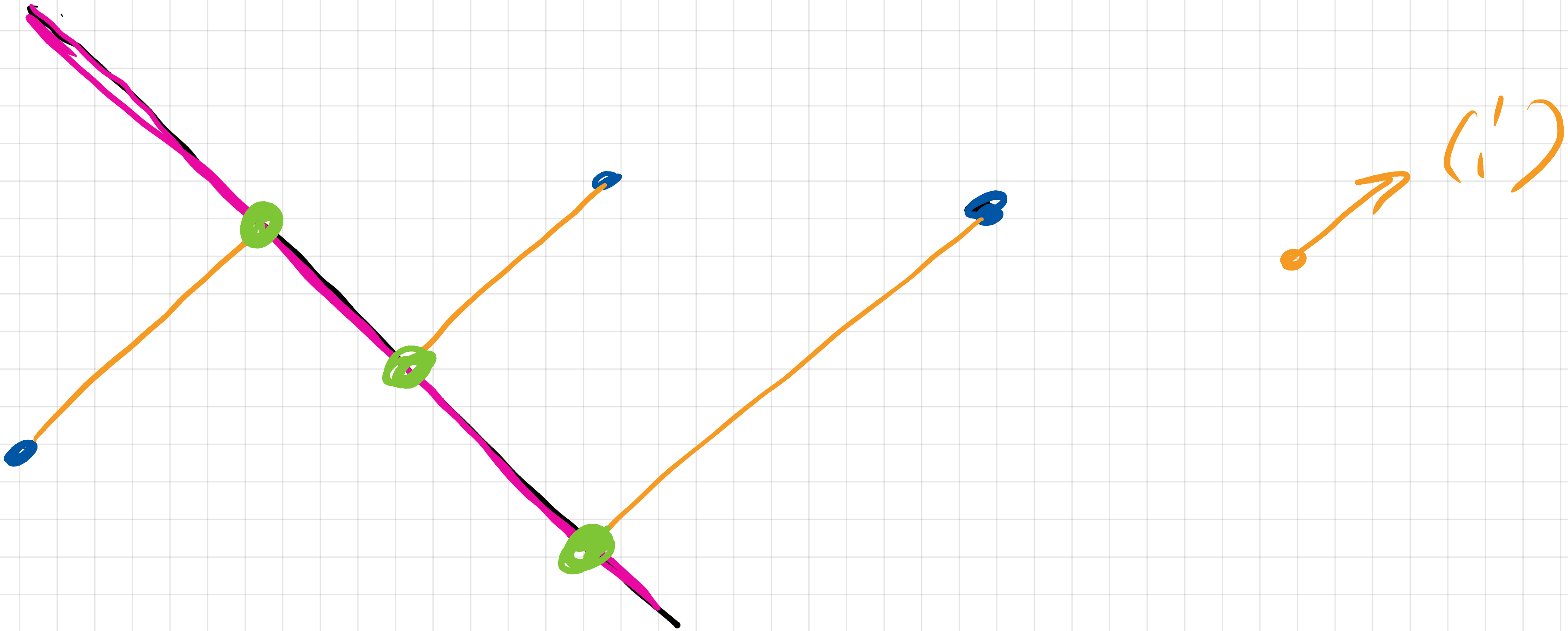


$x+y=0$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix}x+t\\y+t\end{bmatrix}}$$

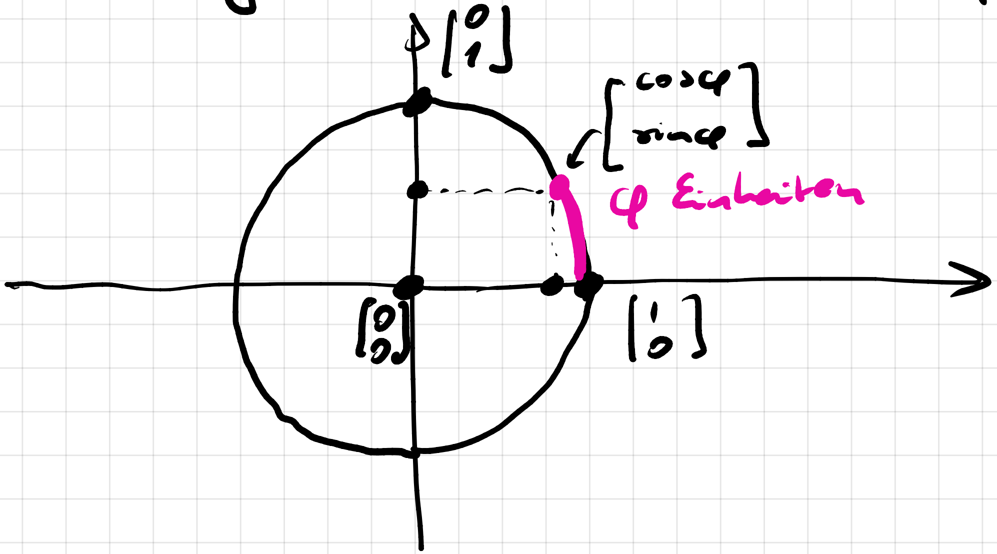
, Das t wähle man durch:

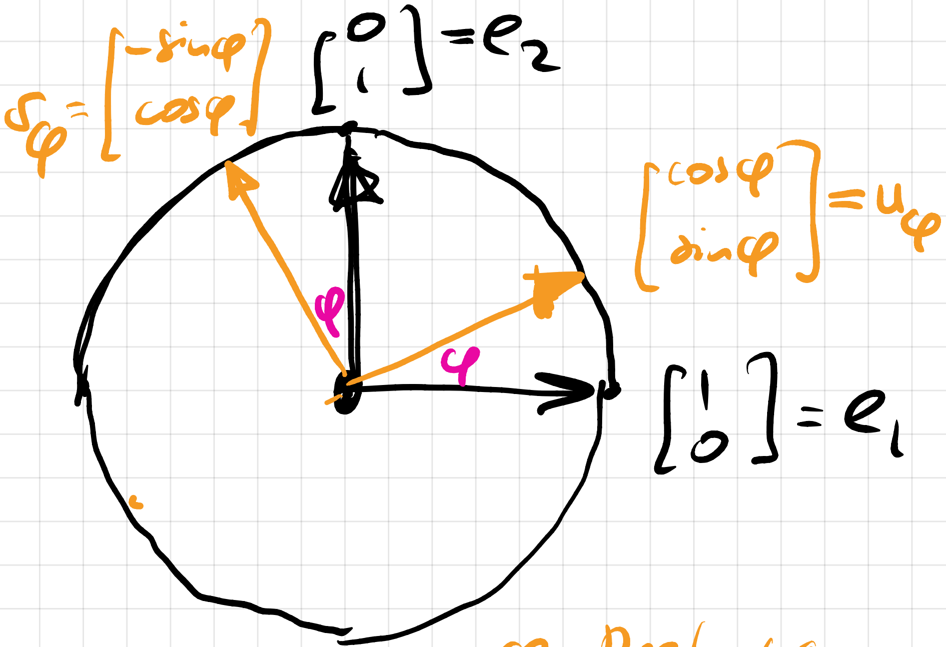
$$(x+t)+(y+t)=0$$

$$x+y+2t=0$$

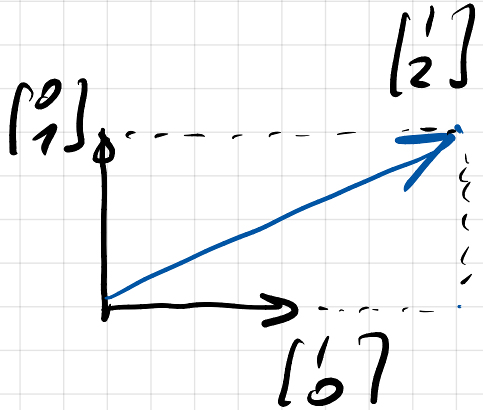
$$t=-\frac{x+y}{2}$$

Bsp Drehung um den Winkel φ

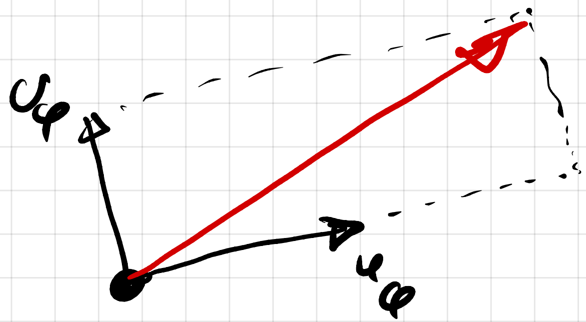




$$\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} \xrightarrow{\varphi\text{-Drehung}} 2 \cdot u_\varphi + 1 \cdot v_\varphi$$



Drehung von $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ um Winkel φ



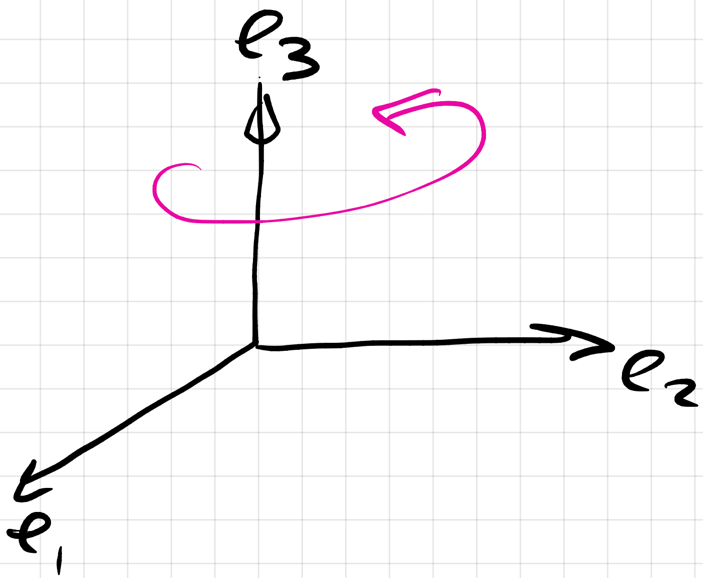
Allgemein $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} \longmapsto x\, u_\varphi + y\, v_\varphi$

$$= x \cdot e_1 + y \cdot e_2$$

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} x\cos\varphi & -y\sin\varphi \\ x\sin\varphi & +y\cos\varphi \end{bmatrix}$$

Matrix $\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$

Bsp Wie dreht man im dreidimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$ um den Winkel φ bzgl. der z-Achse



$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = x e_1 + y e_2 + z e_3$$

$$e_1 \longmapsto \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$e_2 \longmapsto \begin{bmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix}$$

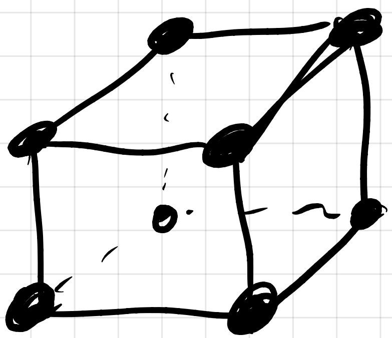
$$e_3 \longmapsto \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \longmapsto x \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ x\sin\varphi + y\cos\varphi \\ z \end{bmatrix}$$

Bsp Man kann auch lineare Abbildungen betrachten von $\mathbb{K}^n$ nach $\mathbb{K}^m$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} x + \frac{1}{2} z \\ y + \frac{1}{3} z \end{bmatrix}$$

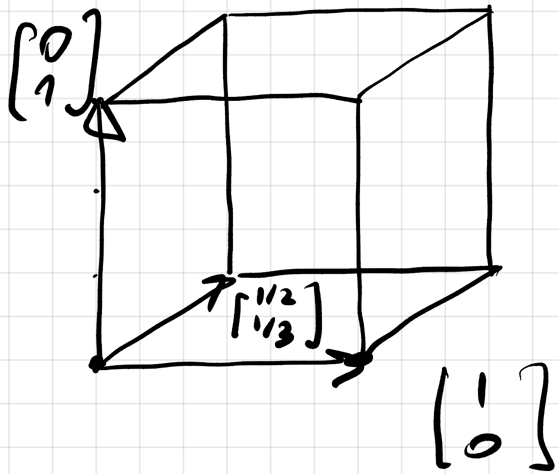


$\{0,1\}^3$

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

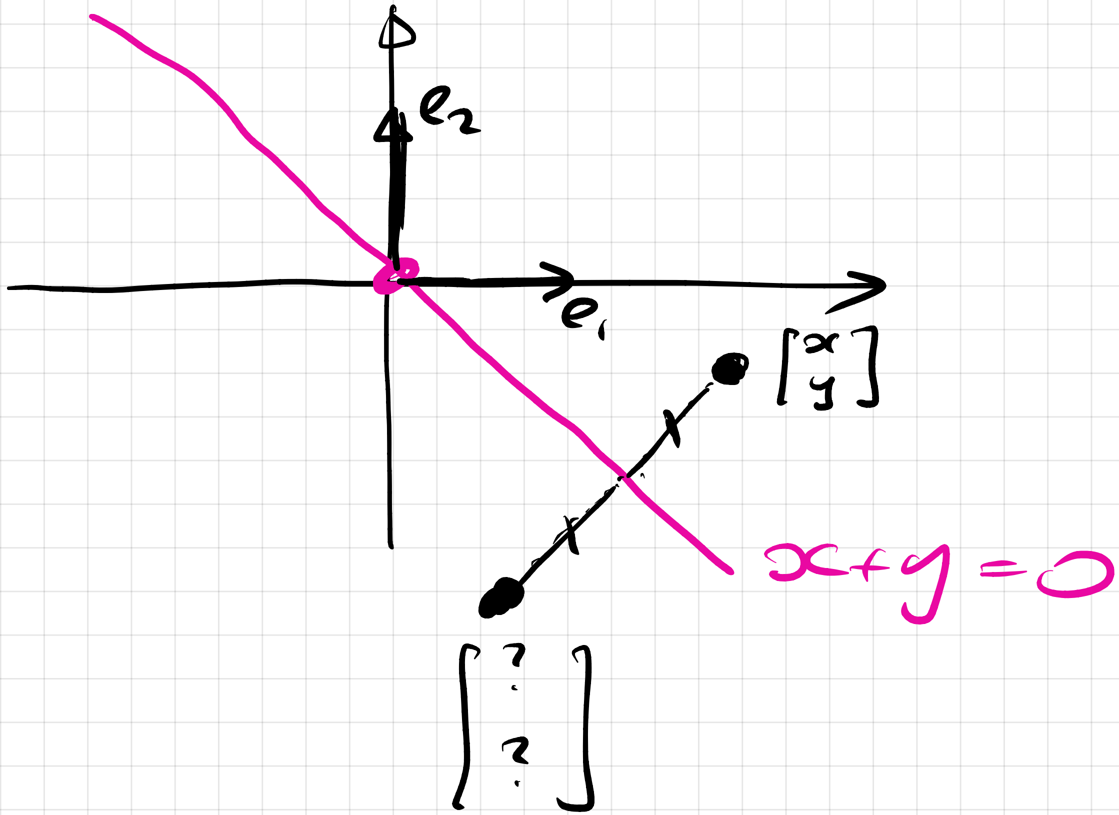
$$e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = e_2 + e_3 \longmapsto \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

Bsp. Punkt $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ wird an der Geraden $x + y = 0$ gespiegelt.



$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = -e_2$$

$$e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = -e_1$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} -y \\ -x \end{bmatrix}$$

3.2. Definition von linearen Abbildungen.

Def. Für Vektorräume V und W über $\mathbb{K}$ heißt

$F: V \to W$ linear, wenn

$$F(\alpha v) = \alpha F(v) \quad \text{für alle } v \in V \text{ und alle } \alpha \in \mathbb{K}$$

und

$$F(u+v) = F(u) + F(v) \quad \text{für alle } u, v \in V.$$

Bem. Äquivalente Beschreibung:

$$F(\alpha u + \beta v) = \alpha F(u) + \beta F(v)$$

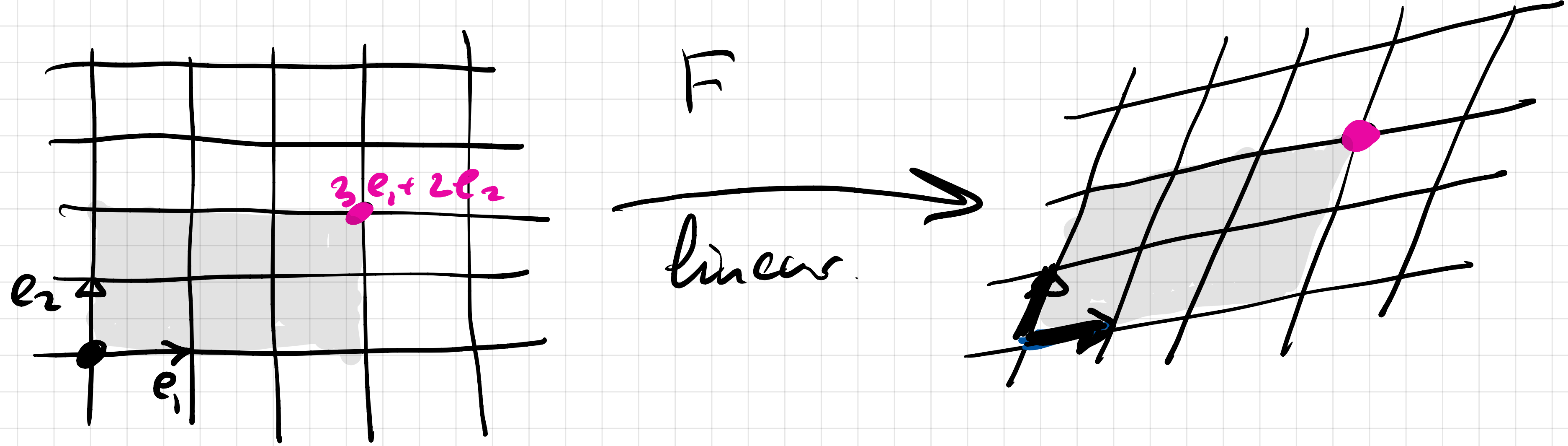
gilt für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ und alle $u, v \in V$

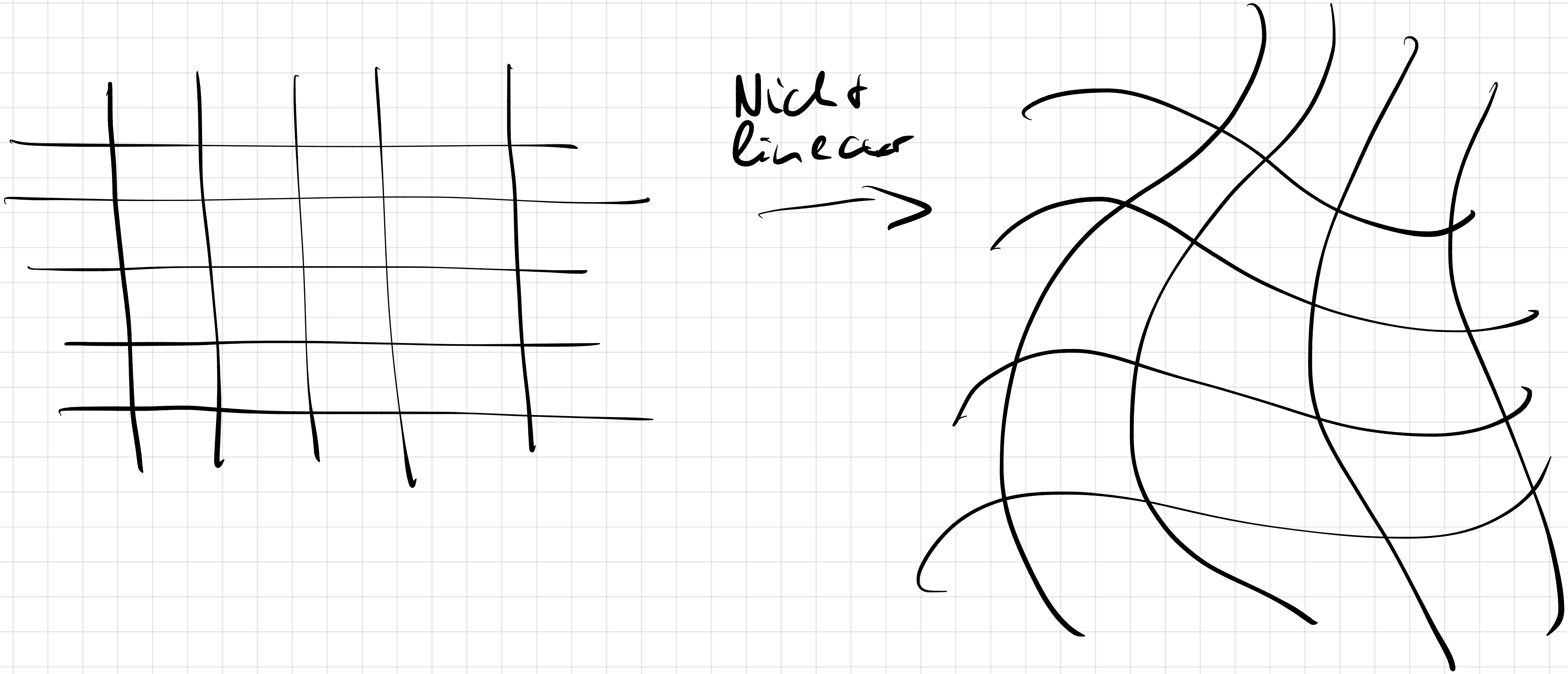
Bem. Für lineare Abbildungen $F: V \to W$

gilt $F(0) = 0$ und

$$F\left(\sum_{i=1}^{t} \alpha_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{t} \alpha_i F(u_i)$$

für $\alpha_i \in \mathbb{K}$ und $u_i \in V$


$3e_1 + 2e_2$
e_2
e_1
F
linear


Nicht linear

Bem Bei einer linearen Abbildung $F: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ gilt für $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ das Folgende:

$$F(x) = F(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n)$$

$$= x_1 F(e_1) + x_2 F(e_2) + \dots + x_n F(e_n)$$

D.h. F ist als Linearkombination dessen Werte auf der Standardbasis $F(e_1), \dots, F(e_n)$ beschreibbar.

Es reicht aus, die Wirkung von F auf der Standardbasis anzugeben, um F festzulegen.

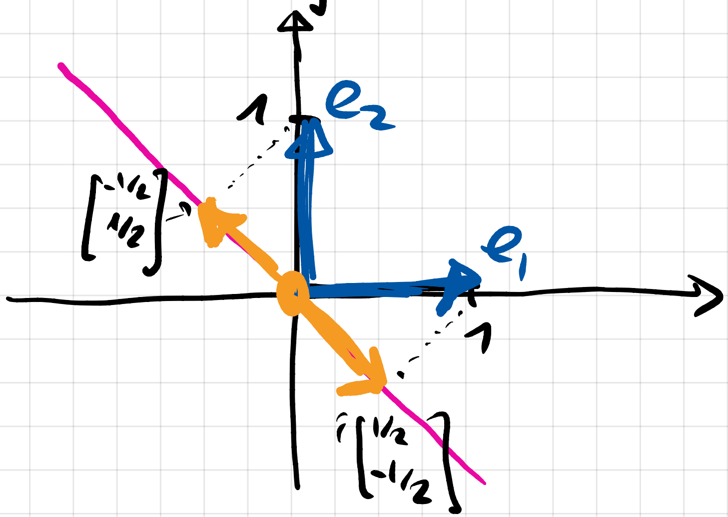
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \frac{x+y}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y \\ -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \end{bmatrix}}_{\parallel}$$

$$x \cdot \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} + y \cdot \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto x\begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

$$e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

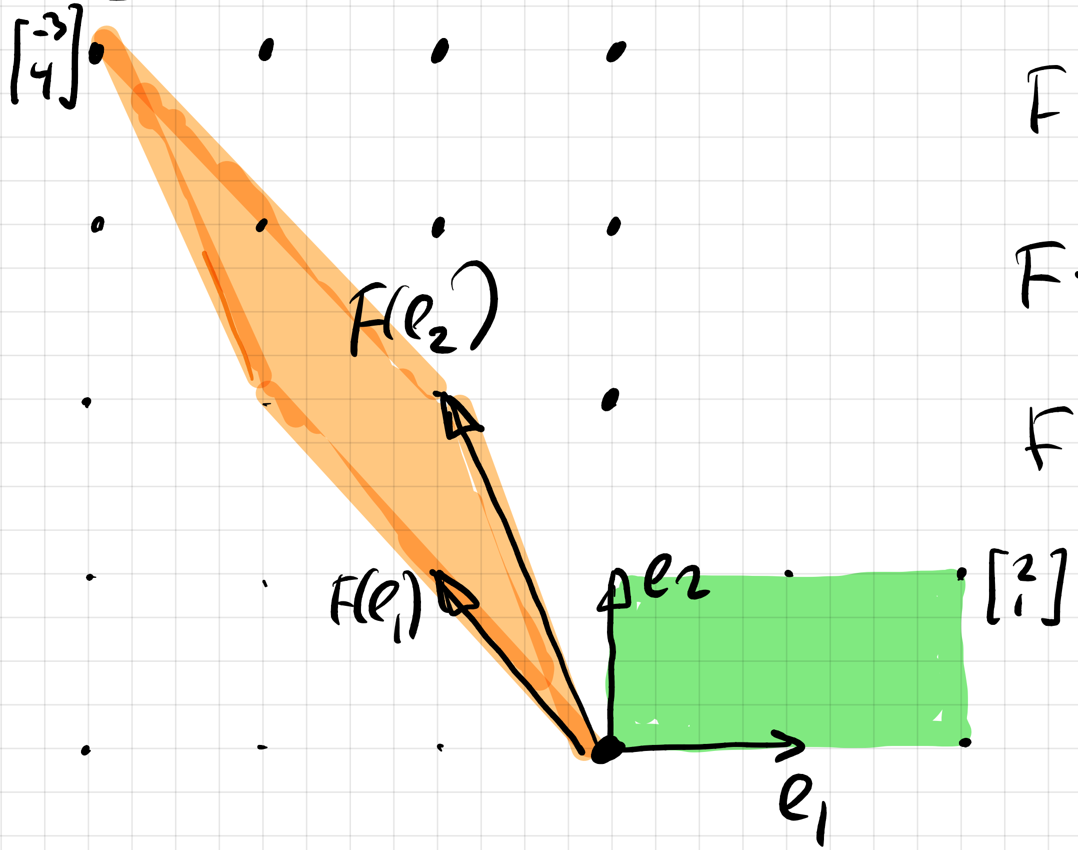


Die Wirkung dieser Abbildung kann man bequem durch eine Matrix beschreiben:

$$\begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Wenn wir wissen, wie die Abbildung F, ~~die~~ die linear ist, auf einer Basis wirkt, dann wissen wir, wie die Abbildung F auf jedem Vektor wirkt.

Bsp



F lineare Abbildung mit

$$F: \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$$

$$F: \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$$

$$F: \begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} \longmapsto F\left(x_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)$$

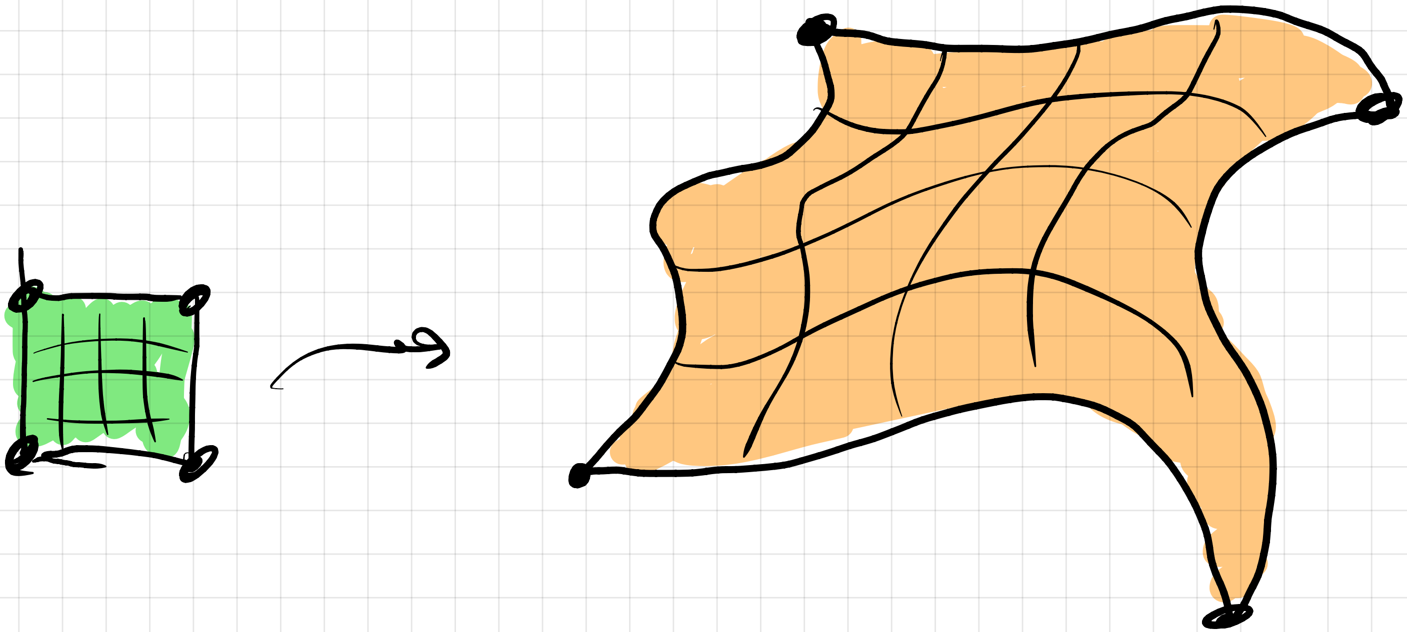
$$= x_1 \, F\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + x_2 \, F\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

$$= x_1 \, F(e_1) + x_2 \, F(e_2)$$

$$= x_1 \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}-x_1 - x_2\\ x_1 + 2x_2\end{bmatrix}$$

Nicht linear



3.3. Darstellung von linearen Abbildungen mit Matrizen

Das Produkt einer Matrix $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \in \mathbb{K}^{m \times n}$

und eines Vektors $x = (x_j)_{j=1,\dots,n} \in \mathbb{K}^n$

wird als der Vektor $y = A \cdot x$ definiert

mit $y = (y_i)_{i=1,\dots,m}$ und

$$y_i = a_{i,1} \cdot x_1 + a_{i,2} \cdot x_2 + \dots + a_{i,n} \cdot x_n$$

Wenn wir die Matrix A durch ihre Spalten

$a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}^n$ als $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix}$ angeben dann können wir Ax als

$$Ax = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$= a_1 x_1 + a_2 \cdot x_2 + \ldots + a_n x_n$$

Linearkombination der Spalten von A

mit den Koeffizienten aus x.

Wenn wir also eine lineare Abbildung $F: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ haben und F auf $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ auswerten, so erhalten wir

$$F(x) = F(e_1 \cdot x_1 + e_2 \cdot x_2 + \ldots + e_n \cdot x_n)$$

$$= F(e_1) \cdot x_1 + F(e_2) \cdot x_2 + \ldots + F(e_n) \cdot x_n$$

$$= A \cdot x \quad \text{mit}$$

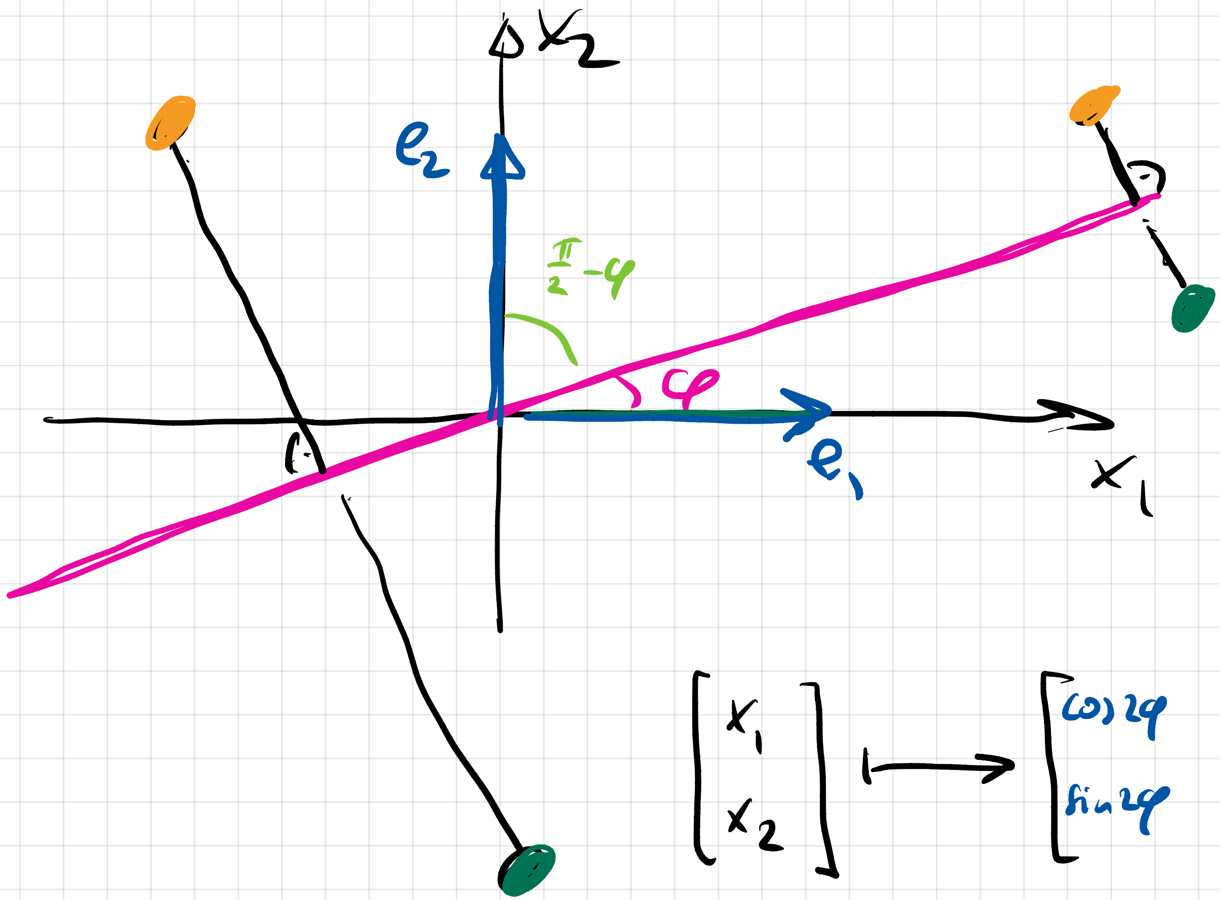
$$A = \begin{bmatrix} F(e_1) & F(e_2) & \dots & F(e_n) \end{bmatrix}$$

Dieses A nennt man die Matrix der linearen Abbildung F.

Bsp Drehung um Winkel φ.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \longmapsto \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}}_{\text{Die Matrix der Drehung um Winkel } \varphi.} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Bsp



Spiegeln an einer Geraden.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} \cos 2\varphi & ? \\ \sin 2\varphi & ? \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Bemerkung: Wir können nun die LGS kompakt als $Ax = b$ hinschreiben

$A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ Matrix der linken Seiten

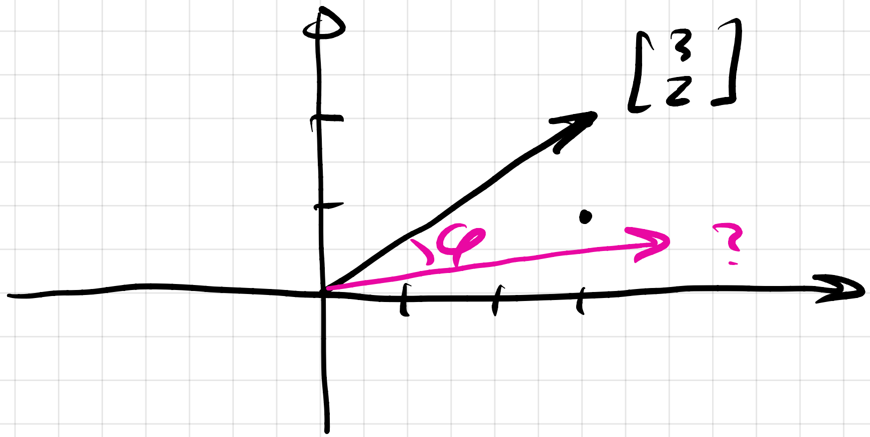
$x \in \mathbb{K}^n$ Vektor der Unbekannten.
b der rechten Seiten

Bsp.

$$\begin{cases} \cos\varphi \cdot x_1 - \sin\varphi \cdot x_2 = 3 \\ \sin\varphi \cdot x_1 + \cos\varphi \cdot x_2 = 2 \end{cases}$$

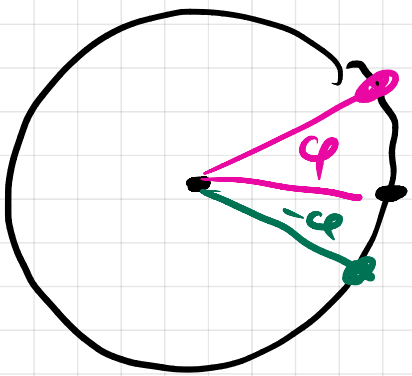
Gleichungssystem in den Unbekannten $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-\varphi) & -\sin(-\varphi) \\ \sin(-\varphi) & \cos(-\varphi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$



$\begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} \cos(-\varphi) \\ \sin(-\varphi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ -\sin\varphi \end{bmatrix}$

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= 3\cos\varphi + 2\sin\varphi \\ x_2 &= -3\sin\varphi + 2\cos\varphi \end{aligned}}$$

Bemerkung Das Lösen eines LGS $Ax = b$ ist die Suche nach den Inputs x zum Output b bei einer linearen Abbildung
$$x \longmapsto Ax.$$

Def Für Matrizen $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \in \mathbb{K}^{m \times n}$

und $B = (b_{js})_{\substack{j=1,\dots,n \\ s=1,\dots,k}} \in \mathbb{K}^{n \times k}$ wird das

Produkt $C = A \cdot B$ als die Matrix

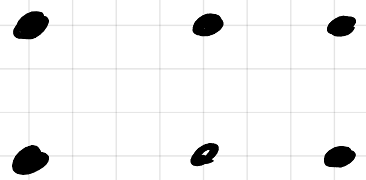
$$C = (c_{is})_{\substack{i=1,\dots,m \\ s=1,\dots,k}} \in \mathbb{K}^{m \times k}$$ mit

$$\boxed{c_{is} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{js} = a_{i1} b_{1s} + a_{i2} \cdot b_{2s} + \dots + a_{in} \cdot b_{ns}}$$

definiert.

$$\begin{array}{c} i \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} & & \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ & & \end{bmatrix} \cdot \begin{array}{c} \begin{bmatrix} & b_{1s} & \\ & \vdots & \\ & b_{ns} & \end{bmatrix} \\ s \end{array} = \begin{array}{c} \\ i \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} & & \\ & c_{is} & \\ & & \end{bmatrix} \\ s \end{array}$$

Bsp.



$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$

Wie dreht man alle diese Vektoren um den Winkel φ.

$$\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

hat man als Spalten die gedrehten Vektoren.

Bemerkung Es ist oft nützlich die Multiplikation von Matrizen block-weise zu interpretieren.

Allgemein: $m \times n$, $n \times k \longmapsto m \times k$

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

2×2 $\quad$ 2×1 $\quad$ 2×1

1×2 $\quad$ 2×1 $\quad$ 1×1

Blockgröße 2×1 $\quad$ Blockgröße 1×1 $\quad$ Blockgröße 2×1

$$A \cdot \begin{bmatrix} | & & | \\ b_1 & \cdots & b_k \\ | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ Ab_1 & Ab_2 & \cdots & Ab_k \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} | & & | \\ a_1 & \cdots & a_n \\ | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n$$

$$\begin{bmatrix} - & z_1 & - \\ & \vdots & \\ - & z_m & - \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} z_1 x \\ z_2 x \\ \vdots \\ z_m x \end{bmatrix}$$

3.4. Bild und Kern

Def. Für eine lineare Abbildung

$$F: V \longrightarrow W$$

heißt $\mathrm{im}(F) := F(V) = \{F(x) : x \in V\}$

das Bild von F und

$$\ker(F) := \{x \in V : F(x) = 0\}$$

der Kern von F

Man hat: $\mathrm{im}(F) \subseteq W$

$$\ker(F) \subseteq V$$

Die Dimension von im(F) nennt man den Rang von F. Bezeichnung: rang(F).