

因式分解 - 双十字相乘, 主元法

一、双十字相乘概念

假设多项式

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f \quad (1)$$

可以因式分解为

$$(mx + py + j)(nx + qy + k) \quad (2)$$

将 2 展开可以得到

$$mnx^2 + (mq + np)xy + pqy^2 + (mk + nj)x + (pk + qj)y + kj \quad (3)$$

根据多项式相等的原理, 由 1 和 3 可以得到:

$$\begin{cases} mn = a \\ mq + np = b \\ pq = c \\ mk + nj = d \\ pk + qj = e \\ kj = f \end{cases} \quad (4)$$

所以可以得到双十字相乘

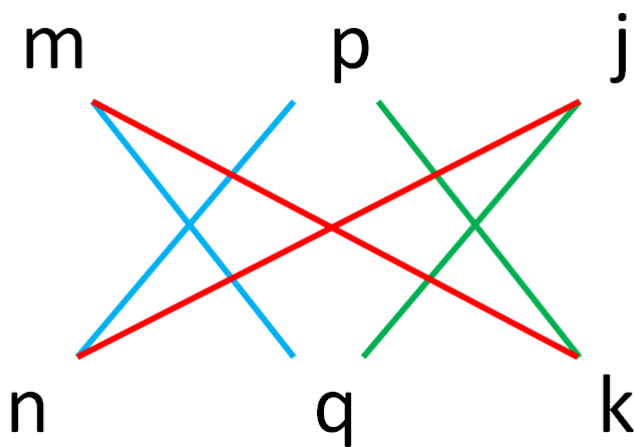


图 1: 双十字相乘示意图

二、双十字相乘例题

$$1. (b+c)x^2 - (b^2 + c^2 + 3bc)x + bc(b+c)$$

解答

$$[(b+c)x - bc][x - (b+c)]$$

$$2. x^2 + 2xy - 3y^2 + 3x + y + 2$$

解答

$$(x + 3y + 2)(x - y + 1)$$

$$3. x^2 - y^2 + 5x + 3y + 4$$

解答

$$(x - y + 4)(x + y + 1)$$

$$4. x^2 + 3xy + 2y^2 + 2x + 3y + 1$$

解答

$$(x + y + 1)(x + 2y + 1)$$

$$5. x^2 + 2xy + y^2 - 3x - 3y - 40$$

解答

$$(x + y - 8)(x + y + 5)$$

$$6. x^2 - 6xy + 9y^2 - 5xz + 15yz + 6z^2$$

解答

$$(x - 3y - 3z)(x - 3y - 2z)$$

$$7. x^2 - 2xy - 3y^2 - 2xz + 10yz - 3z^2$$

解答

$$(x + y - 3z)(x - 3y + z)$$

$$8. 6x^2 - 5xy - 6y^2 + 2x + 23y - 20$$

解答

$$(2x - 3y + 4)(3x + 2y - 5)$$

$$9. 2x^2 - xy + 4xz - 6y^2 + 13yz - 6z^2$$

解答

$$(2x + 3y - 2z)(x - 2y + 3z)$$

$$10. 6x^2 - xy + 11xz - 12y^2 + 26yz - 10z^2$$

解答

$$(3x + 4y - 2z)(2x - 3y + 5z)$$

三、主元法概念

- 主要使用范围: 含多个字母的复杂多项式(大部分情况下至少三个字母)
- 一般步骤:
 - 选某一个字母作为主元(当成未知数), 其他当成常数
 - 按照这个字母降幂排列, 并且合并同类项
 - 利用已有知识因式分解
 - 关键在于选主元, 一个不行换一个
 - 口诀: 一选二排三分解

四、主元法例题

$$11. 2x^3 - x^2z - 4x^2y + 2xyz + 2xy^2 - y^2z$$

解答

按照 x 为主元, 得 $2x^3 - (z + 4y)x^2 + (2z + 2y^2)x - y^2z$, 貌似不行
此题可以按照 z 为主元处理

$$-z(x^2 - 2xy + y^2) + 2x(x^2 - 2xy + y^2) = (x - y)^2(2x - z)$$

$$12. abc - ab - bc - ca + a + b + c - 1$$

解答

$$\begin{aligned}
& abc - ab - bc - ca + a + b + c - 1 \\
&= a(bc - b - c + 1) - (bc - b - c + 1) \\
&= (bc - b - c + 1)(a - 1) \\
&= [b(c - 1) - (c - 1)](a - 1) \\
&= (c - 1)(b - c)(a - 1)
\end{aligned}$$

13. $a^2b^2c^2 - a^2b^2 - b^2c^2 - c^2a^2 + a^2 + b^2 + c^2 - 1$

解答

$$(a^2 - 1)(b^2 - 1)(c^2 - 1) = (a + 1)(a - 1)(b + 1)(b - 1)(c + 1)(c - 1)$$

14. $x^2 - 3xy - 10y^2 + x + 9y - 2$

解答

将 x 看作主元

$$\begin{aligned}
& x^2 + (1 - 3y)x + (-10y^2 + 9y - 2) \\
&= x^2 + (1 - 3y)x + (-5y + 2)(2y - 1) \\
&= (x - 5y + 2)(x + 2y - 1)
\end{aligned}$$

如果将 y 看作主元

$$\begin{aligned}
& -10y^2 + (9 - 3x)y + (x^2 + x - 2) \\
&= -10y^2 + (9 - 3x)y + (x + 2)(x - 1) \\
&= (-5y + x + 2)(2y + x - 1)
\end{aligned}$$

15. $a^3b - ab^3 + 2a^2 + 2b^2 + 4$

解答

此题按照字母比较麻烦,可以把数字作为主元

$$\begin{aligned} & a^3b - ab^3 + 2a^2 + 2b^2 + 4 \\ &= 2^2 + (a^2 + b^2) \cdot 2 + ab(a + b)(a - b) \\ &= [2 + b(a + b)][2 + a(a - b)] \end{aligned}$$