因式分解 - 换元法

一、换元法概念

“换元”就是“字母替代式”，即用新的“元”代替原来式中的式，使得原式变成含有新“元”的式子，然后对含有新元的式子按照要求求出结果，在将其代替的式子代回来，求出原式结果。

二、换元的作用

- 为什么换元：化繁为简，比如高次化为低次，分式化成整式，等等。
- 什么时候换元：相同或者相似形式的代数式反复出现的时候。
- 最重要的，记得还原回来。

三、常用换元方法

- 局部换元
- 均值换元
- 和积 $x+y; xy$ 形式
- $x+\frac{1}{x}$ 形式

四、换元法例题

1. 因式分解：$(x^2+x-1)^2+(x^2+x-1)-2$

解答

设 $x^2+x-1=u$，原式可化为

$$\begin{aligned}
&u^2+u-2\\
=&(u-1)(u+2)\\
=&(x^2+x-2)(x^2+x+1)\\
=&(x-1)(x+2)(x^2+x+1)
\end{aligned}$$

2. 因式分解：$(x^2+4x+8)^2+3x(x^2+4x+8)+2x^2$ (局部换元)

解答

设 $x^2+4x+8=u$,原式可化为

$$\begin{aligned}&u^2+3xu+2x^2\\=&(u+x)(u+2x)\\=&(x^2+4x+8+x)(x^2+4x+8+2x)\\=&(x^2+5x+8)(x^2+6x+8)\\=&(x+2)(x+4)(x^2+5x+8)\end{aligned}$$

3. 因式分解:$x^4+(2y+4)x^2+y^2+4y+4$ (局部换元)

解法一

设 $y+2=u$,原式可化为

$$\begin{aligned}&x^4+2ux^2+u^2\\=&(x^2+u)^2\\=&(x^2+y+2)^2\end{aligned}$$

解法二

此题也可以设 $x^2+y=m$,原式可化为

$$\begin{aligned}&x^4+2x^2y+y^2+4x^2+4y+4\\=&(x^2+y)^2+4(x^2+y)+4\\=&m^2+4m+4\\=&(x^2+y+2)^2\end{aligned}$$

解法三

此题也可以设 $x^2+2=n$,原式可化为

$$\begin{aligned}&x^4+4x^2+4+2x^2y+4y+y^2\\=&(x^2+2)^2+2y(x^2+2)+y^2\\=&n^2+2yn+y^2\\=&(x^2+y+2)^2\end{aligned}$$

4. 因式分解:$(2a^2+2a+1)b+a(a+1)(b^2+1)$

解答

此题展开后合并不容易，可以将 $a+1$ 看成整体。设 $a+1=u$ 那么 $(a^2+2a+1)=u^2$，所以原式可化为

$$\begin{aligned}&(u^2+a^2)b+au(b^2+1)\\=&u^2b+a^2b+aub^2+au\\=&(u^2b+au)+(a^2+aub^2)\\=&(ub+a)(u+ab)\\=&(a+b+ab)(a+1+ab)\end{aligned}$$

5. 因式分解：$(x+1)^4+(x+3)^4-272$ (均值换元)

解答

选取括号内的均值为元，设 $x+2=u$，原式可化为

$$\begin{aligned}&(u-1)^4+(u+1)^4-272\\=&[(u^2+1)-2u]^2+[(u^2+1)+2u]^2-272\\=&2(u^4+6u^2+1)-272\\=&2(u^4+6u^2-135)\\=&2(u^2-9)(u^2+15)\\=&2(u+3)(u-3)(u^2+15)\\=&2(x-1)(x+5)(x^2+4x+19)\end{aligned}$$

6. 因式分解：$(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15$

解法一

一般会凑成 ax^2+bx+m 形式然后对常数取平均换元，注意这不是绝对的。取其他值 (比如较小值) 还原一样可行。

$$\begin{aligned}&[(x+1)(x+7)][(x+3)(x+5)]+15\\=&(x^2+8x+7)(x^2+8x+15)+15\end{aligned}$$

设 $x^2+8x+11=u$,原式可化为

$$\begin{aligned}&(u-4)(u+4)+15\\=&u^2-16+15\\=&(u+1)(u-1)\\=&(x^2+8x+12)(x^2+8x+10)\\=&(x+2)(x+6)(x^2+8x+10)\end{aligned}$$

$\boxed{\text{解法二}}$

设 $x^2+8x+7=v$,原式可化为

$$\begin{aligned}&v(v+8)+15\\=&v^2+8v+15\\=&(v+3)(v+5)\\=&(x^2+8x+12)(x^2+8x+10)\\=&(x+2)(x+6)(x^2+8x+10)\end{aligned}$$

7. 因式分解:$(x^2+6x+8)(x^2+14x+48)+12$

$\boxed{\text{解答}}$

原式可化为

$$\begin{aligned}&(x+2)(x+4)(x+6)(x+8)+12\\=&[(x+2)(x+8)][(x+4)(x+6)]+12\\=&(x^2+10x+16)(x^2+10x+24)+12\end{aligned}$$

设 $x^2+10x+20=m$,换元后可得

$$\begin{aligned}&(m-4)(m+4)+12\\=&m^2-4\\=&(m+2)(m-2)\\=&(x^2+10x+22)(x^2+10x+18)\end{aligned}$$

8. 证明:四个连续整数的乘积加 1 是整数的平方。

$\boxed{\text{解答}}$

设四个整数分别为 $x+1, x+2, x+3, x+4$ 那么

$$
\begin{aligned}
&(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1 \\
=&[(x+1)(x+4)][(x+2)(x+3)]+1 \\
=&(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)+1
\end{aligned}
$$

设 $x^2+5x+4=t$ 上式可化为

$$
\begin{aligned}
&t(t+2)+1 \\
=&(t+1)^2 \\
=&(x^2+5x+5)^2
\end{aligned}
$$

9. 因式分解:$(x^2+3x+3)(x^2+7x+3)+3x^2$ (局部换元)

$\boxed{\text{解答}}$

设 $x^2+3x+3=t$ 原式可化为

$$
\begin{aligned}
&t(t+4x)+3x^2 \\
=&t^2+4xt+3x^2 \\
=&(t+x)(t+3x) \\
=&(x^2+4x+3)(x^2+6x+3) \\
=&(x+1)(x+3)(x^2+6x+3)
\end{aligned}
$$

10. 因式分解:$(x^2-x-2)(x^2+9x-2)+9x^2$ (局部换元)

$\boxed{\text{解答}}$

设 $x^2-x-2=t$ 原式可化为(注也可设 $x^2+4x-2=m$ 求解)

$$
\begin{aligned}
&t(t+10x)+9x^2 \\
=&t^2+10xt+9x^2 \\
=&(t+x)(t+9x) \\
=&(x^2-2)(x^2+8x-2)
\end{aligned}
$$

11. 因式分解:$(x+y-2xy)(x+y-2)+(1-xy)^2$ (积和换元)

$\boxed{\text{解答}}$

设 $x+y=m,xy=n$ 原式可化为

$$\begin{aligned}
&(m-2n)(m-2)+(1-n)^2\\
&=m^2-2m-2mn+4n+n^2-2n+1\\
&=m^2-2mn+n^2-2m+2n+1\\
&=(m-n-1)^2\\
&=(x+y-xy-1)^2\\
&=(1-y)^2(x-1)^2
\end{aligned}$$

12. 因式分解:$x^4+x^3+\frac{9}{4}x^2+x+1$

解答

原式可化为

$$\begin{aligned}
&x^2\left(x^2+x+\frac{9}{4}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\\
&=x^2\left[\left(x^2+2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{4}\right]\\
&=x^2\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{4}\right]
\end{aligned}$$

设 $x+\frac{1}{x}=t$,原式可转化为

$$\begin{aligned}
&x^2\left(t^2+t+\frac{1}{4}\right)\\
&=x^2\left(t+\frac{1}{2}\right)^2\\
&=\left[x\left(t+\frac{1}{2}\right)\right]^2\\
&=\left[x\left(x+\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)\right]^2\\
&=\frac{1}{4}(2x^2+x+2)^2
\end{aligned}$$

13. 因式分解:$(x+y+z)^3+(3x-2y-3z)^3-(4x-y-2z)^3$

解答

设 $x+y+z=a;3x-2y-3z=b$,那么 $4x-y-2z=a+b$,原式可化为

$$
\begin{aligned}
& a^3+b^3-(a+b)^3 \\
&=(a+b)(a^2-ab+b^2)-(a+b)^3 \\
&=(a+b)[a^2-ab+b^2-(a+b)^2] \\
&=(a+b)(-3ab) \\
&-3(4x-y-2z)(x+y+z)(3x-2y-3z)
\end{aligned}
$$