整式综合 2

一、对整式综合 2

1. 在三角形 ABC 中，$a^2-16b^2-c^2+6ab+10bc=0$，其中 a,b,c 是三角形的三个边，求证：$a+c=2b$

解答

证明：将原等式的左边部分用双十字相乘进行因式分解（注意 ac 项系数为 0）

$$\begin{aligned}&a^2-16b^2-c^2+6ab+10bc\\=&(a+8b-c)(a-2b+c)\end{aligned}$$

当然也可以采用主元法因式分解

$$\begin{aligned}&a^2-16b^2-c^2+6ab+10bc\\=&a^2+6ab-(8b-c)(2b-c)\\=&[a+(8b-c)[a-(ab-c)]\\=&(a+8b-c)(a-2b+c)\end{aligned}$$

所以可以得到 $a+8b-c=0$ 或者 $a-2b+c=0$。

考虑到 a,b,c 是三角形三边，而三角形两边之和大于第三边，故而 $a+8b-c\neq 0$，所以可以得到 $a+c=2b$.

2. 已知 $a^2b+ac^2+b^2c=b^2a+bc^2+a^2c$，求 $(a-b)(b-c)(c-a)$ 的值。

解法一

$$\begin{aligned}&a^2b+ac^2+b^2c=b^2a+bc^2+a^2c,\\&(a^2b-a^2c)+(b^2c-c^2b)+(c^2a-b^2a)=0,\\&a^2(b-c)+bc(b-c)-a(b+c)(b-c)=0,\\&(b-c)[(a^2-ab)+(bc-ac)]=0,\\&(b-c)(a-b)(a-c)=0\end{aligned}$$

解法二

将原方程可化为

$$a^2b+ac^2+b^2c-(b^2a+bc^2+a^2c)=0$$

其等式左边是一个轮换式，且有因式 $a-b$，故而也有因式 $b-c$ 和 $c-a$, 即

$$a^2b+ac^2+b^2c-(b^2a+bc^2+a^2c)=(a-b)(b-c)(c-a)=0$$

3. 解方程 $(16x+27)^2(8x+15)(2x+3)=7$

$\boxed{\text{解答}}$

方程两边都乘以 16

$$(16x+27)^2(8x+15)(2x+3)=7$$
$$(16x+27)^2[2\cdot(8x+15)][8\cdot(2x+3)]=16\cdot 7$$
$$(16x+27)^2(16x+30)(16x+24)=112$$

换元法设 $16x+27=t$ 得到

$$t^2(t+3)(t-3)=112$$
$$t^4-9t^2-112=0$$
$$(t^2-16)(t^2+7)=0$$

由于 $t^2\geqslant 0$，故而 $t^2=16$，即 $t=\pm 4$

还原成 x，得到 $x=-\frac{23}{16}$ 或者 $x=-\frac{31}{16}$

4. 已知 a,b,c,d 满足 $a+b=c+d$，$a^3+b^3=c^3+d^3$，求证：$a^{2021}+b^{2021}=c^{2021}+d^{2021}$

$\boxed{\text{解答}}$

显然不是直接求值的。由 $a+b=c+d$ 可以得到 $(a+b)^3=(c+d)^3$ 故而

$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=c^3+3c^2d+3cd^2+d^3 \tag{1}$$

减去 $a^3+b^3=c^3+d^3$ 得到

$$ab(a+b)=cd(c+d) \tag{2}$$

分类讨论：

若 $a+b=c+d=0$，则 $a=-b,c=-d$，显然

$$a^{2021}+b^{2021}=c^{2021}+d^{2021}=0$$

若 $a+b=c+d\neq 0$ 由 2式可得

$$ab=cd \tag{3}$$

从而

$$(a-b)^2=(a+b)^2-4ab=(c+d)^2-4cd=(c-d)^2$$

故而

$$a-b=c-d \tag{4}$$

或者

$$a-b=d-c \tag{5}$$

若 4成立，在和 $a+b=c+d$ 相加得到 $a=c,b=d$；

若 5成立，在和 $a+b=c+d$ 相加得到 $a=d,b=c$。两者都容易得到

$$a^{2021}+b^{2021}=c^{2021}+d^{2021}$$

证毕

5. 证明:$(b+c-2a)^3+(c+a-2b)^3+(a+b-2c)^3=3(b+c-2a)(c+a-2b)(a+b-2c)$

解答

此题从左往右或者从右往左证明都不容易。但是考虑到欧拉公式的形式，可以通过左边-右边 $=0$ 来证明

$$\begin{aligned}&(b+c-2a)^3+(c+a-2b)^3+(a+b-2c)^3-3(b+c-2a)(c+a-2b)(a+b-2c)\\&=[(b+c-2a)+(c+a-2b)+(a+b-2c)][\cdots]\\&=0\end{aligned}$$

所以左边 $=$ 右边，证毕。

6. 已知 $x+y+z=3$，且 $(x-1)^3+(y-1)^3+(z-1)^3=0$，求证 x,y,z 中至少有一个为 1.

解法一

看到三个三次方的和联想到欧拉公式。

$$x+y+z=3 \tag{6}$$

得到

$$(x-1)+(y-1)+(z-1)=0 \tag{7}$$

设 $x-1=p,y-1=q,z-1=r$，那么

$$p^3+q^3+r^3-3pqr=(p+q+r)(p^2+q^2+r^2-pq-qr-rp) \tag{8}$$

等式左边为 $-3pqr$，右边为 0。

故而 p,q,r 中至少一个为 0，即 x,y,z 中至少有一个为 1。

解法二

由 $(x-1)+(y-1)+(z-1)=0$ 可得

$$x-1=-(y-1)-(z-1)$$

代入可得

$$\begin{aligned}
&(x-1)^3+(y-1)^3+(z-1)^3\\
&=-[(y-1)+(z-1)]^3+(y-1)^3+(z-1)^3\\
&=-3(y-1)^2(z-1)-3(y-1)(z-1)^2\\
&-3(y-1)(z-1)[(y+1)+(z+1)]\\
&=3(y-1)(z-1)(x-1)=0
\end{aligned}$$

故至少由一个项为 0，即 x,y,z 中至少有一个为 1。

7. 设 x^3+mx^2+nx+r 是关于 x 的一次式的完全立方，求证：$3mr=n^2$。

解答

最高次想系数为 0，考虑采用待定系数法，设一次项为 $x+k$，所以可以得到

$$\begin{aligned}
x^3+mx^2+nx+r&=(x+k)^3\\
x^3+mx^2+nx+r&=x^3+3x^2k+3xk^2+k^3
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} m=3k\\ n=3k^2\\ r=k^3 \end{cases} \tag{9}$$

由上述方程组可得 $3mr=9k^4=(3k^2)^2=n^2$，证毕。

8. 已知 a,b,c 两两不相等，并且 $a^2+b^2+mab=b^2+c^2+mbc=c^2+a^2+mca$。

(1) 求 m 的值;

解答

因为

$$a^2+b^2+mab=b^2+c^2+mbc \tag{10}$$

由 10得以得到

$$
\begin{aligned}
a^2-c^2+mab-mbc&=0\\
(a+c)(a-c)+mb(a-c)&=0\\
(a-c)(a+c+mb)&=0
\end{aligned}
\tag{11}
$$

因为 $a\neq c$ 所以可以得到

$$
a+c+mb=0 \tag{12}
$$

同理，$b+a+mc=0, c+b+ma=0$。任意两式相减即可得到 $m=1$。

(2) 证明：$a^2+b^2+c^2=2(a^2+b^2+mab)$.

解答

等式左边有 c 而右边没有，所以考虑把 c 替换掉。

由 12式和 $m=1$ 得以得到 $a+b=-c$。所以

$$
\begin{aligned}
&a^2+b^2+c^2\\
&=a^2+b^2+(a+b)^2\\
&=2(a^2+b^2+ab)
\end{aligned}
\tag{13}
$$

由于 $m=1$，故左边 $=$ 右边，证毕。

9. 已知 $m^2+n^2=1, p^2+q^2=1, mp+nq=0$，求证：$m^2+p^2=1, n^2+q^2=1, mn+pq=0$。

解答

分析：由 $mp+nq=0$ 可以得到 $nq=-mp$，变形 $\frac{q}{m}=-\frac{p}{n}$，连比的可以用设 k 法，这样替换后都变成 m,n,k 的方程。同时由于化成分式形式，故而需要考虑分母为 0 的情况。

解：若 m,n 中有一个为 0，由于对称性，不妨设 $m=0$，那么容易得到 $n^2=1, q=0, p^2=1$，代入可证。

现在考虑 m,n 均不为 0 的情况。设 $q=mk, p=-nk$，那么容易得到

$$
\begin{aligned}
p^2+q^2&=1\\
k^2(m^2+n^2)&=1\\
k^2&=1
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
& m^2+p^2 \\
& =m^2+k^2n^2 \\
& =m^2+n^2=1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& n^2+q^2 \\
& =k^2m^2+n^2 \\
& =m^2+n^2=1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& mn+pq \\
& =mn-k^2(mn) \\
& =mn-mn=0
\end{aligned}
$$

证毕。

10. 设 $x+y+z=xyz$,求证:$x(1-y^2)(1-z^2)+y(1-z^2)(1-x^2)+z(1-x^2)(1-y^2)=4xyz$

解答

此题左边为五次,右边三次,没有简便方法。只能代入计算。由 $x+y+z=xyz$,可得 $x+y=xyz-z$,同理 $y+z=xyz-x, z+x=xyz-y$。将左边展开后慢慢替换向 xyz 形式靠拢

$$
\begin{aligned}
& x(1-y^2)(1-z^2)+y(1-z^2)(1-x^2)+z(1-x^2)(1-y^2) \\
& =x(1-y^2-z^2+y^2z^2)+y(1-z^2-x^2+z^2x^2)+z(1-x^2-y^2+x^2y^2) \\
& =(x+y+z)-xy^2-xz^2+xy^2z^2-yz^2-yx^2+yz^2x^2-zx^2-zy^2+zx^2y^2 \\
& =xyz-xy(x+y)-yz(y+z)-zx(z+x)+xyz(yz+zx+xy) \\
& =xyz-xy(xyz-z)-yz(xyz-x)-zx(xyz-y)+xyz(yz+zx+xy) \\
& =xyz+xyz+yzx+zxy \\
& =4xyz
\end{aligned}
$$

证毕.