Este es un resumen realizado en bases a las clases de Finanzas II, sin ninguna relación con la universidad o el profesor que dicta el ramo. Si es que se encuentra algún error por favor avisar a gustavo@gaviles.com. Y antes de imprimir este documento verifica en www.gaviles.com que sea la versión más reciente del resumen.

Resumen Finanzas II

Gustavo Avilés Segovia =]

12 de diciembre de 2013

1 Renta Fija

1.1. Valorización

$$\omega = (1 + r \triangle t)^n = \left(1 + \frac{r}{f}\right)^{f \cdot T}$$

- Si $f = 0$ entonces se obtiene interés simple $\omega = 1 + r \cdot T$.
- Si $f \to \infty$entonces se tiene composición contínua $\omega = \exp(r \cdot t)$.

Valor Par Se obtiene el mismo valor que se invierte para descontar la tasa.

Tasa Spot Esta tasa que se aplica a un instrumento desde hoy hasta un tiempo T.

Tasa Forward Es una tasa que se aplica a un instrumento que tendrá validez en un tiempo futuro t hasta T, pero el valor de esta tasa es acordada hoy. Utilizando el principio de "no arbitraje" entonces $\left(1 + r_{spot(0,t)}\right)\left(1 + r_{forward(t,T)}\right) = \left(1 + r_{spot(0,T)}\right)$ este instrumento es una combinación entre un crédito y un depósito a plazo. "Se toma un crédito entre 0 y T, depositándose dicho monto entre 0 y t, para luego prestar a una tasa forward entre t y T.

1.2. Coeficiente de Apalancamiento

$$k = \frac{Pasivo}{Activo}$$

Si la duration del activo es mayor que la duration del pasivo, existe riesgo de que la tasa suba. Para compensar este riesgo se pueden tomar seguros de tasa SWAP.

1.3. Forward Rate Agreement (FRA)

$$\frac{Forward_1}{1 + r_1 t_1} = \frac{Forward_2}{1 + r_2 t_2}$$

$$Forward_2 = Forward_1\left(1 + r_{forward(t_1,t_2)}\right)$$

1.3.1. Valorización

Por no arbitraje, en el momento en que se firma el "forward Rate Agreement" este no posee valor. Esto no significa que para todo el período entre t_0y $t_1$este no pueda ser valorizado. De esta forma si la tasa de interés es superior a la tasa acordada el FRA tendrá un valor proporcional a la diferencia de tasa, adicionalmente si la tasa de interés es menor a la tasa acordada el FRA *no tendrá valor* (Se podría considerar un valor negativo como "lo que se tendría que pagar para deshacerse del contrato").

$$ValorFra(t) = \frac{1}{1 + r_2(t)(t_2 - t_1)} \left(r_{forward(t,t_1,t_2)} - r_{forward(0,t_1,t_2)} \right) (t_2 - t_1)$$

$r_{forward(0,t_1,t_2)}$ corresponde a la tasa forward calculada inicialmente.

$r_{forward(t,t_1,t_2)}$ corresponde a la tasa forward entre t_1y t_2 pero calculada el día t de la valorización.

1.3.2. Forward de Tasa

$$PrecioForwad = PrecioSpot \frac{(1 + r_{pesos})^{t/360}}{(1 + r_{dólares})^{t/360}}$$

Curva FX Es la curva del tipo de cambio forward a diferentes duraciones.

1.4. SWAP

El SWAP es un seguro que se paga al final del periodo, el cual se representa en forma de un contrato de intercambio de flujos futuros. Este seguro consiste desde el punto de vista del comprador de un SWAP, en recibir tasa flotante y pagar tasa fija

$$FRA \neq SWAP$$

Para estructurar el SWAP se debe encontrar una tasa fija r_{fija} de forma que se igualen los valores presentes tanto del instrumento sin protección como el instrumento con protección.

Cross Currency SWAP Es un SWAP que intercambia flujos de monedas (Dolar-peso, por ejemplo). Este instrumento es equivalente a un forward de moneda.

La principal característica de un SWAP esta dada por que al intercambiar tasa fija por flotante en cada período, éste posee un valorización "neutra" o cero en cada punto de revalorización. De esta forma el valor presente de éste instrumento para una fecha distinta a la del pago de cupón, corresponde a la valorización de la diferencia de tasa entre la acordada y la tasa actual, pero solo considerando un período de tiempo entre hoy y el próximo corte de cupón. Esto se debe por que en el próximo corte de cupón se volverá a valorizar el SWAP, de esta si se considera que no existe arbitraje, entonces el SWAP tendrá valor 0, no aportando a su valorización.

1.5. Duration de un Bono

Este es un ratio que representa el punto, en que en promedio un bono será pagado, llevado a valor presente.

$$Duration = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{F_i i}{(1+r_i)^i}}{ValorPresente}$$

1.6. Relación Duartion Tir y Valor de un Bono

$$\frac{\triangle V}{V} = \frac{-Duration}{1+r} * \triangle Tir$$

$$\triangle V = -ValorPresente * DurationModificada * \triangle Tir$$

2 Renta Variable

2.1. Capital Asset Pricing Model (CAPM)

$$RetornoEsperado = r_{\text{libre de riesgo}} + \beta_i \left(r_{mercado} - r_{\text{libre de riesgo}} \right)$$

$$\text{Retorno Activo}_i = \frac{Precio_{(1,1)} - Precio_{(1,0)}}{Precio_{(1,0)}}$$

$$\text{Retorno Activo}_i = \log \left(\frac{Precio_{(1,1)}}{Precio_{(1,0)}} \right)$$

Utilizando la visión vectorial de los activos, estos están compuestos por la suma entre el riesgo sistemático y el riesgo diversificables, estos dos vectores son perpendiculares, por lo que el riesgo sistemático no puede ser cancelado al diversificar la cartera, en cambio el riesgo diversificable puede ser cancelado, comprando otros activos que posean su vector diversificable con sentido negativo a el riesgo que la cartera posee.

2.2. Cartera de activos de renta variable

Una cartera esta compuesta por i activos, estos activos sumados equivalen a el precio de la cartera o inversión. De esta forma se puede considerar que cada activo posee ω_i de la cartera, con $\omega_i \in [0, 1]$.

$$\omega \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } \sum_i \omega_i = 1 \qquad \omega = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_n \end{bmatrix}$$

$$\text{Esperanza de la Cartera} = \omega^T \cdot \text{Esperanza de Retornos} = \omega^T \tilde{R}$$

$$Varianza = \sigma_\omega^2 = \omega^T \Omega \omega = \sum_i \sum_j \omega_i \omega_j \sigma_{(i,j)}$$

Dónde Ω es la matriz de varianza covarianza.

2.2.1. Cartera de Mínima Varianza

$$\min_{\omega \in \mathbb{R}^n} \left\{ \frac{1}{2}\sigma^2 = \frac{1}{2}\omega^T \Omega \omega \right\}$$

$$s.a \qquad \sum_i \omega_i = 1 = \omega^T \vec{1}$$

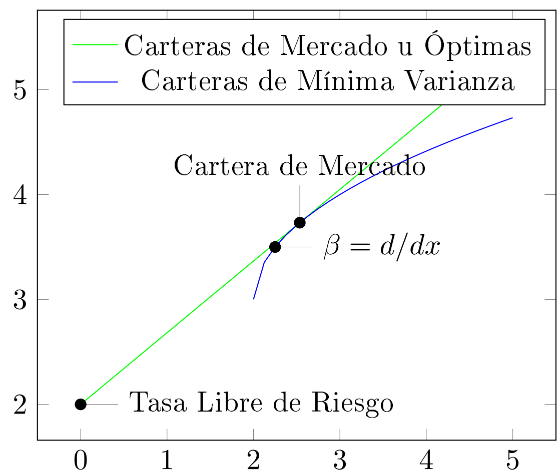
Resolviendo el lagrangiano de este sistema de optimización se obtiene:

$$\omega_{óptimo} = \lambda \Omega^{-1} \vec{1} \qquad \lambda = \sigma^2 = \frac{1}{\vec{1}^T \Omega^{-1} \vec{1}}$$

2.3. Frontera de Mínima Varianza

Según la teoría de portafolio todos los inversionistas "deberían" estar en esta línea, es decir, que estos según su aversión al riesgo.

Como la frontera de mínima varianza es una línea, solo con poseer dos portafolios que se encuentren en esta línea y no sean iguales, es posible "generar" mediante una combinación lineal de estos, todos los portafolio "posibles" en la frontera.



Contribución al RiesgoCRI Es la cantidad de riesgo que el activo β_i expresada en volatilidad, adiciona a la cartera. En el equilibrio ($\omega_{óptimo}$) los aportes en riesgo que todos los activos realizan son iguales, en el gráfico anterior la contribución al riesgo de la cartera es el β.

$$CR_i = \beta_i \sigma \qquad CR_i = \frac{\sigma_{im}}{\sigma_m}$$

2.4. Teorema de los dos Fondos

Con cualquier par de activos diferentes, que se encuentren en la frontera de mínima varianza, generan mediante una combinación lineal de estos, toda la frontera. Es preciso mencionar que se considera una cartera de activos como un activo.

$$\omega_p = g + h \cdot r_p \qquad r_p = \omega_p^T \cdot r$$

de esta forma siempre se puede encontrar un Q tal que:

$$\omega_p^T \Omega \omega_p = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Cero covarianza de } P$$

El cero covarianza de P cumple el rol del activo libre de riesgo cuando este no existe.

$$r_Q = r_{\text{cero covarianza de p}} + \beta_{QP} \left(r_p - r_{\text{cero covarianza de p}} \right)$$

3 Simulación de Precios

El espacio de los precios es muy difícil de simular, pero dónde se tienen más herramientas para tener simulaciones más certeras, se encuentra en el espacio de los retornos. De esta forma los precios son simulados como las consecuencias de una secuencia de "retornos" simulados.

3.1. Simulación de Retornos.

Para simular los precios se utilizan retornos logarítmicos, esto se debe a que principalmente para poder tener una operatoria sencilla entre los retornos. Dado que son retornos logarítmicos se pueden sumar, en cambio en el espacio de los retornos porcentuales, los retornos se deben multiplicar para formar la serie. De esta forma lo utilizado por simplicidad de operatoria son los retornos logarítmicos.

$$Ln\left(\frac{Precio_{t+1}}{Precio_t}\right) = \tilde{R}_t \Rightarrow \tilde{P}_{t+1} = P_t e^{\tilde{R}_t}$$

Los retornos se consideran como aleatorios, de esta forma de los datos anteriores se utiliza, la esperanza de los retornos pasados como una "tendencia". La tendencia es referencial "una aproximación", es importante destacar que *retornos pasados no garantizan retornos futuros.* De esta forma los retornos siguen una normal $\tilde{R}_t \rightsquigarrow N\left(\mu, \sigma^2\right)$ luego los retornos quedan descritos de la siguiente forma:

El $\tilde{Z}_t$distribuye normal $N\left(0,1\right)$

$$Retorno_t = \mu + \tilde{Z}_t \sigma$$

Cabe destacar la relación entre las varianzas de los retornos.

$$Var\left[\tilde{R}_t + \tilde{R}_{t+1}\right] = Var\left[\tilde{R}_t\right] + Var\left[\tilde{R}_{t+1}\right] + 2Cov\left[\tilde{R}_t; \tilde{R_{t+1}}\right]$$

Para finanzas las covarianzas entre los retornos no se consideran $Cov\left[\tilde{R}_t; \tilde{R_{t+1}}\right] = 0$. En el caso que la covarianza entre dos precios sea distinta de cero, entonces:

$$Cov\left[\tilde{P}_t; \tilde{P}_{t+1}\right] \neq 0 \rightarrow Cov\left[P_t e^{\tilde{R}_t}; P_t e^{\tilde{R}_t + \tilde{R}_{t+1}}\right]$$

Luego si se desea calcular la probabilidad de que un precio alcance un determinado precio K, en un horizonte de tiempo de T.

Esto último calculado es equivalente a Black and Shoes.

$$P\left[\tilde{P}_{t+T} \leq K\right] = P\left[\tilde{Z} \leq \frac{Ln\left(\frac{K}{P_t}\right) - \mu t}{\sigma\sqrt{T}}\right] \longrightarrow N\left[\frac{Ln\left(\frac{K}{P_t}\right) - \mu t}{\sigma\sqrt{T}}\right]$$

$$P\left[\tilde{P}_{t+T} \geq K\right] = 1 - N\left[\frac{Ln\left(\frac{K}{P_t}\right) - \mu t}{\sigma\sqrt{T}}\right]$$

El retorno logarítmico entre dos precios, que distan en más de un periodo, es equivalente a la suma de los retornos logarítmicos de los períodos.

$$Ln\left(\frac{P_{t+30}}{P_t}\right) = \sum_{i=t}^{t+30} \tilde{R}_i = \tilde{R}_t + \tilde{R}_{t+1} + \tilde{R}_{t+2} + \tilde{R}_{t+3} + ... + \tilde{R}_{t+30}$$

Recordar que como los retornos $\tilde{R}_i$son retornos normales, entonces $E\left(\tilde{R}_i + \tilde{R}_{i+1}\right) = 2\mu$.

Este tipo de modelos no contempla situaciones como que al aumentar el precio, aumente la competencia, para este tipo de casos se utilizan modelos con reversión a la media.

3.2. Simulación de Precios

Como vimos con anterioridades se pueden simular trayectorias de precio mediante la utilización de una serie de retornos y una condición de borde o precio inicial conocido.

De esta forma los precios simulados para T períodos más, partiendo de P_0un precio conocido, con una tendencia de μ(se puede calcular de los datos históricos) y una varianza σ(también calculada desde los datos históricos).

El $\tilde{Z}_t$distribuye normal $N(0,1)$

$$\tilde{P}_{t+T} = P_t e^{\left(\mu_{precio} - \sigma^2_{precio}/2\right)T + \sigma\tilde{Z}\sqrt{T}}$$

También es posible obtener el precio en $t + T$ utilizando los retornos logarítmicos $(\tilde{R}_i)$ entre t y T.

$$\tilde{P}_{t+T} = P_t e^{\sum \tilde{R}_i} = P_t e^{\tilde{R}_t + \tilde{R}_{t+1} + \tilde{R}_{t+2} + ... + \tilde{R}_{t+30}}$$

Para transformar, por ejemplo σ_{precio} anual a σ_{precio} mensual hay que dividir por la raíz de 12.

$$\sigma^2_{\text{precio mensual}} = \frac{\sigma^2_{\text{precio anual}}}{\sqrt{12}} \qquad \sigma^2_{\text{precio diario}} = \frac{\sigma^2_{\text{precio anual}}}{\sqrt{360}}$$

4 Modelos y Procesos de Precios

4.1. Proceso Browniano Aritmético

$$\triangle Ln\left(P_t\right) = \mu \triangle t + \sigma \triangle t$$

$$\triangle Z = \varepsilon \sqrt{\triangle t}$$

$$Esperanza\left[\triangle Z\right] = 0 \qquad Varianza\left[\triangle Z\right] = \triangle t$$

Luego el precio viene dado por la siguiente expresión:

$$P\left(t\right) = P\left(0\right) e^{\mu T + \sigma Z(t)}$$

4.2. Lema de Ito

El lema de Ito es un símil de la regla de la cadena, pero para el cálculo estocástico. Éste es utilizando para derivar un proceso estocástico de precios.

Considerando:

$$dX = a\left(x,t\right) dt + b\left(x,t\right) dz$$

$$dF = \left[\frac{dF}{dx} a\left(x,t\right) + \frac{dF}{dt} + \frac{1}{2}\frac{d^2F}{dx^2} b^2(x,t)\right] dt + \frac{dF}{dx} b(x,t) dz$$

Siendo el primer término la tendencia y el segundo la volatilidad

$$F(s,t) \Rightarrow dF = \frac{\delta f}{\delta s} ds + \frac{\delta f}{\delta t} dt + \frac{1}{2}\frac{\delta^2 f}{\delta^2 s^2}\sigma^2 dt$$

Aplicando este lema al proceso Browniano Geométrico, se puede obtener el siguiente resultado, considerando S como el Precio.

$$dLog(S) = f''\left(S\right) dS + \frac{1}{2} f'''\left(S\right) S^2 \sigma^2 dt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{S}\left(\sigma S dB + \mu S dt\right) - \frac{1}{2}\sigma^2 dt$$

$$\Rightarrow \sigma dB + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t$$

Lo que justamente llega como resultado al proceso Borwniano Geométrico

4.3. Proceso Browniano Geométrico

Este proceso describe posibles trayectorias en base a una trayectoria μy una desviación estándar conocida σ, una posible trayectoria de precio, esta trayectoria utiliza una componente aleatoria, con esta componente se simula el comportamiento "aleatorio" del mercado.

A corto plazo el modelo tiene baja certeza, pero a largo plazo, se pueden utilizar simulaciones de Montecarlo (Repetir el proceso aleatorio una gran número de veces) para obtener posibles precios. Apelando a la ley de los grandes números y a que el número de repeticiones del ejercicio es lo suficientemente grande, se puede realizar estimaciones de normalidad.

Considerando S_t como el precio de un determinado activo en el momento$t$.

$$S_t = S_0 e^{\left(\sigma B_t + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t\right)}$$

Si el movimiento es definido como $R_t = e^{X(t)}$entonces su esperanza es igual a $e^{\frac{t}{2}}$ y su varianza $e^t \left(e^t - 1\right)$.

4.4. Modelo EMWA *(Exponential movin weighted average)*

Esta serie va "olvidando" los datos a medida que el tiempo pasa, de esta forma se ve influenciada principalmente por lo sucedido más recientemente.

$$\sigma_{t+1}^2 = \lambda \sigma_t^2 + (1 - \lambda)(R_t - \mu)$$

4.5. Modelo de regresión a la media

Este modelo considera que los retornos oscilan en torno a una "media de crecimiento".

Considerando a como la velocidad con que se llega al largo plazo y b el largo plazo, en dónde se cumple un estado estacionario.

$$R_{t+\triangle t} = R_t + a(b - R_t) \triangle t + \sigma \sqrt{\triangle t} N(0,1)$$

5 Series de Tiempo

5.1. Autoregresivos $AR(1)$

$$y_t = \alpha y_{t-1} + \epsilon_t$$

$$y_0 = \alpha h + \epsilon_0$$

$$y_t = \alpha^t h + \sum_{j=0}^{t-1} \alpha^j \epsilon_{j-1} + \epsilon_t$$

Un estimador de y_{t+1} sería: $\hat{y}_{t+1} = \alpha y_t + Esperanza\left[\epsilon_{t+1}\right]$
Si la varianza de $\epsilon_t = \sigma^2$ entonces la varianza de y_t : $\gamma_0 = \frac{\sigma^2}{1+\alpha^2}$
De esta forma la autocovarienza es de la forma: $\gamma_{i+1} = \alpha\gamma_i$
Coeficiente de autocorrelación: $\rho_i = \alpha^i$
Usando el operador *retardo* (L) : $y_t = (1-\alpha L)^{-1}\epsilon_t \qquad |\alpha| < 1$

5.2. Autoregresivos $AR(2)$

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \epsilon_t$$

Utilizando el operador *retardo* (L): $y_t = (1+\phi_1 L)^{-1}\epsilon_t \qquad |\phi_1|, |\phi_2| < 1$

$$Varianza\,(y_t) = \gamma_0 \qquad Covarianza\,(\gamma_t; \gamma_{t+1}) = \gamma_1$$

5.3. Autoregresivos $AR(n)$

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \ldots + \phi_n y_{t-n} + \epsilon_t$$

Utilizando el operador *retardo* (L): $y_t = \left(1+\phi_1 L + \phi_2 L^2 + \ldots + \phi_n L^n\right)^{-1}\epsilon_t \qquad |\phi_1|, \ldots, |\phi_n| <$
1
Función de autocorrelación ρ: $\rho_k = \phi_1\rho_{k-1} + \phi_2\rho_{k-2} + \ldots + \phi_n\rho_{k-n} \qquad k > 0$
Luego matricialmente:

$$\phi' = [\phi_1, \ldots, \phi_n] \quad \rho = [\rho_1, \ldots, \rho_n] \quad R = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{n-1} \\ \rho_1 & 1 & & \rho_{n-2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \rho_{n-1} & \rho_{n-2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rho = R \cdot \phi$$

De esta forma si queremos obtener los valores de ϕ para un proceso tenemos que resolver la ecuación anteriormente mencionada.

$$\hat{\phi} = R^{-1} \cdot \rho$$

5.4. Media Móviles $MA\,(1)$

$$y_t = \epsilon_t + \phi \epsilon_{t-1}$$

$$y_t = (1 + \phi L)\, \epsilon_t$$

$$Esperanza\,(y_t) = 0 \qquad Varianza\,(y_t) = \sigma^2 + \phi^2 \sigma^2 = \left(1 + \phi^2\right) \sigma^2$$

$$Covarianza\,(y_t; y_{t-1}) = \phi \sigma^2$$

Este proceso es llamado como *"pérdidas de memoria"*, o "mal amor", esto se debe a que mientras mayor sea la distancia en tiempo, menor es la influencia de ese evento en la serie.

$$\gamma_1 = \phi \sigma^2 \qquad \gamma_2 = 0 \qquad \rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} \qquad \rho_2, \ldots, \rho_\infty = 0$$

5.4.1. Medias Moviles $MA\,(n)$

El caso de un $MA\,(n)$, se diferencia de un $MA\,(1)$ en que el valor de ρ son diferentes de cero entre $\rho_1 \ldots \rho_n$.

5.5. Autoregresivos con Medias Móviles $ARMA(P;Q)$

Un proceso $ARMA\,(P,Q)$ corresponde a la suma de dos procesos un $AR\,(P)$ y un $MA\,(Q)$.

$$y_t - \alpha_1 y_{t-1} - \alpha_2 y_{t-2} - \ldots - \alpha_p y_{t-p} = \epsilon_t + \phi_1 \epsilon_{t-1} + \phi_2 \epsilon_{t-2} + \ldots + \phi_2 \epsilon_{t-q}$$

$$y_t = \alpha + \sum_{j=1}^{P} \alpha_j \cdot y_{t-j} + \sum_{i=1}^{Q} \phi_i \cdot \epsilon_i + \epsilon_t$$

Utilizando el operador letargo la expresión es de la forma:

$$y_t = \alpha + \sum_{j=1}^{P} \alpha_j \cdot L^j \cdot y_t + \sum_{i=1}^{Q} \phi_i \cdot L^i \cdot \epsilon_i + \epsilon_t$$

5.6. Autoregresivos Integrados con Medias Móviles $ARIMA(P; D : Q)$

Este proceso considera un modelo $ARMA\,(P;Q)$ que adicionalmente posee la derivada $\triangle^D$del proceso, con $\triangle y_t = y_t - y_{t-1}$.

$$y_t = -\left(\triangle^D y_t - y_t\right) + \alpha_o + \sum_{j=1}^{P} \alpha_j \cdot \triangle^D y_{t-j} - \sum_{i=1}^{Q} \phi_i \cdot \epsilon_{t-i} + \epsilon_t$$

$$\alpha\,(L)\,\triangle^D\,y_t = \phi_0 + \phi\,(L)\,\epsilon_t$$

Si este proceso es estacionario, entonces se cumple que: $Esperanza\,(y_y) = Esperanza\,(y_{t-1})$ y $Varianza\,(y_t) = Varianza\,(y_{t-1})$

6 Riesgo

El riego es la *perdida de valor de un activo*, que es medido como el peor caso posible, este caso es medido tanto en un porcentaje “En el peor caso se perderán un 30 % de la inversión inicial”. Otra forma de medir el riego es mediante una pérdida económica, esto es generalmente utilizado en las mesas de dinero, de esta forma se mediría como “En el peor caso se perderán 5 millones de dólares”.

6.1. Tipos de Riesgo

Mercado Este es un riego determinado por el mercado (País) en dónde el activo habita, sus principales factores son el precio y la liquidez.

Crediticio Este riesgo se ve principalmente cuando una institución o una empresa, financia parte de su deuda generando más deuda. Es decir si para pagar un crédito necesita pedir parte de los pago en forma de un crédito (Roll Over) y este es negado, la institución no podrá pagar sus deudas.

Operacional Principalmente es dado por tanto pérdidas en infraestructura, como en su capital humano “organizacional”, de esta forma si una empresa por un accidente perdiese a todos sus directivos, sería difícil poder volver a organizar y gestionar la empresa tal como estaba antes del accidente.

Cuando se calcula el riesgo del tipo de cambio, es necesario calcular los VaR individuales de las tasas tanto en peso, dolar, como el tipo de cambio del día. En el caso que se no se tenga el valor de la tasa para el día solicitado, pero si para una fecha anterior y posterior, es posible realizar una interpolación. Como se debe realizar una interpolación, se debe también considerar las tasas tanto de las fechas anteriores como posteriores al día de vencimiento.

6.2. Hábitat

Es el lugar en donde vive o nace una inversión, normalmente fijado por un tipo de moneda específico. Es importante destacar que dependiendo del hábitat de los activos es posible que la covarianza entre estos nos sume o reste VaR_i esto se debe al siguiente fenómeno, si consideramos dos activos uno en CLP y otro en USD entonces, si el hábitat es:

CLP Si el precio del USD sube se valorizan los en USD, de esta forma la covarianza positiva es la que perjudica en mayor medida el valor de la cartera.

USD Si el precio del USD sube se desvalorizan los activos en CLP, de esta forma la covarianza negativa afecta en mayor medida el valor de la cartera.

6.3. Value at Risk VaR (*Valor en Riesgo*)

Se entiende como el VaR como una medida de *pérdida*. Esta medida puede ser tanto en un valor porcentual, como en un valor monetario. Dado que no sabemos con un 100 % de certeza cuál será el valor de nuestra cartera, se utilizan modelos estadísticos, de simulación de precios, como los anteriormente descritos, para calcular con un nivel de certeza (comúnmente un 95 %).

Sensibilidad: Cambio en el valor de la cartera, cuando uno de los factores de riesgo es modificado.

$$\triangle V = \frac{\partial V}{\partial f_1}\triangle f_1 + \frac{\partial V}{\partial f_2}\triangle f_2 + ... + \frac{\partial V}{\partial f_n}\triangle f_n$$

$$\Rightarrow \frac{\triangle V}{V} = \frac{S_1 f_1}{V}\left(\frac{\triangle f_1}{f_1}\right) + \frac{S_2 f_2}{V}\left(\frac{\triangle f_2}{f_2}\right) + ... + \frac{S_n f_n}{V}\left(\frac{\triangle f_n}{f_n}\right) \rightsquigarrow N\left(\mu_Z, \sigma_Z^2\right)$$

$$\mu_Z = W^T \mu$$

$$\sigma_Z^2 = W^T \Omega W$$

$$[\Omega]_{ij} = \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}$$

Luego la medida de riesgo es equivalente a el cambio más desfavorable del valor de la cartera con un nivel de certeza dados.

$$P\left(\triangle V \geq VaR\right) = P\left(\frac{\triangle V}{V} \geq \frac{VaR}{V}\right)$$

$$\frac{VaR}{V} = \mu_Z - K_p \sigma_Z$$

Con $K_p = N^{-1}(1 - P)$

6.3.1. VaR Individual

Éste corresponde a el VaR de cada uno de los componentes de "factores" de riesgo del un determinado activo o cartera de activos.

El VaR de un activo individual i, considerando como $e_i$como la elasticidad de V al factor i:

$$VaR_i = ValorPresente \cdot e_i\left(\mu_i - K_p \sigma_i\right)$$

K_p es el nivel de confianza, normalmente 1,64.

Considerando que:

$$e_i = \frac{\left(\frac{\triangle V}{V}\right)}{\left(\frac{\triangle f_i}{f_i}\right)}$$

$$VaR_i = ValorPresnete \cdot K_p \sqrt{\triangle t} \sigma_P$$

Es importante que existen dos tipos de sigmas, $\sigma_p$el que corresponde a la volatilidad de precio y σ_t el que corresponde a la volatilidad de tasa.

6.3.2. Aproximación

El VaR se puede aproximar como:

$$VaR_i = ValorPresnete \cdot K_p \sigma_P$$

Esto es por que para calcular el VaR se debe conocer la distribución de probabilidad del cambio de precio para el factor i. El cálculo de dicha expresión está dado por la asumción de normalidad en la distribución de los retornos, con media cero y desviación σ.

Luego Para cambios pequeños de ΔV se puede considerar:

Se utiliza la aproximación $e^x \approx 1 + x$ para x pequeños.

$$V_f = V_i e^{K_p \sigma} \approx V_i + V_i \cdot K_p \cdot \sigma$$

$$V_f - V_i = VaR = V_i \cdot K_p \cdot \sigma$$

6.3.3. VaR Total

Usando la notación matricial, con Ωla matriz de covarianzas.

$$VaR_T^2 = VaR_i \Omega VaR_i$$

$$VaR_T = \sqrt{VaR_1 + VaR_2 + 2\rho_{1,2} VaR_1 VaR_2}$$

Recordar restar o sumar 2 veces la covarianza dependiendo de cual sea el peor caso.

6.3.4. VaR Histórico

Este método emplea datos históricos, de estos datos se obtienen los retornos para luego ordenarlos en un histograma de retornos, este histograma representa el abanico de posibilidades históricas de retornos. Dado estos datos se pueden obtener valores para los peores escenarios pasados.

Es importante destacar que retornos pasados no garantizan retornos futuros, de esta forma no es posible garantizar que el peor escenario pasado, pueda ser el peor escenario actual. Dado que todas las crisis económicas se han gestado por factores diferentes.

6.3.5. VaR Paramétrico

Este método emplea un modelo para los retornos que distribuye “normal” con esto se puede estimar en base a los datos anteriores los valores de μy σ, para describir una normal de retornos y con ello el peor retorno a nivel de confianza dado.

6.3.6. VaR Marginal

Es el gradiente de VaR respecto a un componente generador de riego, es importante destacar que si se encuentra un vector VaR_i∗que minimiza la VaR_T, entonces los δ_i son todos iguales. Si esto no fuera así entonces existe una restricción activa por la que se puede seguir avanzando para reducir el VaR_T.

$$\delta i = \frac{\delta Var_t}{\delta VaR_i} = \frac{1}{VaR} \left[\Omega VaR_i\right]_i$$

6.3.7. VaR Incremental

Este VaR mide el impacto que realiza cada factor de riesgo al incorporar los efectos de las correlaciones. En el caso en que un cambio en las tasas genera el mismo cambio en el VaR es cuando las correlaciones son iguales a 1.

$$VaRIncremental_i = VaR_i \delta_i$$

$$VaR_T = \sum_i VaR_i \delta_i = \sum_i VaRIncremental_i$$

6.4. Volatilidad Tasa

Es la volatilidad con que la tasa de interés afecta las variaciones en el precio de un activo.

6.4.1. Macaulay Duration

La duration es como el punto en dónde se equilibran todos los flujos del activo. El equivalente al centro de masa en física.

MacaulayDuration $MacD = \sum_{i=1}^{n} t_i \frac{ValorPresenteFlujo_i}{ValorPresenteActivo}$

MacaulayDurationModified $ModD = \frac{MacD}{(1+y_k/k)}$

y_k Yield to maturity, conocida como Tir (Tasa Interna de Retorno)

k Número de periodos.

6.5. Volatilidad Tasa

Es la volatilidad de la tasa (por ejemplo tasa de interés de mercado), de esta forma se puede calcular

$$\sigma_P = -DurationModificada \cdot \tilde{R} \cdot \sigma_R$$

$$\sigma_P = -\frac{Duration}{1+\tilde{R}} \tilde{R} \cdot \sigma_R$$

Si definimos la variación de la tasa como el cambio del valor tasa respecto al tiempo $\tilde{R}_{t+1} - \tilde{R}_t$ no es necesario multiplicar por la tasa R.

$$\sigma_P = -DurationModificada \cdot \sigma_R$$

6.6. Volatilidad de Precio

Es la varianza que posee el precio, por ejemplo el precio del tipo de cambio dólar preso (USD/CLP). Considerando f como la variable de riesgo que influencia el precio, se puede calcular la varianza en el precio explicada por el factor f de riesgo.

$$\sigma_p = \frac{\left(\frac{\triangle ValorPresente}{ValorPresente}\right)}{\left(\frac{\triangle f}{f}\right)} \sigma_f$$

7 Valorización Neutra al Riesgo

Calibrar un árbol, la esperanza del árbol debe ser la esperanza del proceso y la varianza del árbol debe ser la varianza del proceso.

$$\mu = e^{\sigma\sqrt{\triangle t}} \quad d = \frac{1}{u} \quad q = \frac{R^{\star} - d}{\mu - d}$$

$$R^{\star} = e^{r\triangle t} = (1 + r_{Lineal}t) = (1 + r_{Compuesto})^{t}$$

7.1. Probabilidad (Up-Down)

$$Pr\left(Suba\right) = \frac{r_{\text{Libre de Riesgo}} - d}{u - d} \qquad Pr\left(Baje\right) = 1 - Pr\left(Suba\right)$$

7.2. Black & Sholes

Trabaja con tasas continuas.

$$Call = S \cdot N\left(d_1\right) - e^{rt}k \cdot N\left(d_2\right)$$

$$Put = ke^{-rt}N\left(-d_1\right) - S \cdot N\left(-d_1\right)$$

$$d_1 = \frac{Ln\left(\frac{s}{k}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t}$$

7.3. Paridad Put-Call

$$Put = Call - Strike + Ke^{-rT}$$

7.4. Black & Sholes: Tipo de Cambio

$$\text{Precio de la Call} = Call \cdot e^{-R^{\star}T} N(\phi_1) - Strike \cdot e^{-RT} N(\phi_2) \quad R^{\star} = Tasa\, extranjera.$$

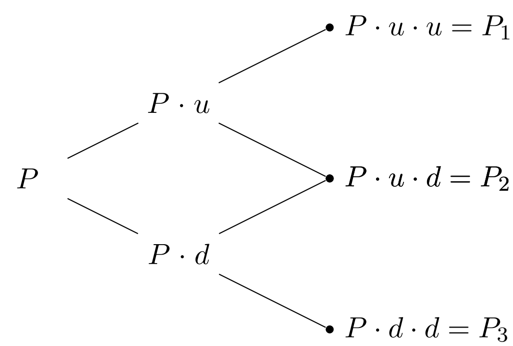
$$\phi_1 = Ln\left(\frac{Strike}{Call}\right) + \left(r - r^{\star} + \frac{\sigma^2}{s}\right) T$$

$$\phi_2 = \phi_1 - \sigma\sqrt{T}$$

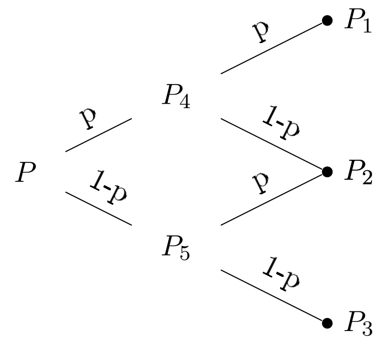
$$P = C - Se^{-r^{\star}t} + Ke^{-rT}$$

7.5. Valorización con Árboles

Para valorizar un instrumento con árboles, primero hay que verificar los precios futuros, que se calculan mediante las diferenctes combinaciones de u y d, explicados al comienzo del capítulo.



Luego de construir el árbol se debe construir el árbol con valorización neutra al riesgo, de esta forma se encuentran las probabilidades neutras al riesgo imponiendo que el valor presente del árbol, utilizando las probabilidades neutras al riesgo sea igual al precio strike actual.



$$P_4 = P_2 \cdot (1 - p) + P_1 \cdot p$$

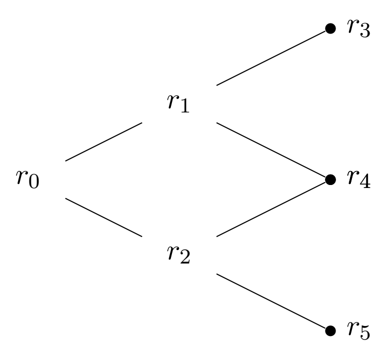
$$P_5 = P_3 \cdot (1 - p) + P_2 \cdot p$$

$$P = P_4 \cdot p + P_5 \cdot (1 - p)$$

En este caso las probabilidades corresponde a las vistas en anteriormente "*Probabilidades (Up Down)*"

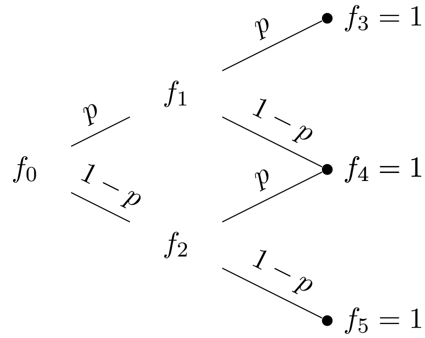
7.6. Cómo hacer un Árbol de *Factores de Descuento*

Este árbol es particularmente útil para evaluar tasas de interés.
Primero necesitamos un árbol con las tasas:



Una vez se tiene el árbol de tasas de interés, podemos calcular el árbol de factores de descuento. Éste árbol, está compuesto por factores de descuento calculados en base a la *correspondiente tasa de interés* de la rama. Adicionalmente se requiere las *probabilidades neutras al riesgo* para valorizar en cada nodo.

Suponiendo como p y $1 - p$, las probabilidades neutras al riesgo f_x como el factor de descuento de un nodo, entonces el árbol de factores de descuento tiene la siguiente forma.



Típicamente f_3, f_4, f_5 son uno, que corresponde al *face value* de un bono. Luego para valorizar los nodos f_1y f_2 se utilizan las tasas correspondiente para descontar, para este caso se considero una tasa compuesta por el período entre el segundo y tercer nivel de árbol, llamado t meses y se utilizan las probabilidades neutras el riesgo para calcular la esperanza del nodo.

$$f_1 = \frac{p \cdot f_3 + (1-p) \cdot f_4}{\left(1 + r_1 \cdot \frac{1}{t}\right)^1}$$

$$f_2 = \frac{p \cdot f_4 + (1-p) \cdot f_5}{\left(1 + r_2 \cdot \frac{1}{t}\right)^1}$$

Finalmente el primer nodo tiene el valor de:

$$f_0 = \frac{p \cdot f_1 + (1-p) \cdot f_2}{\left(1 + r_0 \cdot \frac{1}{t}\right)^1}$$

Luego si queremos queremos valorizar un bono, simplemente multiplicamos el *face value* por el factor de descuento f_0. Adicionalmente si queremos obtener la tasa de interés spot a $2t$ tiempo más, entonces debemos hacer el siguiente cálculo:

$$r_{2 \cdot t} = \left(\frac{1}{f_0} - 1\right) * \frac{12}{2 \cdot t}$$

8 Riesgo de Crédito

$$PE = Pr\,(default) \cdot Nocional \cdot EAD \cdot LGD \cdot M$$

EAD Exposición al Default.

LGD Tasa de recuperación por incumplimiento.

M Número de personas en el fondo de invención.

$$PT = PE + PI$$

PT Pérdida Total, también es aproximada como el VaR de la cartera, considerando el peor caso al 95 % de confianza.

$$PT = VaR = 1,64 \cdot \sigma_{cartera} \cdot \sqrt{t}$$

PE Pérdida Esperada.

PI Pérdida Inesperada.

$$\sigma^2_{individual} = P\,(1-p) \cdot N^2 \cdot EAD^2 \cdot LGD^2$$

$$\sigma_{individual} = \sqrt{p\,(1-p)} \cdot N \cdot EAD \cdot LGD$$

$$\sigma^2_{cartera} = \sum_i \sum_j \sigma_i \cdot \sigma_j \cdot \rho_{i,j}$$

$$\sigma^2_{cartera} = M \cdot \sigma^2_{individial}\,(1 + \rho\,(M-1))$$

Como la base de una cartera de préstamo es que los integrantes de ésta sean similares, se considera que el $\sigma^2_{individual}$ es igual para todos los integrantes de la cartera.

Bibliografía

[1] http://www.economia48.com/spa/d/lema-de-ito/lema-de-ito.htm

[2] http://en.wikipedia.org/wiki/It%C5%8D%27s_lemma

[3] http://en.wikipedia.org/wiki/Geometric_Brownian_motion

[4] http://www.uclm.es/area/gsee/aie/doctorado/Javier/tema3.pdf

[5] http://en.wikipedia.org/wiki/Bond_duration

[6] http://www.investopedia.com/terms/m/modifiedduration.asp

[7] http://www.investopedia.com/terms/y/yieldtomaturity.asp

[8] http://es.wikipedia.org/wiki/Tasa_interna_de_retorno