分式的概念和化简求值

一、分式的概念

关于分式的基本概念：

> 当两个整式相除，即 $A \div B$ 时，可以表示为 $\frac{A}{B}$. 如果 B 含有字母，那么 $\frac{A}{B}$ 叫做分式。其中 A 为分式的分子，B 为分式的分母。如果分式的分母为零，那么这个分式无意义。

二、分式的加减乘除和基本性质

分式加减乘除规则

- 分式加法

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{cb}{bd}=\frac{ad+cb}{bd}$$

- 分式减法

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}-\frac{cb}{bd}=\frac{ad-cb}{bd}$$

- 分式乘法

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

- 分式乘法

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$$

- 分式乘方

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$$

分式基本性质

- $$\frac{a}{b}=\frac{am}{bm},\quad \frac{a}{b}=\frac{a\div m}{b\div m}(m\neq 0)$$
- 分子、分母和分式本身的符号三者中，改变任何两个的符号，分式的值不变。

比例的性质

- 如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d},\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$,那么 $\frac{a}{b}=\frac{e}{f}$。
- 如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$,那么 $ad=bc$。
- 如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$,那么 $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$(合比性质)。
- 如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d},(a-b\neq 0)$,那么 $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$(合分比性质)。
- 如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\cdots=\frac{m}{n}$,且 $b+d+\cdots+n\neq 0$,那么 $\frac{a+c+\cdots+m}{b+d+\cdots+n}=\frac{a}{b}$(等比性质)。

三、例题

1. 若 a,b,c 为非零常数,且 $\frac{a+b-c}{c}=\frac{a-b+c}{b}=\frac{-a+b+c}{a}$,求 $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$

2. 已知 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$,求 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$ 的值。

3. 已知 $\frac{x}{x^2+x+1}=\frac{1}{4}$,求 $\frac{x^2}{x^4+x^2+1}$ 的值。

4. 已知三个不全为 0 的数 x, y, z 满足 $4x-3y-6z=0, x+2y-7z=0$。求 $\frac{2x^2+3y^2+6z^2}{x^2+5y^2+7z^2}$ 的值

5. 已知 x, y, z 为有理数，且 $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=(y+z-2x)^2+(z+x-2y)^2+(x+y-2z)^2$，求 $\frac{(yz+1)(zx+1)(xy+1)}{(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)}$ 的值。

6. 已知 $a \neq b, a \neq 0, b \neq 0, a+b \neq 0, x=\frac{4ab}{a+b}$，求 $\frac{x+2a}{x-2a}+\frac{x+2b}{x-2b}$ 的值。

7. 若 $\frac{a+b-c}{c}=\frac{a-b+c}{b}=\frac{-a+b+c}{a}$，求 $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$ 的值。