因式分解 - 对称式和轮换式作业

一、对称式和轮换式

1. 分解因式 $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$

$\boxed{\text{解法一}}$

$x=y$ 时为 $f(x,y,z)=0$ 所以有因式 $(x-y)(y-z)(z-x)$。又原式为三次齐次多项式，可以设

$$f(x,y,z)=(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3=k(x-y)(y-z)(z-x)$$

令 $x=1,y=2,z=3$ 得到 $k=3$，所以

$$(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3=3(x-y)(y-z)(z-x)$$

$\boxed{\text{解法二}}$

直接欧拉公式

$$(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3-3[(x-y)(y-z)(z-x)]=[(x-y)+(y-z)+(z-x)][\cdots]$$

等式右边第一项为 0，所以

$$(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3-3[(x-y)(y-z)(z-x)]$$

注意，对于欧拉公式

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)[a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca]$$

如果 $a+b+c=0$, 那么 $a^3+b^3+c^3=3abc$。此结论经常用到。

2. 分解因式 $(a+b+c)^4-(b+c)^4-(c+a)^4-(a+b)^4+a^4+b^4+c^4$

$\boxed{\text{解答}}$

$a=0$ 时为 $f(a,b,c)=0$ 所以有因式 abc。又因为四次，可以设

$$f(a,b,c)=(a+b+c)^4-(b+c)^4-(c+a)^4-(a+b)^4+a^4+b^4+c^4=kabc(a+b+c)$$

令 $a=b=c=1$ 得到 $k=12$，所以

$$(a+b+c)^4-(b+c)^4-(c+a)^4-(a+b)^4+a^4+b^4+c^4=12abc(a+b+c)$$

3. 分解因式 $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$

$\boxed{\text{解答}}$

当 $x=-y$ 时，$f(x,y,z)=0$，故而 $x+y$ 是它的因式，又由于轮换式，所以 $(x+y)(y+z)(z+x)$ 是它的因式。考虑到原式为三次多项式，故而可设

$$(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3=k(x+y)(y+z)(z+x)$$

令 $x=y=z=1$ 可得 $k=3$，所以

$$(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3=3(x+y)(y+z)(z+x)$$

4. 分解因式 $(a+b)^5-a^5-b^5$

$\boxed{\text{解答}}$

$(a+b)^5-a^5-b^5=5ab(a+b)(a^2+b^2+ab)$

5. 分解因式 $(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5$

$\boxed{\text{解答}}$

当 $x=-y$ 时原式为 0，故原式含有因式 $x+y$ 可以设 $(x+y)(y+z)(z+x)[k(x^2+y^2+z^2)+l(xy+yz+zx)]$ 最后球的 $k=l=5$

6. 分解因式 $a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2$

$\boxed{\text{解答}}$

当 $a=\pm(b+c)$ 时原式为 0，故原式可设

$$k(a+b+c)(a-b-c)(b-c-a)(c-a-b)$$

最后求得 $k=1$