因式分解 - 试根法,因式定理和待定系数法

一、整式乘法和除法

- 整式乘法

$$(x+1)(2x^2+3x-2)=2x^3+5x^2+x-2 \tag{1}$$

- 整式除法

注:由于 LaTeX Polynom 宏包的原因,多项式除法在竖式的表述和国内通常使用的长除法相差一个负号。故我们在长除竖式中的减法在这里需要用加法,下同。

$$\begin{array}{rl}
 & \phantom{2x^3+{}}2x^2+3x-2 \\ \cline{2-2}
x+1\big) & 2x^3+5x^2\;\;+x-2 \\
 & -2x^3-2x^2 \\ \cline{2-2}
 & \phantom{-2x^3-{}}3x^2\;\;+x \\
 & -3x^2-3x \\ \cline{2-2}
 & -2x-2 \\
 & 2x+2 \\ \cline{2-2}
 & 0
\end{array}$$

既 $(2x^3+5x^2+x-2)\div(x+1)=(2x^2+3x-2)$

二、因式定理

> 因式定理:如果多项式 $f(a)=0$,那么多项式 $f(x)$ 必定含有因式 $x-a$;反过来,如果 $f(x)$ 含有因式 $x-a$,那么 $f(a)=0$。

以 1式为例,$f(x)=2x^3+5x^2+x-2=(x+1)(2x^2+3x-2)$ 包含因式 $(x+1)$,所以 $f(-1)=0$;反过来 $(-1)=0$,所以 $f(x)=2x^3+5x^2+x-2=(x+1)=(2x^2+3x-2)$ 包含因式 $(x+1)$

三、试根法

> 试根法:分解高次多项式 $f(x)$,用常数项因数和最高次项因数的比值(即为 a)去试根,若验证 $f(a)=0$ 则 $x-a$ 可整除原多项式,即 $(x-a)$ 为 $f(x)$ 的因式。

仍然以 1式为例,常数项 -2 有因数 $\pm1,\pm2$,最高此项系数 2 有因数 $\pm1,\pm2$,那么如果存在有理数 a 使得 $f(a)=0$,则 a 只可能在 $\pm1,\pm2,\pm\frac{1}{2}$ 中选取。再看 1式,完全因式分解后为 $(x+1)(2x-1)(x+2)$,亦即有 $f(-1)=0, f(\frac{1}{2})=0, f(-2)=0$。

四、关于试根法中根和系数关系的证明

设

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n(a_n\neq 0,a_i\in\mathbb{Z},i=0,1,2\cdots n) \quad (2)$$

存在有理根

$$c=\frac{q}{p} \quad (3)$$

使得 $f(c)=0$, 其中 p,q 是互质的整数。将 3带入 2得到

$$a_0+a_1\frac{q}{p}+a_2\frac{q^2}{p^2}+\cdots+a_n\frac{q^n}{p^n}=0 \quad (4)$$

两边都乘以 p^n 可以得到

$$a_0p^n+a_1qp^{n-1}+\cdots+a_{n-1}q^{n-1}p+a_nq^n=0 \quad (5)$$

对于等式右边 p 可以整除 0, 故而 p 可以整除等式左边的多项式。又因为其他项都含有因数 p, 只需要考虑最后一项 a_nq^n。而又由于 p,q 互质，所以 p 可以整除 a_n，亦即 p 是 a_n 的因数。

同理可得 q 是 a_0 的因数。

五、试根法和因式定理例题

1. 若多项式 x^2-mx+6 有一个因式是 $x-3$，求 m 的值。

2. 若多项式 $x^3+ax^2+bx+10$ 有一个因式是 $x^2-3x-10$，求 a,b 的值。

3. 因式分解：$x^3+x^2-10x-6$

4. 因式分解：$x^3+6x^2+11x+6$

5. 因式分解：$2x^3-5x^2+5x-3$

6. 因式分解：$f(x)=6x^4+5x^3+3x^2-3x-2$

7. 系数为字母的情况因式分解：$x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc$

8. 因式分解：$(l+m)x^3+(3l+2m-n)x^2+(2l-m-3n)x-2(m+n)$

六、待定系数法

定理：一个整系数多项式如果能分解为两个有理系数的因式的乘积，那么也一定能分解为两个整系数的因式的积。

根据以上定理，对于整系数的高次多项式因式分解，我们只需要讨论整系数的情况就可以了。

七、待定系数法例题

9. 分解因式：$x^4+x^3+2x^2-x+3$

10. 若 $13x^3+mx^2+11x+n$ 能被 $13x^2-6x+5$ 整除，求 m,n 的值.

11. 已知 $x^5-5qx+4r$ 有因式 $(x-c)^2$，试说明 $q^5=r^4$ 的理由.