分式的概念和化简求值-作业

一、分式的概念和化简求值

1. 已知 $\frac{1}{n}-\frac{1}{m}-\frac{1}{m-n}=0$，求 $\left(\frac{m}{n}+\frac{n}{m}\right)^2$ 的值。

解答

由已知 $(m-n)^2=mn$，所以 $m^2+n^2=3mn$，所以原式

$$\begin{aligned}&\left(\frac{m}{n}+\frac{n}{m}\right)^2\\=&\left(\frac{m^2+n^2}{mn}\right)^2\\=&9\end{aligned}$$

2. 已知 $\frac{1}{x}=\frac{2}{y+z}=\frac{3}{z+x}$，求 $\frac{3z+5y}{4x}$ 的值。

解答

此题倒过来设 k。

设 $\frac{x}{1}=\frac{y+z}{2}=\frac{z+x}{3}=k$，则

$$\begin{cases}x=k\\y+z=2k\\z+x=3k\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}x=k\\y=0k\\z=2k\end{cases}$$

所以 $\frac{3z+5y}{4x}=\frac{6k}{4k}=\frac{3}{2}$。

3. 已知 $x^2-8x+13=0$，求 $\frac{x^4-6x^3-2x^2+18x+23}{x^2-8x+15}$

解答

分子除以 $x^2-8x+15$ 后余 10，分母除以 $x^2-8x+15$ 后余 2，所以为 5。

4. 已知 $x+y+z=3$，且 x,y,z 不全相等，则 $\frac{3(x-1)(y-1)(z-1)}{(x-1)^3+(y-1)^3+(z-1)^3}$

解答

换元 $x-1=u,y-1=v,z-1=w$ 后欧拉公式，结果为 1

5. 已知 $x^2-3x+1=0$，求 $\frac{2x^5-5x^4+2x^3-8x^2}{x^2+1}$ 的值。

$\boxed{\text{解答}}$

直接分子去凑比较麻烦，可以直接多项式除法。

将分子除以 x^2-3x+1，

$2x^5-5x^4+2x^3-8x^2=(x^2-3x+1)(2x^3+x^2+3x)-3x$，即原式可化为

$\frac{-3x}{x^2+1}=\frac{-(x^2+1)}{x^2+1}=-1$

6. 已知 $a+b+c=0$，且 a,b,c 均不为 0，求 $\frac{1}{b^2+c^2-a^2}+\frac{1}{c^2+a^2-b^2}+\frac{1}{a^2+b^2-c^2}$ 的值。

$\boxed{\text{解答}}$

由 $a+b=-c$ 得到 $a^2+b^2-c^2=-2ab$，同理 $b^2+c^2-a^2=-abc, c^2+a^2-b^2=-2ca$

原式结果为 0。

7. 已知 x,y,z 为三个不相等的非零实数，且 $x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{z}=z+\frac{1}{x}$，求证：$x^2y^2z^2=1$。

$\boxed{\text{解答}}$

由 $x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{z}$ 得到 $x-y=\frac{y-z}{yz}$，由因为 $x\neq y$ 所以 $yz=\frac{y-z}{x-y}$。

同理 $xy=\frac{x-y}{z-x}$，$\quad zx=\frac{z-x}{y-z}$。

相乘后可得 $x^2y^2z^2=1$。

8. 有理数 x,y,z 满足 $(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2=(y+z-2x)^2+(z+x-2y)^2+(x+y-2z)^2$，且 $y^2\neq 1$。求 $\frac{(yz+1)(x^2-1)}{(zx+1)(y^2-1)}$ 的值。

$\boxed{\text{解答}}$

设 $x-y=a,\quad y-z=b,\quad z-x=c$，代入原式展开可得 $a^2+b^2+c^2-2ab-2bc-2ca=0$。

又 $a+b+c=0$，显然 $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=0.$

两式相加 $a^2+b^2+c^2=0$，即 $a=b=c=0,\quad x=y=z$。于是所求值为 1。