整式综合 2 作业

一、整式综合 2

1. 已知 $x-3y+4z=1, 2x+y-2z=2$，化简 $x^2-2xy-3y^2+2xz+10yz-8z^2$

解答

将 $x^2-2xy-3y^2+2xz+10yz-8z^2$ 因式分解

$$\begin{aligned}&x^2-2xy-3y^2+2xz+10yz-8z^2\\&=(x-3y+4z)(x+y-2z)\\&=(x-3y+4z)(2x+y-2z-x)\\&=2-x\end{aligned}$$

2. 若 a,b,c 是整数，且 b 是正整数，同时他们满足 $a+b=c, b+c=d, c+d=a$，那么 $a+b+c+d$ 的最大值

解答

由 $a+b=c, c+d=a$ 可得 $b=-d$，代入 $b+c=d$ 得到 $c=2d, a=3d$。

$$\begin{aligned}&a+b+c+d\\&=3d+(-d)+2d+d\\&=5d\\&=-5b\end{aligned}$$

因为 b 为正整数，所以最大值为 -5。

3. 若 a^2+2a+5 是 a^4+ma^2+n 的一个因式，求 mn 的值。

解答

由待定系数法，设 $a^4+ma^2+n=(a^2+2a+5)(a^2+ua+\frac{n}{5})$

$$\begin{cases}u+2=0\\5+\frac{n}{5}+2u=m\\\frac{2n}{5}+5u=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}u=-2\\m=6\\n=25\end{cases}$$

4. 若 $a+b=10, a^3+b^3=100$，求 a^2+b^2

解答

40

5. 若 $a^3+b^3+c^3=a^2+b^2+c^2=a+b+c=1$，求 abc 的值。

解答

$$\begin{aligned} a+b+c&=1\\ a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca&=1\\ 1+2(ab+bc+ca)&=1\\ ab+bc+ca&=0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^3+b^3+c^3-3abc&=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\\ 1-3abc&=1\cdot(1-0)\\ 3abc&=0\\ abc&=0 \end{aligned}$$

6. 若 $x-y=1+m, y-z=1-m$，求 $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$

解答

$x-y=1+m, y-z=1-m$ 得到 $x-z=2$

$$\begin{aligned} &x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\\ =&\frac{1}{2}[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2]\\ =&m^2+3 \end{aligned}$$

7. 已知直角三角形的直角边为 a,b，斜边为 c。其中 a,b,c 均为整数并且 a 为质数。求证：$2(a+b+1)$ 是完全平方数。

解答

由直角三角形得 $a^2=c^2-b^2=(c-b)(c+b)$，因为 a 是质数，故而

$$\begin{cases} c-b=1\\ c+b=a^2 \end{cases}$$

得到 $2b=a^2-1$，所以

$$\begin{aligned}&2(a+b+1)\\=&a^2+2a+1\\=&(a+1)^2\end{aligned}$$

证毕。

8. 已知 $(1-ab)^2=(2ab-a-b)(a+b-2)$，求证 a,b 中至少有一个为 1。

解答

令 $a+b=x,ab=y$，原方程变为 $(1-y)^2-(2y-x)(x-2)=0$。原方程左边

$$\begin{aligned}&(1-y)^2-(2y-x)(x-2)\\=&y^2-2y+1+x^2-2xy-2x+4y\\=&y^2+2y+1+x^2-2x(y+1)\\=&(y+1^2)-2x(y+1)+x^2\\&(y+1-x)^2\end{aligned}$$

为 0，即 $y+1=x$，亦即 $ab+1=a+b$，得到 $(a-1)(b-1)=0$，故两者至少有一个为 1。

9. 若 x 是正整数，则 x^4-3x^2+9 是质数还是合数，并证明你的结论。

解答

$$\begin{aligned}&x^4-3x^2+9\\=&x^4+6x^2+9-9x^2\\=&(x^2+3)^2-9x^2\\=&(x^2+3x+3)(x^2-3x+3)\end{aligned}$$

当 $x=1$，原式为 7，质数。

当 $x=2$，原式为 13，质数。

当 $x\geqslant 3$ 上述两个因式都大于 1，所以 $x\geqslant 3$ 时都是合数