

## 因式分解 - 换元法作业

### 一、因式分解

1. 因式分解:  $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) - 12$

解答

$$(x^2 + x - 2)(x^2 + x + 5)$$

2. 因式分解:  $12(x + y)^2 + 11(x + y)(x - y) + 2(x - y)^2$

解答

设  $x + y = m, x - y = n$ , 原式可化为

$$\begin{aligned} & 12m^2 + 11mn + 2n^2 \\ &= (3m + 2n)(4m + n) \\ &= (5x + y)(5x + 3y) \end{aligned}$$

3. 因式分解:  $(x - 1)x(x + 1)(x + 2) - 24$

解答

$$\begin{aligned} & (x - 1)x(x + 1)(x + 2) - 24 \\ &= [(x - 1)(x + 2)][x(x + 1)] - 24 \\ &= (x^2 + x - 2)(x^2 + x) - 24 \end{aligned}$$

设  $x^2 + x - 1 = u$  原式可继续化为

$$\begin{aligned} & (u - 1)(u + 1) - 24 \\ &= u^2 - 25 \\ &= (u + 5)(u - 5) \\ &= (x^2 + x + 4)(x^2 + x - 6) \\ &= (x + 3)(x - 2)(x^2 + x + 4) \end{aligned}$$

4. 因式分解:  $(x^2 - 15x + 54)(x^2 + 11x + 28) + 350$

解答

原式可化为

$$\begin{aligned}& (x-6)(x-9)(x+4)(x+7)+350 \\&= [(x-6)(x+4)][(x-9)(x+7)]+350 \\&= (x^2-2x-24)(x^2-2x-63)+350\end{aligned}$$

设  $x^2-2x-36=u$  原式可化为 (注意, 这里设主元的时候选了相对中间的一个, 为了计算方便)

$$\begin{aligned}& (u+12)(u-27)+350 \\&= u^2-15u-324+350 \\&= u^2-15u+26 \\&= (u-2)(u-13) \\&= (x^2-2x-38)(x^2-2x-49)\end{aligned}$$

5. 因式分解:  $(x^2+4x+6)(x^2+6x+6)-3x^2$

**解答**

设  $x^2+4x+6=m$  原式可化为

$$\begin{aligned}& m \cdot (m+2x)-3x^2 \\&= m^2+2xm-3x^2 \\&= (m+3x)(m-x) \\&= (x^2+7x+6)(x^2+3x+6) \\&= (x+1)(x+6)(x^2+3x+6)\end{aligned}$$

6. 因式分解:  $(x^4-4x^2+1)(x^4+3x^2+1)+10x^4$

**解答**

设  $x^4-4x^2+1=m$  原式可化为

$$\begin{aligned}& m \cdot (m+7x^2)+10x^4 \\&= 10x^4+7mx^2+m^2 \\&= (5x^2+m)(2x^2+m) \\&= (x^4+x^2+1)(x^4-2x^2+1) \\&= (x^4+2x^2+1-x^2)(x+1)^2(x-1)^2 \\&= [(x^2+1)^2-x^2](x+1)^2(x-1)^2 \\&= (x^2+x+1)(x^2-x+1)(x+1)^2(x-1)^2\end{aligned}$$

7. 因式分解:  $(x+y)^3 + 2xy(1-x-y) - 1$

解答

设  $x+y=m, xy=n$  原式可化为

$$\begin{aligned} & m^3 + 2n(1-m) - 1 \\ &= m^3 - 2nm + 2n - 1 \\ &= (m-1)(m^2 + m + 1) - 2n(m-1) \\ &= (m-1)(m^2 + m - 2n + 1) \\ &= (x+y-1)(x^2 + y^2 + 2xy + x + y - 2xy + 1) \\ &= (x+y-1)(x^2 + y^2 + x + y + 1) \end{aligned}$$

8. 因式分解:  $(x+a)(x+2a)(x+3a)(x+4a) + a^4$

解答

$$\begin{aligned} & [(x+a)(x+4a)][(x+2a)(x+3a)] + a^4 \\ &= (x^2 + 5ax + 4a^2)(x^2 + 5ax + 6a^2) + a^4 \\ &= (x^2 + 5ax + 5a^2)^2 \end{aligned}$$

9. 因式分解:  $2x^4 - x^3 - 6x^2 - x + 2$

解答

提出  $x^2$  后设  $x + \frac{1}{x} = m$ , 最后得  $(2x-1)(x-2)(x+1)^2$

10. 因式分解:  $x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1$

解答

提出  $x^2$  后设  $x + \frac{1}{x} = m$ , 最后得  $(x^2 + 3x + 1)(x-1)^2$

11. 因式分解:  $(3x+5)^2(3x+7)(x+1) - 4$

解答

提出  $\frac{1}{3}$  后设  $3x+5 = m$ , 最后得  $(9x^2 + 30x + 19)(3x^2 + 10x + 9)$