

因式分解 - 换元法

一、换元法概念

“换元”就是“字母替代式”，即用新的“元”代替原来式中的式，使得原式变成含有新“元”的式子，然后对含有新元的式子按照要求求出结果，在将其代替的式子代回来，求出原式结果。

二、换元的作用

- 为什么换元：化繁为简，比如高次化为低次，分式化成整式，等等。
- 什么时候换元：相同或者相似形式的代数式反复出现的时候。
- 最重要的，记得还原回来。

三、常用换元方法

- 局部换元
- 均值换元
- 和积 $x + y; xy$ 形式
- $x + \frac{1}{x}$ 形式

四、换元法例题

1. 因式分解： $(x^2 + x - 1)^2 + (x^2 + x - 1) - 2$

2. 因式分解： $(x^2 + 4x + 8)^2 + 3x(x^2 + 4x + 8) + 2x^2$ (局部换元)

3. 因式分解: $x^4 + (2y + 4)x^2 + y^2 + 4y + 4$ (局部换元)

4. 因式分解: $(2a^2 + 2a + 1)b + a(a + 1)(b^2 + 1)$

5. 因式分解: $(x + 1)^4 + (x + 3)^4 - 272$ (均值换元)

6. 因式分解: $(x + 1)(x + 3)(x + 5)(x + 7) + 15$

7. 因式分解: $(x^2 + 6x + 8)(x^2 + 14x + 48) + 12$

8. 证明: 四个连续整数的乘积加 1 是整数的平方。

9. 因式分解: $(x^2 + 3x + 3)(x^2 + 7x + 3) + 3x^2$ (局部换元)

10. 因式分解: $(x^2 - x - 2)(x^2 + 9x - 2) + 9x^2$ (局部换元)

11. 因式分解: $(x + y - 2xy)(x + y - 2) + (1 - xy)^2$ (积和换元)

12. 因式分解: $x^4 + x^3 + \frac{9}{4}x^2 + x + 1$

13. 因式分解: $(x + y + z)^3 + (3x - 2y - 3z)^3 - (4x - y - 2z)^3$