因式分解 - 试根法,因式定理和待定系数法

一、整式乘法和除法

- 整式乘法

$$(x+1)(2x^2+3x-2)=2x^3+5x^2+x-2 \tag{1}$$

- 整式除法

  注:由于 LaTeX Polynom 宏包的原因,多项式除法在竖式的表述和国内通常使用的长除法相差一个负号。故我们在长除竖式中的减法在这里需要用加法,下同。

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & & 2x^2 & +3x & -2 \\
\cline{2-5}
x+1) & 2x^3 & +5x^2 & +x & -2 \\
 & -2x^3 & -2x^2 & & \\
\cline{2-3}
 & & 3x^2 & +x & \\
 & & -3x^2 & -3x & \\
\cline{3-4}
 & & & -2x & -2 \\
 & & & 2x & +2 \\
\cline{4-5}
 & & & & 0
\end{array}
$$

  既 $(2x^3+5x^2+x-2)\div(x+1)=(2x^2+3x-2)$

二、因式定理

> 因式定理:如果多项式 $f(a)=0$,那么多项式 $f(x)$ 必定含有因式 $x-a$;反过来,如果 $f(x)$ 含有因式 $x-a$,那么 $f(a)=0$。

以 1式为例,$f(x)=2x^3+5x^2+x-2=(x+1)(2x^2+3x-2)$ 包含因式 $(x+1)$,所以 $f(-1)=0$;反过来 $(-1)=0$,所以 $f(x)=2x^3+5x^2+x-2=(x+1)=(2x^2+3x-2)$ 包含因式 $(x+1)$

三、试根法

> 试根法:分解高次多项式 $f(x)$,用常数项因数和最高次项因数的比值(即为 a)去试根,若验证 $f(a)=0$ 则 $x-a$ 可整除原多项式,即 $(x-a)$ 为 $f(x)$ 的因式。

仍然以 1式为例,常数项 -2 有因数 $\pm1,\pm2$,最高此项系数 2 有因数 $\pm1,\pm2$,那么如果存在有理数 a 使得 $f(a)=0$,则 a 只可能在 $\pm1,\pm2,\pm\frac{1}{2}$ 中选取。再看 1式,完全因式分解后为 $(x+1)(2x-1)(x+2)$,亦即有 $f(-1)=0,f(\frac{1}{2})=0,f(-2)=0$。

四、关于试根法中根和系数关系的证明

设

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n(a_n\neq 0,a_i\in\mathbb{Z},i=0,1,2\cdots n) \tag{2}$$

存在有理根

$$c=\frac{q}{p} \tag{3}$$

使得 $f(c)=0$, 其中 p,q 是互质的整数。将 3带入 2得到

$$a_0+a_1\frac{q}{p}+a_2\frac{q^2}{p^2}+\cdots+a_n\frac{q^n}{p^n}=0 \tag{4}$$

两边都乘以 p^n 可以得到

$$a_0p^n+a_1qp^{n-1}+\cdots+a_{n-1}q^{n-1}p+a_nq^n=0 \tag{5}$$

对于等式右边 p 可以整除 0, 故而 p 可以整除等式左边的多项式。又因为其他项都含有因数 p, 只需要考虑最后一项 a_nq^n。而又由于 p,q 互质，所以 p 可以整除 a_n，亦即 p 是 a_n 的因数。

同理可得 q 是 a_0 的因数。

五、试根法和因式定理例题

1. 若多项式 x^2-mx+6 有一个因式是 $x-3$，求 m 的值。

解答

由题意可知 $x=3$ 时原多项式的值为 0，故而 $m=5$。

2. 若多项式 $x^3+ax^2+bx+10$ 有一个因式是 $x^2-3x-10$，求 a,b 的值。

解答

由题意可知 $x=5$ 和 $x=-2$ 时原多项式的值为 0，带入后可得关于 a,b 方程组解方程组可得 $a=-4,b=-7$

3. 因式分解：$x^3+x^2-10x-6$

解答

最高次项系数 1，常数项 -6，所以如果存在有理根，可能的值为 $x=\pm1,x=\pm2,x=\pm3,x=\pm6$ 经验证 $x=3$ 时多项式的值为 0。

$$
\begin{array}{r}
x^2 \quad + 4x + 2 \\
x-3\overline{)\quad x^3 \quad + x^2 - 10x - 6} \\
\underline{-x^3 + 3x^2} \qquad\qquad\quad \\
4x^2 - 10x \quad\;\; \\
\underline{-4x^2 + 12x} \quad\;\; \\
2x - 6 \\
\underline{-2x + 6} \\
0
\end{array}
$$

所以结果为 $(x-3)(x^2+4x+2)$

4. 因式分解：$x^3+6x^2+11x+6$

解答

$(x+1)(x+2)(x+3)$

5. 因式分解：$2x^3-5x^2+5x-3$

解答

$f(\frac{3}{2})=0$ 所以 $x-\frac{3}{2}$ 是一个因式。为避免分数计算，乘以 2 后 $2x-3$ 仍然是它的因式。最后可得 $(2x-3)(x^2-x+1)$

6. 因式分解：$f(x)=6x^4+5x^3+3x^2-3x-2$

解答

$a_0=-2, a_n=6$ 所以 $f(x)$ 的有理根只可能为 $\pm1, \pm2, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{1}{6}$
经检验 $-\frac{1}{2}$ 是一个根，所以 $2x+1$ 是 $f(x)$ 的因式，可得

$$(2x+1)(3x^3+x^2+x-2)$$

对 $3x^3+x^2+x-2$ 来说 $\frac{2}{3}$ 是一个根，再一次用试根法最后可得

$$(2x+1)(3x-2)(x^2+x+1)$$

7. 系数为字母的情况因式分解：$x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc$

解答

常数项为 $-abc$ 故而可能的因数为

$$\pm a, \pm b, \pm c, \pm ab, \pm bc, \pm ca, \pm abc$$

经验证 a 是一个根，即 $x-a$ 是一个因式

$$\begin{aligned}
&x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc \\
=&(x^3-ax^2)-[(b+c)x^2-a(b+c)x]+(bcx-abc) \\
=&(x-a)[x^2-(b+c)x+bc] \\
=&(x-a)(x-b)(x-c)
\end{aligned}$$

8. 因式分解：$(l+m)x^3+(3l+2m-n)x^2+(2l-m-3n)x-2(m+n)$

解答

当多项式所有项的系数相加和为 0，那么 1 一定是它的根；当多项式偶次项的系数的和减去奇次项系数的和等于 0，那么 -1 一定是它的根。想一想为什么?

$-(l+m)+(3l+2m-n)-(2l-m-3n)-2(m+n)=0$

用多项式长除法可得

$$(x+1)[(l+m)x^2+(2l+m-n)x-2(m+n)]$$

然后对 $(l+m)x^2+(2l+m-n)x-2(m+n)$ 十字相乘

$$(x+1)(x+2[(l+m)x-(m+n)])$$

六、待定系数法

定理：一个整系数多项式如果能分解为两个有理系数的因式的乘积，那么也一定能分解为两个整系数的因式的积。

根据以上定理，对于整系数的高次多项式因式分解，我们只需要讨论整系数的情况就可以了。

七、待定系数法例题

9. 分解因式：$x^4+x^3+2x^2-x+3$

解答

首先尝试试根法，经验证 $\pm1,\pm3$ 都不满足条件 $f(x)=0$ 的条件故而我们可以设

$$x^4+x^3+2x^2-x+3=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d) \tag{6}$$

比较两边系数,可以得到

$$\begin{cases} a+c=1 & (7) \\ b+d+ac=2 & (8) \\ bc+ad=-1 & (9) \\ bd=3 & (10) \end{cases}$$

这种方程组一般不易求解,但由于我们只需要考虑整系数的情况,那么

$$\begin{cases} b=1 & (11) \\ d=3 & (12) \end{cases}$$

或者

$$\begin{cases} b=-1 & (13) \\ d=-3 & (14) \end{cases}$$

注:$b=3,d=1$ 和 $b=-3,d=-1$ 忽略,想一想为什么

将 $b=1,d=3$ 代入后可得 $a=-1,c=2$, 故而

$$x^4+x^3+2x^2-x+3=(x^2-x+1)(x^2+2x+3)$$

若将 $b=-11,d=-3$ 带入原方程组是矛盾的,舍去。故而最终答案唯一,即

$$x^4+x^3+2x^2-x+3=(x^2-x+1)(x^2+2x+3)$$

10. 若 $13x^3+mx^2+11x+n$ 能被 $13x^2-6x+5$ 整除,求 m,n 的值.

解答

三次除以二次,商式最高为一次。可以设商式为 $(x+a)$ 即

$$13x^3+mx^2+11x+n=(x+a)(13x^2-6x+5)$$
$$=13x^3+(13a-6)x^2+(5-6a)x+5a$$

比较两边系数,可以得到

$$\begin{cases} 13a-6=m & (15) \\ 5-6a=11 & (16) \\ 5a=n & (17) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=-1 \\ m=-19 \\ n=-5 \end{cases}$$

11. 已知 $x^5-5qx+4r$ 有因式 $(x-c)^2$,试说明 $q^5=r^4$ 的理由.

$\boxed{\text{解答}}$

设

$$x^5-5qx+4r=(x-c)^2(x^3+ax^2+bx+\frac{4r}{c^2})$$

展开后比较系数

$$\begin{cases} a-2c=0 & (18) \\ c^2+b-2ac=0 & (19) \\ ac^2-2bc+\dfrac{4r}{c^2}=0 & (20) \\ \dfrac{8r}{c}-bc^2=5q & (21) \end{cases}$$

由 18和 19可得 $a=2c,b=3c^2$

代入 20和 21可得 $r=c^5,q=c^4$

所以 $q^5=r^4$