分式的概念和化简求值

一、分式的概念

关于分式的基本概念：

当两个整式相除，即 $A \div B$ 时，可以表示为 $\frac{A}{B}$. 如果 B 含有字母，那么 $\frac{A}{B}$ 叫做分式。其中 A 为分式的分子，B 为分式的分母。如果分式的分母为零，那么这个分式无意义。

二、分式的加减乘除和基本性质

分式加减乘除规则

- 分式加法

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{cb}{bd}=\frac{ad+cb}{bd}$$

- 分式减法

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}-\frac{cb}{bd}=\frac{ad-cb}{bd}$$

- 分式乘法

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

- 分式乘法

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$$

- 分式乘方

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$$

分式基本性质

- $$\frac{a}{b}=\frac{am}{bm},\quad \frac{a}{b}=\frac{a\div m}{b\div m}(m\neq 0)$$
- 分子、分母和分式本身的符号三者中，改变任何两个的符号，分式的值不变。

比例的性质

- 如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}, \frac{c}{d}=\frac{e}{f}$,那么 $\frac{a}{b}=\frac{e}{f}$。
- 如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$,那么 $ad=bc$。
- 如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$,那么 $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$(合比性质)。
- 如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d},(a-b\neq 0)$,那么 $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$(合分比性质)。
- 如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\cdots=\frac{m}{n}$,且 $b+d+\cdots+n\neq 0$,那么 $\frac{a+c+\cdots+m}{b+d+\cdots+n}=\frac{a}{b}$(等比性质)。

三、例题

1. 若 a,b,c 为非零常数,且 $\frac{a+b-c}{c}=\frac{a-b+c}{b}=\frac{-a+b+c}{a}$,求 $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$

解答

由

$$\frac{a+b-c}{c}=\frac{a-b+c}{b}=\frac{-a+b+c}{a}$$

得到

$$\frac{a+b}{c}-1=\frac{a+c}{b}-1=\frac{b+c}{a}-1$$

所以设

$$\frac{a+b}{c}=\frac{a+c}{b}=\frac{b+c}{a}=k$$

将三式相加 $2(a+b+c)=k(a+b+c)$

当 $a+b+c\neq 0$ 时,$k=2$

当 $a+b+c=0$ 时,$k=-1$

$$\begin{aligned}&\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}\\=&\frac{k^3abc}{abc}\\=&k^3\end{aligned}$$

所以原式等于 -1 或 8。

2. 已知 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, \frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$,求 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$ 的值。

解法一

把 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ 两边平方,得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+2\left(\frac{xy}{ab}+\frac{yz}{bc}+\frac{zx}{ca}\right)=1$$

整理得到

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+2\frac{xyz}{abc}\left(\frac{c}{z}+\frac{a}{x}+\frac{b}{y}\right)=1$$

又因为 $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$,所以

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

解法二

换元,设 $\frac{x}{a}=u,\frac{y}{b}=v,\frac{z}{c}=w$,则原式可化为

$$u+v+w=1,\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\frac{1}{w}=0$$

由后一个条件通分 $\frac{uv+vw+wu}{uvw}=0$,而 u,v,w 均不为零,得到 $uv+vw+wu=0$。把 $u+v+w=1$ 两边平方,得到 $u^2+v^2+w^2+2(uv+vw+wu)=1$,于是 $u^2+v^2+w^2=1$,即 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

3. 已知 $\frac{x}{x^2+x+1}=\frac{1}{4}$,求 $\frac{x^2}{x^4+x^2+1}$ 的值。

解答

由已知 $\frac{x}{x^2+x+1}=\frac{1}{4}$ 可以得到

$$\frac{x^2+x+1}{x}=4$$

即

$$x+\frac{1}{x}+1=4$$

即 $x+\frac{1}{x}=3,x^2+\frac{1}{x^2}=7$,所以

$$\frac{x^4+x^2+1}{x^2}=x^2+\frac{1}{x^2}+1=7+1=8$$

即 $\frac{x^2}{x^4+x^2+1}=\frac{1}{8}$。

4. 已知三个不全为 0 的数 x,y,z 满足 $4x-3y-6z=0,x+2y-7z=0$。求 $\frac{2x^2+3y^2+6z^2}{x^2+5y^2+7z^2}$ 的值

解答

两个方程三个未知数无法直接求解,但可以把其中一个未知数作为参数。由已知:

$$\begin{cases}4x-3y-6z=0 & (1)\\ x+2y-7z=0 & (2)\end{cases}$$

(2)×4−(1) 得到 $y=2z$,

代入 (2) 得到 $x=3z$。所以

$$\frac{2x^2+3y^2+6z^2}{x^2+5y^2+7z^2}=\frac{2(3z)^2+3(2z)^2+6z^2}{(3z)^2+5(2z)^2+7z^2}=1$$

5. 已知 x,y,z 为有理数,且 $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=(y+z-2x)^2+(z+x-2y)^2+(x+y-2z)^2$,求 $\frac{(yz+1)(zx+1)(xy+1)}{(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)}$ 的值。

解答

将已知条件展开得到 $2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx=0$,即 $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=0$. 所以 $x=y=z$,故而原式 $=1$。

6. 已知 $a\neq b, a\neq 0, b\neq 0, a+b\neq 0, x=\frac{4ab}{a+b}$,求 $\frac{x+2a}{x-2a}+\frac{x+2b}{x-2b}$ 的值。

解答

直接代入计算比较复杂,但可以用合分比性质。由已知等式可得

$$\frac{x}{2a}=\frac{2b}{a+b},\quad \frac{x}{2b}=\frac{2a}{a+b}.$$

利用合分比性质

$$\frac{x+2a}{x-2a}=\frac{2b+a+b}{2b-(a+b)}=\frac{3b+a}{b-a}$$
$$\frac{x+2b}{x-2b}=\frac{2a+a+b}{2a-(a+b)}=\frac{3a+b}{a-b}$$

所以

$$\begin{aligned}&\frac{x+2a}{x-2a}+\frac{x+2b}{x-2b}\\&=\frac{3b+a}{b-a}+\frac{3a+b}{a-b}\\&=\frac{2a-2b}{a-b}\\&=2\end{aligned}$$

7. 若 $\frac{a+b-c}{c}=\frac{a-b+c}{b}=\frac{-a+b+c}{a}$,求 $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$ 的值。

解答

本题可用等比性质求解.

若 $a+b+c\neq 0$ 根据等比性质

$$\frac{a+b-c}{c}=\frac{a-b+c}{b}=\frac{-a+b+c}{a}=\frac{(a+b-c)+(a-b+c)+(-a+b+c)}{a+b+c}=1$$

所以 $a+b=2c, b+c=2a, c+a=2b$, 代入后原式 $=8$。

若 $a+b+c=0$，

则 $a+b=-c, b+c=-a, c+a=-b$，代入后原式 $=-1$。