整式的恒等变换 1-作业

一、整式的恒等变换 1-作业

1. 判断下列等式是否成立，如果不成立，请指出其中的错误。

A. $a^r \cdot a^s = a^{rs}$

B. $(a^r)^s = a^{r+s}$

C. $\left(\frac{a}{b}\right)^r = a^r \cdot b^{-r}$

D. $a^r b^s = (ab)^{r+s}$

解答

略

2. 已知 $y = ax^5 + bx^3 + cx + d$，当 $x = 0$ 时 $y = -3$；当 $x = -5$ 时 $y = 9$，求当 $x = 5$ 时 y 的值。

解答

思路：本题无法直接带去求解方程，但可以从奇偶性入手. 当 $x = 0$ 时 $y = -3$, 带入即得 $d = -3$.

当 $x = -5$ 时 $y = 9$ 带入得 $9 = a(x)^5 + b(x)^3 + c(x) - 3$，

故而 $x = -5$ 时 $a \cdot x^5 + b \cdot x^3 + c \cdot 5 = 12$，所以 $x = 5$ 时 $y = -12 - 3 = -15$

3. 解方程 $3x^2 - 12x^2y + 12x^2y^2 + y^2 - 4y + 4 = 0$

解答

原方程可化为 $3x^2(2y-1)^2 + (y-2)^2 = 0$

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = 2. \end{cases}$$

4. 已知 $2^x+2^{-x}=a$，其中 a 为常数，求 4^x+4^{-x} 的结果，用 a 的表达式表示。

解答

$(2^x+2^{-x})^2=a^2$

$4^x+4^{-x}=a^2-2$

5. 已知 $a+b+c=0, a^2+b^2+c^2=1$，求

(1) $bc+ac+ab$

(2) $a^4+b^4+c^4$

解答

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)$ 所以 $ab+bc+ac=-\frac{1}{2}$

$(bc+ac+ab)^2=b^2c^2+a^2b^2+a^2c^2+2abc(a+b+c)=\frac{1}{4}$

而 $a^4+b^4+c^4=(a^2+b^2+c^2)^2-2(b^2c^2+a^2b^2+a^2c^2)=\frac{1}{2}$

6. 已知 $3x^2-x=1$，求 $6x^3+7x^2-5x+2022$

解答

原式 $=2x(3x^2-x)+3(3x^2-x)-2x+2022=2x+3-2x+2022=2025$

7. 求 $2x^2-4xy+5y^2-12y+13$ 最小值。

解答

原式 $=2(x-y)^2+3(y-2)^2+1$，故最小是为 1。

8. 求 $(2+1)(2^2+1)(2^4+1)\cdots(2^{2^n}+1)$ 的值。

解答

$4^{2^n}-1=2^{2^{n+1}}-1$

9. 求方程 $(x^2+3x-4)^2+(2x^2-7x+6)^2=(3x^2-4x+2)^2$ 的解。

解答

令 $u=x^2+3x-4, v=2x^2-7x+6$，原方程可化为

$u^2+v^2=(u+v)^2$，所以 $uv=0$，即 $u=0$ 或 $v=0$ 所以原方程的解为

$$x=1,-4,2,\frac{3}{2}$$