

# 因式分解 - 双十字相乘, 主元法

## 一、双十字相乘概念

假设多项式

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f \quad (1)$$

可以因式分解为

$$(mx + py + j)(nx + qy + k) \quad (2)$$

将 2 展开可以得到

$$mnx^2 + (mq + np)xy + pqy^2 + (mk + nj)x + (pk + qj)y + kj \quad (3)$$

根据多项式相等的原理, 由 1 和 3 可以得到:

$$\begin{cases} mn = a \\ mq + np = b \\ pq = c \\ mk + nj = d \\ pk + qj = e \\ kj = f \end{cases} \quad (4)$$

所以可以得到双十字相乘

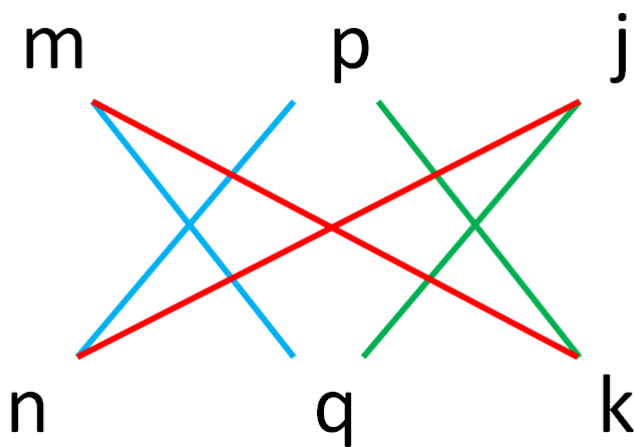


图 1: 双十字相乘示意图

## 二、双十字相乘例题

$$1. (b+c)x^2 - (b^2 + c^2 + 3bc)x + bc(b+c) \quad 2. x^2 + 2xy - 3y^2 + 3x + y + 2$$

$$3. x^2 - y^2 + 5x + 3y + 4$$

$$4. x^2 + 3xy + 2y^2 + 2x + 3y + 1$$

$$5. x^2 + 2xy + y^2 - 3x - 3y - 40$$

$$6. x^2 - 6xy + 9y^2 - 5xz + 15yz + 6z^2$$

$$7. x^2 - 2xy - 3y^2 - 2xz + 10yz - 3z^2$$

$$8. 6x^2 - 5xy - 6y^2 + 2x + 23y - 20$$

$$9. 2x^2 - xy + 4xz - 6y^2 + 13yz - 6z^2$$

$$10. 6x^2 - xy + 11xz - 12y^2 + 26yz - 10z^2$$

### 三、主元法概念

- 主要使用范围: 含多个字母的复杂多项式(大部分情况下至少三个字母)
- 一般步骤:
  - 选某一个字母作为主元(当成未知数), 其他当成常数
  - 按照这个字母降幂排列, 并且合并同类项
  - 利用已有知识因式分解
  - 关键在于选主元, 一个不行换一个
  - 口诀: 一选二排三分解

### 四、主元法例题

11.  $2x^3 - x^2z - 4x^2y + 2xyz + 2xy^2 - y^2z$

12.  $abc - ab - bc - ca + a + b + c - 1$

13.  $a^2b^2c^2 - a^2b^2 - b^2c^2 - c^2a^2 + a^2 + b^2 + c^2 - 1$

14.  $x^2 - 3xy - 10y^2 + x + 9y - 2$

15.  $a^3b - ab^3 + 2a^2 + 2b^2 + 4$