

因式分解 - 对称式和轮换式

一、对称式和轮换式概念

对称式是代数中常常遇到的一种特殊形式代数式。

在一个代数式中,如果把代数式中任意两个字母对换后代数式保持不变,则称这样的代数式为对称代数式,简称对称式。

例如 $a + b + c, x^2 + 2xy + y^2, \frac{1}{ab}, a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ 等都是对称式, 但是 $a - b - c, \frac{1}{x-y}, a + 2b + 3c$ 就不是对称式。

在一个代数式中,如果把代数式中所含字母顺序轮换后代数式保持不变,则称这样的代数式为轮换对称代数式,简称轮换式。

例如, $x^2y + y^2z + z^2x$ 中将 x 以 y 代换, y 以 z 代换, z 以 x 代换, 可以得到 $y^2z + z^2x + x^2y$, 它和原式完全相同, 所以它是关于 x, y, z 的轮换式。又比如 $x^2 + y^2 + z^2$ 等等。

关于齐次多项式的概念:

在一个代数式中,它所有项有相同的次数 n , 则称这样的多项式为 n 次齐次多项式。

例如: $x^2 + xy + y^2$ 是二次齐次多项式; $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ 是三次齐次多项式。

二、对称式和轮换式性质

- 对称式一定是轮换式,但是轮换式不一定是对称式。(想一想为什么?)

例如: $x^2y + y^2z + z^2x$ 是轮换式,但不是对称式。

- 关于相同字母的对称式(轮换式)的和、差、积、商(假定除式不为零且能整除)仍然是对称式(轮换式)。

例如: $a + b + c$ 和 abc 是关于 a, b, c 的对称式, 他们的和 $a + b + c + abc$, 差 $a + b + c - abc$, 积 $abc(a + b + c)$, 商 $\frac{a+b+c}{abc}$ 也都是对称式。

- 若对称式或者轮换式中含有某种形式的式子, 则必定也含有这种形式的同形式。例如, 关于 x, y, z 的二次齐次式中若含有 ax^2 , 则必定含有 ay^2, az^2 。所以关于 x, y, z 的二次齐次对称式的一般形式是 $a(x^2 + y^2 + z^2) + b(xy + yz + zx)$, 其中 a, b 为系数。

一般性的, 关于 x, y 的齐次轮换对称式(a, b 为系数)是:

- 一次 $a(x + y)$

- 二次 $a(x^2 + y^2) + bxy$
- 三次 $a(x^3 + y^3) + b(x^2y + y^2x)$

关于 x, y, z 的齐次轮换对称式 (a, b, c, d 为系数) 是 (想一想哪几个是轮换式但不是对称式):

- 一次 $a(x + y + z)$
- 二次 $a(x^2 + y^2 + z^2) + b(xy + yz + zx)$
- 三次 $a(x^3 + y^3 + z^3) + b(x^2y + y^2z + z^2x) + c(xy^2 + yz^2 + zx^2) + dxyz$

三、对称式和轮换式因式分解的一般方法

因为对称多项式一定是轮换多项式, 故而研究对称多项式的因式分解只需要研究轮换多项式因式分解就可以了。

- 选定一个字母 (如 x) 做主元, 其余看成常数。
- 利用因式定理确定它的因式, 再利用轮换式性质, 得到几个同类型的因式。例如, 若 $x - y$ 是轮换式的因式, 那么 $y - z, z - x$ 也一定是它的因式。
- 结合待定系数法求出系数。(通常可以只考虑特定几项或者采用特殊值的方法求解)

对于三个字母 x, y, z 的轮换多项式, 常见因式有 $xyz, (x+y+z), (x+y)(y+z)(z+x), (x-y)(y-z)(z-x), (x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)$ 等

四、对称式和轮换式例题 1

1. 下面那些是轮换式, 那些是对称式:

$$x + y + z, xyz, x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz, x^2y + y^2x, x^2y + y^2z + z^2x, \frac{x^2}{x-1} + \frac{y^2}{y-1}$$

2. 分解因式 $x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y)$

3. 分解因式 $a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b)$

4. 分解因式 $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

5. 分解因式 $(a+b+c)^3 - (b+c-a)^3 - (c+a-b)^3 - (a+b-c)^3$

6. 分解因式 $(x-y)^5 + (y-z)^5 + (z-x)^5$

7. 分解因式 $a^5 - b^5 - (a-b)^5$

8. 分解因式 $a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2 + 3abc$