(Суб)оптимальное управление гиперболическими уравнениями дивергентного вида

Том 1

Теория уравнений

В.С. Гаврилов

2 января 2017 г.

Оглавление

Введение и обозначения

Введение

В конце 40–х годов XXв. в работах Ладыженской О.А. было предложено определять обобщённые решения краевых и начально–краевых задач для эллиптических, параболических и гиперболических уравнений с помощью интегральных тождеств, заменяющих собой уравнение, а иногда и часть начальных и граничных условий. Было также отмечено, что для каждой задачи можно вводить различные классы обобщённых решений. Тем самым определение обобщённого решения задачи было отделено от какого–либо способа его получения (в отличие от предшествоваших работ Фридрихса К. и Соболева С.Л.) и от каких бы то ни было аналитических представлений решения (в отличие от работ Гюнтера Н.М. и Лерэ Ж.). Более того, для ряда классов обобщённых решений классических краевых и начально–краевых задач были доказаны теоремы единственности, использующие лишь свойства исследуемых уравнений, вытекающие из их определения.

Вначале Ладыженская О.А доказала существование обобщённых решений с помощью метода конечных разностей. Тем же методом было исследовано и увеличение гладкости этих обобщённых решений по мере увеличения гладкости исходных данных и коэффициентов задачи. Полученные результаты для случая гиперболических уравнений с начально–краевыми условиями были отражены в работе [39]. Впоследствии в главе IV работы [43] те же результаты доказаны с помощью метода Галёркина.

Затем Ладыженская О.А. [40, 41, 42] и Ворович И.И. [15] предложили так называемый „функциональный метод“[1] исследования начально–краевых задач для гиперболических уравнений[2].

Более точно, в работах [40, 41, 42] предложено сводить начально–краевые задачи для гиперболических уравнений к задаче Коши для уравнения вида

$$S_1(t)\frac{d^2z}{dt^2} + S_2(t)\frac{dz}{dt} + S_3(t)z = f(t), \tag{0.0.1}$$

и доказаны существование и единственность решений рассматриваемых абстрактных задач Коши. Здесь $S_i(t)$ — неограниченные линейные операторы в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, зависящие от времени t и обладающие некоторыми общими свойствами.

Что касается работы [15], то в ней рассматривалась абстрактная постановка начально–краевых задач для гиперболических уравнений с локально–липшицевыми нелинейностями по младшим производным и с симметричной автономной главной частью. А именно, рассматривалась задача Коши для абстрактного уравнения вида

$$\omega_{tt} + A_1\omega + A_2\omega + K\omega_t = f(t), \tag{0.0.2}$$

где A_1 — симметричный положительно определённый оператор, A_2 — некоторый нелинейный оператор, действущий из энергетического пространства оператора A_1 в пространство непрерывных функций, а K — линейный ограниченный оператор, действующий в пространстве суммируемых с квадратом по области Ω функций. При этом в работе [15] доказана лишь теорема существования решения задачи Коши для уравнения (0.0.2).

Затем в работах Лионса и Мадженеса [45, 46] было предложено сводить начально–краевые задачи для гиперболических уравнений к задаче Коши для уравнения вида

$$\frac{d^2z}{dt^2} + A(t)z = f(t), \;\; t \in [0, T], \tag{0.0.3}$$

$$z(0) = \varphi, \;\; \dot{z}(0) = \psi, \tag{0.0.4}$$

[1]Термин, по–видимому, предложен Ладыженской О.А.

[2]В работах [40, 41, 42] речь шла также о параболических уравнениях и уравнениях типа уравнения Шрёдингера.

где $A(t) \in \mathcal{L}(V, V^*)$, $t \in [0, T]$, — симметричный оператор, $\varphi \in V$, $\psi \in H$, а V, H — гильбертовы пространства, такие, что $V \subset H$, и вложение V в H — непрерывно и компактно. При этом предполагается, что при некотором вещественном λ оператор $A(t)$ — положительно определён, в том смысле, что

$$\langle A(t)w, w\rangle + \lambda \|w\|_H^2 \geqslant \|w\|_V^2.$$

Также в работах [45, 46] рассматривались некоторые случаи нелинейности в младших членах уравнений и в главной части.

После работ Лионса и Ладыженской появилось много работ, использующих методы Лионса и Ладыженской для изучения разных аспектов теории гиперболических уравнений дивергентного вида.

Например, в работе Якубова [65] с помощью схемы, предложенной в работах [40, 41, 42] доказана однозначная разрешимость задачи Коши

$$\frac{d^2z}{dt^2} + A(t)\frac{dz}{dt} + B(t)z = f(t), \;\; t \in [0, T], \tag{0.0.5}$$

$$z(0) = \varphi, \;\; \dot{z}(0) = \psi, \tag{0.0.6}$$

в классе функций, сильно непрерывных в норме энергетического пространства оператора $A(t)$, имеющих сильно непрерывную в пространстве типа пространства L_2 первую производную по времени.

Далее, в работах Железовского [13], [20]–[27], Ласеки [5, 1], и Ишмухаметова обоснован метод Бубнова–Галёркина приближённого решения гиперболических уравнений дивергентного вида, с локально липшицевой по фазовой переменной и по её младшим производным правой частью. Доказаны локальные теоремы существования и единственности решений, получены оценки скорости сходимости метода Бубнова–Галёркина.

В работе Ишмухаметова [32] для абстрактной задачи Коши вида (0.0.5) обосновывается результат об аппроксимации, дающий возможность получать оценки скорости сходимости в энергетической норме разностных схем для начально–краевых задач для гиперболических уравнений дивергентного вида.

Достаточное большое число работ (см., например, работы [19, 51] и библиографию к ним) посвящено вопросам разрушения решений начально–краевых задач для гиперболических уравнений дивергентного вида. Имеются работы (см., например, [4, 6, 7]), посвящённые получению тонких свойств регулярности решений; работы [29, 29, 48], в которых решение начально–краевой задачи для одномерного волнового решения ищется в пространствах L_p и W_p^1; работы (см., например, [52, 3]), в которых изучается асимптотическое поведение решений начально–краевых задач для гиперболических уравнений.

Кроме того, в работе [35] для одномерного волнового уравнения, рассматриваемого в непрямоугольной области, изучается разрешимость некоторых начально–краевых задач, а в работе [36] изучается возможность многопараметрического резонанса в краевой задаче для одномерного волнового уравнения.

Наконец, в работе [47] изучается существование, единственность, и гладкость решений абстрактной задачи Коши, являющейся абстрактной формулировкой начально–краевых задач для гиперболических уравнений дивергентного вида, для случая, когда главная часть разрывна по времени и имеет разные области определения в разные моменты времени.

Отметим, однако, что во всех этих работах рассматриваются уравнения с симметричной главной частью, а при выписывании сопряжённых уравнений принципа максимума для задач оптимизации систем, динамика которых описывается гиперболическими уравнениями дивергентного вида, в случае наличия в исходном уравнении младших производных главная часть сопряжённого уравнения сразу же становится несимметричной. Поясним, о чём идёт речь, для чего рассмотрим следующую простейшую задачу оптимального управления:

$$I[\pi] \to \min, \;\; \pi \in \mathcal{D}, \tag{0.0.7}$$

где $\mathcal{D} \equiv \{\pi \equiv (u, v) \in \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2\}$, $\mathcal{D}_1 \equiv \{u \in L_\infty^m(Q_T) : u(x,t) \in U$ п.в. в $Q_T\}$, $\mathcal{D}_2 \equiv \{v \in L_\infty(\Omega) : v(x) \in V$ п.в. в $\Omega\}$, $U \subset \mathbb{R}^m$ — компакт, $V \subset \mathbb{R}$ — отрезок числовой оси, а функционал I задаётся равенством

$$I[\pi] \equiv \int\limits_\Omega G(x, z[\pi](x, T))dx.$$

Здесь $z[\pi]$ — отвечающее паре $\pi \equiv (u, v) \in \mathcal{D}$ единственное обобщённое решение начально–краевой задачи

$$z_{tt} - \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(x,t)z_{x_j}) + a(x,t)z + b_i(x,t)z_{x_i} = \langle f(x,t), u(x,t)\rangle, \;\; (x,t) \in Q_T; \tag{0.0.8}$$

$$z(x, 0) = \varphi(x), \;\; z_t(x, 0) = v(x), \;\; x \in \Omega; \;\; z(x,t) = 0, \;\; (x,t) \in S_T.$$

Тогда необходимое условие оптимальности в этой задаче, называемое принципом максимума Л.С.Понтрягина, формулируется следующим образом (вывод принципа максимума, см., например, в работе [62]).

Теорема 0.0.1. *Пусть управление* $\pi_0 \equiv (u_0, v_0) \in \mathcal{D}$ — *оптимально в задаче* (0.0.7), *в том смысле, что* $I[\pi_0] = \inf_{\pi\in\mathcal{D}} I[\pi]$. *Тогда при почти всех* $(x,t) \in Q_T$ *справедливо равенство*

$$H(x,t,z[\pi_0](x,t),u_0(x,t),\eta[\pi_0](x,t)) = \max_{w\in U} H(x,t,z[\pi_0](x,t),w,\eta[\pi_0](x,t)), \tag{0.0.9}$$

где $H(x,t,z,u,\eta) \equiv \eta[a(x,t)z - \langle f(x,t),u\rangle]$, *а* $\eta[\pi_0]$ — *решение при* $\pi \equiv \pi_0$ *сопряжённой начально–краевой задачи*

$$\eta_{tt} - \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(x,t)\eta_{x_j} + b_i(x,t)\eta) + a(x,t)\eta = 0, \ \ (x,t) \in Q_T; \tag{0.0.10}$$
$$\eta(x,T) = 0, \ \ \eta_t(x,T) = \nabla_z G(x, z[\pi](x,T)), \ \ x \in \Omega; \ \ \eta(x,t) = 0, \ \ (x,t) \in S_T.$$

Таким образом, важной задачей является изучение начально–краевых задач для гиперболических увравенений дивергентного вида с несимметричной главной частью.

В настоящей монографии мы изучаем именно такие уравнения.

Отметим также, что при получении необходимых условий оптимальности для задач оптимального управления с поточечными фазовыми ограничениями множитель Лагранжа, отвечающий оператору, задающему поточечные фазовые ограничения, является мерой Радона, и эта мера Радона появляется в правой части сопряжённого уравнения, отвечающего оператору поточечных фазовых ограничений. Поясним это на примере следующей задачи оптимального управления с поточечными ограничениями:

$$I_0[\pi] \to \min, \ \ I_1[\pi](t) \leqslant 0 \ \ \forall\, t \in [0,T], \ \ \pi \in \mathcal{D}, \tag{0.0.11}$$

где $\mathcal{D} \equiv \{\pi \equiv (u,v) \in \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2\}$, $\mathcal{D}_1 \equiv \{u \in L^m_\infty(Q_T) : u(x,t) \in U$ п.в. в $Q_T\}$, $\mathcal{D}_2 \equiv \{v \in L_\infty(\Omega) : v(x) \in V$ п.в. в $\Omega\}$, $U \subset \mathbb{R}^m$ — компакт, $V \subset \mathbb{R}$ — отрезок числовой оси, а функционал I_0 и оператор I_1 задаются равенствами

$$I_0[\pi] \equiv \int\limits_\Omega G(x, z[\pi](x,T))dx, \ \ I_1[\pi](t) \equiv \int\limits_\Omega \Phi(x,t,z[\pi](x,t))dx.$$

Здесь $z[\pi]$ — отвечающее паре $\pi \equiv (u,v) \in \mathcal{D}$ единственное обобщённое решение начально–краевой задачи (0.0.8).

В этом случае необходимые условия оптимальности выглядят следующим образом[3]:

Теорема 0.0.2. *Пусть управление* $\pi_0 \equiv (u_0, v_0) \in \mathcal{D}$ — *оптимально в задаче* (0.0.11). *Тогда найдутся неотрицательное вещественное число* λ *и неотрицательная мера Радона* $\mu \in \mathbf{M}[0,T]$, $\lambda + \|\mu\| = 1$, *такие, что при почти всех* $(x,t) \in Q_T$ *справедливо равенство*

$$H(x,t,z[\pi_0](x,t),u_0(x,t),\eta[\pi_0,\lambda,\mu](x,t)) = \max_{w\in U} H(x,t,z[\pi_0](x,t),w,\eta[\pi_0,\lambda,\mu](x,t)), \tag{0.0.12}$$

где $H(x,t,z,u,\eta) \equiv \eta[a(x,t)z - \langle f(x,t),u\rangle]$, *а* $\eta[\pi_,\lambda,\mu 0]$ — *решение при* $\pi \equiv \pi_0$ *сопряжённой начально–краевой задачи*

$$\eta_{tt} - \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(x,t)\eta_{x_j} + b_i(x,t)\eta) + a(x,t)\eta = \nabla_z \Phi(x,t,z[\pi](x,t))\mu(dt) \ \ (x,t) \in Q_T; \tag{0.0.13}$$
$$\eta(x,T) = 0, \ \ \eta_t(x,T) = \lambda\nabla_z G(x, z[\pi](x,T)), \ \ x \in \Omega; \ \ \eta(x,t) = 0, \ \ (x,t) \in S_T.$$

Поэтому представляется важным изучение свойств решений линейных гиперболических уравнений дивергентного вида с присутствующей в правой части уравнения мерой Радона. Из результатов в этой области нам известны лишь работы [69, 70]. В отличие от них, в данной монографии рассматриваются более общие уравнения и более общие граничные условия.

Используемый в работах **[13–16]** метод вывода необходимых условий подразумевает аппроксимацию исходной задачи с ПФО задачами, каждая из которых «эквивалентна» задаче с конечным числом функциональных ограничений–неравенств. Далее в каждой аппроксимирующей задаче выводится „аппроксимирующий“ принцип максимума», после чего в семействе этих принципов максимума совершается предельный переход при стремлении числа ограничений к бесконечности. Подобный же подход применяется в **[13–16]** и при получении результатов, связанных с регулярностью, нормальностью и с чувствительностью.

[3] Подробный вывод этого принципа максимума можно найти, например, в работах [66, 67, 68].

Однако при таком подходе возникает проблема „склейки“ сопряжённых уравнений аппроксимирующих принципов максимума в одно результирующее сопряжённое уравнение, отвечающее исходному фазовому ограничению и содержащее меру Радона в своей правой части. Кроме того, при выводе „аппроксимирующих“ принципов максимума возникает необходимость „подравнивания“ их сопряжённых уравнений с распространением решений этих уравнений на весь цилиндр, в котором рассматривается исходное уравнение. В результате такого „подравнивания“ левая часть сопряжённого уравнения не изменяется, а начальное условие для производной по времени „перекачивается“ в правую часть сопряжённого уравнения, так что в правой части получающегося уравнения оказывается δ–мера Радона.

В связи с этим представляется важным изучение свойств решений гиперболических уравнений дивергентного вида с δ–мерой Радона в правой части и изучение возможности представления решения линейного уравнения с произвольной мерой Радона в правой части в виде интеграла от решения уравнения с δ–мерой Радона в правой части.

Поэтому указанные вопросы подробно рассматриваются в данной монографии. Заметим также, что, насколько нам известно, применительно к гиперболическим уравнениям дивергентного вида никто подобные вопросы ранее не рассматривал.

Обозначения

Здесь и всюду ниже мы используем следующие обозначения:

$\mathbb{R}^m$ — m–мерное пространство векторов–столбцов $x = (x_1, \dots, x_m)$ с евклидовой нормой

$$|x| \equiv \sqrt{\sum_{i=1}^{m} x_i^2};$$

$Ш_\varepsilon^m(x^0) \equiv \{x \in \mathbb{R}^m : |x - x^0| < \varepsilon\}$;

$\mathbb{R}^{m\times n}$ — mn–мерное пространство $(m \times n)$–матриц $A = \{a_{ij}\}$ со скалярным произведением

$$\langle A, B\rangle \equiv \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ij};$$

этому скалярному произведению соответствует евклидова норма

$$|A| \equiv \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2};$$

$\mathbf{M}(\mathcal{P})$ — множество всех мер Радона на компакте $\mathcal{P}$, $\|\mu\|$ — полная вариация меры $\mu \in \mathbf{M}(\mathcal{P})$;

$\mathbf{M}_+(\mathcal{P})$ — множество всех неотрицательных мер Радона на компакте $\mathcal{P}$;

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с кусочно–гладкой границей S;

$T > 0$ — константа;

$S_T \equiv S \times (0, T)$;

$\boldsymbol{\alpha}_i(s, t)$ — угол между единичным вектором внешней нормали к S_T в точке $(s, t) \in S_T$ и осью Ox_i, $i = \overline{1, n}$;

clX — замыкание множества X;

$Q_T \equiv \Omega \times (0, T)$;

$S' \subseteq S$ — множество, имеющее положительную поверхностную меру;

$S'' \equiv S \setminus S'$ — множество, имеющее положительную поверхностную меру;

$S'_T \equiv S' \times (0, T)$;

$S''_T \equiv S'' \times (0, T)$;

$Q_{(t_1,t_2)} \equiv \Omega \times (t_1, t_2)$, где $t_1,\ t_2 \in [0, T]$;

$Q_{[t_1,t_2]} \equiv \Omega \times [t_1, t_2]$, где $t_1,\ t_2 \in [0, T]$;

$S_{(t_1,t_2)} \equiv S \times (t_1, t_2)$, где $t_1,\ t_2 \in [0, T]$;

$S'_{(t_1,t_2)} \equiv S' \times (t_1, t_2)$, где $t_1,\ t_2 \in [0, T]$;

$S''_{(t_1,t_2)} \equiv S'' \times (t_1, t_2)$, где $t_1,\ t_2 \in [0, T]$;

$L_p^m(G)$, где $G \subset \mathbb{R}^k$ — ограниченная область, — пространство m–мерных вектор–функций $z(x) \equiv (z_1(x), \dots, z_k(x))$, $x \in G$, с нормой

$$\|z\|_{p,G} \equiv \left[\int\limits_G |z(x)|^p dx\right]^{1/p}, \ \ 1 \leqslant p < \infty; \ \ \|z\|_{\infty,G} = \operatorname*{vraisup}_{x\in G} |z(x)|; \ \ L_p^1(G) \equiv L_p(G);$$

$L_p([0,T],X)$, где X — сепарабельное банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_X$, — банахово пространство слабо измеримых на $[0,T]$ функций $\xi\colon [0,T]\to X$, для которых функция $[0,T]\ni t\mapsto \|\xi(t)\|_X$ является элементом $L_p[0,T]$; норма в $L_p([0,T],X)$ определяется так:

$$\|\xi\|_{p,[0,T],X}\equiv\left[\int\limits_0^T\|\xi(t)\|_X^p dt\right]^{1/p},\ \ 1\leqslant p<\infty;\ \ \|\xi\|_{p,[0,T],X}\equiv\operatorname*{vraisup}_{t\in[0,T]}\|\xi(t)\|_X,\ \ p=\infty;$$

$L_{p,1}(Q_T)$ — банахово пространство измеримых по Лебегу на Q_T функций $\xi\colon Q_T\to\mathbb{R}$ с конечной нормой

$$\|\xi\|_{p,1,Q_T}\equiv\int\limits_0^T\left[\int\limits_\Omega|\xi(x,t)|^p dx\right]^{1/p}dt\ \ (1\leqslant p<\infty);\ \ \|\xi\|_{p,1,Q_T}\equiv\int\limits_0^T\operatorname*{vraisup}_{x\in\Omega}|\xi(x,t)|dt\ \ (p=\infty);$$

$L_{p,1}(Q_{[t_1,t_2]})$, где $t_1,\ t_2\in[0,T]$, $t_1<t_2$, — банахово пространство измеримых по Лебегу на $Q_{[t_1,t_2]}$ функций $\xi\colon Q_{[t_1,t_2]}\to\mathbb{R}$ с конечной нормой

$$\|\xi\|_{p,1,Q_{[t_1,t_2]}}\equiv\int\limits_{t_1}^{t_2}\left[\int\limits_\Omega|\xi(x,t)|^p dx\right]^{1/p}dt\ \ (1\leqslant p<\infty);\ \ \|\xi\|_{p,1,Q_{[t_1,t_2]}}\equiv\int\limits_{t_1}^{t_2}\operatorname*{vraisup}_{x\in\Omega}|\xi(x,t)|dt\ \ (p=\infty);$$

$L_{p,1}(S_T)$ — банахово пространство измеримых по Лебегу на S_T функций $\xi\colon S_T\to\mathbb{R}$ с конечной нормой

$$\|\xi\|_{p,1,S_T}\equiv\int\limits_0^T\left[\int\limits_S|\xi(s,t)|^p ds\right]^{1/p}dt\ \ (1\leqslant p<\infty);\ \ \|\xi\|_{p,1,S_T}\equiv\int\limits_0^T\operatorname*{vraisup}_{s\in S}|\xi(s,t)|dt\ \ (p=\infty);$$

$L_{p,1}(S'_T)$ — банахово пространство измеримых по Лебегу на S'_T функций $\xi\colon S'_T\to\mathbb{R}$ с конечной нормой

$$\|\xi\|_{p,1,S'_T}\equiv\int\limits_0^T\left[\int\limits_{S'}|\xi(s,t)|^p ds\right]^{1/p}dt\ \ (1\leqslant p<\infty);\ \ \|\xi\|_{p,1,S'_T}\equiv\int\limits_0^T\operatorname*{vraisup}_{s\in S'}|\xi(s,t)|dt\ \ (p=\infty);$$

$L_{p,1}(S_T,\mathbb{R}^n)$ — банахово пространство измеримых по Лебегу на S_T функций $\xi\colon S_T\to\mathbb{R}^n$ с конечной нормой

$$\|\xi\|_{p,1,S_T}\equiv\int\limits_0^T\left[\int\limits_S|\xi(s,t)|^p ds\right]^{1/p}dt\ \ (1\leqslant p<\infty);\ \ \|\xi\|_{p,1,S_T}\equiv\int\limits_0^T\operatorname*{vraisup}_{s\in S}|\xi(s,t)|dt\ \ (p=\infty);$$

$L_{p,1}(S'_T,\mathbb{R}^n)$ — банахово пространство измеримых по Лебегу на S'_T функций $\xi\colon S'_T\to\mathbb{R}^n$ с конечной нормой

$$\|\xi\|_{p,1,S'_T}\equiv\int\limits_0^T\left[\int\limits_{S'}|\xi(s,t)|^p ds\right]^{1/p}dt\ \ (1\leqslant p<\infty);\ \ \|\xi\|_{p,1,S'_T}\equiv\int\limits_0^T\operatorname*{vraisup}_{s\in S'}|\xi(s,t)|dt\ \ (p=\infty);$$

$W_p^1[0,T]$, где $1\leqslant p\leqslant\infty$, — множество всех функций $z\in L_p[0,T]$ с обобщённой производной z' из $L_p[0,T]$; норма в $W_p^1[0,T]$ определяется соотношением

$$\|z\|_{p,[0,T]}^{(1)}\equiv\left[\|z\|_{p,[0,T]}^p+\|z'\|_{p,[0,T]}^p\right]^{1/p},\ \ 1\leqslant p<\infty;\ \ \|z\|_{p,[0,T]}^{(1)}\equiv\|z\|_{\infty,[0,T]}+\|z'\|_{\infty,[0,T]},\ \ p=\infty;$$

$W_1^2[0,T]$ — множество всех функций $z\in L_1[0,T]$ с суммируемыми первой и второй обобщёнными производными; норма в $W_1^2[0,T]$ определяется соотношением

$$\|z\|_{1,[0,T]}^{(2)}\equiv\|z\|_{1,[0,T]}+\|z'\|_{1,[0,T]}+\|z''\|_{1,[0,T]};$$

$W_2^1(G)$, где $G\subset\mathbb{R}^k$ — ограниченная область, — гильбертово пространство функций $z\in L_2(G)$, у которых все первые обобщённые производные принадлежат $L_2(G)$, со скалярным произведением

$$\langle z_1,z_2\rangle=\int\limits_G\left[z_1z_2+\sum_{i=1}^k z_{1x_i}z_{2x_i}\right]dx;$$

соответствующую норму в этом пространстве обозначим через $\|\cdot\|^{(1)}_{2,G}$;

$W^2_2(G)$, где $G\subset\mathbb{R}^k$ — ограниченная область, — гильбертово пространство функций $z\in L_2(G)$, у которых все обобщённые производные до второго порядка включительно принадлежат $L_2(G)$, со скалярным произведением

$$\langle z_1,z_2\rangle=\int\limits_G\left[z_1z_2+\sum_{i=1}^k z_{1x_i}z_{2x_i}+\sum_{i,j=1}^k z_{1x_ix_j}z_{2x_ix_j}\right]dx;$$

соответствующую норму в этом пространстве обозначим через $\|\cdot\|^{(2)}_{2,G}$;

$W^{0,1}_{p,1}(Q_T)$ — банахово пространство функций $\xi\in L_{p,1}(Q_T)$, для которых $\xi_t\in L_{p,1}(Q_T)$; норма в $W^{0,1}_{p,1}(Q_T)$ задаётся равенством

$$\|\xi\|^{(0,1)}_{p,1,Q_T}\equiv\|\xi\|_{p,1,Q_T}+\|\xi_t\|_{p,1,Q_T};$$

$W^{0,1}_{p,1}(S_T)$ — банахово пространство функций $\xi\in L_{p,1}(S_T)$, для которых $\xi_t\in L_{p,1}(S_T)$; норма в $W^{0,1}_{p,1}(S_T)$ задаётся равенством

$$\|\xi\|^{(0,1)}_{p,1,S_T}\equiv\|\xi\|_{p,1,S_T}+\|\xi_t\|_{p,1,S_T};$$

$W^{0,1}_{p,1}(S'_T)$ — банахово пространство функций $\xi\in L_{p,1}(S'_T)$, для которых $\xi_t\in L_{p,1}(S'_T)$; норма в $W^{0,1}_{p,1}(S'_T)$ задаётся равенством

$$\|\xi\|^{(0,1)}_{p,1,S'_T}\equiv\|\xi\|_{p,1,S'_T}+\|\xi_t\|_{p,1,S'_T};$$

$W^{0,1}_{p,1}(S_T,\mathbb{R}^n)$ — банахово пространство функций $\xi\in L_{p,1}(S_T,\mathbb{R}^n)$, для которых $\xi_t\in L_{p,1}(S_T,\mathbb{R}^n)$; норма в $W^{0,1}_{p,1}(S_T,\mathbb{R}^n)$ задаётся равенством

$$\|\xi\|^{(0,1)}_{p,1,S_T}\equiv\|\xi\|_{p,1,S_T}+\|\xi_t\|_{p,1,S_T};$$

$W^{0,1}_{p,1}(S'_T,\mathbb{R}^n)$ — банахово пространство функций $\xi\in L_{p,1}(S'_T,\mathbb{R}^n)$, для которых $\xi_t\in L_{p,1}(S'_T,\mathbb{R}^n)$; норма в $W^{0,1}_{p,1}(S'_T,\mathbb{R}^n)$ задаётся равенством

$$\|\xi\|^{(0,1)}_{p,1,S'_T}\equiv\|\xi\|_{p,1,S_T}+\|\xi_t\|_{p,1,S'_T};$$

$C^\infty_0(\Omega)$ — множество всех бесконечно дифференцируемых финитных в Ω функций

$\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$ — замыкание в норме пространства $W^1_2(\Omega)$ множества $C^\infty_0(\Omega)$; норма в $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$ определяется так же, как и в $W^1_2(\Omega)$;

$\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega|S'')$ — замыкание в норме пространства $W^1_2(\Omega)$ множества всех бесконечно дифференцируемых в Ω и финитных вблизи S'' функций; норма в $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega|S'')$ определяется так же, как и в $W^1_2(\Omega)$;

$\overset{\circ}{W}{}^{-1}_2(\Omega)$ — пространство, сопряжённое к $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$;

$W^{-1}_2(\Omega)$ — пространство, сопряжённое к $W^1_2(\Omega)$;

$\overset{\circ}{W}{}^{-1}_2(\Omega|S'')$— пространство, сопряжённое к $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega|S'')$;

$\overset{\circ}{W}{}^2_2(\Omega)$ — замыкание в норме пространства $W^2_2(\Omega)$ множества $C^\infty_0(\Omega)$; норма в $\overset{\circ}{W}{}^2_2(\Omega)$ определяется так же, как и в $W^2_2(\Omega)$;

$\overset{\circ}{W}{}^2_2(\Omega|S'')$ — замыкание в норме пространства $W^2_2(\Omega)$ множества всех бесконечно дифференцируемых в Ω и финитных вблизи S'' функций; норма в $\overset{\circ}{W}{}^2_2(\Omega|S'')$ определяется так же, как и в $W^2_2(\Omega)$;

$\overset{\circ}{W}{}^{-2}_2(\Omega)$ — пространство, сопряжённое к $\overset{\circ}{W}{}^2_2(\Omega)$;

$W^{-2}_2(\Omega)$ — пространство, сопряжённое к $W^2_2(\Omega)$;

$\overset{\circ}{W}{}^{-2}_2(\Omega|S'')$— пространство, сопряжённое к $\overset{\circ}{W}{}^2_2(\Omega|S'')$;

$C^{\infty,0}(Q_T)$ — множество всех бесконечно дифференцируемых в Q_T финитных вблизи S_T функций;

$C^{\infty,0}(Q_{[t_1,t_2]})$, где t_1, $t_2\in[0,T]$, $t_1<t_2$, — множество всех бесконечно дифференцируемых в Q_T финитных вблизи $S_{[t_1,t_2]}$ функций;

$W^1_{2,0}(Q_T)$ — замыкание множества $C^{\infty,0}(Q_T)$ в норме $W^1_2(Q_T)$; норма в $W^1_{2,0}(Q_T)$ задаётся равенством

$$\|z\|^{(1)}_{2,Q_T}\equiv\left[\int\limits_{Q_T}[z^2+z_t^2+|\nabla_x z|^2]dxdt\right]^{1/2};$$

$W^1_{2,0}(Q_{[t_1,t_2]})$, где $t_1,\ t_2 \in [0,T]$, $t_1 < t_2$, — замыкание множества $C^{\infty,0}(Q_{[t_1,t_2]})$ в норме $W^1_2(Q_{[t_1,t_2]})$; норма в $W^1_{2,0}(Q_{[t_1,t_2]})$ задаётся равенством

$$\|z\|^{(1)}_{2,Q_{[t_1,t_2]}} \equiv \left[\int\limits_{Q_{[t_1,t_2]}} [z^2 + z_t^2 + |\nabla_x z|^2]dxdt\right]^{1/2};$$

$W^1_{2,0}(Q_T|S''_T)$ — замыкание в норме $W^1_2(Q_T)$ множества бесконечно дифференцируемых в Q_T финитных вблизи S''_T функций; норма в $W^1_{2,0}(Q_T|S''_T)$ задаётся равенством

$$\|z\|^{(1)}_{2,Q_T} \equiv \left[\int\limits_{Q_T} [z^2 + z_t^2 + |\nabla_x z|^2]dxdt\right]^{1/2};$$

$W^1_{2,0}(Q_{[t_1,t_2]}|S''_{[t_1,t_2]})$, где $t_1,\ t_2 \in [0,T]$, $t_1 < t_2$, — замыкание множества бесконечно дифференцируемых в $Q_{[t_1,t_2]}$ финитных вблизи $S''_{[t_1,t_2]}$ функций; норма в $W^1_{2,0}(Q_{[t_1,t_2]}|S''_{[t_1,t_2]})$ задаётся равенством

$$\|z\|^{(1)}_{2,Q_{[t_1,t_2]}} \equiv \left[\int\limits_{Q_{[t_1,t_2]}} [z^2 + z_t^2 + |\nabla_x z|^2]dxdt\right]^{1/2};$$

$W^{2;1}_2(Q_T)$ — гильбертово пространство, состоящее из всех функций $z \in L_2(Q_T)$, у которых z_{x_i}, $z_{x_ix_j}$, $z_t \in L_2(Q_T)$, $i,\ j = \overline{1,n}$; скалярное произведение в $W^{2;1}_2(Q_T)$ задаётся формулой

$$\langle z_1, z_2\rangle = \int\limits_{Q_T} \left[z_1z_2 + \sum_{i=1}^{k} z_{1x_i}z_{2x_i} + \sum_{i,j=1}^{k} z_{1x_ix_j}z_{2x_ix_j} + z_{1t}z_{2t}\right]dx;$$

норму, отвечающую этому скалярному произведению, обозначим через $\|z\|^{(2;1)}_{2,Q_T}$;

$W^{2;1}_{2,0}(Q_T)$ — замыкание множества $C^{\infty,0}(Q_T)$ в норме $W^{2;1}_2(Q_T)$; норма в $W^{2;1}_{2,0}(Q_T)$ задаётся так же, как и в $W^{2;1}_2(Q_T)$;

$W^{2;1}_{2,0}(Q_{[t_1,t_2]})$, где $t_1,\ t_2 \in [0,T]$, $t_1 < t_2$, — замыкание множества $C^{\infty,0}(Q_{[t_1,t_2]})$ в норме $W^{2;1}_2(Q_{[t_1,t_2]})$; норма в $W^1_{2,0}(Q_{[t_1,t_2]})$ задаётся так же, как и в $W^{2;1}_2(Q_{[t_1,t_2]})$;

$W^{2;1}_{2,0}(Q_T|S''_T)$ — замыкание в норме $W^1_2(Q_T)$ множества бесконечно дифференцируемых в Q_T финитных вблизи S''_T функций; норма в $W^{2;1}_{2,0}(Q_T|S''_T)$ задаётся так же, как и в $W^{2;1}_2(Q_T)$;

$W^{2;1}_{2,0}(Q_{[t_1,t_2]}|S''_{[t_1,t_2]})$, где $t_1,\ t_2 \in [0,T]$, $t_1 < t_2$, — замыкание множества бесконечно дифференцируемых в $Q_{[t_1,t_2]}$ финитных вблизи $S''_{[t_1,t_2]}$ функций; норма в $W^{2;1}_{2,0}(Q_{[t_1,t_2]}|S''_{[t_1,t_2]})$ задаётся так же, как и в $W^{2;1}_2(Q_{[t_1,t_2]})$;

$C(\mathcal{P})$, где $\mathcal{P}$ — компактное топологическое пространство, — пространство непрерывных на $\mathcal{P}$ функций $z\colon \mathcal{P} \to \mathbb{R}$, с нормой

$$|z|^{(0)}_{\mathcal{P}} \equiv \max_{p\in\mathcal{P}} |z(p)|;$$

$C(\mathcal{P}, X)$, где $(\mathcal{P},\tau)$ — компактное топологическое пространство, а X — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_X$, — пространство сильно непрерывных на $\mathcal{P}$ функций $\xi\colon \mathcal{P} \to X$, т.е. таких, что

$$\forall\, p \in \mathcal{P}\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, U = U(\varepsilon, p) \in \tau,\ p \in U\ \forall\, p' \in U : \|\xi(p) - \xi(p')\|_X \leqslant \varepsilon;$$

норма в этом пространстве задаётся равенством

$$|\xi|^{(0)}_{\mathcal{P},X} \equiv \max_{p\in\mathcal{P}} \|\xi(p)\|_X;$$

$C^k(\mathcal{P}, X)$, где X — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_X$, а $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ — компакт,— пространство k раз сильно непрерывно дифференцируемых функций $\xi : \mathcal{P} \to X$, с нормой

$$|\xi|^{(k)}_{\mathcal{P},X} \equiv \sum_{\substack{0\leqslant i_1+\dots+i_k\leqslant k\\ i_1,\dots,i_k\geqslant 0}}^{k} \max_{p\in\mathcal{P}} \left\|\frac{\partial^{i_1+\dots+i_k}\xi(p)}{\partial p_1^{i_1}\dots\partial p_k^{i_k}}\right\|_X;\ \ C^0(\mathcal{P}, X) \equiv C(\mathcal{P}, X);$$

$\Gamma \equiv [0,T] \times [0,T]$;

$\mathbb{K}_m^1(\Gamma)$ — множество функций $h(t,\tau) \in \mathbb{R}^m$, $(t,\tau) \in \Gamma$, таких, что h, $h_\tau \in C(\Gamma, \mathbb{R}^m)$; норма в этом пространстве задаётся равенством

$$\|h\|_{\mathbb{K}_m^1(\Gamma)} \equiv |h|^{(0)}_{\Gamma,\mathbb{R}^m} + |h_\tau|^{(0)}_{\Gamma,\mathbb{R}^m};$$

$C_s([0,T],X)$, где X — банахово пространство, — пространство функций $\xi\colon [0,T] \to X$, слабо непрерывных на $[0,T]$, т.е. таких, что

$$\forall\, x^* \in X^*\, \forall\, \tau \in [0,T] : \lim_{t\to\tau} \langle \xi(t), x^* \rangle = \langle \xi(\tau), x^* \rangle,$$

где X^* обозначает сопряжённое к X пространство, а $\langle x, x^* \rangle$ — значение линейного непрерывного функционала $x^* \in X^*$ в точке $x \in X$ (пространство $C_s([0,T],X)$ введено в [46]);

$C^\infty[0,T]$ — множество всех бесконечно дифференцируемых на отрезке $[0,T]$ функций;

$\mathcal{L}(X,Y)$, где X и Y — банаховы пространства с нормами $\|\cdot\|_X$ и $\|\cdot\|_Y$ соответственно, — пространство линейных ограниченных операторов, действующих из X в Y, наделённое стандартной нормой

$$\|A\|_{X\to Y} \equiv \sup_{\|x\|_X \leqslant 1} \|Ax\|_Y;$$

$\text{Э}_2^1(Q_T)$ — „энергетический класс первого рода“, состоящий из измеримых по Лебегу на Q_T функций z, удовлетворяющих следующим условиям:

при всех $t \in [0,T]$ справедливы включения $z(\cdot,t) \in W_2^1(\Omega)$, $z_t(\cdot,t) \in L_2(\Omega)$;

функция $[0,T] \ni t \mapsto z(\cdot,t)$ — элемент пространства $C_s([0,T], W_2^1(\Omega))$;

функция $[0,T] \ni t \mapsto z_t(\cdot,t)$ — элемент $L_\infty([0,T], L_2(\Omega))$;

норма в $\text{Э}_2^1(Q_T)$ задаётся равенством

$$\|z\|_{\text{Э}_2^1(Q_T)} \equiv \sup_{t\in[0,T]} \|z(\cdot,t)\|^{(1)}_{2,\Omega} + \operatorname{vraisup}_{t\in[0,T]} \|z_t(\cdot,t)\|_{2,\Omega};$$

$\hat{\text{Э}}_2^1(Q_T) \equiv \{z \in \text{Э}_2^1(Q_T) : z(x,T) = 0, \ \ x \in \Omega\}$;

$\text{Є}_2^1(Q_T)$ — „энергетический класс второго рода“, состоящий из функций $z \in \text{Э}_2^1(Q_T)$, у которых $z_t \in C_s([0,T], L_2(\Omega))$; норма в $\text{Є}_2^1(Q_T)$ задаётся равенством

$$\|z\|_{\text{Є}_2^1(Q_T)} \equiv \sup_{t\in[0,T]} \left(\int\limits_\Omega [z^2(x,t) + |\nabla_x z(x,t)|^2 + z_t^2(x,t)]dx \right)^{1/2};$$

$\mathbf{Э}_2^1(Q_T)$ — „энергетический класс третьего рода“, т.е. множество всех измеримых по Лебегу функций $z\colon Q_T \to \mathbb{R}$, таких, что при всех $t \in [0,T]$ справедливы включения $z(\cdot,t) \in W_2^1(\Omega)$, $z_t(\cdot,t) \in L_2(\Omega)$, причём $z(\cdot,t)$ и $z_t(\cdot,t)$ непрерывно зависят от $t \in [0,T]$ в норме пространств $W_2^1(\Omega)$ и $L_2(\Omega)$ соответственно; норма в $\mathbf{Э}_2^1(Q_T)$ определяется равенством

$$\|z\|_{\mathbf{Э}_2^1(Q_T)} \equiv \max_{t\in[0,T]} \left(\int\limits_\Omega \left[|z(x,t)|^2 + |\nabla_x z(x,t)|^2 + |z_t(x,t)|^2\right] dx \right)^{1/2};$$

$\hat{\mathbf{Э}}_2^1(Q_T) \equiv \{z \in \mathbf{Э}_2^1(Q_T) : z(\cdot,T) = 0\}$;

$\text{Э}_{2,0}^1(Q_T)$ — „энергетический класс первого рода“, состоящий из измеримых по Лебегу на Q_T функций z, удовлетворяющих следующим условиям:

при всех $t \in [0,T]$ справедливы включения $z(\cdot,t) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, $z_t(\cdot,t) \in L_2(\Omega)$;

функция $[0,T] \ni t \mapsto z(\cdot,t)$ — элемент пространства $C_s([0,T], \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))$;

функция $[0,T] \ni t \mapsto z_t(\cdot,t)$ — элемент $L_\infty([0,T], L_2(\Omega))$;

норма в $\text{Э}_{2,0}^1(Q_T)$ задаётся так же, как и в $\text{Э}_2^1(Q_T)$;

$\hat{\text{Э}}_{2,0}^1(Q_T) \equiv \{z \in \text{Э}_{2,0}^1(Q_T) : z(x,T) = 0, \ \ x \in \Omega\}$;

$\text{Є}_{2,0}^1(Q_T)$ — „энергетический класс второго рода“, состоящий из функций $z \in \text{Э}_{2,0}^1(Q_T)$, у которых $z_t \in C_s([0,T], L_2(\Omega))$; норма в $\text{Є}_{2,0}^1(Q_T)$ задаётся так же, как и в $\text{Є}_2^1(Q_T)$;

$\mathbf{Э}_{2,0}^1(Q_T)$ — „энергетический класс третьего рода“, т.е. множество всех измеримых по Лебегу функций $z\colon Q_T \to \mathbb{R}$, таких, что при всех $t \in [0,T]$ справедливы включения $z(\cdot,t) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, $z_t(\cdot,t) \in L_2(\Omega)$, причём

$z(\cdot,t)$ и $z_t(\cdot,t)$ непрерывно зависят от $t\in[0,T]$ в норме пространств $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ и $L_2(\Omega)$ соответственно; норма в $\mathbf{Э}_{2,0}^1(Q_T)$ определяется так же, как и в $\mathbf{Э}_2^1(Q_T)$;

$\hat{\mathbf{Э}}_{2,0}^1(Q_T)\equiv\{z\in\mathbf{Э}_{2,0}^1(Q_T): z(\cdot,T)=0\}$;

$Э_{2,0}^1(Q_T|S''_T)$ — „энергетический класс первого рода", состоящий из измеримых по Лебегу на Q_T функций z, таких, что выполнены следующие условия:

при всех $t\in[0,T]$ имеют место включения $z(\cdot,t)\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega|S'')$, $z_t(\cdot,t)\in L_2(\Omega)$;

функция $[0,T]\ni t\mapsto z(\cdot,t)$ — элемент пространства $C_s([0,T],\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega|S''))$;

функция $[0,T]\ni t\mapsto z_t(\cdot,t)$ — элемент $L_\infty([0,T],L_2(\Omega))$;

норма в $Э_{2,0}^1(Q_T|S''_T)$ задаётся так же, как и в $Э_2^1(Q_T)$;

$\hat{Э}_{2,0}^1(Q_T|S''_T)\equiv\{z\in Э_{2,0}^1(Q_T|S''_T): z(x,T)=0,\ \ x\in\Omega\}$;

$Є_{2,0}^1(Q_T|S''_T)$ — „энергетический класс второго рода", состоящий из функций $z\in Э_{2,0}^1(Q_T|S''_T)$, у которых $z_t\in C_s([0,T],L_2(\Omega))$; норма в $Є_{2,0}^1(Q_T|S''_T)$ задаётся так же, как и в $Є_2^1(Q_T)$;

$\mathbf{Э}_{2,0}^1(Q_T|S''_T)$ — „энергетический класс третьего рода", т.е. множество всех измеримых по Лебегу функций $z\colon Q_T\to\mathbb{R}$, таких, что при всех $t\in[0,T]$ справедливы включения $z(\cdot,t)\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega|S'')$, $z_t(\cdot,t)\in L_2(\Omega)$, причём $z(\cdot,t)$ и $z_t(\cdot,t)$ непрерывно зависят от $t\in[0,T]$ в норме пространств $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega|S'')$ и $L_2(\Omega)$ соответственно; норма в $\mathbf{Э}_{2,0}^1(Q_T|S''_T)$ определяется тем же соотношением, что и в $\mathbf{Э}_2^1(Q_T)$;

$\hat{\mathbf{Э}}_{2,0}^1(Q_T|S''_T)\equiv\{z\in\mathbf{Э}_{2,0}^1(Q_T|S''_T): z(\cdot,T)=0\}$;

$Э_2^2(Q_T)$ — „энергетический класс первого рода", состоящий из измеримых по Лебегу на Q_T функций z, удовлетворяющих следующим условиям:

при всех $t\in[0,T]$ справедливы включения $z(\cdot,t)\in W_2^2(\Omega)$, $z_t(\cdot,t)\in L_2(\Omega)$;

функция $[0,T]\ni t\mapsto z(\cdot,t)$ — элемент пространства $C_s([0,T],W_2^2(\Omega))$;

функция $[0,T]\ni t\mapsto z_t(\cdot,t)$ — элемент $L_\infty([0,T],L_2(\Omega))$;

норма в $Э_2^2(Q_T)$ задаётся равенством

$$\|z\|_{Э_2^2(Q_T)}\equiv\sup_{t\in[0,T]}\|z(\cdot,t)\|_{2,\Omega}^{(2)}+\operatorname*{vraisup}_{t\in[0,T]}\|z_t(\cdot,t)\|_{2,\Omega};$$

$\hat{Э}_2^2(Q_T)\equiv\{z\in Э_2^2(Q_T): z(x,T)=0,\ \ x\in\Omega\}$;

$Є_2^2(Q_T)$ — „энергетический класс второго рода", состоящий из функций $z\in Э_2^2(Q_T)$, у которых $z_t\in C_s([0,T],L_2(\Omega))$; норма в $Є_2^2(Q_T)$ задаётся равенством

$$\|z\|_{Є_2^2(Q_T)}\equiv\sup_{t\in[0,T]}\left(\int\limits_\Omega[z^2(x,t)+|\nabla_x z(x,t)|^2+|\nabla_x^2 z(x,t)|^2+z_t^2(x,t)]dx\right)^{1/2};$$

$\mathbf{Э}_2^2(Q_T)$ — „энергетический класс третьего рода", т.е. множество всех измеримых по Лебегу функций $z\colon Q_T\to\mathbb{R}$, таких, что при всех $t\in[0,T]$ справедливы включения $z(\cdot,t)\in W_2^2(\Omega)$, $z_t(\cdot,t)\in L_2(\Omega)$, причём $z(\cdot,t)$ и $z_t(\cdot,t)$ непрерывно зависят от $t\in[0,T]$ в норме пространств $W_2^2(\Omega)$ и $L_2(\Omega)$ соответственно; норма в $\mathbf{Э}_2^2(Q_T)$ определяется равенством

$$\|z\|_{\mathbf{Э}_2^2(Q_T)}\equiv\max_{t\in[0,T]}\left(\int\limits_\Omega\left[|z(x,t)|^2+|\nabla_x z(x,t)|^2+|\nabla_x^2 z(x,t)|^2+|z_t(x,t)|^2\right]dx\right)^{1/2};$$

$\hat{\mathbf{Э}}_2^2(Q_T)\equiv\{z\in\mathbf{Э}_2^2(Q_T): z(\cdot,T)=0\}$;

$Э_{2,0}^2(Q_T)$ — „энергетический класс первого рода", состоящий из измеримых по Лебегу на Q_T функций z, удовлетворяющих следующим условиям:

при всех $t\in[0,T]$ справедливы включения $z(\cdot,t)\in\overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$, $z_t(\cdot,t)\in L_2(\Omega)$;

функция $[0,T]\ni t\mapsto z(\cdot,t)$ — элемент пространства $C_s([0,T],\overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega))$;

функция $[0,T]\ni t\mapsto z_t(\cdot,t)$ — элемент $L_\infty([0,T],L_2(\Omega))$;

норма в $Э_{2,0}^2(Q_T)$ определяется тем же равенством, что и в $Э_2^2(Q_T)$;

$\hat{Э}_{2,0}^2(Q_T)\equiv\{z\in Э_{2,0}^2(Q_T): z(x,T)=0,\ \ x\in\Omega\}$;

$Є_{2,0}^2(Q_T)$ — „энергетический класс второго рода", состоящий из функций $z\in Э_{2,0}^2(Q_T)$, у которых $z_t\in C_s([0,T],L_2(\Omega))$; норма в $Є_{2,0}^2(Q_T)$ задаётся так же, как и в $Є_2^2(Q_T)$;

$\mathbf{Э}_{2,0}^2(Q_T)$ — „энергетический класс третьего рода", т.е. множество всех измеримых по Лебегу функций $z\colon Q_T\to\mathbb{R}$, таких, что при всех $t\in[0,T]$ справедливы включения $z(\cdot,t)\in\overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$, $z_t(\cdot,t)\in L_2(\Omega)$, причём

$z(\cdot,t)$ и $z_t(\cdot,t)$ непрерывно зависят от $t\in[0,T]$ в норме пространств $\overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$ и $L_2(\Omega)$ соответственно; норма в $\mathbf{Э}^2_{2,0}(Q_T)$ определяется так же, как и в $\mathbf{Э}^2_2(Q_T)$;

$\hat{\mathbf{Э}}^2_{2,0}(Q_T)\equiv\{z\in\mathbf{Э}^2_{2,0}(Q_T): z(\cdot,T)=0\}$;

$\text{Э}^2_{2,0}(Q_T|S''_T)$ — „энергетический класс первого рода“, состоящий из измеримых по Лебегу на Q_T функций z, таких, что выполнены следующие условия:

при всех $t\in[0,T]$ имеют место включения $z(\cdot,t)\in\overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega|S'')$, $z_t(\cdot,t)\in L_2(\Omega)$;

функция $[0,T]\ni t\mapsto z(\cdot,t)$ — элемент пространства $C_s([0,T],\overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega|S''))$;

функция $[0,T]\ni t\mapsto z_t(\cdot,t)$ — элемент $L_\infty([0,T],L_2(\Omega))$;

норма в $\text{Э}^2_{2,0}(Q_T|S''_T)$ задаётся так же, как и в $\text{Э}^2_2(Q_T)$;

$\hat{\text{Э}}^2_{2,0}(Q_T|S''_T)\equiv\{z\in\text{Э}^2_{2,0}(Q_T|S''_T): z(x,T)=0,\ \ x\in\Omega\}$;

$\text{Є}^2_{2,0}(Q_T|S''_T)$ — „энергетический класс второго рода“, состоящий из функций $z\in\text{Э}^2_{2,0}(Q_T|S''_T)$, у которых $z_t\in C_s([0,T],L_2(\Omega))$; норма в $\text{Є}^2_{2,0}(Q_T|S''_T)$ задаётся так же, как и в $\text{Є}^2_2(Q_T)$;

$\mathbf{Э}^2_{2,0}(Q_T|S''_T)$ — „энергетический класс третьего рода“, т.е. множество всех измеримых по Лебегу функций $z\colon Q_T\to\mathbb{R}$, таких, что при всех $t\in[0,T]$ справедливы включения $z(\cdot,t)\in\overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega|S'')$, $z_t(\cdot,t)\in L_2(\Omega)$, причём $z(\cdot,t)$ и $z_t(\cdot,t)$ непрерывно зависят от $t\in[0,T]$ в норме пространств $\overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega|S'')$ и $L_2(\Omega)$ соответственно; норма в $\mathbf{Э}^2_{2,0}(Q_T|S''_T)$ определяется тем же равенством, что и в $\mathbf{Э}^2_2(Q_T)$;

$\hat{\mathbf{Э}}^2_{2,0}(Q_T|S''_T)\equiv\{z\in\mathbf{Э}^2_{2,0}(Q_T|S''_T): z(\cdot,T)=0\}$;

$\mathbf{V}_0^T[\varphi]$ — полное изменение функции $\varphi\colon[0,T]\to\mathbb{R}$, т.е. точная верхняя грань по всевозможным разбиениям $0=\tau_0<\tau_1<\tau_2<\dots<\tau_{k-1}<\tau_k=T$, $k=1,2,\dots$, сумм вида $\sum\limits_{j=1}^k|\varphi(\tau_j)-\varphi(\tau_{j-1})|$;

$\mathbf{BV}[0,T]$ — множество всех функций $\varphi\colon[0,T]\to\mathbb{R}$ ограниченной вариации, т.е. таких, что $\mathbf{V}_0^T[\varphi]<+\infty$;

$\mathbf{BV}^0[0,T]$ — множество всех функций $\varphi\in\mathbf{BV}[0,T]$, непрерывных справа в каждой точке полуинтервала $(0,T]$ и равных нулю в точке $t=0$, наделённое нормой $\|\varphi\|_{\mathbf{BV}^0}\equiv\mathbf{V}_0^T[\varphi]$, $\mathbf{BV}^0[0,T]\equiv(C[0,T])^*$;

$\mathbf{Э}_1([0,T];V,H)$, где V и H, $V\subset H$, — гильбертовы пространства, причём вложение $V\subset H$ — компактно, — множество функций $\mathsf{z}\in C([0,T],V)$, у которых $\dot{\mathsf{z}}\in C([0,T],H)$; норма в пространстве $\mathbf{Э}_1([0,T];V,H)$ задаётся равенством

$$\|\mathsf{z}\|_{\mathbf{Э}_1([0,T];V,H)}\equiv\max_{t\in[0,T]}\sqrt{\|\mathsf{z}(t)\|_V^2+\|\dot{\mathsf{z}}(t)\|_H^2};$$

$\mathbf{Э}_2([0,T];V,H)$ — множество функций $\mathsf{z}\in\mathbf{Э}_1([0,T];V,H)$, у которых $\ddot{\mathsf{z}}\in L_1([0,T],V^*)$; норма в пространстве $\mathbf{Э}_2([0,T];V,H)$ задаётся равенством

$$\|\mathsf{z}\|_{\mathbf{Э}_2([0,T];V,H)}\equiv\max_{t\in[0,T]}\sqrt{\|\mathsf{z}(t)\|_V^2+\|\dot{\mathsf{z}}(t)\|_H^2}+\|\ddot{\mathsf{z}}\|_{1,[0,T],V^*};$$

$\operatorname{osc}(f;E)$, где функция f определена на некотором множестве E и принимает значения в метрическом пространстве X с метрикой d — колебание функции f на множестве E, то есть величина

$$\sup_{t',\,t''\in E}d(f(t'),f(t''));$$

$\operatorname{osc}(f;t_0)$, где функция f определена на некотором множестве $E\subset\mathbb{R}$ и принимает значения в метрическом пространстве X с метрикой d, а $t_0\in E$, — колебание функции f в точке t_0, то есть величина

$$\inf_{r>0}\operatorname{osc}(f;E\cap(t_0-r,t_0+r));$$

через $\chi(t,\tau)$ обозначается функция, задаваемая соотношениями

$$\chi(t,\tau)=\begin{cases}1,\ \text{при } 0\leqslant t\leqslant\tau\leqslant T;\\ 0,\ \text{при } 0\leqslant\tau<t\leqslant T;\end{cases}\qquad (t,\tau)\in[0,T]\times[0,T];$$

$\chi_E(t)$, $t\in[0,T]$, — характеристическая функция измеримого по Лебегу множества $E\subseteq[0,T]$;

$\boldsymbol{\delta}_\tau$ — мера Дирака, сосредоточенная в точке $\tau\in\mathbb{R}$;

$\Omega^*\equiv\Omega\times[0,1]$;

$Q_T^*\equiv Q_T\times[0,1]$;

(Б) $\int\limits_E$ — интеграл Бохнера по множеству E, (Л) $\int\limits_E$ — интеграл Лебега по множеству E, (Р) $\int\limits_E$ — интеграл Римана по множеству E; если не оговорено иное, то все интегралы понимаются в смысле Лебега;

если $\Omega\equiv(l_1,l_2)$, где l_1, l_2, $l_1<l_2$, — некоторые вещественные числа, то

1) через $\overset{\circ}{W}{}^1_{2[\text{л}]}(\Omega)$ обозначим банахово пространство, являющееся замыканием в норме пространства $W_2^1[l_1, l_2]$ множества всех бесконечно дифференцируемых на $[l_1, l_2]$ вещественнозначных функций, равных нулю вблизи точки $x = l_1$;

2) через $\overset{\circ}{W}{}^1_{2[\text{п}]}(\Omega)$ обозначим банахово пространство, являющееся замыканием в норме пространства $W_2^1[l_1, l_2]$ множества всех бесконечно дифференцируемых на $[l_1, l_2]$ вещественнозначных функций, равных нулю вблизи точки $x = l_2$;

3) под $Э^1_{2,0[\text{л}]}(Q_T)$ будем понимать множество функций $z : Q_T \to \mathbb{R}$, таких, что

   а) при всех $t \in [0, T]$ справедливы включения $z(\cdot, t) \in \overset{\circ}{W}{}^1_{2[\text{л}]}(\Omega)$, $z_t(\cdot, t) \in L_2(\Omega)$;

   б) функция $[0, T] \ni t \mapsto z(\cdot, t)$ — элемент пространства $C_s([0, T], \overset{\circ}{W}{}^1_{2[\text{л}]}(\Omega))$;

   в) функция $[0, T] \ni t \mapsto z_t(\cdot, t)$ — элемент $L_\infty([0, T], L_2(\Omega))$;

   норма в $Э^1_{2,0[\text{л}]}(Q_T)$ задаётся как в $Э^1_2(Q_T)$;

4) под $Э^1_{2,0[\text{п}]}(Q_T)$ будем понимать множество функций $z : Q_T \to \mathbb{R}$, таких, что

   а) при всех $t \in [0, T]$ справедливы включения $z(\cdot, t) \in \overset{\circ}{W}{}^1_{2[\text{п}]}(\Omega)$, $z_t(\cdot, t) \in L_2(\Omega)$;

   б) функция $[0, T] \ni t \mapsto z(\cdot, t)$ — элемент пространства $C_s([0, T], \overset{\circ}{W}{}^1_{2[\text{п}]}(\Omega))$;

   в) функция $[0, T] \ni t \mapsto z_t(\cdot, t)$ — элемент $L_\infty([0, T], L_2(\Omega))$;

   норма в $Э^1_{2,0[\text{п}]}(Q_T)$ задаётся как в $Э^1_2(Q_T)$;

5) под $Є^1_{2,0[\text{л}]}(Q_T)$ будем понимать множество функций $z : Q_T \to \mathbb{R}$, таких, что

   а) при всех $t \in [0, T]$ справедливы включения $z(\cdot, t) \in \overset{\circ}{W}{}^1_{2[\text{л}]}(\Omega)$, $z_t(\cdot, t) \in L_2(\Omega)$;

   б) функция $[0, T] \ni t \mapsto z(\cdot, t)$ — элемент пространства $C_s([0, T], \overset{\circ}{W}{}^1_{2[\text{л}]}(\Omega))$;

   в) функция $[0, T] \ni t \mapsto z_t(\cdot, t)$ — элемент $C_s([0, T], L_2(\Omega))$;

   норма в $Є^1_{2,0[\text{л}]}(Q_T)$ задаётся как в $Є^1_2(Q_T)$;

6) под $Є^1_{2,0[\text{п}]}(Q_T)$ будем понимать множество функций $z : Q_T \to \mathbb{R}$, таких, что

   а) при всех $t \in [0, T]$ справедливы включения $z(\cdot, t) \in \overset{\circ}{W}{}^1_{2[\text{п}]}(\Omega)$, $z_t(\cdot, t) \in L_2(\Omega)$;

   б) функция $[0, T] \ni t \mapsto z(\cdot, t)$ — элемент пространства $C_s([0, T], \overset{\circ}{W}{}^1_{2[\text{п}]}(\Omega))$;

   в) функция $[0, T] \ni t \mapsto z_t(\cdot, t)$ — элемент $C_s([0, T], L_2(\Omega))$;

   норма в $Є^1_{2,0[\text{п}]}(Q_T)$ задаётся как в $Є^1_2(Q_T)$;

7) через $C^{\infty,0}_{\text{л}}(Q_T)$ обозначается множество всех бесконечно дифференцируемых в Q_T вещественнозначных функций, равных нулю вблизи левой стороны (стороны $x = l_1$) прямоугольника Q_T;

8) через $C^{\infty,0}_{\text{п}}(Q_T)$ обозначается множество всех бесконечно дифференцируемых в Q_T вещественнозначных функций, равных нулю вблизи правой стороны (стороны $x = l_2$) прямоугольника Q_T;

9) под $C^{\infty,0}_{\text{л}}(Q_{[t_1,t_2]})$, где t_1, $t_2 \in [0, T]$, $t_1 < t_2$, понимается множество всех бесконечно дифференцируемых в Q_T функций, финитных вблизи левой стороны (стороны $x = l_1$) прямоугольника Q_T;

10) под $C^{\infty,0}_{\text{п}}(Q_{[t_1,t_2]})$, где t_1, $t_2 \in [0, T]$, $t_1 < t_2$, понимается множество всех бесконечно дифференцируемых в Q_T функций, финитных вблизи правой стороны (стороны $x = l_2$) прямоугольника Q_T;

11) $W^1_{2,0[\text{л}]}(Q_T)$ — замыкание в норме $W^1_2(Q_T)$ множества $C^{\infty,0}_{\text{л}}(Q_T)$; норма в $W^1_{2,0[\text{л}]}(Q_T)$ задаётся так же, как и в $W^1_2(Q_T)$;

12) $W^1_{2,0[\text{п}]}(Q_T)$ — замыкание в норме $W^1_2(Q_T)$ множества $C^{\infty,0}_{\text{п}}(Q_T)$; норма в $W^1_{2,0[\text{п}]}(Q_T)$ задаётся так же, как и в $W^1_2(Q_T)$;

13) положим $\hat{\text{Э}}^1_{2,0[\text{л}]}(Q_T) \equiv \{z \in \text{Э}^1_{2,0[\text{л}]}(Q_T) : z(\cdot,T) = 0\}$, $\hat{\text{Э}}^1_{2,0[\text{п}]}(Q_T) \equiv \{z \in \text{Э}^1_{2,0[\text{п}]}(Q_T) : z(\cdot,T) = 0\}$, $\hat{\text{Є}}^1_{2,0[\text{л}]}(Q_T) \equiv \{z \in \text{Є}^1_{2,0[\text{л}]}(Q_T) : z(\cdot,T) = 0\}$, $\hat{\text{Є}}^1_{2,0[\text{п}]}(Q_T) \equiv \{z \in \text{Є}^1_{2,0[\text{п}]}(Q_T) : z(\cdot,T) = 0\}$;

14) под $\textbf{Э}^1_{2,0[\text{л}]}(Q_T)$ будем понимать множество функций $z : Q_T \to \mathbb{R}$, таких, что

   а) при всех $t \in [0,T]$ справедливы включения $z(\cdot,t) \in \overset{\circ}{W}{}^1_{2[\text{л}]}(\Omega)$, $z_t(\cdot,t) \in L_2(\Omega)$;

   б) функция $[0,T] \ni t \mapsto z(\cdot,t)$ — элемент пространства $C([0,T], \overset{\circ}{W}{}^1_{2[\text{л}]}(\Omega))$;

   в) функция $[0,T] \ni t \mapsto z_t(\cdot,t)$ — элемент $C([0,T], L_2(\Omega))$;

   норма в $\textbf{Э}^1_{2,0[\text{л}]}(Q_T)$ задаётся как в $\textbf{Э}^1_2(Q_T)$;

15) под $\textbf{Э}^1_{2,0[\text{п}]}(Q_T)$ будем понимать множество функций $z : Q_T \to \mathbb{R}$, таких, что

   а) при всех $t \in [0,T]$ справедливы включения $z(\cdot,t) \in \overset{\circ}{W}{}^1_{2[\text{п}]}(\Omega)$, $z_t(\cdot,t) \in L_2(\Omega)$;

   б) функция $[0,T] \ni t \mapsto z(\cdot,t)$ — элемент пространства $C([0,T], \overset{\circ}{W}{}^1_{2[\text{п}]}(\Omega))$;

   в) функция $[0,T] \ni t \mapsto z_t(\cdot,t)$ — элемент $C([0,T], L_2(\Omega))$;

   норма в $\textbf{Э}^1_{2,0[\text{п}]}(Q_T)$ задаётся как в $\textbf{Э}^1_2(Q_T)$;

16) положим $\hat{\textbf{Э}}^1_{2,0[\text{л}]}(Q_T) \equiv \{z \in \textbf{Э}^1_{2,0[\text{л}]}(Q_T) : z(\cdot,T) = 0\}$, $\hat{\textbf{Э}}^1_{2,0[\text{п}]}(Q_T) \equiv \{z \in \textbf{Э}^1_{2,0[\text{п}]}(Q_T) : z(\cdot,T) = 0\}$;

17) через $\overset{\circ}{W}{}^2_{2[\text{л}]}(\Omega)$ обозначим банахово пространство, являющееся замыканием в норме пространства $W^2_2[l_1,l_2]$ множества всех бесконечно дифференцируемых на $[l_1,l_2]$ вещественнозначных функций, равных нулю вблизи точки $x = l_1$;

18) через $\overset{\circ}{W}{}^2_{2[\text{п}]}(\Omega)$ обозначим банахово пространство, являющееся замыканием в норме пространства $W^2_2[l_1,l_2]$ множества всех бесконечно дифференцируемых на $[l_1,l_2]$ вещественнозначных функций, равных нулю вблизи точки $x = l_2$;

19) под $\text{Э}^2_{2,0[\text{л}]}(Q_T)$ будем понимать множество функций $z : Q_T \to \mathbb{R}$, таких, что

   а) при всех $t \in [0,T]$ справедливы включения $z(\cdot,t) \in \overset{\circ}{W}{}^2_{2[\text{л}]}(\Omega)$, $z_t(\cdot,t) \in L_2(\Omega)$;

   б) функция $[0,T] \ni t \mapsto z(\cdot,t)$ — элемент пространства $C_s([0,T], \overset{\circ}{W}{}^2_{2[\text{л}]}(\Omega))$;

   в) функция $[0,T] \ni t \mapsto z_t(\cdot,t)$ — элемент $L_\infty([0,T], L_2(\Omega))$;

   норма в $\text{Э}^2_{2,0[\text{л}]}(Q_T)$ задаётся как в $\text{Э}^2_2(Q_T)$;

20) под $\text{Э}^2_{2,0[\text{п}]}(Q_T)$ будем понимать множество функций $z : Q_T \to \mathbb{R}$, таких, что

   а) при всех $t \in [0,T]$ справедливы включения $z(\cdot,t) \in \overset{\circ}{W}{}^2_{2[\text{п}]}(\Omega)$, $z_t(\cdot,t) \in L_2(\Omega)$;

   б) функция $[0,T] \ni t \mapsto z(\cdot,t)$ — элемент пространства $C_s([0,T], \overset{\circ}{W}{}^2_{2[\text{п}]}(\Omega))$;

   в) функция $[0,T] \ni t \mapsto z_t(\cdot,t)$ — элемент $L_\infty([0,T], L_2(\Omega))$;

   норма в $\text{Э}^2_{2,0[\text{п}]}(Q_T)$ задаётся как в $\text{Э}^2_2(Q_T)$;

21) под $\text{Є}^2_{2,0[\text{л}]}(Q_T)$ будем понимать множество функций $z : Q_T \to \mathbb{R}$, таких, что

   а) при всех $t \in [0,T]$ справедливы включения $z(\cdot,t) \in \overset{\circ}{W}{}^2_{2[\text{л}]}(\Omega)$, $z_t(\cdot,t) \in L_2(\Omega)$;

   б) функция $[0,T] \ni t \mapsto z(\cdot,t)$ — элемент пространства $C_s([0,T], \overset{\circ}{W}{}^2_{2[\text{л}]}(\Omega))$;

   в) функция $[0,T] \ni t \mapsto z_t(\cdot,t)$ — элемент $C_s([0,T], L_2(\Omega))$;

   норма в $\text{Є}^2_{2,0[\text{л}]}(Q_T)$ задаётся как в $\text{Є}^2_2(Q_T)$;

22) под $\text{Є}^2_{2,0[\text{п}]}(Q_T)$ будем понимать множество функций $z : Q_T \to \mathbb{R}$, таких, что

а) при всех $t \in [0,T]$ справедливы включения $z(\cdot,t) \in \overset{\circ}{W}{}^2_{2[\text{п}]}(\Omega)$, $z_t(\cdot,t) \in L_2(\Omega)$;

б) функция $[0,T] \ni t \mapsto z(\cdot,t)$ — элемент пространства $C_s([0,T], \overset{\circ}{W}{}^2_{2[\text{п}]}(\Omega))$;

в) функция $[0,T] \ni t \mapsto z_t(\cdot,t)$ — элемент $C_s([0,T], L_2(\Omega))$;

норма в $Є^2_{2,0[\text{п}]}(Q_T)$ задаётся как в $Є^2_2(Q_T)$;

23) $W^{2;1}_{2,0[\text{л}]}(Q_T)$ — замыкание в норме $W^{2;1}_2(Q_T)$ множества $C^{\infty,0}_{\text{л}}(Q_T)$; норма в $W^{2;1}_{2,0[\text{л}]}(Q_T)$ задаётся так же, как и в $W^{2;1}_2(Q_T)$;

24) $W^{2;1}_{2,0[\text{п}]}(Q_T)$ — замыкание в норме $W^{2;1}_2(Q_T)$ множества $C^{\infty,0}_{\text{п}}(Q_T)$; норма в $W^{2;1}_{2,0[\text{п}]}(Q_T)$ задаётся так же, как и в $W^{2;1}_2(Q_T)$;

25) положим $\hat{Э}^2_{2,0[\text{л}]}(Q_T) \equiv \{z \in Э^2_{2,0[\text{л}]}(Q_T) : z(\cdot,T) = 0\}$, $\hat{Э}^2_{2,0[\text{п}]}(Q_T) \equiv \{z \in Э^2_{2,0[\text{п}]}(Q_T) : z(\cdot,T) = 0\}$, $\hat{Є}^2_{2,0[\text{л}]}(Q_T) \equiv \{z \in Є^2_{2,0[\text{л}]}(Q_T) : z(\cdot,T) = 0\}$, $\hat{Є}^2_{2,0[\text{п}]}(Q_T) \equiv \{z \in Є^2_{2,0[\text{п}]}(Q_T) : z(\cdot,T) = 0\}$;

26) под $\mathbf{Э}^2_{2,0[\text{л}]}(Q_T)$ будем понимать множество функций $z : Q_T \to \mathbb{R}$, таких, что

а) при всех $t \in [0,T]$ справедливы включения $z(\cdot,t) \in \overset{\circ}{W}{}^2_{2[\text{л}]}(\Omega)$, $z_t(\cdot,t) \in L_2(\Omega)$;

б) функция $[0,T] \ni t \mapsto z(\cdot,t)$ — элемент пространства $C([0,T], \overset{\circ}{W}{}^2_{2[\text{л}]}(\Omega))$;

в) функция $[0,T] \ni t \mapsto z_t(\cdot,t)$ — элемент $C([0,T], L_2(\Omega))$;

норма в $\mathbf{Э}^2_{2,0[\text{л}]}(Q_T)$ задаётся как в $\mathbf{Э}^2_2(Q_T)$;

27) под $\mathbf{Э}^2_{2,0[\text{п}]}(Q_T)$ будем понимать множество функций $z : Q_T \to \mathbb{R}$, таких, что

а) при всех $t \in [0,T]$ справедливы включения $z(\cdot,t) \in \overset{\circ}{W}{}^2_{2[\text{п}]}(\Omega)$, $z_t(\cdot,t) \in L_2(\Omega)$;

б) функция $[0,T] \ni t \mapsto z(\cdot,t)$ — элемент пространства $C([0,T], \overset{\circ}{W}{}^2_{2[\text{п}]}(\Omega))$;

в) функция $[0,T] \ni t \mapsto z_t(\cdot,t)$ — элемент $C([0,T], L_2(\Omega))$;

норма в $\mathbf{Э}^2_{2,0[\text{п}]}(Q_T)$ задаётся как в $\mathbf{Э}^2_2(Q_T)$;

28) положим $\hat{\mathbf{Э}}^2_{2,0[\text{л}]}(Q_T) \equiv \{z \in \mathbf{Э}^2_{2,0[\text{л}]}(Q_T) : z(\cdot,T) = 0\}$, $\hat{\mathbf{Э}}^2_{2,0[\text{п}]}(Q_T) \equiv \{z \in \mathbf{Э}^2_{2,0[\text{п}]}(Q_T) : z(\cdot,T) = 0\}$;

$\blacksquare$ — знак окончания доказательства.

Часть I

Сведения из теории функций и функционального анализа

Глава 1. Функции со значениями в банаховых пространствах

1.1. Предел, непрерывность и дифференцируемость

Изложение материала настоящего раздела следует [28, 63].

1.1.1. Функции одного вещественного переменного

Пусть X — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_X$, и пусть $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}$ — некоторое множество, а $t_0 \in \mathbb{R}$ — его предельная точка.

Пусть $f\colon \mathcal{T} \to X$ — некоторая функция.

Определение 1.1.1. *(Определение предела по Коши) Говорят, что $a \in X$ — предел функции f в норме пространства X при t, стремящемся к t_0, и пишут $\overset{X}{\lim\limits_{t\to t_0}} f(t) = a$, если*

$$\lim_{t\to t_0} \|f(t) - a\|_X = 0,$$

или, что то же самое,

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0\ \forall\, t \in \mathcal{T},\ 0 < |t - t_0| < \delta : \|f(t) - a\|_X < \varepsilon.$$

Если не возникает недоразумений, то вместо $\overset{X}{\lim\limits_{t\to t_0}} f(t) = a$ пишем $\lim\limits_{t\to t_0} f(t) = a$.

Определение 1.1.2. *(Определение предела по Гейне) Говорят, что $a \in X$ — предел функции f в норме пространства X при t, стремящемся к t_0, и пишут $\overset{X}{\lim\limits_{t\to t_0}} f(t) = a$, если для любой последовательности точек $t_i \in \mathcal{T}$, $i = 1, 2, \ldots$, сходящейся к точке t_0, последовательность $f(t_i)$, $i = 1, 2, \ldots$, сходится в X к точке a.*

Из определения предела вещественной функции одного вещественного переменного вытекает

Теорема 1.1.1. *Определения 1.1.1 и 1.1.2 эквивалентны.*

Определение 1.1.3. *Пусть X, Y и Z — банаховы пространства с нормами $\|\cdot\|_X$, $\|\cdot\|_Y$ и $\|\cdot\|_Z$ соответственно. Отображение $\Phi\colon X \times Y \to Z$ называется* ***умножением*** *элементов пространств X и Y, принимающим значения в пространстве Z, если*

1) $\Phi(x_1 + x_2, y) = \Phi(x_1, y) + \Phi(x_2, y)$ *для всех* x_1, $x_2 \in X$, $y \in Y$;

2) $\Phi(\alpha x, y) = \alpha\Phi(x, y)$ *для всех* $x \in X$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $y \in Y$;

3) $\Phi(x, y_1 + y_2) = \Phi(x, y_1) + \Phi(x, y_2)$ *для всех* y_1, $y_2 \in Y$, $x \in X$;

4) $\Phi(x, \alpha y) = \alpha\Phi(x, y)$ *для всех* $x \in X$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $y \in Y$;

5) *найдётся постоянная $K > 0$, такая, что для всех $x \in X$, $y \in Y$ выполнено неравенство $\|\Phi(x, y)\|_Z \leqslant K\|x\|_X\|y\|_Y$.*

Далее положим $x \bullet y \equiv \Phi(x, y)$.

Приведём примеры отображений, удовлетворяющих данному определению.

Пример 1.1.1. Пусть $X = Y = H$ — гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle_H$, $Z = \mathbb{R}$, и пусть для всех $x \in X$, $y \in Y$

$$\Phi(x, y) \equiv \langle x, y\rangle_H.$$

Тогда Φ — умножение элементов X и Y, принимающее значения в пространстве Z.

Пример 1.1.2. Пусть X — банахово пространство, $Y = X^*$, $Z = \mathbb{R}$, и пусть для всех $x \in X$, $y \in Y$

$$\Phi(x, y) \equiv \langle x, y\rangle.$$

Тогда Φ — умножение элементов X и Y, принимающее значения в пространстве Z.

Пример 1.1.3. Пусть X, Z — банаховы пространство, $Y = \mathcal{L}(X, Z)$, и пусть для всех $x \in X$, $A \in Y$

$$\Phi(x, A) \equiv Ax.$$

Тогда Φ — умножение элементов X и Y, принимающее значения в пространстве Z.

Пример 1.1.4. Пусть $X = \mathcal{L}(V_1, V_2)$, $Y = \mathcal{L}(V_0, V_1)$, $Z = \mathcal{L}(V_0, V_2)$, где V_0, V_0 и V_0, — банаховы пространства, и пусть для всех $A \in X$, $B \in Y$

$$\Phi(A, B) \equiv AB,$$

где $(AB)(v) \equiv A(B(v))$ для всех $v \in V_0$. Тогда Φ — умножение элементов X и Y, принимающее значения в пространстве Z.

Перейдём к свойствам предела функции.

Теорема 1.1.2. *Если* $\overset{X}{\lim\limits_{t\to t_0}} f(t) = a$, *то найдётся функция* $\alpha\colon \mathcal{T} \to X$, *такая, что* $\overset{X}{\lim\limits_{t\to t_0}} \alpha(t) = 0_X$ *и*

$$f(t) = a + \alpha(t) \ \ \forall\, t \in \mathcal{T}.$$

Доказательство. Достаточно взять $\alpha(t) \equiv f(t) - a$. ■

Теорема 1.1.3. *Если* $a \in X$, *то* $\overset{X}{\lim\limits_{t\to t_0}} a = a$.

Теорема 1.1.4. *Пусть существует предел* $\overset{X}{\lim\limits_{t\to t_0}} f(t)$, *равный* a. *Тогда* $\lim\limits_{t\to t_0} \|f(t)\|_X = \|a\|_X$.

Доказательство. В самом деле,

$$|\,\|f(t)\|_X - \|a\|_X| \leqslant \|f(t) - a\|_X \to 0, \ \ t \to t_0,$$

что и даёт утверждение теоремы. ■

Из данной теоремы и теории пределов вещественных функций одного вещественного переменного вытекает

Теорема 1.1.5. *Если функция* $f\colon \mathcal{T} \to X$ *имеет предел в точке* t_0, *то она ограничена в некоторой окрестности этой точки, то есть найдутся* $\delta > 0$ *и* $L > 0$, *такие, что*

$$\|f(t)\|_X \leqslant L \ \ \forall\, t \in \mathcal{T} \cap (t_0 - \delta, t_0 + \delta).$$

Теорема 1.1.6. *Пусть функции* $f\colon \mathcal{T} \to X$, $g\colon \mathcal{T} \to X$, *таковы, что существуют пределы* $\overset{X}{\lim\limits_{t\to t_0}} f(t)$ *и* $\overset{X}{\lim\limits_{t\to t_0}} g(t)$. *Тогда для любых вещественных чисел* α, β *существует предел функции* $\alpha f(t) + \beta g(t)$, $t \in \mathcal{T}$, *при* $t \to t_0$, *причём*

$$\overset{X}{\lim_{t\to t_0}} [\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha \overset{X}{\lim_{t\to t_0}} f(t) + \beta \overset{X}{\lim_{t\to t_0}} g(t).$$

Доказательство. Обозначим предел $\overset{X}{\lim\limits_{t\to t_0}} f(t)$ через a, а предел $\overset{X}{\lim\limits_{t\to t_0}} g(t)$ через b. Тогда

$$\begin{gathered}\|[\alpha f(t) + \beta g(t)] - [\alpha a + \beta b]\|_X = \|\alpha[f(t) - a] + \beta[g(t) - b]\|_X \leqslant \\ \leqslant |\alpha|\|f(t) - a\|_X + |\beta|\|g(t) - b\|_X \to 0, \ \ t \to t_0.\end{gathered}$$

Это и означает, что

$$\overset{X}{\lim_{t\to t_0}} [\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha \overset{X}{\lim_{t\to t_0}} f(t) + \beta \overset{X}{\lim_{t\to t_0}} g(t).$$

Теорема доказана. ■

Теорема 1.1.7. *Пусть функции* $f\colon \mathcal{T} \to X$, $g\colon \mathcal{T} \to Y$, *таковы, что существуют пределы* $\overset{X}{\lim\limits_{t\to t_0}} f(t)$ *и* $\overset{Y}{\lim\limits_{t\to t_0}} g(t)$. *Тогда существует предел функции* $f(t) \bullet g(t)$, $t \in \mathcal{T}$, *при* $t \to t_0$, *причём*

$$\overset{Z}{\lim_{t\to t_0}} [f(t) \bullet g(t)] = \left[\overset{X}{\lim_{t\to t_0}} f(t)\right] \bullet \left[\overset{Y}{\lim_{t\to t_0}} g(t)\right].$$

Доказательство. Обозначим предел $\overset{X}{\lim\limits_{t\to t_0}} f(t)$ через a, а предел $\overset{Y}{\lim\limits_{t\to t_0}} g(t)$ через b. Тогда

$$f(t)\bullet g(t) - a\bullet b = [(f(t)-a)+a]\bullet g(t) - a\bullet b = [f(t)-a]\bullet g(t) + a\bullet g(t) - a\bullet b = [f(t)-a]\bullet g(t)+$$
$$+a\bullet [g(t)-b] = [f(t)-a]\bullet[(g(t)-b)+b] + a\bullet[g(t)-b] = [f(t)-a]\bullet[g(t)-b]+$$
$$+[f(t)-a]\bullet b + a\bullet[g(t)-b].$$

Поэтому

$$\|f(t)\bullet g(t) - a\bullet b\|_Z = \|[f(t)-a]\bullet[g(t)-b] + [f(t)-a]\bullet b + a\bullet[g(t)-b]\|_Z \leqslant$$
$$\leqslant \|[f(t)-a]\bullet[g(t)-b]\|_Z + \|[f(t)-a]\bullet b\|_Z + \|a\bullet[g(t)-b]\|_Z \leqslant K\|f(t)-a\|_X\|g(t)-b\|_Y+$$
$$+K\|f(t)-a\|_X\|b\|_Y + K\|a\|_X\|g(t)-b\|_Y \to 0,\ \ t\to t_0.$$

Последнее означает, что

$$\overset{Z}{\lim_{t\to t_0}}[f(t)\bullet g(t)] = \left[\overset{X}{\lim_{t\to t_0}} f(t)\right]\bullet\left[\overset{Y}{\lim_{t\to t_0}} g(t)\right].$$

Теорема доказана. ■

Теорема 1.1.8. *Если функция $f\colon \mathcal{T}\to X$ имеет равный нулю предел при $t\to t_0$, а функция $g\colon\mathcal{T}\to Y$ ограничена в некоторой окрестности этой точки, то предел функции $f(t)\bullet g(t)$, $t\in\mathcal{T}$, при $t\to t_0$ равен нулю.*

Из определения 1.1.1 и определения непрерывности функции, определённой на метрическом пространстве и принимающей значения в другом метрическом пространстве, следует

Теорема 1.1.9. *Функция $f\colon\mathcal{T}\to X$ непрерывна в точке $t_0\in\mathcal{T}$ тогда и только тогда, когда*

$$\overset{X}{\lim_{t\to t_0}} f(t) = f(t_0).$$

Из данной теоремы и приведённых выше свойств предела вытекают следующие свойства непрерывных функций.

Теорема 1.1.10. *1) Пусть функции $f\colon\mathcal{T}\to X$, $g\colon\mathcal{T}\to X$, непрерывны в точке $t_0\in\mathcal{T}$. Тогда для любых вещественных чисел α, β функция $\alpha f(t)+\beta g(t)$, $t\in\mathcal{T}$, непрерывна в точке t_0.*

2) Если функция $f\colon\mathcal{T}\to X$ непрерывна в точке $t_0\in\mathcal{T}$, то функция $[0,T]\ni t\mapsto\|f(t)\|_X$ также непрерывна в этой точке.

3) Пусть функции $f\colon\mathcal{T}\to X$, $g\colon\mathcal{T}\to Y$, непрерывны в точке $t_0\in\mathcal{T}$. Тогда функция $f(t)\bullet g(t)$, $t\in\mathcal{T}$, тоже непрерывна в этой точке.

Пусть $\mathcal{T}\subset\mathbb{R}$ — некоторый промежуток, и задана функция $f\colon\mathcal{T}\to X$.

Определение 1.1.4. *Элемент $A\in X$ называется* ***сильной производной*** *функции f* ***в точке*** *$t_0\in\mathcal{T}$* ***в норме пространства*** *X, если*

$$\overset{X}{\lim_{\Delta t\to 0}}\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t} = A.$$

Этот элемент A называется ***сильной производной функции*** *f* ***в точке*** *t_0, и обозначается $f'(t_0)$, или $\dot f(t_0)$, или $\dfrac{df(t_0)}{dt}$.*

Приведём теперь некоторые свойства производных.

Теорема 1.1.11. *Если $A\in X$ — константа, то $(A)'=0_X$.*

Теорема 1.1.12. *Если функции $f\colon\mathcal{T}\to X$ и $g\colon\mathcal{T}\to X$ имеют сильные производные в точке $t_0\in\mathcal{T}$, то для всех вещественных чисел α, β функция $\alpha f(t)+\beta g(t)$, $t\in\mathcal{T}$, имеет сильную производную в точке t_0, причём*

$$(\alpha f+\beta g)'(t_0) = \alpha f'(t_0)+\beta g'(t_0).$$

Доказательство. В самом деле, пусть $h(t)\equiv\alpha f(t)+\beta g(t)$, $\Delta h\equiv h(t_0+\Delta t)-h(t_0)$. Тогда

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{h(t_0+\Delta t)-h(t_0)}{\Delta t} = \frac{[\alpha f(t_0+\Delta t)+\beta g(t_0+\Delta t)]-[\alpha f(t_0)+\beta g(t_0)]}{\Delta t} =$$
$$= \frac{\alpha[f(t_0+\Delta t)-f(t_0)]+\beta[g(t_0+\Delta t)-g(t_0)]}{\Delta t} = \alpha\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}+\beta\frac{g(t_0+\Delta t)-g(t_0)}{\Delta t}.$$

Пользуясь затем свойствами предела, получаем утверждение теоремы. ■

Определение 1.1.5. *Функция f называется* ***сильно дифференцируемой в точке*** $t_0 \in \mathcal{T}$*, если для приращения функции f в точке t_0 справедливо представление*

$$\Delta f \equiv f(t_0 + \Delta t) - f(t_0) = A\Delta t + \alpha(\Delta t)\Delta t, \tag{1.1.1}$$

где $A \in X$ — некоторая константа, а принимающая значения в пространстве X функция α такова, что $\|\alpha(\Delta t)\|_X \to 0$ при $\Delta t \to 0$.

Теорема 1.1.13. *Представление вида (1.1.1) определяется однозначно.*

Доказательство. В самом деле, пусть для приращения Δf функции f в точке $t_0 \in \mathcal{T}$ справедливы два представления вида (1.1.1), т.е. найдутся A_1, $A_2 \in X$, и функции $\alpha_1(\Delta t)$, $\alpha_2(\Delta t)$, $\|\alpha_1(\Delta t)\|_X \to 0$, $\|\alpha_2(\Delta t)\|_X \to 0$, $\Delta t \to 0$, такие, что

$$\Delta f \equiv f(t_0 + \Delta t) - f(t_0) = A_1\Delta t + \alpha_1(\Delta t)\Delta t, \ \ \Delta f \equiv f(t_0 + \Delta t) - f(t_0) = A_2\Delta t + \alpha_2(\Delta t)\Delta t.$$

Вычитая из первого равенства второе, будем иметь

$$0_X = [A_1 - A_2]\Delta t + [\alpha_1(\Delta t) - \alpha_2(\Delta t)]\Delta t.$$

Поделив на Δt, получим, что

$$0_X = [A_1 - A_2] + [\alpha_1(\Delta t) - \alpha_2(\Delta t)].$$

Переходя затем к пределу при $\Delta t \to 0$, заключаем, что $A_1 = A_2$. Поэтому и $\alpha_1(\Delta t) \equiv \alpha_2(\Delta t)$. Теорема доказана. ■

Теорема 1.1.14. *Функция $f\colon \mathcal{T} \to X$ сильно дифференцируема в точке $t_0 \in \mathcal{T}$ в том и только том случае, если она имеет в этой точке сильную производную. При этом $A = f'(t_0)$.*

Доказательство. 1) Пусть f сильно дифференцируема в точке t_0. Тогда для $\Delta f \equiv f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$ справедливо представление (1.1.1). Поделив на Δt, выводим, что

$$\frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} = A + \alpha(\Delta t).$$

Поскольку же $\overset{X}{\lim\limits_{\Delta t \to 0}} \alpha(\Delta t) = 0_X$, то существует предел $\overset{X}{\lim\limits_{\Delta t \to 0}} \frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}$ и равен A. Это и означает, что f имеет в точке t_0 сильную производную $f'(t_0)$, причём $A = f'(t_0)$.

2) Пусть функция f имеет в точке t_0 сильную производную $f'(t_0)$. Тогда найдётся принимающая значения в X функция $\alpha(\Delta t)$, такая, что $\overset{X}{\lim\limits_{\Delta t \to 0}} \alpha(\Delta t) = 0_X$ и

$$\frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} = f'(t_0) + \alpha(\Delta t).$$

Отсюда следует, что

$$\Delta f \equiv f(t_0 + \Delta t) - f(t_0) = f'(t_0)\Delta t + \alpha(\Delta t)\Delta t.$$

Таким образом, функция f сильно дифференцируема в точке t_0 и справедливо равенство $A = f'(t_0)$. Теорема полностью доказана. ■

Теорема 1.1.15. *Если функция $f\colon \mathcal{T} \to X$ сильно дифференцируема в точке $t_0 \in \mathcal{T}$, то она непрерывна в этой точке в норме пространства X.*

Доказательство. В самом деле, поскольку функция f сильно дифференцируема в точке t_0, то

$$\Delta f \equiv f(t_0 + \Delta t) - f(t_0) = f'(t_0)\Delta t + \alpha(\Delta t)\Delta t.$$

Поэтому

$$\|\Delta f\|_X \equiv \|f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)\|_X = \|f'(t_0)\Delta t + \alpha(\Delta t)\Delta t\|_X \leqslant |\Delta t|[\|f'(t_0)\|_X + \|\alpha(\Delta t)\|_X] \to 0, \ \ \Delta t \to 0,$$

что и доказывает непрерывность f в точке t_0. ■

Теорема 1.1.16. *Пусть функции $f\colon \mathcal{T} \to X$ и $g\colon \mathcal{T} \to Y$ сильно дифференцируемы в точке $t_0 \in \mathcal{T}$. Тогда функция $f(t) \bullet g(t)$, $t \in \mathcal{T}$, также сильно дифференцируема в этой точке, причём*

$$(f \bullet g)'(t_0) = f'(t_0) \bullet g(t_0) + f(t_0) \bullet g'(t_0).$$

Доказательство. Действительно, пусть $h(t) \equiv f(t) \bullet g(t)$, $\Delta f \equiv f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$, $\Delta g \equiv g(t_0 + \Delta t) - g(t_0)$, $\Delta h \equiv h(t_0 + \Delta t) - h(t_0)$. Тогда

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{h(t_0 + \Delta t) - h(t_0)}{\Delta t} = \frac{f(t_0 + \Delta t) \bullet g(t_0 + \Delta t) - f(t_0) \bullet g(t_0)}{\Delta t} =$$
$$= \frac{[f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)] \bullet g(t_0 + \Delta t) + f(t_0) \bullet [g(t_0 + \Delta t) - g(t_0)]}{\Delta t} = \frac{\Delta f}{\Delta t} \bullet g(t_0 + \Delta t) + f(t_0) \bullet \frac{\Delta g}{\Delta t}.$$

Поскольку f сильно дифференцируема в точке t_0, то

$$\overset{X}{\lim_{\Delta t \to 0}} \frac{\Delta f}{\Delta t} = f'(t_0).$$

Так как g сильно дифференцируема в точке t_0, то она непрерывна в этой точке, и, кроме того,

$$\overset{X}{\lim_{\Delta t \to 0}} \frac{\Delta g}{\Delta t} = g'(t_0).$$

Поэтому существует предел $\overset{X}{\lim\limits_{\Delta t \to 0}} \frac{\Delta h}{\Delta t}$, который равен $f'(t_0) \bullet g(t_0) + f(t_0) \bullet g'(t_0)$. Теорема доказана. ■

Определение 1.1.6. *Определённую на промежутке $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}$ функцию $f\colon \mathcal{T} \to X$ назовём* ***сильно непрерывно дифференцируемой в точке*** *$t_0 \in \mathcal{T}$, если она сильно дифференцируема в каждой точке некоторой окрестности точки t_0, и сильная производная $f'(t)$ сильно непрерывна в этой точке в норме пространства X. Функция f называется* ***сильно непрерывно дифференцируемой на промежутке*** *$\mathcal{T}$, если она сильно дифференцируема в каждой точке этого промежутка и производная $f'(t)$, $t \in \mathcal{T}$, сильно непрерывна на $\mathcal{T}$ в норме пространства X. Множество всех сильно непрерывно дифференцируемых на промежутке $\mathcal{T}$ функций обозначается $C^1(\mathcal{T}, X)$.*

Определение 1.1.7. *Пусть функция $f\colon \mathcal{T} \to X$ определена и сильно дифференцируема на промежутке $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}$. Тогда функция $f'(t)$, $t \in \mathcal{T}$, также определена на этом промежутке. Если функция $f'(t)$, $t \in \mathcal{T}$, имеет сильную производную в точке $t_0 \in \mathcal{T}$, то эту производную называют сильной второй производной функции f в точке t_0 и обозначают $f''(t_0)$, $\ddot{f}(t_0)$, $f^{(2)}(t_0)$ или $\dfrac{d^2 f(t_0)}{dt^2}$. При этом говорят, что функция f* ***дважды сильно дифференцируема в точке*** *t_0.*

Если функция f дважды сильно дифференцируема в каждой точке промежутка $\mathcal{T}$, а функция $f''(t)$, $t \in \mathcal{T}$, сильно непрерывна на $\mathcal{T}$ в норме пространства X, то говорят, что функция f ***дважды сильно непрерывно дифференцируема на промежутке*** *$\mathcal{T}$. Множество всех дважды сильно непрерывно дифференцируемых на промежутке $\mathcal{T}$ функций обозначается $C^2(\mathcal{T}, X)$.*

Аналогично определяются производные более высоких порядков и множества $C^m(\mathcal{T}, X)$ при $m \geqslant 2$.

Лемма 1.1.1. *Если $f \in C_s([0,T], X)$, то $\sup\limits_{t \in [0,T]} \|f(t)\|_X < +\infty$.*

Доказательство. Поскольку $f \in C_s([0,T], X)$, то при всех $x^* \in X^*$ функция

$$[0,T] \ni t \mapsto \langle f(t), x^* \rangle$$

непрерывна на $[0,T]$. Поэтому найдётся зависящая от $x^* \in X^*$ постоянная $C = C(x^*) > 0$, такая, что

$$|\langle f(t), x^* \rangle| \leqslant C(x^*) \ \ \forall\, t \in [0,T].$$

Следовательно, в силу вложения $X \subset X^{**}$ и теоремы о резонансе [33, следствие 1 на стр.104], найдётся постоянная $C_1 > 0$, такая, что

$$\|f(t)\|_{X^{**}} \leqslant C_1 \ \ \forall\, t \in [0,T],$$

откуда, в силу изометричности вложения $X \subset X^{**}$, следует, что

$$\sup_{t \in [0,T]} \|f(t)\|_X \leqslant C_1.$$

Лемма доказана. ■

Предположим теперь, что пространство X рефлексивно и наделим пространство $C_s([0,T], X)$ нормой

$$\|f\|_{C_s([0,T],X)} \equiv \sup_{t \in [0,T]} \|f(t)\|_X \ \ \forall\, f \in C_s([0,T], X).$$

которую в даленейшем будем называть **сильной нормой** пространства $C_s([0,T],X)$, сооответствующую топологию будем называть X–топологией пространства $C_s([0,T],X)$, а сходящиеся в этой норме последовательности — X–сходящимися.

Лемма 1.1.2. *Пространство $C_s([0,T],X)$, наделённое нормой $\|\cdot\|_{C_s([0,T],X)}$, является банаховым пространством.*

Доказательство. Пусть последовательность $f_i \in C_s([0,T],X)$, $i=1,2,\dots$, фундаментальна в норме $\|\cdot\|_{C_s([0,T],X)}$, то есть

$$\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,i_0=i_0(\varepsilon)\geqslant 1\ \forall\,i,\ j\geqslant i_0(\varepsilon):\|f_i-f_j\|_{C_s([0,T],X)}\leqslant\varepsilon.$$

С другой стороны, для всех $i,\ j=1,2,\dots,\ x^*\in X^*$ и всех $t\in[0,T]$

$$|\langle f_i(t)-f_j(t),x^*\rangle|\leqslant\|f_i(t)-f_j(t)\|_X\|x^*\|_{X^*}.$$

Поэтому

$$\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,i_0=i_0(\varepsilon)\geqslant 1\ \forall\,i,\ j\geqslant i_0(\varepsilon)\ \forall\,x^*\in X^*\ \forall\,t\in[0,T]:|\langle f_i(t)-f_j(t),x^*\rangle|\leqslant\varepsilon\|x^*\|_{X^*}. \tag{1.1.2}$$

Это означает, что при каждом $x^*\in X^*$ последовательность функций

$$[0,T]\ni t\mapsto\langle f_i(t),x^*\rangle,\ \ i=1,2,\dots,$$

фундаментальна в норме банахова пространства $C[0,T]$, а, значит, равномерно сходится к некоторой непрерывной на $[0,T]$ при каждом фиксированном $x^*\in X^*$ функции $F(t,x^*)\in\mathbb{R}$, $t\in[0,T]$. В частности,

$$\langle f_i(t),x^*\rangle\to F(t,x^*),\ \ i\to\infty,\ \ \forall\,t\in[0,T].$$

Выберем теперь $t\in[0,T]$ и зафиксируем. Поскольку элемент $f_i(t)\in X$ можно рассматривать как элемент пространства X^{**}, при всех $i=1,2,\dots$, то мы имеем поточечную сходимость линейных непрерывных функционалов $f_i(t)$, $i=1,2,\dots$ над пространством X^*. Как известно, это означает, что $F(t,\cdot)$ также является линейным непрерывным функционалом над пространством X^*, т.е. найдётся функция $f\colon[0,T]\to X^{**}$, такая, что $F(t,x^*)\equiv\langle f(t),x^*\rangle$. Поскольку пространство X рефлексивно, то X^{**} можно отождествить с X, и, как следствие, рассматривать функцию f как функцию со значениями в X.

Таким образом, мы доказали, что найдётся функция $f\in C_s([0,T],X)$, такая, что

$$\lim_{j\to\infty}\max_{t\in[0,T]}|\langle f_j(t)-f(t),x^*\rangle|=0\ \ \forall\,x^*\in X^*.$$

Устремляя затем в (1.1.2) j к бесконечности, получим, что

$$\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,i_0=i_0(\varepsilon)\geqslant 1\ \forall\,i\geqslant i_0(\varepsilon)\ \forall\,x^*\in X^*\ \forall\,t\in[0,T]:|\langle f_i(t)-f(t),x^*\rangle|\leqslant\varepsilon\|x^*\|_{X^*}.$$

Переходя здесь к точной верхней грани по $x^*\in X^*$, у которых $\|x^*\|_{X^*}\leqslant 1$, в силу изометричного вложения $X\subset X^{**}$ будем иметь

$$\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,i_0=i_0(\varepsilon)\geqslant 1\ \forall\,i\geqslant i_0(\varepsilon)\ \forall\,t\in[0,T]:\|f_i(t)-f(t)\|_X\leqslant\varepsilon,$$

откуда следует, что

$$\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,i_0=i_0(\varepsilon)\geqslant 1\ \forall\,i\geqslant i_0(\varepsilon):\|f_i-f\|_{C_s([0,T],X)}\leqslant\varepsilon,$$

что и означает сходимость последовательности f_i, $i=1,2,\dots$, к f в норме $\|\cdot\|_{C_s([0,T],X)}$. Лемма полностью доказана. ■

Пусть Y — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_Y$, $X\subset Y$. Пусть вложение $X\subset Y$ непрерывно и компактно. Иными словами, найдётся постоянная $\nu>0$, такая, что

$$\|x\|_Y\leqslant\nu\|x\|_X\ \ \forall\,x\in X,$$

и любое ограниченное в норме пространства X множество предкомпактно в пространстве Y.

Лемма 1.1.3. *Справедливо вложение $C_s([0,T],X)\subset C([0,T],Y)$, причём*

$$\max_{t\in[0,T]}\|f(t)\|_Y\leqslant\nu\sup_{t\in[0,T]}\|f(t)\|_X\ \ \forall\,f\in C_s([0,T],X).$$

Доказательство. В самом деле, пусть $f \in C_s([0,T],X)$ — произвольна. Тогда для любого $t \in [0,T]$ и любой последовательности $t_i \in [0,T]$, $i = 1,2,\ldots$, $t_i \to t$, $i \to \infty$, справедливо предельное соотношение $f(t_i) \to f(t)$, $i \to \infty$, слабо в X. Поскольку же вложение $X \subset Y$ компактно, то $f(t_i) \to f(t)$, $i \to \infty$, сильно в Y. Таким образом, $f \in C([0,T],Y)$. Далее,

$$\|f(t)\|_Y \leqslant \nu \|f(t)\|_X \leqslant \nu \sup_{\xi \in [0,T]} \|f(\xi)\|_X \ \ \forall\, t \in [0,T],$$

откуда и следует требуемая оценка. Лемма полностью доказана. ■

Далее нам потребуется ещё одна топология в $C_s([0,T],X)$. Введём эту топологию. А именно, следуя [18, теорема 1.2 на стр.149], введём на $C_s([0,T],X)$ полунормы

$$\mathbf{p}_{x^*}(f) \equiv \max_{t \in [0,T]} |\langle x^*, f(t)\rangle|, \ \ x^* \in X^*,$$

задав затем в качестве системы окрестностей нуля семейство множеств

$$\{f \in C_s([0,T],X) : \mathbf{p}_{x_j^*}(f) < \varepsilon_j, \ \ j = \overline{1,m}\}, \ \ x_j^* \in X^*, \ \ \varepsilon_j > 0, \ \ j = \overline{1,m}, \ \ m \geqslant 1.$$

Эту топологию в дальнейшем будем называть X^*–топологией пространства $C_s([0,T],X)$, а сходящиеся последовательности в этой топологии будем называть X^*–сходящимися.

Лемма 1.1.4. *Пусть f_k, $f \in C_s([0,T],X)$, $k = 1,2,\ldots$, и*

$$f_k \to f, \ \ k \to \infty, \ \ \text{в } X^*\text{–топологии пространства } C_s([0,T],X). \tag{1.1.3}$$

Тогда

$$\sup_{k \geqslant 1} \sup_{t \in [0,T]} \|f_k(t)\|_X < +\infty.$$

Доказательство. В силу (1.1.3) для каждого фиксированного $x^* \in X^*$

$$\lim_{k \to \infty} \max_{t \in [0,T]} |\langle x^*, f_k(t)\rangle - \langle x^*, f(t)\rangle| = 0.$$

Поэтому найдётся постоянная $C = C(x^*) > 0$, зависящая лишь от $x^* \in X^*$, такая, что

$$\max_{t \in [0,T]} |\langle x^*, f_k(t)\rangle| \leqslant C(x^*) \ \ \forall\, k = 1,2,\ldots$$

Следовательно, в силу вложения $X \subset X^{**}$ и теоремы о резонансе [33, следствие 1 на стр.104], найдётся постоянная $C_1 > 0$, такая, что

$$\|f_k(t)\|_{X^{**}} \leqslant C_1 \ \ \forall\, t \in [0,T], \ \ k = 1,2,\ldots,$$

откуда, в силу изометричности вложения $X \subset X^{**}$, следует утверждение леммы. Лемма доказана. ■

Лемма 1.1.5. *Для сходимости последовательности $f_k \in C_s([0,T],X)$, $k = 1,2,\ldots$, к элементу $f \in C_s([0,T],X)$ в X^*–топологии пространства $C_s([0,T],X)$ необходимо и достаточно одновременное выполнение следующих условий:*

1) для некоторого числа $C > 0$ имеет место неравенство

$$\sup_{k \geqslant 1} \sup_{t \in [0,T]} \|f_k(t)\|_X \leqslant C; \tag{1.1.4}$$

2) для некоторого всюду плотного (в смысле нормы) в X^* множества Y справедливо соотношение

$$\lim_{k \to \infty} \max_{t \in [0,T]} |\langle x^*, f_k(t)\rangle - \langle x^*, f(t)\rangle| = 0 \ \ \forall\, x^* \in Y. \tag{1.1.5}$$

Доказательство. Необходимость следует из определения X^*–сходимости в пространстве $C_s([0,T],X)$ и из леммы 1.1.1. Поэтому докажем лишь достаточность.

В самом деле, пусть $y \in X^*$ — произвольно. Выберем затем произвольно $\varepsilon > 0$ и зафиксируем. Наконец, положим $P = C + \sup\limits_{t \in [0,T]} \|f(t)\|_X$. Так как Y всюду плотно в X^*, то найдётся элемент $y_\varepsilon \in Y$, такой, что $\|y_\varepsilon - y\|_{X^*} \leqslant \frac{\varepsilon}{2P}$. Поэтому для всех $t \in [0,T]$ и всех номеров $k \geqslant 1$

$$|\langle y, f_k(t)\rangle - \langle y, f(t)\rangle| = |\langle y - y_\varepsilon, f_k(t)\rangle + \langle y_\varepsilon, f_k(t) - f(t)\rangle + \langle y_\varepsilon - y, f(t)\rangle| \leqslant \frac{\varepsilon}{2P}\|f_k(t)\|_X +$$

$$+|\langle y_\varepsilon, f_k(t) - f(t)\rangle| + \frac{\varepsilon}{2P}\|f(t)\|_X \leqslant \frac{\varepsilon}{2P}C + |\langle y_\varepsilon, f_k(t) - f(t)\rangle| + \frac{\varepsilon}{2P}\sup_{\xi \in [0,T]}\|f(\xi)\|_X = \frac{\varepsilon}{2} +$$

$$+|\langle y_\varepsilon, f_k(t) - f(t)\rangle|.$$

Таким образом,

$$\max_{t\in[0,T]} |\langle y, f_k(t)\rangle - \langle y, f(t)\rangle| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \max_{t\in[0,T]} |\langle y_\varepsilon, f_k(t) - f(t)\rangle|.$$

В силу (1.1.5) найдётся номер $k_0 = k_0(\varepsilon) \geqslant 1$, такой, что при всех $k \geqslant k_0(\varepsilon)$

$$\max_{t\in[0,T]} |\langle y_\varepsilon, f_k(t) - f(t)\rangle| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер $k_0 = k_0(\varepsilon) \geqslant 1$, такой, что при всех $k \geqslant k_0(\varepsilon)$

$$\max_{t\in[0,T]} |\langle y, f_k(t)\rangle - \langle y, f(t)\rangle| \leqslant \varepsilon.$$

В силу произвольности выбора $y \in X^*$ отсюда вытекает, что

$$f_k \to f, \ \ k \to \infty, \ \text{ в } X^*\text{–топологии пространства } C_s([0,T], X).$$

Лемма полностью доказана. ■

Лемма 1.1.6. *Пусть X — рефлексивно, X^* — сепарабельно, $\Delta = \{x_1^*, \dots, x_j^*, \dots\}$ — счётное всюду плотное в X^* подмножество, и пусть $f_k \in C_s([0,T], X)$, $k = 1, 2, \dots,$ — такая последовательность, что*

1) для некоторого положительного числа $C > 0$

$$\sup_{k\geqslant 1} \sup_{t\in[0,T]} \|f_k(t)\|_X \leqslant C; \tag{1.1.6}$$

2) при любом фиксированном $x^* \in X^*$ семейство функций

$$[0,T] \ni t \mapsto \langle x^*, f_k(t)\rangle, \ \ k = 1, 2, \dots, \tag{1.1.7}$$

равностепенно непрерывно.

Тогда найдутся подпоследовательность f_{k_m}, $m = 1, 2, \dots,$ последовательности f_k, $k = 1, 2, \dots,$ и элемент $f \in C_s([0,T], X)$, такие, что

$$\sup_{k\geqslant 1} \sup_{t\in[0,T]} \|f(t)\|_X \leqslant C; \tag{1.1.8}$$

и

$$f_{k_m} \to f, \ \ m \to \infty, \ \ \text{в } X^*\text{–топологии пространства } C_s([0,T], X). \tag{1.1.9}$$

Доказательство. Положим

$$\varphi_k(t, x^*) \equiv \langle x^*, f_k(t)\rangle, \ \ (t, x^*) \in [0,T] \times X^*, \ \ k = 1, 2, \dots$$

В силу условий леммы и теоремы Арцела–Асколи [33, стр.125] найдутся функция $F_1 \in C[0,T]$ и подпоследовательность $k_{r,1}$, $r = 1, 2, \dots,$ последовательности $k = 1, 2, \dots,$ такие, что

$$\lim_{r\to\infty} \max_{t\in[0,T]} |\varphi_{k_{r,1}}(t, x_1^*) - F_1(t)| = 0.$$

Далее, из условий леммы и теоремы Арцела–Асколи вытекает существование таких функции $F_2 \in C[0,T]$ и подпоследовательности $k_{r,2}$, $r = 1, 2, \dots,$ последовательности $k_{r,1}$, $r = 1, 2, \dots,$ что

$$\lim_{r\to\infty} \max_{t\in[0,T]} |\varphi_{k_{r,2}}(t, x_2^*) - F_2(t)| = 0.$$

Продолжая рассуждения, получаем семейство последовательностей $\{\varphi_{k_{r,p}}\}_{r=1}^\infty$, $p = 1, 2, \dots,$ и последовательность функций $F_p \in C[0,T]$, $p = 1, 2, \dots,$ такие, что

$$\{\varphi_{k_{r,p+1}}\}_{r=1}^\infty \subset \{\varphi_{k_{r,p}}\}_{r=1}^\infty, \ \ p = 1, 2, \dots; \ \ \lim_{r\to\infty} \max_{t\in[0,T]} |\varphi_{k_{r,p}}(t, x_p^*) - F_p(t)| = 0, \ \ p = 1, 2, \dots$$

Определив затем функцию $G : [0,T] \times \Delta \to \mathbb{R}$ равенством

$$G(t, x_p^*) = F_p(t), \ \ p = 1, 2, \dots,$$

выводим, что

$$\lim_{r\to\infty}\max_{t\in[0,T]}|\varphi_{k_{r,p}}(t,x_p^*)-G(t,x_p^*)|=0,\ \ p=1,2,\ldots$$

Положив $k_m\equiv k_{m,m}$, $m=1,2,\ldots$, будем иметь

$$\lim_{m\to\infty}\max_{t\in[0,T]}|\varphi_{k_m}(t,x^*)-G(t,x^*)|=0,\ \ \forall\, x^*\in\Delta. \tag{1.1.10}$$

Для любых $\lambda_j\in\mathbb{R}$, $x_j^*\in\Delta$, $j=\overline{1,l}$, $l\geqslant 1$, положим

$$G\left(t,\sum_{j=1}^{l}\lambda_j x_j^*\right)=\sum_{j=1}^{l}\lambda_j G(t,x_j^*).$$

Тогда из (1.1.10) вытекает, что

$$\lim_{m\to\infty}\max_{t\in[0,T]}|\varphi_{k_m}(t,x^*)-G(t,x^*)|=0\ \ \forall\, x^*\in\operatorname{lin}\Delta, \tag{1.1.11}$$

где через $\operatorname{lin}\Delta$ обозначено множество всевозможных конечных линейных комбинаций элементов множества Δ. При этом, поскольку Δ — всюду плотно в X^*, то $\operatorname{lin}\Delta$ — тоже всюду плотно в X^*.

Таким образом, при каждом фиксированном $t\in[0,T]$ функционал $G(t,\cdot)$ линеен на $\operatorname{lin}\Delta$. Далее, при всех $t\in[0,T]$, $x^*\in\operatorname{lin}\Delta$

$$|\varphi_{k_m}(t,x^*)|=|\langle x^*,f_{k_m}(t)\rangle|\leqslant\|x^*\|_{X^*}\|f_{k_m}(t)\|_X\leqslant C\|x^*\|_{X^*}.$$

Переходя здесь, с учётом (1.1.11), к пределу при $m\to\infty$, получаем, что

$$|G(t,x^*)|\leqslant\|x^*\|_{X^*}\|f_{k_m}(t)\|_X\leqslant C\|x^*\|_{X^*}.$$

Итак, при каждом фиксированном $t\in[0,T]$ функционал $G(t,\cdot)$ является линейным непрерывным функционалом на $\operatorname{lin}\Delta$, наделённом той же нормой, что и пространство X^*. Поэтому в силу теоремы Хана–Банаха функционал $G(t,\cdot)$ можно продолжить до линейного непрерывного функционала $\tilde G(t,\cdot)$, определённого на всём X^*.

Так как $\tilde G(t,\cdot)\in X^{**}$, а X — рефлексивно, то найдётся $f(t)\in X$, такое, что

$$G(t,x^*)=\langle x^*,f(t)\rangle.$$

Следовательно, соотношение (1.1.11) можно переписать в виде

$$\lim_{m\to\infty}\max_{t\in[0,T]}|\langle x^*,f_{k_m}(t)-f(t)\rangle|=0\ \ \forall\, x^*\in\operatorname{lin}\Delta. \tag{1.1.12}$$

Отсюда следует, что при всех $x^*\in\operatorname{lin}\Delta$ функция

$$[0,T]\ni t\mapsto\langle x^*,f(t)\rangle \tag{1.1.13}$$

непрерывна на отрезке $[0,T]$, как равномерный предел непрерывных на этом отрезке числовых функций. Покажем, что функция (1.1.13) непрерывна на отрезке $[0,T]$ для всех $x^*\in X^*$. В самом деле, пусть $x^*\in X^*$, — произвольно. Пусть $t_0\in[0,T]$ — некоторая точка. Выберем произвольно $\varepsilon>0$ и зафиксируем. Наконец, положим $P\equiv\sup\limits_{\xi\in[0,T]}\|f(\xi)\|_X$. Тогда найдётся $y_\varepsilon\in X^*$, такое, что $\|y_\varepsilon-x^*\|_{X^*}\leqslant\frac{\varepsilon}{4P+2}$. Тогда для всех $t\in[0,T]$

$$|\langle x^*,f(t)\rangle-\langle x^*,f(t_0)\rangle|\leqslant|\langle x^*-y_\varepsilon,f(t)-f(t_0)\rangle|+|\langle y_\varepsilon,f(t)-f(t_0)\rangle|\leqslant\frac{\varepsilon}{4P+2}2P+|\langle y_\varepsilon,f(t)-f(t_0)\rangle|=$$
$$=\frac{\varepsilon}{2}+|\langle y_\varepsilon,f(t)-f(t_0)\rangle|.$$

Далее, в силу доказанной выше непрерывности функции (1.1.13) при всех $x^*\in\operatorname{lin}\Delta$, найдётся $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, такое, что при всех $t\in[0,T]$, $|t-t_0|<\delta$ выполнено неравенство

$$|\langle y_\varepsilon,f(t)-f(t_0)\rangle|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}.$$

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что при всех $t \in [0, T]$, $|t - t_0| < \delta$, выполнено неравенство

$$|\langle x^*, f(t)\rangle - \langle x^*, f(t_0)\rangle| \leqslant \varepsilon$$

Ввиду произвольности выбора $x^* \in X^*$ это означает, что функция (1.1.13) непрерывна на отрезке $[0, T]$ для всех $x^* \in X^*$, или, что то же самое, $f \in C_s([0, T], X)$. Отсюда, из предельного соотношения (1.1.12), неравенства (1.1.6) и леммы 1.1.5, следует предельное соотношение (1.1.9).

Докажем теперь неравенство (1.1.10). В самом деле,

$$|\langle x^*, f_{k_m}(t)\rangle| \leqslant \|x^*\|_{X^*}\|f_{k_m}(t)\|_X \leqslant C\|x^*\|_{X^*} \ \ \forall\, x^* \in X^*, \ \ t \in [0, T].$$

Переходя здесь к пределу при $m \to \infty$, будем иметь

$$|\langle x^*, f(t)\rangle| \leqslant C\|x^*\|_{X^*} \ \ \forall\, x^* \in X^*, \ \ t \in [0, T].$$

Отсюда, ввиду вложения $X \subset X^{**}$, получаем, что

$$\|f(t)\|_{X^{**}} \leqslant C \ \ \forall\, t \in [0, T].$$

Ввиду изометричности вложения $X \subset X^{**}$ отсюда следует неравенство (1.1.10). Лемма полностью доказана. ∎

Лемма 1.1.7. *[18, стр.150, теорема 1.3] Пусть X — банахово пространство. Тогда множество всевозможных многочленов с коэффициентами из X, т.е. множество всевозможных функций вида $\xi(t) = \sum\limits_{k=0}^{m} a_k t^k$, $t \in \mathbb{R}$, $a_j \in X$, $j = \overline{0, m}$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, всюду плотно в $C([0, T], X)$.*

1.1.2. Функции нескольких вещественных переменных

Пусть Y — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_Y$, $G \subset \mathbb{R}^m$ — некоторое множество.

Определение 1.1.8. *Говорят, что функция $f\colon G \to Y$ имеет в норме пространства Y предел, равный y, при $g \to g_0$, где g_0 — предельная точка множества G, и пишут $\overset{Y}{\lim\limits_{g \to g_0}} f(g) = y$, если*

$$\lim_{g \to g_0} \|f(g) - y\|_Y = 0,$$

иными словами,

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall\, g \in G, \ |g - g_0| < \delta : \|f(g) - y\|_Y < \varepsilon.$$

Определение 1.1.9. *Говорят, что функция $f\colon G \to Y$ непрерывна в точке $g_0 \in G$ в норме пространства Y, если $\overset{Y}{\lim\limits_{g \to g_0}} f(g) = f(g_0)$. Говорят, что функция $f\colon G \to Y$ непрерывна на G в норме пространства Y, если она непрерывна в норме пространства Y в каждой точке множества G. Множество всех непрерывных на G функций $f\colon G \to Y$ обозначают $C(G, Y)$.*

Определение 1.1.10. *Говорят, что функция $f\colon G \to Y$ равномерно непрерывна на множестве G, если*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall\, g', \ g'' \in G, \ |g' - g''| < \delta : \|f(g') - f(g'')\|_Y < \varepsilon.$$

Теорема 1.1.17. *Если функция $f\colon G \to Y$ непрерывна на G в норме пространства Y и G — компакт, то функция f равномерно непрерывна на этом компакте.*

Доказательство. Пусть это не так, и найдётся $\varepsilon_0 > 0$, такое, что для любого $\delta > 0$ найдутся точки g'_δ, $g''_\delta \in G$, $|g'_\delta - g''_\delta| < \delta$, для которых $\|f(g'_\delta) - f(g''_\delta)\|_Y \geqslant \varepsilon_0$. Пусть $\delta_j > 0$, $j = 1, 2, \ldots$, $\delta_j \to 0$, $j \to \infty$, — некоторая последовательность чисел. Тогда

$$|g'_{\delta_j} - g''_{\delta_j}| < \delta_j, \ \ \|f(g'_{\delta_j}) - f(g''_{\delta_j})\|_Y \geqslant \varepsilon_0, \ \ j = 1, 2, \ldots \tag{1.1.14}$$

Поскольку $G \subset \mathbb{R}^m$ — компакт, то найдутся подпоследовательности $g'_{\delta_{j_i}}$, $g''_{\delta_{j_i}}$, $i = 1, 2 \ldots$, последовательностей g'_{δ_j} и g''_{δ_j}, $j = 1, 2 \ldots$, соответственно и элементы g^*, $g^{**} \in G$, такие, что

$$g'_{\delta_{j_i}} \to g^*, \ \ g''_{\delta_{j_i}} \to g^{**}, \ \ i \to \infty,$$

откуда, в силу первого из неравенств (1.1.14), извлекаем, что $g^* = g^{**}$. Полагая во втором из соотношений (1.1.14) $j = j_i$ и переходя затем к пределу при $i \to \infty$, получим, что $0 \geqslant \varepsilon_0 > 0$. Полученное противоречие доказывает теорему. ■

Пусть далее G — компакт, X — нормированное пространство с нормой $\|\cdot\|_X$.

Лемма 1.1.8. *Пусть $\Pi(g) \in \mathcal{L}(X,Y)$ при всех $g \in G$, и пусть при всех $x \in X$ функция $G \ni g \mapsto \Pi(g)x$ принадлежит пространству $C(G,Y)$. Тогда*

$$\sup_{g\in G}\|\Pi(g)\|_{X\to Y} < +\infty.$$

Доказательство. Поскольку при каждом фиксированном $x \in X$ функция $G \ni g \mapsto \Pi(g)x$ — элемент пространства $C(G,Y)$, то найдётся зависящая от $x \in X$ постоянная $K = K(x) > 0$, такая, что

$$\sup_{g\in G}\|\Pi(g)x\|_Y \leqslant K(x).$$

Пользуясь теперь теоремой о резонансе, получаем утверждение настоящей леммы. ■

Пусть далее X — банахово пространство.

Лемма 1.1.9. *Пусть $\Pi(t,\xi) \in \mathcal{L}(X,Y)$ при всех $(t,\xi) \in \Gamma$, при всех $x \in X$ функция $\Gamma \ni (t,\xi) \mapsto \Pi(t,\xi)x$ принадлежит $C(\Gamma,Y)$. Если $z \in C([0,T],X)$, то функция $\Gamma \ni (t,\xi) \mapsto \Pi(t,\xi)z(\xi)$ является элементом $C(\Gamma,Y)$.*

Доказательство. В самом деле, пусть (t,ξ), $(t+\Delta t, \xi+\Delta\xi) \in \Gamma$ — произвольны, и пусть $z \in C([0,T],X)$. Тогда, на основании леммы 1.1.8,

$$\begin{aligned}\|\Pi(t+\Delta t,\xi+\Delta\xi)z(\xi+\Delta\xi) - \Pi(t,\xi)z(\xi)\|_Y &\leqslant \|\Pi(t+\Delta t,\xi+\Delta\xi)[z(\xi+\Delta\xi)-z(\xi)]\|_Y + \\ +\|[\Pi(t+\Delta t,\xi+\Delta\xi)-\Pi(t,\xi)]z(\xi)\|_Y &\leqslant \sup_{(\tau,\eta)\in\Gamma}\|\Pi(\tau,\eta)\|\|z(\xi+\Delta\xi)-z(\xi)\|_X + \\ &+\|[\Pi(t+\Delta t,\xi+\Delta\xi)-\Pi(t,\xi)]z(\xi)\|_Y,\end{aligned}$$

откуда, в силу условий настоящей леммы, и вытекает, что функция $\Gamma \ni (t,\xi) \mapsto \Pi(t,\xi)z(\xi)$ является элементом $C(\Gamma,Y)$. ■

Лемма 1.1.10. *Пусть $\Pi(t,\xi) \in \mathcal{L}(X,Y)$ при всех $(t,\xi) \in \Gamma$, причём при всех $x \in X$ функция $\Gamma \ni (t,\xi) \mapsto \Pi(t,\xi)x$ принадлежит $C(\Gamma,Y)$ и при всех $(t,\xi) \in \Gamma$ имеет непрерывную на Γ в норме Y производную $\Gamma \ni (t,\xi) \mapsto \Pi_t(t,\xi)x$. Если $z \in C([0,T],X)$, то функция $\Gamma \ni (t,\xi) \mapsto \Pi(t,\xi)z(\xi)$ является элементом $C(\Gamma,Y)$ и при всех $(t,\xi) \in \Gamma$ имеет непрерывную в норме Y на Γ производную по переменной t. Кроме того,*

$$\frac{\partial}{\partial t}\Pi(t,\xi)z(\xi) = \Pi_t(t,\xi)z(\xi) \;\; \forall\,(t,\xi)\in\Gamma.$$

Доказательство. Выберем произвольно функцию $z \in C([0,T],X)$ и зафиксируем. Введём обозначения

$$\Theta_0(t,\xi) \equiv \Pi(t,\xi)z(\xi), \;\; \Theta_1(t,\xi) \equiv \Pi_t(t,\xi)z(\xi), \;\; (t,\xi)\in\Gamma.$$

Справедливость включений Θ_0, $\Theta_1 \in C(\Gamma,Y)$ вытекает из леммы 1.1.9. Следовательно, нужно доказать лишь равенство

$$\Theta_{0t}(t,\xi) = \Theta_1(t,\xi) \;\; \forall\,(t,\xi)\in\Gamma.$$

Действительно, пусть (t,ξ), $(t+\Delta t,\xi) \in \Gamma$ — произвольны. Тогда

$$\left\|\frac{\Theta_0(t+\Delta t,\xi)-\Theta_0(t,\xi)}{\Delta t} - \Theta_1(t,\xi)\right\|_Y = \left\|\left[\frac{\Pi(t+\Delta t,\xi)-\Pi(t,\xi)}{\Delta t} - \Pi_t(t,\xi)\right]y(\xi)\right\|_Y \to 0, \;\; \Delta t\to 0,$$

в силу условий леммы. Лемма доказана. ■

1.2. Интеграл Римана функции одной вещественной переменной

В данном разделе приводятся определение и свойства интеграла Римана от функций одной переменной, принимающих значения в банаховом пространстве. Изложение этих сведений следует [38, §23], [63, §25] и [28]. Всюду в настоящем разделе X — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_X$.

Прежде всего нам потребуется следующая

Лемма 1.2.1. *Пусть последовательность $x_j \in X$, $j = 1,2,\ldots$, такова, что $\|x_j\|_X \to \infty$, $j \to \infty$. Тогда для всех $y \in X$ справедливо соотношение $\|x_j + y\|_X \to \infty$, $j \to \infty$.*

Доказательство. Заметим, что

$$\|x_j + y\|_X = \|x_j - (-y)\|_X \geqslant |\, \|x_j\|_X - \| - y\|_X| = |\, \|x_j\|_X - \|y\|_X| \geqslant \|x_j\|_X - \|y\|_X,$$

то есть

$$\|x_j + y\|_X \geqslant \|x_j\|_X - \|y\|_X, \;\; j = 1, 2, \ldots$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $j \to \infty$, получаем требуемое соотношение. Лемма доказана. ■

1.2.1. Определение интеграла и условия интегрируемости

Разбиением τ отрезка $[a, b]$ называется любая конечная система его точек $\{t_i\}_{i=0}^{i=i_\tau}$, такая, что

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{i_\tau - 1} < t_{i_\tau} = b.$$

При этом пишут $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i=i_\tau}$. Каждый из отрезков $[t_{i-1}, t_i]$ называется *отрезком разбиения* τ, длину этого отрезка обозначают через Δt_i, $\Delta t_i \equiv t_i - t_{i-1}$, $i = \overline{1, i_\tau}$. Число $|\tau| = \max\limits_{i=\overline{1,i_\tau}} \Delta t_i$ называется *мелкостью разбиения* τ.

Разбиение τ' отрезка $[a, b]$ называется следующим за разбиением τ (или продолжающим разбиение τ) того же отрезка, если каждая точка разбиения τ является и точкой разбиения τ'. Иначе говоря, если каждый отрезок разбиения τ' содержится в некотором отрезке разбиения τ (говорят ещё, что τ' — измельчение разбиения τ). В этом случае пишут $\tau' \succ \tau$, или, что то же, $\tau \prec \tau'$.

Совокупность всех разбиений отрезка обладает следующими свойствами.

1° Если $\tau_1 \prec \tau_2$, а $\tau_2 \prec \tau_3$, то $\tau_1 \prec \tau_3$.

2° Для любых τ_1 и τ_2 существует такое τ, что $\tau \succ \tau_1$ и $\tau \succ \tau_2$.

Пусть теперь на отрезке $[a, b]$ определена функция f, принимающая значения в банаховом пространстве X, и пусть $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i=i_\tau}$ — некоторое разбиение отрезка $[a, b]$, $\Delta t_i \equiv t_i - t_{i-1}$, $i = \overline{1, i_\tau}$, а $|\tau|$ — мелкость этого разбиения.

Зафиксируем произвольным образом точки $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $i = \overline{1, i_\tau}$, и составим сумму

$$\sigma_\tau(f; \xi_1, \ldots, \xi_{i_\tau}) = \sum_{i=1}^{i_\tau} f(\xi_i)\Delta t_i.$$

Суммы такого вида называются *интегральными суммами Римана функции* f. Иногда будем обозначать их через $\sigma_\tau(f)$, или даже просто через σ_τ. Точки ξ_i, $i = \overline{1, i_\tau}$, будем называть *отмеченными точками разбиения* τ.

Определение 1.2.1. *Функция f называется интегрируемой (по Риману) на отрезке $[a, b]$, если существует такой элемент $A \in X$, что для любой последовательности разбиений отрезка $[a, b]$*

$$\tau_j = \{t_i^{(j)}\}_{i=0}^{i=i_{\tau_j}}, \;\; j = 1, 2, \ldots,$$

у которой $\lim\limits_{j\to\infty} |\tau_j| = 0$, и для любого выбора точек $\xi_i^{(j)} \in [t_{i-1}^{(j)}, t_i^{(j)}]$, $i = \overline{1, i_{\tau_j}}$, $j = 1, 2, \ldots$, существует предел последовательности интегральных сумм $\sigma_{\tau_j}(f; \xi_1^{(j)}, \ldots, \xi_{i_{\tau_j}}^{(j)})$ и он равен A:

$$\lim_{j\to\infty} \left\| \sum_{i=1}^{i_{\tau_j}} f(\xi_i^{(j)})\Delta t_i^{(j)} - A \right\|_X = 0, \tag{1.2.1}$$

где $\Delta t_i^{(j)} \equiv t_i^{(j)} - t_{i-1}^{(j)}$, $i = \overline{1, i_{\tau_j}}$, $j = 1, 2, \ldots$

При выполнении этих условий элемент A называется (римановым) определённым интегралом функции f на отрезке $[a, b]$ и обозначается $(P)\int\limits_a^b f(t)dt$ или $\int\limits_a^b f(t)dt$.

Таким образом,

$$\int\limits_a^b f(t)dt = \lim_{j\to\infty} \sigma_{\tau_j}(f; \xi_1^{(j)}, \ldots, \xi_{i_{\tau_j}}^{(j)}),$$

где последовательность τ_j, $j = 1, 2, \ldots$, такова, что

$$\lim_{j\to\infty} |\tau_j| = 0.$$

Для краткости в этом случае будем писать просто

$$\int\limits_a^b f(t)dt = \lim_{|\tau|\to 0} \sigma_\tau(f).$$

Подобно тому, как определение предела функции можно сформулировать двумя эквивалентными способами — с помощью пределов последовательностей и с помощью языка „ε–δ“, — так и определение интеграла Римана можно сформулировать иначе.

Определение 1.2.2. *Элемент $A \in X$ называется определённым интегралом функции f на отрезке $[a, b]$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что, каково бы ни было разбиение $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i=i_\tau}$ (отрезка $[a, b]$) мелкости, меньшей δ, и каковы бы ни были точки $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $i = \overline{1, i_\tau}$, выполняется неравенство*

$$\left\| \sum_{i=1}^{i_\tau} f(\xi_i)\Delta t_i - A \right\|_X = 0,$$

где $\Delta t_i \equiv t_i - t_{i-1}$, $i = \overline{1, i_{\tau_j}}$.

Теорема 1.2.1. *Два данных определения интеграла эквивалентны.*

Доказательство. 1) Покажем, что интеграл в смысле определения 1.2.1 является интегралом в смысле определения 1.2.2. Предположим, что элемент $A \in X$ является интегралом в смысле определения 1.2.1, но не является интегралом в смысле определения 1.2.2. Поскольку $A \in X$ не является интегралом в смысле определения 1.2.2, то найдутся $\varepsilon_0 > 0$, последовательность чисел $\delta_j > 0$, $j = 1, 2, \ldots$, $\delta_j \to 0$, $j \to \infty$, последовательность разбиений $\tau_j = \{t_i^{(j)}\}_{i=0}^{i=i_{\tau_j}}$, $|\tau_j| < \delta_j$, $j = 1, 2, \ldots$, и последовательность наборов $\xi^{(j)} \equiv \{\xi_1^{(j)}, \ldots, \xi_{i_\tau}^{(j)}\}$, $\xi_i^{(j)} \in [t_{i-1}^{(j)}, t_i^{(j)}]$, $i = \overline{1, i_{\tau_j}}$, $j = 1, 2, \ldots$, такие, что

$$\left\| \sum_{i=1}^{i_{\tau_j}} f(\xi_i^{(j)})\Delta t_i^{(j)} - A \right\|_X \geqslant \varepsilon_0,$$

где $\Delta t_i^{(j)} \equiv t_i^{(j)} - t_{i-1}^{(j)}$, $i = \overline{1, i_{\tau_j}}$, $j = 1, 2, \ldots$ А это противоречит тому, что $A \in X$ — интеграл в смысле определения 1.2.1.

2) Покажем, что интеграл в смысле определения 1.2.2 является интегралом в смысле определения 1.2.1. Предположим, что элемент $A \in X$ является интегралом в смысле определения 1.2.2. Пусть $\tau_j = \{t_i^{(j)}\}_{i=0}^{i=i_{\tau_j}}$, $j = 1, 2, \ldots$, — последовательность разбиений, такая, что $\lim\limits_{j\to\infty} |\tau_j| = 0$, и пусть точки $\xi_i^{(j)} \in [t_{i-1}^{(j)}, t_i^{(j)}]$, $i = \overline{1, i_{\tau_j}}$, $j = 1, 2, \ldots$, — произвольны.

Выберем произвольно $\varepsilon > 0$ и зафиксируем, после чего подберём по нему число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ из определения 1.2.2. Так как $\lim\limits_{j\to\infty} |\tau_j| = 0$, то найдётся номер $j_0 = j_0(\delta(\varepsilon))$, такой, что $|\tau_j| < \delta(\varepsilon)$ для всех $j \geqslant j_0(\delta(\varepsilon))$. Поэтому, на основании определения 1.2.2,

$$\left\| \sum_{i=1}^{i_{\tau_j}} f(\xi_i^{(j)})\Delta t_i^{(j)} - A \right\|_X \leqslant \varepsilon$$

при всех $j \geqslant j_0(\delta(\varepsilon))$. Иными словами, для произвольной последовательности разбиений отрезка $[a, b]$

$$\tau_j = \{t_i^{(j)}\}_{i=0}^{i=i_{\tau_j}}, \quad j = 1, 2, \ldots,$$

у которой $\lim\limits_{j\to\infty} |\tau_j| = 0$, и для любого выбора точек $\xi_i^{(j)} \in [t_{i-1}^{(j)}, t_i^{(j)}]$, $i = \overline{1, i_{\tau_j}}$, $j = 1, 2, \ldots$, существует предел последовательности интегральных сумм $\sigma_{\tau_j}(f; \xi_1^{(j)}, \ldots, \xi_{i_{\tau_j}}^{(j)})$ и он равен A:

$$\lim_{j\to\infty} \left\| \sum_{i=1}^{i_{\tau_j}} f(\xi_i^{(j)})\Delta t_i^{(j)} - A \right\|_X = 0,$$

где $\Delta t_i^{(j)} \equiv t_i^{(j)} - t_{i-1}^{(j)}$, $i = \overline{1, i_{\tau_j}}$, $j = 1, 2, \ldots$ Следовательно, элемент $A \in X$ — интеграл в смысле определения 1.2.1. ■

Выше введено понятие определённого интеграла $\int\limits_a^b f(t)dt$ от функции f по отрезку $[a, b]$, $a < b$.

Для любой функции f, определённой в точке a, по определению положим

$$\int\limits_a^a f(t)dt = 0,$$

а для функции, интегрируемой на отрезке $[a, b]$,

$$\int\limits_b^a f(t)dt = -\int\limits_a^b f(t)dt.$$

Аналогично критерию Коши существования предела функции формулируется и доказывается аналогичный критерий существования предела интегральных сумм.

Теорема 1.2.2. *Для того, чтобы функция f была интегрируема на отрезке $[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что, каковы бы ни были разбиения $\tau' = \{t'_i\}_{i=0}^{i=i_{\tau'}}$ и $\tau'' = \{t''_j\}_{j=0}^{j=j_{\tau''}}$, мелкости, меньшей δ, и точки $\xi'_i \in [t'_{i-1}, t'_i]$, $i = \overline{1, i_{\tau'}}$, $\xi''_j \in [t''_{j-1}, t''_j]$, $j = \overline{1, j_{\tau''}}$, выполнено неравенство*

$$\|\sigma_{\tau'}(f; \xi'_1, \ldots, \xi'_{i_{\tau'}}) - \sigma_{\tau''}(f; \xi''_1, \ldots, \xi''_{j_{\tau''}})\|_X < \varepsilon. \tag{1.2.2}$$

Доказательство. 1) Докажем необходимость условия (1.2.2). Если функция f интегрируема в смысле Римана, т.е. существует предел (1.2.1), то согласно определению 1.2.2, для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что, каково бы ни было разбиение $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i=i_\tau}$ (отрезка $[a, b]$) мелкости, меньшей δ, и при любом выборе точек $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $i = \overline{1, i_\tau}$, для интегральных сумм $\sigma_\tau = \sigma_\tau(f; \xi_1, \ldots, \xi_{i_\tau})$ выполняется неравенство

$$\|\sigma_\tau - A\|_X < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Если теперь $\sigma_{\tau'} \equiv \sigma_{\tau'}(f; \xi'_1, \ldots, \xi'_{i_{\tau'}})$ и $\sigma_{\tau''} = \sigma_{\tau''}(f; \xi''_1, \ldots, \xi''_{j_{\tau''}})$ — две такие интегральные суммы, что $|\tau'| < \delta$ и $|\tau''| < \delta$, то

$$\|\sigma_{\tau'} - \sigma_{\tau''}\|_X = \|(\sigma_{\tau'} - A) + (A - \sigma_{\tau''})\|_X \leqslant \|\sigma_{\tau'} - A\|_X + \|A - \sigma_{\tau''}\|_X < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

2) Докажем достаточность условия (1.2.2). Пусть для функции $f\colon [a, b] \to X$ выполнено условие (1.2.2) и $\sigma_{\tau_j} = \sigma_{\tau_j}(f; \xi_1^{(j)}, \ldots, \xi_{i_{\tau_j}}^{(j)})$, $j = 1, 2, \ldots,$ — такая последовательность интегральных сумм функции f, что

$$\lim_{j\to\infty} |\tau_j| = 0. \tag{1.2.3}$$

Если $\varepsilon > 0$ произвольно фиксировано, а $\delta > 0$ выбрано так, что выполняется условие (1.2.2), то, в силу равенства (1.2.3), существует такой номер j_0, что для всех $j > j_0$ выполняется условие $|\tau_j| < \delta$. Поэтому для всех $j' > j_0$ и $j'' > j_0$ выполняются неравенства $|\tau_{j'}| < \delta$, $|\tau_{j''}| < \delta$, и, следовательно, согласно условию (1.2.2), имеет место неравенство

$$\|\sigma_{\tau_{j'}} - \sigma_{\tau_{j''}}\|_X < \varepsilon.$$

Это означает, что последовательность σ_{τ_j}, $j = 1, 2, \ldots,$ фундаментальна в банаховом пространстве X. Ввиду полноты пространства X отсюда вытекает существование элемента $A \in X$, такого, что $\lim\limits_{j\to\infty} \|\sigma_{\tau_j} - A\|_X = 0$.

Последовательность σ_{τ_j}, $j = 1, 2, \ldots,$ являлась произвольной последовательностью интегральных сумм, для которой выполнялось условие (1.2.3). Поэтому все такие последовательности сходятся, притом к одному и тому же элементу пространства X. В самом деле, пусть последовательности $\sigma_{\tau'_j}$, $j = 1, 2, \ldots,$ и $\sigma_{\tau''_j}$, $j = 1, 2, \ldots,$ таковы, что

$$\lim_{j\to\infty} |\tau'_j| = \lim_{j\to\infty} |\tau''_j| = 0,$$

и, следовательно, найдутся пределы A', $A'' \in X$:

$$\lim_{j\to\infty} \|\sigma_{\tau'_j} - A'\|_X = 0, \;\; \lim_{j\to\infty} \|\sigma_{\tau''_j} - A''\|_X = 0.$$

Составим новую последовательность интегральных сумм, σ_{τ_k}, $k = 1, 2, \dots$, так:

$$\sigma_{\tau_k} = \begin{cases} \sigma_{\tau'_j}, \text{ если } k = 2j-1; \\ \sigma_{\tau''_j}, \text{ если } k = 2j; \end{cases} \qquad k = 1, 2, \dots$$

Тогда, очевидно, $\lim\limits_{k\to\infty} |\tau_k| = 0$, и поэтому у последовательности σ_{τ_k}, $k = 1, 2, \dots$, существует предел (в смысле сходимости по норме пространства X).

Предел всякой подпоследовательности сходящейся последовательности равен пределу всей последовательности. Следовательно,

$$A' = \lim_{j\to\infty} \sigma_{\tau'_j} = \lim_{k\to\infty} \sigma_{\tau_k} = \lim_{j\to\infty} \sigma_{\tau''_j} = A''.$$

Теорема полностью доказана. ■

Теорема 1.2.3. *Если функция интегрируема (в смысле Римана) на некотором отрезке, то она ограничена на этом отрезке.*

Доказательство. Пусть функция $f\colon [a, b] \to X$ неограничена на отрезке $[a, b]$, и пусть фиксировано некоторое разбиение $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i=i_\tau}$ этого отрезка. В силу неограниченности функции f на всём отрезке $[a, b]$, она неограничена по крайней мере на одном отрезке разбиения τ. Пусть для определённости функция f неограничена на отрезке $[t_0, t_1]]$. Тогда на этом отрезке существует последовательность точек $\xi_1^{(j)} \in [t_0, t_1]$, $j = 1, 2, \dots$, такая, что

$$\|f(\xi_1^{(j)})\|_X \geqslant j, \;\; j = 1, 2, \dots$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{j\to\infty} \|f(\xi_1^{(j)})\|_X = +\infty. \tag{1.2.4}$$

Зафиксируем теперь каким–либо образом точки $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $i = \overline{2, i_\tau}$. Тогда сумма $\sum\limits_{i=2}^{i_\tau} f(\xi_i)\Delta t_i$ будет иметь определённое значение. Поэтому, в силу (1.2.4) и леммы 1.2.1,

$$\lim_{j\to\infty} \|\sigma_\tau(f; \xi_1^{(j)}, \xi_2, \dots, \xi_{i_\tau})\|_X = \lim_{j\to\infty} \left\| f(\xi_1^{(j)})\Delta t_1 + \sum_{i=2}^{i_\tau} f(\xi_i)\Delta t_i \right\|_X = +\infty,$$

и, следовательно, каково бы ни было число $K > 0$, всегда можно подобрать такой номер j_0, что если на отрезке $[t_0, t_1]]$ взять точку $\xi_1^{(j_0)}$, то

$$\|\sigma_\tau(f; \xi_1^{(j_0)}, \xi_2, \dots, \xi_{i_\tau})\|_X > K$$

Отсюда следует, что суммы σ_τ не могут стремиться ни к какому конечному пределу при $|\tau| \to 0$.

Действительно, если бы существовал элемент $A \in X$, такой, что

$$\lim_{|\tau|\to 0} \sigma_\tau = A,$$

то для любого $\varepsilon > 0$ нашлось бы такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех разбиений $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i=i_\tau}$ отрезка $[a, b]$, у которых $|\tau| < \delta(\varepsilon)$, при любом выборе точек $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $i = \overline{1, i_\tau}$, выполнялось бы неравенство $\|\sigma_\tau - A\|_X < \varepsilon$, и, следовательно,

$$\|\sigma_\tau\|_X = \|(\sigma_\tau - A) + A\|_X \leqslant \|\sigma_\tau - A\|_X + \|A\|_X < \varepsilon + \|A\|_X.$$

Поскольку же функция f неограничена, то для любого разбиения τ (в том числе и такого, что $|\tau| < \delta(\varepsilon)$, если существовало бы указанное $\delta(\varepsilon)$) при любом фиксированном $\varepsilon > 0$ можно так выбрать точки ξ_i, что будет выполняться неравенство

$$\|\sigma_\tau\|_X > \varepsilon + \|A\|_X.$$

Полученное противоречие доказывает теорему. ■

Сформулируем и докажем следующее достаточное условие интегрируемости функции $f\colon [a,b] \to X$ на отрезке $[a,b]$.

Теорема 1.2.4. *Для интегрируемости ограниченной на отрезке $[a,b]$ функции $f\colon [a,b] \to X$ достаточно, чтобы для любого числа $\varepsilon > 0$ нашлось такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что при любом разбиении $\tau = \{t_i\}_{i=1}^{i=i_\tau}$ отрезка $[a,b]$, $|\tau| < \delta$, выполнено соотношение*

$$\sum_{i=1}^{i_\tau} \operatorname{osc}(f;[t_{i-1},t_i])\Delta t_i < \varepsilon,$$

где $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, $i = \overline{1,i_\tau}$.

Доказательство. Пусть $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i=i_\tau}$ — разбиение отрезка $[a,b]$, а $\xi_i \in [t_{i-1},t_i]$, $i = \overline{1,i_\tau}$, — произвольные точки. Пусть $\tilde\tau = \{\tilde t_j\}_{j=0}^{j=i_\tau}$ — измельчение разбиения τ. Тогда некоторые (а может быть, и все) отрезки $[t_{i-1},t_i]$ разбиения τ сами подвергаются разбиению $t_{i-1} = t_{i-1,0} < \cdots < t_{i,k_i} = t_i$. В связи с этим нам нам будет удобно нумеровать точки разбиения $\tilde\tau$ двумя индексами. В записи $t_{i,j}$ первый индекс означает, что $t_{i,j} \in [t_{i-1},t_i]$, а второй индекс есть порядковый номер точки на отрезке $[t_{i-1},t_i]$. Теперь естественно положить $\Delta t_{i,j} = t_{i,j} - t_{i,j-1}$. Таким образом, $\Delta t_i = \Delta t_{i,1} + \cdots + \Delta t_{i,k_i}$.

Выберем произвольно точки $\xi'_{i,j} \in [t_{i,j-1},t_{i,j}]$, $i = \overline{1,i_\tau}$, $j = \overline{1,k_i}$, и оценим норму разности интегральных сумм $\sigma_\tau(f;\xi_1,\ldots,\xi_{i_\tau}) - \sigma_{\tilde\tau}(f;\xi'_{1,1},\ldots,\xi'_{i_\tau,k_{i_\tau}})$:

$$\|\sigma_\tau(f;\xi_1,\ldots,\xi_{i_\tau}) - \sigma_{\tilde\tau}(f;\xi'_{1,1},\ldots,\xi'_{i_\tau,k_{i_\tau}})\|_X = \left\| \sum_{i=1}^{i_\tau} f(\xi_i)\Delta t_i - \sum_{i=1}^{i_\tau}\sum_{j=1}^{k_i} f(\xi'_{i,j})\Delta t_{i,j} \right\|_X =$$

$$= \left\| \sum_{i=1}^{i_\tau}\sum_{j=1}^{k_i} f(\xi_i)\Delta t_{i,j} - \sum_{i=1}^{i_\tau}\sum_{j=1}^{k_i} f(\xi'_{i,j})\Delta t_{i,j} \right\|_X = \left\| \sum_{i=1}^{i_\tau}\sum_{j=1}^{k_i} [f(\xi_i) - f(\xi'_{i,j})]\Delta t_{i,j} \right\|_X \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{i_\tau}\sum_{j=1}^{k_i} \|f(\xi_i) - f(\xi'_{i,j})\|_X \Delta t_{i,j} \leqslant \sum_{i=1}^{i_\tau}\sum_{j=1}^{k_i} \operatorname{osc}(f;[t_{i-1},t_i])\Delta t_{i,j} = \sum_{i=1}^{i_\tau} \operatorname{osc}(f;[t_{i-1},t_i])\Delta t_i.$$

Из полученной оценки нормы разности интегральных сумм следует, что если функция f удовлетворяет достаточным условиям, сформулированным в данной теореме, то по любому $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что для любого разбиения τ отрезка $[a,b]$, $|\tau| < \delta$, и для измельчения $\tilde\tau$ разбиения τ будем иметь

$$\|\sigma_\tau(f) - \sigma_{\tilde\tau}(f)\|_X < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Если теперь τ' и τ'' — произвольные разбиения отрезка $[a,b]$, $|\tau'| < \delta$, $|\tau''| < \delta$, то, рассмотрев разбиение $\tilde\tau = \tau' \cup \tau''$, являющееся измельчением обоих разбиений τ', τ'', по доказанному будем иметь

$$\|\sigma_{\tau'}(f) - \sigma_{\tilde\tau}(f)\|_X < \frac{\varepsilon}{2}, \;\; \|\sigma_{\tau''}(f) - \sigma_{\tilde\tau}(f)\|_X < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда следует, что

$$\|\sigma_{\tau'} - \sigma_{\tau''}\|_X = \|(\sigma_{\tau'} - \sigma_{\tilde\tau}) + (\sigma_{\tilde\tau} - \sigma_{\tau''})\|_X \leqslant \|\sigma_{\tau'} - \sigma_{\tilde\tau}\|_X + \|\sigma_{\tilde\tau} - \sigma_{\tau''}\|_X < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

как только $|\tau'| < \delta$, $|\tau''| < \delta$. Таким образом, в силу теоремы 1.2.2, функция f — интегрируема в смысле Римана на отрезке $[a,b]$. ■

Следствие 1.2.1. *Если функция $f\colon [a,b] \to X$ сильно непрерывна на отрезке $[a,b]$, то f интегрируема на отрезке $[a,b]$.*

Доказательство. Если f непрерывна на отрезке, то она ограничена на нём. Поэтому на основании теоремы 1.2.4 достаточно показать, что

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \;\forall\, \text{разбиения } \tau = \{t_i\}_{i=0}^{i_\tau},\; |\tau| < \delta : \sum_{i=1}^{i_\tau} \operatorname{osc}(f;[t_{i-1},t_i])\Delta t_i < \varepsilon, \qquad (1.2.5)$$

где $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, $i = \overline{1,i_\tau}$.

Так как f непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она равномерно непрерывна на этом отрезке, ввиду чего

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, \eta = \eta(\varepsilon) > 0 \;\forall\, t',\, t'' \in [a,b],\;\; |t' - t''| < \eta : \|f(t') - f(t'')\|_X \leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)}. \qquad (1.2.6)$$

Выберем произвольно $\varepsilon > 0$ и подберём по нему $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$ согласно (1.2.6). Выберем произвольно разбиение $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i_\tau}$, у которого $|\tau| < \eta$. Выберем $i = \overline{1, i_\tau}$ и зафиксируем. Тогда для любых ξ', $\xi'' \in [t_{i-1}, t_i]$, ввиду неравенства $\Delta t_i \leqslant |\tau| < \eta$ и условия (1.2.6) имеет место неравенство

$$\|f(\xi') - f(\xi'')\|_X \leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)},$$

откуда вытекает, что

$$\operatorname{osc}(f; [t_{i-1}, t_i]) \leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Итак,

$$\operatorname{osc}(f; [t_{i-1}, t_i]) \leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad i = \overline{1, i_\tau}.$$

Поэтому

$$\sum_{i=1}^{i_\tau} \operatorname{osc}(f; [t_{i-1}, t_i]) \Delta t_i \leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{i=1}^{i_\tau} \Delta t_i = \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) < \varepsilon.$$

Таким образом, мы доказали (1.2.5) с $\delta(\varepsilon) = \eta(\varepsilon)$. Следствие доказано. ■

Далее нам потребуется несколько результатов о колебаниях функций. Во всех этих результатах $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}$ — некоторое множество.

Лемма 1.2.2. *Если функция $f\colon \mathcal{T} \to X$ ограничена на множестве $\mathcal{T}$, т.е. если найдётся постоянная $c > 0$, такая, что при всех $t \in \mathcal{T}$ выполнено неравенство $\|f(t)\|_X \leqslant c$, то для всех $t \in \mathcal{T}$ выполняется неравенство*

$$\operatorname{osc}(f; t) \leqslant 2c. \tag{1.2.7}$$

Доказательство. В самом деле, для любого $t_0 \in \mathcal{T}$

$$\operatorname{osc}(f; t_0) = \inf_{r>0} \operatorname{osc}(f; \mathcal{T} \cap (t_0 - r, t_0 + r)) = \inf_{r>0} \sup_{t',\, t'' \in \mathcal{T} \cap (t_0 - r, t_0 + r)} \|f(t') - f(t'')\|_X \leqslant$$
$$\leqslant \inf_{r>0} \sup_{t',\, t'' \in \mathcal{T} \cap (t_0 - r, t_0 + r)} [\|f(t')\|_X + \|f(t'')\|_X] \leqslant 2c.$$

Лемма доказана. ■

Для дальнейшего полезно ввести множество

$$\mathcal{T}_\varepsilon \equiv \{t \in \mathcal{T} : \operatorname{osc}(f; t) \geqslant \varepsilon\}, \tag{1.2.8}$$

где $\varepsilon > 0$ — произвольно.

Если $\eta < \varepsilon$, то ясно, что из неравенства $\operatorname{osc}(f; t) \geqslant \varepsilon$ следует неравенство $\operatorname{osc}(f; t) \geqslant \eta$, и поэтому

$$\mathcal{T}_\varepsilon \subset \mathcal{T}_\eta. \tag{1.2.9}$$

Лемма 1.2.3. *Функция $f\colon \mathcal{T} \to X$ сильно непрерывна в точке $t \in \mathcal{T}$ тогда и только тогда, когда*

$$\operatorname{osc}(f; t) = 0. \tag{1.2.10}$$

Доказательство. 1) Если функция f сильно непрерывна в точке $t_0 \in \mathcal{T}$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех точек $t \in (t_0 - \delta, t - 0 + \delta) \cap \mathcal{T}$ выполняется неравенство $\|f(t) - f(t_0)\|_X < \frac{\varepsilon}{2}$. Поэтому для любых точек t', $t'' \in (t_0 - \delta, t - 0 + \delta) \cap \mathcal{T}$ имеем

$$\|f(t') - f(t'')\|_X \leqslant \|f(t') - f(t_0)\|_X + \|f(t_0) - f(t'')\|_X < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.,$$

и, следовательно,

$$\operatorname{osc}(f; t_0) = \inf_{r>0} \operatorname{osc}(f; \mathcal{T} \cap (t_0 - r, t_0 + r)) \leqslant \operatorname{osc}(f; \mathcal{T} \cap (t_0 - \delta, t_0 + \delta)) \leqslant \varepsilon.$$

А так как $\varepsilon > 0$ — произвольно, то это означает, что $\operatorname{osc}(f; t_0) = 0$.

2) Наоборот, если $\operatorname{osc}(f; t_0) = 0$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $\operatorname{osc}(f; \mathcal{T} \cap (t_0 - \delta, t_0 + \delta)) < \varepsilon$. Тогда для любого $t \in \mathcal{T} \cap (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ получаем, что

$$\|f(t) - f(t_0)\|_X \leqslant \operatorname{osc}(f; \mathcal{T} \cap (t_0 - \delta, t_0 + \delta)) < \varepsilon,$$

т.е. функция f сильно непрерывна в точке t_0. ■

Следствие 1.2.2. *Если $\mathcal{T}^*$ — множество точек разрыва функции $f \colon \mathcal{T} \to X$, то*

$$\mathcal{T}^* = \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{T}_{1/j}. \tag{1.2.11}$$

Доказательство. Если точка $t_0 \in \mathcal{T}$ является точкой разрыва функции f, то, в силу леммы 1.2.3, $\operatorname{osc}(f; t_0) > 0$, а поэтому $t_0 \in \mathcal{T}_\varepsilon$ при $\varepsilon = \operatorname{osc}(f; t_0)$. Отсюда следует, что множество $\mathcal{T}^*$ точек разрыва функции f представимо в виде

$$\mathcal{T}^* = \bigcup_{\varepsilon > 0} \mathcal{T}_\varepsilon.$$

Ясно, что $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \mathcal{T}_{1/j} \subset \bigcup\limits_{\varepsilon > 0} \mathcal{T}_\varepsilon$, ибо каждое слагаемое левой части включения является слагаемым правой. С другой стороны, если для данного $\varepsilon > 0$ выбрать натуральное j так, чтобы $\frac{1}{j} < \varepsilon$, то, в силу включения (1.2.9), будем иметь $\mathcal{T}_\varepsilon \subset \mathcal{T}_{1/j}$, и, следовательно, $\bigcup\limits_{\varepsilon > 0} \mathcal{T}_\varepsilon \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \mathcal{T}_{1/j}$. Таким образом,

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{T}_{1/j} = \bigcup_{\varepsilon > 0} \mathcal{T}_\varepsilon = \mathcal{T}^*.$$

Следствие доказано. ■

Лемма 1.2.4. *При любом $\varepsilon > 0$ все точки прикосновения множества $\mathcal{T}_\varepsilon$, содержащиеся во множестве $\mathcal{T}$, содержатся и в $\mathcal{T}_\varepsilon$, т.е. если $t \in (cl\mathcal{T}_\varepsilon) \cap \mathcal{T}$, то $t \in \mathcal{T}_\varepsilon$.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ и $t_0 \in (cl\mathcal{T}_\varepsilon) \cap \mathcal{T}$. Зададим произвольно $\eta > 0$. В силу определения колебания функции в точке существует такой интервал $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, что

$$\operatorname{osc}(f; (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \cap \mathcal{T}) < \operatorname{osc}(f; t_0) + \eta.$$

Точка t_0 является точкой прикосновения множества $\mathcal{T}_\varepsilon$, ввиду чего существует такая последовательность $t_j \in \mathcal{T}_\varepsilon$, $j = 1, 2, \dots$, что $\lim\limits_{j \to \infty} t_j = t_0$. Следовательно, найдётся такой номер j_0, что $t_{j_0} \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \cap \mathcal{T}_\varepsilon$. Согласно определению колебания функции в точке, отсюда вытекает, что

$$\operatorname{osc}(f; (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \cap \mathcal{T}) \geqslant \operatorname{osc}(f; (t_{j_0} - \delta', t_{j_0} + \delta') \cap \mathcal{T}) \geqslant \operatorname{osc}(f; t_{j_0}),$$

где $\delta' = \frac{1}{2} \min\{t_{j_0} - (t_0 - \delta), (t_0 + \delta) - t_{j_0}\}$.

Таким образом,

$$\operatorname{osc}(f; t_0) > \operatorname{osc}(f; (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \cap \mathcal{T}) - \eta \geqslant \operatorname{osc}(f; t_{j_0}) - \eta \geqslant \varepsilon - \eta,$$

так как из $t_{j_0} \in \mathcal{T}_\varepsilon$ следует $\operatorname{osc}(f; t_{j_0}) \geqslant \varepsilon$.

Поскольку $\operatorname{osc}(f; t_0) \geqslant \varepsilon - \eta$ при любом $\eta > 0$, то $\operatorname{osc}(f; t_0) \geqslant \varepsilon$, т.е. $t_0 \in \mathcal{T}_\varepsilon$. ■

Следствие 1.2.3. *Если множество $\mathcal{T}$, на котором задана функция $f \colon \mathcal{T} \to X$, — замкнуто, то при любом $\varepsilon > 0$ множество $\mathcal{T}_\varepsilon$ — также замкнуто.*

Следствие 1.2.4. *Пусть дана функция $f \colon [a, b] \to X$. Тогда при любом $\varepsilon > 0$ множество $([a, b])_\varepsilon$ — замкнуто и ограничено.*

Лемма 1.2.5. *Пусть задана функция $f \colon [a, b] \to X$ и существует такое $\varepsilon > 0$, что для всех точек t отрезка $[a, b]$ выполняется неравенство*

$$\operatorname{osc}(f; t) < \varepsilon. \tag{1.2.12}$$

Тогда существует такое разбиение $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i=i_\tau}$ отрезка $[a, b]$, что для всех $i = \overline{1, i_\tau}$ имеет место неравенство

$$\operatorname{osc}(f; [t_{i-1}, t_i]) < \varepsilon. \tag{1.2.13}$$

Доказательство. В силу выполнения условия (1.2.12) для любой точки $\xi \in [a,b]$ существует такой интервал $(\xi - r_\xi, \xi + r_\xi)$, что

$$\operatorname{osc}(f; (\xi - r_\xi, \xi + r_\xi) \cap [a,b]) < \varepsilon. \tag{1.2.14}$$

Система интервалов

$$(\xi - r_\xi, \xi + r_\xi), \ \ \xi \in [a,b], \tag{1.2.15}$$

образует покрытие отрезка $[a,b]$, и если

$$\Delta_\xi \equiv [\xi - \frac{1}{2}r_\xi, \xi + \frac{1}{2}r_\xi] \cap [a,b], \tag{1.2.16}$$

то

$$\operatorname{osc}(f; \Delta_\xi) \leqslant \operatorname{osc}(f; (\xi - r_\xi, \xi + r_\xi) \cap [a,b]) < \varepsilon.$$

Выделим, согласно лемме Гейне–Бореля, из покрытия (1.2.15) конечное подпокрытие

$$(\xi_1 - r_{\xi_1}, \xi_1 + r_{\xi_1}), \ldots, (\xi_m - r_{\xi_m}, \xi_m + r_{\xi_m})$$

и обозначим концы промежутков

$$(\xi_j - r_{\xi_j}, \xi_j + r_{\xi_j}) \cap [a,b]$$

через α_j и β_j, $j = \overline{1,m}$.

Пусть $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i=i_\tau}$ — разбиение отрезка $[a,b]$, состоящее из всех точек α_j, β_j, $j = \overline{1,m}$. Каждый отрезок $[t_{i-1}, t_i]$ этого разбиения имеет одну из следующих форм: $[\alpha_j, \beta_j]$, $[\alpha_j, \alpha_k]$, $[\beta_j, \alpha_k]$, $[\beta_j, \beta_k]$, $j, k = \overline{1,m}$, и целиком содержится в одном из отрезков Δ_{ξ_1}, Δ_{ξ_m} (см. (1.2.16)). Иначе говоря, для каждого отрезка $[t_{i-1}, t_i]$ существует такой отрезок $\Delta_{\xi_{j_i}}$, $1 \leqslant j_i \leqslant m$, что $[t_{i-1}, t_i] \subset \Delta_{\xi_{j_i}}$. Поэтому

$$\operatorname{osc}(f; [t_{i-1}, t_i]) \leqslant \operatorname{osc}(f; \Delta_{\xi_{j_i}}) < \varepsilon.$$

Лемма доказана. ■

Следствие 1.2.5. *В условиях леммы 1.2.5*

$$\sum_{i=1}^{i_\tau} \operatorname{osc}(f; [t_{i-1}, t_i]) \Delta t_i < \varepsilon(b-a). \tag{1.2.17}$$

Теорема 1.2.5. *(Дю Буа–Реймон) Для интегрируемости ограниченной на отрезке $[a,b]$ функции $f\colon [a,b] \to X$ достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ и любого $\delta > 0$ множество всех точек $t \in [a,b]$, в которых $\operatorname{osc}(f;t) \geqslant \varepsilon$, можно было покрыть конечной системой интервалов с суммой длин, меньшей δ.*

Доказательство. Пусть для любых чисел $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ множество $\mathcal{T}_\varepsilon = [a,b]_\varepsilon$ можно покрыть конечной системой интервалов, сумма длин которых меньше $\delta > 0$. Функция f ограничена на отрезке $[a,b]$, поэтому существует такая постоянная $c > 0$, что

$$\|f(t)\|_X \leqslant c \ \ \forall\, t \in [a,b]. \tag{1.2.18}$$

Зададим произвольно $\varepsilon > 0$ и возьмём $\delta = \frac{\varepsilon}{4c}$. Существует конечная система интервалов (α_i, β_i), $i = \overline{1,p}$, покрывающая множество $\mathcal{T}_{\frac{\varepsilon}{2(b-a)}}$, с суммой длин, меньшей $\frac{\varepsilon}{4c}$:

$$\mathcal{T}_{\frac{\varepsilon}{2(b-a)}} \subset \bigcup_{i=1}^{p} (\alpha_i, \beta_i), \tag{1.2.19}$$

$$\sum_{i=1}^{p} (\beta_i - \alpha_i) < \frac{\varepsilon}{4c}. \tag{1.2.20}$$

Объединение всех соответствующих отрезков $[\alpha_i, \beta_i]$, $i = \overline{1,p}$, можно представить в виде объединеня конечного множества отрезков $[\lambda_l, \mu_l]$, $l = \overline{1,m}$, с непересекающимися попарно внутренностями и с концами λ_l, μ_l, равными либо α_i, либо β_i, либо a, либо b. Тогда в силу (1.2.20)

$$\sum_{l=1}^{m} (\mu_l - \lambda_l) = \sum_{i=1}^{p} (\beta_i - \alpha_i) < \frac{\varepsilon}{4c}.$$

Так как ввиду (1.2.18)

$$\operatorname{osc}(f;[\lambda_l,\mu_l]) < 2c,$$

то

$$\sum_{l=1}^{m}\operatorname{osc}(f;[\lambda_l,\mu_l])(\mu_l-\lambda_l) < 2c\sum_{l=1}^{m}(\mu_l-\lambda_l) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Удалим из отрезка $[a,b]$ все точки, принадлежащие отрезкам $[\alpha_i,\beta_i]$, $i=\overline{1,p}$. Оставшееся множество представляет собой объединение конечного множества промежутков с концами ξ_j и η_j, $\xi_j<\eta_j$, $j=\overline{1,r}$, среди которых может быть не более двух полуинтервалов с концами $\xi_j=a$ или $\eta_j=b$, а все остальные являются интервалами. При этом, согласно включению (1.2.19), пересечение каждого из отрезков $[\xi_j,\eta_j]$ с множеством $\mathcal{T}_{\frac{\varepsilon}{2(b-a)}}$ пусто. Следовательно, в любой точке $t\in[\xi_j,\eta_j]$, $j=\overline{1,r}$, выполняется неравенство $\operatorname{osc}(f;t)<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Ясно также, что $\sum\limits_{j=1}^{r}(\eta_j-\xi_j)\leqslant b-a$. Отсюда, в силу следствия 1.2.5, вытекает, что для каждого отрезка $[\xi_j,\eta_j]$ существует такое его разбиение $\tau_j=\{\zeta_{k_j}\}_{k_j=0}^{k_j=k_{\tau_j}}$, что

$$\sum_{k_j=1}^{k_{\tau_j}}\operatorname{osc}(f;[\zeta_{k_j-1},\zeta_{k_j}])(\zeta_{k_j}-\zeta_{k_j-1}) < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(\eta_j-\xi_j).$$

Пусть теперь $\tau=\{\tau_\nu\}_{\nu=0}^{\nu=\nu_\tau}$ — разбиение всего отрезка $[a,b]$, состоящее из всех точек λ_l, μ_l, $l=\overline{1,m}$, и точек ζ_{k_j}, $k_j=\overline{1,k_{\tau_j}}$, $j=\overline{1,r}$. Тогда

$$\sum_{\nu=1}^{\nu_\tau}\operatorname{osc}(f;[t_{\nu-1},t_\nu])\Delta t_\nu = \sum_{l=1}^{m}\operatorname{osc}(f;[\lambda_l,\mu_l])(\mu_l-\lambda_l)+\sum_{j=1}^{r}\sum_{k_j=1}^{k_{\tau_j}}\operatorname{osc}(f;[\zeta_{k_j-1},\zeta_{k_j}])(\zeta_{k_j}-\zeta_{k_j-1}) <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\sum_{j=1}^{r}(\eta_j-\xi_j)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Согласно теореме 1.2.4 это означает, что функция f интегрируема на отрезке $[a,b]$. ■

Теорема 1.2.6. *(Лебег) Для интегрируемости ограниченной на отрезке $[a,b]$ функции $f\colon[a,b]\to X$ достаточно, чтобы множество её точек разрыва было множеством лебеговой меры нуль.*

Доказательство. Пусть множество $\mathcal{T}^*$ точек разрыва функции f, ограниченной на отрезке $\mathcal{T}=[a,b]$, является множеством лебеговой меры нуль. Зададим произвольно $\varepsilon>0$ и $\delta>0$. Тогда существует не более чем счётная система интервалов, покрывающая множество $\mathcal{T}^*$, с суммой длин интервалов, меньшей δ. Выберем натуральное число j так, чтобы $\frac{1}{j}<\varepsilon$. Указанная выше система интервалов, являясь покрытием множества $\mathcal{T}^*$, покрывает, в силу формулы $\mathcal{T}^*=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\mathcal{T}_{1/k}$ (см. (1.2.11)), множество $\mathcal{T}_{1/j}$, а следовательно, и множество $\mathcal{T}_\varepsilon$, ибо $\mathcal{T}_\varepsilon\subset\mathcal{T}_{1/j}$ (см. (1.2.9)). Множество $\mathcal{T}_\varepsilon$ является ограниченным замкнутым множеством (см. следствие 1.2.4). Поэтому, согласно лемме Гейне–Бореля, из рассматриваемой системы покрывающих его интервалов можно выделить конечную систему интервалов, по прежнему покрывающих множество $\mathcal{T}_\varepsilon$, причём сумма длин входящих в неё интервалов (она не превосходит суммы длин всех интервалов исходной системы, покрывающей множество $\mathcal{T}^*$) меньше δ. В силу теоремы 1.2.5 отсюда следует интегрируемость функции f. ■

1.2.2. Свойства интеграла

Теорема 1.2.7. *Если $\varphi\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ — скалярная интегрируемая (в смысле Римана) на отрезке $[a,b]$ функция, а $x_0\in X$, то функция $[0,T]\ni t\mapsto x_0\varphi(t)$ — интегрируема на отрезке $[a,b]$, и*

$$\int_a^b x_0\varphi(t)dt = x_0\int_a^b\varphi(t)dt.$$

Доказательство. Положим $f(t)=x_0\varphi(t)$, $t\in[a,b]$. Далее, пусть $\tau=\{t_i\}_{i=0}^{i=i_\tau}$ — некоторое разбиение отрезка $[a,b]$, и пусть точки $\xi_i\in[t_{i-1},t_i]$, $i=\overline{1,i_\tau}$, — произвольны. Тогда

$$\sigma_\tau(f;\xi_1,\dots,\xi_{i_\tau})=\sum_{i=1}^{i_\tau}f(\xi_i)\Delta t_i=\sum_{i=1}^{i_\tau}x_0\varphi(\xi_i)\Delta t_i=x_0\sum_{i=1}^{i_\tau}\varphi(\xi_i)\Delta t_i=x_0\sigma_\tau(\varphi;\xi_1,\dots,\xi_{i_\tau}),$$

то есть

$$\sigma_\tau(f;\xi_1,\dots,\xi_{i_\tau}) = x_0\sigma_\tau(\varphi;\xi_1,\dots,\xi_{i_\tau}).$$

Поскольку функция $\varphi\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ — интегрируема (в смысле Римана) на отрезке $[a,b]$, то существует предел интегральных сумм $\sigma_\tau(\varphi;\xi_1,\dots,\xi_{i_\tau})$ при $|\tau|\to 0$, в силу чего существует и предел интегральных сумм $\sigma_\tau(f;\xi_1,\dots,\xi_{i_\tau})$ при $|\tau|\to 0$. Переходя затем к пределу при $|\tau|\to 0$, получаем требуемое равенство. ■

Теорема 1.2.8. *Если функция $f\colon [a,b]\to X$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, а $k\in\mathbb{R}$ — константа, то функция kf также интегрируема по отрезку $[a,b]$, причём*

$$\int\limits_a^b kf(t)dt = k\int\limits_a^b f(t)dt$$

Доказательство. Действительно, для любого разбиения τ справедливо равенство $\sigma_\tau(kf) = k\sigma_\tau(f)$, откуда и следует утверждение теоремы. ■

Теорема 1.2.9. *Если функции $f\colon [a,b]\to X$ и $g\colon [a,b]\to X$ интегрируемы на отрезке $[a,b]$, то функция $f+g$ также интегрируема по отрезку $[a,b]$, причём*

$$\int\limits_a^b [f(t)+g(t)]dt = \int\limits_a^b f(t)dt + \int\limits_a^b g(t)dt.$$

Доказательство. В самом деле, для любого разбиения τ имеет место равенство $\sigma_\tau(f+g) = \sigma_\tau(f)+\sigma_\tau(g)$, откуда и следует утверждение теоремы. ■

Теорема 1.2.10. *Если функция $f\colon [a,b]\to X$ п.в. на отрезке $[a,b]$ сильно непрерывна и ограничена на этом отрезке, то для всякого $c\in(a,b)$ она интегрируема по отрезкам $[a,c]$ и $[c,b]$, причём*

$$\int\limits_a^b f(t)dt = \int\limits_a^c f(t)dt + \int\limits_c^b f(t)dt.$$

Доказательство. Пусть τ_1 — разбиение отрезка $[a,c]$, τ_2 — разбиение отрезка $[c,b]$, а $\tau = \tau_1\cup\tau_2$ — разбиение отрезка $[a,b]$. Тогда $\sigma_\tau(f) = \sigma_{\tau_1}(f)+\sigma_{\tau_2}(f)$. Если $|\tau_1|\to 0$ и $|\tau_2|\to 0$, то и $|\tau|\to 0$, и в пределе получаем нужное равенство. ■

Теорема 1.2.11. *Если функция $f\colon [a,b]\to X$ п.в. на отрезке $[a,b]$ сильно непрерывна и ограничена на этом отрезке, то функция $[a,b]\ni t\mapsto \|f(t)\|_X$ интегрируема в смысле Римана по отрезку $[a,b]$, причём*

$$\left\|\int\limits_a^b f(t)dt\right\|_X \leqslant \int\limits_a^b \|f(t)\|_X dt.$$

Доказательство. Поскольку функция $f\colon [a,b]\to X$ п.в. на отрезке $[a,b]$ сильно непрерывна и ограничена на этом отрезке, то функция $g(t)=\|f(t)\|_X$, $t\in[a,b]$, непрерывна п.в. на отрезке $[a,b]$ и ограничена на этом отрезке, и, как следствие, в силу критерия Лебега интегрируемости числовых функций, интегрируема по Риману на отрезке $[a,b]$. Для завершения доказательства осталось заметить, что для любого разбиения τ имеет место соотношение $\|\sigma_\tau(f)\|_X\leqslant\sigma_\tau(g)$. ■

Теорема 1.2.12. *Пусть для элементов пространства X определено умножение справа на элементы банахова пространства Y. Тогда если функция $f\colon [a,b]\to X$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, а $y\in Y$ — константа, то функция $[a,b]\ni t\mapsto f(t)\bullet y$ также интегрируема по отрезку $[a,b]$, причём*

$$\int\limits_a^b [f(t)\bullet y]dt = \left[\int\limits_a^b f(t)dt\right]\bullet y.$$

Доказательство. Положим $g(t) = f(t)\bullet y$, $t\in[a,b]$. Далее, пусть $\tau=\{t_i\}_{i=0}^{i=i_\tau}$ — некоторое разбиение отрезка $[a,b]$, и пусть точки $\xi_i\in[t_{i-1},t_i]$, $i=\overline{1,i_\tau}$, — произвольны. Тогда

$$\sigma_\tau(g;\xi_1,\dots,\xi_{i_\tau}) = \sum_{i=1}^{i_\tau}[f(\xi_i)\bullet y]\Delta t_i = \left[\sum_{i=1}^{i_\tau} f(\xi_i)\Delta t_i\right]\bullet y = \sigma_\tau(f;\xi_1,\dots,\xi_{i_\tau})\bullet y,$$

то есть

$$\sigma_\tau(g;\xi_1,\ldots,\xi_{i_\tau}) = \sigma_\tau(f;\xi_1,\ldots,\xi_{i_\tau}) \bullet y.$$

Поскольку функция $f\colon [a,b] \to X$ — интегрируема (в смысле Римана) на отрезке $[a,b]$, то существует предел интегральных сумм $\sigma_\tau(f;\xi_1,\ldots,\xi_{i_\tau})$ при $|\tau| \to 0$, в силу чего существует и предел интегральных сумм $\sigma_\tau(g;\xi_1,\ldots,\xi_{i_\tau})$ при $|\tau| \to 0$. Переходя затем к пределу при $|\tau| \to 0$, получаем требуемое равенство. ■

Теорема 1.2.13. *Пусть для элементов пространства X определено умножение слева на элементы банахова пространства Z. Тогда если функция $f\colon [a,b] \to X$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, а $z \in Z$ — константа, то функция $[a,b] \ni t \mapsto z \bullet f(t)$ также интегрируема по отрезку $[a,b]$, причём*

$$\int\limits_a^b [z \bullet f(t)]dt = z \bullet \left[\int\limits_a^b f(t)dt\right].$$

Доказательство. Положим $g(t) = z \bullet f(t)$, $t \in [a,b]$. Далее, пусть $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i=i_\tau}$ — некоторое разбиение отрезка $[a,b]$, и пусть точки $\xi_i \in [t_{i-1},t_i]$, $i = \overline{1,i_\tau}$, — произвольны. Тогда

$$\sigma_\tau(g;\xi_1,\ldots,\xi_{i_\tau}) = \sum_{i=1}^{i_\tau}[z \bullet f(\xi_i)]\Delta t_i = z \bullet \left[\sum_{i=1}^{i_\tau} f(\xi_i)\Delta t_i\right] = z \bullet \sigma_\tau(f;\xi_1,\ldots,\xi_{i_\tau}),$$

то есть

$$\sigma_\tau(g;\xi_1,\ldots,\xi_{i_\tau}) = z \bullet \sigma_\tau(f;\xi_1,\ldots,\xi_{i_\tau}).$$

Поскольку функция $f\colon [a,b] \to X$ — интегрируема (в смысле Римана) на отрезке $[a,b]$, то существует предел интегральных сумм $\sigma_\tau(f;\xi_1,\ldots,\xi_{i_\tau})$ при $|\tau| \to 0$, в силу чего существует и предел интегральных сумм $\sigma_\tau(g;\xi_1,\ldots,\xi_{i_\tau})$ при $|\tau| \to 0$. Переходя затем к пределу при $|\tau| \to 0$, получаем требуемое равенство. ■

Теорема 1.2.14. *Пусть функция $f\colon [a,b] \to X$ ограничена на отрезке $[a,b]$ и п.в. на этом отрезке сильно непрерывна. Пусть $g(t) = \int\limits_a^t f(p)dp$, $t \in [a,b]$. Тогда функция g сильно непрерывна в каждой точке отрезка $[a,b]$.*

Доказательство. Поскольку функция f ограничена на отрезке $[a,b]$, то найдётся постоянная $c > 0$, такая, что

$$\|f(t)\|_X \leqslant c \quad \forall\, t \in [a,b].$$

Поэтому для любого $t_0 \in [a,b]$ и для всех Δt, $|\Delta t| \leqslant \min\{t_0 - a, b - t_0\}$

$$\|g(t_0+\Delta t) - g(t_0)\|_X = \left\|\int\limits_{t_0}^{t_0+\Delta t} f(p)dp\right\|_X \leqslant \left|\int\limits_{t_0}^{t_0+\Delta t} \|f(p)\|_X dp\right| \leqslant c|\Delta t|,$$

ввиду чего

$$\lim_{\Delta t \to 0} \|g(t_0+\Delta t) - g(t_0)\|_X = 0.$$

Как следствие, функция g сильно непрерывна в точке $t_0 \in [a,b]$. Так как точка $t_0 \in [a,b]$ выбрана произвольно, то функция g сильно непрерывна в каждой точке отрезка $[a,b]$. Теорема доказана. ■

Теорема 1.2.15. *Пусть функция $f\colon [a,b] \to X$ ограничена на отрезке $[a,b]$ и п.в. на этом отрезке сильно непрерывна. Пусть $g(t) = \int\limits_a^t f(p)dp$, $t \in [a,b]$. Тогда в точке $t_0 \in [a,b]$ сильной непрерывности функции f функция g сильно дифференцируема, и $g'(t_0) = f(t_0)$.*

Доказательство. Так как функция f сильно непрывна в точке $t_0 \in [a,b]$, то

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0\ \forall\, p \in [a,b],\ \ |p - t_0| < \delta : \|f(p) - f(t_0)\|_X < \varepsilon. \tag{1.2.21}$$

Кроме того,

$$\left\|\frac{g(t_0+\Delta t) - g(t_0)}{\Delta t} - f(t_0)\right\|_X \leqslant \frac{1}{|\Delta t|}\left|\int\limits_{t_0}^{t_0+\Delta t} \|f(p) - f(t_0)\|_X dp\right|. \tag{1.2.22}$$

Выберем произвольно $\varepsilon > 0$ и подберём по нему $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ согласно (1.2.21), и пусть $0 < |\Delta t| < \delta$. Тогда, согласно (1.2.21), для всех p, лежащих между t_0 и $t_0 + \Delta_t$, имеем

$$\|f(p) - f(t_0)\|_X \leqslant \varepsilon,$$

ввиду чего

$$\left| \int\limits_{t_0}^{t_0+\Delta t} \|f(p) - f(t_0)\|_X dp \right| \leqslant \varepsilon |\Delta t|.$$

Подставляя последнее неравенство в соотношение (1.2.22), заключаем, что

$$\left\| \frac{g(t_0 + \Delta t) - g(t_0)}{\Delta t} - f(t_0) \right\|_X \leqslant \varepsilon. \tag{1.2.23}$$

Иными словами, для любого $\varepsilon > 0$ можно подобрать (согласно (1.2.21)) $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ так, чтобы при всех $0 < |\Delta t| < \delta$ выполнялось неравенство (1.2.23). А это и означает, что функция g сильно дифференцируема в точке t_0, и выполнено равенство $g'(t_0) = f(t_0)$. ■

Следствие 1.2.6. *Если функция $f\colon [a,b] \to X$ сильно непрерывна в каждой точке отрезка $[a,b]$, то функция*

$$g(t) = \int\limits_a^t f(p)dp, \ \ t \in [a,b],$$

сильно непрерывно дифференцируема на отрезке $[a,b]$.

Теорема 1.2.16. *Пусть функция $f\colon [a,b] \to X$ сильно дифференцируема во всех точках отрезка $[a,b]$, а производная $f'\colon [a,b] \to X$ интегрируема в смысле Римана по отрезку $[a,b]$. Тогда справедлива формула Ньютона–Лейбница*

$$\int\limits_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a).$$

Доказательство. Для элементов пространства X определено умножение справа на элементы сопряжённого пространства X^*. Поэтому для любого $x^* \in X^*$

$$\left\langle \int\limits_a^b f'(t)dt, x^* \right\rangle = \int\limits_a^b \langle f'(t), x^* \rangle dt = \int\limits_a^b \frac{d}{dt} \langle f(t), x^* \rangle dt = \langle f(t), x^* \rangle |_a^b = \langle f(b) - f(a), x^* \rangle,$$

поскольку для скалярных функций формула Ньютона–Лейбница имеет место. Следовательно, $\langle z, x^* \rangle = 0$ для любого $x^* \in X^*$, где $z = \int\limits_a^b f'(t)dt - f(b) - f(a)$. Это возможно только при $z = 0$, что и требовалось доказать. ■

Теорема 1.2.17. *Пусть $\varphi\colon [\alpha,\beta] \to [a,b]$ — непрерывно дифференцируемое строго монотонное отображение отрезка $\alpha \leqslant p \leqslant \beta$ в отрезок $a \leqslant t \leqslant b$, с сооответствием концов $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ или $\varphi(\alpha) = b$, $\varphi(\beta) = a$. Тогда при любой функции $f\colon [a,b] \to X$, интегрируемой в смысле Римана на отрезке $[a,b]$, функция $g(p) \equiv f(\varphi(p))\varphi'(p)$, $p \in [\alpha,\beta]$, интегрируема на отрезке $[\alpha,\beta]$ и справедливо равенство*

$$\int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)dt = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(p))\varphi'(p)dp. \tag{1.2.24}$$

Доказательство. Поскольку φ — строго монотонное отображение отрезка $[\alpha,\beta]$ на отрезок $[a,b]$ с соответствием концов, то любое разбиение $\tau_p = \{p_i\}_{i=0}^m$ отрезка $[\alpha,\beta]$ посредством образов $t_i = \varphi(p_i)$, $i = \overline{0,m}$, точек разбиения τ_p порождает разбиение τ_t отрезка $[a,b]$, которое можно условно обозначить $\varphi(\tau_p)$. При этом $t_0 = a$, если $\varphi(\alpha) = a$, и $t_0 = b$, если $\varphi(\alpha) = b$. Из равномерной непрерывности функции φ на отрезке $[\alpha,\beta]$ следует, что если $|\tau_p| \to 0$, то величина $|\tau_t|$ также стремится к нулю. Произвольно выберем отмеченные точки ξ_i, $i = \overline{1,m}$, разбиения τ_t.

Используя теорему Лагранжа, преобразуем интегральную сумму $\sigma_{\tau_t}(f;\xi_1,\dots,\xi_m)$ следующим образом:

$$\sum_{i=1}^m f(\xi_i)\Delta t_i = \sum_{i=1}^m f(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^m f(\varphi(\eta_i))\varphi'(\bar\eta_i)(p_i - p_{i-1}) = \sum_{i=1}^m f(\varphi(\eta_i))\varphi'(\bar\eta_i)\Delta p_i.$$

Здесь $t_i = \varphi(p_i)$, $\xi_i = \varphi(\eta_i)$, ξ_i лежит на отрезке с концами t_{i-1} и t_i, а точки η_i и $\bar\eta_i$ лежат на отрезке с концами p_{i-1} и p_i.

Далее,

$$\sum_{i=1}^m f(\varphi(\eta_i))\varphi'(\bar\eta_i)\Delta p_i = \sum_{i=1}^m f(\varphi(\eta_i))\varphi'(\eta_i)\Delta p_i + \sum_{i=1}^m f(\varphi(\eta_i))[\varphi'(\bar\eta_i) - \varphi'(\eta_i)]\Delta p_i.$$

Оценим последнюю сумму. Поскольку функция f интегрируема в смысле Римана на отрезке $[a,b]$, то она ограничена на этом отрезке, т.е. найдётся постоянная $c > 0$, такая, что $\|f(t)\|_X \leqslant c$ для всех $t \in [a,b]$. Поэтому

$$\left\|\sum_{i=1}^m f(\varphi(\eta_i))[\varphi'(\bar\eta_i) - \varphi'(\eta_i)]\Delta p_i\right\|_X \leqslant c\sum_{i=1}^m \operatorname{osc}(\varphi';\Delta_i)\Delta p_i,$$

где Δ_i — отрезок с концами p_{i-1} и p_i.

Последняя сумма стремится к нулю при $|\tau_p| \to 0$, поскольку φ' — непрерывная на отрезке $[\alpha,\beta]$ вещественнозначная функция.

Таким образом, мы показали, что

$$\sum_{i=1}^m f(\xi_i)\Delta t_i = \sum_{i=1}^m f(\varphi(\eta_i))\varphi'(\eta_i)\Delta p_i + \gamma,$$

где $\gamma \to 0$ при $|\tau_p| \to 0$. Как уже отмечалось, если $|\tau_p| \to 0$, то и $|\tau_t| \to 0$. Так как функция f интегрируема в смысле Римана на отрезке $[a,b]$, то при $|\tau_t| \to 0$ сумма в левой части последнего равенства стремится к интегралу $\int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)dt$. Значит, при $|\tau_p| \to 0$ и сумма в правой части этого равенства имеет (и притом тот же) предел.

Но сумму $\sum\limits_{i=1}^m f(\varphi(\eta_i))\varphi'(\eta_i)\Delta p_i$ можно считать совершенно произвольной интегральной суммой функции g, соответствующей разбиению τ_p, с отмеченными точками $\eta_1,\dots,\eta_m$, поскольку, ввиду строгой монотонности функции φ, любой набор точек $\eta_1,\dots,\eta_m$ можно получить из некоторого соответствующего ему набора $\xi_1,\dots,\xi_m$ отмеченных точек разбиения $\tau_t = \varphi(\tau_p)$.

Таким образом, предел этой суммы есть, по определению, интеграл от функции g по отрезку $[\alpha,\beta]$, и мы доказали одновременно как интегрируемость функции g, так и формулу (1.2.24). ■

Теорема 1.2.18. *Пусть для элементов банахова пространства X определено умножение справа на элементы банахова пространства Y. Пусть, кроме того, функции $f\colon [a,b] \to X$ и $g\colon [a,b] \to Y$ сильно дифференцируемы всюду на отрезке $[a,b]$, а функции f' и g' ограничены на отрезке $[a,b]$ и почти всюду на этом отрезке сильно непрерывны. Тогда*

$$\int\limits_a^b [f(t) \bullet g'(t)]dt = [f(t) \bullet g(t)]|_a^b - \int\limits_a^b [f'(t) \bullet g(t)]dt.$$

Доказательство. Поскольку функции f и g сильно дифференцирумы всюду на отрезке $[a,b]$, то функция $h(t) \equiv f(t) \bullet g(t)$, $t \in [a,b]$, при всех $t \in [a,b]$ сильно дифференцируема, причём

$$\frac{dh(t)}{dt} = f'(t) \bullet g(t) + f(t) \bullet g'(t),\ \ t \in [a,b].$$

В силу данной формулы и условий на функции f, g, f', g' получаем, что функция h' ограничена на отрезке $[a,b]$ и почти всюду на этом отрезке сильно непрерывна, ввиду чего функция h' интегрируема в смысле Римана по отрезку $[a,b]$. Поэтому применима формула Ньютона–Лейбница, согласно которой

$$\int\limits_a^b h'(t)dt = h(t)|_a^b.$$

Подставляя сюда выражение для функции h, будем иметь

$$\int_a^b [f'(t) \bullet g(t) + f(t) \bullet g'(t)]dt = [f(t) \bullet g(t)]|_a^b, \quad \int_a^b [f'(t) \bullet g(t)]dt + \int_a^b [f(t) \bullet g'(t)]dt = [f(t) \bullet g(t)]|_a^b,$$

$$\int_a^b [f(t) \bullet g'(t)]dt = [f(t) \bullet g(t)]|_a^b - \int_a^b [f'(t) \bullet g(t)]dt.$$

Теорема доказана. ■

1.3. Интеграл Бохнера

Материал настоящего раздела взят из [33, глава V, с.187–194] и [64]. Всюду в данном разделе X — сепарабельное банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_X$.

1.3.1. Определение интеграла Бохнера

Дадим следующее определение.

Определение 1.3.1. *Пусть $(\mathfrak{S}, \mathfrak{B}, \mu)$ — положительное пространство с мерой, и пусть $f : \mathfrak{S} \to X$ — некоторое отображение.*

*Это отображение называется **слабо $\mathfrak{B}$–измеримым**, если для любого элемента $x^* \in X^*$ числовая функция $\mathfrak{S} \ni \mathfrak{s} \mapsto \langle f(\mathfrak{s}), x^* \rangle$ является $\mathfrak{B}$–измеримой.*

*Отображение f называется **простым**, если оно принимает постоянные отличные от нуля значения на каждом из множеств B_j, образующих конечную систему непересекающихся $\mathfrak{B}$–измеримых множеств, причём $\mu(B_j) < +\infty$ и $f(\mathfrak{s}) = 0$ для $\mathfrak{s} \in \mathfrak{S} \setminus \bigcup\limits_j B_j$.*

*Отображение f называется **сильно $\mathfrak{B}$–измеримым**, если существует последовательность простых отображений f_k, $k = 1, 2, \ldots$, такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} \|f_k(\mathfrak{s}) - f(\mathfrak{s})\|_X = 0$ при μ–п.в. $\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}$.*

Теорема 1.3.1. *(Петтис) Для того, чтобы функция $f : \mathfrak{S} \to X$ была сильно $\mathfrak{B}$–измеримой, необходимо и достаточно, чтобы она была слабо $\mathfrak{B}$–измеримой.*

Пусть на пространстве с мерой $(\mathfrak{S}, \mathfrak{B}, \mu)$ задана простая функция f, принимающая значения в пространстве X. Пусть f принимает значения $x_i \neq 0$, $i = \overline{1, r}$, на множествах $B_i \in \mathfrak{B}_i$, $i = \overline{1, r}$, соответственно, все множества B_i попарно не пересекаются и $\mu(B_i)$, $i = \overline{1, r}$. Пусть, кроме того, $f(\mathfrak{s}) = 0$ для $\mathfrak{s} \in \mathfrak{S} \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{r} B_j$.
Тогда **интегралом (Бохнера) функции f по множеству** $\mathfrak{S}$ называется сумма $\sum\limits_{j=1}^{r} x_j \mu(B_j)$, и эта сумма обозначается через (Б) $\int\limits_{\mathfrak{S}} f(\mathfrak{s})\mu(d\mathfrak{s})$ или через $\int\limits_{\mathfrak{S}} f(\mathfrak{s})\mu(d\mathfrak{s})$.

Определение 1.3.2. *Функция $f : \mathfrak{S} \to X$, называется μ–**интегрируемой по Бохнеру**, если существует последовательность простых функций f_k, $k = 1, 2, \ldots$, сильно сходящаяся к f при μ–п.в. $\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}$, и такая, что*

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathfrak{S}} \|f_k(\mathfrak{s}) - f(\mathfrak{s})\|_X \mu(d\mathfrak{s}) = 0. \tag{1.3.1}$$

Тогда предел

$$\overset{X}{\lim_{k\to\infty}} \left[(Б) \int_{\mathfrak{S}} f_k(\mathfrak{s})\mu(d\mathfrak{s}) \right] \tag{1.3.2}$$

*называется **интегралом (Бохнера) функции f по множеству** $\mathfrak{S}$ и обозначается либо как $\int\limits_{\mathfrak{S}} f(\mathfrak{s})\mu(d\mathfrak{s})$, либо как (Б) $\int\limits_{\mathfrak{S}} f(\mathfrak{s})\mu(d\mathfrak{s})$.*

При этом для любого $B \in \mathfrak{B}$ по определению положим

$$(Б) \int_B f(\mathfrak{s})\mu(d\mathfrak{s}) = \overset{X}{\lim_{k\to\infty}} \left[(Б) \int_{\mathfrak{S}} \chi_B(\mathfrak{s}) f_k(\mathfrak{s})\mu(d\mathfrak{s}) \right], \tag{1.3.3}$$

где χ_B — характеристическая функция множества B.

Теорема 1.3.2. *Определение интеграла Бохнера корректно.*

Доказательство. Так как функция f сильно $\mathfrak{B}$–измерима, то условие (1.3.1) имеет смысл.

Покажем, что предел (1.3.3) существует. В самом деле, при всех k, $j \geqslant 1$

$$\left\| (\text{Б}) \int\limits_{\mathfrak{S}} \chi_B(\mathfrak{s}) f_k(\mathfrak{s}) \mu(d\mathfrak{s}) - (\text{Б}) \int\limits_{\mathfrak{S}} \chi_B(\mathfrak{s}) f_j(\mathfrak{s}) \mu(d\mathfrak{s}) \right\|_X = \left\| (\text{Б}) \int\limits_{\mathfrak{S}} \chi_B(\mathfrak{s}) [f_k(\mathfrak{s}) - f_j(\mathfrak{s})] \mu(d\mathfrak{s}) \right\|_X \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_B \|f_k(\mathfrak{s}) - f_j(\mathfrak{s})\|_X \mu(d\mathfrak{s}) \leqslant \int\limits_B \|f_k(\mathfrak{s}) - f(\mathfrak{s})\|_X \mu(d\mathfrak{s}) + \int\limits_B \|f(\mathfrak{s}) - f_j(\mathfrak{s})\|_X \mu(d\mathfrak{s}).$$

В силу условия (1.3.1) отсюда вытекает фундаментальность последовательности

$$\int\limits_{\mathfrak{S}} \chi_B(\mathfrak{s}) f_k(\mathfrak{s}) \mu(d\mathfrak{s}), \ \ k = 1, 2, \ldots,$$

в норме пространства X. Поскольку же X полно, то у этой последовательности существует предел. Иными словами, предел (1.3.3) существует.

Докажем теперь, что этот предел не зависит от выбора последовательности f_k, $k = 1, 2, \ldots$ В самом деле, пусть f'_k, $k = 1, 2, \ldots$, и f''_k, $k = 1, 2, \ldots$, — две последовательности из определения интеграла, и пусть

$$\overset{X}{\lim_{k\to\infty}} \left[(\text{Б}) \int\limits_{\mathfrak{S}} \chi_B(\mathfrak{s}) f'_k(\mathfrak{s}) \mu(d\mathfrak{s}) \right] = A, \ \ \overset{X}{\lim_{k\to\infty}} \left[(\text{Б}) \int\limits_{\mathfrak{S}} \chi_B(\mathfrak{s}) f''_k(\mathfrak{s}) \mu(d\mathfrak{s}) \right] = B.$$

Составив последовательность

$$\tilde{f}_k = \begin{cases} f'_m, \ k = 2m - 1, \, m = 1, 2, \ldots; \\ f''_m, \ k = 2m, \, m = 1, 2, \ldots; \end{cases}$$

получим, что для неё тоже существует предел (1.3.3), причём этот предел равен как A, так и B. Следовательно, $A = B$. Теорема доказана. ■

Теорема 1.3.3. *(Бохнер) Для того, чтобы сильно $\mathfrak{B}$–измеримая функция была μ–интегрируемой по Бохнеру, необходимо и достаточно, чтобы функция $\mathfrak{S} \ni \mathfrak{s} \mapsto \|f(\mathfrak{s})\|_X$ была μ–интегрируемой.*

Доказательство. 1) Докажем необходимость. Нетрудно видеть, что

$$\|f(\mathfrak{s})\|_X \leqslant \|f_k(\mathfrak{s})\|_X + \|f(\mathfrak{s}) - f_k(\mathfrak{s})\|_X.$$

Поэтому из условия (1.3.1) и μ–интегрируемости функции

$$\mathfrak{S} \ni \mathfrak{s} \mapsto \|f_k(\mathfrak{s})\|_X$$

следует, что функция

$$\mathfrak{S} \ni \mathfrak{s} \mapsto \|f(\mathfrak{s})\|_X$$

тоже μ–интегрируема, и

$$\int\limits_B \|f(\mathfrak{s})\|_X \mu(d\mathfrak{s}) \leqslant \int\limits_B \|f_k(\mathfrak{s})\|_X \mu(d\mathfrak{s}) + \int\limits_B \|f(\mathfrak{s}) - f_k(\mathfrak{s})\|_X \mu(d\mathfrak{s}).$$

Поскольку же при всех k, $j \geqslant 1$

$$\left| \int\limits_B \|f_k(\mathfrak{s})\|_X \mu(d\mathfrak{s}) - \int\limits_B \|f_j(\mathfrak{s})\|_X \mu(d\mathfrak{s}) \right| \leqslant \int\limits_B | \, \|f_k(\mathfrak{s})\|_X - \|f_j(\mathfrak{s})\|_X | \mu(d\mathfrak{s}) \leqslant \int\limits_B \|f_k(\mathfrak{s}) - f_j(\mathfrak{s})\|_X \mu(d\mathfrak{s}),$$

то, ввиду условия (1.3.1), существует предел

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_B \|f_k(\mathfrak{s})\|_X \mu(d\mathfrak{s}),$$

причём

$$\int\limits_B \|f(\mathfrak{s})\|_X \mu(d\mathfrak{s}) \leqslant \varliminf_{k\to\infty} \int\limits_B \|f_k(\mathfrak{s})\|_X \mu(d\mathfrak{s}).$$

2) Докажем достаточность. Пусть f_k, $k = 1, 2, \ldots,$ — произвольная последовательность простых функций, такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} \|f_k(\mathfrak{s}) - f(\mathfrak{s})\|_X = 0$ при μ–п.в. $\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}$. Введём вспомогательные функции g_k, $k = 1, 2, \ldots,$ следующим образом:

$$g_k(\mathfrak{s}) = \begin{cases} f_k(\mathfrak{s}), & \text{если } \|f_k(\mathfrak{s})\|_X \leqslant \|f(\mathfrak{s})\|_X [1 + \frac{1}{k}]; \\ 0, & \text{если } \|f_k(\mathfrak{s})\|_X > \|f(\mathfrak{s})\|_X [1 + \frac{1}{k}]. \end{cases}$$

Тогда

$$\|g_k(\mathfrak{s})\|_X \leqslant \|f(\mathfrak{s})\|_X [1 + \frac{1}{k}]$$

и $\lim\limits_{k\to\infty} \|g_k(\mathfrak{s}) - f(\mathfrak{s})\|_X = 0$ при μ–п.в. $\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}$. Так как функция $\mathfrak{S} \ni \mathfrak{s} \mapsto \|f(\mathfrak{s})\|_X$ — μ–интегрируема и $\|g_k(\mathfrak{s}) - f(\mathfrak{s})\|_X \leqslant 2\|f(\mathfrak{s})\|_X [1 + \frac{1}{k}]$, то, в силу теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла Лебега,

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{\mathfrak{S}} \|g_k(\mathfrak{s}) - f(\mathfrak{s})\|_X \mu(d\mathfrak{s}) = 0.$$

А это и означает, что функция f интегрируема по Бохнеру. Теорема полностью доказана. ■

1.3.2. Свойства интеграла Бохнера

Следствие 1.3.1. *Если функция $f : \mathfrak{S} \to X$ μ–интегрируема по Бохнеру, то для любого $B \in \mathfrak{B}$*

$$\left\| \int\limits_B f(\mathfrak{s})\mu(d\mathfrak{s}) \right\|_X \leqslant \int\limits_B \|f(\mathfrak{s})\|_X \mu(d\mathfrak{s}).$$

Из этого следствия и абсолютной непрерывности интеграла Лебега вытекает

Следствие 1.3.2. *Интеграл Бохнера — μ–абсолютно–непрерывен.*

Из линейности операции предельного перехода вытекает

Следствие 1.3.3. *Пусть функции $f : \mathfrak{S} \to X$ и $g : \mathfrak{S} \to X$ — μ–интегрируемы по Бохнеру, а $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда для всех $B \in \mathfrak{B}$*

$$\int\limits_B [f(\mathfrak{s}) + g(\mathfrak{s})]\mu(d\mathfrak{s}) = \int\limits_B f(\mathfrak{s})\mu(d\mathfrak{s}) + \int\limits_B g(\mathfrak{s})\mu(d\mathfrak{s}), \quad \int\limits_B [\lambda f(\mathfrak{s})]\mu(d\mathfrak{s}) = \lambda \int\limits_B f(\mathfrak{s})\mu(d\mathfrak{s}).$$

Следствие 1.3.4. *Пусть Y и Z — банаховы пространства, функции $f : \mathfrak{S} \to X$ и $g : \mathfrak{S} \to Y$ — μ–интегрируемы по Бохнеру, $x_0 \in X$ и $y_0 \in Y$ — константы, и пусть определено умножение $\bullet$ элементов пространств X и Y, принимающее значения в Z. Тогда для всех $B \in \mathfrak{B}$*

$$\int\limits_B [f(\mathfrak{s}) \bullet y_0]\mu(d\mathfrak{s}) = \left[\int\limits_B f(\mathfrak{s})\mu(d\mathfrak{s})\right] \bullet y_0, \quad \int\limits_B [x_0 \bullet g(\mathfrak{s})]\mu(d\mathfrak{s}) = x_0 \bullet \left[\int\limits_B g(\mathfrak{s})\mu(d\mathfrak{s})\right].$$

Пусть $\mathfrak{S} \equiv [t_0, t_1]$ — отрезок числовой оси, $\mathfrak{B}$ — σ–алгебра измеримых по Лебегу подмножеств этого отрезка, μ — мера Лебега на числовой оси. Тогда если функция $f : [t_0, t_1] \to X$ — μ–интегрируема, то для всех t, $\tau \in [t_0, t_1]$ положим по определению

$$\int\limits_t^\tau f(\xi)d\xi = \begin{cases} \int\limits_{[t,\tau]} f(\xi)d\xi, & \text{если } t \leqslant \tau; \\ -\int\limits_{[\tau,t]} f(\xi)d\xi, & \text{если } t \geqslant \tau. \end{cases}$$

Теорема 1.3.4. *Пусть* $\mathfrak{S} \equiv [t_0, t_1]$ *— отрезок числовой оси,* $\mathfrak{B}$ *—* σ*–алгебра измеримых по Лебегу подмножеств этого отрезка,* μ *— мера Лебега на числовой оси. Тогда если функция* $f : [t_0, t_1] \to X$ *—* μ*–интегрируема по Бохнеру, то функция*

$$[t_0, t_1] \ni t \mapsto (Б) \int\limits_{t_0}^{t} f(\xi) d\xi$$

сильно дифференцируема при п.в. $t \in [t_0, t_1]$ *и справедливо равенство*

$$\frac{d}{dt}\left[(Б) \int\limits_{t_0}^{t} f(\xi) d\xi\right] = f(t) \text{ при п.в. } t \in [t_0, t_1].$$

Доказательство. Введём обозначение

$$\Phi(t) \equiv (\text{Б}) \int\limits_{t_0}^{t} f(\xi) d\xi, \;\; t \in [t_0, t_1].$$

Таким образом, нам нужно показать, что функция Φ при п.в. $t \in [t_0, t_1]$ имеет сильную производную $\Phi'(t)$ и $\Phi'(t) = f(t)$.

Пусть t, $t + \Delta t \in [t_0, t_1]$. Тогда

$$\frac{\Phi(t + \Delta t) - \Phi(t)}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}\left[\int\limits_{t_0}^{t+\Delta t} f(\xi) d\xi - \int\limits_{t_0}^{t} f(\xi) d\xi\right] = \frac{1}{\Delta t} \int\limits_{t}^{t+\Delta t} f(\xi) d\xi.$$

Пусть f_k, $k = 1, 2, \ldots,$ — последовательность простых функций, такая, что

$$\|f_k(t')\|_X \leqslant \|f(t')\|_X \left[1 + \frac{1}{k}\right]$$

и $\lim\limits_{k\to\infty} \|f_k(t') - f(t')\|_X = 0$ при п.в. $t' \in [t_0, t_1]$. Нетрудно видеть, что

$$\frac{1}{\Delta t} \int\limits_{t}^{t+\Delta t} f(\xi) d\xi - f(t) = \frac{1}{\Delta t} \int\limits_{t}^{t+\Delta t} [f(\xi) - f_k(\xi)] d\xi + \left[\frac{1}{\Delta t} \int\limits_{t}^{t+\Delta t} f_k(\xi) d\xi - f_k(t)\right] + [f_k(t) - f(t)].$$

Поэтому

$$\left\|\frac{1}{\Delta t} \int\limits_{t}^{t+\Delta t} f(\xi) d\xi - f(t)\right\|_X \leqslant \left|\frac{1}{\Delta t} \int\limits_{t}^{t+\Delta t} \|f(\xi) - f_k(\xi)\|_X d\xi\right| + \left\|\frac{1}{\Delta t} \int\limits_{t}^{t+\Delta t} f_k(\xi) d\xi - f_k(t)\right\|_X + \|f_k(t) - f(t)\|_X.$$

Поскольку f_k — простая функция, то второе слагаемое в правой части данного равенства почти всюду равно нулю. Таким образом,

$$\left\|\frac{1}{\Delta t} \int\limits_{t}^{t+\Delta t} f(\xi) d\xi - f(t)\right\|_X \leqslant \left|\frac{1}{\Delta t} \int\limits_{t}^{t+\Delta t} \|f(\xi) - f_k(\xi)\|_X d\xi\right| + \|f_k(t) - f(t)\|_X.$$

Следовательно,

$$\varlimsup_{\Delta t\to 0} \left\|\frac{1}{\Delta t} \int\limits_{t}^{t+\Delta t} f(\xi) d\xi - f(t)\right\|_X \leqslant \varlimsup_{\Delta t\to 0} \left|\frac{1}{\Delta t} \int\limits_{t}^{t+\Delta t} \|f(\xi) - f_k(\xi)\|_X d\xi\right| + \|f_k(t) - f(t)\|_X.$$

Так как функция $[t_0, t_1] \ni \xi \mapsto \|f(\xi) - f_k(\xi)\|_X$ интегрируема в смысле Лебега, то предел в правой части данного неравенства почти всюду равен $\|f_k(t) - f(t)\|_X$.

Итак, при п.в. $t \in [t_0, t_1]$

$$\varlimsup_{\Delta t\to 0} \left\|\frac{1}{\Delta t} \int\limits_{t}^{t+\Delta t} f(\xi) d\xi - f(t)\right\|_X \leqslant 2\|f_k(t) - f(t)\|_X.$$

Устремляя затем k к бесконечности, получаем, что при п.в. $t \in [t_0, t_1]$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \left\| \frac{1}{\Delta t} \int\limits_t^{t+\Delta t} f(\xi) d\xi - f(t) \right\|_X = 0.$$

Теорема доказана. ■

Теорема 1.3.5. *Пусть функция $f : [0, T] \to X$ интегрируема в смысле Римана. Тогда она интегрируема и в смысле Бохнера, и её интегралы Римана и Бохнера совпадают.*

Доказательство. В самом деле, поскольку функция f интегрируема в смысле Римана, то при всех $x^* \in X^*$ интегрируема в смысле Римана же числовая функция

$$[0, T] \ni t \mapsto \langle f(t), x^* \rangle. \tag{1.3.4}$$

Следовательно, при всех $x^* \in X^*$ функция (1.3.4) измерима в смысле Лебега и интегрируема в смысле Лебега. Значит функция f сильно измерима и интегрируема в смысле Бохнера. Поэтому

$$\left\langle (\text{Р}) \int\limits_0^T f(t) dt, x^* \right\rangle = (\text{Л}) \langle f(t), x^* \rangle dt = \left\langle (\text{Б}) \int\limits_0^T f(t) dt, x^* \right\rangle.$$

Таким образом, при всех $x^* \in X^*$

$$\left\langle (\text{Р}) \int\limits_0^T f(t) dt - (\text{Б}) \int\limits_0^T f(t) dt, x^* \right\rangle = 0.$$

А это и означает, что

$$(\text{Р}) \int\limits_0^T f(t) dt = (\text{Б}) \int\limits_0^T f(t) dt.$$

Теорема доказана. ■

1.3.3. Пространства измеримых функций

Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$, а $(\mathfrak{S}, \mathfrak{B}, \mu)$ — положительное пространство с мерой. Через $\mathfrak{L}_p((\mathfrak{S}, \mathfrak{B}, \mu), X)$ обозначаем множество всех сильно $\mathfrak{B}$–измеримых функций $f : \mathfrak{S} \to X$, таких, что

$$\int\limits_{\mathfrak{S}} \|f(\mathfrak{s})\|_X^p \mu(d\mathfrak{s}) < +\infty \text{ при } 1 \leqslant p < \infty; \;\; \mu\text{–}\operatorname*{vraisup}_{\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}} \|f(\mathfrak{s})\|_X < +\infty \text{ при } p = \infty.$$

Нетрудно видеть, что $\mathfrak{L}_p((\mathfrak{S}, \mathfrak{B}, \mu), X)$ — линейное пространство.

Далее, через $L_p((\mathfrak{S}, \mathfrak{B}, \mu), X)$ обозначим множество классов эквивалентных (в смысле равенства μ–п.в.) функций из $\mathfrak{L}_p((\mathfrak{S}, \mathfrak{B}, \mu), X)$. Положим

$$\|f\|_{p,(\mathfrak{S},\mathfrak{B},\mu),X} \equiv \left[\int\limits_{\mathfrak{S}} \|f(\mathfrak{s})\|_X^p \mu(d\mathfrak{s}) \right]^{1/p} \text{ при } 1 \leqslant p < \infty; \;\; \|f\|_{p,(\mathfrak{S},\mathfrak{B},\mu),X} \equiv \mu\text{–}\operatorname*{vraisup}_{\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}} \|f(\mathfrak{s})\|_X \text{ при } p = \infty.$$

Несложно показать, что $\|\cdot\|_{p,(\mathfrak{S},\mathfrak{B},\mu),X}$ — норма в $L_p((\mathfrak{S}, \mathfrak{B}, \mu), X)$, и что пространство $L_p((\mathfrak{S}, \mathfrak{B}, \mu), X)$, наделённое этой нормой, — полно.

В завершение настоящего раздела приведём следующий результат.

Лемма 1.3.1. *Если $f \in C_s([0, T], X)$, то $f \in L_\infty([0, T], X)$, причём*

$$\sup_{t \in [0,T]} \|f(t)\|_X = \operatorname*{vraisup}_{t \in [0,T]} \|f(t)\|_X.$$

Доказательство. Поскольку f слабо непрерывна на отрезке $[0, T]$, то она слабо измерима на этом отрезке. Так как пространство X — сепарабельно, то из слабой измеримости следует сильная измеримость. Из этого обстоятельства и леммы 1.1.1 вытекает, что

$$\operatorname*{vraisup}_{t \in [0,T]} \|f(t)\|_X \leqslant \sup_{t \in [0,T]} \|f(t)\|_X < +\infty,$$

откуда и получаем включение $f \in L_\infty([0,T],X)$.

Итак, для завершения доказательства нам достаточно показать, что

$$\sup_{t\in[0,T]} \|f(t)\|_X \leqslant \operatorname*{vraisup}_{t\in[0,T]} \|f(t)\|_X.$$

В самом деле, пусть $x^* \in X^*$ — произвольный элемент. Ввиду слабой непрерывности функции f на отрезке $[0,T]$, вещественнозначная функция

$$[0,T] \ni t \mapsto \langle f(t), x^* \rangle$$

непрерывна на отрезке $[0,T]$. Как следствие,

$$\sup_{t\in[0,T]} \langle f(t), x^* \rangle = \operatorname*{vraisup}_{\xi\in[0,T]} \langle f(\xi), x^* \rangle.$$

Поэтому при всех $t \in [0,T]$

$$\langle f(t), x^* \rangle \leqslant \operatorname*{vraisup}_{\xi\in[0,T]} \langle f(\xi), x^* \rangle \leqslant \operatorname*{vraisup}_{\xi\in[0,T]} \|f(\xi)\|_X \|x^*\|_{X^*}.$$

Переходя здесь к точной верхней грани по $x^* \in X^*$, у которых $\|x^*\|_{X^*} \leqslant 1$, получим, что при любом $t \in [0,T]$

$$\|f(t)\|_{X^{**}} \leqslant \operatorname*{vraisup}_{\xi\in[0,T]} \|f(\xi)\|_X,$$

откуда, на основании изометричности вложения $X \subset X^{**}$, вытекает, что

$$\sup_{t\in[0,T]} \|f(t)\|_X \leqslant \operatorname*{vraisup}_{t\in[0,T]} \|f(t)\|_X.$$

Лемма полностью доказана. ■

1.4. Интеграл Стильтьеса

Материал данного раздела, за исключением, может быть, раздела 1.4.3, можно найти в [63, раздел 25.3].

1.4.1. Определение интеграла и условия интегрируемости

Прежде чем определить понятие интеграла Стильтьеса, введём понятие банаховозначной функции ограниченной вариации.

Пусть на отрезке $[a,b]$ числовой оси задана функция y, принимающая значения в банаховом пространстве Y с нормой $\|\cdot\|_Y$. Пусть $\tau = \{t_i\}_{i=0}^N$ — некоторое разбиение отрезка $[a,b]$. Составим сумму

$$\mathbf{V}_a^b[y;\tau] \equiv \sum_{i=1}^N \|y(t_i) - y(t_{i-1})\|_Y.$$

Определение 1.4.1. *Величина* $\mathbf{V}_a^b[y] \equiv \sup\limits_\tau \mathbf{V}_a^b[y;\tau]$ *называется* ***полной вариацией*** *функции y на отрезке $[a,b]$. Если эта величина конечна, то будем называть функцию y* ***функцией ограниченной вариации***. *Множество всех функций ограниченной вариации, принимающих значения в Y, будем обозначать* $\mathbf{BV}([a,b],Y)$.

Лемма 1.4.1. *Если функция y удовлетворяет на отрезке $[a,b]$ условию Липшица, то есть найдётся постоянная $L > 0$, такая, что для всех t', $t'' \in [a,b]$ выполнено неравенство $\|y(t'') - y(t')\|_Y \leqslant L|t' - t''|$, то функция y является функцией ограниченной вариации, причём*

$$\mathbf{V}_a^b[y] \leqslant L(b-a).$$

Доказательство. В самом деле, пусть $\tau = \{t_i\}_{i=0}^N$ — некоторое разбиение отрезка $[a,b]$. Тогда, в силу липшицевости функции y,

$$\mathbf{V}_a^b[y;\tau] \equiv \sum_{i=1}^N \|y(t_i) - y(t_{i-1})\|_Y \leqslant L \sum_{i=1}^N |t_i - t_{i-1}| = L(b-a).$$

Взяв в получившемся неравенстве точную верхнюю грань по всевозможным разбиениям τ, получим требуемое. ■

Лемма 1.4.2. *Если функция y сильно дифференцируема всюду на отрезке $[a,b]$, и производная y' ограничена на этом отрезке, то функция y — функция ограниченной вариации.*

Доказательство. 1) Прежде всего докажем нужное для доказательства вспомогательное неравенство. Выберем произвольно элемент $y^* \in Y^*$ и зафиксируем. Введём функцию $\Phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ равенством

$$\Phi(t) \equiv \langle y(t), y^* \rangle, \;\; t \in [a,b].$$

Выберем затем произвольно точки t', $t'' \in [a,b]$, $t' < t''$, и зафиксируем. Поскольку функция y всюду на отрезке $[a,b]$ сильно дифференцируема, то всюду на этом отрезке дифференцируема функция Φ. Как следствие, функция Φ дифференцируема на отрезке $[t',t'']$. Значит, в силу теоремы Лагранжа о среднем, найдётся число $\theta \in (0,1)$, такое, что

$$\Phi(t'') - \Phi(t') = \Phi'(t' + \theta(t'' - t'))(t'' - t'),$$

или, в силу определения функции Φ,

$$\langle y(t'') - y(t'), y^* \rangle = \langle y'(t' + \theta(t'' - t')), y^* \rangle (t'' - t'). \tag{1.4.1}$$

Здесь возможны два случая: $y(t') = y(t'')$ и $y(t') \neq y(t'')$.

Предположим, что $y(t') = y(t'')$. Тогда, очевидно, справедливо неравенство

$$\|y(t'') - y(t')\|_Y \leqslant \sup_{t \in [t',t'']} \|y'(t)\|_Y (t'' - t'). \tag{1.4.2}$$

Пусть теперь $y(t') \neq y(t'')$. Тогда, в силу следствия из теоремы Хана–Банаха, найдётся линейный непрерывный функционал $y^* \in Y^*$, такой, что $\|y^*\|_{Y^*} = 1$, $\langle y(t'') - y(t'), y^* \rangle = \|y(t'') - y(t')\|_Y$. Подставляя такой функционал y^* в (1.4.1), получаем, что

$$\|y(t'') - y(t')\|_Y = \langle y'(t' + \theta(t'' - t')), y^* \rangle (t'' - t') \leqslant$$
$$\leqslant \|y'(t' + \theta(t'' - t'))\|_Y \|y^*\|_{Y^*} (t'' - t') \leqslant \sup_{t \in [t',t'']} \|y'(t)\|_Y (t'' - t').$$

Иными словами, и в этом случае справедливо неравенство (1.4.2).

Таким образом, для всех t', $t'' \in [a,b]$, $t' < t''$, справедливо неравенство (1.4.2).

2) Докажем теперь конечность полной вариации функции y.В самом деле, пусть $\tau = \{t_i\}_{i=0}^N$ — некоторое разбиение отрезка $[a,b]$. Тогда, в силу доказанного неравенства (1.4.2),

$$\mathbf{V}_a^b[y;\tau] \equiv \sum_{i=1}^N \|y(t_i) - y(t_{i-1})\|_Y \leqslant \sum_{i=1}^N \sup_{t \in [t_{i-1},t_i]} \|y'(t)\|_Y |t_i - t_{i-1}| \leqslant$$
$$\leqslant [\sup_{t \in [a,b]} \|y'(t)\|_Y] \sum_{i=1}^N |t_i - t_{i-1}| = (b-a) \sup_{t \in [a,b]} \|y'(t)\|_Y,$$

то есть

$$\mathbf{V}_a^b[y;\tau] \leqslant (b-a) \sup_{t \in [a,b]} \|y'(t)\|_Y.$$

Взяв в получившемся неравенстве точную верхнюю грань по всевозможным разбиениям τ, получим требуемое утверждение. ■

Пусть X, Y, Z — банаховы пространства с нормами $\|\cdot\|_X$, $\|\cdot\|_Y$ и $\|\cdot\|_Z$ соответственно, причём для элементов $x \in X$ определено умножение справа на элементы $y \in Y$ со значениями в Z ($x \bullet y \in Z$). Пусть, далее, на отрезке $[a,b]$ заданы функции x и y, принимающие значения в пространствах X и Y соответственно.

Пусть $\tau = \{t_i\}_{i=0}^N$ — некоторое разбиение отрезка $[a,b]$, а $\theta_i \in [t_{i-1},t_i]$, $i = \overline{1,N}$, — промежуточные точки. Составим интегральную сумму

$$\sigma_\tau = \sigma_\tau(x;y;\theta_1,\ldots,\theta_N) = \sum_{i=1}^N x(\theta_i) \bullet [y(t_i) - y(t_{i-1})].$$

Определение 1.4.2. *Функция x называется* ***интегрируемой по Стильтьесу*** *на отрезке $[a,b]$ относительно функции y, если существует такой элемент $A \in Z$, что для любой последовательности разбиений отрезка $[a,b]$*

$$\tau_j = \{t_i^{(j)}\}_{i=0}^{i=i_{\tau_j}}, \ \ j = 1, 2, \ldots,$$

у которой $\lim\limits_{j\to\infty} |\tau_j| = 0$, и для любого выбора точек $\xi_i^{(j)} \in [t_{i-1}^{(j)}, t_i^{(j)}]$, $i = \overline{1, i_{\tau_j}}$, $j = 1, 2, \ldots$, существует предел последовательности интегральных сумм $\sigma_{\tau_j}(x; y; \xi_1^{(j)}, \ldots, \xi_{i_{\tau_j}}^{(j)})$ и он равен A:

$$\lim_{j\to\infty} \left\| \sum_{i=1}^{i_{\tau_j}} x(\theta_i) \bullet [y(t_i) - y(t_{i-1})] - A \right\|_X = 0. \tag{1.4.3}$$

При выполнении этих условий элемент A называется ***интегралом Стильтьеса*** *функции x на отрезке $[a,b]$ относительно функции y и обозначается $(C)\int\limits_a^b x(t) \bullet dy(t)$ или $\int\limits_a^b f(t) \bullet dy(t)$.*

Можно показать, что справедлива следующая

Теорема 1.4.1. *Если функция x сильно непрерывна на $[a,b]$, а функция y является функцией ограниченной вариации на $[a,b]$, то функция x интегрируема в смысле Стильтьеса на $[a,b]$ относительно функции y, причём*

$$\left\| \int_a^b x(t) \bullet dy(t) \right\|_Z \leqslant K |x|_{[a,b],X}^{(0)} \mathbf{V}_a^b[y],$$

где K — норма билинейной формы, задающей умножение.

1.4.2. Свойства интеграла

Приведём теперь некоторые свойства интеграла Стильтьеса.

Лемма 1.4.3. *Если $x_0 \in X$, то*

$$\int_a^b x_0 \bullet dy(t) = x_0 \bullet [y(b) - y(a)].$$

Лемма 1.4.4. *Если $x(t) = x_0\varphi(t)$, $t \in [a,b]$, где $x_0 \in X$, $\varphi \in C[a,b]$, то*

$$\int_a^b x_0\varphi(t) \bullet dy(t) = x_0 \bullet \int_a^b \varphi(t) \bullet dy(t).$$

Лемма 1.4.5. *Если $y(t) = y_0\psi(t)$, $t \in [a,b]$, где $y_0 \in Y$, $\varphi \in \mathbf{BV}[a,b]$, то*

$$\int_a^b x(t) \bullet d[y_0\psi(t)] = \left[\int_a^b x(t) \bullet d\psi(t)\right] \bullet y_0.$$

Лемма 1.4.6. *Если x, x_1, $x_2 \in C([a,b],X)$, а y, y_1, $y_2 \in \mathbf{BV}([a,b],Y)$, то*

$$\int_a^b [x_1(t) + x_2(t)] \bullet dy(t) = \int_a^b x_1(t) \bullet dy(t) + \int_a^b x_2(t) \bullet dy(t),$$

$$\int_a^b x(t) \bullet d[y_1(t) + y_2(t)] = \int_a^b x(t) \bullet dy_1(t) + \int_a^b x(t) \bullet dy_2(t).$$

Лемма 1.4.7. *Если x и y — непрерывные функции ограниченной вариации, то справедлива формула интегрирования по частям,*

$$\int_a^b x(t) \bullet dy(t) + \int_a^b dx(t) \bullet y(t) = x(t) \bullet y(t)|_a^b.$$

Лемма 1.4.8. *Если $c \in (a,b)$, то*

$$\int\limits_a^b x(t) \bullet dy(t) = \int\limits_a^c x(t) \bullet dy(t) + \int\limits_c^b x(t) \bullet dy(t).$$

Лемма 1.4.9. *Пусть функция x — непрерывна на $[a,b]$, функция y — функция ограниченной вариации на $[a,b]$. Пусть, кроме того, $t = \omega(p)$, $p \in [\alpha, \beta]$, — строго возрастающая, непрерывная на $[\alpha,\beta]$ функция, причём $\omega(\alpha) = a$, $\omega(\beta) = b$. Тогда функция $y(\omega(p))$, $p \in [\alpha,\beta]$, — функция ограниченной вариации на $[\alpha,\beta]$, и справедливо равенство*

$$\int\limits_a^b x(t) \bullet dy(t) = \int\limits_\alpha^\beta x(\omega(p)) \bullet dy(\omega(p)). \tag{1.4.4}$$

1.4.3. Представление линейного непрерывного функционала на пространстве непрерывных банаховозначных функций

В данном разделе мы докажем теорему о представлении линейного непрерывного функционала над банаховым пространством $C([a,b],X)$, где X — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_X$.

Теорема 1.4.2. *Пусть банахово пространство X — рефлексивно, и пусть $\mathcal{F} : C([a,b],X) \to \mathbb{R}$ — линейный непрерывный функционал. Тогда найдётся функция ограниченной вариации $g : [a,b] \to X^*$, такая, что*

$$\mathcal{F}[f] = \int\limits_a^b \langle x(t), dg(t) \rangle \ \ \forall\, f \in C([a,b],X), \tag{1.4.5}$$

причём

$$\|\mathcal{F}\|_{(C([a,b],X))^*} = \mathbf{V}_a^b[g]. \tag{1.4.6}$$

Доказательство. Поскольку пространство $C([a,b],X)$ является замкнутым подпространством пространства ограниченных функций, $BF([a,b],X)$, то, согласно теореме Хана–Банаха, функционал $\mathcal{F}$ можно с сохранением нормы продолжить до непрерывного функционала на $BF([a,b],X)$. Результат продолжения также обозначим $\mathcal{F}$.

Введём семейство функций $w_{\tau,x} : [a,b] \to X$, где $\tau \in [a,b]$, $x \in X$ — параметры, формулами

$$w_{a,x}(t) \equiv 0; \ \ w_{\tau,x}(t) \equiv \begin{cases} x, & \text{если } t \in [a,\tau], \\ 0, & \text{если } t \in (\tau, b], \end{cases} \qquad \text{при } \tau > a.$$

Нетрудно видеть, что функции $w_{\tau,x}$ удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{gathered} w_{\tau,x} \in BF([a,b],X), \ \ \|w_{\tau,x}\|_{BF([a,b],X)} \leqslant \|x\|_X \ \ \forall\, x \in X, \ \ \tau \in [a,b]; \\ w_{\tau,x_1+x_2} = w_{\tau,x_1} + w_{\tau,x_2}, \ \ w_{\tau,\lambda x} = \lambda w_{\tau,x} \ \ \forall\, x, \ x_1, \ x_2 \in X, \ \ \lambda \in \mathbb{R}; \\ w_{\tau_2,x}(t) - w_{\tau_1,x}(t) = \chi_{(\tau_1,\tau_2]}(t)x, \ \ \forall \tau_1, \ \tau_2 \in [a,b], \ \ \tau_1 < \tau_2 \ \ \forall\, x \in X. \end{gathered} \tag{1.4.7}$$

Далее, поскольку $\mathcal{F}$ — линейный непрерывный функционал, то при всех $\tau \in [a,b]$ и $x \in X$

$$|\mathcal{F}[w_{\tau,x}]| \leqslant \|\mathcal{F}\| \|w_{\tau,x}\|_{BF([a,b],X)} \leqslant \|\mathcal{F}\| \|x\|_X,$$

ввиду чего при всех $\tau \in [a,b]$ отображение

$$X \ni x \mapsto \mathcal{F}[w_{\tau,x}]$$

является линейным непрерывным функционалом над X. Значит найдётся элемент $g(\tau) \in X^*$, такой, что

$$\langle x, g(\tau) \rangle = \mathcal{F}[w_{\tau,x}] \ \ \forall\, x \in X, \ \ \tau \in [a,b]. \tag{1.4.8}$$

Таким образом, мы построили функцию $g : [a,b] \to X^*$. Докажем, что она является функцией ограниченной вариации.

В самом деле, пусть $\xi = \{t_i\}_{i=0}^N$ — некоторое разбиение отрезка $[a,b]$. Рассмотрим величину

$$\mathbf{V}_a^b[g;\xi] \equiv \sum_{i=1}^N \|g(t_i) - g(t_{i-1})\|_{X^*}.$$

Для каждого $i = \overline{1,N}$ возможны два случая: либо $g(t_i) - g(t_{i-1}) \neq 0$, либо $g(t_i) - g(t_{i-1}) = 0$.

Пусть $g(t_i) - g(t_{i-1}) \neq 0$. Тогда, по следствию из теоремы Хана–Банаха, найдётся линейный непрерывный функционал $y_i \in X^{**}$, такой, что

$$\|y_i\|_{X^{**}} = 1, \ \ \langle y_i, g(t_i) - g(t_{i-1})\rangle = \|g(t_i) - g(t_{i-1})\|_{X^*}.$$

Поскольку X — рефлексивно, то последние соотношения означают, что найдётся элемент $x_i \in X$, такой, что

$$\|x_i\|_X = 1, \ \ \langle x_i, g(t_i) - g(t_{i-1})\rangle = \|g(t_i) - g(t_{i-1})\|_{X^*}.$$

Введём элементы $\alpha_i \in X$, $i = \overline{1,N}$, формулами

$$\alpha_i = \begin{cases} x_i, \ \text{при } g(t_i) - g(t_{i-1}) \neq 0; \\ 0, \ \text{при } g(t_i) - g(t_{i-1}) = 0. \end{cases}$$

Тогда выводим, что

$$\|\alpha_i\|_X \leqslant 1, \ \ \langle \alpha_i, g(t_i) - g(t_{i-1})\rangle = \|g(t_i) - g(t_{i-1})\|_{X^*}, \ \ i = \overline{1,N}.$$

Как следствие,

$$\mathbf{V}_a^b[g;\xi] \equiv \sum_{i=1}^N \|g(t_i) - g(t_{i-1})\|_{X^*} = \sum_{i=1}^N \langle \alpha_i, g(t_i) - g(t_{i-1})\rangle = \sum_{i=1}^N [\langle \alpha_i, g(t_i)\rangle - \langle \alpha_i, g(t_{i-1})\rangle] =$$
$$= \sum_{i=1}^N [\mathcal{F}[w_{t_i,\alpha_i}] - \mathcal{F}[w_{t_{i-1},\alpha_i}]] = \sum_{i=1}^N \mathcal{F}[w_{t_i,\alpha_i} - w_{t_{i-1},\alpha_i}] = \sum_{i=1}^N \mathcal{F}[\chi_{(t_{i-1},t_i]}\alpha_i] = \mathcal{F}\left[\sum_{i=1}^N \chi_{(t_{i-1},t_i]}\alpha_i\right] \leqslant$$
$$\leqslant \|\mathcal{F}\| \sup_{t\in[a,b]} \left\|\sum_{i=1}^N \chi_{(t_{i-1},t_i]}(t)\alpha_i\right\|_X \leqslant \|\mathcal{F}\| \sup_{t\in[a,b]} \sum_{i=1}^N \chi_{(t_{i-1},t_i]}(t)\|\alpha_i\|_X \leqslant \|\mathcal{F}\|.$$

Итак,

$$\mathbf{V}_a^b[g;\xi] \leqslant \|\mathcal{F}\|.$$

Поскольку же разбиение отрезка $[a,b]$ было выбрано произвольно, то

$$\mathbf{V}_a^b[g] \leqslant \|\mathcal{F}\|. \tag{1.4.9}$$

Итак, мы построили по функционалу $\mathcal{F}$ функцию ограниченной вариации $g : [a,b] \to X^*$. Покажем теперь, что с помощью этой функции функционал $\mathcal{F}$ можно записать в виде (1.4.5).

Пусть $f : [a,b] \to X$ — произвольная непрерывная функция. Поскольку она непрерывна на отрезке, то она и равномерно непрерывна на этом отрезке. Выберем теперь произвольно число $\varepsilon > 0$ и зафиксируем. Подберём по этому $\varepsilon > 0$ число $\delta = \delta(\varepsilon)$ так, чтобы при всех t', $t'' \in [a,b]$, $|t' - t''| \leqslant \delta$ выполнялось неравенство $\|f(t') - f(t'')\|_X < \varepsilon$. Выберем теперь разбиение ξ так, чтобы его мелкость была меньше δ, и рассмотрим кусочно–постоянную функцию f_ε,

$$f_\varepsilon(t) = \begin{cases} f(t_i), \ \text{при } t_{i-1} < t \leqslant t_i, \ i = \overline{1,N}; \\ f(t_1), \ \text{при } t = a. \end{cases}$$

Эту функцию можно записать в виде

$$f_\varepsilon(t) = \sum_{i=1}^N [w_{t_i,f(t_i)}(t) - w_{t_{i-1},f(t_i)}(t)].$$

Из определения функции f_ε следует, что при всех $t \in [a,b]$

$$\|f(t) - f_\varepsilon(t)\|_X < \varepsilon,$$

или, иначе говоря,

$$\|f - f_\varepsilon\|_{BF([a,b],X)} \leqslant \varepsilon.$$

Найдём значение функционала $\mathcal{F}$ на элементе f_ε. Ввиду линейности этого функционала и определения функций $w_{\tau,x}$ оно равно

$$\mathcal{F}[f_\varepsilon] = \mathcal{F}\left[\sum_{i=1}^{N}[w_{t_i,f(t_i)} - w_{t_{i-1},f(t_i)}]\right] = \sum_{i=1}^{N}[\mathcal{F}[w_{t_i,f(t_i)}] - \mathcal{F}[w_{t_{i-1},f(t_i)}]] =$$
$$= \sum_{i=1}^{N}[\langle f(t_i), g(t_i)\rangle - \langle f(t_i), g(t_{i-1})\rangle] = \sum_{i=1}^{N}\langle f(t_i), g(t_i) - g(t_{i-1})\rangle,$$

т.е. представляет собой интегральную сумму для интеграла

$$\int_a^b \langle x(t), dg(t)\rangle.$$

Поэтому при достаточно мелком разбиении отрезка $[a,b]$

$$\left|\mathcal{F}[f_\varepsilon] - \int_a^b \langle x(t), dg(t)\rangle\right| < \varepsilon.$$

В то же время

$$|\mathcal{F}[f] - \mathcal{F}[f_\varepsilon]| \leqslant \|\mathcal{F}\|\|f - f_\varepsilon\|_{BF([a,b],X)} \leqslant \|\mathcal{F}\|\varepsilon.$$

Следовательно,

$$\left|\mathcal{F}[f] - \int_a^b \langle x(t), dg(t)\rangle\right| < \varepsilon[1 + \|\mathcal{F}\|].$$

Отсюда в силу произвольности ε получаем равенство (1.4.5).

Соотношение же (1.4.6) следует из оценки (1.4.9) и свойств интеграла Стильтьеса.

Теорема полностью доказана. ■

Замечание 1.4.1. *Из свойств интеграла Стильтьеса следует, что формула* (1.4.5) *для любой функции $g \in \mathbf{BV}([a,b], X^*)$ задаёт линейный непрерывный функционал над $C([a,b], X)$. При этом несложно показать, что если функции g_1 и g_2 задают один и тот же функционал, то $g_1 - g_2 \equiv const$ во всех точках непрерывности функции $g_1 - g_2$.*

Таким образом, каждому линейному непрерывному функционалу над $C([a,b], X)$ соответствует целый класс функций ограниченной вариации. В каждом таком классе можно выбрать одну и только одну функцию, непрерывную справа в каждой точке полуинтервала $(a,b]$ и равную нулю в точке a. Множество всех таких функций ограниченной вариации обозначим через $\mathbf{BV}^0([0,T], X)$. Можно показать, что это множество, наделённое нормой $\|\varphi\|_{\mathbf{BV}^0,X} \equiv \mathbf{V}_0^T[\varphi]$, является банаховым пространством. Заметим, что функция g, построенная при доказательстве теоремы, является именно функцией из $\mathbf{BV}^0([0,T], X)$.

С учётом вышеприведённого замечания теорему 1.4.2 можно переписать в следующем виде.

Теорема 1.4.3. *Существует изометричный изоморфизм пространств $(C([a,b], X))^*$ и $\mathbf{BV}^0([0,T], X)$, устанавливаемый равенством*

$$\mathcal{F}[f] = \int_a^b \langle x(t), dg(t)\rangle \;\; \forall\, f \in C([a,b], X).$$

1.4.4. Аппроксимация банаховозначных мер Радона, заданных на отрезке числовой оси

Лемма 1.4.10. *Пусть X — рефлексивное банахово пространство, $[a,b]$ — отрезок числовой оси. Для любой меры $\mu \in \mathbf{M}([a,b],X^*)$ найдётся последовательность функций $\omega^k \in C([a,b],X^*)$, $k=1,2,\dots$, такая, что*

$$\lim_{k\to\infty}\int\limits_{[a,b]}\langle\zeta(t),\mu^k(dt)\rangle = \int\limits_{[a,b]}\langle\zeta(t),\mu(dt)\rangle,\ \ \forall\,\zeta\in C([a,\,b],X), \tag{1.4.10}$$

где $\mu^k(E)\equiv\int\limits_E\omega^k(t)dt$, $E\subseteq[a,\,b]$ — борелевское подмножество отрезка $[a,\,b]$, $k=1,2,\dots$.

Доказательство. Разобьём доказательство на несколько этапов.

1) Покажем вначале, что для любой меры $\mu\in\mathbf{M}([a,\,b],X^*)$ найдётся последовательность мер

$$\bar\mu^m\equiv\sum_{i=1}^{i_m}\lambda_{i,m}\boldsymbol{\delta}_{t_{i,m}},\ \ m=1,2,\dots,$$

где $t_{i,m}\in[0,\,T]$, $i=\overline{1,\,i_m}$, $m=1,2,\dots$, такая, что

$$\lim_{m\to\infty}\int\limits_{[a,b]}\langle\zeta(t),\bar\mu^m(dt)\rangle=\int\limits_{[a,b]}\langle\zeta(t),\mu(dt)\rangle,\ \ \forall\,\zeta\in C([a,\,b],X). \tag{1.4.11}$$

В самом деле, $(C([a,\,b],X))^*$ изометрично изоморфно $\mathbf{M}([a,\,b],X^*)$. С другой стороны, $(C([a,\,b],X))^*$ изометрично изоморфно $\mathbf{BV}^0([a,\,b],X^*)$. Следовательно, существует изоморфизм

$$\mathcal{F}\colon\mathbf{M}([a,\,b],X^*)\to\mathbf{BV}^0([a,\,b],X^*),$$

такой, что

$$\|\mathcal{F}[\mu]\|_{\mathbf{BV}^0}=\|\mu\|,\ \ \forall\,\mu\in\mathbf{M}([a,\,b],X^*). \tag{1.4.12}$$

Пусть функционал $\mathcal{A}:C([a,\,b],X)\to\mathbb{R}$ задаётся формулой

$$\mathcal{A}[\zeta]=\int\limits_{[a,\,b]}\langle\zeta(t),\mu(dt)\rangle,\ \ \forall\,\zeta\in C([a,\,b],X). \tag{1.4.13}$$

Тогда, очевидно, $\mathcal{A}\in(C([a,\,b],X))^*$, и, стало быть,

$$\mathcal{A}[\zeta]=\int\limits_{[a,b]}\langle\zeta(t),d\mathcal{F}[\mu](t)\rangle,\ \ \forall\,\zeta\in C([a,\,b],X), \tag{1.4.14}$$

где интеграл понимается в смысле интеграла Стильтьеса по отрезку $[a,\,b]$. Пусть $\bar t_{i,m}=\frac{Ti}{m}$, $i=\overline{0,\,m}$, $\bar t_{i,m+1}=t_{i,m}$, $\lambda_{i,m}\equiv\mathcal{F}[\mu](\bar t_{i,m})-\mathcal{F}[\mu](\bar t_{i-1,m})$, $i=\overline{1,\,m}$, $\lambda_{i,m+1}=\mathcal{F}[\mu](\bar t_{i,m})$, $i_m=m+1$, $t_{i,m}=\bar t_{i-1,m}$, $i=\overline{1,\,i_m}$. Тогда, в силу определения интеграла Стильтьеса по отрезку $[a,\,b]$,

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^{i_m}\langle\zeta(t_{i,m}),\lambda_{i,m}\rangle=\int\limits_{[a,b]}\langle\zeta(t),d\mathcal{F}[\mu](t)\rangle,\ \ \forall\,\zeta\in C([a,\,b],X).$$

Полагая $\bar\mu^m\equiv\sum\limits_{i=1}^{i_m}\lambda_{i,m}\boldsymbol{\delta}_{t_{i,m}}$, $m=1,2,\dots$, перепишем последнее равенство в виде

$$\lim_{m\to\infty}\int\limits_{[a,b]}\langle\zeta(t),\bar\mu^m(dt)\rangle=\int\limits_{[a,b]}\langle\zeta(t),\mu(dt)\rangle,\ \ \forall\,\zeta\in C([a,\,b],X),$$

что в совокупности с (1.4.12)–(1.4.14) и даёт (1.4.11).

2) Докажем существование непрерывных функций, упомянутых в формулировке леммы. Пусть $\varepsilon_s > 0$, $s = 1, 2, \ldots$, $\varepsilon_s \to 0$, $s \to \infty$, — некоторая последовательность чисел, и пусть

$$\omega^s_{i,m}(t) \equiv \frac{\chi_{(t_{i,m}-\varepsilon_s, t_{i,m}+\varepsilon_s)\cap(a,\, b)}(t)}{\mathrm{meas}\{(t_{i,m}-\varepsilon_s, t_{i,m}+\varepsilon_s)\cap(a,\, b)\}},\;\; i = \overline{1,\, i_m},$$

$$\bar{\omega}^s_m(t) \equiv \sum_{i=1}^{i_m} \lambda_{i,m}\omega^s_{i,m}(t),\;\; m,\, s = 1, 2, \ldots,\;\; t \in [a,\, a],$$

$$\bar{\mu}^m_s(E) \equiv \int\limits_E \bar{\omega}^s_m(t)dt,\;\; E \subseteq [a,\, b],\;\; m,\, s = 1, 2, \ldots.$$

Тогда, очевидно,

$$\lim_{s\to\infty} \int\limits_{[a,a]} \langle \zeta(t), \bar{\mu}^m_s(dt)\rangle = \int\limits_{[a,b]} \langle \zeta(t), \bar{\mu}^m(dt)\rangle,\;\; \forall\, \zeta \in C([a,\, b], X). \tag{1.4.15}$$

Пусть теперь $h_p > 0$, $p = 1, 2, \ldots$, $h_p \to 0$, $p \to \infty$, — некоторая последовательность чисел, и пусть $\bar{\mu}^m_{s,p}(E) \equiv \int\limits_E \bar{\omega}^{s,p}_m(t)dt$, $E \subseteq [a,\, b]$, $m,\, s,\, p = 1, 2, \ldots$, где $\bar{\omega}^{s,p}_m$ — усреднение с параметром $h_p > 0$ с ядром, независящим от $m,\, s,\, p = 1, 2, \ldots$, функции $\bar{\omega}^s_m$. Пользуясь свойствами средних функций и теоремой Радона–Никодима, заключаем, что

$$\lim_{p\to\infty} \int\limits_{[a,b]} \langle \zeta(t), \bar{\mu}^m_{s,p}(dt)\rangle = \int\limits_{[a,b]} \langle \zeta(t), \bar{\mu}^m_s(dt)\rangle,\;\; \forall\, \zeta \in C([a,\, b], X). \tag{1.4.16}$$

Из (1.4.11) следует, что

$$\lim_{m\to\infty} |\bar{\mu}^m - \mu|_w = 0, \tag{1.4.17}$$

где $|\cdot|_w$ — слабая норма [14] в $\mathbf{M}([a,\, b], X^*)$.

Выберем произвольно $\alpha > 0$ и зафиксируем.

Согласно (1.4.17), найдётся номер $m_0(\alpha) \geqslant 1$, такой, что

$$|\bar{\mu}^{m_0(\alpha)} - \mu|_w \leqslant \frac{\alpha}{3}.$$

Далее, согласно (1.4.15),

$$\lim_{s\to\infty} |\bar{\mu}^{m_0(\alpha)}_s - \bar{\mu}^{m_0(\alpha)}|_w = 0.$$

Поэтому найдётся номер $s_0(\alpha) \geqslant 1$, такой, что

$$|\bar{\mu}^{m_0(\alpha)}_{s_0(\alpha)} - \bar{\mu}^{m_0(\alpha)}|_w \leqslant \frac{\alpha}{3}.$$

Наконец, согласно (1.4.16),

$$\lim_{p\to\infty} |\bar{\mu}^{m_0(\alpha)}_{s_0(\alpha),p} - \bar{\mu}^{m_0(\alpha)}_{s_0(\alpha)}|_w = 0,$$

в силу чего найдётся номер $p_0(\alpha) \geqslant 1$, такой, что

$$|\bar{\mu}^{m_0(\alpha)}_{s_0(\alpha),p_0(\alpha)} - \bar{\mu}^{m_0(\alpha)}_{s_0(\alpha)}|_w \leqslant \frac{\alpha}{3}.$$

Таким образом,

$$|\bar{\mu}^{m_0(\alpha)}_{s_0(\alpha),p_0(\alpha)} - \mu|_w \leqslant |\bar{\mu}^{m_0(\alpha)}_{s_0(\alpha),p_0(\alpha)} - \bar{\mu}^{m_0(\alpha)}_{s_0(\alpha)}|_w + |\bar{\mu}^{m_0(\alpha)}_{s_0(\alpha)} - \bar{\mu}^{m_0(\alpha)}|_w + |\bar{\mu}^{m_0(\alpha)} - \mu|_w \leqslant \frac{\alpha}{3} + \frac{\alpha}{3} + \frac{\alpha}{3} = \alpha,$$

то есть

$$|\bar{\mu}^{m_0(\alpha)}_{s_0(\alpha),p_0(\alpha)} - \mu|_w \leqslant \alpha. \tag{1.4.18}$$

Пусть $\alpha_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots$, $\alpha_k \to 0$, $k \to \infty$, — некоторая последовательность. Тогда из (1.4.18) следует, что

$$\bar{\mu}^{m_0(\alpha_k)}_{s_0(\alpha_k),p_0(\alpha_k)} \to \mu,\;\; k \to \infty,\;\; *\text{–слабо}.$$

Следовательно, в качестве искомой последовательности ω^k, $k = 1, 2, \ldots$, можно взять последовательность $\omega^k \equiv \bar{\omega}^{s_0(\alpha_k),p_0(\alpha_k)}_{m_0(\alpha_k)}$, $k = 1, 2, \ldots$. Лемма доказана. ■

1.5. Функциональные последовательности и ряды

Пусть X — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_X$, $\mathcal{P}$ — некоторое множество.

Определение 1.5.1. *Говорят, что последовательность функций $f_j\colon \mathcal{P}\to X$, $j=1,2,\dots$, равномерно по $p\in\mathcal{P}$ сходится в норме пространства X к функции $f\colon\mathcal{P}\to X$ при $j\to\infty$ и пишем $f_j \underset{p\in\mathcal{P}}{\overset{X}{\rightrightarrows}} f$, $j\to\infty$, если*

$$\forall\,\varepsilon>0\ \exists\, j_0=j_0(\varepsilon)\geqslant 1\ \forall\, j\geqslant j_0(\varepsilon)\ \ \forall\, p\in\mathcal{P}:\|f_j(p)-f(p)\|_X\leqslant\varepsilon.$$

Теорема 1.5.1. *(Критерий равномерной сходимости) Для того, чтобы последовательность функций $f_j\colon\mathcal{P}\to X$, $j=1,2,\dots$, равномерно по $p\in\mathcal{P}$ сходилась в норме пространства X к некоторой функции $f\colon\mathcal{P}\to X$ при $j\to\infty$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\forall\,\varepsilon>0\ \exists\, j_0=j_0(\varepsilon)\geqslant 1\ \forall\, j\geqslant j_0(\varepsilon)\ \forall\, k=1,2,\dots\ \forall\, p\in\mathcal{P}:\|f_{j+k}(p)-f_j(p)\|_X\leqslant\varepsilon. \tag{1.5.1}$$

Доказательство. 1) Необходимость. Пусть $f_j \underset{p\in\mathcal{P}}{\overset{X}{\rightrightarrows}} f$, $j\to\infty$, для некоторой функции $f\colon\mathcal{P}\to X$. Тогда для любого $\varepsilon>0$ найдётся номер $j_0=j_0(\varepsilon)\geqslant 1$, такой, что

$$\sup_{p\in\mathcal{P}}\|f_j(p)-f(p)\|_X\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\ \ \forall\, j\geqslant j_0(\varepsilon).$$

Поэтому

$$\sup_{p\in\mathcal{P}}\|f_{j+k}(p)-f(p)\|_X\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\ \ \forall\, j\geqslant j_0(\varepsilon)\ \ \forall\, k=1,2,\dots$$

Как следствие,

$$\sup_{p\in\mathcal{P}}\|f_{j+k}(p)-f_j(p)\|_X\leqslant\sup_{p\in\mathcal{P}}\|f_{j+k}(p)-f(p)\|_X+\sup_{p\in\mathcal{P}}\|f(p)-f_j(p)\|_X\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$
$$\forall\, j\geqslant j_0(\varepsilon)\ \ \forall\, k=1,2,\dots$$

Таким образом, необходимость доказана.

2) Достаточность. Пусть выполнено условие (1.5.1). Тогда для каждого фиксированного $p\in\mathcal{P}$ получаем последовательность $f_j(p)\in X$, $j=1,2,\dots$, фундаментальную в X. Поскольку X — полно, то при каждом фиксированном $p\in\mathcal{P}$ найдётся элемент $f(p)\in X$, такой, что

$$\lim_{j\to\infty}\|f_j(p)-f(p)\|_X=0.$$

Устремляя теперь в (1.5.1) k к бесконечности, выводим, что

$$\forall\,\varepsilon>0\ \exists\, j_0=j_0(\varepsilon)\geqslant 1\ \forall\, j\geqslant j_0(\varepsilon)\ \ \forall\, p\in\mathcal{P}:\|f_j(p)-f(p)\|_X\leqslant\varepsilon.$$

А это и означает, что $f_j \underset{p\in\mathcal{P}}{\overset{X}{\rightrightarrows}} f$, $j\to\infty$. Теорема доказана. ■

Определение 1.5.2. *Пусть дана последовательность функций $f_j\colon\mathcal{P}\to X$, $j=1,2,\dots$ Говорят, что функциональный ряд*

$$\sum_{j=1}^{\infty}f_j(p)$$

сходится к некоторой функции $F(p)$ равномерно на $\mathcal{P}$, если

$$\lim_{k\to\infty}\sup_{p\in\mathcal{P}}\left\|\sum_{j=1}^{k}f_j(p)-F(p)\right\|_X=0.$$

Пусть $\mathcal{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}}$ и соответствующей нормой $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$. Пусть, кроме того, e_j, $j=1,2,\dots$, — ортогональный базис в $\mathcal{H}$.

Теорема 1.5.2. *Пусть даны функции $f_j\colon\mathcal{P}\to\mathbb{R}$, $j=1,2,\dots$ Тогда если найдётся числовая последовательность α_j, $j=1,2,\dots$, такая, что*

$$\sup_{p\in\mathcal{P}}|f_j(p)|\leqslant\alpha_j,\ \ j=1,2,\dots,$$

и сходится числовой ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^2 \|e_j\|_{\mathcal{H}}^2,$$

то функциональный ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} f_j(p) e_j$$

сходится равномерно.

Доказательство. Для доказательства воспользуемся теоремой 1.5.1. Прежде всего заметим, что для всех $i,\ k = 1, 2, \ldots$ и всех $p \in \mathcal{P}$ имеет место неравенство

$$\left\| \sum_{j=1}^{k+i} f_j(p) e_j - \sum_{j=1}^{i} f_j(p) e_j \right\|^2 = \left\| \sum_{j=i+1}^{k+i} f_j(p) e_j \right\|^2 = \sum_{j=i+1}^{k+i} |f_j(p)|^2 \|e_j\|_{\mathcal{H}}^2 \leqslant \sum_{j=i+1}^{k+i} \alpha_j^2 \|e_j\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Таким образом,

$$\left\| \sum_{j=1}^{k+i} f_j(p) e_j - \sum_{j=1}^{i} f_j(p) e_j \right\|^2 \leqslant \sum_{j=i+1}^{k+i} \alpha_j^2 \|e_j\|_{\mathcal{H}}^2$$

для всех $i,\ k = 1, 2, \ldots$ и всех $p \in \mathcal{P}$.

Поскольку числовой ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^2 \|e_j\|_{\mathcal{H}}^2,$$

сходится, то для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер $i_0 = i_0(\varepsilon) \geqslant 1$, такой, что для всех $i \geqslant i_0(\varepsilon)$ и всех $k \geqslant 1$

$$\sum_{j=i+1}^{k+i} \alpha_j^2 \|e_j\|_{\mathcal{H}}^2 \leqslant \varepsilon^2.$$

Поэтому

$$\sup_{p \in \mathcal{P}} \left\| \sum_{j=1}^{k+i} f_j(p) e_j - \sum_{j=1}^{i} f_j(p) e_j \right\| \leqslant \sqrt{\sum_{j=i+1}^{k+i} \alpha_j^2 \|e_j\|_{\mathcal{H}}^2} \leqslant \varepsilon$$

при всех $i \geqslant i_0(\varepsilon)$ и всех $k \geqslant 1$. Согласно теореме 1.5.1 это означает, что функциональная последовательность

$$\mathcal{P} \ni p \mapsto \sum_{j=1}^{k} f_j(p) e_j,\ \ k = 1, 2, \ldots,$$

равномерно по $p \in \mathcal{P}$ сходится в норме пространства $\mathcal{H}$ к некоторой функции $F\colon \mathcal{P} \to \mathcal{H}$ при $k \to \infty$, что, в свой черёд, означает равномерную сходимость функционального ряда

$$\sum_{j=1}^{\infty} f_j(p) e_j.$$

Теорема доказана. ■

Пусть теперь $\mathcal{P}$ — компактное топологическое пространство.

Теорема 1.5.3. *Пусть последовательность функций $f_j \in C(\mathcal{P}, X)$, $j = 1, 2, \ldots$, равномерно по $p \in \mathcal{P}$ сходится в норме пространства X к некоторой функции $f\colon \mathcal{P} \to X$ при $j \to \infty$. Тогда $f \in C(\mathcal{P}, X)$.*

Доказательство. Выберем произвольно $\varepsilon > 0$ и зафиксируем. В силу того, что $f_j \underset{p \in \mathcal{P}}{\overset{X}{\rightrightarrows}} f$, $j \to \infty$, можно выбрать номер $j_0 = j_0(\varepsilon) \geqslant 1$ так, чтобы

$$\sup_{p \in \mathcal{P}} \|f_j(p) - f(p)\|_X \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$$

при всех $j \geqslant j_0(\varepsilon)$, и, в частности,

$$\sup_{p\in\mathcal{P}} \|f_{j_0(\varepsilon)}(p) - f(p)\|_X \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

Выберем теперь $p_0 \in \mathcal{P}$ и зафиксируем. Поскольку $f_{j_0(\varepsilon)} \in C(\mathcal{P}, X)$, то по заданному $\varepsilon > 0$ можно так подобрать окрестность $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\varepsilon)$ точки p_0, чтобы для всех $p \in \mathcal{V}(\varepsilon)$

$$\|f_{j_0(\varepsilon)}(p) - f_{j_0(\varepsilon)}(p_0)\|_X \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

Поэтому

$$\|f(p) - f(p_0)\|_X \leqslant \|f(p) - f_{j_0(\varepsilon)}(p)\|_X + \|f_{j_0(\varepsilon)}(p) - f_{j_0(\varepsilon)}(p_0)\|_X + \|f_{j_0(\varepsilon)}(p_0) - f(p_0)\|_X \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

для всех $p \in \mathcal{V}(\varepsilon)$. Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ найдётся окрестность $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\varepsilon)$ точки p_0, такая, что при всех $p \in \mathcal{V}(\varepsilon)$

$$\|f(p) - f(p_0)\|_X \leqslant \varepsilon.$$

В силу произвольности $p_0 \in \mathcal{P}$ это означает, что $f \in C(\mathcal{P}, X)$. ■

Следствие 1.5.1. *Пусть дана последовательность функций $f_j \in C(\mathcal{P}, X)$, $j = 1, 2, \ldots$ Если функциональный ряд*

$$\sum_{j=1}^{\infty} f_j(p)$$

сходится равномерно на $\mathcal{P}$, то сумма ряда является элементом $f \in C(\mathcal{P}, X)$.

Теорема 1.5.4. *Пусть последовательность функций $f_j \in C^1([0,T], X)$, $j = 1, 2, \ldots$, при каждом $t \in [0,T]$ сходится в норме X к функции $f\colon [0,T] \to X$, а последовательность производных f'_j, $j = 1, 2, \ldots$, равномерно по $t \in [0,T]$ сходится в норме пространства X к некоторой функции $g\colon [0,T] \to X$ при $j \to \infty$. Тогда $f \in C^1([0,T], X)$ и $f' = g$. Иными словами,*

$$\frac{d}{dt}\left[\lim_{j\to\infty} f_j(t)\right] = \lim_{j\to\infty} \frac{df_j(t)}{dt} \ \ \forall\, t \in [0,T].$$

Доказательство. В силу теоремы 1.5.3 имеет место включение $g \in C([0,T], X)$. Далее, поскольку $f_j \in C^1([0,T], X)$, $j = 1, 2, \ldots$, то

$$f_j(t) - f_j(0) - \int\limits_0^t f'_j(\tau)d\tau = 0 \ \ \forall\, t \in [0,T]. \tag{1.5.2}$$

Выберем произвольно $t \in [0,T]$ и зафиксируем. Тогда, в силу условий теоремы,

$$\left\| \left[f_j(t) - f_j(0) - \int\limits_0^t f'_j(\tau)d\tau\right] - \left[f(t) - f(0) - \int\limits_0^t g'(\tau)d\tau\right] \right\|_X \leqslant \|f_j(t) - f(t)\|_X + \|f_j(0) - f(0)\|_X +$$
$$+ \left\| \int\limits_0^t [f'_j(\tau) - g(\tau)]d\tau \right\|_X \leqslant \|f_j(t) - f(t)\|_X + \|f_j(0) - f(0)\|_X + \int\limits_0^t \|f'_j(\tau) - g(\tau)\|_X d\tau \leqslant$$
$$\leqslant \|f_j(t) - f(t)\|_X + \|f_j(0) - f(0)\|_X + t \max_{\tau\in[0,T]} \|f'_j(\tau) - g(\tau)\|_X \to 0, \ \ j \to \infty.$$

Переходя теперь с учётом данного соотношения к пределу при $j \to \infty$ в равенстве (1.5.2), получим, что

$$f(t) - f(0) - \int\limits_0^t g(\tau)d\tau = 0 \ \ \forall\, t \in [0,T].$$

В силу свойств интеграла Римана и непрерывности функции g в норме X это означает, что $f \in C^1([0,T], X)$ и $f' = g$. Теорема доказана. ■

Следствием данной теоремы является

Теорема 1.5.5. *Пусть дана последовательность функций* $f_j \in C(\Gamma, X)$, $j = 1, 2, \ldots$, *таких, что* $f_{jt} \in C(\Gamma, X)$, $j = 1, 2, \ldots$ *Пусть, кроме того, последовательность* f_j, $j = 1, 2, \ldots$, *сходится при каждом* $(t, \xi) \in \Gamma$ *в норме* X *к функции* $f \colon \Gamma \to X$, *и при каждом фиксированном* $\xi \in [0, T]$ *последовательность* $f_{jt}(\cdot, \xi)$, $j = 1, 2, \ldots$, *равномерно по* $t \in [0, T]$ *сходится в норме* X *к функции* $g(\cdot, \xi)$. *Тогда при каждом фиксированном* $\xi \in [0, T]$ *функция* $f(\cdot, \xi)$ *является элементом* $C^1([0, T], X)$ *и* $f_t = g$.

Доказательство. Выберем произвольно $\xi \in [0, T]$ и зафиксируем. Положим $\Phi_{j,\xi}(t) \equiv f_j(t, \xi)$, $\Psi_{j,\xi}(t) \equiv f_{jt}(t, \xi)$, $\Phi_{0,\xi}(t) \equiv f(t, \xi)$, $\Psi_{0,\xi}(t) \equiv g(t, \xi)$, $j = 1, 2, \ldots$, $t \in [0, T]$. Тогда получим, что при каждом $t \in [0, T]$ последовательность $\Phi_{j,\xi}$, $j = 1, 2, \ldots$, $t \in [0, T]$, сходится в норме X к $\Phi_{0,\xi}$, а последовательность $\Psi_{j,\xi}$, $j = 1, 2, \ldots$, равномерно по $t \in [0, T]$ сходится в норме X к $\Psi_{0,\xi}$. Таким образом, для последовательности $\Phi_{j,\xi}(t) \equiv f_j(t, \xi)$, $j = 1, 2, \ldots$, $t \in [0, T]$, выполнены условия теоремы 1.5.4, откуда и следуют утверждения доказываемой теоремы. Теорема доказана. ■

Следствие 1.5.2. *Пусть дана последовательность функций* $f_j \in C^1([0, T], X)$, $j = 1, 2, \ldots$, *и пусть функциональный ряд*

$$\sum_{j=1}^{\infty} f_j(t)$$

сходится в норме X *при каждом фиксированном* $t \in [0, T]$ *к функции* $F \colon [0, T] \to X$, *а функциональный ряд*

$$\sum_{j=1}^{\infty} f_j'(t)$$

равномерно по $t \in [0, T]$ *сходится в норме* X *к функции* $G \colon [0, T] \to X$. *Тогда* $F \in C^1([0, T], X)$ *и* $F' = G$. *Иными словами,*

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{j=1}^{\infty} f_j(t)\right] = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{df_j(t)}{dt} \ \ \forall\, t \in [0, T].$$

Следствие 1.5.3. *Пусть дана последовательность функций* $f_j \in C(\Gamma, X)$, $j = 1, 2, \ldots$, *таких, что* $f_{jt} \in C(\Gamma, X)$, $j = 1, 2, \ldots$ *Пусть, кроме того, функциональный ряд*

$$\sum_{j=1}^{\infty} f_j(t, \xi)$$

сходится в норме X *при каждом фиксированном* $(t, \xi) \in \Gamma$ *к функции* $F \colon \Gamma \to X$, *и при каждом фиксированном* $\xi \in [0, T]$ *ряд*

$$\sum_{j=1}^{\infty} f_{jt}(t, \xi)$$

равномерно по $t \in [0, T]$ *сходится в норме* X *к функции* $G(\cdot, \xi)$. *Тогда при каждом фиксированном* $\xi \in [0, T]$ *функция* $F(\cdot, \xi)$ *является элементом* $C^1([0, T], X)$ *и* $F_t = G$.

Лемма 1.5.1. *[31] (Признак Дини равномерной сходимости) Пусть* $G \subset \mathbb{R}^m$ — *компакт, а функции* $f_k \colon G \to \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \ldots$, *и функция* $f \colon G \to \mathbb{R}$ *непрерывны на* G, *причём* $f_k(x) \to f(x)$, $k \to \infty$, *при всех* $x \in G$. *Тогда если либо*

$$f_k(x) \geqslant f_{k+1}(x) \ \ \forall\, k = 1, 2, \ldots, \ \ x \in G,$$

либо

$$f_{k+1}(x) \geqslant f_k(x) \ \ \forall\, k = 1, 2, \ldots, \ \ x \in G,$$

то

$$\lim_{k \to \infty} \max_{x \in G} |f_k(x) - f(x)| = 0.$$

Лемма 1.5.2. *Пусть* H — *сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением* $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ *и соответствующей нормой* $\| \cdot \|_H$. *Пусть* $h_k \in H$, $k = 1, 2, \ldots$, — *ортогональный базис в* H,

$p \in [1,+\infty)$, $s \geqslant 0$ — фиксированное целое число, $G_1 \subset \mathbb{R}^{m_1}$, $G_2 \subset \mathbb{R}^{m_2}$ — компакты. Тогда для любых функций $\vartheta_0 \in L_p(G_1,H)$, $\vartheta_1 \in C^s(G_1,H)$, $\vartheta_2 \in C^s(G_1,L_p(G_2,H))$ справедливы равенства

$$\lim_{N\to\infty} \|\vartheta_0^N - \vartheta_0\|_{p,G_1,H} = 0,\ \ \lim_{N\to\infty} \left|\vartheta_1^N - \vartheta_1\right|^{(s)}_{G_1,H} = 0,\ \ \lim_{N\to\infty} \left|\vartheta_2^N - \vartheta_2\right|^{(s)}_{G_1,L_p(G_2,H)} = 0,$$

где введены обозначения

$$\vartheta_0^N(x) \equiv \sum_{k=1}^N \vartheta_{0k}(x)h_k,\ \ \vartheta_1^N(x) \equiv \sum_{k=1}^N \vartheta_{1k}(x)h_k,\ \ \vartheta_2^N(x,y) \equiv \sum_{k=1}^N \vartheta_{2k}(x,y)h_k,$$
$$\vartheta_{0j}(x) \equiv \langle \vartheta_0(x), h_j\rangle_H,\ \ \vartheta_{1j}(x) \equiv \langle \vartheta_1(x), h_j\rangle_H,\ \ \vartheta_{2j}(x,y) \equiv \langle \vartheta_2(x,y), h_j\rangle_H,$$
$$(x,y) \in G_1 \times G_2,\ \ j,\ N = 1,2,\ldots$$

Доказательство. 1) Докажем сначала утверждение о функции ϑ_0. Действительно, поскольку $h_k \in H$, $k = 1,2,\ldots,$ — ортогональный базис в H, то

$$\|\vartheta_0^N(x) - \vartheta_0(x)\|_H^p = \left[\|\vartheta_0(x)\|_H^2 - \sum_{j=1}^N [\|h_j\|_H \vartheta_{0j}(x)]^2\right]^{p/2} \leqslant \|\vartheta_0(x)\|_H^p \text{ при п.в. } x \in G_1;$$
$$\|\vartheta_0^N(x) - \vartheta_0(x)\|_H^p \to 0,\ \ N \to \infty,\ \text{при п.в. } x \in G_1.$$

Пользуясь затем теоремой Лебега о предельном переходе под знаком интеграла Лебега, заключаем, что

$$\lim_{N\to\infty} \|\vartheta_0^N - \vartheta_0\|_{p,G_1,H} = 0.$$

2) Докажем утверждение о функции ϑ_1. Пусть мультииндекс $i = (i_1,\ldots,i_{m_1})$, $|i| = \overline{0,s}$, — произволен. Положим $r_{N,i}(x) \equiv \left\| \frac{\partial^{|i|}\vartheta_1^N(x)}{\partial x_1^{i_1}\ldots\partial x_{m_1}^{i_{m_1}}} - \frac{\partial^{|i|}\vartheta_1(x)}{\partial x_1^{i_1}\ldots\partial x_{m_1}^{i_{m_1}}} \right\|_H$, $x \in G_1$. Тогда нетрудно видеть, что $r_{N,i}$ непрерывна на G_1, причём

$$r_{N,i}(x) \geqslant r_{N+1,i}(x)\ \ \forall\, x \in G_1,\ \ N = 1,2,\ldots;\ \ r_{N,i}(x) \to 0,\ \ N \to \infty,\ \ \forall\, x \in G_1.$$

Применяя лемму 1.5.1, получаем, что

$$\lim_{N\to\infty} \left|\vartheta_1^N - \vartheta_1\right|^{(s)}_{G_1,H} = 0.$$

3) Докажем утверждение о функции ϑ_2. Пусть мультииндекс $i = (i_1,\ldots,i_{m_1})$, $|i| = \overline{0,s}$, — произволен. Положим $\tau_{N,i}(x) \equiv \left\| \frac{\partial^{|i|}\vartheta_2^N(x,\cdot)}{\partial x_1^{i_1}\ldots\partial x_{m_1}^{i_{m_1}}} - \frac{\partial^{|i|}\vartheta_2(x,\cdot)}{\partial x_1^{i_1}\ldots\partial x_{m_1}^{i_{m_1}}} \right\|_{p,G_2,H}$, $x \in G_1$. В силу доказанного в первом пункте справедливы соотношения

$$\tau_{N,i}(x) \geqslant \tau_{N+1,i}(x)\ \ \forall\, x \in G_1,\ \ N = 1,2,\ldots;\ \ \tau_{N,i}(x) \to 0,\ \ N \to \infty,\ \ \forall\, x \in G_1.$$

Применяя лемму 1.5.1, получаем, что

$$\lim_{N\to\infty} \left|\vartheta_2^N - \vartheta_2\right|^{(s)}_{G_1,L_p(G_2,H)} = 0.$$

Лемма полностью доказана. ∎

Пусть V и H — сепарабельные гильбертовы пространства со скалярными произведениями $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ и $\langle\cdot,\cdot\rangle_H$ соответственно. Нормы, соответствующие этим скалярным произведениям, обозначим через $\|\cdot\|_V$ и $\|\cdot\|_H$. Пусть, кроме того, $V \subset H$, причём это вложение плотно и компактно. Наконец, пусть $g_k \in V$, $k = 1,2,\ldots,$ — ортогональная в V и ортонормированная в H система, такая, что для любых $\varphi \in V$ и $\psi \in H$ справедливо равенство

$$\lim_{N\to\infty} \|\varphi^N - \varphi\|_V = 0,\ \ \lim_{N\to\infty} \|\psi^N - \psi\|_H = 0, \tag{1.5.3}$$

где

$$\varphi^N \equiv \sum_{m=1}^N \varphi_m g_m,\ \ \psi^N \equiv \sum_{m=1}^N \psi_m g_m,\ \ \varphi_k \equiv \langle \varphi, g_k\rangle_H,\ \ \psi_k \equiv \langle \psi, g_k\rangle_H,\ \ k,\ N = 1,2,\ldots$$

Пусть $s \geqslant 0$ — фиксированное целое число, $G \subset \mathbb{R}^m$ — замкнутая ограниченная область с кусочно–гладкой границей.

Покажем, что справедлива

Лемма 1.5.3. *Для любых функций $\vartheta_0 \in C^s(G, V)$, $\vartheta_1 \in C^s(G, H)$, $\vartheta_2 \in C^s([0,T], L_1(G,H))$, $\vartheta_3 \in C^s(G \times [0,T], V)$ имеют место соотношения*

$$\lim_{N\to\infty} |\vartheta_0^N - \vartheta_0|^{(s)}_{G,V} = 0, \quad \lim_{N\to\infty} |\vartheta_1^N - \vartheta_1|^{(s)}_{G,H} = 0, \tag{1.5.4}$$

$$\lim_{N\to\infty} |\vartheta_2^N - \vartheta_2|^{(s)}_{[0,T],L_1(G,H)} = 0, \quad \lim_{N\to\infty} |\vartheta_3^N - \vartheta_3|^{(s)}_{G\times[0,T],V} = 0, \tag{1.5.5}$$

где введены обозначения

$$\vartheta_0^N(x) \equiv \sum_{k=1}^{N} \vartheta_{0k}(x) g_k, \;\; \vartheta_1^N(x) \equiv \sum_{k=1}^{N} \vartheta_{1k}(x) g_k, \;\; \vartheta_2^N(x,t) \equiv \sum_{k=1}^{N} \vartheta_{2k}(x,t) g_k,$$

$$\vartheta_3^N(x,t) \equiv \sum_{k=1}^{N} \vartheta_{3k}(x,t) g_k, \;\; \vartheta_{0j}(x) \equiv \langle \vartheta_0(x), g_j \rangle_H, \;\; \vartheta_{1j}(x) \equiv \langle \vartheta_1(x), g_j \rangle_H, \;\; \vartheta_{2j}(x,t) \equiv \langle \vartheta_2(x,t), g_j \rangle_H,$$

$$\vartheta_{3j}(x,t) \equiv \langle \vartheta_3(x,t), g_j \rangle_H, \;\; (x,t) \in G \times [0,T], \;\; j, \; N = 1, 2, \ldots$$

При этом пространство $C^1(G,V)$ всюду плотно в $C(G,H)$, а пространство $C^1(G\times[0,T],V)$ всюду плотно в $C([0,T], L_1(G,H))$.

Доказательство. 1) Предельные соотношения (1.5.4) и (1.5.5) являются непосредственными следствиями условий на систему $g_j \in V$, $j = 1, 2, \ldots$, и леммы 1.5.2.

2) Утверждение о плотности $C^1(G_1, V)$ в $C(G_1, H)$ является следствием классической теоремы Вейерштрасса об аппроксимации непрерывных на отрезке вещественнозначных функций многочленами и предельных соотношений (1.5.4) и (1.5.5).

3) Докажем утверждение о плотности $C^1(G \times [0,T], V)$ в $C([0,T], L_1(G,H))$. Нетрудно видеть, что $\vartheta_{2k} \in C([0,T], L_1(G))$, $k = 1, 2, \ldots$ Поэтому нам достаточно доказать, что пространство $C^1(G \times [0,T])$ всюду плотно в пространстве $C([0,T], L_1(G))$. В самом деле, согласно лемме 1.1.7, множество многочленов с коэффициентами из $L_1(G)$ всюду плотно в $C([0,T], L_1(G))$. Поскольку же, как известно, множество $C^1(G)$ всюду плотно в $L_1(G)$, то множество $C^1(G \times [0,T])$ всюду плотно в пространстве $C([0,T], L_1(G))$. Лемма полностью доказана. ■

1.6. Интегралы, зависящие от параметра

Пусть X — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_X$, Y — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_Y$.

Теорема 1.6.1. *Пусть задана функция $f\colon \Gamma \to X$. Если $f \in C(\Gamma, X)$, то функция*

$$[0,T] \ni t \mapsto (P) \int_0^t f(t,\xi) d\xi$$

принадлежит классу $C([0,T], X)$.

Доказательство. Поскольку $f \in C(\Gamma, X)$, то согласно теореме 1.1.17 она равномерно непрерывна на Γ, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \; \forall (t', \xi'), \; (t'', \xi'') \in \Gamma, \; |(t', \xi') - (t'', \xi'')| < \delta : \\ \|f(t', \xi') - f(t'', \xi'')\|_X < \frac{\varepsilon}{T}. \tag{1.6.1}$$

Пусть t_0, $t \in [0,T]$ — произвольны. Тогда

$$\int_0^t f(t,\xi) d\xi - \int_0^{t_0} f(t_0,\xi) d\xi = \int_0^t f(t,\xi) d\xi - \int_0^{t_0} f(t,\xi) d\xi + \int_0^{t_0} [f(t,\xi) - f(t_0,\xi)] d\xi =$$

$$= \int_{t_0}^t f(t,\xi) d\xi + \int_0^{t_0} [f(t,\xi) - f(t_0,\xi)] d\xi,$$

откуда следует, что

$$\left\| \int\limits_0^t f(t,\xi)d\xi - \int\limits_0^{t_0} f(t_0,\xi)d\xi \right\|_X \leqslant \left| \int\limits_{t_0}^t \|f(t,\xi)\|_X d\xi \right| + \int\limits_0^{t_0} \|f(t,\xi) - f(t_0,\xi)\|_X d\xi \leqslant$$

$$\leqslant |t-t_0| \max_{(\tau,\xi)\in\Gamma} \|f(\tau,\xi)\|_X + \int\limits_0^T \|f(t,\xi) - f(t_0,\xi)\|_X d\xi.$$

Таким образом, нам достаточно лишь доказать, что

$$\lim_{t\to 0} \int\limits_0^T \|f(t,\xi) - f(t_0,\xi)\|_X d\xi = 0. \tag{1.6.2}$$

В самом деле, выберем произвольно $\varepsilon > 0$ и зафиксирум. Подберём $\delta = \delta(\varepsilon)$ согласно (1.6.1) и выберем $t \in [0,T]$ так, чтобы $|t - t_0| < \delta$. Тогда, в силу (1.6.1),

$$\|f(t,\xi) - f(t_0,\xi)\|_X < \frac{\varepsilon}{T}$$

при всех $\xi \in [0,T]$. Поэтому

$$\int\limits_0^T \|f(t,\xi) - f(t_0,\xi)\|_X d\xi \leqslant \varepsilon.$$

Таким образом, соотношение (1.6.2), а вместе с ним и настоящая теорема, доказаны. ■

Лемма 1.6.1. *Пусть* $\Pi(t,\xi) \in \mathcal{L}(X,Y)$ *при всех* $(t,\xi) \in \Gamma$, *при всех* $x \in X$ *функция* $\Gamma \ni (t,\xi) \mapsto \Pi(t,\xi)x$ *принадлежит* $C(\Gamma, Y)$, *и пусть* $z \in L_1([0,T], X)$. *Тогда функция*

$$[0,T] \ni t \mapsto \int\limits_0^t \Pi(t,\xi)z(\xi)d\xi$$

непрерывна на $[0,T]$ *в норме* Y.

Доказательство. Выберем произвольно функцию $y \in L_1([0,T], X)$ и зафиксируем. Введём обозначение

$$\Theta(t) = \int\limits_0^t \Pi(t,\xi)y(\xi)d\xi, \ \ t \in [0,T].$$

Согласно лемме 1.1.8, найдётся постоянная $K > 0$, такая, что

$$\sup_{(t,\xi)\in\Gamma} \|\Pi(t,\xi)\|_{X\to Y} \leqslant K.$$

Поэтому при каждом фиксированном $t \in [0,T]$ функция $[0,T]] \ni \xi \mapsto \Pi(t,\xi)z(\xi)$ принадлежит пространству $L_1([0,T], Y)$.

Утверждение леммы эквивалентно включению $\Theta \in C([0,T], Y)$. Докажем его.

Пусть t, $t + \Delta t \in [0,T]$ — произвольны. Тогда

$$\Theta(t+\Delta t) - \Theta(t) = \int\limits_0^{t+\Delta t} \Pi(t+\Delta t,\xi)y(\xi)d\xi - \int\limits_0^t \Pi(t,\xi)y(\xi)d\xi =$$

$$= \int\limits_0^{t+\Delta t} [\Pi(t+\Delta t,\xi) - \Pi(t,\xi)]y(\xi)d\xi + \int\limits_t^{t+\Delta t} \Pi(t,\xi)y(\xi)d\xi.$$

Поэтому

$$\|\Theta(t+\Delta t) - \Theta(t)\|_Y \leqslant \int\limits_0^T \|[\Pi(t+\Delta t,\xi) - \Pi(t,\xi)]y(\xi)\|_Y d\xi + \left\| \int\limits_t^{t+\Delta t} \Pi(t,\xi)y(\xi)d\xi \right\|_Y.$$

Первое слагаемое в правой части последнего неравенства стремится к нулю при $\Delta t \to 0$ в силу теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла Лебега, а второе — за счёт абсолютной непрерывности интеграла Бохнера. Таким образом, включение $\Theta \in C([0,T],Y)$ доказано, а вместе с ним полностью доказана и данная лемма. ■

Теорема 1.6.2. *Пусть задана функция $f\colon \Gamma \to X$, $f = f(t,\xi)$. Если f, $f_t \in C(\Gamma, X)$, то функция*

$$[0,T] \ni t \mapsto \int\limits_0^t f(t,\xi)d\xi \tag{1.6.3}$$

непрерывно дифференцируема на $[0,T]$ в норме X, причём

$$\frac{d}{dt}\int\limits_0^t f(t,\xi)d\xi = f(t,t) + \int\limits_0^t f_t(t,\xi)d\xi \ \ \forall\, t \in [0,T]. \tag{1.6.4}$$

Доказательство. Введём обозначения

$$\Theta_0(t) \equiv \int\limits_0^t f(t,\xi)d\xi, \ \ \Theta_1(t) \equiv f(t,t) + \int\limits_0^t f_t(t,\xi)d\xi, \ \ t \in [0,T].$$

Принадлежность функций Θ_0 и Θ_1 банахову пространству $C([0,T],X)$ следует из условий на функцию f и теоремы 1.6.1. Таким образом, нам нужно лишь доказать, что $\Theta_0' = \Theta_1$.

В самом деле, пусть t, $t+\Delta t \in [0,T]$ — произвольны. Тогда

$$\Theta_0(t+\Delta t) - \Theta_0(t) = \int\limits_0^{t+\Delta t} f(t+\Delta t,\xi)d\xi - \int\limits_0^t f(t,\xi)d\xi = \int\limits_0^{t+\Delta t} f(t+\Delta t,\xi)d\xi - \int\limits_0^t f(t+\Delta t,\xi)d\xi +$$

$$+\int\limits_0^t [f(t+\Delta t,\xi) - f(t,\xi)]d\xi = \int\limits_t^{t+\Delta t} f(t+\Delta t,\xi)d\xi + \int\limits_0^t [f(t+\Delta t,\xi) - f(t,\xi)]d\xi =$$

$$= \int\limits_t^{t+\Delta t} [f(t+\Delta t,\xi) - f(t,t)]d\xi + \int\limits_t^{t+\Delta t} f(t,t)d\xi + \int\limits_0^t [f(t+\Delta t,\xi) - f(t,\xi)]d\xi = \Delta t f(t,t) +$$

$$+\int\limits_0^t [f(t+\Delta t,\xi) - f(t,\xi)]d\xi + \int\limits_t^{t+\Delta t} [f(t+\Delta t,\xi) - f(t,t)]d\xi,$$

откуда вытекает, что

$$\frac{\Theta_0(t+\Delta t) - \Theta_0(t)}{\Delta t} = f(t,t) + \int\limits_0^t \frac{f(t+\Delta t,\xi) - f(t,\xi)}{\Delta t}d\xi + \frac{1}{\Delta t}\int\limits_t^{t+\Delta t} [f(t+\Delta t,\xi) - f(t,t)]d\xi =$$

$$= f(t,t) + \int\limits_0^t f_t(t,\xi)d\xi + \int\limits_0^t \left[\frac{f(t+\Delta t,\xi) - f(t,\xi)}{\Delta t} - f_t(t,\xi)\right] d\xi + \frac{1}{\Delta t}\int\limits_t^{t+\Delta t} [f(t+\Delta t,\xi) - f(t,t)]d\xi =$$

$$= \Theta_1(t) + \int\limits_0^t \left[\frac{f(t+\Delta t,\xi) - f(t,\xi)}{\Delta t} - f_t(t,\xi)\right] d\xi + \frac{1}{\Delta t}\int\limits_t^{t+\Delta t} [f(t+\Delta t,\xi) - f(t,t)]d\xi = \Theta_1(t) +$$

$$+\int\limits_0^t \left[\frac{1}{\Delta t}\int\limits_t^{t+\Delta t} f_t(\eta,\xi)d\eta - f_t(t,\xi)\right] d\xi + \frac{1}{\Delta t}\int\limits_t^{t+\Delta t} [f(t+\Delta t,\xi) - f(t,t)]d\xi = \Theta_1(t) +$$

$$+\int\limits_0^t \left[\frac{1}{\Delta t}\int\limits_t^{t+\Delta t} [f_t(\eta,\xi) - f_t(t,\xi)]d\eta\right] d\xi + \frac{1}{\Delta t}\int\limits_t^{t+\Delta t} [f(t+\Delta t,\xi) - f(t,t)]d\xi.$$

Итак,

$$\frac{\Theta_0(t+\Delta t)-\Theta_0(t)}{\Delta t}-\Theta_1(t)=\int\limits_0^t\left[\frac{1}{\Delta t}\int\limits_t^{t+\Delta t}[f_t(\eta,\xi)-f_t(t,\xi)]d\eta\right]d\xi+\frac{1}{\Delta t}\int\limits_t^{t+\Delta t}[f(t+\Delta t,\xi)-f(t,t)]d\xi.$$

Поэтому

$$\left\|\frac{\Theta_0(t+\Delta t)-\Theta_0(t)}{\Delta t}-\Theta_1(t)\right\|_X\leqslant\left|\frac{1}{\Delta t}\int\limits_0^T\left[\int\limits_t^{t+\Delta t}\|f_t(\eta,\xi)-f_t(t,\xi)\|_X d\eta\right]d\xi\right|+$$
$$+\left|\frac{1}{\Delta t}\int\limits_t^{t+\Delta t}\|f(t+\Delta t,\xi)-f(t,t)\|_X d\xi\right|.$$

Поскольку $f,\ f_t\in C(\Gamma,X)$, то, согласно теореме 1.1.17 они равномерно непрерывны на Γ, т.е.

$$\begin{gathered}\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,\delta=\delta(\varepsilon)>0\ \forall\,(t',\xi'),\ (t'',\xi'')\in\Gamma,\ |(t',\xi')-(t'',\xi'')|<\delta:\\ \|f(t',\xi')-f(t'',\xi'')\|_X<\frac{\varepsilon}{2T},\ \ \|f(t',\xi')-f(t'',\xi'')\|_X<\frac{\varepsilon}{2}.\end{gathered}\tag{1.6.5}$$

Выберем произвольно $\varepsilon>0$ и подберём по нему $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ согласно (1.6.5). Пусть теперь $|\Delta t|<\frac{\delta}{\sqrt{2}}$. Тогда $|(\eta,\xi)-(t,\xi)|<\delta$ при всех η, лежащих между t и $t+\Delta t$ и всех $\xi\in[0,T]$, откуда, в силу (1.6.5), вытекает, что при всех таких η и ξ

$$\|f_t(\eta,\xi)-f_t(t,\xi)\|_X\leqslant\frac{\varepsilon}{2T},$$

и, как следствие

$$\left|\frac{1}{\Delta t}\int\limits_0^T\left[\int\limits_t^{t+\Delta t}\|f_t(\eta,\xi)-f_t(t,\xi)\|_X d\eta\right]d\xi\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда выводим, что при $|\Delta t|<\frac{\delta}{\sqrt{2}}$

$$\left\|\frac{\Theta_0(t+\Delta t)-\Theta_0(t)}{\Delta t}-\Theta_1(t)\right\|_X\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\left|\frac{1}{\Delta t}\int\limits_t^{t+\Delta t}\|f(t+\Delta t,\xi)-f(t,t)\|_X d\xi\right|.$$

Поскольку $|\Delta t|<\frac{\delta}{\sqrt{2}}$, то $|(t+\Delta t,\xi)-(t,t)|=\sqrt{|\Delta t|^2+|\xi-t|^2}\leqslant|\Delta t|\sqrt{2}<\delta$ при всех ξ, лежащих между t и $t+\Delta t$. Поэтому, на основании (1.6.5), при всех таких ξ

$$\|f(t+\Delta t,\xi)-f(t,t)\|_X\leqslant\frac{\varepsilon}{2},$$

вследствие чего

$$\left|\frac{1}{\Delta t}\int\limits_t^{t+\Delta t}\|f(t+\Delta t,\xi)-f(t,t)\|_X d\xi\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}.$$

Итак,

$$\left\|\frac{\Theta_0(t+\Delta t)-\Theta_0(t)}{\Delta t}-\Theta_1(t)\right\|_X\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

при $|\Delta t|<\frac{\delta}{\sqrt{2}}$, что и доказывает равенство $\Theta_0'=\Theta_1$. Теорема полностью доказана. ■

Из леммы 1.1.10 и только что доказанной теоремы вытекает

Теорема 1.6.3. *Пусть* $\Pi(t,\xi)\in\mathcal{L}(X,Y)$ *при всех* $(t,\xi)\in\Gamma$*, причём при всех* $x\in X$ *функция* $\Gamma\ni(t,\xi)\mapsto\Pi(t,\xi)x$ *принадлежит* $C(\Gamma,Y)$ *и при всех* $(t,\xi)\in\Gamma$ *имеет непрерывную на* Γ *в норме* Y *производную* $\Gamma\ni(t,\xi)\mapsto\Pi_t(t,\xi)x$*. Если* $z\in C([0,T],X)$*, то функция*

$$[0,T]\ni t\mapsto\int\limits_0^t\Pi(t,\xi)z(\xi)d\xi$$

непрерывно дифференцируема на $[0,T]$ *в норме* X *и*

$$\frac{d}{dt}\int\limits_0^t \Pi(t,\xi)z(\xi)d\xi = \Pi(t,t)z(t) + \int\limits_0^t \Pi_t(t,\xi)z(\xi)d\xi \ \ \forall t\in[0,T].$$

1.7. Сведения из негладкого анализа

Для дальнейшего нам потребуются нижеследующие определение и результаты [8], [9]. Пусть $\Xi\subset\mathbb{R}^m$ — непустое замкнутое множество, $\varepsilon\geqslant 0$, $x\in\bar{\Xi}$. Непустое множество

$$\hat{N}_\varepsilon(x;\Xi)\equiv\{x^*\in\mathbb{R}^m\ :\ \limsup_{u\xrightarrow{\Xi}x}\frac{\langle x^*,u-x\rangle}{|u-x|}\leqslant\varepsilon\}$$

называется множеством ε-нормалей Фреше ко множеству Ξ в точке x. Здесь $u\xrightarrow{\Xi}x$ означает, что $u\to x$ при $u\in\Xi$. В частности, $\hat{N}_0(x;\Xi)$ называется конусом нормалей Фреше ко множеству Ξ в точке x и обозначается через $\hat{N}(x;\Xi)$. Определим (основной, предельный) нормальный конус в точке $\bar{x}\in\Xi$ как $N(\hat{x};\Xi)\equiv\limsup\limits_{x\xrightarrow{\Xi}\hat{x},\,\varepsilon\downarrow 0}\hat{N}_\varepsilon(x;\Xi)$.

Можно показать (подробности в [8], [9]), что $N(\hat{x};\Xi)\equiv\limsup\limits_{x\xrightarrow{\Xi}\hat{x}}\hat{N}(x;\Xi)$. Для полунепрерывной снизу функции $f\colon\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ и $\bar{x}\in\mathrm{dom\,f}$ субдифференциал Фреше $\hat{\partial}f(\bar{x})$ функции f в точке $\bar{x}\in\mathrm{dom\,f}$ определяется как

$$\hat{\partial}f(\bar{x})\equiv\left\{x^*\in\mathbb{R}^m\ :\ \liminf_{x\to\bar{x}}\frac{f(x)-f(\bar{x})-\langle x^*,\,x-\bar{x}\rangle}{|x-\bar{x}|}\geqslant 0\right\},$$

или, эквивалентно, как

$$\hat{\partial}f(\bar{x})\equiv\left\{x^*\in\mathbb{R}^m\ :\ (x^*,-1)\in\hat{N}((\bar{x},\,f(\bar{x}));\mathrm{epi}\ f)\right\}.$$

Для любого $\bar{x}\in dom\,f$ множества

$$\partial f(\bar{x})\equiv\{x^*\in\mathbb{R}^m\ :\ (x^*,-1)\in N((\bar{x},\,f(\bar{x}));\mathrm{epi}\ f)\},$$
$$\partial^\infty f(\bar{x})\equiv\{x^*\in\mathbb{R}^m\ :\ (x^*,0)\in N((\bar{x},\,f(\bar{x}));\mathrm{epi}\ f)\},$$

называются соответственно субдифференциалом и сингулярным субдифференциалом функции f в точке $\bar{x}$ в смысле [8], [9]. Если функция f полунепрерывна снизу, то справедливы следующие соотношения:

$$\partial f(\bar{x})=\limsup_{x\xrightarrow{f}\bar{x}}\hat{\partial}f(x),\ \ \partial^\infty f(\bar{x})=\limsup_{x\xrightarrow{f}\bar{x};\,\bar{\varepsilon}\downarrow 0}\bar{\varepsilon}\hat{\partial}f(x), \tag{1.7.1}$$

где $x\xrightarrow{f}\bar{x}$ означает, что $x\to\bar{x}$, $f(x)\to f(\bar{x})$. Мы имеем $\partial^\infty f(\bar{x})=\{0\}$, если f липшицева в окрестности точки x.

Справедлив следующий важный результат (см. [8], [9]).

Лемма 1.7.1. *Пусть* $\Xi\subset\mathbb{R}^m$ *— непустое замкнутое множество. Тогда множество точек* $\{x\in\Xi : \hat{N}(x;\Xi)\neq\{0\}\}$, *т.е. множество всех граничных точек множества* Ξ, *в которых существует ненулевая нормаль Фреше, всюду плотно во множестве всех граничных точек множества* Ξ. *Кроме того, для любой полунепрерывной снизу функции* $f\colon\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ *множество* $\{x\in\mathrm{dom\,f} : \hat{\partial}\mathrm{f(x)}\neq\emptyset\}$ *всюду плотно в* $\mathrm{dom f}$.

Из определения субдифференциала Фреше функции f в точке x непосредственно вытекает

Лемма 1.7.2. *Пусть* $f\colon\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ *– полунепрерывная снизу функция,* $x\in\mathrm{dom\,f}$. *Если* $(x^*,-\mho)\in\hat{N}((x,f(x));\mathrm{epi}\ f)$, $\mho>0$, *то для любого* $\varepsilon>0$ *найдется окрестность* $Ш^m_\varepsilon(x)$ *точки* x, *такая, что* $\mho f(x')-\mho f(x)-\langle x^*,x'-x\rangle+\varepsilon|x'-x|\geqslant 0\ \forall x'\in Ш^m_\varepsilon(x)$.

Глава 2. Теоремы вложения

2.1. Вещественные функции одного вещественного переменного

Сформулируем прежде всего следующий классический результат.

Теорема 2.1.1. *Множество $W_1^1[0,T]$ совпадает с множеством всех абсолютно непрерывных на отрезке $[0,T]$ функций. При этом если функция $\xi \in W_1^1[0,T]$, то производная функции ξ, понимаемая в классическом смысле, существует почти всюду на отрезке $[0,T]$ и почти всюду совпадает с обобщённой производной в смысле Соболева.*

Следствием данной теоремы является

Теорема 2.1.2. *Пусть $\xi \in W_p^1[0,T]$, $p \in [1,+\infty]$. Тогда найдётся константа $A_1 = A_1(p,T) > 0$, зависящая лишь от $p \in [1,+\infty]$ и от $T > 0$, такая, что*

$$\max_{t\in[0,T]} |\xi(t)| \leqslant A_1 \|\xi\|^{(1)}_{p,[0,T]}.$$

При этом если $p > 1$, то вложение $W_p^1[0,T] \subset C[0,T]$ — компактно.

Доказательство. 1) Пусть $p = 1$. Пусть $\xi \in W_1^1[0,T]$. Тогда, на основании теоремы 2.1.1, ξ абсолютно непрерывна на отрезке $[0,T]$, причём производная функции ξ, понимаемая в классическом смысле, существует почти всюду на отрезке $[0,T]$ и почти всюду совпадает с обобщённой производной в смысле Соболева. Поэтому при всех t, $\tau \in [0,T]$

$$\xi(t) = \xi(\tau) + \int\limits_\tau^t \xi'(\omega)d\omega.$$

Следовательно,

$$|\xi(t)| \leqslant |\xi(\tau)| + \left|\int\limits_\tau^t |\xi'(\omega)|d\omega\right|.$$

Интегрируя по переменной $\tau \in [0,T]$, получаем, что

$$T|\xi(t)| \leqslant \int\limits_0^T |\xi(\tau)|d\tau + \int\limits_0^T \left|\int\limits_\tau^t |\xi'(\omega)|d\omega\right| d\tau \leqslant \int\limits_0^T |\xi(\tau)|d\tau + T\int\limits_0^T |\xi'(\tau)|d\tau \leqslant \max\{1,T\}\|\xi\|^{(1)}_{1,[0,T]},$$

то есть

$$|\xi(t)| \leqslant \max\{1,T^{-1}\}\|\xi\|^{(1)}_{1,[0,T]} \ \ \forall\, t \in [0,T],$$

откуда следует требуемая оценка с $A_1 = \max\{1,\frac{1}{T}\}$.

2) Пусть $p = \infty$, и пусть $\xi \in W_\infty^1[0,T]$. Нетрудно видеть, что $\xi \in W_1^1[0,T]$. В силу теоремы 2.1.1 функция ξ абсолютно непрерывна на отрезке $[0,T]$, производная функции ξ, понимаемая в классическом смысле, существует почти всюду на отрезке $[0,T]$ и почти всюду совпадает с обобщённой производной в смысле Соболева. Поэтому при всех t, $\tau \in [0,T]$

$$\xi(t) = \xi(\tau) + \int\limits_\tau^t \xi'(\omega)d\omega.$$

Следовательно,

$$|\xi(t)| \leqslant |\xi(\tau)| + \left|\int\limits_\tau^t |\xi'(\omega)|d\omega\right| \leqslant \|\xi\|_{\infty,[0,T]} + T\|\xi'\|_{\infty,[0,T]} \leqslant \max\{1,T\}\|\xi\|^{(1)}_{\infty,[0,T]}.$$

Таким образом,

$$\max_{t\in[0,T]}|\xi(t)|\leqslant\max\{1,T\}\|\xi\|^{(1)}_{\infty,[0,T]},$$

и, следовательно, можно взять $A_1=\max\{1,T\}$.

Докажем теперь компактность вложения $W^1_\infty[0,T]\subset C[0,T]$. Пусть $\mathfrak{M}\subset W^1_\infty[0,T]$ — ограничено в норме пространства $W^1_\infty[0,T]$, то есть найдётся постоянная $C>0$, такая, что

$$\|\psi\|^{(1)}_{\infty,[0,T]}\leqslant C\ \ \forall\,\psi\in\mathfrak{M}.$$

Тогда

$$|\psi|^{(0)}_{[0,T]}\leqslant A_1C\ \ \forall\,\psi\in\mathfrak{M}.$$

Пусть t', $t''\in[0,T]$, $\psi\in\mathfrak{M}$ — произвольны. Тогда

$$|\psi(t')-\psi(t'')|\leqslant\left|\int\limits_{t'}^{t''}|\psi'(\omega)|d\omega\right|\leqslant C|t'-t''|.$$

Следовательно, множество $\mathfrak{M}$ равномерно ограничено в норме пространства $C[0,T]$ и равностепенно непрерывно. Поэтому, в силу теоремы Арцела–Асколи, множество $\mathfrak{M}$ предкомпактно в $C[0,T]$.

3) Пусть $1<p<\infty$, и пусть $\xi\in W^1_p[0,T]$. Нетрудно видеть, что $\xi\in W^1_1[0,T]$. В силу теоремы 2.1.1 функция ξ абсолютно непрерывна на отрезке $[0,T]$, производная функции ξ, понимаемая в классическом смысле, существует почти всюду на отрезке $[0,T]$ и почти всюду совпадает с обобщённой производной в смысле Соболева. Поэтому при всех t, $\tau\in[0,T]$

$$|\xi(t)|^p=|\xi(\tau)|^p+\int\limits_\tau^t p[|\xi(\omega)|^{p-1}\operatorname{sgn}\xi(\omega)]\xi'(\omega)d\omega\leqslant|\xi(\tau)|^p+p\left|\int\limits_\tau^t|\xi(\omega)|^{p-1}|\xi'(\omega)|d\omega\right|.$$

Проинтегрировав последнее неравенство по переменной $\tau\in[0,T]$, получим, что

$$T|\xi(t)|^p\leqslant\int\limits_0^T|\xi(\tau)|^pd\tau+p\int\limits_0^T\left|\int\limits_\tau^t|\xi(\omega)|^{p-1}|\xi'(\omega)|d\omega\right|d\tau\leqslant\int\limits_0^T|\xi(\tau)|^pd\tau+pT\int\limits_0^T|\xi(\omega)|^{p-1}|\xi'(\omega)|d\omega\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_0^T|\xi(\tau)|^pd\tau+pT\left[\int\limits_0^T|\xi(\omega)|^pd\omega\right]^{\frac{p-1}{p}}\left[\int\limits_0^T|\xi'(\omega)|^pd\omega\right]^{1/p}=\|\xi\|^p_{p,[0,T]}+pT\|\xi\|^{p-1}_{p,[0,T]}\|\xi'\|_{p,[0,T]}=$$

$$=\|\xi\|^{p-1}_{p,[0,T]}[\|\xi\|_{p,[0,T]}+pT\|\xi'\|_{p,[0,T]}]\leqslant[\max_{\omega\in[0,T]}|\xi(\omega)|]^{p-1}T^{\frac{p-1}{p}}[\|\xi\|_{p,[0,T]}+pT\|\xi'\|_{p,[0,T]}]\leqslant$$

$$\leqslant[\max_{\omega\in[0,T]}|\xi(\omega)|]^{p-1}T^{\frac{p-1}{p}}\left[1+(pT)^{\frac{p}{p-1}}\right]^{\frac{p-1}{p}}\|\xi\|^{(1)}_{p,[0,T]}.$$

Как следствие,

$$[\max_{t\in[0,T]}|\xi(t)|]^p\leqslant[\max_{\omega\in[0,T]}|\xi(\omega)|]^{p-1}T^{\frac{p-1}{p}}T^{-1}\left[1+(pT)^{\frac{p}{p-1}}\right]^{\frac{p-1}{p}}\|\xi\|^{(1)}_{p,[0,T]},$$

откуда

$$\max_{t\in[0,T]}|\xi(t)|\leqslant T^{\frac{p-1}{p}}T^{-1}\left[1+(pT)^{\frac{p}{p-1}}\right]^{\frac{p-1}{p}}\|\xi\|^{(1)}_{p,[0,T]},$$

так что можно взять постоянную $A_1=T^{\frac{p-1}{p}}T^{-1}\left[1+(pT)^{\frac{p}{p-1}}\right]^{\frac{p-1}{p}}$.

Докажем теперь компактность вложения $W^1_p[0,T]\subset C[0,T]$. Пусть $\mathfrak{M}\subset W^1_p[0,T]$ — ограничено в норме пространства $W^1_p[0,T]$, то есть найдётся постоянная $C>0$, такая, что

$$\|\psi\|^{(1)}_{p,[0,T]}\leqslant C\ \ \forall\,\psi\in\mathfrak{M}.$$

Тогда

$$|\psi|^{(0)}_{[0,T]} \leqslant A_1 C \;\; \forall\, \psi \in \mathfrak{M}.$$

Пусть t', $t'' \in [0,T]$, $\psi \in \mathfrak{M}$ — произвольны. Тогда

$$|\psi(t') - \psi(t'')| \leqslant \left| \int\limits_{t'}^{t''} |\psi'(\omega)| d\omega \right| \leqslant |t' - t''|^{\frac{p-1}{p}} \|\psi'\|_{p,[0,T]} \leqslant C|t' - t''|^{\frac{p-1}{p}}.$$

Следовательно, множество $\mathfrak{M}$ равномерно ограничено в норме пространства $C[0,T]$ и равностепенно непрерывно. Поэтому, в силу теоремы Арцела–Асколи, множество $\mathfrak{M}$ предкомпактно в $C[0,T]$. ■

2.2. Вещественные функции нескольких вещественных переменных

Теорема 2.2.1. *[43, стр.84–85] Если $n < 2m$, то справедливо вложение $W_2^m(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$, причём найдётся постоянная $A_2 = A_2(m,n,\Omega) > 0$, зависящая лишь от m, размерности n и области Ω, такая, что*

$$|z|^{(0)}_{\bar{\Omega}} \leqslant A_2 \|z\|^{(m)}_{2,\Omega}.$$

Кроме того, вложение $W_2^m(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$ компактно.

Если $n = 2m$, то при всех $p \in (1,\infty)$ справедливо вложение $W_2^m(\Omega) \subset L_p(\Omega)$, причём найдётся постоянная $A_3 = A_3(m,n,p,\Omega) > 0$, зависящая лишь от $p \in (1,\infty)$, m, размерности n и области Ω, такая, что

$$\|z\|_{p,\Omega} \leqslant A_3 \|z\|^{(m)}_{2,\Omega}.$$

Кроме того, вложение $W_2^m(\Omega) \subset L_p(\Omega)$ компактно.

Если $n > 2m$, то при всех $p \in (1, \frac{2n}{n-2m})$ справедливо вложение $W_2^m(\Omega) \subset L_p(\Omega)$, причём найдётся постоянная $A_4 = A_4(m,n,p,\Omega) > 0$, зависящая лишь от $p \in (1, \frac{2n}{n-2m})$, m, размерности n и области Ω, такая, что

$$\|z\|_{p,\Omega} \leqslant A_4 \|z\|^{(m)}_{2,\Omega}.$$

Кроме того, вложение $W_2^m(\Omega) \subset L_p(\Omega)$ компактно.

Теорема 2.2.2. *[43, стр.84–85] Если $n = 2m$, то при всех $q \in (1,\infty)$ справедливо вложение $W_2^m(\Omega) \subset L_q(S)$, причём найдётся постоянная $A_5 = A_5(m,n,q,\Omega) > 0$, зависящая лишь от $q \in (1,\infty)$, m, размерности n и области Ω, такая, что*

$$\|z\|_{q,S} \leqslant A_5 \|z\|^{(m)}_{2,\Omega}.$$

Кроме того, вложение $W_2^m(\Omega) \subset L_q(S)$ компактно.

Если $n > 2m$, то при всех $q \in (1, \frac{2(n-1)}{n-2m})$ справедливо вложение $W_2^m(\Omega) \subset L_q(S)$, причём найдётся постоянная $A_6 = A_6(m,n,q,\Omega) > 0$, зависящая лишь от $q \in (1, \frac{2(n-1)}{n-2m})$, m, размерности n и области Ω, такая, что

$$\|z\|_{q,S} \leqslant A_6 \|z\|^{(m)}_{2,\Omega}.$$

Кроме того, вложение $W_2^m(\Omega) \subset L_q(S)$ компактно.

Теорема 2.2.3. *[43, неравенство (6.24) главы 1] Для всех $z \in W_2^1(\Omega)$ и всех $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство*

$$\int\limits_S z^2 ds \leqslant \int\limits_\Omega [\varepsilon |\nabla_x z|^2 + A_7(\varepsilon) z^2] dx,$$

где постоянная $A_7 = A_7(\varepsilon) > 0$ зависит лишь от области Ω, размерности n и числа $\varepsilon > 0$.

2.3. Функции одного переменного, принимающие значения в банаховом пространстве

Пусть X — сепарабельное банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_X$, и пусть $\mathfrak{D}(0,T) \equiv C_0^\infty(0,T)$.

Определение 2.3.1. *Говорят, что последовательность функций $\varphi_j \in \mathfrak{D}(0,T)$, $j = 1, 2, \ldots$, сходится в $\mathfrak{D}(0,T)$ к функции $\varphi \in \mathfrak{D}(0,T)$, если найдётся отрезок $[\tau_1, \tau_2] \subset [0,T]$, $0 < \tau_1 < \tau_2 < T$, такой, что носители $\operatorname{supp}\varphi_j \equiv cl\{t \in [0,T] : \varphi_j(t) \neq 0\}$ функций φ_j, $j = 1, 2, \ldots$, содержатся в $[\tau_1, \tau_2]$ и*

$$\lim_{j\to\infty} |\varphi_j^{(m)} - \varphi^{(m)}|_{[0,T]}^{(0)} = 0, \ \ m = 0, 1, 2, \ldots$$

При этом будем писать $\varphi_j \overset{\mathfrak{D}(0,T)}{\longrightarrow} \varphi$, $j \to \infty$.

Линейное пространство $\mathfrak{D}(0,T)$ с данным понятием сходимости называется основным пространством, а его элементы — основными (или пробными) функциями.

Определение 2.3.2. *Обобщённой функцией или распределением со значениями в X называется всякий линейный оператор $f\colon \mathfrak{D}(0,T) \to X$, слабо непрерывный на $\mathfrak{D}(0,T)$, т.е. такой, что*

$$f(\varphi_j) \to f(\varphi), \ \ j \to \infty, \ \ \textit{слабо в } X,$$

для любых φ, $\varphi_j \in \mathfrak{D}$, $j = 1, 2, \ldots$, для которых $\varphi_j \overset{\mathfrak{D}(0,T)}{\longrightarrow} \varphi$, $j \to \infty$.

Говорят, что последовательность обобщённых функций f_j, $j = 1, 2, \ldots$, сходится к обобщённой функции f, если для всех $\varphi \in \mathfrak{D}$

$$f_j(\varphi) \to f(\varphi), \ \ j \to \infty, \ \ \textit{слабо в } X.$$

Линейное пространство всех обобщённых функций с таким понятием сходимости принято обозначать $\mathfrak{D}'((0,T), X)$, а саму сходимость — через $f_j \overset{\mathfrak{D}'((0,T),X)}{\longrightarrow} f$, $j \to \infty$.

Покажем, что всякую функцию $f \in L_1([0,T], X)$ можно интерпретировать как обобщённую функцию и тем самым установить поэлементное вложение

$$L_1([0,T], X) \subset \mathfrak{D}'((0,T), X). \tag{2.3.1}$$

В самом деле, пусть $f \in L_1([0,T], X)$ — некоторая функция. Определим оператор $F_f\colon \mathfrak{D}(0,T) \to X$ по правилу

$$F_f(\varphi) = (\text{Б})\int_0^T f(t)\varphi(t)dt \ \ \forall\, \varphi \in \mathfrak{D}(0,T). \tag{2.3.2}$$

Это определение корректно, ибо функция $[0,T] \ni t \mapsto f(t)\varphi(t) \in X$ интегрируема по Бохнеру на $[0,T]$. Следовательно, оператор F_f определён всюду в $\mathfrak{D}(0,T)$. Линейность оператора F_f следует из линейности интеграла Бохнера. Проверим слабую непрерывность оператора F_f. В самом деле, пусть $x^* \in X^*$, $\varphi \in \mathfrak{D}(0,T)$, $\varphi_j \in \mathfrak{D}(0,T)$, $j = 1, 2, \ldots$, $\varphi_j \overset{\mathfrak{D}(0,T)}{\longrightarrow} \varphi$, $j \to \infty$, — произвольны. Тогда

$$|\langle F_f(\varphi_j) - F_f(\varphi), x^*\rangle| = \left|\left\langle (\text{Б})\int_0^T f(t)[\varphi_j(t) - \varphi(t)]dt, x^*\right\rangle\right| \leqslant \int_0^T |\langle f(t)[\varphi_j(t) - \varphi(t)], x^*\rangle| dt \leqslant$$

$$\leqslant |\varphi_j - \varphi|_{[0,T]}^{(0)} \|x^*\|_{X^*} \int_0^T \|f(t)\|_X dt \to 0, \ \ j \to \infty.$$

Таким образом,

$$F_f(\varphi_j) \to F_f(\varphi), \ \ j \to \infty, \ \ \text{слабо в } X,$$

для любых φ, $\varphi_j \in \mathfrak{D}$, $j = 1, 2, \ldots$, для которых $\varphi_j \overset{\mathfrak{D}(0,T)}{\longrightarrow} \varphi$, $j \to \infty$. Итак, $F_f \in \mathfrak{D}'((0,T), X)$. Убедимся в том, что разные элементы f, $g \in L_1([0,T], X)$ порождают разные операторы F_f, $F_g \in \mathfrak{D}'((0,T), X)$. В самом деле, пусть для некоторых f, $g \in L_1([0,T], X)$ оказалось, что $F_f = F_g$, то есть

$$(\text{Б})\int_0^T [f(t) - g(t)]\varphi(t)dt = 0 \ \ \forall\, \varphi \in \mathfrak{D}(0,T).$$

Тогда для любого $x^* \in X^*$

$$0 = \left\langle (\text{Б}) \int\limits_0^T [f(t) - g(t)]\varphi(t)dt, x^* \right\rangle = \int\limits_0^T \langle [f(t) - g(t)]\varphi(t), x^* \rangle dt = \int\limits_0^T \varphi(t) \langle f(t) - g(t), x^* \rangle dt \ \ \forall \varphi \in \mathfrak{D}(0,T).$$

Иными словами,

$$\int\limits_0^T \varphi(t) \langle f(t) - g(t), x^* \rangle dt = 0 \ \ \forall \varphi \in \mathfrak{D}(0,T).$$

А это возможно, лишь если при п.в. $t \in [0,T]$

$$\langle f(t) - g(t), x^* \rangle = 0.$$

В силу произвольности $x^* \in X^*$ и следствия из теоремы Хана–Банаха заключаем, что при п.в. $t \in [0,T]$

$$f(t) = g(t),$$

то есть $f = g$ как элементы пространства $L_1([0,T],X)$.

Обобщённую функцию, порождённую обычной функцией $f \in L_1([0,T],X)$ по правилу (2.3.2), называют регулярной обобщённой функцией.

Определение 2.3.3. *Производной порядка m обобщённой функции $f \in \mathfrak{D}'((0,T),X)$, называется обобщённая функция $f^{(m)} \in \mathfrak{D}'((0,T),X)$, действующая по правилу*

$$f^{(m)}(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^m f(\varphi^{(m)}) \ \ \forall \varphi \in \mathfrak{D}(0,T). \tag{2.3.3}$$

Убедимся в том, что равенство (2.3.3) действительно определяет обобщённую функцию. В самом деле, если $\varphi \in \mathfrak{D}(0,T)$, то и $\varphi^{(m)} \in \mathfrak{D}(0,T)$, так что правая часть (2.3.3) действительно имеет смысл. Следовательно, оператор $f^{(m)}$ определён на всём основном пространстве. Линейность данного оператора следует из определения обобщённой функции. Проверим непрерывность оператора $f^{(m)}$. Если $\varphi_j \xrightarrow{\mathfrak{D}(0,T)} \varphi$, $j \to \infty$, то, очевидно, $\varphi_j^{(m)} \xrightarrow{\mathfrak{D}(0,T)} \varphi^{(m)}$, $j \to \infty$. В силу слабой непрерывности f и равенства (2.3.3) для всех $x^* \in X^*$ при $j \to \infty$ имеем сходимость

$$\langle f^{(m)}(\varphi_j), x^* \rangle = \langle (-1)^m f(\varphi_j^{(m)}), x^* \rangle \to \langle (-1)^m f(\varphi^{(m)}), x^* \rangle = \langle f^{(m)}(\varphi), x^* \rangle.$$

Это означает, что $f^{(m)}(\varphi_j) \to f^{(m)}(\varphi)$, $j \to \infty$, слабо в X, и, как следствие, $f^{(m)} \in \mathfrak{D}'((0,T),X)$.

Итак, установлено, что любая обобщённая функция имеет производную любого порядка $m = 0, 1, 2, \ldots$, также являющуюся обобщённой функцией (здесь считается, что $f^{(0)} = f$).

Из (2.3.3) видно, что если $f_j \xrightarrow{\mathfrak{D}'((0,T),X)} f$, $j \to \infty$, то и $f_j^{(m)} \xrightarrow{\mathfrak{D}'((0,T),X)} f^{(m)}$, $j \to \infty$, для всех $m = 0, 1, 2, \ldots$

Если обобщённая функция f и её производная f' являются регулярными, т.е.

$$f(\varphi) = (\text{Б}) \int\limits_0^T f_0(t)\varphi(t)dt, \ \ f'(\varphi) = (\text{Б}) \int\limits_0^T f_1(t)\varphi(t)dt \ \ \forall \varphi \in \mathfrak{D}(0,T),$$

для некоторых функций f_0, $f_1 \in L_1([0,T],X)$, то, в соответствии с определением 2.3.3,

$$(\text{Б}) \int\limits_0^T f_1(t)\varphi(t)dt = -(\text{Б}) \int\limits_0^T f_0(t)\varphi'(t)dt \ \ \forall \varphi \in \mathfrak{D}(0,T). \tag{2.3.4}$$

В частности, если $X = \mathbb{R}$, то регулярная производная регулярной обобщённой функции совпадает с обобщённой производной в смысле Соболева. Если же $f \in C^k([0,T],X)$, то производные функции f в смысле определения 2.3.3 до порядка k включительно являются регулярными обобщёнными функциями и совпадают с поточечными производными $f^{(m)}(t)$, $t \in [0,T]$, $m = 0, 1, \ldots, k$. Если же $f \in C^\infty([0,T],X)$, то сказанное относится к производным всех порядков.

Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Через $W_p^1([0,T],X)$ обозначим множество функций $f \in L_p([0,T],X)$, имеющих первую обобщённую производную f', принадлежащую $L_p([0,T],T)$. Норму в $W_p^1([0,T],X)$ зададим равенством

$$\|f\|_{p,[0,T],X}^{(1)} \equiv \left[\int\limits_0^T [\|f(t)\|_X^p + \|f'(t)\|_X^p]dt\right]^{1/p} \quad \text{при } 1 \leqslant p < \infty;$$

$$\|f\|_{p,[0,T],X}^{(1)} \equiv \|f\|_{p,[0,T],X} + \|f'\|_{p,[0,T],X} \text{ при } p = \infty.$$

Теорема 2.3.1. *Пространство $W_p^1([0,T],X)$ полно при всех $1 \leqslant p \leqslant \infty$.*
Доказательство. Пусть последовательность $f_j \in W_p^1([0,T],X)$, $j = 1,2,\dots,$ — фундаментальна в норме пространства $W_p^1([0,T],X)$, т.е.

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, j_0 = j_0(\varepsilon) \geqslant 1\ \forall\, j \geqslant j_0(\varepsilon),\ k \geqslant 1 : \|f_{j+k} - f_j\|_{p,[0,T],X}^{(1)} \leqslant \varepsilon. \tag{2.3.5}$$

Из данного неравенства, в силу определения нормы в пространстве $W_p^1([0,T],X)$, выводим, что

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, j_0 = j_0(\varepsilon) \geqslant 1\ \forall\, j \geqslant j_0(\varepsilon),\ k \geqslant 1 : \|f_{j+k} - f_j\|_{p,[0,T],X} \leqslant \varepsilon\ \ \|f'_{j+k} - f'_j\|_{p,[0,T],X} \leqslant \varepsilon.$$

Это означает, что последовательности f_j, $j = 1,2,\dots,$ и f'_j, $j = 1,2,\dots,$ фундаментальны в пространстве $L_p([0,T],X)$. Поскольку же пространство $L_p([0,T],X)$ полно, то найдутся функции g_0, $g_1 \in L_p([0,T],X)$, такие, что

$$\|f_j - g_0\|_{p,[0,T],X} \to 0,\ \ \|f'_j - g_1\|_{p,[0,T],X} \to 0,\ \ j \to \infty. \tag{2.3.6}$$

Поэтому

$$\|f_j - g_0\|_{1,[0,T],X} \to 0,\ \ \|f'_j - g_1\|_{1,[0,T],X} \to 0,\ \ j \to \infty. \tag{2.3.7}$$

Так как $f_j \in W_p^1([0,T],X)$, $j = 1,2,\dots,$ то, ввиду определения класса $W_p^1([0,T],X)$, справедливо интегральное тождество

$$(\text{Б})\int\limits_0^T f'_j(t)\varphi(t)dt = -(\text{Б})\int\limits_0^T f_j(t)\varphi'(t)dt\ \ \forall\, \varphi \in \mathfrak{D}(0,T). \tag{2.3.8}$$

Перейдём в данном тождестве к пределу при $j \to \infty$. Прежде всего заметим, что

$$\left\|(\text{Б})\int\limits_0^T f'_j(t)\varphi(t)dt - (\text{Б})\int\limits_0^T g_1(t)\varphi(t)dt\right\|_X = \left\|(\text{Б})\int\limits_0^T [f'_j(t) - g_1(t)]\varphi(t)dt\right\|_X \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_0^T \|[f'_j(t) - g_1(t)]\varphi(t)\|_X dt = \int\limits_0^T \|f'_j(t) - g_1(t)\|_X |\varphi(t)| dt \leqslant |\varphi|_{[0,T]}^{(0)} \|f'_j - g_1\|_{1,[0,T],X} \to 0,\ \ j \to \infty,$$

на основании (2.3.7). Итак,

$$\lim_{j\to\infty}\left\|(\text{Б})\int\limits_0^T f'_j(t)\varphi(t)dt - (\text{Б})\int\limits_0^T g_1(t)\varphi(t)dt\right\|_X = 0. \tag{2.3.9}$$

Во–вторых,

$$\left\|\left[-(\text{Б})\int\limits_0^T f_j(t)\varphi(t)dt\right] - \left[-(\text{Б})\int\limits_0^T g_0(t)\varphi(t)dt\right]\right\|_X = \left\|-(\text{Б})\int\limits_0^T [f_j(t) - g_0(t)]\varphi(t)dt\right\|_X \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_0^T \|[f_j(t) - g_0(t)]\varphi(t)\|_X dt = \int\limits_0^T \|f_j(t) - g_0(t)\|_X |\varphi(t)| dt \leqslant |\varphi|_{[0,T]}^{(0)} \|f_j - g_0\|_{1,[0,T],X} \to 0,\ \ j \to \infty,$$

на основании (2.3.7). Как следствие,

$$\lim_{j\to\infty}\left\|\left[-(\text{Б})\int\limits_0^T f_j(t)\varphi(t)dt\right]-\left[-(\text{Б})\int\limits_0^T g_0(t)\varphi(t)dt\right]\right\|_X=0. \tag{2.3.10}$$

Переходя теперь в интегральном тождестве (2.3.8) с учётом предельных соотношений (2.3.9) и (2.3.10), получаем, что

$$(\text{Б})\int\limits_0^T g_1(t)\varphi(t)dt=-(\text{Б})\int\limits_0^T g_0(t)\varphi'(t)dt\ \ \forall\,\varphi\in\mathfrak{D}(0,T).$$

Данное тождество означает, что функция g_0 является элементом пространства $W_p^1([0,T],X)$, причём g_0', регулярная первая обобщённая производная функции g_0, совпадает с функцией g_1. Осталось доказать, что последовательность f_j, $j=1,2,\dots$, сходится в норме пространства $W_p^1([0,T],X)$ к функции g_0.

Предположим сначала, что $p\neq\infty$. Тогда неравенство (2.3.5) можно переписать в виде

$$\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,j_0=j_0(\varepsilon)\geqslant 1\ \forall\,j\geqslant j_0(\varepsilon),\ \ k\geqslant 1:[\|f_{j+k}-f_j\|^p_{p,[0,T],X}+\|f'_{j+k}-f'_j\|^p_{p,[0,T],X}]^{1/p}\leqslant\varepsilon.$$

Устремляя здесь k к бесконечности и учтя соотношения (2.3.6), будем иметь

$$\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,j_0=j_0(\varepsilon)\geqslant 1\ \forall\,j\geqslant j_0(\varepsilon):[\|g_0-f_j\|^p_{p,[0,T],X}+\|g_0'-f'_j\|^p_{p,[0,T],X}]^{1/p}\leqslant\varepsilon.$$

А это и означает, что $\|g_0-f_j\|^{(1)}_{p,[0,T],X}\to 0$, $j\to\infty$. Иными словами, мы доказали полноту пространства $W_p^1([0,T],X)$ при $p\neq\infty$.

Пусть теперь $p=\infty$. Тогда неравенство (2.3.5) можно записать в виде

$$\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,j_0=j_0(\varepsilon)\geqslant 1\ \forall\,j\geqslant j_0(\varepsilon),\ \ k\geqslant 1:\|f_{j+k}-f_j\|_{\infty,[0,T],X}+\|f'_{j+k}-f'_j\|_{\infty,[0,T],X}\leqslant\varepsilon.$$

Переходя в данном неравенстве к пределу при $k\to\infty$ и учтя соотношения (2.3.6), выводим, что

$$\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,j_0=j_0(\varepsilon)\geqslant 1\ \forall\,j\geqslant j_0(\varepsilon),\ \ k\geqslant 1:\|g_0-f_j\|_{\infty,[0,T],X}+\|g_0'-f'_j\|_{\infty,[0,T],X}\leqslant\varepsilon.$$

Последнее и даёт, что $\|g_0-f_j\|^{(1)}_{p,[0,T],X}\to 0$, $j\to\infty$. Таким образом, мы доказали полноту пространства $W_\infty^1([0,T],X)$. Теорема полностью доказана. ■

Теорема 2.3.2. *Если при некотором p, $1\leqslant p\leqslant\infty$, функция $f\in W_p^1([0,T],X)$, то при всех $x^*\in X^*$ функция*

$$[0,T]\ni t\mapsto\langle f(t),x^*\rangle \tag{2.3.11}$$

является элементом $W_p^1[0,T]$, а её обобщённой производной в смысле Соболева является функция

$$[0,T]\ni t\mapsto\langle f'(t),x^*\rangle. \tag{2.3.12}$$

Доказательство. Покажем сначала, что функции (2.3.11) и (2.3.12) при всех $x^*\in X^*$ принадлежат пространству $L_p[0,T]$. В самом деле, нетрудно видеть, что при всех $t\in[0,T]$

$$|\langle f(t),x^*\rangle|\leqslant\|f(t)\|_X\|x^*\|_{X^*},\ \ |\langle f'(t),x^*\rangle|\leqslant\|f'(t)\|_X\|x^*\|_{X^*}.$$

Поскольку же f, $f'\in L_p([0,T],X)$, то функции (2.3.11) и (2.3.12) при всех $x^*\in X^*$ принадлежат пространству $L_p[0,T]$.

Докажем теперь, что функция (2.3.12) является обобщённой производной в смысле Соболева функции (2.3.11). Действительно, поскольку $f\in W_p^1([0,T],X)$, то имеет место интегральное тождество

$$(\text{Б})\int\limits_0^T f'(t)\varphi(t)dt=-(\text{Б})\int\limits_0^T f(t)\varphi'(t)dt\ \ \forall\,\varphi\in\mathfrak{D}(0,T).$$

Поэтому при всех $\varphi \in \mathfrak{D}(0,T)$ и всех $x^* \in X^*$

$$\left\langle (\text{Б}) \int\limits_0^T f'(t)\varphi(t)dt, x^* \right\rangle = \left\langle -(\text{Б}) \int\limits_0^T f(t)\varphi'(t)dt, x^* \right\rangle; \ \int\limits_0^T \langle f'(t)\varphi(t), x^* \rangle\, dt = -\int\limits_0^T \langle f(t)\varphi'(t), x^* \rangle\, dt;$$

$$\int\limits_0^T \langle f'(t), x^* \rangle\, \varphi(t)dt = -\int\limits_0^T \langle f(t), x^* \rangle\, \varphi'(t)dt;$$

то есть

$$\int\limits_0^T \langle f'(t), x^* \rangle\, \varphi(t)dt = -\int\limits_0^T \langle f(t), x^* \rangle\, \varphi'(t)dt \ \ \forall\, \varphi \in \mathfrak{D}(0,T).$$

Последнее тождество и даёт утверждение леммы. ■

Теорема 2.3.3. *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $f \in W_p^1([0,T],X)$. *Тогда* $f \in C([0,T],X)$, *и справедлива оценка*

$$\max_{t\in[0,T]} \|f(t)\|_X \leqslant A_1 \|f\|^{(1)}_{p,[0,T],X}, \tag{2.3.13}$$

где постоянная $A_1 > 0$, *зависящая лишь от* $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *и от* $T > 0$ *та же, что и в теореме 2.1.2.*

Доказательство. Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$ и $f \in W_p^1([0,T],X)$ — произвольны. Выберем произвольно $x^* \in X^*$ и зафиксируем. Положим $F(t,x^*) \equiv \langle f(t), x^* \rangle$, $t \in [0,T]$. Согласно теореме 2.3.2, $F(\cdot,x^*) \in W_p^1[0,T]$. В силу теоремы 2.1.2 отсюда следует, что $F(\cdot,x^*) \in C[0,T]$, причём справедлива оценка

$$\max_{t\in[0,T]} |F(t,x^*)| \leqslant A_1 \|F(\cdot,x^*)\|^{(1)}_{p,[0,T]}.$$

Из определения норм в пространствах $W_p^1([0,T],X)$ и $W_p^1[0,T]$ следует, что

$$\|F(\cdot,x^*)\|^{(1)}_{p,[0,T]} \leqslant \|f\|^{(1)}_{p,[0,T],X} \|x^*\|_{X^*}.$$

Поэтому при всех $x^* \in X^*$ и всех $t \in [0,T]$

$$|\langle f(t), x^* \rangle| \leqslant A_1 \|f\|^{(1)}_{p,[0,T],X} \|x^*\|_{X^*}.$$

Переходя здесь к точной верхней грани по всем $x^* \in X^*$, для которых $\|x^*\|_{X^*} \leqslant 1$ и пользуясь изометричностью вложения $X \subset X^{**}$, заключаем, что

$$\sup_{t\in[0,T]} \|f(t)\|_X \leqslant A_1 \|f\|^{(1)}_{p,[0,T],X}. \tag{2.3.14}$$

Итак, мы доказали, что если $f \in W_p^1([0,T],X)$, то $f \in C_s([0,T],X)$ и имеет место оценка (2.3.14). Для завершения доказательства теоремы достаточно показать, что $f \in C([0,T],X)$. Поскольку, как нетрудно видеть, $W_p^1([0,T],X) \subset W_1^1([0,T],X)$ при $p > 1$, то достаточно доказать, что $W_1^1([0,T],X) \subset C([0,T],X)$.

В самом деле, пусть $f \in W_1^1([0,T],X)$, $x^* \in X^*$, t', $t'' \in [0,T]$, — произвольны. Тогда

$$|\langle f(t') - f(t''), x^* \rangle| = \left| \int\limits_{t'}^{t''} \langle f'(\xi), x^* \rangle d\xi \right| \leqslant \left| \int\limits_{t'}^{t''} \|f'(\xi)\|_X d\xi \right| \|x^*\|_{X^*}.$$

Взяв здесь точную верхнюю грань по всем $x^* \in X^*$, у которых $\|x^*\|_{X^*} \leqslant 1$ и пользуясь изометричностью вложения $X \subset X^{**}$, заключаем, что

$$\|f(t') - f(t'')\|_X \leqslant \left| \int\limits_{t'}^{t''} \|f'(\xi)\|_X d\xi \right|.$$

Из данного неравенства и абсолютной непрерывности интеграла Бохнера и следует справедливость включения $f \in C([0,T],X)$. Теорема полностью доказана. ■

Определение 2.3.4. *Функция* $f\colon [0,T] \to X$ *называется абсолютно непрерывной, если найдутся функция* $g \in L_1([0,T],X)$ *и константа* $C \in X$, *такие, что при всех* $t \in [0,T]$ *справедливо представление*

$$f(t) = C + (\text{Б}) \int\limits_0^t g(\xi)d\xi.$$

Множество всех абсолютно непрерывных функций со значениями в X обозначим $AC([0,T],X)$.

Теорема 2.3.4. *Множество $AC([0,T],X)$ совпадает с множеством $W_1^1([0,T],X)$.*

Доказательство. 1) Докажем сначала вложение $W_1^1([0,T],X) \subset AC([0,T],X)$. Выберем произвольно $f \in W_1^1([0,T],X)$ и зафиксируем. Пусть $x^* \in X^*$ — произвольно. Тогда, согласно теореме 2.3.2, функция

$$[0,T] \ni t \mapsto \langle f(t), x^* \rangle$$

является элементом $W_1^1[0,T]$, а её обобщённой производной в смысле Соболева является функция

$$[0,T] \ni t \mapsto \langle f'(t), x^* \rangle.$$

Поэтому, в силу теоремы 2.1.1, при всех $t \in [0,T]$ справедливо представление

$$\langle f(t), x^* \rangle = \langle f(0), x^* \rangle + \int\limits_0^t \langle f'(\xi), x^* \rangle d\xi,$$

эквивалентное соотношению

$$\langle f(t) - f(0), x^* \rangle - \int\limits_0^t \langle f'(\xi), x^* \rangle d\xi = 0.$$

В силу свойств интеграла Бохнера отсюда извлекаем, что

$$\langle f(t) - f(0), x^* \rangle - \left\langle (\text{Б}) \int\limits_0^t f'(\xi) d\xi, x^* \right\rangle = 0,$$

или, иначе,

$$\left\langle f(t) - f(0) - (\text{Б}) \int\limits_0^t f'(\xi) d\xi, x^* \right\rangle = 0 \ \ \forall\, x^* \in X^*.$$

Это означает, что при всех $t \in [0,T]$

$$f(t) - f(0) - (\text{Б}) \int\limits_0^t f'(\xi) d\xi = 0.$$

Таким образом, функция f абсолютно непрерывна на отрезке $[0,T]$, причём в качестве C можно взять $f(0)$, а в качестве функции $g \in L_1([0,T],X)$ — обобщённую производную f'. Итак, в силу произвольности $f \in W_1^1([0,T],X)$, мы доказали вложение $W_1^1([0,T],X) \subset AC([0,T],X)$.

2) Докажем теперь вложение $AC([0,T],X) \subset W_1^1([0,T],X)$. Выберем произвольно $f \in AC([0,T],X)$ и зафиксируем. Тогда найдутся функция $g \in L_1([0,T],X)$ и константа $C \in X$, такие, что при всех $t \in [0,T]$ справедливо представление

$$f(t) = C + (\text{Б}) \int\limits_0^t g(\xi) d\xi.$$

Следовательно, для всех $x^* \in X^*$

$$\langle f(t), x^* \rangle = \langle C, x^* \rangle + \left\langle (\text{Б}) \int\limits_0^t g(\xi) d\xi, x^* \right\rangle,$$

откуда, в силу свойств интеграла Бохнера,

$$\langle f(t), x^* \rangle = \langle C, x^* \rangle + \int\limits_0^t \langle g(\xi), x^* \rangle d\xi \ \ \forall\, t \in [0,T].$$

Это означает, что функция

$$[0,T] \ni t \mapsto \langle f(t), x^* \rangle$$

абсолютно непрерывна на отрезке $[0,T]$. Поэтому, в силу теоремы 2.1.1, функция

$$[0,T] \ni t \mapsto \langle f(t), x^* \rangle$$

является элементом $W_1^1[0,T]$,, а её обобщённой производной в смысле Соболева является функция

$$[0,T] \ni t \mapsto \langle g(t), x^* \rangle.$$

Иными словами, справедливо интегральное тождество

$$\int\limits_0^T \langle f(t), x^* \rangle \varphi'(t)dt = -\int\limits_0^T \langle g(t), x^* \rangle \varphi(t)dt \ \ \forall\, \varphi \in \mathfrak{D}(0,T).$$

Ясно, что, в силу свойств интеграла Бохнера, данное тождество можно переписать в виде

$$\left\langle (\text{Б}) \int\limits_0^T f(t)\varphi'(t)dt, x^* \right\rangle = -\left\langle (\text{Б}) \int\limits_0^T g(t)\varphi(t)dt, x^* \right\rangle \ \ \forall\, \varphi \in \mathfrak{D}(0,T),$$

или, что то же самое,

$$\left\langle (\text{Б}) \int\limits_0^T f(t)\varphi'(t)dt + (\text{Б}) \int\limits_0^T g(t)\varphi(t)dt, x^* \right\rangle = 0 \ \ \forall\, \varphi \in \mathfrak{D}(0,T).$$

В силу произвольности $x^* \in X^*$ отсюда следует, что

$$(\text{Б}) \int\limits_0^T f(t)\varphi'(t)dt = -(\text{Б}) \int\limits_0^T g(t)\varphi(t)dt \ \ \forall\, \varphi \in \mathfrak{D}(0,T).$$

Последнее и означает, что $f \in W_1^1([0,T],X)$, причём функция g является регулярной обобщённой производной функции f.

Теорема полностью доказана. ■

Следствие 2.3.1. *Если $f \in W_1^1([0,T],X)$, то при всех t, $\tau \in [0,T]$*

$$f(t) - f(\tau) = (\text{Б}) \int\limits_\tau^t f'(\xi)d\xi.$$

Нам также потребуется

Лемма 2.3.1. *[46, лемма 8.1, стр.307] Пусть X и Y — два банаховых пространства, $X \subset Y$ с непрерывным вложением, X рефлексивно. Тогда*

$$L_\infty([0,T],X) \cap C_s([0,T],Y) = C_s([0,T],X).$$

Теорема 2.3.5. *Множество многочленов с коэффициентами из X всюду плотно в $W_1^1([0,T],X)$.*

Доказательство. Пусть $f \in W_1^1([0,T],X)$. В силу теоремы 2.3.4 найдутся функция $g \in L_1([0,T],X)$ и константа $C \in X$, такие, что

$$f(t) = C + \int\limits_0^t g(\xi)d\xi \ \ \forall\, t \in [0,T]. \tag{2.3.15}$$

Поскольку, как известно, $C([0,T],X)$ всюду плотно в $L_1([0,T],X)$, а, в силу леммы 1.1.7, множество многочленов с коэффициентами из X всюду плотно в $C([0,T],X)$, то найдётся такая последовательность g_j, $j = 1,2,\dots$, многочленов с коэффициентами из X, что

$$\lim_{j\to\infty} \|g_j - g\|_{1,[0,T],X} = 0. \tag{2.3.16}$$

Из данного предельного соотношения и равенства (2.3.15) вытекает, что

$$\lim_{j\to\infty} \|f_j - f\|_{1,[0,T],X} = 0, \tag{2.3.17}$$

где

$$f_j(t) = C + \int\limits_0^t g_j(\xi)d\xi \;\; \forall\, t \in [0,T].$$

Так как при п.в. $t \in [0,T]$ справедливы равенства $f_j'(t) = g_j(t)$, $f'(t) = g(t)$, $j = 1,2,\ldots$, то, ввиду (2.3.16),

$$\lim_{j\to\infty} \|f_j' - f'\|_{1,[0,T],X} = 0.$$

Из данного равенства совместно с (2.3.17) вытекает, что

$$\lim_{j\to\infty} \|f_j - f\|^{(1)}_{1,[0,T],X} = 0.$$

Отсюда и из произвольности функции $f \in W_1^1([0,T],X)$ вытекает утверждение теоремы. ■

Приведём теперь следующие конструкции (см. [45, стр.70]). Пусть B_0, B и B_1 — банаховы пространства, причём $B_0 \subset B \subset B_1$, B_0 и B_1 рефлексивны, вложение B_0 в B компактно, а вложение B в B_1 — непрерывно. Пусть $\mathfrak{W} \equiv \{\mathfrak{z} : \mathfrak{z} \in L_{p_0}([0,T],B_0),\;\; \dot{\mathfrak{z}} \in L_{p_1}([0,T],B_1)$, где $1 < p_0 < \infty$, $1 < p_1 < \infty$. Снабдив $\mathfrak{W}$ нормой

$$\|\mathfrak{z}\|_{\mathfrak{W}} \equiv \|\mathfrak{z}\|_{p_0,[0,T],B_0} + \|\dot{\mathfrak{z}}\|_{p_1,[0,T],B_1},$$

получим банахово пространство. Нетрудно видеть, что $\mathfrak{W} \subset L_{p_0}([0,T],B)$.

Теорема 2.3.6. *[45, теорема 5.1 на стр.70] При сделанных предположениях вложение пространства $\mathfrak{W}$ в пространство $L_{p_0}([0,T],B)$ — компактно.*

2.4. Функции одного переменного и со значениями в гильбертовом пространстве

Пусть V и H — сепарабельные гильбертовы пространства со скалярными произведениями $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ и $\langle\cdot,\cdot\rangle_H$ соответственно, с соответствующими нормами $\|\cdot\|_V$ и $\|\cdot\|_H$, $V \subset H$, это вложение непрерывно и компактно. Иными словами, найдётся постоянная $\nu > 0$, такая, что

$$\|v\|_H \leqslant \nu\|v\|_V \;\; \forall\, v \in V,$$

причём любое ограниченное в норме V множество предкомпактно в норме H.

Через $\mathcal{W}_2^1([0,T];V,H)$ обозначим множество функций $\mathfrak{z} \in L_2([0,T],V)$, имеющих регулярную обобщённую производную $\dot{\mathfrak{z}} \in L_2([0,T],H)$. Наделим $\mathcal{W}_2^1([0,T];V,H)$ скалярным произведением

$$\langle \mathfrak{z}_1,\mathfrak{z}_2\rangle_{\mathcal{W}_2^1([0,T];V,H)} \equiv \int\limits_0^T [\langle \mathfrak{z}_1(t),\mathfrak{z}_2(t)\rangle_V + \langle \dot{\mathfrak{z}}_1(t),\dot{\mathfrak{z}}_2(t)\rangle_H]dt,$$

с соответствующей нормой

$$\|\mathfrak{z}\|_{\mathcal{W}_2^1([0,T];V,H)} = \sqrt{\langle \mathfrak{z},\mathfrak{z}\rangle_{\mathcal{W}_2^1([0,T];V,H)}}.$$

Через $\mathcal{W}_\infty^1([0,T];V,H)$ обозначим множество функций $\mathfrak{z} \in L_\infty([0,T],V)$, имеющих регулярную обобщённую производную $\dot{\mathfrak{z}} \in L_\infty([0,T],H)$. Наделим $\mathcal{W}_\infty^1([0,T];V,H)$ нормой

$$\|\mathfrak{z}\|_{\mathcal{W}_\infty^1([0,T];V,H)} \equiv \|\mathfrak{z}\|_{\infty,[0,T],V} + \|\dot{\mathfrak{z}}\|_{\infty,[0,T],H}.$$

Теорема 2.4.1. *Пространство $\mathcal{W}_2^1([0,T];V,H)$ — гильбертово.*

Доказательство. Предположим, что последовательность $f_j \in \mathcal{W}_2^1([0,T];V,H)$, $j = 1,2,\ldots$, — фундаментальна в норме пространства $\mathcal{W}_2^1([0,T];V,H)$, т.е.

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, j_0 = j_0(\varepsilon) \geqslant 1 \;\forall\, j \geqslant j_0(\varepsilon),\;\; k \geqslant 1 : \|f_{j+k} - f_j\|_{\mathcal{W}_2^1([0,T];V,H)} \leqslant \varepsilon. \tag{2.4.1}$$

Отсюда, ввиду определения нормы в пространстве $\mathcal{W}_2^1([0,T];V,H)$, выводим, что

$$\forall\,\varepsilon>0\ \exists\, j_0=j_0(\varepsilon)\geqslant 1\ \forall\, j\geqslant j_0(\varepsilon),\ k\geqslant 1:\|f_{j+k}-f_j\|_{2,[0,T],V}\leqslant\varepsilon,\ \ \|f'_{j+k}-f'_j\|_{2,[0,T],H}\leqslant\varepsilon.$$

Это означает, что последовательности f_j, $j=1,2,\ldots$, и f'_j, $j=1,2,\ldots$, фундаментальны в пространствах $L_2([0,T],V)$ и $L_2([0,T],H)$ соответственно. А так как данные пространства полны, то существуют функции $g_0\in L_2([0,T],V)$, $g_1\in L_2([0,T],H)$, такие, что

$$\|f_j-g_0\|_{2,[0,T],V}\to 0,\ \ \|f'_j-g_1\|_{2,[0,T],H}\to 0,\ \ j\to\infty. \tag{2.4.2}$$

Поэтому

$$\|f_j-g_0\|_{1,[0,T],V}\to 0,\ \ \|f'_j-g_1\|_{1,[0,T],H}\to 0,\ \ j\to\infty. \tag{2.4.3}$$

Поскольку $f_j\in\mathcal{W}_2^1([0,T];V,H)$, $j=1,2,\ldots$, то, на основании определения класса $\mathcal{W}_2^1([0,T];V,H)$, справедливо интегральное тождество

$$(\text{Б})\int\limits_0^T f'_j(t)\varphi(t)dt=-(\text{Б})\int\limits_0^T f_j(t)\varphi'(t)dt\ \ \forall\,\varphi\in\mathfrak{D}(0,T), \tag{2.4.4}$$

интегралы Бохнера в котором понимаются как интегралы Бохнера от функций со значениями в H. Совершим в данном тождестве переход к пределу при $j\to\infty$. Во–первых, легко видеть, что

$$\left\|(\text{Б})\int\limits_0^T f'_j(t)\varphi(t)dt-(\text{Б})\int\limits_0^T g_1(t)\varphi(t)dt\right\|_H=\left\|(\text{Б})\int\limits_0^T [f'_j(t)-g_1(t)]\varphi(t)dt\right\|_H\leqslant$$
$$\leqslant\int\limits_0^T\|[f'_j(t)-g_1(t)]\varphi(t)\|_H dt=\int\limits_0^T\|f'_j(t)-g_1(t)\|_H|\varphi(t)|dt\leqslant|\varphi|^{(0)}_{[0,T]}\|f'_j-g_1\|_{1,[0,T],H}\to 0,\ \ j\to\infty,$$

в силу (2.4.3). Итак,

$$\lim_{j\to\infty}\left\|(\text{Б})\int\limits_0^T f'_j(t)\varphi(t)dt-(\text{Б})\int\limits_0^T g_1(t)\varphi(t)dt\right\|_H=0. \tag{2.4.5}$$

Во–вторых,

$$\left\|\left[-(\text{Б})\int\limits_0^T f_j(t)\varphi(t)dt\right]-\left[-(\text{Б})\int\limits_0^T g_0(t)\varphi(t)dt\right]\right\|_H=\left\|-(\text{Б})\int\limits_0^T [f_j(t)-g_0(t)]\varphi(t)dt\right\|_H\leqslant$$
$$\leqslant\int\limits_0^T\|[f_j(t)-g_0(t)]\varphi(t)\|_X dt=\int\limits_0^T\|f_j(t)-g_0(t)\|_H|\varphi(t)|dt\leqslant|\varphi|^{(0)}_{[0,T]}\|f_j-g_0\|_{1,[0,T],H}\leqslant$$
$$\leqslant|\varphi|^{(0)}_{[0,T]}\nu\|f_j-g_0\|_{1,[0,T],V}\to 0,\ \ j\to\infty,$$

на основании (2.4.3). Как следствие,

$$\lim_{j\to\infty}\left\|\left[-(\text{Б})\int\limits_0^T f_j(t)\varphi(t)dt\right]-\left[-(\text{Б})\int\limits_0^T g_0(t)\varphi(t)dt\right]\right\|_H=0. \tag{2.4.6}$$

Переходя теперь в интегральном тождестве (2.4.4), с учётом предельных соотношений (2.4.5) и (2.4.6), к пределу при $j\to\infty$, получаем, что

$$(\text{Б})\int\limits_0^T g_1(t)\varphi(t)dt=-(\text{Б})\int\limits_0^T g_0(t)\varphi'(t)dt\ \ \forall\,\varphi\in\mathfrak{D}(0,T).$$

Данное тождество означает, что функция g_0 является элементом пространства $\mathcal{W}_2^1([0,T];V,H)$, причём g'_0, регулярная первая обобщённая производная функции g_0, совпадает с функцией g_1. Осталось доказать, что последовательность f_j, $j=1,2,\ldots$, сходится в $\mathcal{W}_2^1([0,T];V,H)$ к функции g_0.

Несложно видеть, что неравенство (2.4.1) можно переписать в виде

$$\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,j_0=j_0(\varepsilon)\geqslant 1\ \forall\,j\geqslant j_0(\varepsilon),\ k\geqslant 1:[\|f_{j+k}-f_j\|^2_{2,[0,T],V}+\|f'_{j+k}-f'_j\|^2_{2,[0,T],H}]^{1/2}\leqslant\varepsilon.$$

Устремляя здесь k к бесконечности и учтя соотношения (2.4.2), будем иметь

$$\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,j_0=j_0(\varepsilon)\geqslant 1\ \forall\,j\geqslant j_0(\varepsilon):[\|g_0-f_j\|^2_{2,[0,T],V}+\|g'_0-f'_j\|^2_{2,[0,T],H}]^{1/2}\leqslant\varepsilon.$$

А это и означает, что $\|g_0-f_j\|_{\mathcal{W}^1_2([0,T];V,H)}\to 0,\ j\to\infty$. Лемма полностью доказана. ■

Теорема 2.4.2. *Пространство* $\mathcal{W}^1_\infty([0,T];V,H)$ *— полно.*

Доказательство. Предположим, что последовательность $f_j\in\mathcal{W}^1_\infty([0,T];V,H)$, $j=1,2,\ldots,$ — фундаментальна в норме пространства $\mathcal{W}^1_\infty([0,T];V,H)$, т.е.

$$\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,j_0=j_0(\varepsilon)\geqslant 1\ \forall\,j\geqslant j_0(\varepsilon),\ k\geqslant 1:\|f_{j+k}-f_j\|_{\mathcal{W}^1_\infty([0,T];V,H)}\leqslant\varepsilon. \tag{2.4.7}$$

Отсюда, ввиду определения нормы в пространстве $\mathcal{W}^1_\infty([0,T];V,H)$, выводим, что

$$\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,j_0=j_0(\varepsilon)\geqslant 1\ \forall\,j\geqslant j_0(\varepsilon),\ k\geqslant 1:\|f_{j+k}-f_j\|_{\infty,[0,T],V}\leqslant\varepsilon,\ \ \|f'_{j+k}-f'_j\|_{\infty,[0,T],H}\leqslant\varepsilon.$$

Это означает, что последовательности $f_j,\ j=1,2,\ldots,$ и $f'_j,\ j=1,2,\ldots,$ фундаментальны в пространствах $L_\infty([0,T],V)$ и $L_\infty([0,T],H)$ соответственно. А так как данные пространства полны, то существуют функции $g_0\in L_\infty([0,T],V)$, $g_1\in L_\infty([0,T],H)$, такие, что

$$\|f_j-g_0\|_{\infty,[0,T],V}\to 0,\ \ \|f'_j-g_1\|_{\infty,[0,T],H}\to 0,\ \ j\to\infty. \tag{2.4.8}$$

Поэтому

$$\|f_j-g_0\|_{1,[0,T],V}\to 0,\ \ \|f'_j-g_1\|_{1,[0,T],H}\to 0,\ \ j\to\infty. \tag{2.4.9}$$

Так как $f_j\in\mathcal{W}^1_\infty([0,T];V,H)$, $j=1,2,\ldots,$ то, согласно определению класса $\mathcal{W}^1_\infty([0,T];V,H)$, имеет место интегральное тождество

$$(\text{Б})\int\limits_0^T f'_j(t)\varphi(t)dt=-(\text{Б})\int\limits_0^T f_j(t)\varphi'(t)dt\ \ \forall\,\varphi\in\mathfrak{D}(0,T), \tag{2.4.10}$$

интегралы Бохнера в котором понимаются как интегралы Бохнера от функций со значениями в H. Совершим в данном тождестве переход к пределу при $j\to\infty$. Во–первых, легко видеть, что

$$\left\|(\text{Б})\int\limits_0^T f'_j(t)\varphi(t)dt-(\text{Б})\int\limits_0^T g_1(t)\varphi(t)dt\right\|_H=\left\|(\text{Б})\int\limits_0^T[f'_j(t)-g_1(t)]\varphi(t)dt\right\|_H\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_0^T\|[f'_j(t)-g_1(t)]\varphi(t)\|_H dt=\int\limits_0^T\|f'_j(t)-g_1(t)\|_H|\varphi(t)|dt\leqslant|\varphi|^{(0)}_{[0,T]}\|f'_j-g_1\|_{1,[0,T],H}\to 0,\ \ j\to\infty,$$

в силу (2.4.9). Итак,

$$\lim_{j\to\infty}\left\|(\text{Б})\int\limits_0^T f'_j(t)\varphi(t)dt-(\text{Б})\int\limits_0^T g_1(t)\varphi(t)dt\right\|_H=0. \tag{2.4.11}$$

Во–вторых,

$$\left\|\left[-(\text{Б})\int\limits_0^T f_j(t)\varphi(t)dt\right]-\left[-(\text{Б})\int\limits_0^T g_0(t)\varphi(t)dt\right]\right\|_H=\left\|-(\text{Б})\int\limits_0^T[f_j(t)-g_0(t)]\varphi(t)dt\right\|_H\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_0^T\|[f_j(t)-g_0(t)]\varphi(t)\|_X dt=\int\limits_0^T\|f_j(t)-g_0(t)\|_H|\varphi(t)|dt\leqslant|\varphi|^{(0)}_{[0,T]}\|f_j-g_0\|_{1,[0,T],H}\leqslant$$

$$\leqslant|\varphi|^{(0)}_{[0,T]}\nu\|f_j-g_0\|_{1,[0,T],V}\to 0,\ \ j\to\infty,$$

вследствие (2.4.9). Как следствие,

$$\lim_{j\to\infty}\left\|\left[-(\text{Б})\int\limits_0^T f_j(t)\varphi(t)dt\right]-\left[-(\text{Б})\int\limits_0^T g_0(t)\varphi(t)dt\right]\right\|_H=0. \tag{2.4.12}$$

Переходя теперь в интегральном тождестве (2.4.10), с учётом предельных соотношений (2.4.11) и (2.4.12), к пределу при $j\to\infty$, получаем, что

$$(\text{Б})\int\limits_0^T g_1(t)\varphi(t)dt=-(\text{Б})\int\limits_0^T g_0(t)\varphi'(t)dt\ \ \forall\,\varphi\in\mathfrak{D}(0,T).$$

Данное тождество означает, что функция g_0 является элементом пространства $\mathcal{W}^1_\infty([0,T];V,H)$, причём g_0', регулярная первая обобщённая производная функции g_0, совпадает с функцией g_1. Осталось доказать, что последовательность f_j, $j=1,2,\ldots$, сходится в $\mathcal{W}^1_\infty([0,T];V,H)$ к функции g_0.

Несложно видеть, что неравенство (2.4.1) можно переписать в виде

$$\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,j_0=j_0(\varepsilon)\geqslant 1\ \forall\,j\geqslant j_0(\varepsilon),\ k\geqslant 1:\|f_{j+k}-f_j\|_{\infty,[0,T],V}+\|f'_{j+k}-f'_j\|_{\infty,[0,T],H}\leqslant\varepsilon.$$

Устремляя здесь k к бесконечности и учтя соотношения (2.4.8), будем иметь

$$\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,j_0=j_0(\varepsilon)\geqslant 1\ \forall\,j\geqslant j_0(\varepsilon):[\|g_0-f_j\|_{\infty,[0,T],V}+\|g'_0-f'_j\|_{\infty,[0,T],H}\leqslant\varepsilon.$$

А это и означает, что $\|g_0-f_j\|_{\mathcal{W}^1_\infty([0,T];V,H)}\to 0$, $j\to\infty$. Лемма полностью доказана. ■

Из определения классов $\mathcal{W}^1_2([0,T];V,H)$ и $\mathcal{W}^1_\infty([0,T];V,H)$ вытекают теоретико–множественные вложения $\mathcal{W}^1_2([0,T];V,H)\subset W^1_2([0,T],H)$, $\mathcal{W}^1_\infty([0,T];V,H)\subset W^1_\infty([0,T],H)$. Поэтому, на основании теоремы 2.3.3, справедлива

Теорема 2.4.3. *Пусть $f\in\mathcal{W}^1_2([0,T];V,H)$, $g\in\mathcal{W}^1_\infty([0,T];V,H)$. Тогда f, $g\in C([0,T],H)$, причём*

$$\max_{t\in[0,T]}\|f(t)\|_H\leqslant A_1(2,T)\max\{1,\nu\}\|f\|_{\mathcal{W}^1_2([0,T];V,H)},$$
$$\max_{t\in[0,T]}\|g(t)\|_H\leqslant A_1(\infty,T)\max\{1,\nu\}\|g\|_{\mathcal{W}^1_\infty([0,T];V,H)},$$

где A_1 — та же постоянная, что и в теореме 2.1.2.

Через $\text{Э}([0,T];V,H)$ обозначим множество функций из $\mathfrak{z}\in C_s([0,T],V)$, принадлежащих пространству $W^1_\infty([0,T],H)$. Зададим в $\text{Э}([0,T];V,H)$ норму равенством

$$\|\mathfrak{z}\|_{\text{Э}([0,T];V,H)}\equiv\|\mathfrak{z}\|_{C_s([0,T],V)}+\|\dot{\mathfrak{z}}\|_{\infty,[0,T],H}.$$

Теорема 2.4.4. *Пространство $\text{Э}([0,T];V,H)$ — банахово.*

Доказательство. Пусть последовательность $\mathfrak{z}_j$, $j=1,2,\ldots$, — фундаментальна в норме пространства $\text{Э}([0,T];V,H)$. Это означает, что

$$\begin{gathered}\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,j_0=j_0(\varepsilon)\geqslant 1\ \forall\,j\geqslant j_0(\varepsilon),\ k\geqslant 1: \\ \|\mathfrak{z}_{j+k}-\mathfrak{z}_j\|_{\text{Э}([0,T];V,H)}\equiv\|\mathfrak{z}_{j+k}-\mathfrak{z}_j\|_{C_s([0,T],V)}+\|\dot{\mathfrak{z}}_{j+k}-\dot{\mathfrak{z}}_j\|_{\infty,[0,T],H}\leqslant\varepsilon.\end{gathered} \tag{2.4.13}$$

Таким образом, последовательность $\mathfrak{z}_j$, $j=1,2,\ldots$, фундаментальна в пространстве $C_s([0,T],V)$, наделённом нормой $\|\cdot\|_{C_s([0,T],V)}$, а последовательность $\dot{\mathfrak{z}}_j$, $j=1,2,\ldots$, фундаментальна в норме пространства $L_\infty([0,T],H)$. На основании леммы 1.1.2 и полноты пространства $L_\infty([0,T],H)$ найдутся функции $\mathfrak{g}_0\in C_s([0,T],V)$ и $\mathfrak{g}_1\in L_\infty([0,T],H)$, такие, что

$$\lim_{j\to\infty}\|\mathfrak{z}_j-\mathfrak{g}_0\|_{C_s([0,T],V)}=0,\ \ \lim_{j\to\infty}\|\dot{\mathfrak{z}}_j-\mathfrak{g}_1\|_{\infty,[0,T],H}=0. \tag{2.4.14}$$

Так как $\mathfrak{z}_j\in\text{Э}([0,T];V,H)$, $j=1,2,\ldots$, то $\mathfrak{z}_j\in W^1_\infty([0,T],H)$, $j=1,2,\ldots$, вследствие чего выполнено интегральное тождество

$$(\text{Б})\int\limits_0^T\dot{\mathfrak{z}}_j(t)\varphi(t)dt=-(\text{Б})\int\limits_0^T\mathfrak{z}_j(t)\varphi'(t)dt\ \ \forall\,\varphi\in\mathfrak{D}(0,T). \tag{2.4.15}$$

Заметим, что

$$\left\|(\text{Б})\int\limits_0^T \dot{\mathfrak{z}}_j(t)\varphi(t)dt-(\text{Б})\int\limits_0^T \mathfrak{g}_1(t)\varphi(t)dt\right\|_H=\left\|(\text{Б})\int\limits_0^T [\dot{\mathfrak{z}}_j(t)-\mathfrak{g}_1(t)]\varphi(t)dt\right\|_H\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_0^T \|[\dot{\mathfrak{z}}_j(t)-\mathfrak{g}_1(t)]\varphi(t)\|_H dt=\int\limits_0^T \|\dot{\mathfrak{z}}_j(t)-\mathfrak{g}_1(t)\|_H|\varphi(t)|dt\leqslant T|\varphi|^{(0)}_{[0,T]}\|\dot{\mathfrak{z}}_j-\mathfrak{g}_1\|_{\infty,[0,T],H}\to 0,\ \ j\to\infty,$$

ввиду соотношений (2.4.14). Таким образом,

$$\lim_{j\to\infty}\left\|(\text{Б})\int\limits_0^T \dot{\mathfrak{z}}_j(t)\varphi(t)dt-(\text{Б})\int\limits_0^T \mathfrak{g}_1(t)\varphi(t)dt\right\|_H=0. \tag{2.4.16}$$

Кроме того,

$$\left\|\left[-(\text{Б})\int\limits_0^T \mathfrak{z}_j(t)\varphi(t)dt\right]-\left[-(\text{Б})\int\limits_0^T \mathfrak{g}_0(t)\varphi(t)dt\right]\right\|_H=\left\|-(\text{Б})\int\limits_0^T [\mathfrak{z}_j(t)-\mathfrak{g}_0(t)]\varphi(t)dt\right\|_H\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_0^T \|[\mathfrak{z}_j(t)-\mathfrak{g}_0(t)]\varphi(t)\|_H dt=\int\limits_0^T \|\mathfrak{z}_j(t)-\mathfrak{g}_0(t)\|_H|\varphi(t)|dt\leqslant \nu T|\varphi|^{(0)}_{[0,T]}\|\mathfrak{z}_j-\mathfrak{g}_0\|_{C_s([0,T],V)}\to 0,\ \ j\to\infty,$$

ввиду соотношений (2.4.14). Следовательно,

$$\lim_{j\to\infty}\left\|\left[-(\text{Б})\int\limits_0^T \mathfrak{z}_j(t)\varphi(t)dt\right]-\left[-(\text{Б})\int\limits_0^T \mathfrak{g}_0(t)\varphi(t)dt\right]\right\|_H=0. \tag{2.4.17}$$

Перейдя теперь в (2.4.15) с учётом (2.4.16) и (2.4.17), получаем, что

$$(\text{Б})\int\limits_0^T \mathfrak{g}_1(t)\varphi(t)dt=-(\text{Б})\int\limits_0^T \mathfrak{g}_0(t)\varphi'(t)dt\ \ \forall\,\varphi\in\mathfrak{D}(0,T).$$

Поэтому $g_0\in W^1_\infty([0,T],H)$, а её регулярная первая обобщённая производная g_0' совпадает с g_1. Поскольку же ранее было доказано включение $g_0\in C_s([0,T],V)$, то $g_0\in Э([0,T];V,H)$. Переходя затем к пределу при $k\to\infty$ в соотношении (2.4.13) и учтя предельные соотношения (2.4.14), получим, что

$$\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,j_0=j_0(\varepsilon)\geqslant 1\ \forall\,j\geqslant j_0(\varepsilon):\|\mathfrak{g}_0-\mathfrak{z}_j\|_{Э([0,T];V,H)}\equiv\|\mathfrak{g}_0-\mathfrak{z}_j\|_{C_s([0,T],V)}+\|\dot{\mathfrak{g}}_0-\dot{\mathfrak{z}}_j\|_{\infty,[0,T],H}\leqslant\varepsilon.$$

Последнее же означает, что $\|\mathfrak{g}_0-\mathfrak{z}_j\|_{Э([0,T];V,H)}\to 0$, $j\to\infty$. Теорема доказана. ■

Определение 2.4.1. *[14] Пусть $\mathcal{P}$ — компактное метрическое пространство с метрикой $d(\cdot,\cdot)$, X — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_X$. Множество $\mathfrak{M}\subset C(\mathcal{P},X)$ называется* ***равностепенно непрерывным****, если*

$$\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,\delta=\delta(\varepsilon)>0\ \forall\,p',\ p''\in\mathcal{P},\ d(p',p'')\leqslant\delta\ \ \forall\,f\in\mathfrak{M}:\|f(p')-f(p'')\|_X\leqslant\varepsilon.$$

Теорема 2.4.5. *[14] (Теорема Арцела–Асколи) Пусть $\mathcal{P}$ — компактное метрическое пространство с метрикой $d(\cdot,\cdot)$, X — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_X$. Множество $\mathfrak{M}\subset C(\mathcal{P},X)$ предкомпактно в $C(\mathcal{P},X)$ тогда и только тогда, когда*

1) множество $\mathfrak{M}$ равностепенно непрерывно;

2) множество $\{f(p):p\in\mathcal{P},\ \ f\in\mathfrak{M}\}\subset X$ — предкомпактно в X.

Теорема 2.4.6. *Если $\mathfrak{z}\in Э([0,T];V,H)$, то $\mathfrak{z}\in C([0,T],H)$, причём*

$$\max_{t\in[0,T]}\|\mathfrak{z}(t)\|_H\leqslant\nu\|\mathfrak{z}\|_{Э([0,T];V,H)}.$$

Кроме того, вложение $Э([0,T];V,H)\subset C([0,T],H)$ — компактно.

Доказательство. Утверждение о том, что имеет место вложение $Э([0,T];V,H) \subset C([0,T],H)$ и это вложение непрерывно, следует из предыдущей теоремы, очевидного вложения

$$Э([0,T];V,H) \subset \mathcal{W}([0,T];V,H)$$

и определения нормы в пространстве $Э([0,T];V,H)$. Таким образом, достаточно лишь доказать компактность вложения $Э([0,T];V,H) \subset C([0,T],H)$.

В самом деле, пусть $\mathfrak{M} \subset Э([0,T];V,H)$ — ограниченное в норме $Э([0,T];V,H)$ множество. Тогда найдётся постоянная $K > 0$, такая, что

$$\forall \mathfrak{z} \in \mathfrak{M} : \sup_{t\in[0,T]} \|\mathfrak{z}(t)\|_V + \operatorname{vraisup}_{t\in[0,T]} \|\dot{\mathfrak{z}}(t)\|_H \leqslant K.$$

Иными словами, множество

$$\{\mathfrak{z}(t) : t \in [0,T], \ \ \mathfrak{z} \in \mathfrak{M}\} \subset V,$$

ограничено в норме V, и, в силу компактности вложения $V \subset H$, предкомпактно в норме пространства H. Далее, при всех $h \in H$ и при всех t', $t'' \in [0,T]$

$$|\langle \mathfrak{z}(t') - \mathfrak{z}(t''), h\rangle_H| = \left|\int\limits_{t''}^{t'} \langle \dot{\mathfrak{z}}(t), h\rangle_H dt\right| \leqslant \left|\int\limits_{t''}^{t'} \|\dot{\mathfrak{z}}(t)\|_H dt\right| \|h\|_H \leqslant C|t' - t''| \|h\|_H.$$

Взяв точную верхнюю грань по всем $h \in H$, $\|h\|_H \leqslant 1$, получим, что

$$\|\mathfrak{z}(t') - \mathfrak{z}(t'')\|_H \leqslant C|t' - t''|.$$

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta = \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{C}$, такое, что для всех t', $t'' \in [0,T]$, $|t' - t''| < \delta$ и для всех $\mathfrak{z} \in \mathfrak{M}$ выполнено условие

$$\|\mathfrak{z}(t') - \mathfrak{z}(t'')\|_H < \varepsilon.$$

Следовательно, в силу теоремы 2.4.5, множество $\mathfrak{M} \subset Э([0,T];V,H)$ предкомпактно в норме пространства $C([0,T],H)$. Таким образом, теорема полностью доказана. ■

Через $\mathbb{W}([0,T];V,H)$ обозначим множество $W^1_\infty([0,T],H) \cap L_\infty([0,T],V)$. Согласно [64, теорема 8.18.3, стр.809],

$$L_\infty([0,T],V) \cong (L_1([0,T],V^*))^*, \ \ L_\infty([0,T],H) \cong (L_1([0,T],H))^*, \tag{2.4.18}$$

где знаком $\cong$ обозначен изометрический изоморфизм банаховых пространств.

Будем говорить, что последовательность $\mathfrak{z}_j \in \mathbb{W}([0,T];V,H)$, $j = 1,2,\ldots$, сходится к функции $\mathfrak{z} \in \mathbb{W}([0,T];V,H)$, если

$$\mathfrak{z}_j \to \mathfrak{z}, \ \ j \to \infty, \ *\text{–слабо в } L_\infty([0,T],V); \ \ \dot{\mathfrak{z}}_j \to \dot{\mathfrak{z}}, \ \ j \to \infty, \ *\text{–слабо в } L_\infty([0,T],H);$$

то есть

$$\lim_{j\to\infty} \int\limits_0^T \langle \mathfrak{z}_j(t), \varphi(t)\rangle dt = \int\limits_0^T \langle \mathfrak{z}(t), \varphi(t)\rangle dt \ \ \forall \varphi \in L_1([0,T],V^*);$$

$$\lim_{j\to\infty} \int\limits_0^T \langle \dot{\mathfrak{z}}_j(t), \varphi(t)\rangle_H dt = \int\limits_0^T \langle \dot{\mathfrak{z}}(t), \varphi(t)\rangle_H dt \ \ \forall \varphi \in L_1([0,T],H).$$

Теорема 2.4.7. *Пусть последовательность $\mathfrak{z}_j \in \mathbb{W}([0,T];V,H)$, $j = 1,2,\ldots$, такова, что для некоторых функций $\mathfrak{g}_0 \in L_\infty([0,T],V)$ и $\mathfrak{g}_1 \in L_\infty([0,T],H)$*

$$\mathfrak{z}_j \to \mathfrak{g}_0, \ \ j \to \infty, \ *\text{–слабо в } L_\infty([0,T],V); \ \ \dot{\mathfrak{z}}_j \to \mathfrak{g}_1, \ \ j \to \infty, \ *\text{–слабо в } L_\infty([0,T],H). \tag{2.4.19}$$

Тогда $\mathfrak{g}_0 \in \mathbb{W}([0,T];V,H)$, а её регулярная первая обобщённая производная $\mathfrak{g}_0'$ совпадает с $\mathfrak{g}_1$.

Доказательство. Пусть найдутся функции $\mathfrak{g}_0 \in L_\infty([0,T],V)$ и $\mathfrak{g}_1 \in L_\infty([0,T],H)$, такие, что выполнены соотношения (2.4.19). Поскольку $\mathfrak{z}_j \in \mathbb{W}([0,T];V,H)$, $j=1,2,\dots$, то имеет место интегральное тождество

$$(\text{Б})\int\limits_0^T \dot{\mathfrak{z}}_j(t)\varphi(t)dt = -(\text{Б})\int\limits_0^T \mathfrak{z}_j(t)\varphi'(t)dt \ \ \forall\,\varphi \in \mathfrak{D}(0,T).$$

Отсюда следует, что при всех $h \in H$

$$\left\langle (\text{Б})\int\limits_0^T \dot{\mathfrak{z}}_j(t)\varphi(t)dt, h\right\rangle_H = \left\langle -(\text{Б})\int\limits_0^T \mathfrak{z}_j(t)\varphi'(t)dt, h\right\rangle_H \quad \forall\,\varphi \in \mathfrak{D}(0,T);$$

$$\int\limits_0^T \langle \dot{\mathfrak{z}}_j(t)\varphi(t), h\rangle_H\,dt = -\int\limits_0^T \langle \mathfrak{z}_j(t)\varphi'(t), h\rangle_H\,dt \ \ \forall\,\varphi \in \mathfrak{D}(0,T);$$

$$\int\limits_0^T \langle \dot{\mathfrak{z}}_j(t), \varphi(t)h\rangle_H\,dt = -\int\limits_0^T \langle \mathfrak{z}_j(t), \varphi'(t)h\rangle_H\,dt \ \ \forall\,\varphi \in \mathfrak{D}(0,T).$$

Переходя здесь к пределу при $j \to \infty$ с учётом соотношений (2.4.19), будем иметь

$$\int\limits_0^T \langle \mathfrak{g}_1(t), \varphi(t)h\rangle_H\,dt = -\int\limits_0^T \langle \mathfrak{g}_0(t), \varphi'(t)h\rangle_H\,dt \ \ \forall\,\varphi \in \mathfrak{D}(0,T).$$

Поэтому при всех $h \in H$

$$\left\langle (\text{Б})\int\limits_0^T \mathfrak{g}_1(t)\varphi(t)dt, h\right\rangle_H = \left\langle -(\text{Б})\int\limits_0^T \mathfrak{g}_0(t)\varphi'(t)dt, h\right\rangle_H \quad \forall\,\varphi \in \mathfrak{D}(0,T);$$

$$\left\langle (\text{Б})\int\limits_0^T \mathfrak{g}_1(t)\varphi(t)dt + (\text{Б})\int\limits_0^T \mathfrak{g}_0(t)\varphi'(t)dt, h\right\rangle_H = 0 \ \ \forall\,\varphi \in \mathfrak{D}(0,T);$$

ввиду чего

$$(\text{Б})\int\limits_0^T \mathfrak{g}_1(t)\varphi(t)dt + (\text{Б})\int\limits_0^T \mathfrak{g}_0(t)\varphi'(t)dt = 0 \ \ \forall\,\varphi \in \mathfrak{D}(0,T);$$

или, иначе,

$$(\text{Б})\int\limits_0^T \mathfrak{g}_1(t)\varphi(t)dt = -(\text{Б})\int\limits_0^T \mathfrak{g}_0(t)\varphi'(t)dt \ \ \forall\,\varphi \in \mathfrak{D}(0,T);$$

Последнее и означает, что $\mathfrak{g}_0 \in \mathbb{W}([0,T];V,H)$, а её регулярная первая обобщённая производная $\mathfrak{g}_0'$ совпадает с $\mathfrak{g}_1$. Теорема доказана. ■

Теорема 2.4.8. *Любая функция $f \in Э([0,T];V,H)$ принадлежит пространству $\mathbb{W}([0,T];V,H)$, причём любое множество, ограниченное в норме пространства $Э([0,T];V,H)$, секвенциально компактно в $\mathbb{W}([0,T];V,H)$.*

Доказательство. Теоретико–множественное вложение $Э([0,T];V,H) \subset \mathbb{W}([0,T];V,H)$ вытекает из определения этих пространств.

Докажем, что любое множество, ограниченное в норме пространства $Э([0,T];V,H)$, секвенциально компактно в $\mathbb{W}([0,T];V,H)$. В самом деле, пусть последовательность $\mathfrak{z}_j \in Э([0,T];V,H)$, $j=1,2,\dots$, ограничена в норме пространства $Э([0,T];V,H)$, т.е. найдётся константа $K>0$, такая, что для всех $j=1,2,\dots$

$$\sup_{t\in[0,T]} \|\mathfrak{z}_j(t)\|_V + \operatorname*{vraisup}_{t\in[0,T]} \|\dot{\mathfrak{z}}_j(t)\|_H \leqslant K. \tag{2.4.20}$$

В силу леммы 1.3.1 отсюда следует, что

$$\operatorname*{vraisup}_{t\in[0,T]} \|\mathfrak{z}_j(t)\|_V + \operatorname*{vraisup}_{t\in[0,T]} \|\dot{\mathfrak{z}}_j(t)\|_H \leqslant K. \tag{2.4.21}$$

Положим $Y \equiv L_1([0,T],V^*) \oplus L_1([0,T],H)$ и введём в этом пространстве норму равенством

$$\|y\|_Y \equiv \max\{\|\mathfrak{m}\|_{1,[0,T],V^*},\ \|\mathfrak{n}\|_{1,[0,T],H}\}\ \ \forall\, y \equiv (\mathfrak{m},\mathfrak{n}) \in Y.$$

В силу изометричных изоморфизмов (2.4.18) пространство Y^* изометрично изоморфно пространству $Z \equiv L_\infty([0,T],V) \oplus L_\infty([0,T],H)$, наделённому нормой

$$\|z\|_Z \equiv \|\mathfrak{p}\|_{\infty,[0,T],V} + \|\mathfrak{q}\|_{\infty,[0,T],H}\ \ \forall\, z \equiv (\mathfrak{p},\mathfrak{q}) \in Z.$$

Ясно, что теперь (2.4.21) можно переписать в виде

$$\|(\mathfrak{z}_j, \dot{\mathfrak{z}}_j)\|_Z \leqslant K\ \ \forall\, j \geqslant 1. \tag{2.4.22}$$

Следовательно, на основании теорем Бишопа и Алаоглу, найдутся пара $(\tilde{\mathfrak{z}}_0, \tilde{\mathfrak{z}}_1) \in Z$ и подпоследовательность j_i, $i = 1,2,\ldots$, последовательности $j = 1,2,\ldots$, такие, что

$$(\mathfrak{z}_{j_i}, \dot{\mathfrak{z}}_{j_i}) \to (\tilde{\mathfrak{z}}_0, \tilde{\mathfrak{z}}_1),\ \ i\to\infty,\ \ast\text{–слабо в } Z;\ \ \|(\tilde{\mathfrak{z}}_0, \tilde{\mathfrak{z}}_1)\|_Z \leqslant K.$$

Отсюда следует, что

$$\mathfrak{z}_{j_i} \to \tilde{\mathfrak{z}}_0,\ \ i\to\infty,\ \ast\text{–слабо в } L_\infty([0,T],V);\ \ \dot{\mathfrak{z}}_{j_i} \to \tilde{\mathfrak{z}}_1,\ \ i\to\infty,\ \ast\text{–слабо в } L_\infty([0,T],H);$$
$$\|\tilde{\mathfrak{z}}_0\|_{\infty,[0,T],V} + \|\tilde{\mathfrak{z}}_1\|_{\infty,[0,T],H} \leqslant K.$$

Поэтому

$$\lim_{i\to\infty} \int\limits_0^T \langle \mathfrak{z}_{j_i}(t), \varphi(t)\rangle dt = \int\limits_0^T \langle \tilde{\mathfrak{z}}_0(t), \varphi(t)\rangle dt\ \ \forall\, \varphi \in L_1([0,T],V^*);$$
$$\lim_{i\to\infty} \int\limits_0^T \langle \dot{\mathfrak{z}}_{j_i}(t), \varphi(t)\rangle_H dt = \int\limits_0^T \langle \tilde{\mathfrak{z}}_1(t), \varphi(t)\rangle_H dt\ \ \forall\, \varphi \in L_1([0,T],H);$$

и, в частности,

$$\lim_{i\to\infty} \int\limits_0^T \langle \mathfrak{z}_{j_i}(t), \varphi(t)\rangle_H dt = \int\limits_0^T \langle \tilde{\mathfrak{z}}_0(t), \varphi(t)\rangle_H dt\ \ \forall\, \varphi \in L_1([0,T],H); \tag{2.4.23}$$
$$\lim_{i\to\infty} \int\limits_0^T \langle \dot{\mathfrak{z}}_{j_i}(t), \varphi(t)\rangle_H dt = \int\limits_0^T \langle \tilde{\mathfrak{z}}_1(t), \varphi(t)\rangle_H dt\ \ \forall\, \varphi \in L_1([0,T],H);$$

Поскольку $\mathfrak{z}_{j_i} \in Э([0,T];V,H)$, $i = 1,2,\ldots$, то $\mathfrak{z}_{j_i} \in W^1_\infty([0,T],H)$, $i = 1,2,\ldots$ Поэтому справедливо интегральное тождество

$$(\text{Б})\int\limits_0^T \mathfrak{z}_{j_i}(t)\psi'(t)dt = -(\text{Б})\int\limits_0^T \dot{\mathfrak{z}}_{j_i}(t)\psi(t)dt\ \ \forall\, \psi \in \mathfrak{D}(0,T),$$

из которого следует, что для всех $h \in H$

$$\int\limits_0^T \langle \mathfrak{z}_{j_i}(t), \psi'(t)h\rangle_H dt = -\int\limits_0^T \langle \dot{\mathfrak{z}}_{j_i}(t), \psi(t)h\rangle_H dt\ \ \forall\, \psi \in \mathfrak{D}(0,T).$$

Переходя здесь на основании (2.4.23) к пределу при $i \to \infty$, получим, что

$$\int\limits_0^T \langle \tilde{\mathfrak{z}}_0(t), \psi'(t)h\rangle_H dt = -\int\limits_0^T \langle \tilde{\mathfrak{z}}_1(t), \psi(t)h\rangle_H dt\ \ \forall\, \psi \in \mathfrak{D}(0,T).$$

Следовательно, для всех $h \in H$

$$\left\langle (\text{Б})\int\limits_0^T \tilde{\mathfrak{z}}_0(t)\psi'(t)dt + (\text{Б})\int\limits_0^T \tilde{\mathfrak{z}}_1(t)\psi(t)dt, h\right\rangle_H = 0\ \ \forall\, \psi \in \mathfrak{D}(0,T).$$

Это означает, что

$$(\text{Б})\int\limits_0^T \tilde{\mathfrak{z}}_0(t)\psi'(t)dt = -(\text{Б})\int\limits_0^T \tilde{\mathfrak{z}}_1(t)\psi(t)dt \ \ \forall\,\psi \in \mathfrak{D}(0,T),$$

откуда вытекает, что $\tilde{\mathfrak{z}}_0 \in L_\infty([0,T],V)$, $\tilde{\mathfrak{z}}_1 \in L_\infty([0,T],H)$, и $\tilde{\mathfrak{z}}_1$ является регулярной обобщённой производной функции $\tilde{\mathfrak{z}}_0$. Отсюда и из непрерывности вложения $V \subset H$ следует, что $\tilde{\mathfrak{z}}_0 \in W^1_\infty([0,T],H)$. Поэтому, согласно теореме 2.3.3, $\tilde{\mathfrak{z}}_0 \in C([0,T],H)$. Таким образом, $\tilde{\mathfrak{z}}_0 \in C_s([0,T],H) \cap L_\infty([0,T],V)$. Последнее на основании леммы 2.3.1 даёт включение $\tilde{\mathfrak{z}}_0 \in C_s([0,T],V)$.

Итак, мы доказали, что $\tilde{\mathfrak{z}}_0 \in \text{Э}([0,T];V,H)$, причём $\tilde{\mathfrak{z}}_0' = \tilde{\mathfrak{z}}_1$. Теорема полностью доказана. ■

Докажем теперь справедливость следующего результата.

Теорема 2.4.9. *Пусть последовательность функций $\mathfrak{z}_j \in \text{Э}([0,T];V,H)$, $j = 1,2,\dots,$ — ограничена в норме пространства $\text{Э}([0,T];V,H)$, т.е. найдётся постоянная $K > 0$, такая, что*

$$\|\mathfrak{z}_j\|_{\text{Э}([0,T];V,H)} \leqslant K, \ \ j = 1,2,\dots \tag{2.4.24}$$

Тогда найдутся подпоследовательность $\mathfrak{z}_{j_i}$, $i = 1,2,\dots,$ последовательности $\mathfrak{z}_j$, $j = 1,2,\dots,$ и функция $\mathfrak{z} \in \text{Э}([0,T];V,H)$, такие, что

$$\mathfrak{z}_{j_i} \to \mathfrak{z}, \ \ i \to \infty, \ \ \textit{слабо в } \mathcal{W}^1_2([0,T];V,H), \ \ \lim_{i\to\infty}\max_{t\in[0,T]}\|\mathfrak{z}_{j_i}(t) - \mathfrak{z}(t)\|_H = 0; \tag{2.4.25}$$

$$\mathfrak{z}_{j_i} \to \mathfrak{z}, \ \ i \to \infty, \ \ *\textit{–слабо в } L_\infty([0,T],V); \ \ \dot{\mathfrak{z}}_{j_i} \to \dot{\mathfrak{z}}, \ \ i \to \infty, \ \ *\textit{–слабо в } L_\infty([0,T],H);$$
$$\mathfrak{z}_{j_i} \to \mathfrak{z}, \ \ i \to \infty, \ \ \textit{в } V^*\textit{–топологии пространства } C_s([0,T],V);$$

причём

$$\|\mathfrak{z}\|_{\text{Э}([0,T];V,H)} \leqslant K. \tag{2.4.26}$$

Кроме того, если $\mathbf{Z}$ — банахово пространство, а $A \in \mathcal{L}(V,\mathbf{Z})$ — некоторый компактный оператор, то

$$\lim_{i\to\infty}\max_{t\in[0,T]}\|A[\mathfrak{z}_{j_i}(t)] - A[\mathfrak{z}(t)]\|_{\mathbf{Z}} = 0. \tag{2.4.27}$$

Доказательство. Разобьём доказательство на шесть шагов.

1) В силу теоремы 2.4.8 и неравенства (2.4.24) найдутся подпоследовательность $\mathfrak{z}_{j_{i,1}}$, $i = 1,2,\dots,$ последовательности $\mathfrak{z}_j$, $j = 1,2,\dots,$ и функция $\mathfrak{z} \in \text{Э}([0,T];V,H)$, такие, что

$$\mathfrak{z}_{j_{i,1}} \to \mathfrak{z}, \ \ i \to \infty, \ \ *\text{–слабо в } L_\infty([0,T],V); \ \ \dot{\mathfrak{z}}_{j_{i,1}} \to \dot{\mathfrak{z}}, \ \ i \to \infty, \ \ *\text{–слабо в } L_\infty([0,T],H); \tag{2.4.28}$$

причём выполнено неравенство (2.4.26).

2) Далее, для любого $h \in H$, $h \neq 0$, и для любых t', $t'' \in [0,T]$

$$|\langle h, \mathfrak{z}_{j_{i,1}}(t') - \mathfrak{z}_{j_{i,1}}(t'')\rangle_H| \leqslant \|h\|_H\|\mathfrak{z}_{j_{i,1}}(t') - \mathfrak{z}_{j_{i,1}}(t'')\|_H = \|h\|_H\left\|(\text{Б})\int\limits_{t''}^{t'}\dot{\mathfrak{z}}_{j_{i,1}}(t)dt\right\|_H \leqslant$$
$$\leqslant \|h\|_H\left|\int\limits_{t''}^{t'}\|\dot{\mathfrak{z}}_{j_{i,1}}(t)\|_H dt\right| \leqslant K|t' - t''|\|h\|_H.$$

Это значит, что при любом $h \in H$ семейство функций

$$[0,T] \ni t \mapsto \langle h, \mathfrak{z}_{j_{i,1}}(t)\rangle_H, \ \ i = 1,2,\dots,$$

равностепенно непрерывно. Поскольку же элемент $h \in H$ можно отождествить с линейным непрерывным на V функционалом, действующим по правилу

$$\langle h, v\rangle \equiv \langle h, v\rangle_H, \ \ v \in V,$$

то мы доказали, что семейство функций

$$[0,T] \ni t \mapsto \langle v^*, \mathfrak{z}_{j_{i,1}}(t)\rangle, \ \ i = 1,2,\dots, \tag{2.4.29}$$

равностепенно непрерывно при каждом фиксированном $v^* \in H$. Докажем теперь равностепенную непрерывность этого семейства для всех $v^* \in V^*$. Выберем произвольно $v^* \in V$ и зафиксируем. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число. В силу плотности H в V^* найдётся элемент $h_\varepsilon \in H$, такой, что

$$\|h_\varepsilon - v^*\|_{V^*} \leqslant \frac{\varepsilon}{4K}.$$

Тогда для всех t', $t'' \in [0,T]$

$$|\langle v^*, \mathfrak{z}_{j_{i,1}}(t') - \mathfrak{z}_{j_{i,1}}(t'')\rangle| \leqslant |\langle v^* - h_\varepsilon, \mathfrak{z}_{j_{i,1}}(t') - \mathfrak{z}_{j_{i,1}}(t'')\rangle| + |\langle h_\varepsilon, \mathfrak{z}_{j_{i,1}}(t') - \mathfrak{z}_{j_{i,1}}(t'')\rangle| \leqslant \frac{\varepsilon}{4K}2K+$$
$$+|\langle h_\varepsilon, \mathfrak{z}_{j_{i,1}}(t') - \mathfrak{z}_{j_{i,1}}(t'')\rangle|.$$

Таким образом,

$$|\langle v^*, \mathfrak{z}_{j_{i,1}}(t') - \mathfrak{z}_{j_{i,1}}(t'')\rangle| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + |\langle h_\varepsilon, \mathfrak{z}_{j_{i,1}}(t') - \mathfrak{z}_{j_{i,1}}(t'')\rangle|.$$

В силу доказанной выше равностепенной непрерывности семейства (2.4.29) для всех фиксированных $v^* \in H$, найдётся $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, не зависящее от выбора номера $i \geqslant 1$, такое, что для всех t', $t'' \in [0,T]$, для которых $|t' - t''| \leqslant \delta$, выполнено неравенство

$$|\langle h_\varepsilon, \mathfrak{z}_{j_{i,1}}(t') - \mathfrak{z}_{j_{i,1}}(t'')\rangle| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, не зависящее от выбора номера $i \geqslant 1$, такое, что для всех t', $t'' \in [0,T]$, для которых $|t' - t''| \leqslant \delta$, справедливо соотношение

$$|\langle v^*, \mathfrak{z}_{j_{i,1}}(t') - \mathfrak{z}_{j_{i,1}}(t'')\rangle| \leqslant \varepsilon.$$

Иными словами, при любом фиксированном $v^* \in V^*$ семейство (2.4.29) — равностепенно непрерывно.

В силу равностепенной непрерывности семейства (2.4.29) при всех фиксированных $v^* \in V^*$ и леммы 1.1.6 найдутся подпоследовательность $\mathfrak{z}_{j_{i,2}}$, $i = 1, 2, \ldots$, последовательности $\mathfrak{z}_{j_{i,1}}$, $i = 1, 2, \ldots$, и функция $\hat{\mathfrak{z}} \in C_s([0,T], V)$, такие, что

$$\mathfrak{z}_{j_{i,2}} \to \hat{\mathfrak{z}}, \ \ i \to \infty, \ \text{ в } V^*\text{–топологии пространства } C_s([0,T], V). \tag{2.4.30}$$

Покажем, что $\hat{\mathfrak{z}} = \mathfrak{z}$. В самом деле, из (2.4.30) следует, что при любых фиксированных $t \in [0,T]$ и $v^* \in V^*$ справедливо предельное соотношение

$$\lim_{i\to\infty} \langle v^*, \mathfrak{z}_{j_{i,2}}(t)\rangle = \langle v^*, \hat{\mathfrak{z}}(t)\rangle.$$

Отсюда вытекает, что для всех фиксированных $g \in L_1([0,T], V^*)$ и при п.в. $t \in [0,T]$

$$\lim_{i\to\infty} \langle g(t), \mathfrak{z}_{j_{i,2}}(t)\rangle = \langle g(t), \hat{\mathfrak{z}}(t)\rangle.$$

Поскольку, кроме того, в силу неравенства (2.4.26), при п.в. $t \in [0,T]$

$$|\langle g(t), \mathfrak{z}_{j_{i,2}}(t)\rangle| \leqslant \|g(t)\|_{V^*}\|\mathfrak{z}_{j_{i,2}}(t)\|_V \leqslant K\|g(t)\|_{V^*}$$

Поэтому, в силу теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла Лебега,

$$\lim_{i\to\infty} \int\limits_0^T \langle g(t), \mathfrak{z}_{j_{i,2}}(t)\rangle dt = \int\limits_0^T \langle g(t), \hat{\mathfrak{z}}(t)\rangle dt.$$

Иными словами, последовательность $\mathfrak{z}_{j_{i,2}}$, $i = 1, 2, \ldots$, $*$–слабо в $L_1([0,T], V)$ сходится к функции $\hat{\mathfrak{z}} \in C_s([0,T], V)$. Ввиду (2.4.28) это означает, что $\hat{\mathfrak{z}} = \mathfrak{z}$.

3) Далее, поскольку последовательность функций $\mathfrak{z}_j \in Э([0,T]; V, H)$, $j = 1, 2, \ldots$, — ограничена в норме пространства $Э([0,T]; V, H)$, то она ограничена и в норме пространства $\mathcal{W}_2^1([0,T]; V, H)$. Поскольку же последнее пространство гильбертово, то найдутся подпоследовательность $\mathfrak{z}_{j_{i,3}}$, $i = 1, 2, \ldots$, последовательности $\mathfrak{z}_{j_{i,2}}$, $i = 1, 2, \ldots$, и функция $\tilde{\mathfrak{z}} \in \mathcal{W}_2^1([0,T]; V, H)$, такие, что

$$\mathfrak{z}_{j_{i,3}} \to \tilde{\mathfrak{z}}, \ \ i \to \infty, \ \text{ слабо в } \mathcal{W}_2^1([0,T]; V, H). \tag{2.4.31}$$

Из данного соотношения вытекает, что

$$\lim_{i\to\infty}\int\limits_0^T \langle g(t), \mathfrak{z}_{j_{i,3}}(t)\rangle_V dt = \int\limits_0^T \langle g(t), \tilde{\mathfrak{z}}(t)\rangle_V dt \ \ \forall\, g\in L_2([0,T],V).$$

С другой стороны, в силу (2.4.28),

$$\lim_{i\to\infty}\int\limits_0^T \langle g(t), \mathfrak{z}_{j_{i,3}}(t)\rangle_V dt = \int\limits_0^T \langle g(t), \mathfrak{z}(t)\rangle_V dt \ \ \forall\, g\in L_2([0,T],V).$$

Отсюда следует, что $\tilde{\mathfrak{z}} = \mathfrak{z}$.

4) В силу теоремы 2.4.6 и неравенства (2.4.24) найдутся подпоследовательность $\mathfrak{z}_{j_{i,4}}$, $i=1,2,\ldots$, последовательности $\mathfrak{z}_{j_{i,3}}$, $i=1,2,\ldots$, и функция $\check{\mathfrak{z}}\in C([0,T],H)$, такие, что

$$\lim_{i\to\infty}\max_{t\in[0,T]}\|\mathfrak{z}_{j_{i,4}}(t)-\check{\mathfrak{z}}(t)\|_H = 0. \tag{2.4.32}$$

Покажем, что $\check{\mathfrak{z}} = \mathfrak{z}$. В самом деле, из (2.4.28) следует, что

$$\lim_{i\to\infty}\int\limits_0^T \langle g(t), \mathfrak{z}_{j_{i,4}}(t)\rangle_H dt = \int\limits_0^T \langle g(t), \mathfrak{z}(t)\rangle_H dt \ \ \forall\, g\in L_1([0,T],H). \tag{2.4.33}$$

С другой стороны, из (2.4.32) следует, что

$$\left|\int\limits_0^T \langle g(t), \mathfrak{z}_{j_{i,4}}(t)\rangle_H dt - \int\limits_0^T \langle g(t), \check{\mathfrak{z}}(t)\rangle_H dt\right| = \left|\int\limits_0^T \langle g(t), \mathfrak{z}_{j_{i,4}}(t)-\check{\mathfrak{z}}(t)\rangle_H dt\right| \leqslant \int\limits_0^T |\langle g(t), \mathfrak{z}_{j_{i,4}}(t)-\check{\mathfrak{z}}(t)\rangle_H| dt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^T \|g(t)\|_H\|\mathfrak{z}_{j_{i,4}}(t)-\check{\mathfrak{z}}(t)\|_H dt \leqslant \max_{t\in[0,T]}\|\mathfrak{z}_{j_{i,4}}(t)-\check{\mathfrak{z}}(t)\|_H\int\limits_0^T\|g(t)\|_H dt \to 0, \ \ i\to\infty.$$

Отсюда и из (2.4.33) вытекает, что $\check{\mathfrak{z}} = \mathfrak{z}$.

5) Собирая вместе соотношения (2.4.28) (2.4.30), (2.4.31), (2.4.32), и полагая $\mathfrak{z}_{j_i}\equiv\mathfrak{z}_{j_{i,4}}$, $i=1,2,\ldots$, получаем соотношения (2.4.25) и (2.4.26).

6) Докажем теперь соотношение (2.4.27). В самом деле, поскольку

$$\mathfrak{z}_{j_i}\to\mathfrak{z}, \ \ i\to\infty, \ \ \text{в } V^*\text{–топологии пространства } C_s([0,T],V),$$

то

$$\forall\, v^*\in V^*: \lim_{i\to\infty}\max_{t\in[0,T]}|\langle v^*, \mathfrak{z}_{j_i}(t)-\mathfrak{z}(t)\rangle| = 0. \tag{2.4.34}$$

Отсюда вытекает, что при каждом фиксированном $t\in[0,T]$

$$\mathfrak{z}_{j_i}(t)\to\mathfrak{z}(t), \ \ i\to\infty, \ \ \text{слабо в } V, \tag{2.4.35}$$

что, в силу компактности оператора A, даёт соотношение

$$\lim_{i\to\infty}\|A[\mathfrak{z}_{j_i}(t)]-A[\mathfrak{z}(t)]\|_{\mathbf{Z}} = 0 \ \ \forall\, t\in[0,T]. \tag{2.4.36}$$

Предположим, однако, что соотношение (2.4.27) не выполнено. Тогда найдутся положительное число ε_0, подпоследовательность i_k, $k=1,2,\ldots$, последовательности $i=1,2,\ldots$, и последовательность чисел $t_k\in[0,T]$, $k=1,2,\ldots$, такие, что

$$\|A[\mathfrak{z}_{j_{i_k}}(t_k)]-A[\mathfrak{z}(t_k)]\|_{\mathbf{Z}}\geqslant\varepsilon_0, \ \ k=1,2,\ldots \tag{2.4.37}$$

В силу компактности отрезка $[0,T]$ найдутся подпоследовательность последовательности $t_k\in[0,T]$, $k=1,2,\ldots$, которую мы обозначим так же, как и саму последовательность $t_k\in[0,T]$, $k=1,2,\ldots$, и точка $t^*\in[0,T]$, такие, что $t_k\to t^*$, $k\to\infty$. Выберем теперь произвольно $v^*\in V^*$ и зафиксируем. Тогда

$$|\langle v^*, \mathfrak{z}_{j_{i_k}}(t_k)-\mathfrak{z}(t_k)\rangle|\leqslant|\langle v^*, \mathfrak{z}_{j_{i_k}}(t_k)-\mathfrak{z}_{j_{i_k}}(t^*)\rangle|+|\langle v^*, \mathfrak{z}_{j_{i_k}}(t^*)-\mathfrak{z}(t^*)\rangle|+|\langle v^*, \mathfrak{z}(t^*)-\mathfrak{z}(t_k)\rangle|. \tag{2.4.38}$$

Из включения $\mathfrak{z} \in C_s([0,T],V)$ следует, что функция $\mathfrak{z}$ слабо непрерывна в точке t^*. Поэтому

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0 \ \forall t \in [0,T], \ |t - t^*| \leqslant \delta_1 : |\langle v^*, \mathfrak{z}(t) - \mathfrak{z}(t^*)\rangle| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2.4.39}$$

Далее, в силу доказанной выше равностепенной непрерывности семейства функций

$$[0,T] \ni t \mapsto \langle v^*, \mathfrak{z}_{j_{i_k}}(t_k)\rangle, \ \ k = 1,2,\ldots,$$

справедливо соотношение

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0 \ \forall t', \ \ t'' \in [0,T], \ \ |t' - t''| \leqslant \delta_2 : |\langle v^*, \mathfrak{z}_{j_{i_k}}(t') - \mathfrak{z}_{j_{i_k}}(t'')\rangle| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2.4.40}$$

Кроме того, в силу сходимости $t_k \to t^*$, $k \to \infty$,

$$\forall \sigma > 0 \ \exists k_0 = k_0(\sigma) \geqslant 1 \ \forall k \geqslant k_0(\sigma) : |t_k - t^*| \leqslant \sigma. \tag{2.4.41}$$

Произвольно зафиксируем $\varepsilon > 0$ и подберём по нему $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$ согласно (2.4.39) и $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$ согласно (2.4.40). Положив $\delta^*(\varepsilon) \equiv \min\{\delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon)\}$, будем иметь

$$\begin{gathered}\forall t \in [0,T], \ |t - t^*| \leqslant \delta^*(\varepsilon) : |\langle v^*, \mathfrak{z}(t) - \mathfrak{z}(t^*)\rangle| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}; \\ \forall t', \ \ t'' \in [0,T], \ \ |t' - t''| \leqslant \delta^*(\varepsilon) : |\langle v^*, \mathfrak{z}_{j_{i_k}}(t') - \mathfrak{z}_{j_{i_k}}(t'')\rangle| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.\end{gathered} \tag{2.4.42}$$

Подберём теперь по $\delta^*(\varepsilon)$ номер $k_0 = k_0(\delta^*(\varepsilon))$ согласно (2.4.41). Тогда, в силу (2.4.41), при всех $k \geqslant k_0$

$$|t_k - t^*| \leqslant \delta^*(\varepsilon).$$

Следовательно, ввиду (2.4.42),

$$|\langle v^*, \mathfrak{z}(t^*) - \mathfrak{z}(t_k)\rangle| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}, \ \ |\langle v^*, \mathfrak{z}_{j_{i_k}}(t_k) - \mathfrak{z}_{j_{i_k}}(t^*)\rangle| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \ \ \forall k \geqslant \tilde{k}_0(\varepsilon),$$

где $\tilde{k}_0(\varepsilon) \equiv k_0(\delta^*(\varepsilon))$. Поэтому из (2.4.38) вытекает, что

$$|\langle v^*, \mathfrak{z}_{j_{i_k}}(t_k) - \mathfrak{z}(t_k)\rangle| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + |\langle v^*, \mathfrak{z}_{j_{i_k}}(t^*) - \mathfrak{z}(t^*)\rangle| + \frac{\varepsilon}{3} \ \ \forall k \geqslant \tilde{k}_0(\varepsilon).$$

Наконец, из (2.4.35) вытекает, что найдётся номер $k_1 = k_1(\varepsilon) \geqslant 1$, такой, что

$$|\langle v^*, \mathfrak{z}_{j_{i_k}}(t^*) - \mathfrak{z}(t^*)\rangle| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \ \ \forall k \geqslant k_1(\varepsilon).$$

Взяв $k^*(\varepsilon) \equiv \max\{\tilde{k}_0(\varepsilon), \, k_1(\varepsilon)\}$, получим, что

$$|\langle v^*, \mathfrak{z}_{j_{i_k}}(t_k) - \mathfrak{z}(t_k)\rangle| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \ \ \forall k \geqslant k^*(\varepsilon).$$

Итак, для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер $k^*(\varepsilon)$, такой, что для всех $k \geqslant k^*(\varepsilon)$ выполнено неравенство

$$|\langle v^*, \mathfrak{z}_{j_{i_k}}(t_k) - \mathfrak{z}(t_k)\rangle| \leqslant \varepsilon.$$

В силу произвольности выбора $v^* \in V^*$ это означает, что

$$\mathfrak{z}_{j_{i_k}}(t_k) - \mathfrak{z}(t_k) \to 0, \ \ k \to \infty, \ \text{ слабо в } V,$$

что, ввиду компактности оператора A, даёт предельное соотношение

$$\lim_{k\to\infty} \|A[\mathfrak{z}_{j_{i_k}}(t_k)] - A[\mathfrak{z}(t_k)]\|_{\mathbf{Z}} = 0,$$

противоречащее неравенству (2.4.37). Таким образом, соотношение (2.4.27) доказано.

Теорема полностью доказана. ■

Пусть $e_k \in V$, $k = 1,2,\ldots,$ — ортогональная в V и ортонормированная в H система, такая, что для любых $\varphi \in V$ и $\psi \in H$ справедливо равенство

$$\lim_{N\to\infty} \|\varphi^N - \varphi\|_V = 0, \ \ \lim_{N\to\infty} \|\psi^N - \psi\|_H = 0,$$

где

$$\varphi^N \equiv \sum_{m=1}^{N} \varphi_m e_m, \;\; \psi^N \equiv \sum_{m=1}^{N} \psi_m e_m, \;\; \varphi_k \equiv \langle \varphi, e_k \rangle_H, \;\; \psi_k \equiv \langle \psi, e_k \rangle_H, \;\; k, \; N = 1, 2, \ldots$$

Лемма 2.4.1. *Пусть* $\mathfrak{M}^N \equiv \{ \sum\limits_{j=1}^{N} \zeta_j e_j \; : \; \zeta_j \in W_2^1[0,T], \;\; \zeta_j(T) = 0, \;\; j = \overline{1, \, N} \}$, $\mathfrak{M} \equiv \bigcup\limits_{N=1}^{\infty} \mathfrak{M}^N$. *Тогда* $\mathfrak{M}$ *плотно в* $\hat{\boldsymbol{\mathcal{Э}}}_1([0,T]; V, H) \equiv \{ \mathsf{z} \in \boldsymbol{\mathcal{Э}}_1([0,T]; V, H) \; : \; \mathsf{z}(T) = 0 \}$.
Доказательство. Покажем, что $\mathfrak{M}$ плотно в $\hat{\boldsymbol{\mathcal{Э}}}_1([0,T]; V, H)$.

В самом деле, пусть $\mathsf{z} \in \hat{\boldsymbol{\mathcal{Э}}}_1([0,T]; V, H)$ — произвольна. Тогда, в силу свойств последовательности $e_j \in V$, $j = 1, 2, \ldots$,

$$\lim_{N \to \infty} \left\| \sum_{j=1}^{N} \mathsf{z}_j(t) e_j - \mathsf{z}(t) \right\|_V^2 = 0, \;\; \lim_{N \to \infty} \left\| \sum_{j=1}^{N} \dot{\mathsf{z}}_j(t) e_j - \dot{\mathsf{z}}(t) \right\|_H^2 = 0, \;\; \forall \, t \in [0,T],$$

где $\mathsf{z}_j(t) \equiv \langle \mathsf{z}(t), \, e_j \rangle_H$, $j = 1, 2, \ldots$.

Полагая $\mathsf{z}^N(t) \equiv \sum\limits_{j=1}^{N} \mathsf{z}_j(t) e_j$, $r_{N,\,0}(t) \equiv \| \mathsf{z}^N(t) - \mathsf{z}(t) \|_V^2$, $r_{N,\,1}(t) \equiv \| \dot{\mathsf{z}}^N(t) - \dot{\mathsf{z}}(t) \|_H^2$, $t \in [0,T]$, запишем последние соотношения в виде

$$\lim_{N \to \infty} r_{N,\,0}(t) = 0, \;\; \lim_{N \to \infty} r_{N,\,1}(t) = 0, \;\; \forall \, t \in [t_0, \, t_1]. \tag{2.4.43}$$

Кроме того, как нетрудно видеть,

$$r_{N,\,0}(t) \geqslant r_{N+1,\,0}(t), \;\; r_{N,\,1}(t) \geqslant r_{N+1,\,1}(t), \;\; \forall \, t \in [0,T], \;\; N = 1, 2, \ldots. \tag{2.4.44}$$

В силу непрерывности $r_{N,\,0}$, $r_{N,\,1}$, на отрезке $[0,T]$, соотношений (2.4.43), (2.4.44), и леммы 1.5.1, получаем, что

$$\lim_{N \to \infty} \max_{t \in [0,T]} r_{N,\,0}(t) = 0, \;\; \lim_{N \to \infty} \max_{t \in [0,T]} r_{N,\,1}(t) = 0,$$

откуда вытекает, что

$$\lim_{N \to \infty} \| \mathsf{z}^N - \mathsf{z} \|_{\boldsymbol{\mathcal{Э}}_1([0,T]; V, H)} = 0.$$

Итак, $\mathfrak{M}$ плотно в $\hat{\boldsymbol{\mathcal{Э}}}_1([0,T]; V, H)$. Лемма доказана. ■

Лемма 2.4.2. *Множество* $\mathfrak{M} \equiv \bigcup\limits_{N=1}^{\infty} \mathfrak{M}^N$ *плотно в* $\hat{\mathcal{W}}_2^1([0,T]; V, H) \equiv \{ \mathsf{z} \in \mathcal{W}_2^1([0,T]; V, H) : \mathsf{z}(T) = 0 \}$.
Доказательство. Достаточно заметить, что последовательность функций

$$\mathsf{z}^N(t) \equiv \sum_{k=1}^{N} \mathsf{z}_k(t) e_k, \;\; N = 1, 2, \ldots,$$

где $\mathsf{z}_k(t) \equiv \langle \mathsf{z}(t), e_k \rangle_H$, $k = \overline{1, N}$, такова, что

$$\mathsf{z}^N \in \mathfrak{M}^N, \;\; N = 1, 2, \ldots, \;\; \| \mathsf{z}^N - \mathsf{z} \|_{\mathcal{W}_2^1([0,T]; V, H)} \to 0, \;\; N \to \infty.$$

■

2.5. Следствия

Пусть X — компактное топологическое пространство, μ — положительная мера Радона на нём. Через $L_\infty(X, \mu)$ будем обозначать банахово пространство μ–существенно ограниченных на X функций $\varphi \colon X \to \mathbb{R}$, с нормой

$$\| \varphi \|_{L_\infty(X, \mu)} \equiv \mu\text{–} \operatorname*{vraisup}_{x \in X} | \varphi(x) |.$$

Через $L_{\infty,1}(X \times [0,T], \mu)$ обозначим множество функций $\varphi \colon X \times [0,T] \to \mathbb{R}$, измеримых относительно произведения мер $\mu \otimes \lambda$, где λ — мера Лебега на отрезке $[0,T]$, и таких, что конечна норма

$$\| \varphi \|_{L_{\infty,1}(X \times [0,T], \mu)} \equiv \int_0^T \mu\text{–} \operatorname*{vraisup}_{x \in X} | \varphi(x,t) | dt.$$

Наконец, через $W^{0,1}_{\infty,1}(X\times[0,T],\mu)$ обозначим множество функций $\varphi\in L_{\infty,1}(X\times[0,T],\mu)$, для которых $\varphi_t\in L_{\infty,1}(X\times[0,T],\mu)$. Норму в классе $W^{0,1}_{\infty,1}(X\times[0,T],\mu)$ определим равенством

$$\|\varphi\|_{W^{0,1}_{\infty,1}(X\times[0,T],\mu)}\equiv\|\varphi\|_{L_{\infty,1}(X\times[0,T],\mu)}+\|\varphi_t\|_{L_{\infty,1}(X\times[0,T],\mu)},$$

превратив тем самым класс $W^{0,1}_{\infty,1}(X\times[0,T],\mu)$ в банахово пространство.

Покажем, что справедлива

Теорема 2.5.1. *У каждой функции $f\in W^{0,1}_{\infty,1}(X\times[0,T],\mu)$ при всех $t\in[0,T]$ существует след $f(\cdot,t)\in L_\infty(X,\mu)$, непрерывно зависящий от $t\in[0,T]$ в норме $L_\infty(X,\mu)$, причём*

$$\max_{t\in[0,T]}\|f(\cdot,t)\|_{L_\infty(X,\mu)}\leqslant A_1\|f\|_{W^{0,1}_{\infty,1}(X\times[0,T],\mu)}. \tag{2.5.1}$$

Доказательство. Выберем произвольно $f\in W^{0,1}_{\infty,1}(X\times[0,T],\mu)$ и зафиксируем. Для любой функции $\varphi\in C(X\times[0,T])$, равной нулю вблизи $X\times\{0\}$ и $X\times\{T\}$ и имеющей непрерывную на $X\times[0,T]$ производную φ_t, справедливо тождество

$$\int\limits_{X\times[0,1]}f(x,t)\varphi_t(x,t)(\mu\otimes\lambda)(dxdt)=-\int\limits_{X\times[0,1]}f_t(x,t)\varphi(x,t)(\mu\otimes\lambda)(dxdt).$$

Полагая $\varphi(x,t)\equiv p(x)q(t)$, где $p\in C(X)$, а $q\in C^\infty[0,T]$ — финитная на отрезке $[0,T]$ функция, получим, что для любых таких p и q

$$\int\limits_X\left[\int\limits_0^T f(x,t)q'(t)dt+\int\limits_0^T f_t(x,t)q(t)dt\right]p(x)\mu(dx)=0.$$

Как следствие, какова бы ни была функция q из указанного класса, при μ–п.в. $x\in X$ имеет место соотношение

$$\int\limits_0^T f(x,t)q'(t)dt=-\int\limits_0^T f_t(x,t)q(t)dt.$$

В силу этого при μ–почти всех $x\in X$ функция $f(x,\cdot)$ — элемент $W^1_1[0,T]$, и, в частности, имеет смысл говорить о следе $f(\cdot,t)$.

Покажем, что $f\in C([0,T],L_\infty(X,\mu))$. Действительно,

$$|f(x,t+\Delta t)-f(x,t)|\leqslant\left|\int\limits_t^{t+\Delta t}|f_t(x,\tau)|d\tau\right|\leqslant\left|\int\limits_t^{t+\Delta t}\|f_t(\cdot,\tau)\|_{L_\infty(X,\mu)}d\tau\right|,$$

откуда

$$\|f(\cdot,t+\Delta t)-f(\cdot,t)\|_{L_\infty(X,\mu)}\leqslant\left|\int\limits_t^{t+\Delta t}\|f_t(\cdot,\tau)\|_{L_\infty(X,\mu)}d\tau\right|.$$

Ввиду этого при всех $t\in[0,T]$ существует след $f(\cdot,t)\in L_\infty(X,\mu)$, непрерывно зависящий от $t\in[0,T]$ в норме $L_\infty(X,\mu)$.

Докажем теперь оценку (2.5.1). Так как функция $f(x,\cdot)$ при μ–п.в. $x\in X$ принадлежит пространству $W^1_1[0,T]$, то, в соответствии с теоремой 2.1.2, для каждого $t\in[0,T]$ при μ–почти всех $x\in X$

$$|f(x,t)|\leqslant A_1\int\limits_0^T[|f(x,\tau)|+|f_t(x,\tau)|]d\tau.$$

Поэтому $|f(x,t)|\leqslant A_1\|f\|_{W^{0,1}_{\infty,1}(X\times[0,T],\mu)}$.

Таким образом, $\|f(\cdot,t)\|_{L_\infty(X,\mu)}\leqslant A_1\|f\|_{W^{0,1}_{\infty,1}(X\times[0,T],\mu)}$, что совместно с доказанным ранее включением $W^{0,1}_{\infty,1}(X\times[0,T],\mu)\subset C([0,T],L_\infty(X,\mu))$ даёт оценку (2.5.1). Теорема 2.5.1 полностью доказана. ■

Из теоремы 2.5.1 вытекают следующие три теоремы.

Теорема 2.5.2. *У каждой функции $f \in W^{0,1}_{\infty,1}(Q_T)$ при всех $t \in [0,T]$ существует след $f(\cdot,t) \in L_\infty(\Omega)$, непрерывно зависящий от $t \in [0,T]$ в норме $L_\infty(\Omega)$, причём*

$$\max_{t\in[0,T]} \|f(\cdot,t)\|_{\infty,\Omega} \leqslant A_1 \|f\|^{(0,1)}_{\infty,1,Q_T}. \tag{2.5.2}$$

Теорема 2.5.3. *У любой функции $f \in W^{0,1}_{\infty,1}(S_T)$ при каждом $t \in [0,T]$ существует след $f(\cdot,t) \in L_\infty(S)$, непрерывно зависящий от $t \in [0,T]$ в норме $L_\infty(S)$, причём*

$$\max_{t\in[0,T]} \|f(\cdot,t)\|_{\infty,S} \leqslant A_1 \|f\|^{(0,1)}_{\infty,1,S_T}. \tag{2.5.3}$$

Теорема 2.5.4. *У любой функции $f \in W^{0,1}_{\infty,1}(S'_T)$ при каждом $t \in [0,T]$ существует след $f(\cdot,t) \in L_\infty(S')$, непрерывно зависящий от $t \in [0,T]$ в норме $L_\infty(S')$, причём*

$$\max_{t\in[0,T]} \|f(\cdot,t)\|_{\infty,S'} \leqslant A_1 \|f\|^{(0,1)}_{\infty,1,S'_T}. \tag{2.5.4}$$

Из теоремы 2.3.3 вытекают две следующие теоремы.

Теорема 2.5.5. *Пусть $1 \leqslant p < \infty$. Тогда у любой функции $f \in W^{0,1}_{p,1}(S_T)$ при каждом $t \in [0,T]$ существует след $f(\cdot,t) \in L_p(S)$, непрерывно зависящий от $t \in [0,T]$ в норме $L_p(S)$, причём*

$$\max_{t\in[0,T]} \|f(\cdot,t)\|_{p,S} \leqslant A_1 \|f\|^{(0,1)}_{p,1,S_T}. \tag{2.5.5}$$

Теорема 2.5.6. *Пусть $1 \leqslant p < \infty$. Тогда у любой функции $f \in W^{0,1}_{p,1}(S'_T)$ при каждом $t \in [0,T]$ существует след $f(\cdot,t) \in L_p(S')$, непрерывно зависящий от $t \in [0,T]$ в норме $L_p(S')$, причём*

$$\max_{t\in[0,T]} \|f(\cdot,t)\|_{p,S'} \leqslant A_1 \|f\|^{(0,1)}_{p,1,S'_T}. \tag{2.5.6}$$

Из теорем 2.4.6 и 2.4.9 вытекает

Лемма 2.5.1.

1) *Если $z \in Э^1_2(Q_T)$, то $z \in W^1_2(Q_T)$, причём найдётся постоянная $c^*_0 > 0$, зависящая лишь от $T > 0$ (например, можно взять $c^*_0 \equiv \sqrt{2T}$), такая, что*

$$\|z\|^{(1)}_{2,Q_T} \leqslant c^*_0 \|z\|_{Э^1_2(Q_T)} \ \ \forall\, z \in Э^1_2(Q_T).$$

2) *Вложения $Э^1_2(Q_T) \subset L_2(S_T)$ и $Э^1_2(Q_T) \subset C([0,T], L_2(\Omega))$ непрерывны и компактны.*

3) *Справедливы следующие утверждения:*

   а) *если $n = 1$, то любая функция $z \in Э^1_2(Q_T)$ является элементом пространства $C(\bar{Q}_T)$ и найдётся константа $c^*_1 > 0$, зависящая лишь от области Ω, такая, что*

$$|z|^{(0)}_{\bar{Q}_T} \leqslant c^*_1 \|z\|_{Э^1_2(Q_T)} \ \ \forall\, z \in Э^1_2(Q_T);$$

   б) *если $n = 2$, а $p \in (1,\infty)$, то любая функция $z \in Э^1_2(Q_T)$ является элементом пространства $C([0,T], L_p(\Omega))$ и найдётся константа $c^*_2 = c^*_2(p) > 0$, зависящая лишь от области Ω и от p, такая, что*

$$\max_{t\in[0,T]} \|z(\cdot,t)\|_{p,\Omega} \leqslant c^*_2(p) \|z\|_{Э^1_2(Q_T)} \ \ \forall\, z \in Э^1_2(Q_T);$$

   в) *если $n > 2$, а $p \in (1, \frac{2n}{n-2})$, то любая функция $z \in Э^1_2(Q_T)$ является элементом пространства $C([0,T], L_p(\Omega))$ и найдётся константа $c^*_3 = c^*_3(p) > 0$, зависящая лишь от p, размерности n и от области Ω, такая, что*

$$\max_{t\in[0,T]} \|z(\cdot,t)\|_{p,\Omega} \leqslant c^*_3(p) \|z\|_{Э^1_2(Q_T)} \ \ \forall\, z \in Э^1_2(Q_T).$$

4) Пусть последовательность функций $z^m \in Э_2^1(Q_T)$, $m = 1,2,\dots,$ — ограничена в норме пространства $Э_2^1(Q_T)$, т.е. найдётся постоянная $K > 0$, такая, что

$$\|z^m\|_{Э_2^1(Q_T)} \leqslant K, \ \ m = 1,2,\dots$$

Тогда найдутся подпоследовательность z^{m_l}, $l = 1,2,\dots,$ последовательности z^m, $m = 1,2,\dots,$ и функция $z \in Э_2^1(Q_T)$, такие, что

$$z^{m_l} \to z, \ \ l \to \infty, \ \ \text{слабо в } W_2^1(Q_T), \ \ \lim_{l\to\infty} \max_{t\in[0,T]} \|z^{m_l}(\cdot,t) - z(\cdot,t)\|_{2,\Omega} = 0;$$

$$z^{m_l} \to z, \ \ l \to \infty, \ \ *\text{–слабо в } L_\infty([0,T], W_2^1(\Omega)); \ \ z_t^{m_l} \to z_t, \ \ l \to \infty, \ \ *\text{–слабо в } L_\infty([0,T], L_2(\Omega));$$

$$\lim_{l\to\infty} |z^{m_l} - z|_{\bar Q_T}^{(0)} = 0 \quad \text{при } n = 1; \ \max_{t\in[0,T]} \|z^{m_l}(\cdot,t) - z(\cdot,t)\|_{p,S} = 0 \quad \text{при } n > 1;$$

где p — число из интервала $(1,+\infty)$ при $n = 2$ и из интервала $(1, \frac{2(n-1)}{n-2})$ при $n > 2$; причём

$$\|z\|_{Э_2^1(Q_T)} \leqslant K.$$

Из теорем 2.3.6, 2.4.6 и 2.4.9, цепочки компактных вложений $W_2^2(\Omega) \subset W_2^1(\Omega) \subset L_2(\Omega)$ и рефлексивности пространств $W_2^2(\Omega)$ и $L_2(\Omega)$ вытекает

Лемма 2.5.2.

1) Если $z \in Э_2^2(Q_T)$, то $z \in W_2^{2;1}(Q_T)$, причём

$$\|z\|_{2,Q_T}^{(2;1)} \leqslant c_0^* \|z\|_{Э_2^2(Q_T)} \ \ \forall\, z \in Э_2^2(Q_T),$$

где постоянная $c_0^* > 0$ — та же, что и в лемме 2.5.1.

2) Если $z \in Э_2^2(Q_T)$, то $z \in C([0,T], W_2^1(\Omega))$, причём

$$\max_{t\in[0,T]} \|z(\cdot,t)\|_{2,\Omega}^{(1)} \leqslant \|z\|_{Э_2^2(Q_T)} \ \ \forall\, z \in Э_2^2(Q_T).$$

3) Вложения $Э_2^2(Q_T) \subset L_2(S_T)$, $Э_2^2(Q_T) \subset C([0,T], L_2(\Omega))$ и $Э_2^2(Q_T) \subset L_p([0,T], W_2^1(\Omega))$ непрерывны и компактны при всех $p \in (1,\infty)$.

4) Если $z \in Э_2^2(Q_T)$, то $\nabla_x z \in C([0,T], (W_2^1(\Omega))^n)$, а если ещё $n \geqslant 2$, то $\nabla_x z \in C([0,T], L_2^n(S))$.

5) Справедливы следующие утверждения:

а) если $n < 4$, то любая функция $z \in Э_2^2(Q_T)$ является элементом пространства $C(\bar Q_T)$ и найдётся константа $c_4^* > 0$, зависящая лишь от области Ω, такая, что

$$|z|_{\bar Q_T}^{(0)} \leqslant c_4^* \|z\|_{Э_2^2(Q_T)} \ \ \forall\, z \in Э_2^2(Q_T);$$

б) если $n = 4$, а $p \in (1,\infty)$, то любая функция $z \in Э_2^2(Q_T)$ является элементом пространства $C([0,T], L_p(\Omega))$ и найдётся константа $c_5^* = c_5^*(p) > 0$, зависящая лишь от области Ω и от p, такая, что

$$\max_{t\in[0,T]} \|z(\cdot,t)\|_{p,\Omega} \leqslant c_5^*(p) \|z\|_{Э_2^2(Q_T)} \ \ \forall\, z \in Э_2^2(Q_T);$$

в) если $n > 4$, а $p \in (1, \frac{2n}{n-4})$, то любая функция $z \in Э_2^2(Q_T)$ является элементом пространства $C([0,T], L_p(\Omega))$ и найдётся константа $c_6^* = c_6^*(p) > 0$, зависящая лишь от p, размерности n и от области Ω, такая, что

$$\max_{t\in[0,T]} \|z(\cdot,t)\|_{p,\Omega} \leqslant c_6^*(p) \|z\|_{Э_2^2(Q_T)} \ \ \forall\, z \in Э_2^2(Q_T).$$

6) Пусть последовательность функций $z^m \in Э_2^2(Q_T)$, $m = 1,2,\dots,$ — ограничена в норме пространства $Э_2^2(Q_T)$, т.е. найдётся постоянная $K > 0$, такая, что

$$\|z^m\|_{Э_2^2(Q_T)} \leqslant K, \ \ m = 1,2,\dots$$

Тогда найдутся подпоследовательность z^{m_l}, $l=1,2,\ldots$, последовательности z^m, $m=1,2,\ldots$, и функция $z \in \mathfrak{Э}_2^2(Q_T)$, такие, что

$$z^{m_l} \to z,\ \ l\to\infty,\ \ \text{слабо в } W_2^{2;1}(Q_T),\ \ \lim_{l\to\infty}\max_{t\in[0,T]}\|z^{m_l}(\cdot,t)-z(\cdot,t)\|_{2,\Omega}=0;$$

$$z^{m_l} \to z,\ \ l\to\infty,\ \ *\text{–слабо в } L_\infty([0,T],W_2^2(\Omega));\ \ z_t^{m_l}\to z_t,\ \ l\to\infty,\ \ *\text{–слабо в } L_\infty([0,T],L_2(\Omega));$$

$$z^{m_l} \to z,\ \ l\to\infty,\ \ \text{сильно в } L_2([0,T],W_2^1(\Omega));$$

$$\lim_{l\to\infty}|z^{m_l}-z|_{\bar Q_T}^{(0)}=0\ \ \text{при } n<4;\ \ \lim_{l\to\infty}|\nabla_x z^{m_l}-\nabla_x z|_{\bar Q_T}^{(0)}=0\ \ \text{при } n=1;$$

$$\lim_{l\to\infty}\max_{t\in[0,T]}\|z^{m_l}(\cdot,t)-z(\cdot,t)\|_{p,S}=0,\ \ \text{при } n>4;$$

$$\lim_{l\to\infty}\max_{t\in[0,T]}\|\nabla_x z^{m_l}(\cdot,t)-\nabla_x z(\cdot,t)\|_{q,S}=0,\ \ \text{при } n>1;$$

где p — число из интервала $(1,+\infty)$ при $n=2$ и из интервала $(1,\frac{2(n-1)}{n-2})$ при $n>2$, а q — число из интервала $(1,+\infty)$ при $n=4$ и из интервала $(1,\frac{2(n-1)}{n-4})$ при $n>4$; причём

$$\|z\|_{\mathfrak{Э}_2^2(Q_T)} \leqslant K.$$

Лемма 2.5.3. *Пусть $\gamma\in(1,\infty)$ при $n=1$ или 2 и $\gamma\in(1,\frac{n}{n-2})$ при $n>2$. Тогда найдутся неубывающие неотрицательные непрерывные функции $\vartheta_0[\gamma]:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $\vartheta_1[\gamma]:[0,\operatorname{meas}\Omega]\to\mathbb{R}$, $\vartheta_0[\gamma](0)=\vartheta_1[\gamma](0)=0$, такие, что для любой функции $z\in\mathfrak{Э}_2^1(Q_T)$ и любого измеримого по Лебегу множества $E\subseteq\Omega$ справедливо неравенство*

$$\max_{t\in[0,T]}\|z(\cdot,t)\|_{\gamma,E}\leqslant\vartheta_0[\gamma](\|z\|_{\mathfrak{Э}_2^1(Q_T)})\vartheta_1[\gamma](\operatorname{meas}_n E).$$

При этом когда понятно, о каком именно γ идёт речь, вместо $\vartheta_0[\gamma]$ и $\vartheta_1[\gamma]$ пишем просто ϑ_0 и ϑ_1 соответственно.

Доказательство. Выберем произвольно функцию $z\in\mathfrak{Э}_2^1(Q_T)$ и измеримое по Лебегу множество $E\subseteq\Omega$ и зафиксируем. Рассмотрим отдельно случаи $n=1$, $n=2$ и $n>2$.

1) Пусть $n=1$. Тогда, согласно лемме 2.5.1, $z\in C(\bar Q_T)$, откуда следует, что

$$\int\limits_E|z(x,t)|^\gamma dx\leqslant[|z|_{\bar Q_T}^{(0)}]^\gamma\operatorname{meas}E.$$

Согласно пункту 3.а) леммы 2.5.1,

$$|z|_{\bar Q_T}^{(0)}\leqslant c_1^*\|z\|_{\mathfrak{Э}_2^1(Q_T)}.$$

Поэтому

$$\int\limits_E|z(x,t)|^\gamma dx\leqslant[|z|_{\bar Q_T}^{(0)}]^\gamma\operatorname{meas}E\leqslant[c_1^*\|z\|_{\mathfrak{Э}_2^1(Q_T)}]^\gamma\operatorname{meas}E.$$

Положив $\vartheta_0(r)\equiv c_1^*r$, $\vartheta_1(M)\equiv M^{1/\gamma}$ при всех $r\in[0,+\infty)$, $M\in[0,\operatorname{meas}\Omega]$, получаем требуемое утверждение.

2) Пусть $n=2$. Тогда, согласно лемме 2.5.1, $z\in C([0,T],L_q(\Omega))$ при всех $q\in(1,+\infty)$, в силу чего $|z|^\gamma\in C([0,T],L_p(\Omega))$ при всех $p\in(1,+\infty)$. Далее, по неравенству Гёльдера для интегралов,

$$\int\limits_E|z(x,t)|^\gamma dx\leqslant\left[\int\limits_E|z(x,t)|^{\gamma p}dx\right]^{1/p}[\operatorname{meas}E]^{1-\frac1p}=\|z(\cdot,t)\|_{\gamma p,E}^\gamma[\operatorname{meas}E]^{1-\frac1p}\leqslant$$
$$\leqslant[\max_{\tau\in[0,T]}\|z(\cdot,\tau)\|_{\gamma p,\Omega}]^\gamma[\operatorname{meas}E]^{1-\frac1p}.$$

Таким образом,

$$\int\limits_E|z(x,t)|^\gamma dx\leqslant[\max_{\tau\in[0,T]}\|z(\cdot,\tau)\|_{\gamma p,\Omega}]^\gamma[\operatorname{meas}E]^{1-\frac1p}.$$

Согласно пункту 3.б) леммы 2.5.1,

$$\max_{t\in[0,T]} \|z(\cdot,t)\|_{\gamma p,\Omega} \leqslant c_2^*(p\gamma)\|z\|_{\mathcal{Э}_2^1(Q_T)}.$$

Как следствие,

$$\int\limits_E |z(x,t)|^\gamma dx \leqslant [\max_{\tau\in[0,T]} \|z(\cdot,\tau)\|_{\gamma p,\Omega}]^\gamma [\mathrm{meas}\, E]^{1-\frac{1}{p}} \leqslant [c_2^*(\gamma p)\|z\|_{\mathcal{Э}_2^1(Q_T)}]^\gamma [\mathrm{meas}\, E]^{1-\frac{1}{p}}.$$

Положив $\vartheta_0(r) \equiv c_2^*(\gamma p)r$, $\vartheta_1(M) \equiv M^{\frac{p-1}{p\gamma}}$ при всех $r \in [0,+\infty)$, $M \in [0, \mathrm{meas}\,\Omega]$, получаем требуемое утверждение.

3) Пусть $n > 2$. Тогда, согласно лемме 2.5.1, $z \in C([0,T], L_q(\Omega))$ при всех $q \in (1, \frac{2n}{n-2})$, в силу чего $|z|^\gamma \in C([0,T], L_p(\Omega))$ при всех $p \in (1, \frac{n}{(n-2)\gamma})$. Далее, по неравенству Гёльдера для интегралов,

$$\int\limits_E |z(x,t)|^\gamma dx \leqslant \left[\int\limits_E |z(x,t)|^{\gamma p} dx\right]^{1/p} [\mathrm{meas}\, E]^{1-\frac{1}{p}} = \|z(\cdot,t)\|_{\gamma p,E}^\gamma [\mathrm{meas}\, E]^{1-\frac{1}{p}} \leqslant$$
$$\leqslant [\max_{\tau\in[0,T]} \|z(\cdot,\tau)\|_{\gamma p,\Omega}]^\gamma [\mathrm{meas}\, E]^{1-\frac{1}{p}},$$

где $p \in (1, \frac{2n}{(n-2)\gamma})$ — некоторое число. Таким образом,

$$\int\limits_E |z(x,t)|^\gamma dx \leqslant [\max_{\tau\in[0,T]} \|z(\cdot,\tau)\|_{\gamma p,\Omega}]^\gamma [\mathrm{meas}\, E]^{1-\frac{1}{p}}.$$

Согласно пункту 3.в) леммы 2.5.1,

$$\max_{t\in[0,T]} \|z(\cdot,t)\|_{\gamma p,\Omega} \leqslant c_3^*(p\gamma)\|z\|_{\mathcal{Э}_2^1(Q_T)}.$$

Как следствие,

$$\int\limits_E |z(x,t)|^\gamma dx \leqslant [\max_{\tau\in[0,T]} \|z(\cdot,\tau)\|_{\gamma p,\Omega}]^\gamma [\mathrm{meas}\, E]^{1-\frac{1}{p}} \leqslant [c_3^*(\gamma p)\|z\|_{\mathcal{Э}_2^1(Q_T)}]^\gamma [\mathrm{meas}\, E]^{1-\frac{1}{p}}.$$

Положив $\vartheta_0(r) \equiv c_3^*(\gamma p)r$, $\vartheta_1(M) \equiv M^{\frac{p-1}{p\gamma}}$ при всех $r \in [0,+\infty)$, $M \in [0, \mathrm{meas}\,\Omega]$, получаем требуемое утверждение.

Лемма полностью доказана. ■

Лемма 2.5.4. *Пусть при каждом $t \in [0,T]$ заданы измеримые по Лебегу множества $E_i(t) \subseteq \Omega$, $i = 1,2,\ldots$, такие, что $\mathrm{meas}_n\, E_i(t) \to 0$, $i \to \infty$, по мере Лебега на $[0,T]$, и пусть $K \in L_{2,1}(Q_T)$. Тогда*

$$\lim_{i\to\infty} \int\limits_0^T \|K(\cdot,t)\|_{2,E_i(t)} dt = 0. \tag{2.5.7}$$

Доказательство. Предположим, что утверждение леммы неверно. Тогда найдутся положительное число ε_0 и подпоследовательность i_j, $j = 1,2,\ldots$, последовательности $i = 1,2,\ldots$, такие, что

$$\int\limits_0^T \|K(\cdot,t)\|_{2,E_{i_j}(t)} dt \geqslant \varepsilon_0, \quad j = 1,2,\ldots \tag{2.5.8}$$

Поскольку $\mathrm{meas}_n\, E_i(t) \to 0$, $i \to \infty$, по мере Лебега на $[0,T]$, то $\mathrm{meas}_n\, E_{i_j}(t) \to 0$, $j \to \infty$, по мере Лебега на $[0,T]$, в силу чего найдётся подпоследовательность j_m, $m = 1,2,\ldots$, последовательности $j = 1,2,\ldots$, такая, что $\mathrm{meas}_n\, E_{i_{j_m}}(t) \to 0$, $m \to \infty$, почти всюду на $[0,T]$. Пользуясь теперь абсолютной непрерывностью интеграла Лебега, заключаем, что

$$\|K(\cdot,t)\|_{2,E_{i_{j_m}}(t)} \to 0, \quad m \to \infty, \quad \text{п.в. на } [0,T].$$

Так как, кроме того,

$$\|K(\cdot,t)\|_{2,E_{i_{j_m}}(t)} \leqslant \|K(\cdot,t)\|_{2,\Omega} \text{ при п.в. на } [0,T],$$

а (в силу включения $K \in L_{2,1}(Q_T)$) функция $[0,T] \ni t \mapsto \|K(\cdot,t)\|_{2,\Omega}$ принадлежит $L_1[0,T]$, то, в силу теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла Лебега,

$$\lim_{m\to\infty} \int_0^T \|K(\cdot,t)\|_{2,E_{i_{j_m}}(t)} dt = 0,$$

что противоречит соотношению (2.5.8). Полученное противоречие доказывает утверждение леммы. ■

Лемма 2.5.5. *Пусть при каждом* $t \in [0,T]$ *заданы измеримые по Лебегу множества* $E_i(t) \subseteq \Omega$, $i = 1,2,\ldots$, *такие, что* $\operatorname{meas}_n E_i(t) \to 0$, $i \to \infty$, *по мере Лебега на* $[0,T]$; *функция* $K(t)$, $t \in [0,T]$, *— неотрицательна и суммируема по отрезку* $[0,T]$; *а неотрицательная функция* $\vartheta(q)$, $q \in [0, \operatorname{meas}_n \Omega]$, *— непрерывна и не убывает на* $[0, \operatorname{meas}_n \Omega]$, *и такова, что* $\vartheta(0) = 0$. *Тогда*

$$\lim_{i\to\infty} \int_0^T K(t)\vartheta(\operatorname{meas}_n E_i(t))dt = 0. \tag{2.5.9}$$

Доказательство. Пусть это не так, и найдутся $\varepsilon_0 > 0$ и подпоследовательность i_j, $j = 1,2,\ldots$, последовательности $i = 1,2,\ldots$, такие, что

$$\int_0^T K(t)\vartheta(\operatorname{meas}_n E_{i_j}(t))dt \geqslant \varepsilon_0, \ \ j = 1,2,\ldots \tag{2.5.10}$$

Поскольку $\operatorname{meas}_n E_i(t) \to 0$, $i \to \infty$, по мере Лебега на $[0,T]$, то $\operatorname{meas}_n E_{i_j}(t) \to 0$, $j \to \infty$, по мере Лебега на $[0,T]$, в силу чего найдётся подпоследовательность j_m, $m = 1,2,\ldots$, последовательности $j = 1,2,\ldots$, такая, что $\operatorname{meas}_n E_{i_{j_m}}(t) \to 0$, $m \to \infty$, почти всюду на $[0,T]$. Поэтому, ввиду непрерывности функции ϑ на $[0, \operatorname{meas}_n \Omega]$,

$$K(t)\vartheta(\operatorname{meas}_n E_{i_{j_m}}(t)) \to 0, \ \ m \to \infty, \ \ \text{п.в. на } [0,T].$$

Так как

$$K(t)\vartheta(\operatorname{meas}_n E_{i_{j_m}}(t)) \leqslant K(t)\vartheta(\operatorname{meas}_n \Omega), \ \ m = 1,2,\ldots, \ \ \text{п.в. на } [0,T],$$

а функция K является элементом $L_1[0,T]$, то после применения теоремы Лебега о мажорированной сходимости будем иметь

$$\lim_{m\to\infty} \int_0^T K(t)\vartheta(\operatorname{meas}_n E_{i_{j_m}}(t))dt = 0,$$

что противоречит неравенству (2.5.10). Следовательно, лемма доказана. ■

Лемма 2.5.6. *Пусть* $\sigma \in C^\infty(\bar{Q}_T)$, *и пусть* $e_j \in L_2(\Omega)$, $j = 1,2,\ldots$, *— некоторый ортонормированный базис в* $L_2(\Omega)$. *Тогда ряд Фурье*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j(t)e_j, \tag{2.5.11}$$

где

$$\sigma_j(t) \equiv \int_\Omega \sigma(x,t)e_j(x)\,dx, \ \ j = 1,2,\ldots, \tag{2.5.12}$$

сходится к функции σ *в норме пространства* $C^m([0,T], L_2(\Omega))$ *при любом* $m \geqslant 0$.

Доказательство. Поскольку $\sigma \in C^\infty(\bar{Q}_T)$, то, очевидно,

$$\sigma_j \in C^\infty[0,T], \ \ \frac{d^m\sigma_j(t)}{dt^m} = \int_\Omega \frac{\partial^m\sigma(x,t)}{\partial t^m} e_k(x)\,dx, \ \ m, \ j = 1,2,\ldots \tag{2.5.13}$$

Ясно, что при любом $t \in [0,T]$ ряд
$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{d^m \sigma_j(t)}{dt^m} e_j \tag{2.5.14}$$
сходится в норме $L_2(\Omega)$ к $\frac{\partial^m \sigma(x,t)}{\partial t^m}$, $m = 1,2,\ldots$ Полагая $r_{N,m}(t) \equiv \int\limits_{\Omega} \left[\frac{\partial^m \sigma(x,t)}{\partial t^m} - \sum\limits_{j=1}^{N} \frac{d^m \sigma_j(t)}{dt^m} e_j(x) \right]^2 dx$, $N = 1,2,\ldots$, $m = 0,1,2,\ldots$, заключаем отсюда, что
$$\lim_{N\to\infty} r_{N,m}(t) = 0, \ \ \forall\, t \in [t_0,\, t_1]; \ \ r_{N,m} \in C[0,T], \ \ N = 1,2,\ldots, \ m = 0,1,2,\ldots;$$
$$r_{N+1,m}(t) \leqslant r_{N,m}(t), \ \ \forall\, t \in [0,T], \ \ N = 1,2,\ldots, \ m = 0,1,2,\ldots$$
Поэтому, в силу леммы 1.5.1, $\lim\limits_{N\to\infty} \max\limits_{t\in[0,T]} r_{N,m}(t) = 0$, $m = 0,1,2,\ldots$, что означает сходимость ряда (2.5.11) к функции σ в норме пространства $C^m([0,T],\, L_2(\Omega))$ при любом $m \geqslant 0$. ■

Положим $x' \equiv (x_1, \ldots, x_{n-1})$.

Ниже нам потребуется следующая (см., например, [62, лемма 6])

Лемма 2.5.7. *Пусть множество конечной положительной меры Лебега $\mathcal{A}_1 \subset \mathbb{R}^{n-1}$ и отрезок $\mathcal{A}_2 \equiv [a_1,\, a_2] \subset \mathbb{R}$ таковы, что $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \subset \Omega$. Тогда найдётся, зависящая только от отрезка $\mathcal{A}_2$, постоянная $C > 0$, такая, что для любой функции $\zeta \in \overset{\circ}{V}{}_2^1(Q_T)$*
$$\sup_{t\in[0,T]} \left[\int\limits_{\mathcal{A}_1} \|\zeta(x',\cdot,t)\|^2_{\infty,\mathcal{A}_2}\, dx' \right]^{1/2} \leqslant C\|\zeta\|_{\overset{\circ}{V}{}_2^1(Q_T)}.$$

Доказательство. На основании классического свойства обобщённо дифференцируемых функций (см., например, [53, с.344]) можно без ограничения общности считать при п.в. $x' \in \mathcal{A}_1$ и всех $t \in [0,T]$ функцию $\zeta_{x_n}(x',\cdot,t)\colon \mathcal{A}_2 \to \mathbb{R}^1$ обобщённой производной функции $\zeta(x',\cdot,t)\colon \mathcal{A}_2 \to \mathbb{R}^1$. Поэтому по элементарной теореме вложения (см., например, [53, с.359], $p = 2$, $l = 1$, $n = 1$) имеем при п.в. $x' \in \mathcal{A}_1$ и всех $t \in [0,T]$
$$\|\zeta(x',\cdot,t)\|_{\infty,\mathcal{A}_2} \leqslant C\sqrt{\|\zeta(x',\cdot,t)\|^2_{2,\mathcal{A}_2} + \|\zeta_{x_n}(x',\cdot,t)\|^2_{2,\mathcal{A}_2}},$$
где $C > 0$ не зависит ни от $x' \in \mathcal{A}_1$, ни от $t \in [0,T]$. Возводя в квадрат обе части этого неравенства и интегрируя затем по множеству $\mathcal{A}_1$, получаем, что
$$\left[\int\limits_{\mathcal{A}_1} \|\zeta(x',\cdot,t)\|^2_{\infty,\mathcal{A}_2}\, dx' \right]^{1/2} \leqslant C \left[\int\limits_{\mathcal{A}_1\times\mathcal{A}_2} [|\zeta(x,t)|^2 + |\zeta_{x_n}(x,t)|^2] dx \right]^{1/2} \leqslant C\|\zeta(\cdot,t)\|^{(1)}_{2,\Omega} \leqslant C\|\zeta\|_{\overset{\circ}{V}{}_2^1(Q_T)}.$$
Лемма доказана. ■

Лемма 2.5.8. *Пусть множество конечной положительной меры Лебега $\mathcal{A}_1 \subset \mathbb{R}^{n-1}$ и отрезок $\mathcal{A}_2 \equiv [a_1,\, a_2] \subset \mathbb{R}$ таковы, что $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \subset \Omega$. Тогда для любой функции $\zeta \in \overset{\circ}{V}{}_2^1(Q_T)$*
$$\left[\int\limits_0^T dt \int\limits_{\mathcal{A}_1} \|\zeta(x',\cdot,t)\|^2_{\infty,\mathcal{A}_2}\, dx' \right]^{1/2} \leqslant C[\|\zeta\|^2_{\mathcal{A}_1\times\mathcal{A}_2\times[0,T]} + \|\nabla_x\zeta\|^2_{\mathcal{A}_1\times\mathcal{A}_2\times[0,T]}]^{1/2},$$
где положительную постоянную C можно взять такой же, как в предыдущей лемме

Доказательство. На основании классического свойства обобщённо дифференцируемых функций (см., например, [53, с.344]) можно без ограничения общности считать при п.в. $x' \in \mathcal{A}_1$ и всех $t \in [0,T]$ функцию $\zeta_{x_n}(x',\cdot,t)\colon \mathcal{A}_2 \to \mathbb{R}^1$ обобщённой производной функции $\zeta(x',\cdot,t)\colon \mathcal{A}_2 \to \mathbb{R}^1$. Поэтому по элементарной теореме вложения (см., например, [53, с.359], $p = 2$, $l = 1$, $n = 1$) имеем при п.в. $x' \in \mathcal{A}_1$ и всех $t \in [0,T]$
$$\|\zeta(x',\cdot,t)\|_{\infty,\mathcal{A}_2} \leqslant C\sqrt{\|\zeta(x',\cdot,t)\|^2_{2,\mathcal{A}_2} + \|\zeta_{x_n}(x',\cdot,t)\|^2_{2,\mathcal{A}_2}},$$
где $C > 0$ не зависит ни от $x' \in \mathcal{A}_1$, ни от $t \in [0,T]$. Возводя в квадрат обе части этого неравенства и интегрируя затем по множеству $\mathcal{A}_1 \times [0,T]$, получаем требуемое неравенство. Лемма доказана. ■

Лемма 2.5.9. *Множество $W_1^1[0,T]$ всюду плотно в пространстве $L_1[0,T]$.*

Доказательство. В самом деле, как известно [53], множество $C[0,T]$ всюду плотно в $L_1[0,T]$. Поскольку же в $C[0,T]$ всюду плотно множество всех многочленов с вещественными коэффициентами, а любой многочлен является элементом пространства $W_1^1[0,T]$, то $W_1^1[0,T]$ всюду плотно в пространстве $L_1[0,T]$. Лемма доказана. ■

Лемма 2.5.10. *Множество* $W_{2,1}^{0,1}(S_T)$ *всюду плотно в пространстве* $L_{2,1}(S_T)$.

Доказательство. Нетрудно видеть, что пространство $W_{2,1}^{0,1}(S_T)$ изометрично изоморфно пространству $W_1^1([0,T],L_2(S))$, а пространство $L_{2,1}(S_T)$ изометрично изоморфно пространству $L_1([0,T],L_2(S))$. Таким образом, нам нужно доказать, что $W_1^1([0,T],L_2(S))$ всюду плотно в $L_1([0,T],L_2(S))$. Как известно (см., например, [14]), множество $C([0,T],L_2(S))$ всюду плотно в пространстве $L_1([0,T],L_2(S))$. Поскольку же, в силу леммы 1.1.7, множество всевозможных многочленов с коэффициентами из $L_2(S)$ всюду плотно в $C([0,T],L_2(S))$, а любой такой многочлен, как несложно заметить, является функцией из $W_1^1([0,T],L_2(S))$, то $W_1^1([0,T],L_2(S))$ всюду плотно в $L_1([0,T],L_2(S))$. Лемма доказана. ■

Лемма 2.5.11. *Множество* $W_{2,1}^{0,1}(S'_T)$ *всюду плотно в пространстве* $L_{2,1}(S'_T)$.

Доказательство. Нетрудно видеть, что пространство $W_{2,1}^{0,1}(S'_T)$ изометрично изоморфно пространству $W_1^1([0,T],L_2(S'))$, а пространство $L_{2,1}(S'_T)$ изометрично изоморфно пространству $L_1([0,T],L_2(S'))$. Таким образом, нам нужно доказать, что $W_1^1([0,T],L_2(S'))$ всюду плотно в $L_1([0,T],L_2(S'))$. Как известно (см., например, [14]), множество $C([0,T],L_2(S'))$ всюду плотно в пространстве $L_1([0,T],L_2(S'))$. Поскольку же, в силу леммы 1.1.7, множество всевозможных многочленов с коэффициентами из $L_2(S')$ всюду плотно в $C([0,T],L_2(S'))$, а любой такой многочлен, как несложно заметить, является функцией из $W_1^1([0,T],L_2(S'))$, то $W_1^1([0,T],L_2(S'))$ всюду плотно в $L_1([0,T],L_2(S'))$. Лемма доказана. ■

Глава 3. О представлении некоторых линейных непрерывных операторов

3.1. Абстрактные теоремы

В данном разделе мы доказываем некоторые результаты о представлении некоторых линейных непрерывных операторов. Всюду в данном разделе X, Y — банаховы пространства с нормами $\|\cdot\|_X$ и $\|\cdot\|_Y$ соответственно, $\mathcal{P}$ — компактное метрическое пространство, $[a,b]$ — отрезок числовой оси.

Теорема 3.1.1. *Если оператор $A: X \to C(\mathcal{P}, Y)$ — линеен и ограничен, то найдётся функция $B: \mathcal{P} \to \mathcal{L}(X,Y)$, непрерывная в смысле сильной операторной топологии пространства $\mathcal{L}(X,Y)$, такая, что*

$$A[f](p) = B(p)f \ \ \forall\, f \in X \ \forall\, p \in \mathcal{P}. \tag{3.1.1}$$

При этом

$$\|A\|_{X\to C(\mathcal{P},Y)} = \sup_{p\in\mathcal{P}} \|B(p)\|_{X\to Y}. \tag{3.1.2}$$

Обратно, если функция $B: \mathcal{P} \to \mathcal{L}(X,Y)$ — непрерывна в смысле сильной операторной топологии пространства $\mathcal{L}(X,Y)$, то формула (3.1.1) *задаёт линейный непрерывный оператор, действующий из X в $C(\mathcal{P},Y)$.*

Доказательство. Доказательство разобьём на три части.

1) Покажем, что если функция $B: \mathcal{P} \to \mathcal{L}(X,Y)$ — непрерывна в смысле сильной операторной топологии пространства $\mathcal{L}(X,Y)$, то формула (3.1.1) задаёт линейный непрерывный оператор, действующий из X в $C(\mathcal{P},Y)$.

Действительно, пусть функция $B: \mathcal{P} \to \mathcal{L}(X,Y)$ — непрерывна в смысле сильной операторной топологии пространства $\mathcal{L}(X,Y)$. Тогда при всех $f \in X$ справедливо включение $A[f] \in C(\mathcal{P},Y)$, а линейность оператора A очевидна. Таким образом, A — линейный оператор, действующий из X в $C(\mathcal{P},Y)$.

Докажем ограниченность оператора A. Поскольку функция $B: \mathcal{P} \to \mathcal{L}(X,Y)$ — непрерывна в смысле сильной операторной топологии пространства $\mathcal{L}(X,Y)$, то при всех $f \in X$ функция

$$\mathcal{P} \ni p \mapsto (B(p)f) \in Y$$

непрерывна в смысле сильной топологии пространства Y. Следовательно, в силу теоремы о резонансе, при каждом фиксированном $f \in X$ конечна величина $\sup\limits_{p\in\mathcal{P}} \|B(p)f\|_Y$. Поэтому, снова в силу теоремы о резонансе, конечна величина $\sup\limits_{p\in\mathcal{P}} \|B(p)\|_{X\to Y}$. Как следствие,

$$\|A[f](p)\|_Y \leqslant \|B(p)\|_{X\to Y}\|f\|_X \leqslant \sup_{q\in\mathcal{P}} \|B(q)\|_{X\to Y}\|f\|_X.$$

Переходя здесь к точной верхней грани по $p \in \mathcal{P}$, выводим, что

$$\|A[f]\|_{C(\mathcal{P},Y)} \leqslant \sup_{q\in\mathcal{P}} \|B(q)\|_{X\to Y}\|f\|_X.$$

А это и означает, что оператор A — ограничен.

2) Докажем, что для любого линейного непрерывного оператора $A: X \to C(\mathcal{P},Y)$ найдётся функция $B: \mathcal{P} \to \mathcal{L}(X,Y)$, непрерывная в смысле сильной операторной топологии пространства $\mathcal{L}(X,Y)$, такая, что справедливо представление (3.1.1). В самом деле, пусть оператор $A: X \to C(\mathcal{P},Y)$ — линеен и ограничен. Тогда при всех $f \in X$

$$\sup_{p\in\mathcal{P}} \|A[f](p)\|_Y \leqslant \|A\|_{X\to C(\mathcal{P},Y)}\|f\|_X.$$

Следовательно, при каждом фиксированном $p \in \mathcal{P}$

$$\|A[f](p)\|_Y \leqslant \|A\|_{X\to C(\mathcal{P},Y)}\|f\|_X \ \ \forall\, f \in X.$$

Иными словами, при каждом фиксированном p отображение

$$X \ni f \mapsto A[f](p) \in Y$$

является линейным ограниченным оператором, действующим из X в Y. Обозначив этот оператор через $B(p)$, получаем представление (3.1.1). Непрерывность функции $B : \mathcal{P} \to \mathcal{L}(X,Y)$ в смысле сильной операторной топологии пространства $\mathcal{L}(X,Y)$ следует из того, что при всех $f \in X$ справедливо включение $A[f] \in C(\mathcal{P}, Y)$.

3) Докажем равенство (3.1.2):

$$\|A\|_{X \to C(\mathcal{P},Y)} = \sup_{\|f\|_X \leqslant 1} \sup_{p \in \mathcal{P}} \|A[f](p)\|_Y = \sup_{p \in \mathcal{P}} \sup_{\|f\|_X \leqslant 1} \|B(p)f\|_Y = \sup_{p \in \mathcal{P}} \|B(p)\|_{X \to Y},$$

что и требовалось доказать. ■

Теорема 3.1.2. *Пусть пространство Y — рефлексивно. Если оператор $A : X \to C_s(\mathcal{P}, Y)$ — линеен и ограничен (считаем, что пространство $C_s(\mathcal{P}, Y)$ наделено сильной нормой), то найдётся функция $B : \mathcal{P} \to \mathcal{L}(X,Y)$, непрерывная в смысле слабой операторной топологии пространства $\mathcal{L}(X,Y)$, такая, что*

$$A[f](p) = B(p)f \ \ \forall\, f \in X \ \forall\, p \in \mathcal{P}. \tag{3.1.3}$$

При этом

$$\|A\|_{X \to C_s(\mathcal{P},Y)} = \sup_{p \in \mathcal{P}} \|B(p)\|_{X \to Y}. \tag{3.1.4}$$

Обратно, если функция $B : \mathcal{P} \to \mathcal{L}(X,Y)$ — непрерывна в смысле слабой операторной топологии пространства $\mathcal{L}(X,Y)$, то формула (3.1.3) *задаёт линейный непрерывный оператор, действующий из X в $C_s(\mathcal{P}, Y)$.*

Доказательство. Доказательство разобьём на три части.

1) Покажем, что если функция $B : \mathcal{P} \to \mathcal{L}(X,Y)$ — непрерывна в смысле слабой операторной топологии пространства $\mathcal{L}(X,Y)$, то формула (3.1.3) задаёт линейный непрерывный оператор, действующий из X в $C_s(\mathcal{P}, Y)$.

Действительно, пусть функция $B : \mathcal{P} \to \mathcal{L}(X,Y)$ — непрерывна в смысле слабой операторной топологии пространства $\mathcal{L}(X,Y)$. Тогда при всех $f \in X$ справедливо включение $A[f] \in C_s(\mathcal{P}, Y)$, а линейность оператора A очевидна. Таким образом, A — линейный оператор, действующий из X в $C_s(\mathcal{P}, Y)$.

Докажем ограниченность оператора A. Поскольку функция $B : \mathcal{P} \to \mathcal{L}(X,Y)$ — непрерывна в смысле слабой операторной топологии пространства $\mathcal{L}(X,Y)$, то при всех $f \in X$ функция

$$\mathcal{P} \ni p \mapsto (B(p)f) \in Y$$

непрерывна в смысле слабой топологии пространства Y. Следовательно, в силу теоремы о резонансе, при каждом фиксированном $f \in X$ конечна величина $\sup\limits_{p \in \mathcal{P}} \|B(p)f\|_Y$. Поэтому, снова в силу теоремы о резонансе, конечна величина $\sup\limits_{p \in \mathcal{P}} \|B(p)\|_{X \to Y}$. Как следствие,

$$\|A[f](p)\|_Y \leqslant \|B(p)\|_{X \to Y} \|f\|_X \leqslant \sup_{q \in \mathcal{P}} \|B(q)\|_{X \to Y} \|f\|_X.$$

Переходя здесь к точной верхней грани по $p \in \mathcal{P}$, выводим, что

$$\|A[f]\|_{C_s(\mathcal{P},Y)} \leqslant \sup_{q \in \mathcal{P}} \|B(q)\|_{X \to Y} \|f\|_X.$$

А это и означает, что оператор A — ограничен.

2) Докажем, что для любого линейного непрерывного оператора $A : X \to C_s(\mathcal{P}, Y)$ найдётся функция $B : \mathcal{P} \to \mathcal{L}(X,Y)$, непрерывная в смысле слабой операторной топологии пространства $\mathcal{L}(X,Y)$, такая, что справедливо представление (3.1.3). В самом деле, пусть оператор $A : X \to C_s(\mathcal{P}, Y)$ — линеен и ограничен. Тогда при всех $f \in X$

$$\sup_{p \in \mathcal{P}} \|A[f](p)\|_Y \leqslant \|A\|_{X \to C_s(\mathcal{P},Y)} \|f\|_X.$$

Следовательно, при каждом фиксированном $p \in \mathcal{P}$

$$\|A[f](p)\|_Y \leqslant \|A\|_{X \to C_s(\mathcal{P},Y)} \|f\|_X \ \ \forall\, f \in X.$$

Иными словами, при каждом фиксированном p отображение

$$X \ni f \mapsto A[f](p) \in Y$$

является линейным ограниченным оператором, действующим из X в Y. Обозначив этот оператор через $B(p)$, получаем представление (3.1.3). Непрерывность функции $B : \mathcal{P} \to \mathcal{L}(X,Y)$ в смысле слабой операторной топологии пространства $\mathcal{L}(X,Y)$ следует из того, что при всех $f \in X$ справедливо включение $A[f] \in C_s(\mathcal{P}, Y)$.

3) Докажем равенство (3.1.4):

$$\|A\|_{X \to C_s(\mathcal{P},Y)} = \sup_{\|f\|_X \leqslant 1} \sup_{p \in \mathcal{P}} \|A[f](p)\|_Y = \sup_{p \in \mathcal{P}} \sup_{\|f\|_X \leqslant 1} \|B(p)f\|_Y = \sup_{p \in \mathcal{P}} \|B(p)\|_{X \to Y},$$

что и требовалось доказать. ■

Следствие 3.1.1. *Пусть пространство X — сепарабельно. Если оператор $A : L_1([a,b],X) \to C_s(\mathcal{P},Y)$ — линеен и ограничен (считаем, что пространство $C_s(\mathcal{P},Y)$ наделено сильной нормой), то найдётся функция $B : \mathcal{P} \to \mathcal{L}(L_1([a,b],X),Y)$, непрерывная в смысле слабой операторной топологии пространства $\mathcal{L}(L_1([a,b],X),Y)$, такая, что*

$$A[f](p) = B(p)f \ \ \forall\, f \in L_1([a,b],X) \ \forall\, p \in \mathcal{P}. \tag{3.1.5}$$

При этом

$$\|A\|_{L_1([a,b],X) \to C_s(\mathcal{P},Y)} = \sup_{p \in \mathcal{P}} \|B(p)\|_{L_1([a,b],X) \to Y}. \tag{3.1.6}$$

Обратно, если функция $B : \mathcal{P} \to \mathcal{L}(L_1([a,b],X),Y)$ — непрерывна в смысле слабой операторной топологии пространства $\mathcal{L}(L_1([a,b],X),Y)$, то формула (3.1.5) *задаёт линейный непрерывный оператор, действующий из $L_1([a,b],X)$ в $C_s(\mathcal{P},Y)$.*

Теорема 3.1.3. *Пусть пространства X и Y — рефлексивны и сепарабельны.*

Если оператор $A : L_1([a,b],X) \to Y$ — линеен и ограничен, то найдётся функция $B : [a,b] \to \mathcal{L}(X,Y)$, такая, что при всех $x \in X$ отображение

$$[a,b] \ni t \mapsto (B(t)x) \in Y \tag{3.1.7}$$

слабо измеримо, конечна величина

$$\operatorname*{vraisup}_{t \in [a,b]} \|B(t)\|_{X \to Y}, \tag{3.1.8}$$

и справедливо представление

$$A[f] = (Б) \int_a^b B(t)f(t)dt \ \ \forall\, f \in L_1([a,b],X). \tag{3.1.9}$$

При этом

$$\|A\|_{L_1([a,b],X) \to Y} = \operatorname*{vraisup}_{t \in [a,b]} \|B(t)\|_{X \to Y}. \tag{3.1.10}$$

Обратно, если функция $B : [a,b] \to \mathcal{L}(X,Y)$ обладает указанными выше свойствами, то формула (3.1.9) *задаёт линейный непрерывный оператор, действующий из $L_1([a,b],X)$ в Y.*

Доказательство. Разобьём доказательство на две части.

1) Докажем, что если функция $B : [a,b] \to \mathcal{L}(X,Y)$ обладает указанными выше свойствами, то формула (3.1.9) задаёт линейный непрерывный оператор, действующий из $L_1([a,b],X)$ в Y. В самом деле, поскольку при любом $x \in X$ слабо измеримо отображение (3.1.7), а пространства X и Y сепарабельны, то сильно измеримо отображение

$$[a,b] \ni t \mapsto (B(t)f(t)) \in Y. \tag{3.1.11}$$

Далее, в силу непрерывности оператора $B(t)$ и конечности величины (3.1.8) заключаем, что при всех $f \in L_1([a,b],X)$ и п.в. $t \in [a,b]$

$$\|B(t)f(t)\|_Y \leqslant [\operatorname*{vraisup}_{\tau \in [a,b]} \|B(\tau)\|_Y] \|f(t)\|_X. \tag{3.1.12}$$

Поэтому, в силу суммируемости функции f, суммируема и функция (3.1.11), так что формула (3.1.9) действительно задаёт оператор, действующий из $L_1([a,b],X)$ в Y. Линейность этого оператора очевидна. Докажем его ограниченность. Из оценки (3.1.12), равенства (3.1.9) и свойств интеграла Бохнера следует, что

$$\|A[f]\|_Y \leqslant [\operatorname*{vraisup}_{\tau\in[a,b]} \|B(\tau)\|_Y]\|f\|_{1,[a,b],X} \ \ \forall\, f \in L_1([a,b],X),$$

что и означает ограниченность оператора A.

2) Докажем, что если оператор $A : L_1([a,b],X) \to Y$ — линеен и ограничен, то найдётся функция $B : [a,b] \to \mathcal{L}(X,Y)$, такая, что при всех $x \in X$ отображение (3.1.7) — слабо измеримо, конечна величина (3.1.8), справедливо представление (3.1.9), и имеет место равенство (3.1.10).

Выберем произвольно $y^* \in Y^*$ и зафиксируем. Тогда отображение

$$L_1([a,b],X) \ni f \mapsto \langle A[f], y^*\rangle, \tag{3.1.13}$$

является линейным непрерывным функционалом над $L_1([a,b],X)$, вследствие чего найдётся функция $g_{y^*} \in L_\infty([a,b],X^*)$, такая, что

$$\langle A[f], y^*\rangle = \int\limits_a^b \langle f(t), g_{y^*}(t)\rangle dt \ \ \forall\, y^* \in Y^* \ \forall\, f \in L_1([a,b],X), \tag{3.1.14}$$

причём

$$\sup_{\|f\|_{1,[a,b],X}\leqslant 1} \langle A[f], y^*\rangle = \operatorname*{vraisup}_{t\in[a,b]} \|g_{y^*}(t)\|_{X^*} \ \ \forall\, y^* \in Y^*. \tag{3.1.15}$$

Покажем, что при п.в. $t \in [a,b]$ отображение

$$Y^* \ni y^* \mapsto g_{y^*}(t) \in X^* \tag{3.1.16}$$

линейно.

Действительно, если y_1^*, $y_2^* \in Y^*$, то, с одной стороны, в силу (3.1.14),

$$\langle A[f], y_1^* + y_2^*\rangle = \int\limits_a^b \langle f(t), g_{y_1^*+y_2^*}(t)\rangle dt. \tag{3.1.17}$$

С другой стороны, в силу (3.1.14),

$$\langle A[f], y_1^* + y_2^*\rangle = \langle A[f], y_1^*\rangle + \langle A[f], y_2^*\rangle = \int\limits_a^b \langle f(t), g_{y_1^*}(t)\rangle dt + \int\limits_a^b \langle f(t), g_{y_2^*}(t)\rangle dt. \tag{3.1.18}$$

Вычитая (3.1.18) из (3.1.17), будем иметь

$$0 = \int\limits_a^b \langle f(t), g_{y_1^*+y_2^*}(t) - g_{y_1^*}(t) - g_{y_2^*}(t)\rangle dt \ \ \forall\, f \in L_1([a,b],X),$$

ввиду чего

$$g_{y_1^*+y_2^*}(t) = g_{y_1^*}(t) + g_{y_2^*}(t) \ \text{ при п.в. } t \in [a,b],\ \forall\, y_1^*,\ y_2^* \in Y^*. \tag{3.1.19}$$

Кроме того, если $y^* \in Y^*$, $\lambda \in \mathbb{R}$, то, с одной стороны, согласно (3.1.14),

$$\langle A[f], \lambda y^*\rangle = \int\limits_a^b \langle f(t), g_{\lambda y^*}(t)\rangle dt. \tag{3.1.20}$$

С другой стороны, в силу (3.1.14),

$$\langle A[f], \lambda y^*\rangle = \lambda\langle A[f], y^*\rangle = \lambda \int\limits_a^b \langle f(t), g_{y^*}(t)\rangle dt = \int\limits_a^b \langle f(t), \lambda g_{y^*}(t)\rangle dt. \tag{3.1.21}$$

Вычитая (3.1.21) из (3.1.20), выводим, что

$$0 = \int\limits_a^b \langle f(t), g_{\lambda y^*}(t) - \lambda g_{y^*}(t)\rangle dt \ \ \forall\, f \in L_1([a,b],X).$$

Поэтому

$$g_{\lambda y^*}(t) = \lambda g_{y^*}(t) \ \text{ при п.в. } t \in [a,b], \forall\, y^* \in Y^* \ \forall\, \lambda \in \mathbb{R}. \tag{3.1.22}$$

Из (3.1.19) и (3.1.22) следует, что при почти всех $t \in [a,b]$ отображение (3.1.16) — линейно. Обозначим это отображение через $\Lambda(t)$.

Докажем, что при почти всех $t \in [a,b]$ оператор $\Lambda(t) : Y^* \to X^*$ — ограничен.

Так как оператор A — линеен и ограничен, то конечна величина $\|A\|_{L_1([a,b],X)\to Y} \equiv \sup\limits_{\|f\|_{1,[a,b],X}\leqslant 1} \|A[f]\|_Y$, и, значит,

$$\|A\|_{L_1([a,b],X)\to Y} \equiv \sup_{\|f\|_{1,[a,b],X}\leqslant 1} \|A[f]\|_Y = \sup_{\|f\|_{1,[a,b],X}\leqslant 1} \sup_{\|y^*\|_{Y^*}\leqslant 1} |\langle A[f], y^*\rangle| = \sup_{\|y^*\|_{Y^*}\leqslant 1} \sup_{\|f\|_{1,[a,b],X}\leqslant 1} |\langle A[f], y^*\rangle|,$$

откуда, пользуясь (3.1.15), выводим, что

$$\|A\|_{L_1([a,b],X)\to Y} = \sup_{\|y^*\|_{Y^*}\leqslant 1} \operatorname*{vraisup}_{t\in[a,b]} \|\Lambda(t)y^*\|_{X^*} = \operatorname*{vraisup}_{t\in[a,b]} \sup_{\|y^*\|_{Y^*}\leqslant 1} \|\Lambda(t)y^*\|_{X^*}.$$

Отсюда следует, что, во–первых, $\Lambda(t) \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ при п.в. $t \in [a,b]$; во–вторых, конечна величина

$$\operatorname*{vraisup}_{t\in[a,b]} \|\Lambda(t)\|_{Y^*\to X^*};$$

и, в–третьих, что

$$\|A\|_{L_1([a,b],X)\to Y} = \operatorname*{vraisup}_{t\in[a,b]} \|\Lambda(t)\|_{Y^*\to X^*}. \tag{3.1.23}$$

Итак, мы доказали, что найдётся функция $\Lambda : [a,b] \to \mathcal{L}(Y^*, X^*)$, такая, что справедливо представление

$$\langle A[f], y^*\rangle = \int\limits_a^b \langle f(t), \Lambda(t)y^*\rangle dt \ \ \forall\, y^* \in Y^* \ \forall\, f \in L_1([a,b],X), \tag{3.1.24}$$

Поскольку $\Lambda(t)$ — линейный ограниченный оператор, то для него существует сопряжённый оператор $B(t) \in \mathcal{L}(X^{**}, Y^{**})$, причём

$$\|\Lambda(t)\|_{Y^*\to X^*} = \|B(t)\|_{X^{**}\to Y^{**}}.$$

Поскольку пространства X и Y — рефлексивны, то можно считать, что $B(t) \in \mathcal{L}(X,Y)$.

Поэтому равенства (3.1.23) и (3.1.24) можно переписать в виде следующих соотношений:

$$\|A\|_{L_1([a,b],X)\to Y} = \operatorname*{vraisup}_{t\in[a,b]} \|B(t)\|_{X\to Y}, \tag{3.1.25}$$

$$\langle A[f], y^*\rangle = \int\limits_a^b \langle B(t)f(t), y^*\rangle dt \ \ \forall\, y^* \in Y^* \ \forall\, f \in L_1([a,b],X). \tag{3.1.26}$$

Ясно, что равенство (3.1.25) представляет собою соотношение (3.1.10).

Далее, из (3.1.26) следует, что при всех $y^* \in Y^*$

$$\left\langle A[f] - \int\limits_a^b B(t)f(t)dt, y^*\right\rangle = 0,$$

откуда, пользуясь теоремой Хана–Банаха, получаем представление (3.1.9). ■

Теорема 3.1.4. *Пусть пространства X и Y — рефлексивны и сепарабельны.*

Если оператор $A : L_1([a,b],X) \to C_s(\mathcal{P}, Y)$ — линеен и непрерывен (считаем, что пространство $C_s(\mathcal{P}, Y)$ наделено сильной нормой), то найдётся функция $F : \mathcal{P} \times [a,b] \to \mathcal{L}(X,Y)$, такая, что

1) при всех $p \in \mathcal{P}$ отображение

$$[a,b] \ni t \mapsto [F(p,t)x] \in Y \tag{3.1.27}$$

слабо измеримо при каждом фиксированном $x \in X$;

2) конечна величина

$$\sup_{p\in\mathcal{P}} \operatorname{vraisup}_{t\in[a,b]} \|F(p,t)\|_{X\to Y}; \tag{3.1.28}$$

3) при любом $p_0 \in \mathcal{P}$

$$\int\limits_a^b F(p,t)f(t)dt \to \int\limits_a^b F(p_0,t)f(t)dt \text{ слабо в } Y \text{ при } p \to p_0 \ \forall f \in L_1([a,b],X); \tag{3.1.29}$$

4) справедливо представление

$$A[f](p) = (Б)\int\limits_a^b F(p,t)f(t)dt \ \ \forall f \in L_1([a,b],X) \ \forall p \in \mathcal{P}. \tag{3.1.30}$$

При этом

$$\|A\|_{L_1([a,b],X)\to C_s(\mathcal{P},Y)} = \sup_{p\in\mathcal{P}} \operatorname{vraisup}_{t\in[a,b]} \|F(p,t)\|_{X\to Y}. \tag{3.1.31}$$

Обратно, если функция $F : \mathcal{P} \times [a,b] \to \mathcal{L}(X,Y)$ обладает свойствами 1)–3), то формула (3.1.30) *задаёт линейный непрерывный оператор, действующий из $L_1([a,b],X)$ в $C_s(\mathcal{P},Y)$.*

Доказательство. 1) Покажем, что если функция $F : \mathcal{P} \times [a,b] \to \mathcal{L}(X,Y)$ обладает свойствами 1)–3), то формула (3.1.30) задаёт линейный непрерывный оператор, действующий из $L_1([a,b],X)$ в $C_s(\mathcal{P},Y)$.

В самом деле, из первого свойства и сепарабельности пространства Y следует, что отображение

$$[a,b] \ni t \mapsto [F(p,t)f(t)] \in Y$$

сильно измеримо при всех $p \in \mathcal{P}$, $f \in L_1([a,b],X)$. Кроме того, при почти всех $t \in [a,b]$

$$\|F(p,t)f(t)\|_Y \leqslant [\sup_{q\in\mathcal{P}} \operatorname{vraisup}_{t\in[a,b]} \|F(q,t)\|_{X\to Y}]\|f(t)\|_X.$$

Поэтому интеграл в правой части равенства (3.1.30) существует при всех $p \in \mathcal{P}$. То, что при всех $f \in L_1([a,b],X)$ выполнено включение $A[f] \in C_s(\mathcal{P},Y)$, следует из третьего свойства. Итак, оператор A действует из $L_1([a,b],X)$ в $C_s(\mathcal{P},Y)$. Линейность этого оператора очевидна. Докажем ограниченность:

$$\|A[f](p)\|_Y \leqslant \int\limits_a^b \|F(p,t)f(t)\|_Y dt \leqslant [\sup_{q\in\mathcal{P}} \operatorname{vraisup}_{t\in[a,b]} \|F(q,t)\|_{X\to Y}]\|f\|_{1,[a,b],X}.$$

Переходя здесь к точной верхней грани по $p \in \mathcal{P}$, будем иметь

$$\|A[f]\|_{C_s(\mathcal{P},Y)} \leqslant [\sup_{q\in\mathcal{P}} \operatorname{vraisup}_{t\in[a,b]} \|F(q,t)\|_{X\to Y}]\|f\|_{1,[a,b],X} \ \ \forall f \in L_1([a,b],X),$$

что и означает непрерывность оператора A.

2) Докажем теперь, что если оператор $A : L_1([a,b],X) \to C_s(\mathcal{P},Y)$ — линеен и непрерывен, то найдётся функция $F : \mathcal{P} \times [a,b] \to \mathcal{L}(X,Y)$, обладающая свойствами 1)–3), такая, что справедливы представление (3.1.30) и равенство (3.1.31).

Действительно, поскольку оператор A — линеен и ограничен, то, согласно следствию 3.1.1, найдётся функция $E : \mathcal{P} \to \mathcal{L}(L_1([a,b],X),Y)$, непрерывная в смысле слабой операторной топологии пространства $\mathcal{L}(L_1([a,b],X),Y)$, такая, что

$$A[f](p) = E(p)f \ \ \forall f \in L_1([a,b],X) \ \forall p \in \mathcal{P}; \tag{3.1.32}$$

$$\|A\|_{L_1([a,b],X)\to C_s(\mathcal{P},Y)} = \sup_{p\in\mathcal{P}} \|E(p)\|_{L_1([a,b],X)\to Y}. \tag{3.1.33}$$

Выберем произвольно $p \in \mathcal{P}$ и зафиксируем. Поскольку $E(p) \in \mathcal{L}(L_1([a,b],X),Y)$, то, согласно теореме 3.1.3, найдётся функция $B_p : [a,b] \to \mathcal{L}(X,Y)$, такая, что

а) при всех $x \in X$ слабо измеримо отображение

$$[a,b] \ni t \mapsto (B_p(t)x) \in Y;$$

б) конечна величина

$$\operatorname*{vraisup}_{t\in[a,b]} \|B_p(t)\|_{X\to Y};$$

в) справедливо представление

$$E(p)f = (\text{Б})\int_a^b B_p(t)f(t)dt \ \ \forall\, p \in \mathcal{P}\ \forall\, f \in L_1([a,b],X);$$

г) имеет место равенство

$$\|E(p)\|_{L_1([a,b],X)\to Y} = \operatorname*{vraisup}_{t\in[a,b]} \|B_p(t)\|_{X\to Y}.$$

Положив $F(p,t) \equiv B_p(t)$, $p \in \mathcal{P}$, $t \in [a,b]$, получим требуемое утверждение. Теорема полностью доказана. ■

Теорема 3.1.5. *Пусть пространство Y — сепарабельно. Если оператор $A : X \to L_\infty([a,b],Y)$ — линеен и непрерывен, то найдётся функция $B : [a,b] \to \mathcal{L}(X,Y)$, такая, что*

1) при всех $x \in X$ слабо измеримо отображение

$$[a,b] \ni t \mapsto [B(t)x] \in Y; \tag{3.1.34}$$

2) конечна величина

$$\operatorname*{vraisup}_{t\in[a,b]} \|B(t)\|_{X\to Y}; \tag{3.1.35}$$

3) справедливо представление

$$A[f](t) = B(t)f \ \ \text{при п.в. } t \in [a,b]\ \forall\, f \in X; \tag{3.1.36}$$

4) имеет место равенство

$$\|A\|_{X\to L_\infty([a,b],Y)} = \operatorname*{vraisup}_{t\in[a,b]} \|B(t)\|_{X\to Y}. \tag{3.1.37}$$

Обратно, если функция $B : [a,b] \to \mathcal{L}(X,Y)$ обладает свойствами 1) и 2), то формула (3.1.36) *задаёт линейный ограниченный оператор, действующий из X в $L_\infty([a,b],Y)$.*

Доказательство. Доказательство разобьём на две части.

1) Докажем, что если $B : [a,b] \to \mathcal{L}(X,Y)$ обладает свойствами 1) и 2), то формула (3.1.36) задаёт линейный ограниченный оператор, действующий из X в $L_\infty([a,b],Y)$. Отметим, что из свойств 1)–2) следует корректность определения оператора A. Линейность оператора A — очевидна. Докажем его ограниченность. Действительно, при почти всех $t \in [a,b]$, в силу свойства 2),

$$\|A[f](t)\|_Y = \|B(t)f\|_Y \leqslant [\operatorname*{vraisup}_{\tau\in[a,b]} \|B(\tau)\|_{X\to Y}]\|f\|_X;$$

откуда вытекает, что

$$\operatorname*{vraisup}_{t\in[a,b]} \|A[f](t)\|_Y = \|B(t)f\|_Y \leqslant [\operatorname*{vraisup}_{\tau\in[a,b]} \|B(\tau)\|_{X\to Y}]\|f\|_X.$$

А это и означает ограниченность оператора A.

2) Покажем, что если оператор $A : X \to L_\infty([a,b],Y)$ — линеен и непрерывен, то найдётся функция $B : [a,b] \to \mathcal{L}(X,Y)$, обладающая свойствами 1) и 2), и такая, что справедливы представление (3.1.36) и равенство (3.1.37).

В самом деле, если оператор $A : X \to L_\infty([a,b],Y)$ — линеен и непрерывен, то при всех $f \in X$

$$\operatorname*{vraisup}_{t\in[a,b]} \|A[f](t)\|_Y \leqslant \|A\|_{X\to L_\infty([a,b],Y)}\|f\|_X.$$

Следовательно, при почти всех $t \in [a,b]$

$$\|A[f](t)\|_Y \leqslant \|A\|_{X\to L_\infty([a,b],Y)}\|f\|_X.$$

Иными словами, при почти всех $t \in [a,b]$ отображение

$$X \ni f \mapsto [A[f](t)] \in Y$$

является линейным ограниченным оператором, действующим из X в Y. Обозначив этот оператор через $B(t)$, получаем представление (3.1.36).

Далее, поскольку оператор A — линеен и ограничен, то конечна величина

$$\|A\|_{X\to L_\infty([a,b],Y)} \equiv \sup_{\|f\|_X\leqslant 1} \|A[f]\|_{\infty,[a,b],Y}.$$

Поэтому

$$\|A\|_{X\to L_\infty([a,b],Y)} \equiv \sup_{f\in X} \|A[f]\|_{\infty,[a,b],Y} = \sup_{\|f\|_X\leqslant 1} \operatorname*{vraisup}_{t\in[a,b]} \|A[f](t)\|_Y =$$
$$= \sup_{\|f\|_X\leqslant 1} \operatorname*{vraisup}_{t\in[a,b]} \|B(t)f\|_Y = \operatorname*{vraisup}_{t\in[a,b]} \sup_{\|f\|_X\leqslant 1} \|B(t)f\|_Y = \operatorname*{vraisup}_{t\in[a,b]} \|B(t)\|_{X\to Y}.$$

Отсюда следует, что, во–первых, конечна величина (3.1.35); и, во–вторых, что справедливо равенство (3.1.37). ■

Теорема 3.1.6. *Пусть пространства X и Y — рефлексивны и сепарабельны. Если оператор $A : L_1([a,b],X) \to L_\infty([c,d],Y)$ — линеен и непрерывен, то найдётся функция $F : [c,d]\times[a,b] \to \mathcal{L}(X,Y)$, такая, что*

1) при всех $x \in X$ слабо измеримо отображение

$$[c,d]\times[a,b] \ni (t,\tau) \mapsto [F(t,\tau)x] \in Y; \tag{3.1.38}$$

2) конечна величина

$$\operatorname*{vraisup}_{(t,\tau)\in[c,d]\times[a,b]} \|F(t,\tau)\|_{X\to Y}; \tag{3.1.39}$$

3) справедливо представление

$$A[f](t) = (Б)\int_a^b F(t,\tau)f(\tau)d\tau \ \ \textit{при п.в. } t \in [c,d],\ \forall\, f \in L_1([a,b],X); \tag{3.1.40}$$

4) имеет место равенство

$$\|A\|_{L_1([a,b],X)\to L_\infty([c,d],Y)} = \operatorname*{vraisup}_{(t,\tau)\in[c,d]\times[a,b]} \|F(t,\tau)\|_{X\to Y}. \tag{3.1.41}$$

Обратно, если функция $F : [c,d]\times[a,b] \to \mathcal{L}(X,Y)$ обладает свойствами 1) и 2), то формула (3.1.40) *задаёт линейный непрерывный оператор, действующий из $L_1([a,b],X)$ в $L_\infty([c,d],Y)$.*

Доказательство. 1) Докажем, что если функция $F : [c,d]\times[a,b] \to \mathcal{L}(X,Y)$ обладает свойствами 1) и 2), то формула (3.1.40) задаёт линейный непрерывный оператор, действующий из $L_1([a,b],X)$ в $L_\infty([c,d],Y)$.

В самом деле, пусть это так. Тогда при почти всех $t \in [c,d]$ измеримо отображение

$$[a,b] \ni \tau \mapsto [F(t,\tau)f(\tau)] \in Y.$$

Далее, при почти всех $(t,\tau) \in [c,d]\times[a,b]$, в силу свойства 2),

$$\|F(t,\tau)f(\tau)\|_Y \leqslant [\operatorname*{vraisup}_{(t',\tau')\in[c,d]\times[a,b]} \|F(t',\tau')\|_{X\to Y}]\|f(\tau)\|_X. \tag{3.1.42}$$

Поэтому, ввиду суммируемости функции f, интеграл в правой части формулы (3.1.40) имеет смысл.

Из неравенства (3.1.42) следует, что при почти всех $t \in [c,d]$

$$\|A[f](t)\|_Y \leqslant [\operatorname*{vraisup}_{(t',\tau')\in[c,d]\times[a,b]} \|F(t',\tau')\|_{X\to Y}]\|f\|_{1,[a,b],X},$$

откуда вытекает, во–первых, что оператор A корректно определён; и, во–вторых, что этот оператор ограничен. Линейность же оператора A очевидна.

2) Докажем, что если оператор $A : L_1([a,b],X) \to L_\infty([c,d],Y)$ — линеен и непрерывен, то найдётся функция $F : [c,d]\times[a,b] \to \mathcal{L}(X,Y)$, обладающая свойствами 1)–2), и такая, что справедливы представление (3.1.40) и равенство (3.1.41).

В самом деле, на основании теоремы 3.1.5, найдётся функция $E : [c,d] \to \mathcal{L}(L_1([a,b],X),Y)$, такая, что

а) при всех $f \in L_1([a,b],X)$ слабо измеримо отображение

$$[c,d] \ni t \mapsto [E(t)f] \in Y;$$

б) конечна величина

$$\operatorname*{vraisup}_{t\in[a,b]} \|E(t)\|_{L_1([a,b],X)\to Y};$$

в) справедливо представление

$$A[f](t) = E(t)f \ \text{ при п.в. } t \in [c,d] \ \forall f \in L_1([a,b],X);$$

г) имеет место равенство

$$\|A\|_{L_1([a,b],X)\to L_\infty([c,d],Y)} = \operatorname*{vraisup}_{t\in[a,b]} \|E(t)\|_{L_1([a,b],X)\to Y}.$$

Выберем теперь произвольно $t \in [c,d]$ и зафиксируем. Поскольку $E(t) \in \mathcal{L}(L_1([a,b],X),Y)$, то, согласно теореме 3.1.3, найдётся функция $B_t : [a,b] \to \mathcal{L}(X,Y)$, такая, что

д) при каждом фиксированном $x \in X$ слабо измеримо отображение

$$[a,b] \ni \tau \mapsto [B_t(\tau)x] \in Y;$$

е) конечна величина

$$\operatorname*{vraisup}_{\tau\in[a,b]} \|B_t(\tau)\|_{X\to Y};$$

ё) справедливо представление

$$E(t)f = (\text{Б})\int\limits_a^b B_t(\tau)f(\tau)d\tau \ \text{ при п.в. } t \in [c,d] \ \forall f \in L_1([a,b],X);$$

ж) выполняется равенство

$$\|E(t)\|_{L_1([a,b],X)\to Y} = \operatorname*{vraisup}_{\tau\in[a,b]} \|B_t(\tau)\|_{X\to Y}.$$

Положив затем $F(t,\tau) \equiv B_t(\tau)$, $(t,\tau) \in [c,d]\times[a,b]$, получаем требуемое утверждение. ■

3.2. Применение абстрактных теорем к энергетическим классам

В данном разделе мы выводим представления линейных непрерывных операторов, определённых на пространстве суммируемых по Бохнеру функций, и принимающих значения в энергетических классах.

Пусть V и H — сепарабельные гильбертовы пространства со скалярными произведениями $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ и $\langle\cdot,\cdot\rangle_H$ соответственно, с соответствующими нормами $\|\cdot\|_V$ и $\|\cdot\|_H$, $V \subset H$, и это вложение непрерывно. Иными словами, найдётся постоянная $\nu > 0$, такая, что

$$\|v\|_H \leqslant \nu\|v\|_V \ \ \forall v \in V.$$

Теорема 3.2.1. *Пусть оператор $A : L_1([0,T],H) \to Э([0,T];V,H)$ — линеен и непрерывен. Тогда найдётся функция $\Psi : \Gamma \to \mathcal{L}(V,H)$, такая, что*

1) при каждом фиксированном $h \in H$ и всех $t \in [0,T]$ измеримо отображение

$$[0,T] \ni \tau \mapsto [\Psi(t,\tau)h] \in V; \tag{3.2.1}$$

2) конечна величина

$$\sup_{t\in[0,T]} \operatorname*{vraisup}_{\tau\in[0,T]} \|\Psi(t,\tau)\|_{H\to V}; \tag{3.2.2}$$

3) при любом $t_0 \in [0,T]$

$$\int\limits_0^T \Psi(t,\tau)f(\tau)d\tau \to \int\limits_0^T \Psi(t_0,\tau)f(\tau)d\tau \ \text{слабо в } V \text{ при } t \to t_0 \ \forall f \in L_1([0,T],H); \tag{3.2.3}$$

4) при почти всех $\tau \in [0,T]$ и при каждом фиксированном $h \in H$ функция

$$[0,T] \ni t \mapsto [\Psi(t,\tau)h] \in V \tag{3.2.4}$$

является элементом пространства $W^1_\infty([0,T],H)$ и $\Psi_t(t,\tau) \in \mathcal{L}(H,H)$ при всех $(t,\tau) \in \Gamma$;

5) при всех фиксированных $h \in H$ измеримо отображение

$$\Gamma \ni (t,\tau) \mapsto [\Psi_t(t,\tau)h] \in H; \tag{3.2.5}$$

6) конечна величина

$$\operatorname*{vraisup}_{(t,\tau)\in\Gamma} \|\Psi_t(t,\tau)\|_{H\to H}; \tag{3.2.6}$$

7) справедливы представления

$$A[f](t) = \int\limits_a^b \Psi(t,\tau)f(\tau)d\tau, \ \ \frac{dA[f](t)}{dt} = \int\limits_a^b \Psi_t(t,\tau)f(\tau)d\tau \ \text{при п.в. } t \in [0,T] \ \forall f \in L_1([0,T],H); \tag{3.2.7}$$

8) имеет место неравенство

$$\|A\|_{L_1([0,T],H)\to Э([0,T];V,H)} \leqslant \sup_{t\in[0,T]} \operatorname*{vraisup}_{\tau\in[0,T]} \|\Psi(t,\tau)\|_{H\to V} + \operatorname*{vraisup}_{(t,\tau)\in\Gamma} \|\Psi_t(t,\tau)\|_{H\to H}. \tag{3.2.8}$$

Обратно, если функция $\Psi : \Gamma \to \mathcal{L}(V,H)$ обладает свойствами 1)–6), то оператор A, задаваемый соотношениями (3.2.7), *является линейным ограниченным оператором, действующим из $L_1([0,T],H)$ в $Э([0,T];V,H)$.*

Доказательство. 1) Пусть оператор $A : L_1([0,T],H) \to Э([0,T];V,H)$ — линеен и непрерывен.

Введём операторы $B : L_1([0,T],H) \to C_s([0,T],V)$ и $E : L_1([0,T],H) \to L_\infty([0,T],H)$ равенствами

$$B[f](t) = A[f](t), \ \ E[f](t) = \frac{dA[f](t)}{dt} \ \text{при п.в. } t \in [0,T] \ \forall f \in L_1([0,T],H).$$

Нетрудно видеть, что операторы B и E — линейны и непрерывны. Поэтому, согласно теоремам 3.1.4 и 3.1.6, найдутся функции $F : \Gamma \to \mathcal{L}(H,V)$ и $G : \Gamma \to \mathcal{L}(H,H)$, такие, что

а) при всех фиксированных $t \in [0,T]$ и $h \in H$ измеримо отображение

$$[0,T] \ni \tau \mapsto [F(t,\tau)h] \in V;$$

б) при всех фиксированных $h \in H$ измеримо отображение

$$\Gamma \ni (t,\tau) \mapsto [G(t,\tau)h] \in H;$$

в) конечны величины

$$\sup_{t\in[0,T]} \operatorname*{vraisup}_{\tau\in[0,T]} \|F(t,\tau)\|_{H\to V}$$

и

$$\operatorname*{vraisup}_{(t,\tau)\in\Gamma} \|\Psi_t(t,\tau)\|_{H\to H};$$

г) при любом $t_0 \in [0,T]$

$$\int\limits_0^T F(t,\tau)f(\tau)d\tau \to \int\limits_0^T F(t_0,\tau)f(\tau)d\tau \text{ слабо в } V \text{ при } t \to t_0 \ \forall\, f \in L_1([0,T],H);$$

д) имеют место представления

$$B[f](t) = \int\limits_a^b F(t,\tau)f(\tau)d\tau, \ \ E[f](t) = \int\limits_a^b G(t,\tau)f(\tau)d\tau \text{ при п.в. } t \in [0,T] \ \forall\, f \in L_1([0,T],H);$$

е) справедливы равенства

$$\|B\|_{L_1([0,T],H)\to C_s([0,T],V)} = \sup_{t\in[0,T]} \operatorname*{vraisup}_{\tau\in[0,T]} \|F(t,\tau)\|_{H\to V}, \ \ \|E\|_{L_1([0,T],H)\to L_\infty([0,T],H)} = \operatorname*{vraisup}_{(t,\tau)\in\Gamma} \|G(t,\tau)\|_{H\to H}.$$

Далее, в силу определения класса $Э([0,T];V,H)$, операторов B и E, и того, что оператор A принимает значения в $Э([0,T];V,H)$, вытекает, что

$$\int\limits_0^T E[f](t)\varphi(t)dt = -\int\limits_0^T B[f](t)\varphi'(t)dt \ \ \forall\, \varphi \in \mathfrak{D}(0,T) \ \forall\, f \in L_1([0,T],H).$$

Подставив сюда представления операторов B и E, выводим, что

$$\int\limits_\Gamma G(t,\tau)f(\tau)\varphi(t)dtd\tau = -\int\limits_\Gamma F(t,\tau)f(\tau)\varphi'(t)dtd\tau \ \ \forall\, \varphi \in \mathfrak{D}(0,T) \ \forall\, f \in L_1([0,T],H),$$

откуда следует, что

$$\int\limits_0^T \left[\int\limits_0^T G(t,\tau)f(\tau)\varphi(t)dt\right] d\tau = -\int\limits_0^T \left[\int\limits_0^T F(t,\tau)f(\tau)\varphi'(t)dt\right] d\tau \ \ \forall\, \varphi \in \mathfrak{D}(0,T) \ \forall\, f \in L_1([0,T],H).$$

Ограничившись в данном соотношении функциями f вида $f(\tau) \equiv h\psi(\tau)$, $\tau \in [0,T]$, где $h \in H$, $\psi \in \mathfrak{D}(0,T)$, заключаем, что

$$\int\limits_0^T \left[\int\limits_0^T G(t,\tau)h\varphi(t)dt + \int\limits_0^T F(t,\tau)h\varphi'(t)dt\right] \psi(\tau)d\tau = 0 \ \ \forall\, \varphi, \ \psi \in \mathfrak{D}(0,T).$$

Это означает, что при почти всех $t \in [0,T]$

$$\int\limits_0^T G(t,\tau)h\varphi(t)dt = -\int\limits_0^T F(t,\tau)h\varphi'(t)dt \ \ \forall\, \varphi \in \mathfrak{D}(0,T).$$

Таким образом, в качестве функции Ψ можно взять функцию F.

Докажем теперь неравенство (3.2.8). В самом деле, при всех $f \in L_1([0,T],H)$

$$\begin{aligned} \|A[f]\|_{Э([0,T];V,H)} &= \|B[f]\|_{C_s([0,T],V)} + \|E[f]\|_{\infty,[0,T],H} \leqslant \\ &\leqslant [\sup_{t\in[0,T]} \operatorname*{vraisup}_{\tau\in[0,T]} \|\Psi(t,\tau)\|_{H\to V} + \operatorname*{vraisup}_{(t,\tau)\in\Gamma} \|\Psi_t(t,\tau)\|_{H\to H}]\|f\|_{1,[0,T],H}. \end{aligned}$$

Перейдя здесь к точной верхней грани по $f \in L_1([0,T],H)$, получаем требуемое неравенство.

2) Утверждение о том, что если функция $\Psi : \Gamma \to \mathcal{L}(V,H)$ обладает свойствами 1)–6), то оператор A, задаваемый соотношениями (3.2.7), является линейным ограниченным оператором, действующим из $L_1([0,T],H)$ в $Э([0,T];V,H)$, вытекает непосредственно из этих свойств. ■

Введём теперь пространство $Є([0,T];V,H)$ как множество функций $f \in Э([0,T];V,H)$, у которых $\dot f \in C_s([0,T],H)$. Норму в классе $Є([0,T];V,H)$ определим равенством

$$\|f\|_{Є([0,T];V,H)} = \sup_{t\in[0,T]} \sqrt{\|f(t)\|_V^2 + \|\dot f(t)\|_H^2}.$$

Нетрудно показать, что введённое пространство является банаховым.

Теорема 3.2.2. *Пусть оператор* $A : L_1([0,T],H) \to \mathfrak{C}([0,T];V,H)$ *— линеен и непрерывен. Тогда найдётся функция* $\Psi : \Gamma \to \mathcal{L}(H,V)$*, такая, что*

1) при каждом фиксированном $h \in H$ *и всех* $t \in [0,T]$ *измеримо отображение*

$$[0,T] \ni \tau \mapsto [\Psi(t,\tau)h] \in V; \tag{3.2.9}$$

2) конечна величина

$$\sup_{t\in[0,T]} \operatorname*{vraisup}_{\tau\in[0,T]} \|\Psi(t,\tau)\|_{H\to V}; \tag{3.2.10}$$

3) при любом $t_0 \in [0,T]$

$$\int\limits_0^T \Psi(t,\tau)f(\tau)d\tau \to \int\limits_0^T \Psi(t_0,\tau)f(\tau)d\tau \text{ слабо в } V \text{ при } t \to t_0\ \forall\, f \in L_1([0,T],H); \tag{3.2.11}$$

4) при почти всех $\tau \in [0,T]$ *и при каждом фиксированном* $h \in H$ *функция*

$$[0,T] \ni t \mapsto [\Psi(t,\tau)h] \in V \tag{3.2.12}$$

является элементом пространства $W^1_\infty([0,T],H)$ *и* $\Psi_t(t,\tau) \in \mathcal{L}(H,H)$ *при всех* $(t,\tau) \in \Gamma$*;*

5) при каждом фиксированном $h \in H$ *и всех* $t \in [0,T]$ *измеримо отображение*

$$[0,T] \ni \tau \mapsto [\Psi_t(t,\tau)h] \in H; \tag{3.2.13}$$

6) конечна величина

$$\sup_{t\in[0,T]} \operatorname*{vraisup}_{\tau\in[0,T]} \|\Psi_t(t,\tau)\|_{H\to H}; \tag{3.2.14}$$

7) при любом $t_0 \in [0,T]$

$$\int\limits_0^T \Psi_t(t,\tau)f(\tau)d\tau \to \int\limits_0^T \Psi_t(t_0,\tau)f(\tau)d\tau \text{ слабо в } H \text{ при } t \to t_0\ \forall\, f \in L_1([0,T],H); \tag{3.2.15}$$

8) справедливы представления

$$A[f](t) = \int\limits_a^b \Psi(t,\tau)f(\tau)d\tau,\ \ \frac{dA[f](t)}{dt} = \int\limits_a^b \Psi_t(t,\tau)f(\tau)d\tau \text{ при п.в. } t \in [0,T]\ \forall\, f \in L_1([0,T],H); \tag{3.2.16}$$

9) имеет место неравенство

$$\|A\|_{L_1([0,T],H)\to\mathfrak{C}([0,T];V,H)} \leqslant [\sup_{t\in[0,T]} \operatorname*{vraisup}_{\tau\in[0,T]} \|\Psi(t,\tau)\|^2_{H\to V} + \sup_{t\in[0,T]} \operatorname*{vraisup}_{\tau\in[0,T]} \|\Psi_t(t,\tau)\|^2_{H\to H}]^{1/2}. \tag{3.2.17}$$

Обратно, если функция $\Psi : \Gamma \to \mathcal{L}(V,H)$ *обладает свойствами 1)–7), то оператор* A*, задаваемый соотношениями* (3.2.16)*, является линейным ограниченным оператором, действующим из* $L_1([0,T],H)$ *в* $\mathfrak{C}([0,T];V,H)$*.*

Доказательство. 1) Пусть оператор $A : L_1([0,T],H) \to \mathfrak{C}([0,T];V,H)$ — линеен и непрерывен.

Введём операторы $B : L_1([0,T],H) \to C_s([0,T],V)$ и $E : L_1([0,T],H) \to C_s([0,T],H)$ равенствами

$$B[f](t) = A[f](t),\ \ E[f](t) = \frac{dA[f](t)}{dt} \text{ при п.в. } t \in [0,T]\ \forall\, f \in L_1([0,T],H).$$

Нетрудно видеть, что операторы B и E — линейны и непрерывны. Поэтому, согласно теореме 3.1.4, найдутся функции $F : \Gamma \to \mathcal{L}(H,V)$ и $G : \Gamma \to \mathcal{L}(H,H)$, такие, что

а) при всех фиксированных $t \in [0,T]$ и $h \in H$ измеримы отображения

$$[0,T] \ni \tau \mapsto [F(t,\tau)h] \in V,\ \ [0,T] \ni \tau \mapsto [G(t,\tau)h] \in H;$$

б) конечны величины

$$\sup_{t\in[0,T]} \operatorname*{vraisup}_{\tau\in[0,T]} \|F(t,\tau)\|_{H\to V}, \quad \sup_{t\in[0,T]} \operatorname*{vraisup}_{\tau\in[0,T]} \|G(t,\tau)\|_{H\to H};$$

в) при любом $t_0 \in [0,T]$

$$\int_0^T F(t,\tau)f(\tau)d\tau \to \int_0^T F(t_0,\tau)f(\tau)d\tau \text{ слабо в } V \text{ при } t\to t_0,$$

$$\int_0^T G(t,\tau)f(\tau)d\tau \to \int_0^T G(t_0,\tau)f(\tau)d\tau \text{ слабо в } H \text{ при } t\to t_0,\ \forall f\in L_1([0,T],H);$$

г) имеют место представления

$$B[f](t) = \int_a^b F(t,\tau)f(\tau)d\tau,\ \ E[f](t) = \int_a^b G(t,\tau)f(\tau)d\tau \text{ при п.в. } t\in[0,T]\ \forall f\in L_1([0,T],H);$$

е) справедливы равенства

$$\|B\|_{L_1([0,T],H)\to C_s([0,T],V)} = \sup_{t\in[0,T]} \operatorname*{vraisup}_{\tau\in[0,T]} \|F(t,\tau)\|_{H\to V},$$

$$\|E\|_{L_1([0,T],H)\to L_\infty([0,T],H)} = \sup_{t\in[0,T]} \operatorname*{vraisup}_{\tau\in[0,T]} \|G(t,\tau)\|_{H\to H}.$$

Далее, из определения класса $\mathfrak{C}([0,T];V,H)$, операторов B и E, и того, что оператор A принимает значения в $\mathfrak{C}([0,T];V,H)$, вытекает, что

$$\int_0^T E[f](t)\varphi(t)dt = -\int_0^T B[f](t)\varphi'(t)dt\ \ \forall\varphi\in\mathfrak{D}(0,T)\ \forall f\in L_1([0,T],H).$$

Подставив сюда представления операторов B и E, выводим, что

$$\int_\Gamma G(t,\tau)f(\tau)\varphi(t)dtd\tau = -\int_\Gamma F(t,\tau)f(\tau)\varphi'(t)dtd\tau\ \ \forall\varphi\in\mathfrak{D}(0,T)\ \forall f\in L_1([0,T],H),$$

откуда следует, что

$$\int_0^T \left[\int_0^T G(t,\tau)f(\tau)\varphi(t)dt\right]d\tau = -\int_0^T \left[\int_0^T F(t,\tau)f(\tau)\varphi'(t)dt\right]d\tau\ \ \forall\varphi\in\mathfrak{D}(0,T)\ \forall f\in L_1([0,T],H).$$

Ограничившись в данном соотношении функциями f вида $f(\tau)\equiv h\psi(\tau)$, $\tau\in[0,T]$, где $h\in H$, $\psi\in\mathfrak{D}(0,T)$, заключаем, что

$$\int_0^T \left[\int_0^T G(t,\tau)h\varphi(t)dt + \int_0^T F(t,\tau)h\varphi'(t)dt\right]\psi(\tau)d\tau = 0\ \ \forall\varphi,\ \psi\in\mathfrak{D}(0,T).$$

Это означает, что при почти всех $t\in[0,T]$

$$\int_0^T G(t,\tau)h\varphi(t)dt = -\int_0^T F(t,\tau)h\varphi'(t)dt\ \ \forall\varphi\in\mathfrak{D}(0,T).$$

Таким образом, в качестве функции Ψ можно взять функцию F.

Докажем теперь неравенство (3.2.17). В самом деле, при всех $f\in L_1([0,T],H)$

$$\|A[f]\|_{\mathfrak{E}([0,T];V,H)} = \sup_{t\in[0,T]} [\|B[f](t)\|_V^2 + \|E[f](t)\|_H^2]^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant [\sup_{t\in[0,T]} \operatorname*{vraisup}_{\tau\in[0,T]} \|\Psi(t,\tau)\|^2_{H\to V} + \sup_{t\in[0,T]} \operatorname*{vraisup}_{\tau\in[0,T]} \|\Psi_t(t,\tau)\|^2_{H\to H}]^{1/2}\|f\|_{1,[0,T],H}.$$

Перейдя здесь к точной верхней грани по $f \in L_1([0,T],H)$, получаем требуемое неравенство.

2) Утверждение о том, что если функция $\Psi : \Gamma \to \mathcal{L}(V,H)$ обладает свойствами 1)–7), то оператор A, задаваемый соотношениями (3.2.16), является линейным ограниченным оператором, действующим из $L_1([0,T],H)$ в $\in([0,T];V,H)$, вытекает непосредственно из этих свойств. ■

Теорема 3.2.3. *Пусть оператор $A : V \to \in([0,T];V,H)$ — линеен и непрерывен. Тогда найдётся функция $\Phi : [0,T] \to \mathcal{L}(V,V)$, такая, что*

1) при каждом фиксированном $v \in V$ отображение

$$[0,T] \ni t \mapsto [\Phi(t)v] \in V; \tag{3.2.18}$$

непрерывно в слабой топологии пространства V, принадлежит классу $W^1_\infty([0,T],H)$, и при всех $t \in [0,T]$ имеет место включение $\Phi'(t) \in \mathcal{L}(V,H)$;

2) при каждом фиксированном $h \in H$ отображение

$$[0,T] \ni t \mapsto [\Phi'(t)v] \in H \tag{3.2.19}$$

непрерывно в слабой топологии пространства H;

3) конечны величины

$$\sup_{t\in[0,T]} \|\Phi(t)\|_{V\to V}; \tag{3.2.20}$$

и

$$\sup_{t\in[0,T]} \|\Phi'(t)\|_{V\to H}; \tag{3.2.21}$$

4) справедливы представления

$$A[v](t) = \Phi(t)v, \;\; \frac{dA[v](t)}{dt} = \Phi'(t)v \;\; \forall\, v \in V; \tag{3.2.22}$$

5) имеет место неравенство

$$\|A\|_{V\to\in([0,T];V,H)} \leqslant [\sup_{t\in[0,T]} \|\Phi(t)\|^2_{V\to V} + \sup_{t\in[0,T]} \|\Phi'(t)\|^2_{V\to H}]^{1/2}. \tag{3.2.23}$$

Обратно, если функция $\Phi : [0,T] \to \mathcal{L}(V,V)$ обладает свойствами 1)–3), то оператор A, задаваемый соотношениями (3.2.22), является линейным ограниченным оператором, действующим из V в $\in([0,T];V,H)$.

Доказательство. 1) Пусть оператор $A : V \to \in([0,T];V,H)$ — линеен и непрерывен.

Введём операторы $B : V \to C_s([0,T],V)$ и $E : V \to C_s([0,T],H)$ равенствами

$$B[v](t) = A[v](t), \;\; E[v](t) = \frac{dA[v](t)}{dt} \;\; \forall\, v \in V.$$

Нетрудно видеть, что операторы B и E — линейны и непрерывны. Поэтому, согласно теореме 3.1.2, найдутся функции $F : [0,T] \to \mathcal{L}(V,V)$ и $G : [0,T] \to \mathcal{L}(V,H)$, непрерывные в слабых операторных топологиях соответствующих пространств, и такие, что

$$B[v](t) = F(t)v \;\; \forall\, v \in V \;\forall\, t \in [0,T]; \tag{3.2.24}$$

$$E[v](t) = G(t)v \;\; \forall\, v \in V \;\forall\, t \in [0,T]; \tag{3.2.25}$$

$$\|B\|_{V->C_s([0,T],V)} = \sup_{t\in[0,T]} \|F(t)\|_{V\to V}; \tag{3.2.26}$$

$$\|E\|_{V->C_s([0,T],H)} = \sup_{t\in[0,T]} \|G(t)\|_{V\to H}. \tag{3.2.27}$$

Далее, из определения класса $\in([0,T];V,H)$, операторов B и E, и того, что оператор A принимает значения в $\in([0,T];V,H)$, вытекает, что

$$\int\limits_0^T E[v](t)\varphi(t)dt = -\int\limits_0^T B[v](t)\varphi'(t)dt \;\; \forall\, \varphi \in \mathfrak{D}(0,T) \;\forall\, v \in V.$$

Подставив сюда представления операторов B и E, выводим, что

$$\int\limits_0^T G(t)v\varphi(t)dt = -\int\limits_0^T F(t)v\varphi'(t)dt \ \forall\,\varphi \in \mathfrak{D}(0,T)\ \forall\, v \in V,$$

откуда следует, что в качестве функции Φ можно взять функцию F.

Докажем теперь неравенство (3.2.23). В самом деле,

$$\|A[v]\|_{\mathfrak{C}([0,T];V,H)} = \sup_{t\in[0,T]}[\|B[v](t)\|_V^2 + \|E[v](t)\|_H^2]^{1/2} \leqslant [\sup_{t\in[0,T]}\|\Phi(t)\|^2_{V\to V} + \sup_{t\in[0,T]}\|\Phi'(t)\|^2_{V\to H}]^{1/2}\|v\|_V.$$

Перейдя здесь к точной верхней грани по $v \in V$, у которых $\|v\|_V \leqslant 1$, получаем требуемое неравенство.

2) Утверждение о том, что если функция $\Phi : [0,T] \to \mathcal{L}(V,V)$ обладает свойствами 1)–3), то оператор A, задаваемый соотношениями (3.2.22), является линейным ограниченным оператором, действующим из V в $\mathfrak{C}([0,T];V,H)$, вытекает непосредственно из этих свойств. ■

Теорема 3.2.4. *Пусть оператор $A : H \to \mathfrak{C}([0,T];V,H)$ — линеен и непрерывен. Тогда найдётся функция $\Psi : [0,T] \to \mathcal{L}(H,V)$, такая, что*

1) при каждом фиксированном $h \in H$ отображение

$$[0,T] \ni t \mapsto [\Psi(t)v] \in V; \tag{3.2.28}$$

непрерывно в слабой топологии пространства V, принадлежит классу $W^1_\infty([0,T],H)$, и при всех $t \in [0,T]$ имеет место включение $\Psi'(t) \in \mathcal{L}(H,H)$;

2) при каждом фиксированном $h \in H$ отображение

$$[0,T] \ni t \mapsto [\Psi'(t)h] \in H \tag{3.2.29}$$

непрерывно в слабой топологии пространства H;

3) конечны величины

$$\sup_{t\in[0,T]}\|\Psi(t)\|_{H\to V}; \tag{3.2.30}$$

и

$$\sup_{t\in[0,T]}\|\Psi'(t)\|_{H\to H}; \tag{3.2.31}$$

4) справедливы представления

$$A[h](t) = \Psi(t)h, \ \ \frac{dA[h](t)}{dt} = \Psi'(t)h \ \ \forall\, h \in H; \tag{3.2.32}$$

5) имеет место неравенство

$$\|A\|_{H\to\mathfrak{C}([0,T];V,H)} \leqslant [\sup_{t\in[0,T]}\|\Psi(t)\|^2_{H\to V} + \sup_{t\in[0,T]}\|\Psi'(t)\|^2_{H\to H}]^{1/2}. \tag{3.2.33}$$

Обратно, если функция $\Psi : [0,T] \to \mathcal{L}(H,V)$ обладает свойствами 1)–3), то оператор A, задаваемый соотношениями (3.2.32)*, является линейным ограниченным оператором, действующим из H в $\mathfrak{C}([0,T];V,H)$.*

Доказательство. 1) Пусть оператор $A : H \to \mathfrak{C}([0,T];V,H)$ — линеен и непрерывен.

Введём операторы $B : H \to C_s([0,T],V)$ и $E : H \to C_s([0,T],H)$ равенствами

$$B[v](t) = A[v](t), \ \ E[v](t) = \frac{dA[v](t)}{dt} \ \ \forall\, v \in V.$$

Нетрудно видеть, что операторы B и E — линейны и непрерывны. Поэтому, согласно теореме 3.1.2, найдутся функции $F : [0,T] \to \mathcal{L}(H,V)$ и $G : [0,T] \to \mathcal{L}(H,H)$, непрерывные в слабых операторных топологиях соответствующих пространств, и такие, что

$$B[v](t) = F(t)v \ \ \forall\, v \in V\ \forall\, t \in [0,T]; \tag{3.2.34}$$

$$E[v](t) = G(t)v \ \ \forall\, v \in V\ \forall\, t \in [0,T]; \tag{3.2.35}$$

$$\|B\|_{H->C_s([0,T],V)} = \sup_{t\in[0,T]}\|F(t)\|_{H\to V}; \tag{3.2.36}$$

$$\|E\|_{H->C_s([0,T],H)} = \sup_{t\in[0,T]}\|G(t)\|_{H\to H}. \tag{3.2.37}$$

Далее, из определения класса $\mathfrak{C}([0,T];V,H)$, операторов B и E, и того, что оператор A принимает значения в $\mathfrak{C}([0,T];V,H)$, вытекает, что

$$\int\limits_0^T E[v](t)\varphi(t)dt = -\int\limits_0^T B[v](t)\varphi'(t)dt \ \ \forall\, \varphi \in \mathfrak{D}(0,T)\ \forall\, v \in V.$$

Подставив сюда представления операторов B и E, выводим, что

$$\int\limits_0^T G(t)v\varphi(t)dt = -\int\limits_0^T F(t)v\varphi'(t)dt \ \ \forall\, \varphi \in \mathfrak{D}(0,T)\ \forall\, v \in V,$$

откуда следует, что в качестве функции Ψ можно взять функцию F.

Докажем теперь неравенство (3.2.33). В самом деле,

$$\|A[v]\|_{\mathfrak{C}([0,T];V,H)} = \sup_{t\in[0,T]}[\|B[v](t)\|_V^2 + \|E[v](t)\|_H^2]^{1/2} \leqslant [\sup_{t\in[0,T]}\|\Phi(t)\|^2_{H\to V} + \sup_{t\in[0,T]}\|\Phi'(t)\|^2_{H\to H}]^{1/2}\|v\|_V.$$

Перейдя здесь к точной верхней грани по $v \in V$, у которых $\|v\|_V \leqslant 1$, получаем требуемое неравенство.

2) Утверждение о том, что если функция $\Psi : [0,T] \to \mathcal{L}(H,V)$ обладает свойствами 1)–3), то оператор A, задаваемый соотношениями (3.2.32), является линейным ограниченным оператором, действующим из H в $\mathfrak{C}([0,T];V,H)$, вытекает непосредственно из этих свойств. ■

Далее под $\mathfrak{R}([0,T];V,H)$ будем понимать множество функций $\Psi : [0,T] \to \mathcal{L}(V,V)$, таких, что

1) при каждом фиксированном $v \in V$ отображение

$$[0,T] \ni t \mapsto [\Psi(t)v] \in V;$$

непрерывно в слабой топологии пространства V, принадлежит классу $W^1_\infty([0,T],H)$, и при всех $t \in [0,T]$ имеет место включение $\Psi'(t) \in \mathcal{L}(V,H)$;

2) при каждом фиксированном $v \in V$ отображение

$$[0,T] \ni t \mapsto [\Psi'(t)v] \in H$$

непрерывно в слабой топологии пространства H.

Теорема 3.2.5. *Пусть оператор $A : H \to C([0,T], \mathfrak{C}([0,T];V,H))$ — линеен и непрерывен. Тогда найдётся функция $\Psi : \Gamma \to \mathcal{L}(H,V)$, такая, что*

1) при каждом фиксированном $h \in H$ и каждом фиксированном $\tau \in [0,T]$ отображение

$$[0,T] \ni t \mapsto [\Psi(t,\tau)h] \in V; \tag{3.2.38}$$

непрерывно в слабой топологии пространства V, принадлежит классу $W^1_\infty([0,T],H)$, и при всех $(t,\tau) \in \Gamma$ имеет место включение $\Psi_t(t,\tau) \in \mathcal{L}(H,H)$;

2) при каждом фиксированном $h \in H$ и каждом фиксированном $\tau \in [0,T]$ отображение

$$[0,T] \ni t \mapsto [\Psi_t(t,\tau)h] \in H \tag{3.2.39}$$

непрерывно в слабой топологии пространства H;

3) конечны величины

$$\sup_{(t,\tau)\in\Gamma}\|\Psi(t,\tau)\|_{H\to V}; \tag{3.2.40}$$

и

$$\sup_{(t,\tau)\in\Gamma}\|\Psi_t(t,\tau)\|_{H\to H}; \tag{3.2.41}$$

4) при всех $h \in [0,T]$ и всех $\tau \in [0,T]$ выполнены соотношения

$$\lim_{\tau'\to\tau}\sup_{t\in[0,T]}\|[\Psi(t,\tau') - \Psi(t,\tau)]h\|_V = 0,\ \ \lim_{\tau'\to\tau}\sup_{t\in[0,T]}\|[\Psi_t(t,\tau') - \Psi_t(t,\tau)]h\|_H = 0;$$

5) справедливы представления

$$A[h](\tau)(t) = \Psi(t,\tau)h,\ \ \frac{d[A[h](\tau)](t)}{dt} = \Psi_t(t,\tau)h \ \ \forall\, h \in H; \tag{3.2.42}$$

6) имеет место неравенство

$$\|A\|_{H\to C([0,T],\mathfrak{C}([0,T];V,H))} \leqslant [\sup_{(t,\tau)\in\Gamma} \|\Psi(t,\tau)\|^2_{H\to V} + \sup_{(t,\tau)\in\Gamma} \|\Psi_t(t,\tau)\|^2_{H\to H}]^{1/2}. \tag{3.2.43}$$

Обратно, если функция $\Psi : \Gamma \to \mathcal{L}(H,V)$ обладает свойствами 1)–4), то оператор A, задаваемый соотношениями (3.2.42)*, является линейным ограниченным оператором, действующим из H в $C([0,T],\mathfrak{C}([0,T];V,H))$.*

Доказательство. 1) Пусть оператор $A : H \to C([0,T],\mathfrak{C}([0,T];V,H))$ — линеен и непрерывен. Тогда, на основании теоремы 3.1.1, найдётся функция $B : [0,T] \to \mathcal{L}(H,\mathfrak{C}([0,T];V,H))$, такая, что

$$A[h](\tau) = B(\tau)h, \ \ \forall\, h\in H, \ \ \tau\in[0,T]; \tag{3.2.44}$$

$$\lim_{\tau'\to\tau} \|[B(\tau') - B(\tau)]h\|_{\mathfrak{C}([0,T];V,H)} = 0, \ \ \forall\, h\in H, \ \ \tau\in[0,T]; \tag{3.2.45}$$

$$\|A\|_{H\to C([0,T],\mathfrak{C}([0,T];V,H))} = \sup_{\tau\in[0,T]} \|B(\tau)\|_{H\to\mathfrak{C}([0,T];V,H)}. \tag{3.2.46}$$

Выберем произвольно $\tau\in[0,T]$ и зафиксируем. Тогда $B(\tau)\in\mathcal{L}(H,\mathfrak{C}([0,T];V,H))$. Поэтому, на основании теоремы 3.2.4, найдётся функция $E(\cdot;\tau) : [0,T] \to \mathcal{L}(H,V)$, такая, что

а) при каждом фиксированном $h\in H$ отображение

$$[0,T] \ni t \mapsto [E(t;\tau)h] \in V; \tag{3.2.47}$$

непрерывно в слабой топологии пространства V, принадлежит классу $W^1_\infty([0,T],H)$, и при всех $t\in[0,T]$ имеет место включение $E_t(t;\tau)\in\mathcal{L}(H,H)$;

б) при каждом фиксированном $h\in H$ отображение

$$[0,T] \ni t \mapsto [E_t(t;\tau)h] \in H \tag{3.2.48}$$

непрерывно в слабой топологии пространства H;

в) конечны величины

$$\sup_{t\in[0,T]} \|E(t;\tau)\|_{H\to V}; \tag{3.2.49}$$

и

$$\sup_{t\in[0,T]} \|E_t(t;\tau)\|_{H\to H}; \tag{3.2.50}$$

г) справедливы представления

$$[B(\tau)h](t) = E(t;\tau)h, \ \ \frac{d[B(\tau)h](t)}{dt} = E_t(t;\tau)h, \ \ \forall\, h\in H, \ \ t\in[0,T]; \tag{3.2.51}$$

д) имеет место неравенство

$$\|B(\tau)\|_{H\to\mathfrak{C}([0,T];V,H)} \leqslant [\sup_{t\in[0,T]} \|E(t;\tau)\|^2_{H\to V} + \sup_{t\in[0,T]} \|E_t(t;\tau)\|^2_{H\to H}]^{1/2}. \tag{3.2.52}$$

Положив теперь $\Psi(t,\tau) \equiv E(t;\tau)$, получим требуемое.

2) Утверждение о том, что если функция $\Psi : \Gamma \to \mathcal{L}(H,V)$ обладает свойствами 1)–4), то оператор A, определённый соотношениями (3.2.42), является линейным ограниченным оператором, действующим из H в $C([0,T],\mathfrak{C}([0,T];V,H))$, вытекает непосредственно из этих свойств. ■

Далее $\mathfrak{S}(\Gamma;V,H)$ будет обозначать множество функций $\Psi : \Gamma \to \mathcal{L}(H,V)$, таких, что

1) при каждом фиксированном $h\in H$ и каждом фиксированном $\tau\in[0,T]$ отображение

$$[0,T] \ni t \mapsto [\Psi(t,\tau)h] \in V;$$

непрерывно в слабой топологии пространства V, принадлежит классу $W^1_\infty([0,T],H)$, и при всех $(t,\tau)\in\Gamma$ имеет место включение $\Psi_t(t,\tau)\in\mathcal{L}(H,H)$;

2) при каждом фиксированном $h\in H$ и каждом фиксированном $\tau\in[0,T]$ отображение

$$[0,T] \ni t \mapsto [\Psi_t(t,\tau)h] \in H$$

непрерывно в слабой топологии пространства H;

3) при всех $h\in[0,T]$ и всех $\tau\in[0,T]$ выполнены соотношения

$$\lim_{\tau'\to\tau} \sup_{t\in[0,T]} \|[\Psi(t,\tau') - \Psi(t,\tau)]h\|_V = 0, \ \ \lim_{\tau'\to\tau} \sup_{t\in[0,T]} \|[\Psi_t(t,\tau') - \Psi_t(t,\tau)]h\|_H = 0.$$

3.3. Абстрактное интегро–дифференциальное уравнение

Пусть V и H — сепарабельные гильбертовы пространства со скалярными произведениями $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ и $\langle\cdot,\cdot\rangle_H$ соответственно, с соответствующими нормами $\|\cdot\|_V$ и $\|\cdot\|_H$, $V\subset H$, и это вложение непрерывно. Иными словами, найдётся постоянная $\nu>0$, такая, что

$$\|v\|_H\leqslant \nu\|v\|_V\ \ \forall\, v\in V.$$

Рассмотрим интегро–дифференциальное уравнение

$$\mathfrak{z}(t)=\omega(t)+\int\limits_0^t\Psi(t,\tau)g(\tau,\mathfrak{z}(\tau),\dot{\mathfrak{z}}(\tau))d\tau,\ \ t\in[0,T]. \tag{3.3.1}$$

Считаем, что выполнены следующие условия:

1) функция $\omega:[0,T]\to V$ — элемент класса $\mathfrak{C}([0,T];V,H)$;

2) функция $g:[0,T]\times V\times H\to H$ — измерима по $t\in[0,T]$ при всех $(v,h)\in V\times H$;

3) найдётся функция $K_0\in L_1[0,T]$, такая, что
$$\|g(t,v_1,h_1)-g(t,v_2,h_2)\|_H\leqslant K_0(t)\sqrt{\|v_1-v_2\|_V^2+\|h_1-h_2\|_H^2}\ \ \forall\,(t,v_i,h_i)\in[0,T]\times V\times H,\ i=1,2;$$

4) найдётся функция $K_1\in L_1[0,T]$, такая, что
$$\|g(t,0,0)\|_H\leqslant K_1(t)\ \text{при п.в.}\ t\in[0,T];$$

5) функция $\Psi:\Gamma\to\mathcal{L}(V,H)$ такова, что формула
$$A[f](t)=\int\limits_0^t\Psi(t,\tau)f(\tau)d\tau\ \ \text{при всех}\ t\in[0,T]\ \forall\, f\in L_1([0,T],H),$$
задаёт линейный ограниченный оператор, действующий из $L_1([0,T],H)$ в $\mathfrak{C}([0,T];V,H)$, причём
$$\Psi(t,t)=0,\ \ \forall\, t\in[0,T].$$

Определение 3.3.1. *Функцию $\mathfrak{z}\in\mathfrak{C}([0,T];V,H)$ назовём решением интегро–дифференциального уравнения* (3.3.1)*, если функция $\mathfrak{z}$ при всех $t\in[0,T]$ удовлетворяет этому уравнению.*

Основным результатом данного раздела является

Теорема 3.3.1. *Существует единственное решение $\mathfrak{z}$ интегро–дифференциальное уравнения* (3.3.1)*, причём найдётся постоянная $B>0$, такая, что*

$$\|\mathfrak{z}\|_{\mathfrak{C}([0,T];V,H)}\leqslant B[\|\omega\|_{\mathfrak{C}([0,T];V,H)}+\|g(\cdot,0,0)\|_{1,[0,T],H}]. \tag{3.3.2}$$

Доказательство. 1) Докажем вначале, что решение уравнения (3.3.1) существует и единственно. Введём оператор $\Lambda:\mathfrak{C}([0,T];V,H)\to\mathfrak{C}([0,T];V,H)$ равенством

$$\Lambda[\mathfrak{z}](t)=\omega(t)+\int\limits_0^t\Psi(t,\tau)g(\tau,\mathfrak{z}(\tau),\dot{\mathfrak{z}}(\tau))d\tau,\ \ t\in[0,T]\ \ \forall\,\mathfrak{z}\in\mathfrak{C}([0,T];V,H).$$

Для доказательства существования и единственности решения уравнения (3.3.1) нам достаточно показать, что некоторая степень этого оператора является сжимающим отображением.

Прежде всего заметим, что при всех $\mathfrak{z}^1$, $\mathfrak{z}^2\in\mathfrak{C}([0,T];V,H)$

$$\|\Lambda[\mathfrak{z}^1](t)-\Lambda[\mathfrak{z}^2](t)\|_V\leqslant\int\limits_0^t K_0(\xi)M\sqrt{\|\mathfrak{z}^1(\xi)-\mathfrak{z}^2(\xi)\|_V^2+\|\dot{\mathfrak{z}}^1(\xi)-\dot{\mathfrak{z}}^2(\xi)\|_H^2}d\xi,$$

$$\left\|\frac{d\Lambda[\mathfrak{z}^1](t)}{dt}-\frac{d\Lambda[\mathfrak{z}^2](t)}{dt}\right\|_H\leqslant\int\limits_0^t K_0(\xi)M\sqrt{\|\mathfrak{z}^1(\xi)-\mathfrak{z}^2(\xi)\|_V^2+\|\dot{\mathfrak{z}}^1(\xi)-\dot{\mathfrak{z}}^2(\xi)\|_H^2}d\xi,\ \ \forall\, t\in[0,T],$$

где введено обозначение

$$M \equiv \max\{\sup_{t\in[0,T]} \operatorname{vraisup}_{\tau\in[0,T]} \|\Psi(t,\tau)\|_{H\to V}, \sup_{t\in[0,T]} \operatorname{vraisup}_{\tau\in[0,T]} \|\Psi_t(t,\tau)\|_{H\to H}\}.$$

Поэтому

$$\sqrt{\|\Lambda[\mathfrak{z}^1](t)-\Lambda[\mathfrak{z}^2](t)\|_V^2 + \left\|\frac{d\Lambda[\mathfrak{z}^1](t)}{dt} - \frac{d\Lambda[\mathfrak{z}^2](t)}{dt}\right\|_H^2} \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^t 2K_0(\xi)M\sqrt{\|\mathfrak{z}^1(\xi)-\mathfrak{z}^2(\xi)\|_V^2 + \|\dot{\mathfrak{z}}^1(\xi)-\dot{\mathfrak{z}}^2(\xi)\|_H^2}\,d\xi.$$

Определив функцию $\sigma\colon \in([0,T];V,H) \to BF[0,T]$ равенством

$$\sigma[y](t) \equiv \sqrt{\|y(t)\|_V^2 + \|\dot{y}(t)\|_H^2},\ \ t\in[0,T],$$

получим, что

$$\sigma[\Lambda[\mathfrak{z}^1]-\Lambda[\mathfrak{z}^2]](t) \leqslant 2\int\limits_0^t K_0(\xi)M\sigma[\mathfrak{z}^1-\mathfrak{z}^2](\xi)\,d\xi,\ \ \forall\, t\in[0,T].$$

Следовательно,

$$\sigma[\Lambda^2[\mathfrak{z}^1]-\Lambda^2[\mathfrak{z}^2]](t) = \sigma[\Lambda[\Lambda_0[\mathfrak{z}^1]]-\Lambda[\Lambda[\mathfrak{z}^2]]](t) \leqslant \int\limits_0^t 2K_0(\xi)M\sigma[\Lambda[\mathfrak{z}^1]-\Lambda[\mathfrak{z}^2]](\xi)d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^t 2K_0(\xi_1)M\left[\int\limits_0^{\xi_1} 2K_0(\xi_2)M\sigma[\mathfrak{z}^1-\mathfrak{z}^2](\xi_2)d\xi_2\right]d\xi_1 \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\xi\in[0,T]}\sigma[\mathfrak{z}^1-\mathfrak{z}^2](\xi)\int\limits_0^t 2K_0(\xi_1)M\left[\int\limits_0^{\xi_1} 2K_0(\xi_2)Md\xi_2\right]d\xi_1 = \sup_{\xi\in[0,T]}\sigma[\mathfrak{z}^1-\mathfrak{z}^2](\xi)\frac{1}{2!}\left[\int\limits_0^t 2K_0(\xi)Md\xi\right]^2.$$

Итак,

$$\sigma[\Lambda[\mathfrak{z}^1]-\Lambda[\mathfrak{z}^2]](t) \leqslant \sup_{\xi\in[0,T]}\sigma[\mathfrak{z}^1-\mathfrak{z}^2](\xi)\int\limits_0^t 2K_0(\xi)Md\xi,$$

$$\sigma[\Lambda^2[\mathfrak{z}^1]-\Lambda^2[\mathfrak{z}^2]](t) \leqslant \sup_{\xi\in[0,T]}\sigma[\mathfrak{z}^1-\mathfrak{z}^2](\xi)\frac{1}{2!}\left[\int\limits_0^t 2K_0(\xi)Md\xi\right]^2 \quad \forall\, t\in[0,T].$$

Пусть для некоторого $m\geqslant 1$ доказано, что

$$\sigma[\Lambda^m[\mathfrak{z}^1]-\Lambda^m[\mathfrak{z}^2]](t) \leqslant \sup_{\xi\in[0,T]}\sigma[\mathfrak{z}^1-\mathfrak{z}^2](\xi)\frac{1}{m!}\left[\int\limits_0^t 2K_0(\xi)Md\xi\right]^m \quad \forall\, t\in[0,T].$$

Тогда при всех $t\in[0,T]$

$$\sigma[\Lambda^{m+1}[\mathfrak{z}^1]-\Lambda^{m+1}[\mathfrak{z}^2]](t) = \sigma[\Lambda[\Lambda^m[\mathfrak{z}^1]]-\Lambda[\Lambda^m[\mathfrak{z}^2]]](t) \leqslant \int\limits_0^t 2K_0(\xi)M\sigma[\Lambda^m[\mathfrak{z}^1]-\Lambda^m[\mathfrak{z}^2]](\xi)d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^t 2K_0(\xi_1)M\left[\sup_{\tau\in[0,T]}\sigma[\mathfrak{z}^1-\mathfrak{z}^2](\tau)\frac{1}{m!}\left[\int\limits_0^{\xi_1} 2K_0(\xi_2)Md\xi_2\right]^m\right]d\xi_1 =$$

$$= \sup_{\tau\in[0,T]}\sigma[\mathfrak{z}^1-\mathfrak{z}^2](\tau)\frac{1}{(m+1)!}\left[\int\limits_0^t 2K_0(\xi)Md\xi\right]^{m+1}.$$

Таким образом,

$$\sigma[\Lambda^m[\mathfrak{z}^1]-\Lambda^m[\mathfrak{z}^2]](t)\leqslant \sup_{\xi\in[0,T]}\sigma[\mathfrak{z}^1-\mathfrak{z}^2](\xi)\frac{1}{m!}\left[\int\limits_0^t 2K_0(\xi)M d\xi\right]^m \quad \forall\, t\in[0,T],\ \ m=1,2,\dots.$$

Отсюда выводим, что

$$\|\Lambda^m[\mathfrak{z}^1]-\Lambda^m[\mathfrak{z}^2]\|_{\mathfrak{C}([0,T];V,H)}\leqslant \frac{1}{m!}\left[\int\limits_0^T 2K_0(\xi)M d\xi\right]^m \|\mathfrak{z}^1-\mathfrak{z}^2\|_{\mathfrak{C}([0,T];V,H)},\ \ m=1,2,\dots.$$

А это и означает, что некоторая степень оператора $\Lambda\colon \mathfrak{C}([0,T];V,H)\to\mathfrak{C}([0,T];V,H)$ является сжатием, что, в силу принципа неподвижной точки Банаха, означает существование единственного решения уравнения (3.3.1).

2) Докажем оценку (3.3.2). В самом деле,

$$\|\mathfrak{z}(t)\|_V\leqslant\|\omega(t)\|_V+\int\limits_0^t\|\Psi(t,\tau)\|_{H\to V}\|g(\tau,\mathfrak{z}(\tau),\dot{\mathfrak{z}}(\tau))\|_H d\tau\leqslant\|\omega\|_{\mathfrak{C}([0,T];V,H)}+\int\limits_0^t M\|g(\tau,\mathfrak{z}(\tau),\dot{\mathfrak{z}}(\tau))\|_H d\tau.$$

Аналогично получаем, что

$$\|\dot{\mathfrak{z}}(t)\|_H\leqslant\|\dot\omega(t)\|_H+\int\limits_0^t\|\Psi_t(t,\tau)\|_{H\to H}\|g(\tau,\mathfrak{z}(\tau),\dot{\mathfrak{z}}(\tau))\|_H d\tau\leqslant\|\omega\|_{\mathfrak{C}([0,T];V,H)}+\int\limits_0^t M\|g(\tau,\mathfrak{z}(\tau),\dot{\mathfrak{z}}(\tau))\|_H d\tau.$$

Следовательно,

$$\sigma[\mathfrak{z}](t)\leqslant 2\left[\|\omega\|_{\mathfrak{C}([0,T];V,H)}+\int\limits_0^t M\|g(\tau,\mathfrak{z}(\tau),\dot{\mathfrak{z}}(\tau))\|_H d\tau\right]\leqslant 2\left[\|\omega\|_{\mathfrak{C}([0,T];V,H)}+\int\limits_0^t M\|g(\tau,0,0)\|_H d\tau\right]+$$

$$+\int\limits_0^t 2M\|g(\tau,\mathfrak{z}(\tau),\dot{\mathfrak{z}}(\tau))-g(\tau,0,0)\|_H d\tau\leqslant 2\left[\|\omega\|_{\mathfrak{C}([0,T];V,H)}+\int\limits_0^T M\|g(\tau,0,0)\|_H d\tau\right]+\int\limits_0^t 2MK_0(\tau)\sigma[\mathfrak{z}](\tau)d\tau.$$

Применяя затем лемму 5.1.1, заключаем, что

$$\sigma[\mathfrak{z}](t)\leqslant 2\left[\|\omega\|_{\mathfrak{C}([0,T];V,H)}+\int\limits_0^T M\|g(\tau,0,0)\|_H d\tau\right]\exp\left[\int\limits_0^T 2K_0(\tau)M d\tau\right]\quad\forall\, t\in[0,T].$$

Это и означает выполнение оценки (3.3.2) с $B\equiv 2\exp(\int\limits_0^T 2K_0(\xi)Md\xi)\max\{1,M\}$. Теорема полностью доказана. ■

Глава 4. Сведения из теории меры

4.1. Предельный переход под знаком измеримой функции

Пусть (X, Σ, μ) — конечное положительное пространство с мерой, $Y \subset \mathbb{R}^k$ — некоторое замкнутое множество, λ — мера Лебега на Y. Пусть функция $\Psi\colon X \times Y \to R$ измерима относительно произведения мер $\mu \otimes \lambda$ на $X \times Y$ и непрерывна по $y \in Y$ при μ–п.в. $x \in X$. Пусть, кроме того, для любого $B > 0$ найдётся постоянная $\hat{C}(B) > 0$, такая, что $|\Psi(x, y)| \leqslant \hat{C}(B)$ при μ–п.в. $x \in X$ и при всех $y \in cl(\text{Ш}^k_B(0)) \cap Y$.

Справедлив следующий результат, являющийся обобщением следствия 2.2.6 на стр.142 монографии [12].

Лемма 4.1.1. *Если последовательность μ–измеримых функций $f_i\colon X \to Y$, $i = 1, 2, \ldots$, сходится к функции $f\colon X \to Y$ по мере μ, то*

$$\Psi(x, f_i(x)) \to \Psi(x, f(x)),\ \ i \to \infty,$$

по мере μ.

Доказательство. Предположим, что утверждение данной леммы неверно. Тогда найдутся положительные числа σ_0 и ε_0, а также подпоследовательность f_{i_j}, $j = 1, 2, \ldots$, последовательности f_i, $i = 1, 2, \ldots$, такие, что

$$\mu\{x \in X : |\Psi(x, f_{i_j}(x)) - \Psi(x, f(x))| \geqslant \sigma_0\} > \varepsilon_0,\ \ j = 1, 2, \ldots. \tag{4.1.1}$$

Поскольку последовательность f_i, $i = 1, 2, \ldots$, сходится по мере μ к функции f, то и любая её подпоследовательность сходится по мере μ к той же функции. В частности, этим свойством обладает и последовательность f_{i_j}, $j = 1, 2, \ldots$. Поскольку последовательность f_{i_j}, $j = 1, 2, \ldots$, сходится по мере μ к функции f, то можно выделить подпоследовательность $f_{i_{j_l}}$, $l = 1, 2, \ldots$, последовательности f_{i_j}, $j = 1, 2, \ldots$, сходящуюся к функции f μ–почти всюду на X. Следовательно,

$$\Psi(x, f_{i_{j_l}}(x)) \to \Psi(x, f(x)),\ \ l \to \infty,$$

при μ–п.в. $x \in X$. В силу данного обстоятельства имеет место следующая сходимость по мере μ:

$$\Psi(x, f_{i_{j_l}}(x)) \to \Psi(x, f(x)),\ \ l \to \infty.$$

А это противоречит неравенству (4.1.1). Таким образом, лемма доказана. ■

Дадим следующее

Определение 4.1.1. *Пусть G — множество элементов некоторой природы, и пусть при каждом $g \in G$ заданы μ–измеримые функции $f_i(\cdot, g)$, $f(\cdot, g)$, $i = 1, 2, \ldots$, принимающие значения в $\mathbb{R}^m$. Будем говорить, что последовательность функций f_i, $i = 1, 2, \ldots$, сходится к функции f на X по мере μ равномерно по $g \in G$ и писать $f_i \overset{(X,\Sigma,\mu)}{\underset{g \in G}{\rightrightarrows}} f$, $i \to \infty$, если*

$$\forall\, \sigma > 0 : \lim_{i \to \infty} \sup_{g \in G} \mu\{x \in X : |f_i(x, g) - f(x, g)| \geqslant \sigma\} = 0.$$

Лемма 4.1.2. *Пусть G — компактное метрическое пространство с метрикой d, и пусть функции $f_i\colon X \times G \to Y$, $f\colon X \times G \to Y$, $i = 1, 2, \ldots$, таковы, что f_i, f, $i = 1, 2, \ldots$, измеримы по $x \in X$ при всех $g \in G$ и непрерывны по $g \in G$ при μ–п.в. $x \in X$. Пусть, кроме того, выполнено соотношение*

$$f_i \overset{(X,\Sigma,\mu)}{\underset{g \in G}{\rightrightarrows}} f,\ \ i \to \infty, \tag{4.1.2}$$

и найдётся функция $K\colon [0, +\infty) \times [0, \operatorname{diam} G] \to [0, +\infty)$, такая, что $\lim\limits_{\delta \to +0} K(\sigma, \delta) = K(\sigma, 0) = 0$ при всех $\sigma > 0$, и

$$\forall\, \sigma > 0\ \forall\, g',\ g'' \in G\ \forall\, i = 1, 2, \cdots : \mu\{x \in X : |f_i(x, g') - f_i(x, g'')| \geqslant \sigma\} \leqslant K(\sigma, d(g', g'')). \tag{4.1.3}$$

Тогда

$$\Theta_i \overset{(X,\Sigma,\mu)}{\underset{g \in G}{\rightrightarrows}} \Theta,\ \ i \to \infty,$$

где $\Theta_i(x,g) \equiv \Psi(x, f_i(x,g))$, $\Theta(x,g) \equiv \Psi(x, f(x,g))$, $i = 1,2,\ldots$

Доказательство. Предположим, что утверждение леммы неверно. Тогда найдутся числа σ_0, $\varepsilon_0 > 0$, подпоследовательность i_j, $j = 1,2,\ldots$, последовательности $i = 1,2,\ldots$, и последовательность $g_j \in G$, $j = 1,2,\ldots$, такие, что

$$\mu\{x \in X : |\Psi(x, f_{i_j}(x,g_j)) - \Psi(x, f(x,g_j))| \geqslant \sigma_0\} \geqslant \varepsilon_0, \;\; j = 1,2,\ldots$$

Поскольку G — компактное метрическое пространство, то найдутся подпоследовательность j_s, $s = 1,2,\ldots$, последовательности $j = 1,2,\ldots$ и точка $g^* \in G$, такие, что $g_{j_s} \to g^*$, $s \to \infty$, в G. Поэтому

$$\mu\{x \in X : |\Psi(x, f_{i_{j_s}}(x,g_{j_s})) - \Psi(x, f(x,g_{j_s}))| \geqslant \sigma_0\} \geqslant \varepsilon_0, \;\; s = 1,2,\ldots \tag{4.1.4}$$

В силу соотношения (4.1.3) можем записать, что

$$\mu\{x \in X : |f_{i_{j_s}}(x,g_{j_s}) - f_{i_{j_s}}(x,g^*)| \geqslant \sigma\} \leqslant K(\sigma, |g_{j_s} - g^*|), \;\; s = 1,2,\ldots, \;\; \forall\, \sigma > 0,$$

откуда следует, что имеет место следующая сходимость по мере μ на X:

$$f_{i_{j_s}}(x,g_{j_s}) - f_{i_{j_s}}(x,g^*) \to 0, \;\; s \to \infty.$$

Поэтому найдётся подпоследовательность s_p, $p = 1,2,\ldots$, последовательности $s = 1,2,\ldots$, такая, что

$$f_{i_{j_{s_p}}}(x,g_{j_{s_p}}) - f_{i_{j_{s_p}}}(x,g^*) \to 0, \;\; f_{i_{j_{s_p}}}(x,g^*) - f(x,g^*) \to 0, \;\; p \to \infty,$$

при μ–п.в. $x \in X$. Следовательно, при μ–п.в. $x \in X$

$$|f_{i_{j_{s_p}}}(x,g_{j_{s_p}}) - f(x,g^*)| \leqslant |f_{i_{j_{s_p}}}(x,g_{j_{s_p}}) - f_{i_{j_{s_p}}}(x,g^*)| + |f_{i_{j_{s_p}}}(x,g^*) - f(x,g^*)| \to 0, \;\; p \to \infty.$$

Это означает, что μ–п.в. $x \in X$

$$\Psi(x, f_{i_{j_{s_p}}}(x,g_{j_{s_p}})) - \Psi(x, f(x,g_{j_{s_p}})) \to 0, \;\; p \to \infty,$$

что противоречит соотношению (4.1.4). Таким образом, лемма доказана. ■

Лемма 4.1.3. *Если последовательности μ–измеримых функций $f_i^1 \colon X \to Y$, $f_i^2 \colon X \to Y$, $i = 1,2,\ldots$, таковы, что $f_i^1 - f_i^2 \to 0$, $i \to \infty$, по мере μ, и найдётся постоянная $K > 0$, такая, что при μ–п.в. $x \in X$ и при всех $i = 1,2,\ldots$*

$$\max\{|f_i^1(x)|, |f_i^2(x)|\} \leqslant K,$$

то

$$\Psi(\cdot, f_i^1(\cdot)) - \Psi(\cdot, f_i^2(\cdot)) \to 0, \;\; i \to \infty, \text{ по мере } \mu.$$

Доказательство. Пусть утверждение леммы неверно. Тогда найдутся числа σ_0, $\varepsilon_0 > 0$, и подпоследовательность i_j, $j = 1,2,\ldots$, последовательности $i = 1,2,\ldots$, такие, что

$$\mu\{x \in X : |\Psi(x, f_{i_j}^1(x)) - \Psi(x, f_{i_j}^2(x))| \geqslant \sigma_0\} \geqslant \varepsilon_0, \;\; j = 1,2,\ldots \tag{4.1.5}$$

Поскольку $f_i^1 - f_i^2 \to 0$, $i \to \infty$, по мере μ, то найдётся подпоследовательность j_p, $k = 1,\ldots$, последовательности $j = 1,2,\ldots$, такая, что

$$f_{i_{j_p}}^1(x) - f_{i_{j_p}}^2(x) \to 0, \; p \to \infty, \; \mu\text{–п.в.} \tag{4.1.6}$$

Выберем $x \in X$ так, чтобы $\Psi(x,\cdot)$ была непрерывна на $Y \cap cl\text{Ш}_K^k(0)$ и выполнялось (4.1.6), а затем зафиксируем. Так как $\Psi(x,\cdot)$ — непрерывна на $Y \cap cl\text{Ш}_K^k(0)$, то

$$\forall \eta > 0 \,\exists\, \delta = \delta(\eta) > 0 \,\forall\, y', \;\; y'' \in Y \cap cl\text{Ш}_K^k(0), \;\; |y' - y''| < \delta : |\Psi(x,y') - \Psi(x,y'')| < \eta. \tag{4.1.7}$$

Ввиду (4.1.6)

$$\forall\, \delta > 0 \,\exists\, p_0 = p_0(\delta) \geqslant 1 \;\forall\, p \geqslant p_0(\delta) : |f_{i_{j_p}}^1(x) - f_{i_{j_p}}^2(x)| < \delta. \tag{4.1.8}$$

Выберем $\eta > 0$ и зафиксируем. Подберём по выбранному $\eta > 0$ число $\delta(\eta) > 0$ согласно (4.1.7). По выбранному $\delta = \delta(\eta) > 0$ найдём номер $\tilde{p}_0(\eta) \equiv p_0(\delta(\eta)) \geqslant 1$ согласно (4.1.8). Как следствие,

$$|\Psi(x, f_{i_{j_p}}^1(x)) - \Psi(x, f_{i_{j_p}}^2(x))| < \eta \;\; \forall\, p \geqslant \tilde{p}_0(\eta).$$

Иными словами,

$$\Psi(x, f^1_{i_{j_p}}(x)) - \Psi(x, f^2_{i_{j_p}}(x)) \to 0, \;\; p \to \infty.$$

В силу способа выбора точки $x \in X$ это означает, что

$$\Psi(x, f^1_{i_{j_p}}(x)) - \Psi(x, f^2_{i_{j_p}}(x)) \to 0, \;\; p \to \infty, \;\; \mu\text{–п.в.},$$

что противоречит соотношению (4.1.5). Лемма доказана. ■

Лемма 4.1.4. *Пусть функция Ψ при μ–п.в. $x \in X$ равномерно непрерывна на Y. Если последовательности μ–измеримых функций $f^1_i\colon X \to Y$, $f^2_i\colon X \to Y$, $i = 1, 2, \ldots$, таковы, что $f^1_i - f^2_i \to 0$, $i \to \infty$, по мере μ, то*

$$\Psi(\cdot, f^1_i(\cdot)) - \Psi(\cdot, f^2_i(\cdot)) \to 0, \;\; i \to \infty, \text{ по мере } \mu.$$

Доказательство. Предположим, что утверждение леммы неверно. Тогда найдутся числа σ_0, $\varepsilon_0 > 0$, и подпоследовательность i_j, $j = 1, 2, \ldots$, последовательности $i = 1, 2, \ldots$, такие, что

$$\mu\{x \in X : |\Psi(x, f^1_{i_j}(x)) - \Psi(x, f^2_{i_j}(x))| \geqslant \sigma_0\} \geqslant \varepsilon_0, \;\; j = 1, 2, \ldots \tag{4.1.9}$$

Поскольку $f^1_i - f^2_i \to 0$, $i \to \infty$, по мере μ, то найдётся подпоследовательность j_l, $l = 1, \ldots$, последовательности $j = 1, 2, \ldots$, такая, что

$$f^1_{i_{j_l}}(x) - f^2_{i_{j_l}}(x) \to 0, \;\; l \to \infty, \; \mu\text{–п.в.} \tag{4.1.10}$$

Выберем $x \in X$ так, чтобы $\Psi(x, \cdot)$ была непрерывна на Y и выполнялось (4.1.10), а затем зафиксируем. Так как $\Psi(x, \cdot)$ равномерно непрерывна на Y, то

$$\forall \eta > 0 \, \exists \, \delta = \delta(\eta) > 0 \, \forall \, y', \;\; y'' \in Y, \;\; |y' - y''| < \delta : |\Psi(x, y') - \Psi(x, y'')| < \eta. \tag{4.1.11}$$

Ввиду (4.1.10)

$$\forall \, \delta > 0 \, \exists \, l_0 = l_0(\delta) \geqslant 1 \; \forall \, l \geqslant l_0(\delta) : |f^1_{i_{j_l}}(g) - f^2_{i_{j_l}}(g)| < \delta. \tag{4.1.12}$$

Выберем $\eta > 0$ и зафиксируем. Подберём по выбранному $\eta > 0$ число $\delta(\eta) > 0$ согласно (4.1.11). По выбранному $\delta = \delta(\eta) > 0$ найдём номер $\tilde{l}_0(\eta) \equiv l_0(\delta(\eta)) \geqslant 1$ согласно (4.1.12). Как следствие,

$$|\Psi(x, f^1_{i_{j_l}}(x)) - \Psi(x, f^2_{i_{j_l}}(x))| < \eta \;\; \forall \, l \geqslant \tilde{l}_0(\eta).$$

Иными словами,

$$\Psi(x, f^1_{i_{j_l}}(x)) - \Psi(x, f^2_{i_{j_l}}(x)) \to 0, \;\; l \to \infty.$$

В силу способа выбора точки $x \in X$ это означает, что

$$\Psi(x, f^1_{i_{j_l}}(x)) - \Psi(x, f^2_{i_{j_l}}(x)) \to 0, \;\; l \to \infty, \;\; \mu\text{–п.в.},$$

что противоречит соотношению (4.1.9). Лемма доказана. ■

Лемма 4.1.5. *Пусть $\Pi \subset \mathbb{R}^{m_1}$ — множество, имеющее конечную положительную меру Лебега; а функция $F\colon \Pi \times \mathbb{R}^{m_2} \to \mathbb{R}^{m_3}$ такова, что $F(\cdot, y)$ — измерима по Лебегу при всех $y \in \mathbb{R}^{m_2}$, $F(x, \cdot)$ — непрерывна при п.в. $x \in \Pi$, и для любого $B > 0$ найдётся постоянная $\mathfrak{C}(B) > 0$, такая, что $|F(x, y)| \leqslant \mathfrak{C}(B)$ при п.в. $x \in \Pi$ и при всех $y \in cl\,Ш^{m_2}_B(0)$.*

Тогда если последовательности равномерно ограниченных в норме $L^{m_2}_\infty(\Pi)$ функций f^1_i, f^2_i, $i = 1, 2, \ldots$, таковы, что $f^1_i - f^2_i \to 0$, $i \to \infty$, по мере Лебега, то при всех $p \in [1, +\infty)$

$$\lim_{i \to \infty} \|F(\cdot, f^1_i(\cdot)) - F(\cdot, f^2_i(\cdot))\|_{p,\Pi} = 0.$$

Доказательство. Согласно лемме 4.1.3,

$$|F(x, f^1_i(x)) - F(x, f^2_i(x))|^p \to 0, \;\; i \to \infty, \text{ по мере Лебега на } \Pi.$$

Из данного соотношения, справедливой при п.в. $x \in \Pi$ и всех $i = 1, 2, \ldots$ оценки

$$|F(x, f^1_i(x)) - F(x, f^2_i(x))|^p \leqslant (2\mathfrak{C}(K))^p$$

и теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла Лебега, и следует утверждение настоящей леммы. Лемма доказана. ■

Лемма 4.1.6. *Пусть G — топологическое пространство, и пусть функции $f_i^1\colon X\times G\to Y$, $f_i^2\colon X\times G\to Y$, $i=1,2,\ldots$, таковы, что f_i^1, f_i^2, $i=1,2,\ldots$, измеримы по $x\in X$ при всех $g\in G$ и непрерывны по $g\in G$ при μ–п.в. $x\in X$. Пусть, кроме того, выполнено соотношение*

$$f_i^1-f_i^2\overset{(X,\Sigma,\mu)}{\underset{g\in G}{\rightrightarrows}}0,\ \ i\to\infty,\tag{4.1.13}$$

и найдётся постоянная $K>0$, такая, что при μ–п.в. $x\in X$ и при всех $i=1,2,\ldots$

$$\max_{g\in G}\max\{|f_i^1(x,g)|,|f_i^2(x,g)|\}\leqslant K,$$

Тогда

$$\Theta_i\overset{(X,\Sigma,\mu)}{\underset{g\in G}{\rightrightarrows}}0,\ \ i\to\infty,$$

где $\Theta_i(x,g)\equiv\Psi(x,f_i^1(x,g))-\Psi(x,f_i^2(x,g))$, $i=1,2,\ldots$

Доказательство. Предположим, что утверждение леммы неверно. Тогда найдутся положительные числа σ_0 и ε_0, а также подпоследовательность i_j, $j=1,2,\ldots$, последовательности $j=1,2,\ldots$, и последовательность $g_j\in G$, $j=1,2,\ldots$, такие, что

$$\mu\{x\in X:|\Psi(x,f_{i_j}^1(x,g_j))-\Psi(x,f_{i_j}^2(x,g_j))|\geqslant\sigma_0\}\geqslant\varepsilon_0,\ \ j=1,2,\ldots\tag{4.1.14}$$

Поскольку $f_i^1-f_i^2\overset{(X,\Sigma,\mu)}{\underset{g\in G}{\rightrightarrows}}0$, $i\to\infty$, то $f_{i_j}^1-f_{i_j}^2\overset{(X,\Sigma,\mu)}{\underset{g\in G}{\rightrightarrows}}0$, $j\to\infty$, ввиду чего

$$\forall\,\delta>0:\mu\{x\in X:|f_{i_j}^1(x,g_j)-f_{i_j}^2(x,g_j)|\geqslant\delta\}\leqslant\sup_{g\in G}\mu\{x\in X:|f_{i_j}^1(x,g)-f_{i_j}^2(x,g)|\geqslant\delta\}\to0,\ \ j\to\infty.$$

Следовательно,

$$f_{i_j}^1(\cdot,g_j)-f_{i_j}^2(\cdot,g_j)\to0,\ \ j\to\infty,\ \ \text{по мере }\mu.$$

Пользуясь теперь леммой 4.1.3, получаем, что

$$\Theta_{i_j}\overset{(X,\Sigma,\mu)}{\underset{g\in G}{\rightrightarrows}}0,\ \ j\to\infty,$$

а это противоречит соотношению (4.1.14). Лемма доказана. ■

Лемма 4.1.7. *Предположим, что функция Ψ при μ–п.в. $x\in X$ равномерно непрерывна на Y. Пусть G — топологическое пространство, и пусть функции $f_i^1\colon X\times G\to Y$, $f_i^2\colon X\times G\to Y$, $i=1,2,\ldots$, таковы, что f_i^1, f_i^2, $i=1,2,\ldots$, измеримы по $x\in X$ при всех $g\in G$ и непрерывны по $g\in G$ при μ–п.в. $x\in X$. Пусть, кроме того, выполнено соотношение*

$$f_i^1-f_i^2\overset{(X,\Sigma,\mu)}{\underset{g\in G}{\rightrightarrows}}0,\ \ i\to\infty.\tag{4.1.15}$$

Тогда

$$\Theta_i\overset{(X,\Sigma,\mu)}{\underset{g\in G}{\rightrightarrows}}0,\ \ i\to\infty,$$

где $\Theta_i(x,g)\equiv\Psi(x,f_i^1(x,g))-\Psi(x,f_i^2(x,g))$, $i=1,2,\ldots$

Доказательство. Предположим, что утверждение леммы неверно. Тогда найдутся положительные числа σ_0 и ε_0, а также подпоследовательность i_j, $j=1,2,\ldots$, последовательности $j=1,2,\ldots$, и последовательность $g_j\in G$, $j=1,2,\ldots$, такие, что

$$\mu\{x\in X:|\Psi(x,f_{i_j}^1(x,g_j))-\Psi(x,f_{i_j}^2(x,g_j))|\geqslant\sigma_0\}\geqslant\varepsilon_0,\ \ j=1,2,\ldots\tag{4.1.16}$$

Поскольку $f_i^1-f_i^2\overset{(X,\Sigma,\mu)}{\underset{g\in G}{\rightrightarrows}}0$, $i\to\infty$, то $f_{i_j}^1-f_{i_j}^2\overset{(X,\Sigma,\mu)}{\underset{g\in G}{\rightrightarrows}}0$, $j\to\infty$, ввиду чего

$$\forall\,\delta>0:\mu\{x\in X:|f_{i_j}^1(x,g_j)-f_{i_j}^2(x,g_j)|\geqslant\delta\}\leqslant\sup_{g\in G}\mu\{x\in X:|f_{i_j}^1(x,g)-f_{i_j}^2(x,g)|\geqslant\delta\}\to0,\ \ j\to\infty.$$

Следовательно,

$$f^1_{i_j}(\cdot, g_j) - f^2_{i_j}(\cdot, g_j) \to 0, \;\; j \to \infty, \;\; \text{по мере } \mu.$$

Пользуясь теперь леммой 4.1.4, получаем, что

$$\Theta_{i_j} \overset{(X,\Sigma,\mu)}{\underset{g\in G}{\rightrightarrows}} 0, \;\; j \to \infty,$$

а это противоречит соотношению (4.1.16). Лемма доказана. ■

4.2. Предельный переход под знаком интеграла Лебега

Пусть (X, Σ, μ) — конечное положительное пространство с мерой μ.

Определение 4.2.1. *[12, определение 4.5.1 на стр.310] Множество функций $\mathcal{F} \subset L_1(X, \Sigma, \mu)$ называется равномерно интегрируемым, если*

$$\lim_{\sigma\to+\infty} \sup_{f\in\mathcal{F}} \int\limits_{\{x\in X\,:\,|f(x)|>\sigma\}} |f(x)|\mu(dx) = 0.$$

Определение 4.2.2. *[12, определение 4.5.2 на стр.311] Говорят, что множество $\mathcal{F} \subset L_1(X, \Sigma, \mu)$ имеет равномерно абсолютно непрерывные интегралы, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех $A \in \Sigma$, $\mu(A) < \delta$, выполнено неравенство*

$$\sup_{f\in\mathcal{F}} \int\limits_A |f(x)|\mu(dx) < \varepsilon.$$

Лемма 4.2.1. *[12, предложение 4.5.3 на стр.311] Множество $\mathcal{F}$ μ–интегрируемых функций равномерно интегрируемо в точности тогда, когда оно ограничено в $L_1(X, \Sigma, \mu)$ и имеет равномерно абсолютно непрерывные интегралы. Если же мера μ не имеет атомов, то равномерная интегрируемость равносильна равномерной абсолютной непрерывности интегралов.*

Из доказательства предложения 4.5.3 на стр.311 монографии [12] следует

Лемма 4.2.2. *Если мера μ не имеет атомов, то равномерная абсолютная непрерывность интегралов функций семейства $\mathcal{F} \subset L_1(X, \Sigma, \mu)$ влечёт ограниченность функций этого семейства в норме пространства $L_1(X, \Sigma, \mu)$.*

Лемма 4.2.3. *[12, теорема 4.5.4 на стр.312] (Теорема Лебега–Витали) Предположим, что f — μ–измеримая функция, а f_i, $i = 1, 2, \ldots,$ — последовательность μ–интегрируемых функций. Тогда следующие утверждения равносильны:*

1) *последовательность f_i, $i = 1, 2, \ldots,$ сходится к f по мере μ и равномерно интегрируема;*

2) *функция f интегрируема и последовательность f_i, $i = 1, 2, \ldots,$ сходится к f в $L_1(X, \Sigma, \mu)$.*

В дальнейшем нам потребуется также следующий результат, являющийся обобщением классической теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла Лебега.

Лемма 4.2.4. *Пусть G — секвенциально компактное топологическое пространство. Пусть функции $f_i \colon X \times G \to R^m$, $f \colon X \times G \to R^m$, $i = 1, 2, \ldots,$ таковы, что $f_i(\cdot, g)$, $i = 1, 2, \ldots,$ измеримы при всех $g \in G$; $f_i(x, \cdot)$, $f(x, \cdot)$, $i = 1, 2, \ldots,$ — секвенциально непрерывны на G; и, кроме того,*

$$f_i \overset{(X,\Sigma,\mu)}{\underset{g\in G}{\rightrightarrows}} f, \;\; i \to \infty$$

Если

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\delta = \delta(\varepsilon) > 0\ \forall\,A \in \Sigma,\ \mu(A) < \delta : \sup_{i\geqslant 1} \sup_{g\in G} \int\limits_A |f_i(x, g)|\mu(dx) < \varepsilon, \tag{4.2.1}$$

$$\sup_{i\geqslant 1} \sup_{g\in G} \int\limits_X |f_i(x, g)|\mu(dx) \leqslant C, \tag{4.2.2}$$

для некоторой положительной постоянной $C > 0$, то функция $f(\cdot, g)$ μ–интегрируема при всех $g \in G$, причём

$$\lim_{i\to\infty} \sup_{g\in G} \left| \int\limits_X f_i(x,g)\mu(dx) - \int\limits_X f(x,g)\mu(dx) \right| = 0. \tag{4.2.3}$$

Кроме того, $\lim\limits_{i\to\infty} \sup\limits_{g\in G} \int\limits_X |f(x,g) - f_i(x,g)|\mu(dx) = 0$.

Доказательство. Функция $f(\cdot, g)$ μ–измерима при всех $g \in G$, поскольку является пределом сходящейся по мере μ последовательности μ–измеримых функций. Заметим, что μ–интегрируемость функции $f(\cdot, g)$ при всех $g \in G$ следует из леммы Фату и оценки (4.2.2). При этом справедливо неравенство

$$\sup_{g\in G} \int\limits_X |f(x,g)|\mu(dx) \leqslant C.$$

Для всех $\sigma > 0$, $g \in G$, $i = 1, 2, \ldots$, положим $X^i(\sigma, g) \equiv \{x \in X : |f_i(x,g) - f(x,g)| \geqslant \sigma\}$. Тогда, в силу условия леммы,

$$\forall\, \sigma > 0\ \forall\, \delta > 0\ \exists\, i_0 = i_0(\delta, \sigma) \geqslant 1,\ \forall\, i \geqslant i_0(\delta, \sigma) : \sup_{g\in G} \mu(X^i(\sigma, g)) \leqslant \delta. \tag{4.2.4}$$

Покажем, что

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \eta = \eta(\varepsilon) > 0\ \forall\, A \in \Sigma,\ \mu(A) < \eta(\varepsilon) : \sup_{g\in G} \int\limits_A |f(x,g)|\mu(dx) < \varepsilon. \tag{4.2.5}$$

В самом деле, пусть это не так. Тогда

$$\exists\, \varepsilon_0 > 0\ \forall\, \eta > 0\ \exists\, A_\eta \in \Sigma,\ \mu(A_\eta) < \eta\ \exists\, g_\eta \in G : \int\limits_{A_\eta} |f(x, g_\eta)|\mu(dx) \geqslant \varepsilon_0.$$

Пусть $\eta_m > 0$, $m = 1, 2, \ldots$, $\eta_m \to 0$, $m \to \infty$, — некоторая последовательность чисел. Тогда получаем, что

$$\mu(A_{\eta_m}) \to 0,\ \ m \to \infty;\ \ \int\limits_{A_{\eta_m}} |f(x, g_{\eta_m})|\mu(dx) \geqslant \varepsilon_0,\ \ m = 1, 2, \ldots$$

Поскольку G — секвенциально компактное топологическое пространство, то найдутся подпоследовательность m_s, $s = 1, 2, \ldots$, последовательности $m = 1, 2, \ldots$ и точка $g^* \in G$, такие, что $g_{\eta_{m_s}} \to g^*$, $s \to \infty$, в G. Поэтому

$$f(x, g_{\eta_{m_s}}) \to f(x, g^*),\ \ s \to \infty,\ \text{ при } \mu\text{–п.в. } x \in X,$$

откуда в силу секвенциальной непрерывности f на G следует, что

$$\int\limits_X |f(x, g_{\eta_{m_s}}) - f(x, g^*)|\mu(dx) \to 0,\ \ s \to \infty. \tag{4.2.6}$$

Таким образом,

$$\varepsilon_0 \leqslant \int\limits_{A_{\eta_{m_s}}} |f(x, g_{\eta_{m_s}})|\mu(dx) \leqslant \int\limits_X |f(x, g_{\eta_{m_s}}) - f(x, g^*)|\mu(dx) + \int\limits_{A_{\eta_{m_s}}} |f(x, g^*)|\mu(dx).$$

Переходя здесь к пределу при $s \to \infty$ и пользуясь соотношением (4.2.6) и абсолютной непрерывностью интеграла Лебега, заключаем, что $0 < \varepsilon_0 \leqslant 0$, что невозможно. Следовательно, соотношение (4.2.5) доказано.

Далее,

$$\sup_{g\in G} \left| \int\limits_X f_i(x,g)\mu(dx) - \int\limits_X f(x,g)\mu(dx) \right| \leqslant \sup_{g\in G} \int\limits_X |f_i(x,g) - f(x,g)|\mu(dx) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{g\in G} \int\limits_{X^i(\sigma,g)} |f_i(x,g) - f(x,g)|\mu(dx) + \sup_{g\in G} \int\limits_{X\setminus X^i(\sigma,g)} |f_i(x,g) - f(x,g)|\mu(dx) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{g\in G} \int\limits_{X^i(\sigma,g)} |f_i(x,g)|\mu(dx) + \sup_{g\in G} \int\limits_{X^i(\sigma,g)} |f(x,g)|\mu(dx) + \sigma\mu(X).$$

Отсюда

$$\sup_{g\in G}\left|\int\limits_X f_i(x,g)\mu(dx)-\int\limits_X f(x,g)\mu(dx)\right|\leqslant\sup_{g\in G}\int\limits_X|f_i(x,g)-f(x,g)|\mu(dx)\leqslant$$

$$\leqslant\sup_{g\in G}\int\limits_{X^i(\sigma,g)}|f_i(x,g)|\mu(dx)+\sup_{g\in G}\int\limits_{X^i(\sigma,g)}|f(x,g)|\mu(dx)+\sigma\mu(X).$$

Выберем произвольно $\varepsilon>0$ и зафиксируем. Положим $\sigma=\sigma_0=\frac{\varepsilon}{3\mu(X)}$ и подберём $\delta=\delta(\frac{\varepsilon}{3})>0$ согласно (4.2.1). Найдём затем $i_1=i_0(\delta(\frac{\varepsilon}{3}),\sigma_0)\geqslant 1$ в соответствии с (4.2.4). Тогда получим, что

$$\sup_{g\in G}\int\limits_{X^i(\sigma,g)}|f_i(x,g)|\mu(dx)\leqslant\frac{\varepsilon}{3}\ \ \forall\, i\geqslant i_1.$$

Подберём $\eta=\eta(\frac{\varepsilon}{3})>0$ согласно (4.2.5) и найдём $i_2=i_0(\eta(\frac{\varepsilon}{3}),\sigma_0)\geqslant 1$ из (4.2.4). Положив $i^*=\max\{i_1,i_2\}$, будем иметь

$$\sup_{g\in G}\int\limits_{X^i(\sigma,g)}|f_i(x,g)|\mu(dx)\leqslant\frac{\varepsilon}{3},\ \ \sup_{g\in G}\int\limits_{X^i(\sigma,g)}|f(x,g)|\mu(dx)\leqslant\frac{\varepsilon}{3}\ \ \forall\, i\geqslant i^*.$$

Как следствие,

$$\sup_{g\in G}\left|\int\limits_X f_i(x,g)\mu(dx)-\int\limits_X f(x,g)\mu(dx)\right|\leqslant\sup_{g\in G}\int\limits_X|f_i(x,g)-f(x,g)|\mu(dx)\leqslant$$

$$\leqslant\sup_{g\in G}\int\limits_{X^i(\sigma_0,g)}|f_i(x,g)|\mu(dx)+\sup_{g\in G}\int\limits_{X^i(\sigma_0,g)}|f(x,g)|\mu(dx)+\sigma\mu(X)\leqslant\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

при всех $i\geqslant i^*$. Лемма доказана. ■

Следствие 4.2.1. *Если выполнены условия лемм 4.1.3 или 4.1.4, и, кроме того, семейства функций*

$$X\ni x\mapsto\Psi(x,f_i^1(x)),\ \ i=1,2,\ldots,$$
$$X\ni x\mapsto\Psi(x,f_i^2(x)),\ \ i=1,2,\ldots,$$

равномерно интегрируемы, то

$$\lim_{i\to\infty}\left|\int\limits_X\Psi(x,f_i^1(x))\mu(dx)-\int\limits_X\Psi(x,f_i^2(x))\mu(dx)\right|=0.$$

Кроме того,

$$\lim_{i\to\infty}\int\limits_X|\Psi(x,f_i^1(x))-\Psi(x,f_i^2(x))|\mu(dx)=0.$$

Следствие 4.2.2. *Если выполнены условия лемм 4.1.6 или 4.1.7, и, кроме того, семейства функций*

$$X\ni x\mapsto\Psi(x,f_i^1(x,g)),\ \ g\in G,\ \ i=1,2,\ldots,$$
$$X\ni x\mapsto\Psi(x,f_i^2(x,g)),\ \ g\in G,\ \ i=1,2,\ldots,$$

равномерно интегрируемы, то

$$\lim_{i\to\infty}\sup_{g\in G}\left|\int\limits_X\Psi(x,f_i^1(x,g))\mu(dx)-\int\limits_X\Psi(x,f_i^2(x,g))\mu(dx)\right|=0.$$

Кроме того,

$$\lim_{i\to\infty}\sup_{g\in G}\int\limits_X|\Psi(x,f_i^1(x,g))-\Psi(x,f_i^2(x,g))|\mu(dx)=0.$$

Лемма 4.2.5. *Если последовательность почти всюду (на $[0,T]$) неотрицательных функций $\varphi_j \in L_2[0,T]$, $j = 1,2,\ldots$, слабо в $L_2[0,T]$ сходится к функции $\varphi \in L_2[0,T]$, то функция φ также почти всюду неотрицательна, причём*

$$\lim_{j\to\infty} \|\varphi_j\|_{1,[0,T]} = \|\varphi\|_{1,[0,T]}. \tag{4.2.7}$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{A} \subseteq [0,T]$ — произвольное измеримое по Лебегу множество. Поскольку последовательность φ_j, $j = 1,2,\ldots$, слабо в $L_2[0,T]$ сходится к функции φ, то

$$\lim_{j\to\infty} \int\limits_0^T \varphi_j(t)\chi_{\mathcal{A}}(t)dt = \int\limits_0^T \varphi(t)\chi_{\mathcal{A}}(t)dt,$$

где $\chi_{\mathcal{A}}$ — характеристическая функция множества $\mathcal{A}$. Таким образом,

$$\lim_{j\to\infty} \int\limits_{\mathcal{A}} \varphi_j(t)dt = \int\limits_{\mathcal{A}} \varphi(t)dt \ \ \forall\, \mathcal{A} \subseteq [0,T]. \tag{4.2.8}$$

Отсюда, ввиду неотрицательности функций $\varphi_j \in L_2[0,T]$, $j = 1,2,\ldots$, почти всюду на $[0,T]$, вытекает, что

$$\int\limits_{\mathcal{A}} \varphi(t)dt \geqslant 0 \ \ \forall\, \mathcal{A} \subseteq [0,T]. \tag{4.2.9}$$

Покажем, что функция φ неотрицательна почти всюду на $[0,T]$. В самом деле, пусть это не так. Тогда найдутся множество $\mathcal{A} \subseteq [0,T]$, имеющее положительную меру Лебега, и положительное число $\beta > 0$, такие, что

$$\varphi(t) \leqslant -\beta \ \text{ при п.в. } t \in \mathcal{A}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{\mathcal{A}} \varphi(t)dt \leqslant -\beta \operatorname{meas} \mathcal{A} < 0,$$

что противоречит соотношению (4.2.9). Итак, неотрицательность функции φ почти всюду на $[0,T]$ доказана.

Что же касается предельного соотношения (4.2.7), то оно является следствием соотношения (4.2.8). Лемма полностью доказана. ■

Из данной леммы вытекает

Следствие 4.2.3. *Если последовательность функций $\varphi_j \in L_2^m[0,T]$, $j = 1,2,\ldots$, все компоненты которых неотрицательны почти всюду на $[0,T]$, слабо в $L_2^m[0,T]$ сходится к функции $\varphi \in L_2^m[0,T]$, то все компоненты функции φ также неотрицательны почти всюду на $[0,T]$, причём*

$$\lim_{j\to\infty} \|\varphi_j\|_{1,[0,T]} = \|\varphi\|_{1,[0,T]}.$$

Лемма 4.2.6. *Пусть $\Pi \subset \mathbb{R}^{m_1}$ — ограниченное множество, мера Лебега которого конечна и положительна; $\mathbf{U} \subset \mathbb{R}^{m_2}$ — компакт; $\mathbf{D} \equiv \{\mathbf{u} \in L_\infty^{m_2}(\Pi) : \mathbf{u}(x) \in \mathbf{U}$ при п.в. $x \in \Pi\}$. Наконец, пусть функция $\varphi\colon \Pi \times \mathbf{U} \to \mathbb{R}$ измерима (в смысле Лебега) по совокупности всех своих переменных, при п.в. $x \in \Pi$ функция $\varphi(x,\cdot)$ непрерывна на $\mathbf{U}$, и найдётся постоянная положительная постоянная K, такая, что $|\varphi(x,v)| \leqslant K$ при всех $(x,v) \in \Pi \times \mathbf{U}$. Тогда*

$$\min_{\mathbf{u}(\cdot)\in\mathbf{D}} \int\limits_{\Pi} \varphi(x,\mathbf{u}(x))dx = \int\limits_{\Pi} \min_{v\in\mathbf{U}} \varphi(x,v)dx.$$

Доказательство. В самом деле, нетрудно видеть, что при всех $\mathbf{u}(\cdot) \in \mathbf{D}$

$$\int\limits_{\Pi} \varphi(x,\mathbf{u}(x))dx \geqslant \int\limits_{\Pi} \min_{v\in\mathbf{U}} \varphi(x,v)dx.$$

Переходя здесь к точной нижней грани по $\mathbf{u}(\cdot) \in \mathbf{D}$, получаем, что

$$\min_{\mathbf{u}(\cdot)\in\mathbf{D}} \int\limits_{\Pi} \varphi(x, \mathbf{u}(x))dx \geqslant \int\limits_{\Pi} \min_{v\in\mathbf{U}} \varphi(x, v)dx. \tag{4.2.10}$$

Обозначим через $\mathbf{u}_{min}(\cdot)$ функцию из $\mathbf{D}$, удовлетворяющую соотношению

$$\varphi(x, \mathbf{u}_{min}(x)) = \min_{v\in\mathbf{U}} \varphi(x, v) \text{ при п.в. } x \in \Pi.$$

Тогда из соотношения (4.2.10) выводим, что

$$\min_{\mathbf{u}(\cdot)\in\mathbf{D}} \int\limits_{\Pi} \varphi(x, \mathbf{u}(x))dx \geqslant \int\limits_{\Pi} \varphi(x, \mathbf{u}_{min}(x))dx,$$

что, ввиду включения $\mathbf{u}_{min}(\cdot) \in \mathbf{D}$, может выполняться лишь в случае, когда

$$\min_{\mathbf{u}(\cdot)\in\mathbf{D}} \int\limits_{\Pi} \varphi(x, \mathbf{u}(x))dx = \int\limits_{\Pi} \varphi(x, \mathbf{u}_{min}(x))dx.$$

Из данного равенства и определения функции $\mathbf{u}_{min}(\cdot)$ и вытекает утверждение леммы. Лемма доказана. ■

Лемма 4.2.7. *Пусть* $\Pi \subset \mathbb{R}^{m_1}$ *— ограниченное множество, мера Лебега которого конечна и положительна;* $\mathbf{U} \subset \mathbb{R}^{m_2}$ *— компакт;* $\mathbf{D} \equiv \{\mathbf{u} \in L_\infty^{m_2}(\Pi) : \mathbf{u}(x) \in \mathbf{U}$ *при п.в.* $x \in \Pi\}$. *Пусть функция* $\varphi\colon \Pi\times\mathbf{U} \to \mathbb{R}$ *измерима (в смысле Лебега) по совокупности всех своих переменных, при п.в.* $x \in \Pi$ *функция* $\varphi(x, \cdot)$ *непрерывна на* $\mathbf{U}$, *и найдётся постоянная положительная постоянная* K, *такая, что* $|\varphi(x, v)| \leqslant K$ *при всех* $(x, v) \in \Pi \times \mathbf{U}$. *Наконец, пусть* $\mathbf{u}_0(\cdot) \in \mathbf{D}$ *— некоторая функция. Тогда соотношения*

$$\min_{\mathbf{u}(\cdot)\in\mathbf{D}} \int\limits_{\Pi} \varphi(x, \mathbf{u}(x))dx = \int\limits_{\Pi} \varphi(x, \mathbf{u}_0(x))dx \tag{4.2.11}$$

и

$$\varphi(x, \mathbf{u}_0(x)) = \min_{v\in\mathbf{U}} \varphi(x, v) \text{ при п.в. } x \in \Pi. \tag{4.2.12}$$

эквивалентны.

Доказательство. 1) Пусть выполнено соотношение (4.2.11). Тогда, на основании леммы 4.2.6,

$$\min_{\mathbf{u}(\cdot)\in\mathbf{D}} \int\limits_{\Pi} \varphi(x, \mathbf{u}(x))dx = \int\limits_{\Pi} \min_{v\in\mathbf{U}} \varphi(x, v)dx.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{\Pi} \varphi(x, \mathbf{u}_0(x))dx = \min_{\mathbf{u}(\cdot)\in\mathbf{D}} \int\limits_{\Pi} \varphi(x, \mathbf{u}(x))dx = \int\limits_{\Pi} \min_{v\in\mathbf{U}} \varphi(x, v)dx.$$

Иными словами,

$$\int\limits_{\Pi} [\varphi(x, \mathbf{u}_0(x)) - \min_{v\in\mathbf{U}} \varphi(x, v)]dx = 0.$$

А поскольку подынтегральная функция в полученном выражении неотрицательна, то выполнено соотношение (4.2.12). Итак, из выполнения соотношения (4.2.11) следует выполнение соотношения (4.2.12).

2) Пусть теперь выполнено соотношение (4.2.12). Интегрируя (4.2.12) по $x \in \Pi$, будем иметь

$$\int\limits_{\Pi} \varphi(x, \mathbf{u}_0(x))dx = \int\limits_{\Pi} \min_{v\in\mathbf{U}} \varphi(x, v)dx.$$

Так как на основании леммы 4.2.6

$$\min_{\mathbf{u}(\cdot)\in\mathbf{D}} \int\limits_{\Pi} \varphi(x, \mathbf{u}(x))dx = \int\limits_{\Pi} \min_{v\in\mathbf{U}} \varphi(x, v)dx,$$

то

$$\int\limits_{\Pi} \varphi(x, \mathbf{u}_0(x))dx = \int\limits_{\Pi} \min_{v\in\mathbf{U}} \varphi(x, v)dx = \min_{\mathbf{u}(\cdot)\in\mathbf{D}} \int\limits_{\Pi} \varphi(x, \mathbf{u}(x))dx.$$

Иначе говоря, выполнено соотношение (4.2.11). Таким образом, из выполнения соотношения (4.2.12) следует выполнение соотношения (4.2.11). Лемма полностью доказана. ■

4.3. Точки Лебега и максимальные функции

Лемма 4.3.1. *[54] Если функция $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — локально суммируема, то справедливо равенство*

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{\operatorname{meas} Ш^n_r(x)}\int\limits_{Ш^n_r(x)} f(y)dy = f(x) \text{ для п.в. } x\in\mathbb{R}^n.$$

Определение 4.3.1.*[54] Пусть дана функция $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Максимальной функцией (Mf) функции f называется функция*

$$(Mf)(x) \equiv \sup_{r>0}\frac{1}{\operatorname{meas} Ш^n_r(x)}\int\limits_{Ш^n_r(x)} |f(y)|dy,\ \ x\in\mathbb{R}^n.$$

Справедлива следующая

Лемма 4.3.2. *[54] Пусть дана функция $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.*

1) Если $f\in L_p(\mathbb{R}^n)$, где $p\in[1,\infty]$, то (Mf) — п.в. конечна.

2) Если $f\in L_1(\mathbb{R}^n)$, то

$$\forall\,\alpha>0 : \operatorname{meas}\{x\in\mathbb{R}^n : (Mf)(x)>\alpha\} \leqslant \frac{\tilde{A}}{\alpha}\int\limits_{\mathbb{R}^n}|f(x)|dx,$$

где $\tilde{A}>0$ — константа, зависящая только от размерности n (например, можно взять $\tilde{A}=5^n$).

3) Если $f\in L_p(\mathbb{R}^n)$, где $p\in(1,\infty]$, то $(Mf)\in L_p(\mathbb{R}^n)$ и

$$\|Mf\|_{p,\mathbb{R}^n} \leqslant \tilde{A}_p\|f\|_{p,\mathbb{R}^n},$$

где $\tilde{A}_p$ зависит лишь от p и n.

Определение 4.3.2.*[55]–[60] Пусть $G\subset\mathbb{R}^n$ - открытое множество. Точку $x\in G$ назовем (l,m)–точкой Лебега суммируемой функции $f : G\to\mathbb{R}^1$, $1\leqslant l\leqslant m\leqslant n$, если $f(x)\neq\infty$ и*

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{(2h)^{m-l+1}}\int\limits_{x_l-h}^{x_l+h}\cdots\int\limits_{x_m-h}^{x_m+h}|f(x_1,\ldots,x_{l-1},y_1,\ldots,y_{m-l+1},x_{m+1},\ldots,x_n)-f(x)|\,dy_1\ldots dy_{m-l+1}=0.$$

Замечание 4.3.1. *Легко видеть, что $(1,n)$-точка Лебега есть точка Лебега в обычном смысле [54].*

Лемма 4.3.3. *[55] – [60] При любых фиксированных l, m, $1\leqslant l\leqslant m\leqslant n$ п.в. точки открытого множества G есть (l,m)-точки Лебега суммируемой функции $f : G\to\mathbb{R}^1$.*

Определение 4.3.3. *Пусть m_1, $m_2\geqslant 1$ — натуральные числа, $m=m_1+m_2$; $X\subset\mathbb{R}^{m_1}$, $Y\subset\mathbb{R}^{m_2}$ — открытые множества, и пусть функция $f\colon X\times Y\to\mathbb{R}$ — суммируема по множеству $X\times Y$. Точку $\tilde{y}\in Y$, для которой $\int\limits_X|f(x,\tilde{y})|dx\neq\infty$, назовём интегральной точкой Лебега функции f по переменной y, если*

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{(2h)^{m_2}}\int\limits_{\tilde{y}_1-h}^{\tilde{y}_1+h}\cdots\int\limits_{\tilde{y}_{m_2}-h}^{\tilde{y}_{m_2}+h}dy\int\limits_X|f(x,y)-f(x,\tilde{y})|dx=0.$$

Замечание 4.3.2. *Нетрудно видеть, что интегральная точка Лебега функции f по переменной y — это в точности точка Лебега функции*

$$Y\ni y\mapsto\int\limits_X f(x,y)dx.$$

Справедлива следующая

Лемма 4.3.4. *Пусть m_1, $m_2\geqslant 1$ — натуральные числа, $m=m_1+m_2$; $X\subset\mathbb{R}^{m_1}$, $Y\subset\mathbb{R}^{m_2}$ — открытые множества, и пусть функция $f\colon X\times Y\to\mathbb{R}$ — суммируема по множеству $X\times Y$. Тогда почти все точки множества Y являются интегральными точками Лебега функции f по переменной y.*

Доказательство. Поскольку функция f суммируема по множеству $X\times Y$, то, в силу теоремы Фубини, функция

$$Y\ni y\mapsto\int\limits_X f(x,y)dx$$

почти всюду конечна и является элементом $L_1(Y)$. Пользуясь затем замечанием 4.3.2 и леммой 4.3.1, получаем, что п.в. точки множества Y являются интегральными точками Лебега функции f по переменной y. ■

Определение 4.3.4. *Пусть m_1, $m_2 \geqslant 1$ — натуральные числа, $m = m_1 + m_2$; $X \subset \mathbb{R}^{m_1}$, $Y \subset \mathbb{R}^{m_2}$ — открытые множества, и пусть функция $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ — суммируема по множеству $X \times Y$. Точку $\tilde{x} \in X$, для которой $\int\limits_Y |f(\tilde{x}, y)|dy \neq \infty$, назовём интегральной (l, r)–точкой Лебега, $1 \leqslant l \leqslant r \leqslant m_1$, функции f по переменной x, если точка $\tilde{x}$ является (l, r)–точкой Лебега функции*

$$X \ni x \mapsto \int\limits_Y f(x, y)dy.$$

Из леммы 4.3.2 и определения 4.3.4 вытекает

Лемма 4.3.5. *Пусть m_1, $m_2 \geqslant 1$ — натуральные числа, $m = m_1 + m_2$; $X \subset \mathbb{R}^{m_1}$, $Y \subset \mathbb{R}^{m_2}$ — открытые множества, и пусть функция $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ — суммируема по множеству $X \times Y$. Тогда при любых фиксированных l, r, $1 \leqslant l \leqslant r \leqslant m_1$, почти все точки множества X являются интегральными (l, r)–точками Лебега функции f по переменной x.*

4.4. Аппроксимация мер Радона, заданных на отрезке числовой оси

Лемма 4.4.1. *Для любой меры $\mu \in \mathbf{M}[0, T]$ найдётся последовательность функций $\omega^k \in C[0, T]$, $k = 1, 2, \ldots$, такая, что*

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{[0,T]} \zeta(t)\mu^k(dt) = \int\limits_{[0,T]} \zeta(t)\mu(dt), \ \ \forall\, \zeta \in C[0,\, T], \tag{4.4.1}$$

где $\mu^k(E) \equiv \int\limits_E \omega^k(t)dt$, $E \subseteq [0,\, T]$ — борелевское подмножество отрезка $[0,\, T]$, $k = 1, 2, \ldots$, причём если мера $\mu \in \mathbf{M}[0,\, T]$ — неотрицательна, то $\omega^k(t) \geqslant 0$, $\forall\, t \in [0,\, T]$, $k = 1, 2, \ldots$.

Доказательство. Разобьём доказательство на несколько этапов.

1) Покажем вначале, что для любой меры $\mu \in \mathbf{M}[0,\, T]$ найдётся последовательность мер

$$\bar{\mu}^m \equiv \sum_{i=1}^{i_m} \lambda_{i,m}\delta_{t_{i,m}}, \ \ m = 1, 2, \ldots,$$

где $\lambda_{i,m} \in R$, $i = \overline{1,\, i_m}$, $m = 1, 2, \ldots$, — неотрицательны, если мера $\mu \in \mathbf{M}[0,\, T]$ — неотрицательна, $t_{i,m} \in [0,\, T]$, $i = \overline{1,\, i_m}$, $m = 1, 2, \ldots$, такая, что

$$\lim_{m\to\infty} \int\limits_{[0,T]} \zeta(t)\bar{\mu}^m(dt) = \int\limits_{[0,T]} \zeta(t)\mu(dt), \ \ \forall\, \zeta \in C[0,\, T]. \tag{4.4.2}$$

В самом деле, согласно [14], $(C[0,\, T])^*$ изометрично изоморфно $\mathbf{M}[0,\, T]$. С другой стороны, согласно [37], $(C[0,\, T])^*$ изометрично изоморфно $\mathbf{BV}^0[0,\, T]$. Следовательно, существует изоморфизм

$$\mathcal{F}\colon \mathbf{M}[0,\, T] \to \mathbf{BV}^0[0,\, T],$$

такой, что

$$\|\mathcal{F}[\mu]\|_{\mathbf{BV}^0} = \|\mu\|, \ \ \forall\, \mu \in \mathbf{M}[0,\, T]. \tag{4.4.3}$$

Пусть функционал $\mathcal{A} : C[0,\, T] \to \mathbb{R}$ задаётся формулой

$$\mathcal{A}[\zeta] = \int\limits_{[0,\, T]} \zeta(t)\mu(dt), \ \ \forall\, \zeta \in C[0,\, T]. \tag{4.4.4}$$

Тогда, очевидно, $\mathcal{A} \in (C[0,\, T])^*$, и, стало быть, согласно [37],

$$\mathcal{A}[\zeta] = \int\limits_{[0,T]} \zeta(t)d\mathcal{F}[\mu](t), \ \ \forall\, \zeta \in C[0,\, T], \tag{4.4.5}$$

где интеграл понимается в смысле интеграла Стильтьеса по отрезку $[0, T]$. Пусть $\bar{t}_{i,m} = \frac{Ti}{m}$, $i = \overline{0, m}$, $\bar{t}_{i,m+1} = t_{i,m}$, $\lambda_{i,m} \equiv \mathcal{F}[\mu](\bar{t}_{i,m}) - \mathcal{F}[\mu](\bar{t}_{i-1,m})$, $i = \overline{1, m}$, $\lambda_{i,m+1} = \mathcal{F}[\mu](\bar{t}_{i,m})$, $i_m = m+1$, $t_{i,m} = \bar{t}_{i-1,m}$, $i = \overline{1, i_m}$. Тогда, в силу определения интеграла Стильтьеса по отрезку $[0, T]$,

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{i_m} \zeta(t_{i,m})\lambda_{i,m} = \int\limits_{[0,T]} \zeta(t) d\mathcal{F}[\mu](t), \ \ \forall \zeta \in C[0, T].$$

Полагая $\bar{\mu}^m \equiv \sum\limits_{i=1}^{i_m} \lambda_{i,m} \boldsymbol{\delta}_{t_{i,m}}$, $m = 1, 2, \ldots$, перепишем последнее неравенство в виде

$$\lim_{m\to\infty} \int\limits_{[0,T]} \zeta(t)\bar{\mu}^m(dt) = \int\limits_{[0,T]} \zeta(t)\mu(dt), \ \ \forall \zeta \in C[0, T],$$

что в совокупности с (4.4.3)–(4.4.5) и даёт (4.4.2).

Ясно, что если функция $\mathcal{F}[\mu]$ монотонно не убывает, то построенные меры $\bar{\mu}^m$, $m = 1, 2, \ldots$, будут неотрицательными, и, следовательно, мера μ также будет неотрицательной, как $*$–слабый предел таких мер. В силу же (4.4.3), неотрицательная мера μ может породить лишь монотонно неубывающую функция $\mathcal{F}[\mu]$. Итак, коэффициенты мер $\bar{\mu}^m$, $m = 1, 2, \ldots$, можно считать неотрицательными, если мера μ — неотрицательна.

2) Докажем существование непрерывных функций, упомянутых в формулировке леммы. Пусть $\varepsilon_s > 0$, $s = 1, 2, \ldots$, $\varepsilon_s \to 0$, $s \to \infty$, — некоторая последовательность чисел, и пусть

$$\omega^s_{i,m}(t) \equiv \frac{\chi_{(t_{i,m}-\varepsilon_s, t_{i,m}+\varepsilon_s)\cap(0,T)}(t)}{\operatorname{meas}\{(t_{i,m}-\varepsilon_s, t_{i,m}+\varepsilon_s)\cap(0, T)\}}, \ \ i = \overline{1, i_m},$$

$$\bar{\omega}^s_m(t) \equiv \sum_{i=1}^{i_m} \lambda_{i,m}\omega^s_{i,m}(t), \ \ m, s = 1, 2, \ldots, \ \ t \in [0, T],$$

$$\bar{\mu}^m_s(E) \equiv \int\limits_E \bar{\omega}^s_m(t)dt, \ \ E \subseteq [0, T], \ \ m, s = 1, 2, \ldots.$$

Тогда, очевидно,

$$\lim_{s\to\infty} \int\limits_{[0,T]} \zeta(t)\bar{\mu}^m_s(dt) = \int\limits_{[0,T]} \zeta(t)\bar{\mu}^m(dt), \ \ \forall \zeta \in C[0, T]. \tag{4.4.6}$$

Пусть теперь $h_p > 0$, $p = 1, 2, \ldots$, $h_p \to 0$, $p \to \infty$, — некоторая последовательность чисел, и пусть $\bar{\mu}^m_{s,p}(E) \equiv \int\limits_E \bar{\omega}^{s,p}_m(t)dt$, $E \subseteq [0, T]$, $m, s, p = 1, 2, \ldots$, где $\bar{\omega}^{s,p}_m$ — усреднение с параметром $h_p > 0$ с ядром, независящим от $m, s, p = 1, 2, \ldots$, функции $\bar{\omega}^s_m$. Пользуясь свойствами средних функций и теоремой Радона–Никодима, заключаем, что

$$\lim_{p\to\infty} \int\limits_{[0,T]} \zeta(t)\bar{\mu}^m_{s,p}(dt) = \int\limits_{[0,T]} \zeta(t)\bar{\mu}^m_s(dt), \ \ \forall \zeta \in C[0, T]. \tag{4.4.7}$$

Из (4.4.2) следует, что

$$\lim_{m\to\infty} |\bar{\mu}^m - \mu|_w = 0, \tag{4.4.8}$$

где $|\cdot|_w$ — слабая норма [14] в $\mathbf{M}[0, T]$.

Выберем произвольно $\alpha > 0$ и зафиксируем.

Согласно (4.4.8), найдётся номер $m_0(\alpha) \geqslant 1$, такой, что

$$|\bar{\mu}^{m_0(\alpha)} - \mu|_w \leqslant \frac{\alpha}{3}.$$

Далее, согласно (4.4.6),

$$\lim_{s\to\infty} |\bar{\mu}^{m_0(\alpha)}_s - \bar{\mu}^{m_0(\alpha)}|_w = 0.$$

Поэтому найдётся номер $s_0(\alpha) \geqslant 1$, такой, что

$$|\bar{\mu}_{s_0(\alpha)}^{m_0(\alpha)} - \bar{\mu}^{m_0(\alpha)}|_w \leqslant \frac{\alpha}{3}.$$

Наконец, согласно (4.4.7),

$$\lim_{p\to\infty} |\bar{\mu}_{s_0(\alpha),p}^{m_0(\alpha)} - \bar{\mu}_{s_0(\alpha)}^{m_0(\alpha)}|_w = 0,$$

в силу чего найдётся номер $p_0(\alpha) \geqslant 1$, такой, что

$$|\bar{\mu}_{s_0(\alpha),p_0(\alpha)}^{m_0(\alpha)} - \bar{\mu}_{s_0(\alpha)}^{m_0(\alpha)}|_w \leqslant \frac{\alpha}{3}.$$

Таким образом,

$$|\bar{\mu}_{s_0(\alpha),p_0(\alpha)}^{m_0(\alpha)} - \mu|_w \leqslant |\bar{\mu}_{s_0(\alpha),p_0(\alpha)}^{m_0(\alpha)} - \bar{\mu}_{s_0(\alpha)}^{m_0(\alpha)}|_w + |\bar{\mu}_{s_0(\alpha)}^{m_0(\alpha)} - \bar{\mu}^{m_0(\alpha)}|_w + |\bar{\mu}^{m_0(\alpha)} - \mu|_w \leqslant \frac{\alpha}{3} + \frac{\alpha}{3} + \frac{\alpha}{3} = \alpha,$$

то есть

$$|\bar{\mu}_{s_0(\alpha),p_0(\alpha)}^{m_0(\alpha)} - \mu|_w \leqslant \alpha. \tag{4.4.9}$$

Пусть $\alpha_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots$, $\alpha_k \to 0$, $k \to \infty$, — некоторая последовательность. Тогда из (4.4.9) следует, что

$$\bar{\mu}_{s_0(\alpha_k),p_0(\alpha_k)}^{m_0(\alpha_k)} \to \mu, \ \ k \to \infty, \ *\text{–слабо}.$$

Следовательно, в качестве искомой последовательности ω^k, $k = 1, 2, \ldots$, можно взять последовательность $\omega^k \equiv \bar{\omega}_{m_0(\alpha_k)}^{s_0(\alpha_k),p_0(\alpha_k)}$, $k = 1, 2, \ldots$. Лемма доказана. ■

Глава 5. О некоторых обыкновенных дифференциальных уравнениях

5.1. Лемма Гронуолла и её следствие

Лемма 5.1.1. *[11] Пусть функции $\varepsilon(t)$, $\lambda(t)$, $t \in [\alpha,\beta]$, — измеримые по Лебегу функции, неотрицательные п.в. на отрезке $[\alpha,\beta]$; и пусть произведение $\varepsilon(t)\lambda(t)$, $t \in [\alpha,\beta]$, — суммируемо по отрезку $[\alpha,\beta]$. Если для некоторых $b \geqslant 0$, $\tau \in [\alpha,\beta]$, и п.в. $t \in [\alpha,\beta]$ справедливо неравенство*

$$\varepsilon(t) \leqslant \left|\int\limits_{\tau}^{t} \varepsilon(\xi)\lambda(\xi)d\xi\right| + b,$$

то

$$\varepsilon(t) \leqslant b\exp\left(\left|\int\limits_{\tau}^{t} \lambda(\xi)d\xi\right|\right) \text{ при п.в. } t \in [\alpha,\beta].$$

Лемма 5.1.2. *Пусть $\sigma(t)$, $t \in [\alpha,\beta]$, — непрерывная неотрицательная на $[\alpha,\beta]$ функция; $\varkappa(t)$, $t \in [\alpha,\beta]$, — неотрицательная суммируемая по $[\alpha,\beta]$ функция, и, наконец, пусть γ , $\omega \geqslant 0$. Тогда если*

$$\sigma(t) \leqslant \gamma[\sigma(\alpha) + \omega \max_{\xi\in[\alpha,t]} \sqrt{\sigma(\xi)}] + \int\limits_{\alpha}^{t} \varkappa(\xi)\sigma(\xi)d\xi \ \ \forall\, t \in [\alpha,\beta], \tag{5.1.1}$$

то

$$\max_{t\in[\alpha,\beta]} \sqrt{\sigma(t)} \leqslant \gamma[\sqrt{\sigma(\alpha)} + \omega]\exp\left(\int\limits_{\alpha}^{\beta} \varkappa(\xi)d\xi\right). \tag{5.1.2}$$

Доказательство. Введём функцию $y\colon [\alpha,\beta] \to R$ формулой $y(t) \equiv \max\limits_{\xi\in[\alpha,t]} \sqrt{\sigma(\xi)}$, $t \in [\alpha,\beta]$. Тогда (5.1.1) примет вид

$$\sigma(t) \leqslant \gamma[\sigma(\alpha) + \omega y(t)] + \int\limits_{\alpha}^{t} \varkappa(\xi)\sigma(\xi)d\xi \ \ \forall\, t \in [\alpha,\beta]. \tag{5.1.3}$$

Отметим, что функция y монотонно не убывает на отрезке $[\alpha,\beta]$ и

$$\frac{1}{y(t_1)} \geqslant \frac{1}{y(t_2)}, \ \ t_1 \leqslant t_2, \text{ если } y(t_1) > 0. \tag{5.1.4}$$

Обозначим через $\mathcal{N}$ множество нулей функции y. Покажем, что либо $\mathcal{N} = \emptyset$, либо $\mathcal{N}$ представимо в виде $\mathcal{N} = [\alpha, \sup\mathcal{N}]$. В случае $\mathcal{N} = \{\alpha\}$ последнее очевидно. Поэтому пусть $\mathcal{N} \neq \emptyset$, $\mathcal{N} \neq \{\alpha\}$. Заметим, что в силу неубывания функции y

$$\forall\, t \in \mathcal{N} : [\alpha,t] \subseteq \mathcal{N}. \tag{5.1.5}$$

Пусть $t^* = \sup\mathcal{N}$. На основании определения верхней грани найдётся строго монотонно возрастающая последовательность $t_k \in \mathcal{N}$, $k = 1,2,\ldots$, такая, что $t_k \to t^*$, $k \to \infty$. Таким образом, ввиду (5.1.5), $[\alpha,t^*) = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} [\alpha,t_k] \subseteq \mathcal{N}$. Пользуясь теперь непрерывностью функции σ, заключаем, что $\mathcal{N} = [\alpha, \sup\mathcal{N}]$.

Ясно, что если $\mathcal{N} = [\alpha,\beta]$, то неравенство (5.1.2) справедливо.

Пусть $\mathcal{N} = \emptyset$. Поделив (5.1.3) на $y(t)$ и воспользовавшись (5.1.4), получим соотношение

$$\frac{\sigma(t)}{y(t)} \leqslant \gamma[\sqrt{\sigma(\alpha)} + \omega] + \int\limits_{\alpha}^{t} \varkappa(\xi)\frac{\sigma(\xi)}{y(\xi)}d\xi \ \ \forall\, t \in [\alpha,\beta].$$

Применив к нему лемму (5.1.1), получим, что

$$\frac{\sigma(t)}{y(t)} \leqslant \gamma[\sqrt{\sigma(\alpha)} + \omega] \exp\left(\int\limits_{\alpha}^{\beta} \varkappa(\xi) d\xi\right) \quad \text{при п.в. } t \in [\alpha, \beta].$$

В частности,

$$\frac{\sigma(t)}{y(\tau)} \leqslant \gamma[\sqrt{\sigma(\alpha)} + \omega] \exp\left(\int\limits_{\alpha}^{\beta} \varkappa(\xi) d\xi\right) \quad \text{при п.в. } t \in [\alpha, \tau] \text{ при всех } \tau \in (\alpha, \beta].$$

Переходя здесь к точной верхней грани по $t \in [\alpha, \tau]$, получаем неравенство (5.1.2).

Пусть $\mathcal{N} = \{\alpha\}$. Тогда неравенство (5.1.2) заведомо выполнено при $t = \alpha$. Предположим теперь, что $t > \alpha$. Поделив (5.1.3) на $y(t)$ и воспользовавшись (5.1.4), выводим, что

$$\frac{\sigma(t)}{y(t)} \leqslant \gamma\omega + \int\limits_{\alpha}^{t} \varkappa(\xi) \frac{\sigma(\xi)}{y(\xi)} d\xi \ \ \forall\, t \in [\alpha, \beta].$$

Применив к данному неравенству лемму (5.1.1), получим, что

$$\frac{\sigma(t)}{y(t)} \leqslant \gamma[\sqrt{\sigma(\alpha)} + \omega] \exp\left(\int\limits_{\alpha}^{\beta} \varkappa(\xi) d\xi\right) \quad \text{при п.в. } t \in [\alpha, \beta].$$

В частности,

$$\frac{\sigma(t)}{y(\tau)} \leqslant \gamma\omega \exp\left(\int\limits_{\alpha}^{\beta} \varkappa(\xi) d\xi\right) \quad \text{при п.в. } t \in [\alpha, \tau] \text{ при всех } \tau \in (\alpha, \beta].$$

Переходя здесь к точной верхней грани по $t \in [\alpha, \tau]$, получаем неравенство (5.1.2).

Пусть $\mathcal{N} = [\alpha, t^*]$ и $t^* \in (\alpha, \beta)$. Тогда неравенство (5.1.2) заведомо выполнено при $t \in [\alpha, t^*]$. Предположим теперь, что $t > t^*$. Поделив (5.1.3) на $y(t)$ и воспользовавшись (5.1.4), заключаем, что

$$\frac{\sigma(t)}{y(t)} \leqslant \gamma\omega + \int\limits_{t^*}^{t} \varkappa(\xi) \frac{\sigma(\xi)}{y(\xi)} d\xi \ \ \forall\, t \in [t^*, \beta].$$

Применив к данному неравенству лемму 5.1.1, получим, что

$$\frac{\sigma(t)}{y(t)} \leqslant \gamma[\sqrt{\sigma(\alpha)} + \omega] \exp\left(\int\limits_{\alpha}^{\beta} \varkappa(\xi) d\xi\right) \quad \text{при п.в. } t \in [t^*, \beta].$$

В частности,

$$\frac{\sigma(t)}{y(\tau)} \leqslant \gamma\omega \exp\left(\int\limits_{t^*}^{\beta} \varkappa(\xi) d\xi\right) \quad \text{при п.в. } t \in [t^*, \tau] \text{ при всех } \tau \in (t^*, \beta].$$

Переходя здесь к точной верхней грани по $t \in [t^*, \tau]$, получаем неравенство

$$\max_{t \in [t^*, \beta]} \sqrt{\sigma(t)} \leqslant \gamma\omega \exp\left(\int\limits_{\alpha}^{\beta} \varkappa(\xi) d\xi\right).$$

А с учётом того, что $\sigma(t) \equiv 0$, $t \in [\alpha, t^*]$, будем иметь

$$\max_{t \in [\alpha, \beta]} \sqrt{\sigma(t)} \leqslant \gamma\omega \exp\left(\int\limits_{\alpha}^{\beta} \varkappa(\xi) d\xi\right).$$

А это и есть требуемое неравенство (5.1.2). ■

5.2. Уравнения первого порядка

Пусть $\mathfrak{A} \in C([0,T], \mathbb{R}^{m\times m})$, $\mathfrak{B} \in C^1(\Gamma, \mathbb{R}^m)$, $\varphi \in C^1([0,T], \mathbb{R}^m)$.

Введём при каждом $\tau \in [0,T]$ функцию $h(t,\tau)$, $(t,\tau) \in \Gamma$, как решение задачи Коши

$$h_t(t,\tau) = \mathfrak{A}(t)h(t,\tau) + \mathfrak{B}(t,\tau), \ \ (t,\tau) \in \Gamma, \tag{5.2.1}$$

$$h(\tau,\tau) = \varphi(\tau), \ \ \tau \in [0,T]. \tag{5.2.2}$$

Дадим следующее

Определение 5.2.1. *Функцию $h \in C^1(\Gamma, \mathbb{R}^m)$ назовём решением задачи (5.2.1)–(5.2.2), если она всюду в Γ удовлетворяет уравнению (5.2.1) и при всех $\tau \in [0,T]$ удовлетворяет начальному условию (5.2.2).*

Покажем, что справедлива следующая

Лемма 5.2.1. *Задача Коши (5.2.1)–(5.2.2) имеет единственное решение $h \in C^1(\Gamma, \mathbb{R}^m)$. При этом функция h имеет непрерывные на Γ производные $h_{\tau t}$ и $h_{t\tau}$, а функция h_τ является решением задачи Коши*

$$h_{\tau t}(t,\tau) = \mathfrak{A}(t)h_\tau(t,\tau) + \mathfrak{B}_\tau(t,\tau), \ \ (t,\tau) \in \Gamma; \ \ h_\tau(t,\tau)|_{t=\tau} = \varphi'(\tau) - [\mathfrak{A}(\tau)\varphi(\tau) + \mathfrak{B}(\tau,\tau)]. \tag{5.2.3}$$

Доказательство. 1) Покажем, что задача Коши (5.2.1)–(5.2.2) эквивалентна некоторому интегральному уравнению.

В самом деле, пусть $h \in C^1(\Gamma, \mathbb{R}^m)$ — решение задачи Коши (5.2.1)–(5.2.2). Проинтегрировав уравнение (5.2.1) по t от τ до ξ, получим, что h является принадлежащим классу $\mathbb{K}^1_m(\Gamma)$ решением интегрального уравнения

$$h(\xi,\tau) = \varphi(\tau) + \int_\tau^\xi [\mathfrak{A}(t)h(t,\tau) + \mathfrak{B}(t,\tau)]dt, \ \ (\xi,\tau) \in \Gamma. \tag{5.2.4}$$

Обратно, пусть h — принадлежащее классу $\mathbb{K}^1_m(\Gamma)$ решение интегрального уравнения (5.2.4). Тогда она имеет производную по t, при всех $(t,\tau) \in \Gamma$ удовлетворяет уравнению (5.2.1) и при всех $\tau \in [0,T]$ удовлетворяет начальному условию (5.2.2).

Итак, любое принадлежащее классу $C^1(\Gamma, \mathbb{R}^m)$ решение задачи Коши (5.2.1)–(5.2.2) является принадлежащим классу $\mathbb{K}^1_m(\Gamma)$ решением интегрального уравнения (5.2.4), и наоборот, любое принадлежащее классу $\mathbb{K}^1_m(\Gamma)$ решение интегрального уравнения (5.2.4) является принадлежащим классу $C^1(\Gamma, \mathbb{R}^m)$ решением задачи Коши (5.2.1)–(5.2.2).

Покажем, что интегральное уравнение (5.2.4) имеет единственное решение в классе $\mathbb{K}^1_m(\Gamma)$. Введём оператор $\mathfrak{C}\colon \mathbb{K}^1_m(\Gamma) \to \mathbb{K}^1_m(\Gamma)$ равенством

$$\mathfrak{C}[h](t,\tau) = \varphi(\tau) + \int_\tau^t [\mathfrak{A}(\xi)h(\xi,\tau) + \mathfrak{B}(\xi,\tau)]d\xi, \ \ (t,\tau) \in \Gamma,$$

и покажем, что некоторая степень этого оператора является сжатием.

Заметим прежде всего, что

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\mathfrak{C}[h](t,\tau) = \varphi'(\tau) - [\mathfrak{A}(\tau)h(\tau,\tau) + \mathfrak{B}(\tau,\tau)] + \int_\tau^t [\mathfrak{A}(\xi)h_\tau(\xi,\tau) + \mathfrak{B}_\tau(\xi,\tau)]d\xi, \ \ (t,\tau) \in \Gamma.$$

Пусть теперь h_1, $h_2 \in \mathbb{K}^1_m(\Gamma)$ — произвольны. Тогда

$$|\mathfrak{C}[h_1](t,\tau) - \mathfrak{C}[h_2](t,\tau)| \leqslant K\left|\int_\tau^t |h_1(\xi,\tau) - h_2(\xi,\tau)|d\xi\right| \leqslant K|h_1 - h_2|^{(0)}_{\Gamma,\mathbb{R}^m}|t-\tau|, \tag{5.2.5}$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial\tau}\mathfrak{C}[h_1](t,\tau) - \frac{\partial}{\partial\tau}\mathfrak{C}[h_2](t,\tau)\right| \leqslant K\left|\int_\tau^t |h_{1\tau}(\xi,\tau) - h_{2\tau}(\xi,\tau)|d\xi\right| \leqslant K|h_{1\tau} - h_{2\tau}|^{(0)}_{\Gamma,\mathbb{R}^m}|t-\tau|,$$

$$(t,\tau) \in \Gamma,$$

где $K = \max\limits_{t\in[0,T]} |\mathfrak{A}(t)|$.

Предположим, что для некоторого $k \geqslant 1$ уже доказано, что

$$|\mathfrak{C}^k[h_1](t,\tau) - \mathfrak{C}^k[h_2](t,\tau)| \leqslant \frac{(K|t-\tau|)^k}{k!} |h_1 - h_2|^{(0)}_{\Gamma,\mathbb{R}^m}, \tag{5.2.6}$$
$$\left| \frac{\partial}{\partial\tau}\mathfrak{C}^k[h_1](t,\tau) - \frac{\partial}{\partial\tau}\mathfrak{C}^k[h_2](t,\tau)\right| \leqslant \frac{(K|t-\tau|)^k}{k!} |h_{1\tau} - h_{2\tau}|^{(0)}_{\Gamma,\mathbb{R}^m}, \ \ (t,\tau) \in \Gamma.$$

Тогда, согласно (5.2.5) и предположению индукции,

$$|\mathfrak{C}^{k+1}[h_1](t,\tau) - \mathfrak{C}^{k+1}[h_2](t,\tau)| = |\mathfrak{C}[\mathfrak{C}^k[h_1]](t,\tau) - \mathfrak{C}[\mathfrak{C}^k[h_2]](t,\tau)| \leqslant$$
$$\leqslant K \left| \int\limits_\tau^t |\mathfrak{C}^k[h_1](\xi,\tau) - \mathfrak{C}^k[h_2](\xi,\tau)| d\xi \right| \leqslant \frac{K^{k+1}}{k!} |h_1 - h_2|^{(0)}_{\Gamma,\mathbb{R}^m} \left| \int\limits_\tau^t |\xi-\tau|^k d\xi \right| = \frac{(K|t-\tau|)^{k+1}}{(k+1)!} |h_1 - h_2|^{(0)}_{\Gamma,\mathbb{R}^m};$$
$$\left| \frac{\partial}{\partial\tau}\mathfrak{C}^{k+1}[h_1](t,\tau) - \frac{\partial}{\partial\tau}\mathfrak{C}^{k+1}[h_2](t,\tau)\right| = \left| \frac{\partial}{\partial\tau}\mathfrak{C}[\mathfrak{C}^k[h_1]](t,\tau) - \frac{\partial}{\partial\tau}\mathfrak{C}[\mathfrak{C}^k[h_2]](t,\tau)\right| \leqslant$$
$$\leqslant K \left| \int\limits_\tau^t \left| \frac{\partial}{\partial\tau}\mathfrak{C}^k[h_1](\xi,\tau) - \frac{\partial}{\partial\tau}\mathfrak{C}^k[h_2](\xi,\tau)\right| d\xi \right| \leqslant \frac{K^{k+1}}{k!} |h_{1\tau} - h_{2\tau}|^{(0)}_{\Gamma,\mathbb{R}^m} \left| \int\limits_\tau^t |\xi-\tau|^k d\xi \right| =$$
$$= \frac{(K|t-\tau|)^{k+1}}{(k+1)!} |h_{1\tau} - h_{2\tau}|^{(0)}_{\Gamma,\mathbb{R}^m}.$$

Таким образом, оценка (5.2.6) имеет место для всех $k \geqslant 1$. Поэтому

$$|\mathfrak{C}^k[h_1] - \mathfrak{C}^k[h_2]|^{(0)}_{\Gamma,\mathbb{R}^m} \leqslant \frac{(KT)^k}{k!} |h_1 - h_2|^{(0)}_{\Gamma,\mathbb{R}^m}, \ \ \left| \frac{\partial}{\partial\tau}\mathfrak{C}^k[h_1] - \frac{\partial}{\partial\tau}\mathfrak{C}^k[h_2]\right|^{(0)}_{\Gamma,\mathbb{R}^m} \leqslant \frac{(KT)^k}{k!} |h_{1\tau} - h_{2\tau}|^{(0)}_{\Gamma,\mathbb{R}^m},$$

откуда

$$\|\mathfrak{C}^k[h_1] - \mathfrak{C}^k[h_2]\|_{\mathbb{K}^1_m(\Gamma)} \leqslant \frac{(KT)^k}{k!} \|h_1 - h_2\|_{\mathbb{K}^1_m(\Gamma)}.$$

Следовательно, некоторая степень оператора $\mathfrak{C}$ является сжатием, на основании чего интегральное уравнение (5.2.4) имеет единственное решение в классе $\mathbb{K}^1_m(\Gamma)$. Ввиду доказанной выше эквивалентности задачи Коши (5.2.1)–(5.2.2) и интегрального уравнения (5.2.4) это даёт однозначную разрешимость задачи Коши (5.2.1)–(5.2.2) в классе $C^1(\Gamma,\mathbb{R}^m)$.

2) Докажем теперь, что функция h_τ является решением задачи Коши (5.2.3). В самом деле, продифференцировав интегральное уравнение (5.2.4) по переменной τ, будем иметь

$$h_\tau(t,\tau) = \varphi'(\tau) - [\mathfrak{A}(\tau)\varphi(\tau) + \mathfrak{B}(\tau,\tau)] + \int\limits_\tau^t [\mathfrak{A}(\xi)h(\xi,\tau) + \mathfrak{B}(\xi,\tau)] d\xi, \ \ (t,\tau) \in \Gamma.$$

Дифференцируя данное равенство по t, получаем, что функция h_τ является решением задачи Коши (5.2.3).

3) Из доказанной ранее непрерывной дифференцируемости функции h и того, что h_τ — решение задачи Коши (5.2.3), следует, что функция $h_{\tau t}$ непрерывна на Γ. Дифференцируя теперь по переменной τ уравнение (5.2.1), получим непрерывность на Γ функции $h_{t\tau}$.

Лемма полностью доказана. ■

5.3. Уравнения второго порядка

Пусть $\mathcal{A}$, $\mathcal{B} \in C([0,T],\mathbb{R}^{m\times m})$, $\mathcal{C} \in C^1(\Gamma,\mathbb{R}^m)$, φ, $\psi \in C^1([0,T],\mathbb{R}^m)$. Рассмотрим задачу Коши

$$y_{tt}(t,\tau) + \mathcal{A}(t)y_t(t,\tau) + \mathcal{B}(t)y(t,\tau) = \mathcal{C}(t,\tau), \ \ (t,\tau) \in \Gamma; \tag{5.3.1}$$
$$y(t,\tau)|_{t=\tau} = \varphi(\tau), \ \ y_t(t,\tau)|_{t=\tau} = \psi(\tau), \ \ t \in [0,T]. \tag{5.3.2}$$

Дадим следующее

Определение 5.3.1. *Функцию $y \in C^1(\Gamma,\mathbb{R}^m)$, имеющую непрерывные на Γ производные y_{tt} , $y_{t\tau}$, $y_{\tau t}$, назовём решением задачи Коши (5.3.1)–(5.3.2), если она при всех $(t,\tau) \in \Gamma$ удовлетворяет уравнению (5.3.1) и при всех $\tau \in [0,T]$ удовлетворяет начальным условиям (5.3.2).*

Покажем, что справедлива

Лемма 5.3.1. *Задача Коши (5.3.1)–(5.3.2) имеет единственное решение y, понимаемое в только что определённом смысле, причём существует непрерывная на Γ производная $y_{\tau tt}$, а функция y_τ является решением задачи Коши*

$$y_{\tau tt}(t,\tau) + \mathcal{A}(t)y_{\tau t}(t,\tau) + \mathcal{B}(t)y_\tau(t,\tau) = \mathcal{C}_\tau(t,\tau), \ \ (t,\tau) \in \Gamma; \tag{5.3.3}$$

$$y_\tau(t,\tau)|_{t=\tau} = \varphi'(\tau) - \psi(\tau), \ \ y_{\tau t}(t,\tau)|_{t=\tau} = \psi'(\tau) + \mathcal{A}(\tau)\psi(\tau) + \mathcal{B}(\tau)\varphi(\tau) + \mathcal{C}(\tau,\tau), \ \ t \in [0,T]. \tag{5.3.4}$$

Доказательство. Сделаем замену $h_1 \equiv y$, $h_2 \equiv y_t$, и введём матрицу–функцию $\mathfrak{A}(t)$, $t \in [0,T]$ размерности $2m \times 2m$, $2m$–мерные вектор–функции $\mathfrak{B}(t,\tau)$, $\tilde{\varphi}(\tau)$, $h(t,\tau)$, $(t,\tau) \in \Gamma$, соотношениями

$$h(t,\tau) = \left[\begin{array}{c} h_1(t,\tau) \\ h_2(t,\tau) \end{array} \right], \ \ \tilde{\varphi}(\tau) = \left[\begin{array}{c} \varphi(\tau) \\ \psi(\tau) \end{array} \right], \ \ \mathfrak{B}(t,\tau) = \left[\begin{array}{l} 0 \\ \mathcal{C}(t,\tau) \end{array} \right], \ \ \mathfrak{A}(t) = \left[\begin{array}{c|c} O_{m\times m} & E_m \\ \hline -\mathcal{B}(t) & -\mathcal{A}(t) \end{array} \right],$$

где $O_{m\times m}$ — нулевая $m \times m$–матрица, E_m — единичная матрица порядка m.

Тогда задача Коши (5.3.1)–(5.3.2) примет вид

$$h_t(t,\tau) = \mathfrak{A}(t)h(t,\tau) + \mathfrak{B}(t,\tau), \ \ (t,\tau) \in \Gamma; \ \ h(t,\tau)|_{t=\tau} = \tilde{\varphi}(\tau), \ \ \tau \in [0,T].$$

Применив к данной задаче Коши лемму 5.2.1, получим утверждения доказываемой леммы. ■

Глава 6. Абстрактная задача Коши и энергетическое расширение

6.1. Энергетическое расширение

Изложение материала настоящего раздела следует [50, Глава IV, §2].

Пусть H — сепарабельное вещественное гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ и соответствующей нормой $\| \cdot \|_H$. Пусть $A : H \to H$ — линейный неограниченный оператор с областью определения $D(A)$, плотной в H. Пусть оператор A симметричен, т.е.

$$\langle Af, \varphi \rangle_H = \langle f, A\varphi \rangle_H \ \ \forall f, \ \varphi \in D(A), \tag{6.1.1}$$

и положительно определён, т.е.

$$\langle Af, f \rangle_H \geqslant \mu \|f\|_H^2 \ \ \forall f \in D(A), \tag{6.1.2}$$

где $\mu > 0$ — константа, не зависящая от выбора $f \in D(A)$.

Опишем процесс энергетического расширения такого оператора.

Обозначим через H^* сопряжённое к H пространство линейных непрерывных функционалов, заданных на H. Согласно теореме Рисса, для любого $f \in H^*$ существует, и притом единственный, элемент $\eta \in H$, такой, что

$$\langle f, \varphi \rangle = \langle \eta, \varphi \rangle_H \ \ \forall \varphi \in H; \ \ \|f\|_{H^*} = \|\eta\|_H.$$

Равенство $R_H f = \eta$ определяет оператор $R_H : H^* \to H$, называемый оператором Рисса. Перечислим некоторые свойства оператора R_H.

1) Справедливо равенство

$$\langle f, \varphi \rangle = \langle R_H f, \varphi \rangle_H \ \ \forall f \in H^*, \ \varphi \in H.$$

2) Оператор R_H — линеен:

$$R_H(\alpha f + \beta g) = \alpha R_H f + \beta R_H g \ \ \forall f, \ g \in H^*, \ \ \forall \alpha, \ \beta \in \mathbb{R}.$$

3) Оператор R_H — ограничен, с нормой $\|R_H\|_{H^* \to H} = 1$, и изометричен, т.е. сохраняет норму:

$$\|R_H f\|_H = \|f\|_{H^*} \ \ \forall f \in H^*.$$

4) Сопряжённое пространство H^* является гильбертовым, причём скалярное произведение в нём задаётся формулой

$$\langle f, g \rangle_{H_*} = \langle R_H f, R_H g \rangle_H \ \ \forall f, \ g \in H^*. \tag{6.1.3}$$

5) Оператор R_H взаимно однозначно отображает H^* на H, норма обратного оператора $R_H^{-1} : H \to H^*$ равна единице, и оператор R_H^{-1} — изометричен, т.е.

$$\|R_H^{-1}\eta\|_{H^*} = \|\eta\|_H, \ \ \langle R_H^{-1}\eta, \varphi \rangle = \langle \eta, \varphi \rangle_H \ \ \forall \eta, \ \varphi \in H.$$

6) Справедливо равенство $R_H^* = R_H^{-1}$.

В самом деле, в силу (6.1.3)

$$\langle f, g \rangle_{H^*} = \langle R_H f, R_H g \rangle_H = \langle R_H^* R_H f, g \rangle_H \ \ \forall f, \ g \in H^*.$$

Поэтому

$$f = R_H^* R_H f \ \ \forall f \in H^*,$$

то есть

$$R_H^* R_H = I,$$

где I — тождественный оператор.

Таким образом, оператор Рисса R_H устанавливает взаимно однозначное изометричное соответствие между пространствами H и H^*. Это соответствие обозначают $H \simeq H^*$. В силу указанного соответствия далее будем отождествлять пространства H и H^* и писать просто $H = H^*$, не различая элементы $R_H f$ и f, $R_H^{-1}\eta$ и η, и опуская в рассуждениях и формулах символы R_H и R_H^{-1}.

Определение 6.1.1. *Пусть V, H — гильбертовы пространства. Говорят, что вложение $V \subset H$ плотно и непрерывно, если*

1) имеет место поэлементное вложение: $\forall\, v \in V : v \in H$;

2) справедливо условие

$$\forall\, f \in H\, \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, v_\varepsilon \in V : \|f - v_\varepsilon\|_H \leqslant \varepsilon$$

(плотность вложения);

3) выполняется неравенство

$$\exists\, C > 0\, \forall\, v \in V : \|v\|_H \leqslant C\|v\|_H \tag{6.1.4}$$

(непрерывность вложения).

Пусть V^* — сопряжённое к V пространство. Если вложение $V \subset H$ непрерывно, то, оказывается, можно говорить о вложении $H \subset V^*$. В самом деле, возьмём произвольный элемент $f \in H$. Тогда $R_H^{-1} f \in H^*$, причём

$$\langle R_H^{-1} f, \varphi\rangle = \langle f, \varphi\rangle_H \;\; \forall\, f,\; \varphi \in H.$$

Так как $V \subset H$, то это равенство выполняется при всех $\varphi \in V$. Отсюда с учётом (6.1.4) имеем

$$|\langle R_H^{-1} f, v\rangle| = |\langle f, v\rangle_H| \leqslant \|f\|_H\|v\|_H \leqslant \|f\|_H C\|v\|_V \;\; \forall\, v \in V. \tag{6.1.5}$$

Это означает, что $R_H^{-1} f$ является линейным непрерывным функционалом на V, т.е. $R_H^{-1} f \in V^*$. Поскольку при отождествлении $H = H^*$ элементы f и $R_H^{-1} f$ мы не различаем, то можно считать, что $f \in V^*$ и

$$\langle f, \varphi\rangle = \langle f, \varphi\rangle_H \;\; \forall\, f,\; \varphi \in H.$$

Таким образом, вложение $H \subset V^*$ действительно имеет смысл, и мы приходим к цепочке вложений

$$V \subset H \simeq H^* \subset V^*. \tag{6.1.6}$$

Теорема 6.1.1. *Если вложение $V \subset H$ плотно и непрерывно, то и вложение $H \subset V^*$ тоже плотно и непрерывно.*

Доказательство. Прежде всего нужно убедиться, что вложение $H \subset V^*$ является поэлементным, т.е. разные элементы f, $g \in H$ при описанном вложении порождают разные функционалы из V^*. В самом деле, если два элемента f, $g \in H$ порождают один и тот же функционал, то $\langle f, v\rangle = \langle g, v\rangle$, или, иначе,

$$\langle R_H^{-1} f, v\rangle_H = \langle R_H^{-1} g, v\rangle_H \;\; \forall\, v \in V.$$

Следовательно,

$$\langle R_H^{-1}(f - g), v\rangle_H \;\; \forall\, v \in V.$$

Отсюда и из плотности вложения $V \subset H$ следует, что $R_H^{-1}(f - g) = 0$, т.е. $f = g$.

Нетрудно убедиться в том, что вложение $H \subset V^*$ непрерывно. Действительно, из определения нормы функционала

$$\|f\|_{V^*} = \sup_{v \in V,\; \|v\|_V \leqslant 1} |\langle f, v\rangle|$$

и соотношений (6.1.5) следует, что

$$\|f\|_{V^*} = \sup_{v \in V,\; \|v\|_V \leqslant 1} |\langle R_H^{-1} f, v\rangle| \leqslant C\|f\|_H \;\; \forall\, f \in H. \tag{6.1.7}$$

Докажем, что вложение $V \subset V^*$ — плотно. Для этого достаточно установить, что $cl(R_H^{-1}(V)) = V^*$, где $cl(R_H^{-1}(V))$ — замыкание множества $R_H^{-1}(V) = \{u \in V^* | \exists\, v \in V : u = R_H^{-1} v\}$ в норме V^*. Предположим противное, т.е. что $cl(R_H^{-1}(V)) \neq V^*$. Так как $R_H^{-1}(V) \subset V^*$, то, по теореме Хана–Банаха, найдётся функционал $f_0 \in V^{**}$, такой, что $f_0 \neq 0$, но $\langle f_0, R_H^{-1} v\rangle = 0$ при всех $v \in V$. Пусть R_V и R_{V^*} — операторы Рисса в пространствах V и V^* соответственно. Тогда отображение $R_{V^*}^{-1} R_V^{-1} : V \to V^{**}$ является изоморфизмом пространств V и V^{**}. Поэтому найдётся элемент $h_0 \in V$, такой, что $f_0 = R_{V^*}^{-1} R_V^{-1} h_0$. С учётом свойств операторов Рисса R_V и R_{V^*}, для всех $v \in V$ имеем

$$0 = \langle f_0, R_H^{-1} v\rangle = \langle R_{V^*}^{-1} R_V^{-1} h_0, R_H^{-1} v\rangle = \langle R_V^{-1} h_0, R_H^{-1} v\rangle_{V^*} =$$
$$= \langle h_0, R_V R_H^{-1} v\rangle_V = \langle h_0, R_V^{-1} R_V R_H^{-1} v\rangle = \langle h_0, R_H^{-1} v\rangle = \langle h_0, v\rangle_H.$$

Таким образом,

$$\langle h_0, v\rangle_H = 0 \ \ \forall\, v \in V.$$

Учитывая плотность вложения $V \subset H$, заключаем, что $h_0 = 0$, а тогда и $f_0 = 0$, что противоречит выбору элемента f_0. Следовательно, $cl(R_H^{-1}(V)) = V^*$, т.е. вложение $V \subset V^*$ — плотно. Из цепочки вложений (6.1.6) тогда следует и плотность вложения

$$H \simeq H^* = R_H^{-1}(H) \subset V^*.$$

Теорема доказана. ■

Заодно выяснилось, что V^* является пополнением пространств $R_H^{-1}(V)$ и $R_H^{-1}(H)$ в норме $\|f\|_{V^*} = \|R_H f\|_H$.

Рассмотрим цепочку вложений (6.1.6) для случая, когда пространство V представляет собой так называемое энергетическое пополнение области определения $D(A)$ линейного неограниченного оператора A, обладающего свойствами (6.1.1), (6.1.2) и опишем расширение оператора A на пространство V. Заметим, что линейное многообразие $D(A)$ превращается евклидово пространство, если в нём ввести скалярное произведение по формуле

$$\langle u, v\rangle_A = \langle Au, v\rangle_H \ \ \forall\, u,\ v \in D(A). \tag{6.1.8}$$

Соответствующую норму будем обозначать $\|\cdot\|_A$. Справедливость аксиом скалярного произведения и нормы следует из линейности оператора A и его свойств (6.1.1), (6.1.2). Пространство $D(A)$ пополним в норме $\|\cdot\|_A$, и получившееся в результате пополнения гильбертово пространство обозначим через H_A. Как известно, пространство H_A состоит из идеальных элементов, представляющих собой классы $\mathcal{U}$ эквивалентных фундаментальных в норме $\|\cdot\|_A$ последовательностей. Напомним, что последовательность $u_k \in D(A)$, $k = 1, 2, \dots$, называется фундаментальной в норме $\|\cdot\|_A$, если $\|u_k - u_m\|_A \to 0$, k, $m \to \infty$; а две фундаментальные $u_k \in D(A)$, $k = 1, 2, \dots$, и $v_k \in D(A)$, $k = 1, 2, \dots$, называются эквивалентными, если $\|u_k - v_k\|_A \to 0$, $k \to \infty$. Операции сложения и умножения на число определяются так. Пусть $\mathcal{U}$, $\mathcal{V} \in H_A$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Выберем произвольные фундаментальные последовательности $\{u_k\} \in \mathcal{U}$, $\{v_k\} \in \mathcal{V}$, и в качестве $\mathcal{U} + \mathcal{V}$ и $\alpha\mathcal{U}$ примем классы последовательностей, эквивалентных последовательностям $\{u_k + v_k\}$ и $\{\alpha u_k\}$ соответственно. Скалярное произведение и норму в H_A вводится так:

$$\langle \mathcal{U}, \mathcal{V}\rangle_A = \lim_{k\to\infty} \langle u_k, v_k\rangle_A, \ \ \|\mathcal{U}\|_A = \sqrt{\langle \mathcal{U}, \mathcal{U}\rangle_A}.$$

Исходное подпространство $D(A)$ является подпространством в H_A в следующем смысле. Каждый элемент $u \in D(A)$ порождает класс $\mathcal{U}$ фундаментальных последовательностей, эквивалентных стационарной последовательности $u_k = u$, $k = 1, 2, \dots.$ Ясно, что такой класс $\mathcal{U}$ состоит из последовательностей $\{u_k\}$, сходящихся к элементу u в норме $\|\cdot\|_A$. Пусть $\tilde{D}(A)$ — множество классов фундаментальных последовательностей, эквивалентных какой–либо стационарной последовательности элементов множества $D(A)$. Если классы $\mathcal{U}$, $\mathcal{V} \in \tilde{D}(A)$ порождены стационарными последовательностями, соответствующими элементам u, $v \in D(A)$, то

$$\langle \mathcal{U}, \mathcal{V}\rangle_A = \langle u, v\rangle_A = \langle Au, v\rangle_H.$$

Ясно, что $\tilde{D}(A)$ представляет собой подпространство в H_A, изоморфное $D(A)$ и плотное в H_A. Пространство H_A описано.

Следует заметить, что с классами фундаментальных последовательностей работать неудобно. Поэтому дадим другое, более удобное, описание пространства H_A.

Покажем, что каждому классу $\mathcal{U} \in H_A$ можно следующим образом поставить в соответствие элемент $u \in H$. Возьмём произвольную фундаментальную последовательность $\{u_k\} \in \mathcal{U}$. Из неравенства (6.1.2) следует, что

$$\|u_k - u_m\|_H^2 \leqslant \frac{1}{\mu}\|u_k - u_m\|_A^2 \to 0, \ \ k,\ m \to \infty.$$

Это значит, что последовательность $\{u_k\}$ фундаментальна в H, и, в силу полноты H, сходится к некоторому элементу $u \in H$:

$$\lim_{k\to\infty} \|u_k - u\|_H = 0.$$

Нетрудно видеть, что элемент u не зависит от выбора последовательности $\{u_k\} \in \mathcal{U}$. Искомый элемент $u \in H$, соответствующий классу $\mathcal{U}$, построен. Это соответствие кратко будем обозначать так: $\mathcal{U} \Rightarrow u$. Построенное соответствие, очевидно, линейно: если $\mathcal{U} \Rightarrow u$, $\mathcal{V} \Rightarrow v$, α, $\beta \in \mathbb{R}$, то $\mathcal{W} = \alpha\mathcal{U} + \beta\mathcal{V} \Rightarrow \alpha u + \beta v$. Важно убедиться, что разным классам $\mathcal{U}$, $\mathcal{V} \in H_A$ соответствуют разные элементы u, $v \in H$. Допустим, что $u = v$. Тогда, в силу линейности построенного соответствия, классу $\mathcal{W} = \mathcal{U} - \mathcal{V}$ соответствует элемент $w = u - v = 0 \in H$. Покажем, что это возможно только в том случае, когда $\mathcal{W} = 0$, т.е. $\mathcal{W}$ — класс фундаментальных последовательностей, эквивалентных стационарной нулевой последовательности $u_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots$. Возьмём произвольный элемент $\mathcal{Z} \in \tilde{D}(A)$. По определению множества $\tilde{D}(A)$, существует элемент $z \in D(A)$, такой, что стационарная последовательность $z_k = z$, $k = 1, 2, \ldots$, принадлежит классу $\mathcal{Z}$. Пусть $\{w_k\} \in \mathcal{W}$. Так как $\mathcal{W} \Rightarrow w = 0$, то $w_k \to 0$, $k \to \infty$, в норме $\|\cdot\|_H$. Тогда с учётом равенства (6.1.1) имеем

$$\langle \mathcal{W}, \mathcal{Z} \rangle_A = \lim_{k\to\infty} \langle w_k, z_k \rangle_A = \lim_{k\to\infty} \langle A w_k, z \rangle_H = \lim_{k\to\infty} \langle w_k, Az \rangle_H = \langle 0, Az \rangle_H = 0.$$

Таким образом,

$$\langle \mathcal{W}, \mathcal{Z} \rangle_A = 0 \ \ \forall\, \mathcal{Z} \in \tilde{D}(A).$$

Так как $\tilde{D}(A)$ плотно в H_A, то последнее равенство возможно только при $\mathcal{W} = 0$, т.е. при $\mathcal{U} = \mathcal{V}$. Тем самым доказано, что если $\mathcal{U} \neq \mathcal{V}$, $\mathcal{U} \Rightarrow u$, $\mathcal{V} \Rightarrow v$, то $u \neq v$.

Через V_A обозначим множество, состоящее из тех элементов $u \in H$, которые соответствуют какому–либо классу $\mathcal{U} \in H_A$. Линейность построенного соответствия $\mathcal{U} \Rightarrow u$ гарантирует, что V_A — линейное подпространство пространства H, с операциями, совпадающими с операциями исходного пространства H, причём V_A изоморфно H_A. Введём в V_A скалярное произведение по правилу

$$\langle u, v \rangle_{V_A} = \langle \mathcal{U}, \mathcal{V} \rangle_A, \ \text{где}\ \mathcal{U}, \mathcal{V} \in H_A, \mathcal{U} \Rightarrow u, \mathcal{V} \Rightarrow v.$$

В результате линейное пространство V_A превращается в евклидово пространство, изометричное гильбертову пространству H_A. Значит, V_A также является полным пространством.

Гильбертово пространство V_A принято называть энергетическим пространством, соответствующим симметричному положительному оператору $A : H \to H$. Так как $\tilde{D}(A) \Rightarrow D(A)$ и $\tilde{D}(A)$ плотно в H_A, то $D(A)$ — подпространство в V_A, плотное в V_A. В дальнейшем построенные изометричные гильбертовы пространства H_A и V_A будем отождествлять и использовать в качестве основного обозначение V_A.

Энергетическое пространство V_A по самому построению поэлементно вкладывается в пространство H. Это вложение плотно, так как $D(A) \subset V_A \subset H$ и $D(A)$ плотно в H ввиду определения оператора A. Кроме того, это вложение непрерывно, что вытекает из неравенства

$$\|u\|_H \leqslant \frac{1}{\sqrt{\mu}} \|u\|_A \ \ \forall\, u \in V_A. \tag{6.1.9}$$

Справедливость этого неравенства для $u \in D(A)$ непосредственно следует из (6.1.2), (6.1.8). Если же $u \in V_A$, $u \notin D(A)$, то из построения пространства V_A и плотности $D(A)$ в V_A следует существование последовательности $u_k \in D(A)$, $k = 1, 2, \ldots$, такой, что

$$\lim_{k\to\infty} \|u_k - u\|_H = 0, \ \ \lim_{k\to\infty} \|u_k - u\|_A = 0.$$

Отсюда, зная, что (6.1.9) верно для $u = u_k \in D(A)$, $k = 1, 2, \ldots$, и переходя к пределу при $k \to \infty$, с учётом непрерывности норм в H и V_A получим (6.1.9) для всех $u \in V_A$.

Итак, вложение $V_A \subset H$ двух гильбертовых пространств является поэлементным, плотным, и непрерывным. Тогда спрведлива цепочка вложений (6.1.6):

$$V = V_A \subset H^* \simeq H \subset V_A^* = V^*, \tag{6.1.10}$$

в которой, согласно теореме 6.1.1, вложение $H^* \subset V_A^*$ — также поэлементное, плотное, и непрерывное. Неравенство (6.1.7) здесь имеет вид

$$\|u\|_{V_A^*} \leqslant \frac{1}{\sqrt{\mu}} \|u\|_H \ \ \forall\, u \in H. \tag{6.1.11}$$

Пользуясь (6.1.9)–(6.1.11), доопределим оператор A на всё пространство V_A. Напомним, что оператор A пока что определён на линейном многообразии $D(A)$, плотном в V_A, его значения Af принадлежат H при всех $f \in D(A)$, и, кроме того, он обладает свойствами (6.1.1), (6.1.2).

Пользуясь приведённой выше трактовкой включения (6.1.10), будем считать, что

$$Af \in H \simeq H^* \subset V_A^*,$$

т.е. Af — линейный непрерывный функционал над V_A, определённый так (напоминаем, что элементы $R_H^{-1}(Af)$ и Af отождествляются):

$$\langle Af, \varphi\rangle = \langle Af, \varphi\rangle_H = \langle f, \varphi\rangle_A \ \ \forall\, \varphi \in V_A \subset H \ \ \forall\, f \in D(A) \subset V_A, \tag{6.1.12}$$

и, следовательно, оператор A действует из V_A в V_A^*. Этот оператор является ограниченным. В самом деле, из (6.1.12) имеем

$$|\langle Af, \varphi\rangle| = |\langle f, \varphi\rangle_A| \langle \|f\|_A \|\varphi\|_A \ \ \forall\, \varphi \in V_A \ \ \forall\, f \in D(A).$$

Это означает, что

$$\|Af\|_{V_A^*} = \sup_{\varphi \in V_A,\ \|\varphi\|_A \leqslant 1} \langle Af, \varphi\rangle \leqslant \|f\|_A \ \ \forall\, f \in D(A), \tag{6.1.13}$$

т.е. $\|A\| \leqslant 1$. Таким образом, $A \in \mathcal{L}(V_A, V_A^*)$, область определения $D(A)$ — плотна в H. Тогда существует оператор $\tilde{A}$ с областью определения $D(\tilde{A}) = V_A$, областью значений $R(\tilde{A}) \subset V_A^*$, являющийся продолжением оператора A. Оператор $\tilde{A}$ строится так. Если $f \in D(A)$, то полагаем $\tilde{A}f = Af$. Если $f \in V_A$, но $f \notin D(A)$, то, в силу построения пространства V_A, существует последовательность $f_k \in D(A)$, $k = 1, 2, \ldots$, такая, что

$$\lim_{k\to\infty} \|f_k - f\|_H = 0, \ \ \lim_{k\to\infty} \|f_k - f\|_A = 0.$$

Тогда

$$\|Af_k - Af_m\|_{V_A^*} = \|A(f_k - f_m)\|_{V_A^*} \leqslant \|A\| \|f_k - f_m\|_A \to 0$$

при k, $m \to \infty$. Это значит, что последовательность Af_k, $k = 1, 2, \ldots$, — фундаментальна в V_A^*. Поэтому, в силу полноты пространства V_A^*, найдётся элемент $y \in V_A^*$, такой, что $\lim\limits_{k\to\infty} \|Af_k - y\|_{V_A^*} = 0$. Нетрудно видеть, что элемент y зависит лишь от f, а не от последовательности f_k, $k = 1, 2, \ldots$, аппроксимирующей f. Положим по определению $\tilde{A}f = y$. Построенный оператор $\tilde{A}$ определён на всём пространстве V_A и является линейным. Кроме того, из неравенства (6.1.13), справедливого при $f = f_k \in D(A)$, $k = 1, 2, \ldots$, предельным переходом по $k \to \infty$ получим

$$\|\tilde{A}f\|_{V_A^*} \leqslant \|f\|_A \ \ \forall\, f \in V_A.$$

Следовательно, $\tilde{A} \in \mathcal{L}(V_A, V_A^*)$, причём $\|\tilde{A}\| \leqslant 1$. Устремляя в равенстве (6.1.12), записанном для $f = f_k$, k к бесконечности, получаем, что

$$\langle \tilde{A}f, \varphi\rangle = \langle f, \varphi\rangle_A \ \ \forall\, f, \ \varphi \in V_A. \tag{6.1.14}$$

В (6.1.14) переменные f и φ равноправны. Поэтому

$$\langle \tilde{A}f, \varphi\rangle = \langle \varphi, f\rangle_A.$$

Отсюда и из равенства $\langle f, \varphi\rangle_A = \langle \varphi, f\rangle_A$ следует, что

$$\langle \tilde{A}f, \varphi\rangle = \langle f, \tilde{A}\varphi\rangle \ \ \forall\, f, \ \varphi \in V_A,$$

т.е. $\tilde{A}$ — симметричный оператор (здесь и далее символы $\langle \tilde{A}f, \varphi\rangle$ и $\langle \varphi, \tilde{A}f\rangle$, обозначающие значение функционала $\tilde{A}f \in V_A^*$ на элементе φ, считаются равноправными). Далее, из (6.1.9) и (6.1.14) вытекает положительная определённость оператора $\tilde{A}$:

$$\mu \|f\|_H^2 \leqslant \|f\|_A^2 = \langle f, f\rangle_A = \langle \tilde{A}f, f\rangle \ \ \forall\, f \in V_A.$$

Полученный оператор $\tilde{A}$ часто называют энергетическим расширением оператора A.

Заметим, что равенство (6.1.14) можно интерпретировать как явное определение расширенного оператора $\tilde{A}$, так как оно задаёт правило действия значения $\tilde{A}f$ оператора $\tilde{A}$ на произвольный элемент $\varphi \in V_A$ при каждом $f \in V_A$. Более того, из (6.1.14) вытекает тесная связь между оператором $\tilde{A}$ и оператором Рисса $R_{V_A} : V^* \to V$ пространства V^*:

$$\tilde{A} = R_{V_A}^{-1}. \tag{6.1.15}$$

В самом деле, для оператора R_{V_A} имеем (свойство 5)):

$$\langle R_{V_A}^{-1} f, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle_A \ \ \forall f,\ \varphi \in V_A.$$

Отсюда и из (6.1.14) получаем

$$\langle \tilde{A} f, \varphi \rangle = \langle R_{V_A}^{-1} f, \varphi \rangle \ \ \forall f,\ \varphi \in V_A,$$

что равносильно (6.1.15). Из (6.1.15) и свойств оператора Рисса следует, что область значений $R(\tilde{A})$ оператора $\tilde{A}$ совпадает с V_A^*, оператор $\tilde{A}$ взаимно однозначно отображает V_A на V_A^*, обратный оператор $\tilde{A}^{-1} = R_{V_A} \in \mathcal{L}(V_A^*, V_A)$, $\|\tilde{A}\| = \|\tilde{A}^{-1}\| = 1$, а скалярное произведение в V_A^* с учётом формул (6.1.3), (6.1.15) можно записать в виде

$$\langle f, g \rangle_{V_A^*} = \langle R_{V_A} f, R_{V_A} g \rangle_{V_A} = \langle \tilde{A}^{-1} f, \tilde{A}^{-1} g \rangle_{V_A} \ \ \forall f,\ g \in V_A.$$

Исследуем теперь существование счётной системы собственных элементов оператора $\tilde{A}$. Для удобства изложения оператор $\tilde{A}$ переобозначим через A; а область его определения, V_A, будем обозначать просто через V. Иначе говоря, будем предполагать, что описанные выше процедуры расширения уже проведены, и сам оператор A является энергетическим расширением некоторого линейного, неограниченного, симметричного, положительно определённого оператора с областью определения, плотной в вещественном сепарабельном гильбертовом пространстве H. Таким образом $A \in \mathcal{L}(V, V^*)$, где V — энергетическое гильбертово пространство, V^* — сопряжённое к V пространство, $D(A) = V$ — область определения оператора A, $R(A) = V^*$ — область значений оператора A. Оператор A симметричен:

$$\langle Au, v \rangle = \langle u, Av \rangle \ \ \forall u,\ v \in V, \tag{6.1.16}$$

положительно определён:

$$\exists\, \mu > 0\ \forall\, u \in V : \langle Au, u \rangle \geqslant \mu \|u\|_H^2, \tag{6.1.17}$$

и осуществляет взаимно однозначное отображение пространства V на пространство V^*; обратный оператор A^{-1} принадлежит $\mathcal{L}(V^*, V)$, $\|A\| = \|A^{-1}\| = 1$. Скалярное произведение и норма в V равны соответственно $\langle u, v \rangle_V = \langle Au, v \rangle$ и $\|u\|_V = \langle Au, u \rangle^{1/2}$, а скалярное произведение и норма в V^* определяются как

$$\langle f, g \rangle_{V^*} = \langle A^{-1} f, A^{-1} g \rangle_V = \langle f, A^{-1} g \rangle \ \ \forall f,\ g \in V.$$

Имеют место вложения

$$V \subset H \simeq H^* \subset V^*, \tag{6.1.18}$$

причём эти вложения являются плотными и непрерывными, т.е.

$$\|f\|_H \leqslant C \|f\|_V \ \ \forall f \in V$$

и

$$\|f\|_{V^*} \leqslant C \|f\|_H \ \ \forall f \in H,$$

где $C = \mu^{-1/2}$. Напоминаем также, что в (6.1.16), (6.1.17), и далее запись $\langle f, v \rangle$ означает результат применения функционала $f \in V^*$ к элементу $v \in V$; то же означает запись $\langle v, f \rangle$. Если о функционале $f \in V^*$ дополнительно известно, что $f \in H$ или $f \in V$, то, как следует из определения вложения (6.1.18), $\langle f, v \rangle = \langle f, v \rangle_H$ для любых $f \in H$ и, тем более, для любых $f \in V$.

От оператора A дополнительно будем требовать, чтобы порождаемое им энергетическое пространство V вкладывалось в пространство H компактно.

Определение 6.1.2. *Собственным элементом оператора A, соответствующим собственному числу λ, называется элемент $e \in V$, $e \neq 0$, такой, что*

$$Ae = \lambda e. \tag{6.1.19}$$

Поскольку $Ae \in V^*$ и (в силу (6.1.18)) $V \subset V^*$, то равенство (6.1.19) понимается как равенство двух линейных функционалов над V, т.е. как

$$\langle Ae, \varphi\rangle = \lambda\langle e, \varphi\rangle \ \ \forall\, \varphi \in V.$$

Теорема 6.1.2. *Пусть $A \in \mathcal{L}(V, V^*)$ — энергетическое расширение линейного, неограниченного, симметричного, положительно определённого оператора с областью определения, плотной в H, и пусть вложение $V \subset H$ компактно. Тогда оператор A обладает счётной системой собственных чисел λ_k,*

$$0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \dots \leqslant \lambda_k \leqslant \dots, \ \ \lim_{k\to\infty} \lambda_k = +\infty,$$

а соответствующая система $e_k \in V$, $k = 1, 2, \dots$, собственных элементов образует ортонормированный базис в H. При этом система $\frac{e_k}{\sqrt{\lambda_k}}$, $k = 1, 2, \dots$, является ортонормированным базисом в V, а система $e_k\sqrt{\lambda_k}$, $k = 1, 2, \dots$, — ортонормированным базисом в V^*. Для элементов и их норм в пространствах H, V, V^* имеют место представления

$$v = \sum_{j=1}^{\infty} v_j e_j, \ \ v_j = \langle v,\, e_j\rangle_H, \ \ j = 1, 2, \dots, \ \ \|v\|_V^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \omega_j^2 |v_j|^2, \ \ \forall\, v \in V; \tag{6.1.20}$$

$$h = \sum_{j=1}^{\infty} h_j e_j, \ \ h_j = \langle h,\, e_j\rangle_H, \ \ j = 1, 2, \dots, \ \ \|h\|_H^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |h_j|^2, \ \ \forall\, h \in H; \tag{6.1.21}$$

$$v^* = \sum_{j=1}^{\infty} v_j^* e_j, \ \ v_j^* = \langle v^*,\, e_j\rangle, \ \ j = 1, 2, \dots, \ \ \|v^*\|_{V^*}^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|v_j^*|^2}{\omega_j^2}, \ \ \forall\, v^* \in V^*; \tag{6.1.22}$$

где

$$\omega_j \equiv \sqrt{\lambda_j}, \ \ j = 1, 2, \dots$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную задачу минимизации

$$J(u) \equiv \langle Au, u\rangle = \|u\|_V^2 \to \inf, \ \ u \in U_1 \equiv \{u \in V : \|u\|_H = 1\}. \tag{6.1.23}$$

Из (6.1.17) следует, что

$$\lambda_1 = \inf_{u\in U_1} J(u) \geqslant \mu > 0.$$

Пусть u_n, $n = 1, 2, \dots,$ — произвольная минимизирующая последовательность задачи (6.1.23), т.е.

$$u_n \in V, \ \ \|u_n\|_H = 1, \ \ n = 1, 2, \dots; \ \ \lim_{n\to\infty} J(u_n) = \lim_{n\to\infty} \|u_n\|_V^2 = \lambda_1.$$

Поскольку числовая последовательность $\|u_n\|_V^2$, $n = 1, 2, \dots$, сходится, то она ограничена. Это означает, что последовательность u_n, $n = 1, 2, \dots$, ограничена в норме пространства V. В силу компактности вложения $V \subset H$ из последовательности u_n, $n = 1, 2, \dots$, можно выделить сходящуюся в норме пространства H к некоторому элементу $e_1 \in H$ подпоследовательность. Без ограничения общности можем считать, что сама последовательность u_n, $n = 1, 2, \dots$, сходится к e_1 сильно в H. Из того, что $\|u_n\|_H = 1$, $n = 1, 2, \dots$, следует, что $\|e_1\|_H = 1$.

Покажем, что $e_1 \in V$ и $\|u_n - e_1\|_V \to 0$ при $n \to \infty$. Для этого сначала установим, что последовательность u_n, $n = 1, 2, \dots$, фундаментальна в V. С этой целью возьмём произвольный элемент $v \in V$ и положим

$$w_n = (u_n + tv)\|u_n + tv\|_H^{-1}, \ \ n = 1, 2, \dots, \ \ t \in \mathbb{R}.$$

Так как $w_n \in U_1$, то $J(w_n) \geqslant \lambda_1$, что равносильно неравенству

$$\|u_n + tv\|_V^2 \geqslant \lambda_1 \|u_n + tv\|_H^2 \ \ \forall\, t \in \mathbb{R},$$

или, что то же, неравенству

$$t^2[\|v\|_V^2 - \lambda_1\|v\|^2 H] + 2t[\langle u_n, v\rangle_V - \lambda_1\langle u_n, v\rangle_H] + J(u_n) - \lambda_1 \geqslant 0 \ \ \forall\, t \in \mathbb{R} \ \ \forall\, v \in V. \tag{6.1.24}$$

Поделив данное неравенство на t^2 и перейдя затем к пределу при $t \to \infty$, получим, что

$$\|v\|_V^2 - \lambda_1\|v\|^2 H \geqslant 0 \ \ \forall\, v \in V. \tag{6.1.25}$$

Если коэффициент при t^2 в (6.1.24) отличен от нуля, то для выполнения неравенства (6.1.24) при всех $t \in \mathbb{R}$ необходимо, чтобы

$$(\langle u_n, v\rangle_V - \lambda_1 \langle u_n, v\rangle_H)^2 - (\|v\|_V^2 - \lambda_1 \|v\|^2 H)(J(u_n) - \lambda_1) \leqslant 0 \ \ \forall\, v \in V. \tag{6.1.26}$$

Если коэффициент при t^2 в (6.1.24) равен нулю, то (6.1.24) имеет место лишь тогда, когда коэффициент при t также равен нулю, что снова приводит к (6.1.26). Таким образом, неравенство (6.1.26) верно во всех случаях, и выполняется при всех $v \in V$.

Возьмём в (6.1.25), (6.1.26) $v = u_n - u_m \in V$. Учитывая, что $J(u_n) \geqslant \lambda_1 > 0$, получим

$$|\langle u_n, u_n - u_m\rangle_V - \lambda_1 \langle u_n, u_n - u_m\rangle_H| \leqslant (\|u_n - u_m\|_V^2 - \lambda_1 \|u_n - u_m\|^2 H)^{1/2}(J(u_n) - \lambda_1)^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant \|u_n - u_m\|_V (J(u_n) - \lambda_1)^{1/2} \leqslant C_0 (J(u_n) - \lambda_1)^{1/2}, \ \ m,\, n = 1, 2, \ldots,$$

где C_0 — некоторая константа. Поменяв ролями n и m, выводим, что

$$|\langle u_m, u_m - u_n\rangle_V - \lambda_1 \langle u_m, u_m - u_n\rangle_H| \leqslant C_0 (J(u_m) - \lambda_1)^{1/2}.$$

Поэтому

$$0 \leqslant \|u_n - u_m\|_V^2 - \lambda_1 \|u_n - u_m\|^2 H = (\langle u_n, u_n - u_m\rangle_V - \lambda_1 \langle u_n, u_n - u_m\rangle_H) -$$
$$-(\langle u_m, u_m - u_n\rangle_V - \lambda_1 \langle u_m, u_m - u_n\rangle_H) \leqslant C_0 [(J(u_n) - \lambda_1)^{1/2} + (J(u_m) - \lambda_1)^{1/2}],$$

или, иначе,

$$\|u_n - u_m\|_V^2 \leqslant \lambda_1 \|u_n - u_m\|^2 H + C_0 [(J(u_n) - \lambda_1)^{1/2} + (J(u_m) - \lambda_1)^{1/2}], \ \ m,\, n = 1, 2, \ldots$$

Правая часть этого неравенства при n, $m \to \infty$ стремится к нулю, ибо последовательность u_n, $n = 1, 2, \ldots$, фундаментальна в H и минимизирует функционал J на U_1. Как следствие, последовательность u_n, $n = 1, 2, \ldots$, — фундаментальна в V, и потому сильно в V сходится к некоторому элементу $\tilde{e}_1 \in V$. В силу (6.1.17), из сходимости в V следует сходимость в H, что означает совпадение элементов e_1 $\tilde{e}_1$. Таким образом, $u_n \to e_1$, $n \to \infty$, в норме пространства V, в силу чего

$$J(u_n) = \|u_n\|_V^2 \to \|e_1\|_V^2 = J(e_1) = \lambda_1, \ \ n \to \infty; \ \ e_1 \in U_1, \ \ J(e_1) = \lambda_1 = \|e_1\|_V^2;$$

т.е. e_1 — решение задачи (6.1.23). Покажем, что e_1 — собственный вектор оператора A, соответствующий собственному числу λ_1. С этой целью совершим в (6.1.24) предельный переход при $n \to \infty$. С учётом равенства $\|e_1\|_V^2 = \lambda_1$ получим неравенство

$$t^2[\|v\|_V^2 - \lambda_1 \|v\|^2 H] + 2t[\langle e_1, v\rangle_V - \lambda_1 \langle e_1, v\rangle_H] \geqslant 0 \ \ \forall\, t \in \mathbb{R} \ \ \forall\, v \in V,$$

выполнение которого при всех $t \in \mathbb{R}$ возможно только тогда, когда коэффициент при t равен нулю:

$$\lambda_1 \langle e_1, v\rangle_H = \langle e_1, v\rangle_V = \langle Ae_1, v\rangle \ \ \forall\, v \in V. \tag{6.1.27}$$

Это означает, что λ_1 — собственное число оператора A, а e_1 — соответствующий этому числу собственный элемент.

Для доказательства существования следующего собственного числа $\lambda_2 \geqslant \lambda_1 \geqslant \mu > 0$ и соответствующего ему собственного элемента e_2 в V, возьмём подпространство

$$V^1 = \{v \in V : \langle e_1, v\rangle_V = 0\}$$

и рассмотрим в V^1 вспомогательную задачу минимизации, аналогичную задаче (6.1.23):

$$J(u) \equiv \langle Au, u\rangle = \|u\|_V^2 \to \inf, \ \ u \in U_2 \equiv \{u \in V^1 : \|u\|_H = 1\}. \tag{6.1.28}$$

Полезно заметить, что $V^1 = V \cap H^1$, где $H^1 = \{v \in H : \langle e_1, v\rangle_H = 0\}$. В самом деле, если $v \in V$, то как видно из (6.1.27), равенство $\langle e_1, v\rangle_V = 0$ имеет место тогда и только тогда, когда $\langle e_1, v\rangle_H = 0$.

Так как $U_2 \subset U_1$, то $\lambda_2 = \inf\limits_{u \in U_2} J(u) \geqslant \lambda_1 \geqslant \mu > 0$. Рассуждая затем так же, как при исследовании задачи (6.1.23), с заменой V на V^1, λ_1 на λ_2, устанавливем, что существует элемент $e_2 \in U_2$, такой, что $J(e_2) = \lambda_2$; и что λ_2 — собственное число оператора A, а e_2 — соответствующий собственный элемент, причём

$$\langle e_1, e_2\rangle_V = 0, \ \ \langle e_1, e_2\rangle_H = 0, \ \ \|e_2\|_H = 1, \ \ \|e_2\|_V^2 = \lambda_2.$$

Далее сделаем индуктивное предположение: пусть уже построены собственные элементы $e_1,\dots,e_k$, соответствующие собственным числам

$$\mu \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \dots \leqslant \lambda_{k-1} \leqslant \lambda_k,$$

такие, что

$$e_i \in V,\ \ \langle e_i, e_j\rangle_H = 0,\ \ \langle e_i, e_j\rangle_V = 0,\ \ i \neq j,\ \ \|e_i\|_H = 1,\ \ \|e_i\|_V^2 = \lambda_i,\ \ i,\, j = \overline{1,k}.$$

Тогда вводим в V подпространство

$$V^k = \{v \in V : \langle e_1, v\rangle_V = 0,\ \ \langle e_k, v\rangle_V = 0\}$$

и рассматриваем задачу минимизации

$$J(u) \equiv \langle Au, u\rangle = \|u\|_V^2 \to \inf,\ \ u \in U_{k+1} \equiv \{u \in V^k : \|u\|_H = 1\}. \tag{6.1.29}$$

Аналогично (6.1.23), (6.1.28) доказываем существование элемента

$$e_{k+1} \in U_{k+1},\ \ J(e_{k+1}) = \lambda_{k+1} = \inf_{u \in U_{k+1}} J(u) \geqslant \lambda_k,$$

где λ_k — собственное число оператора A, а e_{k+1} — соответствующий собственный элемент, причём

$$\langle e_i, e_{k+1}\rangle_V = 0,\ \ \langle e_i, e_{k+1}\rangle_H = 0,\ \ \|e_{k+1}\|_H = 1,\ \ \|e_{k+1}\|_V^2 = \lambda_{k+1}\ \ \forall\, i = \overline{1,k}.$$

В бесконечномерном пространстве V этот процесс построения собственных чисел может быть продолжен неограниченно, и в результате мы получим последовтельность собственных чисел оператора A,

$$0 < \mu \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \dots \lambda_k \leqslant \dots,$$

и последовательность соответствующих им собственных элементов $e_1, \dots, e_k, \dots$, причём

$$e_k \in V,\ \ \|e_k\|_H = 1,\ \ \|e_k\|_V^2 = \lambda_k,\ \ \langle e_k, e_j\rangle_V = 0,\ \ \langle e_k, e_j\rangle_H = 0,\ \ k \neq j,\ \ k,\, j = 1, 2, \dots,$$

т.е. система e_k, $k = 1, 2, \dots$, является ортонормированной системой в H, а система $\frac{e_k}{\sqrt{\lambda_k}}$, $k = 1, 2, \dots$, — ортонормированной системой в V.

Убедимся в том, что система $e_k\sqrt{\lambda_k}$, $k = 1, 2, \dots$, является ортонормированной системой в V^*. В самом деле, поскольку

$$\langle f, g\rangle_{V^*} = \langle A^{-1}f, A^{-1}g\rangle_V\ \ \forall\, f,\, g \in V^*,\ \ A^{-1}e_k = \frac{1}{\lambda_k}e_k,$$

то при $i \neq k$

$$\langle e_i, e_k\rangle_{V^*} = \langle A^{-1}e_i, A^{-1}e_k\rangle_V = \frac{1}{\lambda_i\lambda_k}\langle e_i, e_k\rangle_V = 0,$$

а при $i = k$ отсюда же имеем

$$\|e_k\|_{V^*}^2 = \frac{1}{\lambda_k^2}\|e_k\|_V^2 = \frac{\lambda_k}{\lambda_k^2} = \frac{1}{\lambda_k},\ \ k = 1, 2, \dots$$

Докажем, что на самом деле система e_k, $k = 1, 2, \dots$, образует ортонормированный базис в пространстве H, система $\frac{e_k}{\sqrt{\lambda_k}}$, $k = 1, 2, \dots$, — ортонормированный базис в пространстве V, а система $e_k\sqrt{\lambda_k}$, $k = 1, 2, \dots$, — ортонормированный базис в V^*. Для этого сначала покажем, что $\lambda_k \to \infty$, $k \to \infty$. В самом деле, если бы неубывающая последовательность λ_k, $k = 1, 2, \dots$, имела бы конечный предел λ, то из равенств $\|e_k\|_V^2 = \lambda_k$, $k = 1, 2, \dots$, следовало бы, что $\|e_k\|_V^2 \to \lambda < \infty$, $k \to \infty$, т.е. последовательность e_k, $k = 1, 2, \dots$, была бы ограниченной в норме пространства V. По условию теоремы, вложение $V \subset H$ — компактно, и поэтому из последовательности e_k, $k = 1, 2, \dots$, можно было бы выделить подпоследовательность e_{k_m}, $m = 1, 2, \dots$, сильно сходящуюся в норме пространства H. Однако последовательность e_k, $k = 1, 2, \dots$, — ортонормированная система в H, и потому $\|e_{k_m} - e_{k_n}\|_H^2 = \|e_{k_m}\|_H^2 - 2\langle e_{k_m}, e_{k_n}\rangle_H + \|e_{k_n}\|_H^2 = 2$ для всех m, $n = 1, 2, \dots$, т.е. последовательность e_{k_m}, $m = 1, 2, \dots$, фундаментальной в норме пространства H быть не может. Полученное противоречие означает, что на самом деле $\lambda_k \to \infty$, $k \to \infty$. Далее докажем, что система e_k, $k = 1, 2, \dots$, полна в V, т.е. если для некоторого $v \in V$ выполнено равенство $\langle e_k, v\rangle_V = 0$,

$k = 1, 2, \dots$, то $v = 0$. Предположим противное: пусть существует элемент $e \in V$, $e \neq 0$, такой, что $\langle e_k, e\rangle_V = 0$, $k = 1, 2, \dots$ Тогда

$$e \in V^\infty = \{v \in V : \langle e_k, v\rangle_V = 0, \;\; k = 1, 2, \dots\}.$$

где V^∞ — подпространство в V. По аналогии с (6.1.23), (6.1.28), (6.1.29) рассмотрим задачу минимизации

$$J(u) = \|u\|_V^2 \to \inf, \;\; u \in U_\infty = \{u' \in V^\infty : \|u'\|_H = 1\}.$$

Рассуждая так же, как и выше, показываем, что существует собственный элемент $e_\infty \in U_\infty$ оператора A, отвечающий собственному числу

$$\lambda_\infty = J(u_\infty) = \|u_\infty\|_V^2 = \inf_{u \in U_\infty} J(u).$$

Так как $U_\infty \subset U_k$ при всех $k = 1, 2, \dots$, то $\lambda_k \leqslant \lambda_\infty < \infty$, $k = 1, 2, \dots$, а это противоречит уже установленному соотношению

$$\lim_{k \to \infty} \lambda_k = +\infty.$$

Полнота системы e_k, $k = 1, 2, \dots$, в пространстве V доказана. Это означает, что линейная оболочка элементов e_k, $k = 1, 2, \dots$, плотна в V, и, в силу плотности вложений $V \subset H \simeq H^* \subset V^*$, эта линейная оболочка будет плотна также и в пространствах H и V^*. Отсюда следует, что ортонормированная система $\frac{e_k}{\sqrt{\lambda_k}}$, $k = 1, 2, \dots$, — полна в V, ортонормированная система e_k, $k = 1, 2, \dots$, — полна в H, а ортонормированная система $e_k\sqrt{\lambda_k}$, $k = 1, 2, \dots$, — полна в V^*. Поэтому система $\frac{e_k}{\sqrt{\lambda_k}}$, $k = 1, 2, \dots$, — ортонормированный базис в пространстве V, система e_k, $k = 1, 2, \dots$, — ортонормированный базис в пространстве H, система $e_k\sqrt{\lambda_k}$, $k = 1, 2, \dots$, — ортонормированный базис в пространстве V^*, а любой элемент из пространств V, H, V^* разлагается в сильно сходящийся ряд Фурье по соответствующей системе. Так, если $u \in H$, то

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k e_k, \;\; u_k = \langle u, e_k\rangle_H,$$

а равенство

$$\|u\|_H^2 = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^2$$

представляет собой обычное равенство Парсеваля–Стеклова. Если $u \in V$, то

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} v_k \left[\frac{e_k}{\sqrt{\lambda_k}}\right], \;\; v_k = \left\langle u, \frac{e_k}{\sqrt{\lambda_k}}\right\rangle_V = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\langle Ae_k, u\rangle = \sqrt{\lambda_k}\langle u, e_k\rangle_H = \sqrt{\lambda_k}u_k,$$

а равенство Парсеваля–Стеклова в пространстве V записывается в виде

$$\|u\|_V^2 = \sum_{k=1}^{\infty} v_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k u_k^2.$$

Наконец, если $u \in V^*$, то

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} w_k [e_k\sqrt{\lambda_k}], \;\; w_k = \langle u, e_k\sqrt{\lambda_k}\rangle_{V^*} = \langle u, A^{-1}(e_k\sqrt{\lambda_k})\rangle = \left\langle u, \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} e_k\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\langle u, e_k\rangle = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} u_k,$$

а равенство Парсеваля–Стеклова принимает вид

$$\|u\|_V^2 = \sum_{k=1}^{\infty} w_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} u_k^2.$$

Теорема полностью доказана. ■

6.2. Абстрактная задача Коши с автономной главной частью

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle_H$ и соответствующей нормой $\|\cdot\|_H$. Пусть $\mathfrak{A} \in \mathcal{L}(V, V^*)$ — энергетическое расширение некоторого линейного неограниченного симметричного положительно опеределённого оператора с плотной в H областью определения, V — энергетическое пространство. Оператор $\mathfrak{A}$ симметричен

$$\langle \mathfrak{A}f, g\rangle = \langle f, \mathfrak{A}g\rangle_H \ \ \forall\, f,\ g \in V;$$

положительно определён

$$\langle \mathfrak{A}f, f\rangle \geqslant \mu\|f\|_H^2 \ \ \forall\, f \in V,$$

где $\mu > 0$ — некоторая постоянная, не зависящая от выбора $f \in V$; и осуществляет взаимно однозначное отображение V на V^*; обратный оператор $\mathfrak{A}^{-1} \in \mathcal{L}(V^*, V)$, $\|\mathfrak{A}\| = \|\mathfrak{A}^{-1}\| = 1$. Скалярное произведение и норма в V равны соответственно $\langle u, v\rangle_V = \langle \mathfrak{A}u, v\rangle$ и $\|u\|_V = \sqrt{\langle \mathfrak{A}u, u\rangle}$, а скалярное произведение и норма в V^* определяются как $\langle f, g\rangle_{V^*} = \langle \mathfrak{A}^{-1}f, \mathfrak{A}^{-1}g\rangle_V = \langle f, \mathfrak{A}^{-1}g\rangle$ и $\|f\|_{V^*} = \|\mathfrak{A}^{-1}f\|_V$. Согласно разделу 6.1, имеют место вложения

$$V \subset H \simeq H^* \subset V^*,$$

причём эти вложения плотны и непрерывны, т.е.

$$\|f\|_H \leqslant C\|f\|_V \ \ \forall\, f \in V; \ \ \|f\|_{V^*} \leqslant C\|f\|_H \ \ \forall\, f \in H;$$

где $C = \mu^{-1/2}$. Пусть, кроме того, вложение $V \subset H$ — компактно.

Пусть отображение $\beta\colon \mathbf{Э}_1([0,T]; V, H) \to L_1([0,T], H)$ таково, что для некоторой функции $K_0 \in L_1[0,T]$

$$\|\beta[\mathfrak{z}_1](t) - \beta[\mathfrak{z}_2](t)\|_H \leqslant K_0(t)\sqrt{\|\mathfrak{z}_1(t) - \mathfrak{z}_2(t)\|_V^2 + \|\dot{\mathfrak{z}}_1(t) - \dot{\mathfrak{z}}_2(t)\|_H^2} \tag{6.2.1}$$
$$\forall\,(t, \mathfrak{z}_i) \in [0,T] \times \mathbf{Э}_1([0,T]; V, H), \ \ i = 1, 2.$$

Наконец, пусть $\varphi \in V$, $\psi \in H$, $P \in L_1(\Gamma, \mathcal{L}(H, H))$.

Рассмотрим задачу Коши

$$\ddot{\mathfrak{z}}(t) + \mathfrak{A}\mathfrak{z}(t) = \beta[\mathfrak{z}](t) + \int\limits_0^t P(t,\tau)\dot{\mathfrak{z}}(\tau)d\tau, \ \ t \in [0,T], \tag{6.2.2}$$

$$\mathfrak{z}(0) = \varphi, \ \ \dot{\mathfrak{z}}(0) = \psi, \tag{6.2.3}$$

и дадим следующее

Определение 6.2.1. *Функцию $\mathfrak{z} \in \mathbf{Э}_1([0,T]; V, H)$ назовём решением задачи Коши (6.2.2), (6.2.3), если*

$$\int\limits_0^T [-\langle \dot{\mathfrak{z}}(t), \dot{\eta}(t)\rangle_H + \langle \mathfrak{A}\mathfrak{z}(t), \eta(t)\rangle]dt = \langle \psi, \eta(0)\rangle + \int\limits_0^T \langle \theta[t, \mathfrak{z}], \eta(t)\rangle_H dt \ \ \forall\, \eta \in \hat{\mathbf{Э}}_1([0,T]; V, H); \tag{6.2.4}$$
$$\mathfrak{z}(0) = \varphi.$$

Под $\hat{\mathbf{Э}}_1([0,T]; V, H)$ мы в данном определении понимаем множество $\{\mathfrak{z} \in \mathbf{Э}_1([0,T]; V, H) : \mathfrak{z}(T) = 0\}$, а под $\theta[t, \mathfrak{z}]$ — выражение

$$\beta[\mathfrak{z}](t) + \int\limits_0^t P(t,\tau)\dot{\mathfrak{z}}(\tau)d\tau, \ \ t \in [0,T].$$

Начиная с этого момента здесь и всюду ниже через e_j, $j = 1, 2, \ldots$, мы обозначаем последовательность элементов V, таких, что

$$\langle e_i,\, e_j\rangle_H = \delta_j^i, \ \ \langle e_i,\, e_j\rangle_V = \delta_j^i\lambda_j, \ \ Ae_j = \lambda_j e_j, \ \ i,\ j = 1, 2, \ldots, \tag{6.2.5}$$
$$0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_j \leqslant \lambda_{j+1} \leqslant \ldots, \ \ \lim_{j\to\infty} \lambda_j = +\infty.$$

Согласно разделу 6.1,

$$v=\sum_{j=1}^{\infty}v_je_j,\ \ v_j=\langle v,\,e_j\rangle_H,\ \ j=1,2,\dots,\ \ \|v\|_V^2=\sum_{j=1}^{\infty}\omega_j^2|v_j|^2,\ \ \forall\,v\in V; \tag{6.2.6}$$

$$h=\sum_{j=1}^{\infty}h_je_j,\ \ h_j=\langle h,\,e_j\rangle_H,\ \ j=1,2,\dots,\ \ \|h\|_H^2=\sum_{j=1}^{\infty}|h_j|^2,\ \ \forall\,h\in H; \tag{6.2.7}$$

$$v^*=\sum_{j=1}^{\infty}v_j^*e_j,\ \ v_j^*=\langle v^*,\,e_j\rangle,\ \ j=1,2,\dots,\ \ \|v^*\|_{V^*}^2=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{|v_j^*|^2}{\omega_j^2},\ \ \forall\,v^*\in V^*; \tag{6.2.8}$$

где

$$\omega_j\equiv\sqrt{\lambda_j},\ \ j=1,2,\dots$$

Дадим ещё одно определение решения задачи Коши (6.2.2), (6.2.3).

Определение 6.2.2. *Функцию $\mathfrak{z}\in\mathbf{\ni}_2([0,T];V,H)$ назовём решением задачи Коши (6.2.2), (6.2.3), если*

$$\langle\ddot{\mathfrak{z}}(t),v\rangle+\langle\mathfrak{A}\mathfrak{z}(t),v\rangle=\langle\theta[t,\mathfrak{z}],v\rangle\quad\text{при п.в. } t\in[0,T]\ \ \forall v\in V, \tag{6.2.9}$$
$$\mathfrak{z}(0)=\varphi,\ \ \dot{\mathfrak{z}}(0)=\psi.$$

Пусть $\mathfrak{M}^N\equiv\{\sum\limits_{j=1}^{N}\zeta_je_j\,:\,\zeta_j\in W_2^1[0,T],\ \ \zeta_j(T)=0,\ \ j=\overline{1,\,N}\}$, $\mathfrak{M}\equiv\bigcup\limits_{N=1}^{\infty}\mathfrak{M}^N$.

Докажем, что справедлива следующая

Лемма 6.2.1. *Определения 6.2.1 и 6.2.2 — эквивалентны.*

Доказательство. 1) Докажем, что если функция $\mathfrak{z}\in\mathbf{\ni}_2([0,T];V,H)$ является решением в смысле определения 6.2.2, то она является и решением в смысле определения 6.2.1.

В самом деле, пусть $\mathfrak{z}\in\mathbf{\ni}_2([0,T];V,H)$ — решение в смысле определения 6.2.2.

Поскольку, согласно лемме 2.4.1, $\mathfrak{M}\equiv\bigcup\limits_{N=1}^{\infty}\mathfrak{M}^N$ плотно в $\hat{\mathbf{\ni}}_1([0,T];V,H)$, то нам достаточно доказать, что тождество (6.2.4) справедливо для функций η, имеющих вид $\eta(t)\equiv\zeta(t)e_j$, $t\in[0,T]$, где $\zeta\in W_2^1[0,T]$, $\zeta(T)=0$.

Действительно, применив взяв в равенстве (6.2.9) $v=\zeta(t)e_j$, $t\in[0,T]$, и проинтегрировав результат по $t\in[0,T]$, будем иметь

$$\int_0^T\langle\ddot{\mathfrak{z}}(t),\zeta(t)e_j\rangle dt+\int_0^T\langle\mathfrak{A}\mathfrak{z}(t),\zeta(t)e_j\rangle dt=\int_0^T\langle\theta[t,\mathfrak{z}],\zeta(t)e_j\rangle dt.$$

Взяв первый из стоящих слева интегралов по частям, получим справедливость тождества (6.2.4) для функций η, имеющих вид $\eta(t)\equiv\zeta(t)e_j$, $t\in[0,T]$, где $\zeta\in W_2^1[0,T]$, $\zeta(T)=0$.

Таким образом, мы доказали, что еслия $\mathfrak{z}\in\mathbf{\ni}_2([0,T];V,H)$ является решением в смысле определения 6.2.2, то она является и решением в смысле определения 6.2.1.

2) Докажем теперь, что если функция $\mathfrak{z}\in\mathbf{\ni}_1([0,T];V,H)$ является решением в смысле определения 6.2.1, то она является и решением в смысле определения 6.2.2.

Подставляя в интегральное тождество (6.2.4) $\eta(t)\equiv\zeta(t)v$, $t\in[0,T]$, где $\zeta\in W_2^1[0,T]$, $\zeta(T)=0$, $v\in V$, заключаем, что

$$\int_0^T\langle-\dot{\mathfrak{z}}(t),\zeta'(t)v\rangle dt+\int_0^T\langle\mathfrak{A}\mathfrak{z}(t),\zeta(t)v\rangle dt=\int_0^T\langle\theta[t,\mathfrak{z}],\zeta(t)v\rangle dt+\langle\psi,\zeta(0)v\rangle. \tag{6.2.10}$$

В частности, для всех $\zeta\in\mathfrak{D}(0,T)$

$$\int_0^T\langle-\dot{\mathfrak{z}}(t),\zeta'(t)v\rangle dt+\int_0^T\langle\mathfrak{A}\mathfrak{z}(t),\zeta(t)v\rangle dt=\int_0^T\langle\theta[t,\mathfrak{z}],\zeta(t)v\rangle dt+\langle\psi,\zeta(0)v\rangle. \tag{6.2.11}$$

Положив затем $\tilde{\theta}(\zeta)\equiv\int\limits_0^T\theta[t,\mathfrak{z}](t)\zeta(t)\,dt$, $\mathfrak{Z}(\zeta)\equiv\int\limits_0^T\mathfrak{z}(t)\zeta(t)\,dt$, и замечая, что $\mathfrak{Z}'(\zeta)\equiv-\int\limits_0^T\mathfrak{z}(t)\dot{\zeta}(t)\,dt$, из тождества (6.2.11) получаем, что

$$-\mathfrak{Z}'(\zeta')+\mathfrak{A}\mathfrak{Z}(\zeta)=\tilde{\theta}(\zeta),\ \ \forall\,\zeta\in\mathfrak{D}(0,T),$$

или, иначе,
$$\mathfrak{Z}''(\zeta)+\mathfrak{A}\mathfrak{Z}(\zeta)=\tilde{\theta}(\zeta)\ \ \forall\,\zeta\in\mathfrak{D}(0,T).$$
Последнее означает, что $\mathfrak{Z}''$ — регулярна, и лежит в $L_1([0,T],\,V^*)$. Поэтому $\mathfrak{z}\in\mathbf{Э}_2([0,T];V,H)$, и
$$\langle\ddot{\mathfrak{z}}(t)+\mathfrak{A}\mathfrak{z}(t)-\theta[t,\mathfrak{z}],\,v\rangle=0,\ \ \forall\,v\in V. \tag{6.2.12}$$
Взяв по частям первый из интегралов, стоящих в левой части тождества 6.2.10, выводим, что
$$\int\limits_0^T\langle\ddot{\mathfrak{z}}(t)+\mathfrak{A}\mathfrak{z}(t)-\theta[t,\mathfrak{z}],\zeta(t)v\rangle dt+\langle\dot{\mathfrak{z}}(0),\zeta(0)v\rangle=\langle\psi,\zeta(0)v\rangle.$$
Учтя здесь равенство (6.2.12), получим, что
$$\langle\dot{\mathfrak{z}}(0)-\psi,v\rangle=0\ \ \forall\,v\in V.$$
Иными словами,
$$\dot{\mathfrak{z}}(0)=\psi.$$
Из этого соотношения и соотношения (6.2.12) и вытекает, что $\mathfrak{z}$ является решением в смысле определения 6.2.2.

Лемма полностью доказана. ■

Покажем, что задача Коши (6.2.2), (6.2.3) эквивалентна некоторому интегро–дифференциальному уравнению в пространстве $\mathbf{Э}_1([0,T];V,H)$. Для этого нам потребуется ввести ряд обозначений и доказать ряд результатов.

Прежде всего для любого $h\in H$ положим
$$\Pi_1(t)h=\sum_{m=1}^{\infty}\cos(\omega_m t)h_m e_m,\ \ \Pi_2(t,\xi)h=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin(\omega_m(t-\xi))}{\omega_m}h_m e_m,\ \ (t,\xi)\in\Gamma.$$

Справедлива следующая

Лемма 6.2.2. *1) При всех $(t,\xi)\in\Gamma$ справедливы включения $\Pi_1(t)\in\mathcal{L}(H,H)$, $\Pi_1(t)\in\mathcal{L}(V,V)$, $\Pi_2(t,\xi)\in\mathcal{L}(H,V)$, причём при всех $(t,\xi)\in\Gamma$ имеют место неравенства*
$$\|\Pi_1(t)\|_{H\to H}\leqslant 1,\ \ \|\Pi_1(t)\|_{V\to V}\leqslant 1,\ \ \|\Pi_2(t,\xi)\|_{H\to V}\leqslant 1.$$
2) При каждом $h\in H$ ряд для $\Pi_1(t)h$ сходится в норме H равномерно по $t\in[0,T]$.
3) При каждом $v\in V$ ряд для $\Pi_1(t)v$ сходится в норме V равномерно по $t\in[0,T]$.
4) При каждом $h\in H$ ряд для $\Pi_2(t,\xi)h$ сходится в норме V равномерно по $(t,\xi)\in\Gamma$.
5) При каждом $h\in H$ функция $[0,T]\ni t\mapsto\Pi_1(t)h$ принадлежит $C([0,T],H)$.
6) При каждом $v\in V$ функция $[0,T]\ni t\mapsto\Pi_1(t)v$ — элемент пространства $C([0,T],V)$.
7) При каждом $h\in H$ функция $\Gamma\ni(t,\xi)\mapsto\Pi_2(t,\xi)h$ принадлежит $C(\Gamma,V)$.
8) Для любой функции $y\in C([0,T],H)$ функция $\Gamma\ni(t,\xi)\mapsto\Pi_2(t,\xi)y(\xi)$ — элемент $C(\Gamma,V)$.

Доказательство. 1) Докажем первое утверждение леммы. В самом деле, пусть $h\in H$, $v\in V$, $(t,\xi)\in\Gamma$, — произвольны. Тогда
$$\|\Pi_1(t)h\|_H^2=\sum_{m=1}^{\infty}\cos^2(\omega_m t)h_m^2\leqslant\sum_{m=1}^{\infty}h_m^2=\|h\|_H^2,\ \ \|\Pi_1(t)v\|_V^2=\sum_{m=1}^{\infty}\cos^2(\omega_m t)v_m^2\omega_m^2\leqslant\sum_{m=1}^{\infty}v_m^2\omega_m^2=\|v\|_V^2,$$
$$\|\Pi_2(t,\xi)h\|_V^2=\sum_{m=1}^{\infty}\left|\frac{\sin(\omega_m(t-\xi))}{\omega_m}h_m\right|^2\omega_m^2=\sum_{m=1}^{\infty}\sin^2(\omega_m(t-\xi))h_m^2\leqslant\sum_{m=1}^{\infty}h_m^2=\|h\|_H^2.$$
Таким образом, при всех $h\in H$, $v\in V$, $(t,\xi)\in\Gamma$ имеют место соотношения
$$\|\Pi_1(t)v\|_V\leqslant\|h\|_H,\ \ \|\Pi_1(t)v\|_V\leqslant\|v\|_V,\ \ \|\Pi_2(t,\xi)h\|_V\leqslant\|h\|_H,$$
которые и доказывают первое утверждение леммы.

2) Докажем остальные утверждения леммы. Пусть $h\in H$, $v\in V$ — произвольны. Во–первых, заметим, что $[0,T]$ и Γ, рассматриваемые со стандартной топологией, — компактные топологические пространства. При этом функции
$$[0,T]\ni t\mapsto\cos(\omega_m t)h_m\in\mathbb{R},\ \ [0,T]\ni t\mapsto\cos(\omega_m t)v_m\in\mathbb{R},\ \ m=1,2,\ldots,$$

непрерывны на $[0,T]$, а функции

$$\Gamma \ni (t,\xi) \mapsto \frac{\sin(\omega_m(t-\xi))}{\omega_m} h_m \in \mathbb{R}, \ \ m = 1,2,\ldots,$$

непрерывны на Γ.

Во–вторых, при всех $(t,\xi) \in \Gamma$ имеют место оценки

$$|\cos(\omega_m t)h_m| \leqslant |h_m|, \ \ |\cos(\omega_m t)v_m| \leqslant |v_m|, \ \ \left|\frac{\sin(\omega_m(t-\xi))}{\omega_m} h_m\right| \leqslant \frac{1}{\omega_m}|h_m|, \ \ m = 1,2,\ldots,$$

из которых следует, что

$$|\cos(\omega_m t)h_m|^2 \|e_m\|_H^2 \leqslant |h_m|^2, \ \ |\cos(\omega_m t)v_m|^2 \|e_m\|_V^2 \leqslant |v_m|^2 \omega_m^2,$$
$$\left|\frac{\sin(\omega_m(t-\xi))}{\omega_m} h_m\right|^2 \|e_m\|_V^2 \leqslant |h_m|^2, \ \ m = 1,2,\ldots$$

Пользуясь теперь теоремой 1.5.2, получаем второе, третье и четвёртое утверждения леммы.

Пятое, шестое и седьмое утверждения являются следствиями второго, третьего и четвёртого утверждений и следствия 1.5.1.

Восьмое утверждение вытекает из включения $y \in C([0,T],H)$, седьмого утверждения и леммы 1.1.9. Лемма полностью доказана. ■

Из лемм 1.6.1 и 6.2.2 вытекает

Лемма 6.2.3. *Для любой функции $y \in L_1([0,T],H)$ функция*

$$[0,T] \ni t \mapsto \int\limits_0^t \Pi_2(t,\xi) y(\xi) d\xi$$

непрерывна по $t \in [0,T]$ в норме V.

Для каждого $y \in \mathbf{Э}_1([0,T];V,H)$ положим

$$\Lambda_0[y](t) \equiv \Pi_1(t)\varphi + \Pi_2(t,0)\psi + \int\limits_0^t \Pi_2(t,\xi)\theta[\xi,y]\,d\xi, \ \ t \in [0,\,T]. \tag{6.2.13}$$

Из лемм 6.2.2 и 6.2.3 следует, что

$$\Lambda_0[y] \in C([0,T],V) \ \ \forall\, y \in \mathbf{Э}_1([0,T];V,H). \tag{6.2.14}$$

Изучим теперь дифференциальные свойства функции $\Lambda_0[y]$. Для этого нам потребуется ввести два линейных оператора.

Для любых $v \in V$ и $h \in H$ положим

$$\Pi_3(t)v = \sum_{m=1}^{\infty} [-\omega_m \sin(\omega_m t)] v_m e_m, \ \ \Pi_4(t,\xi)h = \sum_{m=1}^{\infty} \cos(\omega_m(t-\xi)) h_m e_m, \ \ (t,\xi) \in \Gamma.$$

Лемма 6.2.4. *1) При всех $(t,\xi) \in \Gamma$ справедливы включения $\Pi_3(t) \in \mathcal{L}(V,H)$, $\Pi_4(t,\xi) \in \mathcal{L}(H,H)$, причём при всех $(t,\xi) \in \Gamma$ имеют место неравенства*

$$\|\Pi_3(t)\|_{V\to H} \leqslant 1, \ \ \|\Pi_4(t,\xi)\|_{H\to H} \leqslant 1.$$

2) При каждом $v \in V$ ряд для $\Pi_3(t)v$ сходится в норме H равномерно по $t \in [0,T]$.

3) При каждом $h \in H$ ряд для $\Pi_4(t,\xi)h$ сходится в норме H равномерно по $(t,\xi) \in \Gamma$.

4) При каждом $v \in V$ функция $[0,T] \ni t \mapsto \Pi_3(t)v$ — элемент пространства $C([0,T],H)$.

5) При каждом $h \in H$ функция $\Gamma \ni (t,\xi) \mapsto \Pi_4(t,\xi)h$ принадлежит $C(\Gamma,H)$.

Доказательство. 1) Докажем первое утверждение леммы. В самом деле, пусть $h \in H$, $v \in V$, $(t,\xi) \in \Gamma$, — произвольны. Тогда

$$\|\Pi_3(t)v\|_H^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \omega_m^2 \sin^2(\omega_m t) v_m^2 \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \omega_m^2 v_m^2 = \|v\|_V^2,$$
$$\|\Pi_4(t,\xi)h\|_H^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \cos^2(\omega_m(t-\xi)) h_m^2 \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} h_m^2 = \|h\|_H^2.$$

Таким образом, при всех $h \in H$, $v \in V$, $(t,\xi) \in \Gamma$ имеют место соотношения

$$\|\Pi_3(t)v\|_H \leqslant \|v\|_V, \ \ \|\Pi_4(t,\xi)h\|_H \leqslant \|h\|_H,$$

которые и доказывают первое утверждение леммы.

2) Докажем остальные утверждения леммы. Пусть $h \in H$, $v \in V$ — произвольны. Во–первых, заметим, что $[0,T]$ и Γ, рассматриваемые со стандартной топологией, — компактные топологические пространства. При этом функции

$$[0,T] \ni t \mapsto -\omega_m \sin(\omega_m t)v_m \in \mathbb{R}, \ \ m = 1,2,\ldots,$$

непрерывны на $[0,T]$, а функции

$$\Gamma \ni (t,\xi) \mapsto \cos(\omega_m(t-\xi))h_m \in \mathbb{R}, \ \ m = 1,2,\ldots,$$

непрерывны на Γ.

Во–вторых, при всех $(t,\xi) \in \Gamma$ имеют место оценки

$$|-\omega_m \sin(\omega_m t)v_m| \leqslant \omega_m|v_m|, \ \ |\cos(\omega_m(t-\xi))h_m| \leqslant |h_m|, \ \ m = 1,2,\ldots,$$

из которых следует, что

$$|-\omega_m \sin(\omega_m t)v_m|^2\|e_m\|_H^2 \leqslant \omega_m^2|v_m|^2, \ \ |\cos(\omega_m(t-\xi))h_m|^2\|e_m\|_H^2 \leqslant |h_m|^2, \ \ m = 1,2,\ldots$$

Пользуясь теперь теоремой 1.5.2, получаем второе и третье утверждения леммы.

Четвёртое и пятое утверждения вытекают из второго и третьего и из следствия 1.5.1. Лемма полностью доказана. ■

Лемма 6.2.5. *При всех $h \in H$ и $v \in V$, $(t,\xi) \in \Gamma$ справедливы равенства*

$$\lim_{\Delta t \to 0} \left\| \left[\frac{\Pi_1(t+\Delta t) - \Pi_1(t)}{\Delta t} - \Pi_3(t) \right] v \right\|_H = 0, \ \ \lim_{\Delta t \to 0} \left\| \left[\frac{\Pi_2(t+\Delta t,\xi) - \Pi_2(t,\xi)}{\Delta t} - \Pi_4(t,\xi) \right] h \right\|_H = 0.$$

Доказательство. 1) Предельное соотношение

$$\lim_{\Delta t \to 0} \left\| \left[\frac{\Pi_1(t+\Delta t) - \Pi_1(t)}{\Delta t} - \Pi_3(t) \right] v \right\|_H = 0$$

вытекает из непрерывности вложения $V \subset H$, третьего утверждения леммы 6.2.2, второго утверждения леммы 6.2.4 и следствия 1.5.2.

2) Равенство

$$\lim_{\Delta t \to 0} \left\| \left[\frac{\Pi_2(t+\Delta t,\xi) - \Pi_2(t,\xi)}{\Delta t} - \Pi_4(t,\xi) \right] h \right\|_H = 0$$

вытекает из непрерывности вложения $V \subset H$, четвёртого утверждения леммы 6.2.2, третьего утверждения леммы 6.2.4 и следствия 1.5.3. ■

Из лемм 1.6.1 и 6.2.4 вытекает

Лемма 6.2.6. *Для любой функции $y \in L_1([0,T],H)$ функция*

$$[0,T] \ni t \mapsto \int_0^t \Pi_4(t,\xi)y(\xi)d\xi$$

непрерывна по $t \in [0,T]$ в норме H.

Из лемм 6.2.2 и 6.2.6 и теоремы 1.6.3 вытекает

Лемма 6.2.7. *Для любой функции $y \in C([0,T],H)$ функция*

$$[0,T] \ni t \mapsto \int_0^t \Pi_2(t,\xi)y(\xi)d\xi$$

непрерывно дифференцируема на $[0,T]$ в норме пространства H, причём

$$\frac{d}{dt}\int_0^t \Pi_2(t,\xi)y(\xi)d\xi = \int_0^t \Pi_4(t,\xi)y(\xi)d\xi \ \ \forall\, t \in [0,T].$$

Лемма 6.2.8. *Для любой функции $y \in L_1([0,T],H)$ функция*

$$[0,T] \ni t \mapsto \int_0^t \Pi_2(t,\xi)y(\xi)d\xi$$

непрерывно дифференцируема на $[0,T]$ в норме пространства H, причём

$$\frac{d}{dt}\int_0^t \Pi_2(t,\xi)y(\xi)d\xi = \int_0^t \Pi_4(t,\xi)y(\xi)d\xi \ \ \forall\, t \in [0,T].$$

Доказательство. Для всех $y \in L_1([0,T],H)$ положим

$$\Xi_1[y](t) = \int_0^t \Pi_2(t,\xi)y(\xi)d\xi, \ \ \Xi_2[y](t) = \int_0^t \Pi_4(t,\xi)y(\xi)d\xi, \ \ t \in [0,T].$$

Предположим сначала, что $y \in C([0,T],H)$. Тогда, согласно лемме 6.2.7, для всех $h \in H$ выполнено тождество

$$\left\langle \Xi_1[y](t) - \Xi_1[y](0) - \int_0^t \Xi_2[y](\eta)d\eta, h \right\rangle_H = 0 \ \ \forall\, t \in [0,T].$$

Пусть теперь $y \in L_1([0,T],H)$. Тогда найдётся последовательность $y_j \in C([0,T],H)$, $j = 1,2,\dots$, такая, что $\lim\limits_{j\to\infty} \|y_j - y\|_{1,[0,T],H} = 0$. Для каждого $j = 1,2,\dots$ можем записать тождество

$$\left\langle \Xi_1[y_j](t) - \Xi_1[y_j](0) - \int_0^t \Xi_2[y_j](\eta)d\eta, h \right\rangle_H = 0 \ \ \forall\, t \in [0,T].$$

Перейдя затем к пределу при $j \to \infty$, получаем требуемое равенство для случая $y \in L_1([0,T],H)$. Лемма полностью доказана. ■

Для каждого $y \in \mathbf{Э}_1([0,T];V,H)$ положим

$$\Lambda_1[y](t) \equiv \Pi_3(t)\varphi + \Pi_4(t,0)\psi + \int_0^t \Pi_4(t,\xi)\theta[\xi,y]\,d\xi, \ \ t \in [0,\,T].$$

Из лемм 6.2.4 и 6.2.6 следует, что

$$\Lambda_1[y] \in C([0,T],H) \ \ \forall\, y \in \mathbf{Э}_1([0,T];V,H).$$

Кроме того, согласно леммам 6.2.5 и 6.2.8, при каждом $y \in \mathbf{Э}_1([0,T];V,H)$ функция $\Lambda_0[y]$ непрерывно дифференцируема на $[0,T]$ в норме H, причём

$$\frac{d}{dt}\Lambda_0[y](t) = \Lambda_1[y](t) \ \ \forall\, t \in [0,T].$$

Итак, мы доказали, что Λ_0 можно рассматривать как оператор, переводящий пространство $\mathbf{Э}_1([0,T];V,H)$ в себя.

Изучим теперь возможность дальнейшего дифференцирования функции $\Lambda_0[y]$, или, что то же самое, дифференциальные свойства функции $\Lambda_1[y]$.

Для всех $h \in H$, $v \in V$ положим

$$\Pi_5(t)v = \sum_{m=1}^{\infty}[-\omega_m^2\cos(\omega_m t)]v_m e_m, \ \ \Pi_6(t,\xi)h = \sum_{m=1}^{\infty}[-\omega_m\sin(\omega_m(t-\xi))]h_m e_m, \ \ (t,\xi) \in \Gamma.$$

Лемма 6.2.9. *1) При всех $(t,\xi) \in \Gamma$ справедливы включения $\Pi_5(t) \in \mathcal{L}(V,V^*)$, $\Pi_6(t,\xi) \in \mathcal{L}(H,V^*)$, причём при всех $(t,\xi) \in \Gamma$ имеют место неравенства*

$$\|\Pi_5(t)\|_{V\to V^*} \leqslant 1, \ \ \|\Pi_6(t,\xi)\|_{H\to V^*} \leqslant 1.$$

2) При каждом $v \in V$ ряд для $\Pi_5(t)v$ сходится в норме V^* равномерно по $t \in [0,T]$.

3) При каждом $h \in H$ ряд для $\Pi_6(t,\xi)h$ сходится в норме V^* равномерно по $(t,\xi) \in \Gamma$.

4) При каждом $v \in V$ функция $[0,T] \ni t \mapsto \Pi_5(t)v$ — элемент пространства $C([0,T],V^*)$.

5) При каждом $h \in H$ функция $\Gamma \ni (t,\xi) \mapsto \Pi_6(t,\xi)h$ принадлежит $C(\Gamma,V^*)$.

Доказательство. 1) Докажем первое утверждение леммы. В самом деле, пусть $h \in H$, $v \in V$, $(t,\xi) \in \Gamma$, — произвольны. Тогда

$$\|\Pi_5(t)v\|^2_{V^*} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_m^2} |-\omega_m^2 \cos(\omega_m t)|^2 v_m^2 \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \omega_m^2 v_m^2 = \|v\|^2_V,$$

$$\|\Pi_6(t,\xi)h\|^2_{V^*} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_m^2} |-\omega_m \sin(\omega_m(t-\xi))|^2 h_m^2 \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} h_m^2 = \|h\|^2_H.$$

Таким образом, при всех $h \in H$, $v \in V$, $(t,\xi) \in \Gamma$ имеют место соотношения

$$\|\Pi_5(t)v\|_{V^*} \leqslant \|v\|_V, \;\; \|\Pi_6(t,\xi)h\|_{V^*} \leqslant \|h\|_H,$$

которые и доказывают первое утверждение леммы.

2) Докажем остальные утверждения леммы. Пусть $h \in H$, $v \in V$ — произвольны. Во–первых, заметим, что $[0,T]$ и Γ, рассматриваемые со стандартной топологией, — компактные топологические пространства. При этом функции

$$[0,T] \ni t \mapsto -\omega_m^2 \cos(\omega_m t) v_m \in \mathbb{R}, \;\; m = 1,2,\ldots,$$

непрерывны на $[0,T]$, а функции

$$\Gamma \ni (t,\xi) \mapsto -\omega_m \sin(\omega_m(t-\xi)) h_m \in \mathbb{R}, \;\; m = 1,2,\ldots,$$

непрерывны на Γ.

Во–вторых, при всех $(t,\xi) \in \Gamma$ имеют место оценки

$$|-\omega_m^2 \cos(\omega_m t) v_m| \leqslant \omega_m^2 |v_m|, \;\; |-\omega_m \sin(\omega_m(t-\xi)) h_m| \leqslant \omega_m |h_m|, \;\; m = 1,2,\ldots,$$

из которых следует, что

$$|-\omega_m^2 \cos(\omega_m t) v_m|^2 \|e_m\|^2_{V^*} \leqslant \omega_m^2 |v_m|^2, \;\; |-\omega_m \sin(\omega_m(t-\xi)) h_m|^2 \|e_m\|^2_{V^*} \leqslant |h_m|^2, \;\; m = 1,2,\ldots$$

Пользуясь теперь теоремой 1.5.2, получаем второе и третье утверждения леммы.

Четвёртое и пятое утверждения вытекают из второго и третьего утверждений и из следствия 1.5.1. Лемма полностью доказана. ∎

Лемма 6.2.10. *При всех $h \in H$ и $v \in V$, $(t,\xi) \in \Gamma$ справедливы равенства*

$$\lim_{\Delta t \to 0} \left\| \left[\frac{\Pi_3(t+\Delta t) - \Pi_3(t)}{\Delta t} - \Pi_5(t) \right] v \right\|_{V^*} = 0, \;\; \lim_{\Delta t \to 0} \left\| \left[\frac{\Pi_4(t+\Delta t,\xi) - \Pi_4(t,\xi)}{\Delta t} - \Pi_6(t,\xi) \right] h \right\|_{V^*} = 0.$$

Доказательство. 1) Предельное соотношение

$$\lim_{\Delta t \to 0} \left\| \left[\frac{\Pi_3(t+\Delta t) - \Pi_3(t)}{\Delta t} - \Pi_5(t) \right] v \right\|_{V^*} = 0$$

следует из непрерывности вложений $V \subset H \cong H^* \subset V^*$, второго утверждения леммы 6.2.4, второго утверждения леммы 6.2.9 и следствия 1.5.2.

2) Равенство

$$\lim_{\Delta t \to 0} \left\| \left[\frac{\Pi_4(t+\Delta t,\xi) - \Pi_4(t,\xi)}{\Delta t} - \Pi_6(t,\xi) \right] h \right\|_{V^*} = 0$$

вытекает из непрерывности вложений $V \subset H \cong H^* \subset V^*$, третьего утверждения леммы 6.2.4, третьего утверждения леммы 6.2.9 и следствия 1.5.3. ∎

Из лемм 1.6.1 и 6.2.9 вытекает

Лемма 6.2.11. *Для любой функции $y \in L_1([0,T],H)$ функция*

$$[0,T] \ni t \mapsto \int\limits_0^t \Pi_6(t,\xi) y(\xi) d\xi$$

непрерывна по $t \in [0,T]$ *в норме* V^*.

Из лемм 6.2.4 и 6.2.11 и теоремы 1.6.3 вытекает

Лемма 6.2.12. *Для любой функции* $y \in C([0,T],H)$ *функция*

$$[0,T] \ni t \mapsto \int\limits_0^t \Pi_4(t,\xi)y(\xi)d\xi$$

непрерывно дифференцируема на $[0,T]$ *в норме пространства* V^*, *причём*

$$\frac{d}{dt}\int\limits_0^t \Pi_4(t,\xi)y(\xi)d\xi = \int\limits_0^t \Pi_6(t,\xi)y(\xi)d\xi \;\; \forall\, t \in [0,T].$$

Лемма 6.2.13. *Для любой функции* $y \in L_1([0,T],H)$ *функция*

$$[0,T] \ni t \mapsto \int\limits_0^t \Pi_4(t,\xi)y(\xi)d\xi$$

абсолютно непрерывна на $[0,T]$ *в норме пространства* V^*, *причём её обобщённая производная имеет вид*

$$\frac{d}{dt}\int\limits_0^t \Pi_4(t,\xi)y(\xi)d\xi = y(t) + \int\limits_0^t \Pi_6(t,\xi)y(\xi)d\xi \;\; \forall\, t \in [0,T].$$

Доказательство. Для всех $y \in L_1([0,T],H)$ положим

$$\Xi_1[y](t) = \int\limits_0^t \Pi_4(t,\xi)y(\xi)d\xi, \;\; \Xi_2[y](t) = y(t) + \int\limits_0^t \Pi_6(t,\xi)y(\xi)d\xi, \;\; t \in [0,T].$$

Предположим сначала, что $y \in C([0,T],H)$. Тогда, согласно лемме 6.2.12, для всех $v \in V$ выполнено тождество

$$\left\langle \Xi_1[y](t) - \Xi_1[y](0) - \int\limits_0^t \Xi_2[y](\eta)d\eta, v \right\rangle = 0 \;\; \forall\, t \in [0,T].$$

Пусть теперь $y \in L_1([0,T],H)$. Тогда найдётся последовательность $y_j \in C([0,T],H)$, $j = 1,2,\ldots$, такая, что $\lim\limits_{j\to\infty} \|y_j - y\|_{1,[0,T],H} = 0$. Для каждого $j = 1,2,\ldots$ можем записать тождество

$$\left\langle \Xi_1[y_j](t) - \Xi_1[y_j](0) - \int\limits_0^t \Xi_2[y_j](\eta)d\eta, v \right\rangle = 0 \;\; \forall\, t \in [0,T].$$

Перейдя затем к пределу при $j \to \infty$, получаем требуемое равенство для случая $y \in L_1([0,T],H)$. Лемма полностью доказана. ∎

Для каждого $y \in \mathbf{Э}_1([0,T];V,H)$ положим

$$\Lambda_2[y](t) \equiv \Pi_5(t)\varphi + \Pi_6(t,0)\psi + \int\limits_0^t \Pi_6(t,\xi)\theta[\xi,y]\,d\xi, \;\; t \in [0,\,T].$$

Из лемм 6.2.9, 6.2.10, 6.2.11 и 6.2.13 следует, что

$$\Lambda_1[y] \in W_1^1([0,T],V^*) \;\; \forall\, y \in \mathbf{Э}_1([0,T];V,H),$$

причём

$$\frac{d}{dt}\Lambda_1[y](t) = \Lambda_2[y](t) \;\; \forall\, t \in [0,T].$$

Итак, мы доказали, что Λ_0 можно рассматривать как оператор, переводящий элементы пространства $\boldsymbol{Э}_1([0,T];V,H)$ в элементы пространства $\boldsymbol{Э}_2([0,T];V,H)$.

Заметим также, что из определения операторов Λ_0 и Λ_2 следует, что

$$\Lambda_2[y](t) = -\mathfrak{A}\Lambda_0[y](t) + \theta[t,y], \ \ \forall\, t \in [0,\, T], \ \ y \in \boldsymbol{Э}_1([0,T];V,H). \tag{6.2.15}$$

Рассмотрим теперь интегро–дифференциальное уравнение

$$y(t) = \Lambda_0[y](t), \ \ t \in [0,T]. \tag{6.2.16}$$

Связь между решениями из $\boldsymbol{Э}_1([0,T];V,H)$ уравнения (6.2.16) и решениями из $\boldsymbol{Э}_2([0,T];V,H)$ задачи Коши (6.2.2)–(6.2.3) даёт следующая

Лемма 6.2.14. *Всякое решение $y \in \boldsymbol{Э}_1([0,T];V,H)$ уравнения (6.2.16) является одновременно и решением из $\boldsymbol{Э}_2([0,T];V,H)$ задачи Коши (6.2.2)–(6.2.3). Обратно, всякое решение $y \in \boldsymbol{Э}_2([0,T];V,H)$ задачи Коши (6.2.2)–(6.2.3) является решением уравнения (6.2.16) в классе $\boldsymbol{Э}_1([0,T];V,H)$.*

Доказательство. 1) Пусть $y \in \boldsymbol{Э}_1([0,T];V,H)$ — решение уравнения (6.2.16). Как было доказано выше, ряд для $\Lambda_1[y](t)$ можно почленно дифференцировать, и полученный дифференцированием ряд сходится равномерно по $t \in [0,T]$ в норме H к непрерывной в норме H функции. Поэтому

$$\dot{y}(t) = \Lambda_1[y](t), \ \ \forall\, t \in [0,T]. \tag{6.2.17}$$

Как показано выше, функция $\Lambda_1[y]$ абсолютно непрерывна по $t \in [0,T]$ в норме пространства V^*. Дифференцируя равенство (6.2.17) и пользуясь равенством (6.2.15), получаем, что

$$\ddot{y}(t) = -\mathfrak{A}\Lambda_0[y](t) + \theta[t,y] \text{ при п.в. } t \in [0,T].$$

Поскольку $y \in \boldsymbol{Э}_1([0,T];V,H)$ — решение уравнения (6.2.16), то только что полученное равенство можно переписать в виде

$$\ddot{y}(t) + \mathfrak{A}y(t) = \theta[t,y] \text{ при п.в. } t \in [0,T].$$

Итак, если $y \in \boldsymbol{Э}_1([0,T];V,H)$ — решение уравнения (6.2.16), то $y \in \boldsymbol{Э}_2([0,T];V,H)$ и при п.в. $t \in [0,T]$ удовлетворяет уравнению (6.2.2). Покажем, что y удовлетворяет начальным условиям (6.2.3).

В самом деле, т.к. y — решение уравнения (6.2.16), то $y(0) = \Lambda[y](0) = \Pi_1(0)\varphi = \varphi$. Кроме того, в силу (6.2.17), $\dot{y}(0) = \tilde{\Lambda}[y](0) = \Pi_4(0,0)\psi = \psi$. Итак, функция y удовлетворяет начальным условиям (6.2.3).

Следовательно, если $y \in \boldsymbol{Э}_1([0,T];V,H)$ — решение уравнения (6.2.16), то $y \in \boldsymbol{Э}_2([0,T];V,H)$ и является решением из $\boldsymbol{Э}_2([0,T];V,H)$ задачи Коши (6.2.2)–(6.2.3).

2) Покажем, что всякое решение $y \in \boldsymbol{Э}_2([0,T];V,H)$ задачи Коши (6.2.2)–(6.2.3) является решением уравнения (6.2.16) в классе $\boldsymbol{Э}_1([0,T];V,H)$. В самом деле, пусть $y \in \boldsymbol{Э}_2([0,T];V,H)$ — решение задачи Коши (6.2.2)–(6.2.3). Тогда

$$\langle \ddot{y}(t), e_j\rangle + \langle \mathfrak{A}y(t), e_j\rangle = \langle \theta[t,y], e_j\rangle,$$

т.е.

$$\ddot{y}_j(t) + \omega_k^2 y_j(t) = [\theta[t,y]]_j, \ \ k = 1, 2, \ldots$$

Следовательно,

$$y_j(t) = \cos(\omega_j t)\varphi_j + \frac{\sin(\omega_j t)}{\omega_j}\psi_j + \int\limits_0^t \frac{\sin(\omega_j (t-\xi))}{\omega_j}[\theta[\xi,y]]_j\, d\xi,$$

что, в силу определения оператора Λ_0, означает, что

$$y(t) = \Lambda_0[y](t), \ \ t \in [0,T].$$

Итак, всякое решение $y \in \boldsymbol{Э}_2([0,T];V,H)$ задачи Коши (6.2.2)–(6.2.3) является решением уравнения (6.2.16) в классе $\boldsymbol{Э}_1([0,T];V,H)$. Лемма доказана. ■

Прежде чем доказывать существование и единственность решения уравнения (6.2.16), преобразуем выражения для Λ_0 и Λ_1, используя определение величины $\theta[t,y]$:

$$\Lambda_0[y](t) \equiv \Pi_1(t)\varphi + \Pi_2(t,0)\psi + \int\limits_0^t \Pi_2(t,\xi)\theta[\xi,y]\,d\xi = \Pi_1(t)\varphi + \Pi_2(t,0)\psi +$$

$$+\int\limits_0^t \Pi_2(t,\xi)\beta[y](\xi)\,d\xi + \int\limits_0^t \Pi_2(t,\xi)\left[\int\limits_0^\xi P(\xi,\tau)\dot{y}(\tau)d\tau\right]\,d\xi,\ \ t\in[0,T],\ \ y\in \mathbf{Э}_1([0,T];V,H);$$

$$\Lambda_1[y](t) \equiv \Pi_3(t)\varphi + \Pi_4(t,0)\psi + \int\limits_0^t \Pi_4(t,\xi)\theta[\xi,y]\,d\xi = \Pi_3(t)\varphi + \Pi_3(t,0)\psi +$$

$$+\int\limits_0^t \Pi_3(t,\xi)\beta[y](\xi)\,d\xi + \int\limits_0^t \Pi_3(t,\xi)\left[\int\limits_0^\xi P(\xi,\tau)\dot{y}(\tau)d\tau\right]\,d\xi,\ \ t\in[0,T],\ \ y\in \mathbf{Э}_1([0,T];V,H).$$

Поменяв порядок интегрирования в последнем интеграле в формуле для Λ_0 и в последнем интеграле в формуле для Λ_1, получим, что

$$\Lambda_0[y](t) \equiv \Pi_1(t)\varphi + \Pi_2(t,0)\psi + \int\limits_0^t \Pi_2(t,\xi)\beta[y](\xi)\,d\xi + \int\limits_0^t \tilde{\Pi}_2(t,\tau)\dot{y}(\tau)\,d\tau,$$

$$\Lambda_1[y](t) \equiv \Pi_3(t)\varphi + \Pi_4(t,0)\psi + \int\limits_0^t \Pi_4(t,\xi)\beta[y](\xi)\,d\xi + \int\limits_0^t \tilde{\Pi}_4(t,\tau)\dot{y}(\tau)\,d\tau,$$

$$t\in[0,T],\ \ y\in \mathbf{Э}_1([0,T];V,H),$$

где введены обозначения

$$\tilde{\Pi}_2(t,\tau) = \int\limits_\tau^t \Pi_2(t,\xi)P(\xi,\tau)d\xi,\ \ \tilde{\Pi}_4(t,\tau) = \int\limits_\tau^t \Pi_4(t,\xi)P(\xi,\tau)d\xi,\ \ (t,\tau)\in\Gamma.,\ \ y\in \mathbf{Э}_1([0,T];V,H).$$

При этом заметим, что

$$\|\tilde{\Pi}_2(t,\tau)h\|_V \leqslant \int\limits_\tau^t \|\Pi_2(t,\xi)\|_{H\to V}\|P(\xi,\tau)\|_{H\to H}\|h\|_H d\xi \leqslant \|h\|_H \int\limits_0^T \|P(\xi,\tau)\|_{H\to H} d\xi,$$

$$\|\tilde{\Pi}_4(t,\tau)h\|_H \leqslant \int\limits_\tau^t \|\Pi_4(t,\xi)\|_{H\to H}\|P(\xi,\tau)\|_{H\to H}\|h\|_H d\xi \leqslant \|h\|_H \int\limits_0^T \|P(\xi,\tau)\|_{H\to H} d\xi,$$

$$(t,\tau)\in\Gamma,\ \ h\in H.$$

Введя обозначения

$$\eta_1[y](t,\tau) \equiv \Pi_2(t,\tau)\beta[y](\tau) + \tilde{\Pi}_2(t,\tau)\dot{y}(\tau),\ \ \eta_2[y](t,\tau) \equiv \Pi_4(t,\tau)\beta[y](\tau) + \tilde{\Pi}_4(t,\tau)\dot{y}(\tau),$$
$$(t,\tau)\in\Gamma,\ \ y\in \mathbf{Э}_1([0,T];V,H),$$

получим, что выражения для Λ_0 и Λ_1 можно переписать в виде

$$\Lambda_0[y](t) \equiv \Pi_1(t)\varphi + \Pi_2(t,0)\psi + \int\limits_0^t \eta_1[y](t,\tau)d\tau,\ \ \Lambda_1[y](t) \equiv \Pi_3(t)\varphi + \Pi_4(t,0)\psi + \int\limits_0^t \eta_2[y](t,\tau)d\tau,$$
$$t\in[0,T],\ \ y\in \mathbf{Э}_1([0,T];V,H).$$

Далее, пусть y_1, $y_2 \in \mathbf{Э}_1([0,T];V,H)$ — произвольны. Тогда при всех $(t,\tau)\in\Gamma$

$$\|\eta_1[y_1](t,\tau)-\eta_1[y_2](t,\tau)\|_V \leqslant \|\Pi_2(t,\tau)[\beta[y_1](\tau)-\beta[y_2](\tau)]\|_V+\|\tilde{\Pi}_2(t,\tau)[\dot{y}_1(\tau)-\dot{y}_1(\tau)]\|_V \leqslant$$
$$\leqslant \|\Pi_2(t,\tau)\|_{H\to V}\|\beta[y_1](\tau)-\beta[y_2](\tau)\|_H+\|\tilde{\Pi}_2(t,\tau)\|_{H\to V}\|\dot{y}_1(\tau)-\dot{y}_1(\tau)\|_H \leqslant \|\beta[y_1](\tau)-\beta[y_2](\tau)\|_H +$$
$$+\|\dot{y}_1(\tau)-\dot{y}_1(\tau)\|_H\int\limits_0^T\|P(\xi,\tau)\|_{H\to H}d\xi \leqslant K_0(\tau)\sqrt{\|y_1(t)-y_2(t)\|_V^2+\|\dot{y}_1(t)-\dot{y}_2(t)\|_H^2}+$$
$$+\sqrt{\|y_1(t)-y_2(t)\|_V^2+\|\dot{y}_1(t)-\dot{y}_2(t)\|_H^2}\int\limits_0^T\|P(\xi,\tau)\|_{H\to H}d\xi \equiv \tilde{K}_0(\tau)\sqrt{\|y_1(t)-y_2(t)\|_V^2+\|\dot{y}_1(t)-\dot{y}_2(t)\|_H^2}\,,$$
$$\|\eta_2[y_1](t,\tau)-\eta_2[y_2](t,\tau)\|_H \leqslant \|\Pi_4(t,\tau)[\beta[y_1](\tau)-\beta[y_2](\tau)]\|_H+\|\tilde{\Pi}_2(t,\tau)[\dot{y}_1(\tau)-\dot{y}_1(\tau)]\|_H \leqslant$$
$$\leqslant \|\Pi_2(t,\tau)\|_{H\to H}\|\beta[y_1](\tau)-\beta[y_2](\tau)\|_H+\|\tilde{\Pi}_2(t,\tau)\|_{H\to H}\|\dot{y}_1(\tau)-\dot{y}_1(\tau)\|_H \leqslant \|\beta[y_1](\tau)-\beta[y_2](\tau)\|_H +$$
$$+\|\dot{y}_1(\tau)-\dot{y}_1(\tau)\|_H\int\limits_0^T\|P(\xi,\tau)\|_{H\to H}d\xi \leqslant K_0(\tau)\sqrt{\|y_1(t)-y_2(t)\|_V^2+\|\dot{y}_1(t)-\dot{y}_2(t)\|_H^2}+$$
$$+\sqrt{\|y_1(t)-y_2(t)\|_V^2+\|\dot{y}_1(t)-\dot{y}_2(t)\|_H^2}\int\limits_0^T\|P(\xi,\tau)\|_{H\to H}d\xi \equiv \tilde{K}_0(\tau)\sqrt{\|y_1(t)-y_2(t)\|_V^2+\|\dot{y}_1(t)-\dot{y}_2(t)\|_H^2}\,,$$

где введено обозначение

$$\tilde{K}_0(\tau)\equiv K_0(\tau)+\int\limits_0^T\|P(\xi,\tau)\|_{H\to H}d\xi,\ \ \tau\in[0,T].$$

Иначе говоря, при всех y_1, $y_2\in\mathbf{Э}_1([0,T];V,H)$ и всех $(t,\tau)\in\Gamma$

$$\|\eta_1[y_1](t,\tau)-\eta_1[y_2](t,\tau)\|_V \leqslant \tilde{K}_0(\tau)\sqrt{\|y_1(t)-y_2(t)\|_V^2+\|\dot{y}_1(t)-\dot{y}_2(t)\|_H^2}\,,$$
$$\|\eta_2[y_1](t,\tau)-\eta_2[y_2](t,\tau)\|_H \leqslant \tilde{K}_0(\tau)\sqrt{\|y_1(t)-y_2(t)\|_V^2+\|\dot{y}_1(t)-\dot{y}_2(t)\|_H^2}\,.$$

Докажем теперь следующий результат о существовании и единственности решения уравнения (6.2.16).

Лемма 6.2.15. *Уравнение (6.2.16) имеет единственное решение* $y\in\mathbf{Э}_1([0,T];V,H)$. *Более того, существует постоянная* $\tilde{c}>0$, *определяемая лишь функцией* $\tilde{K}_0\in L_1[0,T]$, *такая, что*

$$\|y\|_{\mathbf{Э}_1([0,T];V,H)}\leqslant \tilde{c}\left[\sqrt{\|\varphi\|_V^2+\|\psi\|_H^2}+\int\limits_0^T\|\beta[0](t)\|_H\,dt\right]. \tag{6.2.18}$$

Доказательство. 1) Докажем вначале, что решение уравнения (6.2.16) существует и единственно. Для этого нам достаточно показать, что некоторая степень оператора $\Lambda_0\colon \mathbf{Э}_1([0,T];V,H)\to\mathbf{Э}_1([0,T];V,H)$ является сжимающим отображением. В силу (6.2.1),

$$\|\Lambda_0[y^1](t)-\Lambda_0[y^2](t)\|_V\leqslant\int\limits_0^t\tilde{K}_0(\xi)\sqrt{\|y^1(\xi)-y^2(\xi)\|_V^2+\|\dot{y}^1(\xi)-\dot{y}^2(\xi)\|_H^2}\,d\xi,$$
$$\left\|\frac{d\Lambda_0[y^1](t)}{dt}-\frac{d\Lambda_0[y^2](t)}{dt}\right\|_H\leqslant\int\limits_0^t\tilde{K}_0(\xi)\sqrt{\|y^1(\xi)-y^2(\xi)\|_V^2+\|\dot{y}^1(\xi)-\dot{y}^2(\xi)\|_H^2}\,d\xi,\ \ \forall\, t\in[0,T].$$

Поэтому

$$\sqrt{\|\Lambda_0[y^1](t)-\Lambda_0[y^2](t)\|_V^2+\left\|\frac{d\Lambda_0[y^1](t)}{dt}-\frac{d\Lambda_0[y^2](t)}{dt}\right\|_H^2}\leqslant$$
$$\leqslant 2\int\limits_0^t\tilde{K}_0(\xi)\sqrt{\|y^1(\xi)-y^2(\xi)\|_V^2+\|\dot{y}^1(\xi)-\dot{y}^2(\xi)\|_H^2}\,d\xi.$$

Определив функцию $\sigma\colon \mathbf{Э}_1([0,T];V,H) \to C[0,T]$ равенством $\sigma[y](t) \equiv \sqrt{\|y(t)\|_V^2 + \|\dot{y}(t)\|_H^2}$, $t \in [0,T]$, получим, что

$$\sigma[\Lambda_0[y^1] - \Lambda_0[y^2]](t) \leqslant 2\int\limits_0^t \tilde{K}_0(\xi)\sigma[y^1 - y^2](\xi)\,d\xi, \ \ \forall\, t \in [0,T].$$

Следовательно,

$$\sigma[\Lambda_0^2[y^1] - \Lambda_0^2[y^2]](t) = \sigma[\Lambda_0[\Lambda_0[y^1]] - \Lambda_0[\Lambda_0[y^2]]](t) \leqslant 2\int\limits_0^t \tilde{K}_0(\xi)\sigma[\Lambda_0[y^1] - \Lambda_0[y^2]](\xi)\,d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^t 2\tilde{K}_0(\xi_1)\left[\int\limits_0^{\xi_1} 2\tilde{K}_0(\xi_2)\sigma[y^1 - y^2](\xi_2)d\xi_2\right]d\xi_1 \leqslant \max_{\xi\in[0,T]}\sigma[y^1-y^2](\xi)\int\limits_0^t 2\tilde{K}_0(\xi_1)\left[\int\limits_0^{\xi_1} 2\tilde{K}_0(\xi_2)d\xi_2\right]d\xi_1 =$$

$$= \max_{\xi\in[0,T]}\sigma[y^1-y^2](\xi)\frac{1}{2!}\left[\int\limits_0^t 2\tilde{K}_0(\xi)\,d\xi\right]^2.$$

Итак,

$$\sigma[\Lambda_0[y^1] - \Lambda_0[y^2]](t) \leqslant \max_{\xi\in[0,T]}\sigma[y^1-y^2](\xi)\int\limits_0^t 2\tilde{K}_0(\xi)\,d\xi,$$

$$\sigma[\Lambda_0^2[y^1] - \Lambda_0^2[y^2]](t) \leqslant \max_{\xi\in[0,T]}\sigma[y^1-y^2](\xi)\frac{1}{2!}\left[\int\limits_0^t 2\tilde{K}_0(\xi)\,d\xi\right]^2 \quad \forall\, t \in [0,T].$$

Пусть для некоторого $m \geqslant 1$ доказано, что

$$\sigma[\Lambda_0^m[y^1] - \Lambda_0^m[y^2]](t) \leqslant \max_{\xi\in[0,T]}\sigma[y^1-y^2](\xi)\frac{1}{m!}\left[\int\limits_0^t 2\tilde{K}_0(\xi)\,d\xi\right]^m \quad \forall\, t \in [0,T].$$

Тогда при всех $t \in [0,T]$

$$\sigma[\Lambda_0^{m+1}[y^1] - \Lambda_0^{m+1}[y^2]](t) = \sigma[\Lambda_0[\Lambda_0^m[y^1]] - \Lambda_0[\Lambda_0^m[y^2]]](t) \leqslant \int\limits_0^t 2\tilde{K}_0(\xi)\sigma[\Lambda_0^m[y^1] - \Lambda_0^m[y^2]](\xi)\,d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^t 2\tilde{K}_0(\xi_1)\left[\max_{\tau\in[0,T]}\sigma[y^1-y^2](\tau)\frac{1}{m!}\left[\int\limits_0^{\xi_1} 2\tilde{K}_0(\xi_2)d\xi_2\right]^m\right]d\xi_1 =$$

$$= \max_{\tau\in[0,T]}\sigma[y^1-y^2](\tau)\frac{1}{(m+1)!}\left[\int\limits_0^t 2\tilde{K}_0(\xi)\,d\xi\right]^{m+1}.$$

Таким образом,

$$\sigma[\Lambda_0^m[y^1] - \Lambda_0^m[y^2]](t) \leqslant \max_{\xi\in[0,T]}\sigma[y^1-y^2](\xi)\frac{1}{m!}\left[\int\limits_0^t 2\tilde{K}_0(\xi)\,d\xi\right]^m \quad \forall\, t \in [0,T], \ \ m = 1, 2, \ldots.$$

Отсюда выводим, что

$$\|\Lambda_0^m[y^1] - \Lambda_0^m[y^2]\|_{\mathbf{Э}_1([0,T];V,H)} \leqslant \frac{1}{m!}\left[\int\limits_0^T 2\tilde{K}_0(\xi)\,d\xi\right]^m \|y^1 - y^2\|_{\mathbf{Э}_1([0,T];V,H)}, \ \ m = 1, 2, \ldots.$$

А это и означает, что некоторая степень оператора $\Lambda_0\colon \mathbf{Э}_1([0,T];V,H) \to \mathbf{Э}_1([0,T];V,H)$ является сжатием, что, в силу принципа неподвижной точки Банаха, означает существование единственного решения уравнения (6.2.16).

2) Докажем оценку (6.2.18). В самом деле,

$$\|y(t)\|_V = \|\Lambda_0[y](t)\|_V = \left\|\Pi_1(t)\varphi + \Pi_2(t,0)\psi + \int\limits_0^t \eta_1[y](t,\xi)d\xi\right\|_V \leqslant \|\Pi_1(t)\varphi\|_V +$$

$$+\|\Pi_2(t,0)\psi\|_V + \int\limits_0^t \|\eta_1[y](t,\xi)\|_V d\xi \leqslant \|\varphi\|_V + \|\psi\|_H + \int\limits_0^t \|\eta_1[y](t,\xi)\|_H d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \|\varphi\|_V + \|\psi\|_H + \int\limits_0^t \|\eta_1[0](t,\xi)\|_H d\xi + \int\limits_0^t \|\eta_1[y](t,\xi) - \eta_1[0](t,\xi)\|_H d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \|\varphi\|_V + \|\psi\|_H + \int\limits_0^t \|\beta[0](\xi)\|_H d\xi + \int\limits_0^t \tilde{K}_0(\tau)\sigma[y](\tau)\,d\tau.$$

Аналогично получаем, что

$$\|\dot{y}(t)\|_H \leqslant \|\varphi\|_V + \|\psi\|_H + \int\limits_0^t \|\beta[0](\xi)\|_H d\xi + \int\limits_0^t \tilde{K}_0(\tau)\sigma[y](\tau)\,d\tau.$$

Следовательно,

$$\sigma[y](t) \leqslant 2\left[\|\varphi\|_V + \|\psi\|_H + \int\limits_0^t \|\beta[0](\xi)\|_H d\xi + \int\limits_0^t \tilde{K}_0(\tau)\sigma[y](\tau)\,d\tau\right].$$

Окончательно выводим, что

$$\sigma[y](t) \leqslant 2\left[\|\varphi\|_V + \|\psi\|_H + \int\limits_0^T \|\beta[0](\xi)\|_H d\xi\right] + \int\limits_0^t 2\tilde{K}_0(\xi)\sigma[y](\xi)\,d\xi \;\; \forall\, t \in [0,T].$$

Применяя лемму 5.1.1, заключаем, что

$$\sigma[y](t) \leqslant 2\sqrt{2}\exp\left[\int\limits_0^T 2\tilde{K}_0(\xi)\,d\xi\right]\left[\sqrt{\|\varphi\|_V^2 + \|\psi\|_H^2} + \int\limits_0^t \|\beta[0](\xi)\|_H d\xi\right] \;\; \forall\, t \in [0,T].$$

Это и означает выполнение оценки (6.2.18) с $\tilde{c} \equiv 2\sqrt{2}\exp(\int\limits_0^T 2\tilde{K}_0(\xi)\,d\xi)$. Лемма полностью доказана. ■

Теорема 6.2.1. *Задача Коши (6.2.2)–(6.2.3) имеет единственное решение $\mathfrak{z} \in \boldsymbol{Э}_2([0,T];V,H)$, причём для этого решения выполнена оценка*

$$\|\mathfrak{z}\|_{\boldsymbol{Э}_1([0,T];V,H)} \leqslant \tilde{c}\left[\sqrt{\|\varphi\|_V^2 + \|\psi\|_H^2} + \int\limits_0^T \|\beta[0](\xi)\|_H\,dt\right], \tag{6.2.19}$$

где постоянная $\tilde{c} > 0$ — та же, что и в лемме 6.2.15.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{z} \in \boldsymbol{Э}_1([0,T];V,H)$ — решение уравнения (6.2.16) в классе $\boldsymbol{Э}_1([0,T];V,H)$, которое существует и единственно в силу леммы 6.2.15, причём для этого решения справедлива оценка (6.2.19) с постоянной $\tilde{c} > 0$, определяемой лишь функцией $\tilde{K}_0 \in L_1[0,T]$. Согласно же лемме 6.2.14, $\mathfrak{z} \in \boldsymbol{Э}_2([0,T];V,H)$ и является решением задачи Коши (6.2.2)–(6.2.3). Теорема доказана. ■

6.3. Абстрактная задача Коши с неавтономной главной частью

Пусть V, H, Z — сепарабельные гильбертовы пространства со скалярными произведениями $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$, $\langle\cdot,\cdot\rangle_H$ и $\langle\cdot,\cdot\rangle_Z$, и с соответствующими нормами $\|\cdot\|_V$, $\|\cdot\|_H$ и $\|\cdot\|_Z$; имеет место вложение $V \subset H$, и это вложение непрерывно и компактно. Иными словами, найдётся постоянная $c_0 > 0$, такая, что

$$\|v\|_H \leqslant c_0\|v\|_V \;\; \forall\, v \in V,$$

причём любое ограниченное в норме V множество предкомпактно в норме H. Сопряжённое к Z пространство отождествляем с Z.

Кроме того, пусть $T > 0$ — некоторое число, Y — рефлексивное банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_Y$, и пусть функции $\mathfrak{A} : [0,T] \to \mathcal{L}(V, V^*)$, $\mathfrak{B} : [0,T] \to \mathcal{L}(H, V^*)$, $\mathfrak{F} : [0,T] \to \mathcal{L}(Z, Z)$, и операторы $\mathfrak{C} \in \mathcal{L}(V, Y)$, $\mathfrak{G} \in \mathcal{L}(V, Z)$ таковы, что

1) при всех $v \in V$, $h \in H$, $z \in Z$ отображения
$$[0,T] \ni t \mapsto \mathfrak{A}(t)v \in V^*, \;\; [0,T] \ni t \mapsto \mathfrak{B}(t)h \in V^*, \;\; [0,T] \ni t \mapsto \mathfrak{F}(t)z \in Z,$$
измеримы в смысле Бохнера и абсолютно непрерывны;

2) найдутся постоянные c_1, $c_2 > 0$, такие, что
$$\langle \mathfrak{A}(t)v, v\rangle + c_1\|v\|_H^2 \geqslant c_2\|v\|_H^2 \;\; \forall\, v \in V;$$

3) при каждом фиксированном $t \in [0,T]$ оператор $\mathfrak{F}(t)$ — самосопряжён;

4) справедливо равенство
$$\langle \mathfrak{A}(t)v, w\rangle = \langle \mathfrak{A}(t)w, v\rangle \;\forall\, v,\; w \in V \text{ при всех } t \in [0,T];$$

5) операторы $\mathfrak{C}$ и $\mathfrak{G}$ — компактны;

6) найдётся постоянная $c_3 > 0$, такая, что
$$\max_{t\in[0,T]} \|\mathfrak{A}(t)\|_{V\to V^*} + \max_{t\in[0,T]} \|\mathfrak{B}(t)\|_{H\to V^*} + \operatorname*{vraisup}_{t\in[0,T]} \|\mathfrak{A}'(t)\|_{V\to V^*} + \operatorname*{vraisup}_{t\in[0,T]} \|\mathfrak{B}'(t)\|_{H\to V^*} +$$
$$+ \max_{t\in[0,T]} \|\mathfrak{F}(t)\|_{Z\to Z} + \operatorname*{vraisup}_{t\in[0,T]} \|\mathfrak{F}'(t)\|_{Z\to Z} \leqslant c_3;$$

7) для каждого $\varepsilon > 0$ найдётся число $c_4 = c_4(\varepsilon) > 0$, такое, что
$$\|\mathfrak{G}v\|_Z^2 \leqslant \varepsilon\|v\|_V^2 + c_4(\varepsilon)\|v\|_H^2 \;\; \forall\, v \in V.$$

Пусть e_j, $j = 1, 2, \ldots,$ — последовательность элементов V, являющихся ортонормированным базисом в H, ортогональным базисом в V и ортогональным базисом в V^*, причём
$$v = \sum_{j=1}^{\infty} v_j e_j, \;\; v_j = \langle v, e_j\rangle_H, \;\; j = 1, 2, \ldots, \;\; \|v\|_V^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \|e_j\|_V^2 |v_j|^2, \;\; \forall\, v \in V; \tag{6.3.1}$$
$$h = \sum_{j=1}^{\infty} h_j e_j, \;\; h_j = \langle h, e_j\rangle_H, \;\; j = 1, 2, \ldots, \;\; \|h\|_H^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |h_j|^2, \;\; \forall\, h \in H; \tag{6.3.2}$$
$$v^* = \sum_{j=1}^{\infty} v_j^* e_j, \;\; v_j^* = \langle v^*, e_j\rangle, \;\; j = 1, 2, \ldots, \;\; \|v^*\|_{V^*}^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \|e_j\|_{V^*}^2 |v_j^*|^2, \;\; \forall\, v^* \in V^*. \tag{6.3.3}$$

6.3.1. Линейное уравнение без меры Радона в правой части

Пусть $\varphi \in V$, $\psi \in H$, $f \in L_1([0,T], H)$, $\mathfrak{g} \in W_1^1([0,T], Y^*)$ — фиксированы.

Рассмотрим задачу Коши
$$\ddot{\mathfrak{z}}(t) + \mathfrak{A}(t)\mathfrak{z}(t) + \mathfrak{B}(t)\mathfrak{z}(t) + \mathfrak{G}^*\mathfrak{F}(t)\mathfrak{G}\mathfrak{z}(t) = f(t) + \mathfrak{C}^*\mathfrak{g}(t), \;\; t \in [0,T], \tag{6.3.4}$$
$$\mathfrak{z}(0) = \varphi, \;\; \dot{\mathfrak{z}}(0) = \psi, \tag{6.3.5}$$
и дадим следующее

Определение 6.3.1. *Функцию $\mathfrak{z} \in \text{Э}([0,T]; V, H)$ назовём решением задачи Коши (6.3.4), (6.3.5), если*
$$\int_0^T [-\langle \dot{\mathfrak{z}}(t), \dot{\eta}(t)\rangle_H + \langle \mathfrak{A}(t)\mathfrak{z}(t), \eta(t)\rangle + \langle \mathfrak{B}(t)\mathfrak{z}(t), \eta(t)\rangle + \langle \mathfrak{F}(t)\mathfrak{G}\mathfrak{z}(t), \mathfrak{G}\eta(t)\rangle_Z]dt = \tag{6.3.6}$$
$$= \langle \psi, \eta(0)\rangle + \int_0^T \langle f(t), \eta(t)\rangle_H dt + \int_0^T \langle \mathfrak{g}(t), \mathfrak{C}\eta(t)\rangle\, dt \;\; \forall\, \eta \in \hat{\text{Э}}([0,T]; V, H);$$
$$\mathfrak{z}(0) = \varphi.$$

Под $\hat{\mathfrak{Э}}([0,T];V,H)$ мы в данном определении понимаем множество $\{\mathfrak{z}\in \mathfrak{Э}([0,T];V,H) : \mathfrak{z}(T)=0\}$.

Далее под $\mathfrak{Э}_2([0,T];V,H)$ понимается $\{\mathfrak{z}\in \mathfrak{Э}([0,T];V,H) : \ddot{\mathfrak{z}}\in L_1([0,T],V^*)\}$.

Дадим ещё одно определение решения задачи Коши (6.3.4), (6.3.5).

Определение 6.3.2. *Функцию $\mathfrak{z}\in \mathfrak{Э}_2([0,T];V,H)$ назовём решением задачи Коши (6.3.4), (6.3.5), если*

$$\langle\ddot{\mathfrak{z}}(t),v\rangle+\langle\mathfrak{A}(t)\mathfrak{z}(t)+\mathfrak{B}(t)\mathfrak{z}(t)+\mathfrak{G}^*\mathfrak{F}(t)\mathfrak{G}\mathfrak{z}(t),v\rangle=\langle f(t),v\rangle+\langle\mathfrak{g}(t),\mathfrak{C}\eta(t)\rangle \quad \textit{при п.в. } t\in[0,T]\ \ \forall v\in V, \tag{6.3.7}$$
$$\mathfrak{z}(0)=\varphi,\ \ \dot{\mathfrak{z}}(0)=\psi.$$

Пусть $\mathfrak{M}^N\equiv\{\sum\limits_{j=1}^{N}\zeta_j e_j\ :\ \zeta_j\in W_2^1[0,T],\ \ \zeta_j(T)=0,\ \ j=\overline{1,\ N}\}$, $\mathfrak{M}\equiv\bigcup\limits_{N=1}^{\infty}\mathfrak{M}^N$.

Покажем, что справедлива следующая

Лемма 6.3.1. *Определения 6.3.1 и 6.3.2 — эквивалентны.*

Доказательство. 1) Докажем, что если функция $\mathfrak{z}\in \mathfrak{Э}_2([0,T];V,H)$ является решением в смысле определения 6.3.2, то она является и решением в смысле определения 6.3.1.

В самом деле, пусть $\mathfrak{z}\in \mathfrak{Э}_2([0,T];V,H)$ — решение в смысле определения 6.3.2.

Поскольку, согласно лемме 2.4.2, множество $\mathfrak{M}\equiv\bigcup\limits_{N=1}^{\infty}\mathfrak{M}^N$ плотно в $\hat{\mathcal{W}}_2^1([0,T];V,H)$, то нам достаточно доказать, что тождество (6.3.6) справедливо для функций η, имеющих вид $\eta(t)\equiv\zeta(t)e_j$, $t\in[0,T]$, где $\zeta\in W_2^1[0,T]$, $\zeta(T)=0$.

Действительно, взяв в равенстве (6.3.7) $v=\zeta(t)e_j$, $t\in[0,T]$, и проинтегрировав результат по $t\in[0,T]$, будем иметь

$$\int\limits_0^T\langle\ddot{\mathfrak{z}}(t),\zeta(t)e_j\rangle dt+\int\limits_0^T\langle\mathfrak{A}(t)\mathfrak{z}(t)+\mathfrak{B}(t)\mathfrak{z}(t)+\mathfrak{G}^*\mathfrak{F}(t)\mathfrak{G}\mathfrak{z}(t),\zeta(t)e_j\rangle dt=\int\limits_0^T\langle f(t),\zeta(t)e_j\rangle dt+\int\limits_0^T\langle\mathfrak{g}(t),\mathfrak{C}\eta(t)\rangle\,dt.$$

Взяв первый из стоящих слева интегралов по частям, получим справедливость тождества (6.3.6) для функций η, имеющих вид $\eta(t)\equiv\zeta(t)e_j$, $t\in[0,T]$, где $\zeta\in W_2^1[0,T]$, $\zeta(T)=0$.

Таким образом, мы доказали, что если $\mathfrak{z}\in \mathfrak{Э}_2([0,T];V,H)$ является решением в смысле определения 6.3.2, то она является и решением в смысле определения 6.3.1.

2) Докажем теперь, что если функция $\mathfrak{z}\in \mathfrak{Э}([0,T];V,H)$ является решением в смысле определения 6.3.1, то она является и решением в смысле определения 6.3.2.

Подставляя в интегральное тождество (6.3.6) $\eta(t)\equiv\zeta(t)v$, $t\in[0,T]$, где $\zeta\in W_2^1[0,T]$, $\zeta(T)=0$, $v\in V$, заключаем, что

$$\int\limits_0^T\langle-\dot{\mathfrak{z}}(t),\zeta'(t)v\rangle dt+\int\limits_0^T\langle\mathfrak{A}(t)\mathfrak{z}(t)+\mathfrak{B}(t)\mathfrak{z}(t)+\mathfrak{G}^*\mathfrak{F}(t)\mathfrak{G}\mathfrak{z}(t),\zeta(t)v\rangle dt= \tag{6.3.8}$$
$$=\int\limits_0^T\langle f(t),\zeta(t)v\rangle dt+\langle\psi,\zeta(0)v\rangle+\int\limits_0^T\langle\mathfrak{g}(t),\mathfrak{C}[v\zeta(t)]\rangle\,dt.$$

В частности, для всех $\zeta\in\mathfrak{D}(0,T)$

$$\int\limits_0^T\langle-\dot{\mathfrak{z}}(t),\zeta'(t)v\rangle dt+\int\limits_0^T\langle\mathfrak{A}(t)\mathfrak{z}(t)+\mathfrak{B}(t)\mathfrak{z}(t)+\mathfrak{G}^*\mathfrak{F}(t)\mathfrak{G}\mathfrak{z}(t),\zeta(t)v\rangle dt= \tag{6.3.9}$$
$$=\int\limits_0^T\langle f(t),\zeta(t)v\rangle dt+\int\limits_0^T\langle\mathfrak{C}^*\mathfrak{g}(t),\zeta(t)v\rangle\,dt.$$

Положив затем $\tilde f(\zeta)\equiv\int\limits_0^T f(t)\zeta(t)\,dt$, $\mathfrak{Z}(\zeta)\equiv\int\limits_0^T\mathfrak{z}(t)\zeta(t)\,dt$, $\tilde{\mathfrak{A}}(\zeta)\equiv\int\limits_0^T\mathfrak{A}(t)\mathfrak{z}(t)\zeta(t)\,dt$, $\tilde{\mathfrak{B}}(\zeta)\equiv\int\limits_0^T\mathfrak{B}(t)\mathfrak{z}(t)\zeta(t)\,dt$, $\tilde{\mathfrak{F}}(\zeta)\equiv\int\limits_0^T\mathfrak{G}^*\mathfrak{F}(t)\mathfrak{G}\mathfrak{z}(t)\zeta(t)\,dt$, $\tilde{\mathfrak{g}}(\zeta)\equiv\int\limits_0^T\mathfrak{C}^*\mathfrak{g}(t)\zeta(t)\,dt$ и замечая, что $\mathfrak{Z}'(\zeta)\equiv-\int\limits_0^T\dot{\mathfrak{z}}(t)\zeta(t)\,dt$, из тождества (6.3.9) получаем, что

$$-\mathfrak{Z}'(\zeta')+\tilde{\mathfrak{A}}(\zeta)+\tilde{\mathfrak{B}}(\zeta)+\tilde{\mathfrak{F}}(\zeta)=\tilde f(\zeta)+\tilde{\mathfrak{g}}(\zeta),\ \ \forall\,\zeta\in\mathfrak{D}(0,T),$$

или, иначе,

$$\mathfrak{Z}''(\zeta)+\tilde{\mathfrak{A}}(\zeta)+\tilde{\mathfrak{B}}(\zeta)+\tilde{\mathfrak{F}}(\zeta)=\tilde f(\zeta)+\tilde{\mathfrak{g}}(\zeta),\ \ \forall\,\zeta\in\mathfrak{D}(0,T),$$

Последнее означает, что $\mathfrak{Z}''$ — регулярна, и лежит в $L_1([0,T],V^*)$. Поэтому $\mathfrak{z} \in \text{Э}_2([0,T];V,H)$, и

$$\langle \ddot{\mathfrak{z}}(t) + \mathfrak{A}(t)\mathfrak{z}(t) + \mathfrak{B}(t)\mathfrak{z}(t) + \mathfrak{G}^*\mathfrak{F}(t)\mathfrak{G}\mathfrak{z}(t) - f(t) - \mathfrak{C}^*\mathfrak{g}(t),\, v\rangle = 0,\ \ \forall\, v \in V. \tag{6.3.10}$$

Взяв по частям первый из интегралов, стоящих в левой части тождества 6.3.8, выводим, что

$$\int\limits_0^T \langle \ddot{\mathfrak{z}}(t) + \mathfrak{A}(t)\mathfrak{z}(t) + \mathfrak{B}(t)\mathfrak{z}(t) + \mathfrak{G}^*\mathfrak{F}(t)\mathfrak{G}\mathfrak{z}(t) - f(t) - \mathfrak{C}^*\mathfrak{g}(t), \zeta(t)v\rangle dt + \langle \dot{\mathfrak{z}}(0), \zeta(0)v\rangle = \langle \psi, \zeta(0)v\rangle.$$

Учтя здесь равенство (6.3.10), получим, что

$$\langle \dot{\mathfrak{z}}(0) - \psi, v\rangle = 0\ \ \forall\, v \in V.$$

Иными словами,

$$\dot{\mathfrak{z}}(0) = \psi.$$

Из этого соотношения и соотношения (6.3.10) и вытекает, что $\mathfrak{z}$ является решением в смысле определения 6.3.2.

Лемма полностью доказана. ■

Покажем, что имеет место

Теорема 6.3.1. *Задача Коши (6.3.4), (6.3.5) имеет единственное решение $\mathfrak{z}$ в смысле определения 6.3.1, причём найдётся постоянная $\varkappa_1 > 0$, зависящая лишь от T, c_1, c_2, $c_3 > 0$ и от $\|\mathfrak{C}\|_{V\to Y}$, $\|\mathfrak{G}\|_{V\to Z}$, такая, что*

$$\|\mathfrak{z}\|_{\text{Э}([0,T];V,H)} \leqslant \varkappa_1[\sqrt{\|\varphi\|_V^2 + \|\psi\|_H^2} + \|f\|_{1,[0,T],H} + \|\mathfrak{g}\|^{(1)}_{1,[0,T],Y^*}]. \tag{6.3.11}$$

Доказательство. Доказательство разобьём на три части.

1) Докажем сначала единственность решения. В самом деле, пусть $\mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{z}_2 \in \text{Э}([0,T];V,H)$ — решения задачи Коши (6.3.4), (6.3.5) в смысле определения 6.3.1, и пусть $\mathfrak{w} \equiv \mathfrak{z}_1 - \mathfrak{z}_2$. Тогда $\mathfrak{w} \in \text{Э}([0,T];V,H)$ и удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int\limits_0^T [-\langle \dot{\mathfrak{w}}(t), \dot{\eta}(t)\rangle_H + \langle \mathfrak{A}(t)\mathfrak{w}(t), \eta(t)\rangle + \langle \mathfrak{B}(t)\mathfrak{w}(t), \eta(t)\rangle + \langle \mathfrak{F}(t)\mathfrak{G}\mathfrak{w}(t), \mathfrak{G}\eta(t)\rangle_Z]dt = 0 \tag{6.3.12}$$

$$\forall\, \eta \in \hat{\text{Э}}([0,T];V,H);\quad \mathfrak{w}(0) = 0.$$

Введём функции $\eta^\alpha : [0,T] \to V$ ($\alpha \in [0,T]$ — параметр) и $\beta : [0,T] \to V$ равенствами

$$\eta^\alpha(t) = -\chi_{[0,\alpha]}(t)\int\limits_t^\alpha \mathfrak{w}(\xi)d\xi,\ \ \beta(t) = \int\limits_0^t \mathfrak{w}(\xi)d\xi,\ \ t \in [0,T].$$

Можно показать, что $\eta^\alpha \in \text{Э}([0,T];V,H)$, $\dot{\eta}^\alpha \in L_\infty([0,T],V) \cap C([0,\alpha],V)$, $\ddot{\eta}^\alpha \in C([0,\alpha],H)$, причём

$$\dot{\eta}^\alpha(t) = \chi_{[0,\alpha]}(t)\mathfrak{w}(t),\ \ t \in [0,T];\ \ \ddot{\eta}^\alpha(t) = \dot{\mathfrak{w}}(t),\ \ t \in [0,\alpha].$$

Полагая в (6.3.12) $\eta = \eta^\alpha$, получаем, что для всех $\alpha \in [0,T]$

$$\int\limits_0^\alpha [-\langle \ddot{\eta}^\alpha(t), \dot{\eta}^\alpha(t)\rangle_H + \langle \mathfrak{A}(t)\dot{\eta}^\alpha(t), \eta^\alpha(t)\rangle + \langle \mathfrak{B}(t)\dot{\eta}^\alpha(t), \eta^\alpha(t)\rangle + \langle \mathfrak{F}(t)\mathfrak{G}\dot{\eta}^\alpha(t), \mathfrak{G}\eta^\alpha(t)\rangle]dt = 0.$$

Интегрируя это соотношение по частям, выводим, что

$$-\frac{1}{2}[\|\mathfrak{w}(\alpha)\|_H^2 + \langle \mathfrak{A}(0)\eta^\alpha(0), \eta^\alpha(0)\rangle] - \frac{1}{2}\langle \mathfrak{F}(0)\mathfrak{G}\eta^\alpha(0), \mathfrak{G}\eta^\alpha(0)\rangle_Z -$$

$$-\int\limits_0^\alpha \left[\frac{1}{2}\langle \mathfrak{A}'(t)\eta^\alpha(t), \eta^\alpha(t)\rangle - \langle \mathfrak{B}(t)\dot{\eta}^\alpha(t), \eta^\alpha(t)\rangle + \frac{1}{2}\langle \mathfrak{F}'(t)\mathfrak{G}\eta^\alpha(t), \mathfrak{G}\eta^\alpha(t)\rangle_Z\right] dt = 0.$$

Поэтому

$$\frac{1}{2}[\|\mathfrak{w}(\alpha)\|_H^2+\langle\mathfrak{A}(0)\eta^\alpha(0),\eta^\alpha(0)\rangle]=-\frac{1}{2}\langle\mathfrak{F}(0)\mathfrak{G}\eta^\alpha(0),\mathfrak{G}\eta^\alpha(0)\rangle_Z-\int\limits_0^\alpha\left[\frac{1}{2}\langle\mathfrak{A}'(t)\eta^\alpha(t),\eta^\alpha(t)\rangle-\langle\mathfrak{B}(t)\dot{\eta}^\alpha(t),\eta^\alpha(t)\rangle+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\langle\mathfrak{F}'(t)\mathfrak{G}\eta^\alpha(t),\mathfrak{G}\eta^\alpha(t)\rangle_Z\right]dt\leqslant\frac{c_3}{2}\|\mathfrak{G}\eta^\alpha(0)\|_Z^2+\int\limits_0^\alpha\left[\frac{1}{2}\|\mathfrak{A}'(t)\|_{V\to V^*}\|\eta^\alpha(t)\|_V^2+\|\mathfrak{B}(t)\|_{H\to V^*}\|\mathfrak{w}(t)\|_H\|\eta^\alpha(t)\|_V+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\|\mathfrak{F}'(t)\|_{Z\to Z}\|\mathfrak{G}\eta^\alpha(t)\|_Z^2\right]dt\leqslant\frac{c_3}{2}\|\mathfrak{G}\eta^\alpha(0)\|_Z^2+\int\limits_0^\alpha\left[\frac{1}{2}\|\mathfrak{A}'(t)\|_{V\to V^*}\|\eta^\alpha(t)\|_V^2+\frac{1}{2}\|\mathfrak{B}(t)\|_{H\to V^*}\|\mathfrak{w}(t)\|_H^2+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\|\mathfrak{B}(t)\|_{H\to V^*}\|\eta^\alpha(t)\|_V^2+\frac{c_3}{2}\|\mathfrak{G}\|_{V\to Z}^2\|\eta^\alpha(t)\|_V^2\right]dt\leqslant\frac{c_3}{2}\|\mathfrak{G}\eta^\alpha(0)\|_Z^2+$$

$$+\int\limits_0^\alpha c_3\left[1+\frac{1}{2}\|\mathfrak{G}\|_{V\to Z}^2\right][\|\mathfrak{w}(t)\|_H^2+\|\eta^\alpha(t)\|_V^2]dt\leqslant\frac{c_3}{2}\varepsilon\|\eta^\alpha(0)\|_V^2+\frac{c_3c_4(\varepsilon)}{2}\|\eta^\alpha(0)\|_H^2+$$

$$+\int\limits_0^\alpha c_3\left[1+\frac{1}{2}\|\mathfrak{G}\|_{V\to Z}^2\right][\|\mathfrak{w}(t)\|_H^2+\|\eta^\alpha(t)\|_V^2]dt=\frac{c_3}{2}\varepsilon\|\eta^\alpha(0)\|_V^2+\frac{c_3c_4(\varepsilon)}{2}\left\|\int\limits_0^\alpha\mathfrak{w}(\xi)d\xi\right\|_H^2+$$

$$+\int\limits_0^\alpha c_3\left[1+\frac{1}{2}\|\mathfrak{G}\|_{V\to Z}^2\right][\|\mathfrak{w}(t)\|_H^2+\|\eta^\alpha(t)\|_V^2]dt\leqslant\frac{c_3}{2}\varepsilon\|\eta^\alpha(0)\|_V^2+\frac{c_3c_4(\varepsilon)}{2}\left[\int\limits_0^\alpha 1\cdot\|\mathfrak{w}(\xi)\|_H d\xi\right]^2+$$

$$+\int\limits_0^\alpha c_3\left[1+\frac{1}{2}\|\mathfrak{G}\|_{V\to Z}^2\right][\|\mathfrak{w}(t)\|_H^2+\|\eta^\alpha(t)\|_V^2]dt\leqslant\frac{c_3}{2}\varepsilon\|\eta^\alpha(0)\|_V^2+\frac{c_3c_4(\varepsilon)}{2}\alpha\int\limits_0^\alpha\|\mathfrak{w}(\xi)\|_H^2d\xi+$$

$$+\int\limits_0^\alpha c_3\left[1+\frac{1}{2}\|\mathfrak{G}\|_{V\to Z}^2\right][\|\mathfrak{w}(t)\|_H^2+\|\eta^\alpha(t)\|_V^2]dt\leqslant\frac{c_3}{2}\varepsilon\|\eta^\alpha(0)\|_V^2+$$

$$+\int\limits_0^\alpha c_3\left[1+\frac{1}{2}\|\mathfrak{G}\|_{V\to Z}^2+\frac{c_4(\varepsilon)}{2}T\right][\|\mathfrak{w}(t)\|_H^2+\|\eta^\alpha(t)\|_V^2]dt.$$

Итак,

$$\|\mathfrak{w}(\alpha)\|_H^2+\langle\mathfrak{A}(0)\eta^\alpha(0),\eta^\alpha(0)\rangle-c_3\varepsilon\|\eta^\alpha(0)\|_V^2\leqslant\int\limits_0^\alpha\tilde{c}_0(\varepsilon)[\|\mathfrak{w}(t)\|_H^2+\|\eta^\alpha(t)\|_V^2]dt,$$

где введено обозначение $\tilde{c}_0(\varepsilon)=c_3[2+\|\mathfrak{G}\|_{V\to Z}^2+c_4(\varepsilon)T]$.

Добавив к обеим частям этого неравенства величину $c_1\|\eta^\alpha(0)\|_H^2$, получим, что

$$\|\mathfrak{w}(\alpha)\|_H^2+(c_2-c_3\varepsilon)\|\eta^\alpha(0)\|_V^2\leqslant\int\limits_0^\alpha\tilde{c}_0(\varepsilon)[\|\mathfrak{w}(t)\|_H^2+\|\eta^\alpha(t)\|_V^2]dt+c_1\left\|\int\limits_0^\alpha\mathfrak{w}(\xi)d\xi\right\|_H^2\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_0^\alpha\tilde{c}_0(\varepsilon)[\|\mathfrak{w}(t)\|_H^2+\|\eta^\alpha(t)\|_V^2]dt+c_1c_0^2\left[\int\limits_0^\alpha\|\mathfrak{w}(\xi)\|_V d\xi\right]^2\leqslant\int\limits_0^\alpha\tilde{c}_1(\varepsilon)[\|\mathfrak{w}(t)\|_H^2+\|\eta^\alpha(t)\|_V^2]dt,$$

где $\tilde{c}_1(\varepsilon)=\tilde{c}_0(\varepsilon)+c_1c_0^2T$.

Таким образом,

$$\|\mathfrak{w}(\alpha)\|_H^2+(c_2-c_3\varepsilon)\|\eta^\alpha(0)\|_V^2\leqslant\int\limits_0^\alpha\tilde{c}_1(\varepsilon)[\|\mathfrak{w}(t)\|_H^2+\|\eta^\alpha(t)\|_V^2]dt.$$

Взяв здесь $\varepsilon=\frac{c_2}{2c_3}$ и введя обозначение $\tilde{c}_2\equiv\tilde{c}_1\left(\frac{c_2}{2c_3}\right)$, получим, что

$$\|\mathfrak{w}(\alpha)\|_H^2+\frac{c_2}{2}\|\eta^\alpha(0)\|_V^2\leqslant\int\limits_0^\alpha\tilde{c}_2[\|\mathfrak{w}(t)\|_H^2+\|\eta^\alpha(t)\|_V^2]dt.$$

С помощью функции β это можно переписать в виде

$$\|\mathfrak{w}(\alpha)\|_H^2+\frac{c_2}{2}\|\beta(\alpha)\|_V^2\leqslant\int\limits_0^\alpha\tilde{c}_2[\|\mathfrak{w}(t)\|_H^2+\|\beta(t)-\beta(\alpha)\|_V^2]dt=\int\limits_0^\alpha\tilde{c}_2[\|\mathfrak{w}(t)\|_H^2+\|\beta(t)\|_V^2+\|\beta(\alpha)\|_V^2-$$

$$-2\langle\beta(t),\beta(\alpha)\rangle_V]dt\leqslant\int\limits_0^\alpha\tilde{c}_2[\|\mathfrak{w}(t)\|_H^2+2\|\beta(t)\|_V^2+2\|\beta(\alpha)\|_V^2]dt=\int\limits_0^\alpha\tilde{c}_2[\|\mathfrak{w}(t)\|_H^2+2\|\beta(t)\|_V^2]dt+$$

$$+2\tilde{c}_2\alpha\|\beta(\alpha)\|_V^2\leqslant\int\limits_0^\alpha 2\tilde{c}_2[\|\mathfrak{w}(t)\|_H^2+\|\beta(t)\|_V^2]dt+2\tilde{c}_2\alpha\|\beta(\alpha)\|_V^2.$$

Отсюда вытекает, что

$$\|\mathfrak{w}(\alpha)\|_H^2+\left(\frac{c_2}{2}-2\tilde{c}_2\alpha\right)\|\beta(\alpha)\|_V^2\leqslant\int\limits_0^\alpha 2\tilde{c}_2[\|\mathfrak{w}(t)\|_H^2+\|\beta(t)\|_V^2]dt.$$

Ограничившись в данном неравенстве числами $\alpha\in[0,\alpha_0]$, где $\alpha_0\equiv\dfrac{c_2}{8\tilde{c}_2}$, получим, что для всех $\alpha\in[0,\alpha_0]$

$$\|\mathfrak{w}(\alpha)\|_H^2+\|\beta(\alpha)\|_V^2\leqslant\int\limits_0^\alpha\frac{2\tilde{c}_0}{\min\{1,\frac{c_2}{4}\}}[\|\mathfrak{w}(t)\|_H^2+\|\beta(t)\|_V^2]dt.$$

Применив к данному неравенству лемму Гронуолла, выводим, что

$$\|\mathfrak{w}(\alpha)\|_H^2+\|\beta(\alpha)\|_V^2=0,\ \ \alpha\in[0,\alpha_0].$$

Рассуждая аналогичным образом, за конечное число шагов получим, что

$$\|\mathfrak{w}(\alpha)\|_H^2+\|\beta(\alpha)\|_V^2=0,\ \ \alpha\in[0,T].$$

Вспоминая теперь определение функции $\mathfrak{w}$, заключаем, что единственность решения доказана.

2) Докажем существование решения.

Будем искать приближённое решение $\mathfrak{z}^N$ задачи Коши (6.3.4), (6.3.5) в виде $\mathfrak{z}^N(t)\equiv\sum\limits_{m=1}^N h_m^N(t)e_m$, где набор функций $h_m^N\in W_1^1[0,T]$, $m=\overline{1,N}$, — единственное решение задачи Коши

$$\ddot{h}_k^N(t)+\sum_{m=1}^N\mathfrak{a}_{km}(t)h_m^N(t)=f_k(t)+(\mathfrak{C}^*\mathfrak{g}(t))_k,\ \ t\in[0,T],\tag{6.3.13}$$

$$h_k^N(0)=\varphi_k,\ \ \dot{h}_k^N(0)=\psi_k,\ \ k=\overline{1,N}.\tag{6.3.14}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\mathfrak{a}_{km}(t)\equiv\langle\mathfrak{A}(t)e_m+\mathfrak{B}(t)e_m,e_k\rangle+\langle\mathfrak{F}(t)\mathfrak{G}e_m,\mathfrak{G}e_k\rangle_Z,\ \ f_k(t)\equiv\langle f(t),e_k\rangle_H,\ \ (\mathfrak{C}^*\mathfrak{g}(t))_k\equiv\langle\mathfrak{C}^*\mathfrak{g}(t),e_k\rangle,$$
$$\varphi_k\equiv\langle\varphi,e_k\rangle_H,\ \ \psi_k\equiv\langle\psi,e_k\rangle_H,\ \ m,\ k=1,2,\dots,\ \ t\in[0,T].$$

Умножив k–е уравнение (6.3.13) на $\dot{h}_k^N(t)$, сложив все получившиеся уравнения, и проинтегрировав результат по $t\in[0,\tau]$, выводим, что

$$\frac{1}{2}[\|\dot{\mathfrak{z}}^N(\tau)\|_H^2+\langle\mathfrak{A}(\tau)\mathfrak{z}^N(\tau),\mathfrak{z}^N(\tau)\rangle]-\frac{1}{2}[\|\dot{\mathfrak{z}}^N(0)\|_H^2+\langle\mathfrak{A}(0)\mathfrak{z}^N(0),\mathfrak{z}^N(0)\rangle]+\Bigg[\langle\mathfrak{B}(t)\mathfrak{z}^N(t),\mathfrak{z}^N(t)\rangle+$$

$$+\frac{1}{2}\langle\mathfrak{F}(t)\mathfrak{G}\mathfrak{z}^N(t),\mathfrak{G}\mathfrak{z}^N(t)\rangle_Z-\langle\mathfrak{g}(t),\mathfrak{C}\mathfrak{z}^N(t)\rangle\Bigg]\Bigg|_{t=0}^{t=\tau}-\int\limits_0^\tau\Bigg[\frac{1}{2}\langle\mathfrak{A}'(t)\mathfrak{z}^N(t),\mathfrak{z}^N(t)\rangle+\langle\mathfrak{B}'(t)\mathfrak{z}^N(t),\mathfrak{z}^N(t)\rangle+$$

$$+\langle\mathfrak{B}(t)\dot{\mathfrak{z}}^N(t),\mathfrak{z}^N(t)\rangle\Bigg]dt-\frac{1}{2}\int\limits_0^\tau\langle\mathfrak{F}'(t)\mathfrak{G}\mathfrak{z}^N(t),\mathfrak{G}\mathfrak{z}^N(t)\rangle_Z\,dt=\int\limits_0^\tau\langle f(t),\dot{\mathfrak{z}}^N(t)\rangle_H\,dt-\int\limits_0^\tau\langle\mathfrak{g}'(t),\mathfrak{C}\mathfrak{z}^N(t)\rangle\,dt.$$

Поэтому

$$\frac{1}{2}[\|\dot{\mathfrak{z}}^N(\tau)\|_H^2+\langle\mathfrak{A}(\tau)\mathfrak{z}^N(\tau),\mathfrak{z}^N(\tau)\rangle]\leqslant\frac{1}{2}[\|\dot{\mathfrak{z}}^N(0)\|_H^2+\langle\mathfrak{A}(0)\mathfrak{z}^N(0),\mathfrak{z}^N(0)\rangle]+\Bigg[-\langle\mathfrak{B}(t)\mathfrak{z}^N(t),\mathfrak{z}^N(t)\rangle-$$

$$-\frac{1}{2}\langle\mathfrak{F}(t)\mathfrak{G}\mathfrak{z}^N(t),\mathfrak{G}\mathfrak{z}^N(t)\rangle_Z+\langle\mathfrak{g}(t),\mathfrak{C}\mathfrak{z}^N(t)\rangle\Bigg]\Bigg|_{t=0}^{t=\tau}+\int\limits_0^\tau\Bigg[\frac{c_3}{2}\|\mathfrak{z}^N(t)\|_V^2+c_3\|\dot{\mathfrak{z}}^N(t)\|_H\|\mathfrak{z}^N(t)\|_V+$$

$$+c_3\|\dot{\mathfrak{z}}^N(t)\|_H\|\mathfrak{z}^N(t)\|_V\Bigg]dt+\frac{c_3}{2}\int\limits_0^\tau\|\mathfrak{G}\mathfrak{z}^N(t)\|_Z^2dt+$$

$$+[\|f\|_{1,[0,T],H}+\|\mathfrak{C}\|_{V\to Y}\|\mathfrak{g}\|^{(1)}_{1,[0,T],Y^*}]\max_{t\in[0,\tau]}\sqrt{\|\dot{\mathfrak{z}}^N(t)\|_H^2+\|\mathfrak{z}^N(t)\|_V^2}\leqslant\frac{\max\{1,c_3\}}{2}[\|\dot{\mathfrak{z}}^N(0)\|_H^2+\|\mathfrak{z}^N(0)\|_V^2]+$$

$$+c_3\|\mathfrak{z}^N(\tau)\|_H\|\mathfrak{z}^N(\tau)\|_V+c_3\|\mathfrak{z}^N(0)\|_H\|\mathfrak{z}^N(0)\|_V+\frac{c_3}{2}\|\mathfrak{G}\mathfrak{z}^N(\tau)\|_Z^2+\frac{c_3}{2}\|\mathfrak{G}\|_{V\to Z}^2\|\mathfrak{z}^N(0)\|_V^2+$$

$$+\|\mathfrak{g}(\tau)\|_{Y^*}\|\mathfrak{C}\|_{V\to Y}\|\mathfrak{z}^N(\tau)\|_V+\|\mathfrak{g}(0)\|_{Y^*}\|\mathfrak{C}\|_{V\to Y}\|\mathfrak{z}^N(0)\|_V+\int\limits_0^\tau c_3(1+c_0)[\|\mathfrak{z}^N(t)\|_V^2+\|\dot{\mathfrak{z}}^N(t)\|_H^2]\,dt+$$

$$+\frac{c_3\|\mathfrak{G}\|_{V\to Z}^2}{2}\int\limits_0^\tau\|\mathfrak{z}^N(t)\|_V^2dt+[\|f\|_{1,[0,T],H}+\|\mathfrak{C}\|_{V\to Y}\|\mathfrak{g}\|^{(1)}_{1,[0,T],Y^*}]\max_{t\in[0,\tau]}\sqrt{\|\dot{\mathfrak{z}}^N(t)\|_H^2+\|\mathfrak{z}^N(t)\|_V^2}\,.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{2}[\|\dot{\mathfrak{z}}^N(\tau)\|_H^2+\langle\mathfrak{A}(\tau)\mathfrak{z}^N(\tau),\mathfrak{z}^N(\tau)\rangle]\leqslant\rho_1[\|\dot{\mathfrak{z}}^N(0)\|_H^2+\|\mathfrak{z}^N(0)\|_V^2]+\rho_1\int\limits_0^\tau[\|\mathfrak{z}^N(t)\|_V^2+\|\dot{\mathfrak{z}}^N(t)\|_H^2]\,dt+$$

$$+c_3\|\mathfrak{z}^N(\tau)\|_H\|\mathfrak{z}^N(\tau)\|_V+\frac{c_3}{2}\|\mathfrak{G}\mathfrak{z}^N(\tau)\|_Z^2+[\|\mathfrak{C}\|_{V\to Y}[\|\mathfrak{g}(\tau)\|_{Y^*}+\|\mathfrak{g}(0)\|_{Y^*}+\|\mathfrak{g}\|^{(1)}_{1,[0,T],Y^*}]+$$

$$+\|f\|_{1,[0,T],H}]\max_{t\in[0,\tau]}\sqrt{\|\dot{\mathfrak{z}}^N(t)\|_H^2+\|\mathfrak{z}^N(t)\|_V^2}\,,$$

где $\rho_1\equiv\max\{1,c_3\}+c_3c_0+\frac{c_3\|\mathfrak{G}\|_{V\to Z}^2}{2}$.

Применяя к данному неравенству теорему 2.3.3, будем иметь

$$\frac{1}{2}[\|\dot{\mathfrak{z}}^N(\tau)\|_H^2+\langle\mathfrak{A}(\tau)\mathfrak{z}^N(\tau),\mathfrak{z}^N(\tau)\rangle]\leqslant\rho_1[\|\dot{\mathfrak{z}}^N(0)\|_H^2+\|\mathfrak{z}^N(0)\|_V^2]+\rho_1\int\limits_0^\tau[\|\mathfrak{z}^N(t)\|_V^2+\|\dot{\mathfrak{z}}^N(t)\|_H^2]\,dt+$$

$$+c_3\|\mathfrak{z}^N(\tau)\|_H\|\mathfrak{z}^N(\tau)\|_V+\frac{c_3}{2}\|\mathfrak{G}\mathfrak{z}^N(\tau)\|_Z^2+\rho_2[\|\mathfrak{g}\|^{(1)}_{1,[0,T],Y^*}+\|f\|_{1,[0,T],H}]\max_{t\in[0,\tau]}\sqrt{\|\dot{\mathfrak{z}}^N(t)\|_H^2+\|\mathfrak{z}^N(t)\|_V^2}\,,$$

где $\rho_2\equiv[2A_1+1]\|\mathfrak{C}\|_{V\to Y}$.

Применяя к слагаемому $\|\mathfrak{z}^N(\tau)\|_H\|\mathfrak{z}^N(\tau)\|_V$ неравенство Коши с ε, заключаем, что

$$\frac{1}{2}[\|\dot{\mathfrak{z}}^N(\tau)\|_H^2+\langle\mathfrak{A}(\tau)\mathfrak{z}^N(\tau),\mathfrak{z}^N(\tau)\rangle]\leqslant\rho_1[\|\dot{\mathfrak{z}}^N(0)\|_H^2+\|\mathfrak{z}^N(0)\|_V^2]+\rho_1\int\limits_0^\tau[\|\mathfrak{z}^N(t)\|_V^2+\|\dot{\mathfrak{z}}^N(t)\|_H^2]\,dt+$$

$$+c_3\left[\frac{1}{2\varepsilon}\|\mathfrak{z}^N(\tau)\|_H^2+\frac{\varepsilon}{2}\|\mathfrak{z}^N(\tau)\|_V^2\right]+\frac{c_3}{2}\|\mathfrak{G}\mathfrak{z}^N(\tau)\|_Z^2+\rho_2[\|\mathfrak{g}\|^{(1)}_{1,[0,T],Y^*}+\|f\|_{1,[0,T],H}]\max_{t\in[0,\tau]}\sqrt{\|\dot{\mathfrak{z}}^N(t)\|_H^2+\|\mathfrak{z}^N(t)\|_V^2}\,.$$

Учитывая здесь условия на оператор $\mathfrak{G}$, выводим, что

$$\frac{1}{2}[\|\dot{\mathfrak{z}}^N(\tau)\|_H^2+\langle\mathfrak{A}(\tau)\mathfrak{z}^N(\tau),\mathfrak{z}^N(\tau)\rangle]\leqslant\rho_1[\|\dot{\mathfrak{z}}^N(0)\|_H^2+\|\mathfrak{z}^N(0)\|_V^2]+\rho_1\int\limits_0^\tau[\|\mathfrak{z}^N(t)\|_V^2+\|\dot{\mathfrak{z}}^N(t)\|_H^2]\,dt+$$

$$+c_3\left[\frac{1}{2\varepsilon}\|\mathfrak{z}^N(\tau)\|_H^2+\frac{\varepsilon}{2}\|\mathfrak{z}^N(\tau)\|_V^2\right]+\frac{c_3}{2}\left[\varepsilon\|\mathfrak{z}^N(\tau)\|_V^2+c_4(\varepsilon)\|\mathfrak{z}^N(\tau)\|_H^2\right]+$$

$$+\rho_2[\|\mathfrak{g}\|^{(1)}_{1,[0,T],Y^*}+\|f\|_{1,[0,T],H}]\max_{t\in[0,\tau]}\sqrt{\|\dot{\mathfrak{z}}^N(t)\|_H^2+\|\mathfrak{z}^N(t)\|_V^2}\,.$$

Отсюда вытекает, что

$$\|\dot{\mathfrak{z}}^N(\tau)\|_H^2 + \langle\mathfrak{A}(\tau)\mathfrak{z}^N(\tau), \mathfrak{z}^N(\tau)\rangle - 2c_3\varepsilon\|\mathfrak{z}^N(\tau)\|_V^2 \leqslant 2\rho_1[\|\dot{\mathfrak{z}}^N(0)\|_H^2 + \|\mathfrak{z}^N(0)\|_V^2] +$$

$$+2\rho_1\int\limits_0^\tau [\|\mathfrak{z}^N(t)\|_V^2 + \|\dot{\mathfrak{z}}^N(t)\|_H^2]\,dt + \rho_3(\varepsilon)\|\mathfrak{z}^N(\tau)\|_H^2 + 2\rho_2[\|\mathfrak{g}\|^{(1)}_{1,[0,T],Y^*} + \|f\|_{1,[0,T],H}]\max_{t\in[0,\tau]}\sqrt{\|\dot{\mathfrak{z}}^N(t)\|_H^2 + \|\mathfrak{z}^N(t)\|_V^2}\,,$$

где $\rho_3(\varepsilon) \equiv c_3(\varepsilon^{-1} + c_4(\varepsilon))$.

Прибавляя к обеим частям данного неравенства слагаемое $c_1\|\mathfrak{z}^N(\tau)\|_H^2$, получим, что

$$\|\dot{\mathfrak{z}}^N(\tau)\|_H^2 + [c_2 - 2c_3\varepsilon]\|\mathfrak{z}^N(\tau)\|_V^2 \leqslant 2\rho_1[\|\dot{\mathfrak{z}}^N(0)\|_H^2 + \|\mathfrak{z}^N(0)\|_V^2] + 2\rho_1\int\limits_0^\tau [\|\mathfrak{z}^N(t)\|_V^2 + \|\dot{\mathfrak{z}}^N(t)\|_H^2]\,dt +$$

$$+[\rho_3(\varepsilon) + c_1]\|\mathfrak{z}^N(\tau)\|_H^2 + 2\rho_2[\|\mathfrak{g}\|^{(1)}_{1,[0,T],Y^*} + \|f\|_{1,[0,T],H}]\max_{t\in[0,\tau]}\sqrt{\|\dot{\mathfrak{z}}^N(t)\|_H^2 + \|\mathfrak{z}^N(t)\|_V^2}\,.$$

Однако,

$$\|\mathfrak{z}^N(\tau)\|_H^2 = \left\|\mathfrak{z}^N(0) + \int\limits_0^\tau \dot{\mathfrak{z}}^N(t)dt\right\|_H^2 \leqslant 2\|\mathfrak{z}^N(0)\|_H^2 + 2\left\|\int\limits_0^\tau \dot{\mathfrak{z}}^N(t)dt\right\|_H^2 \leqslant 2c_0^2\|\mathfrak{z}^N(0)\|_V^2 + 2\tau\int\limits_0^\tau \|\dot{\mathfrak{z}}^N(t)\|_H^2 dt \leqslant$$

$$\leqslant 2c_0^2\|\mathfrak{z}^N(0)\|_V^2 + 2T\int\limits_0^\tau \|\dot{\mathfrak{z}}^N(t)\|_H^2 dt.$$

Поэтому

$$\|\dot{\mathfrak{z}}^N(\tau)\|_H^2 + [c_2 - 2c_3\varepsilon]\|\mathfrak{z}^N(\tau)\|_V^2 \leqslant \rho_4(\varepsilon)[\|\dot{\mathfrak{z}}^N(0)\|_H^2 + \|\mathfrak{z}^N(0)\|_V^2] + \rho_5(\varepsilon)\int\limits_0^\tau [\|\mathfrak{z}^N(t)\|_V^2 + \|\dot{\mathfrak{z}}^N(t)\|_H^2]\,dt +$$

$$+2\rho_2[\|\mathfrak{g}\|^{(1)}_{1,[0,T],Y^*} + \|f\|_{1,[0,T],H}]\max_{t\in[0,\tau]}\sqrt{\|\dot{\mathfrak{z}}^N(t)\|_H^2 + \|\mathfrak{z}^N(t)\|_V^2}\,,$$

где $\rho_4(\varepsilon) \equiv 2\rho_1 + 2c_0^2[\rho_3(\varepsilon) + c_1]$, $\rho_5(\varepsilon) \equiv 2\rho_1 + 2T[\rho_3(\varepsilon) + c_1]$.

Взяв здесь $\varepsilon = \varepsilon_0 \equiv \frac{c_2}{4c_3}$, будем иметь

$$\|\mathfrak{z}^N(\tau)\|_V^2 + \|\dot{\mathfrak{z}}^N(\tau)\|_H^2 \leqslant \rho_6[[\|\mathfrak{z}^N(0)\|_V^2 + \|\dot{\mathfrak{z}}^N(0)\|_H^2] + [\|\mathfrak{g}\|^{(1)}_{1,[0,T],Y^*} + \|f\|_{1,[0,T],H}]\max_{t\in[0,\tau]}\sqrt{\|\dot{\mathfrak{z}}^N(t)\|_H^2 + \|\mathfrak{z}^N(t)\|_V^2}] +$$

$$+\rho_7\int\limits_0^\tau [\|\mathfrak{z}^N(t)\|_V^2 + \|\dot{\mathfrak{z}}^N(t)\|_H^2]\,dt,$$

где $\rho_6 \equiv \frac{\max\{\rho_4(\varepsilon_0), 2\rho_2\}}{\min\{1, \frac{c_2}{2}\}}$, $\rho_7 \equiv \frac{\rho_5(\varepsilon)}{\min\{1, \frac{c_2}{2}\}}$.

Введя обозначение

$$\mathfrak{y}^N(\tau) \equiv \|\mathfrak{z}^N(\tau)\|_V^2 + \|\dot{\mathfrak{z}}^N(\tau)\|_H^2,$$

можем записать

$$\mathfrak{y}^N(\tau) \leqslant \rho_6[\mathfrak{y}^N(0) + [\|\mathfrak{g}\|^{(1)}_{1,[0,T],Y^*} + \|f\|_{1,[0,T],H}]\max_{t\in[0,\tau]}\sqrt{\mathfrak{y}^N(t)}] + \rho_7\int\limits_0^\tau \mathfrak{y}^N(t)dt \ \ \forall\,\tau \in [0,T].$$

Применив к данному неравенству лемму 5.1.2, получим, что

$$\max_{t\in[0,T]}\sqrt{\mathfrak{y}^N(t)} \leqslant \rho_8\left[\sqrt{\mathfrak{y}^N(0)} + \|\mathfrak{g}\|^{(1)}_{1,[0,T],Y^*} + \|f\|_{1,[0,T],H}\right], \tag{6.3.15}$$

где $\rho_8 \equiv \rho_6\exp[\rho_7 T]$.

Заметим, что из (6.3.15) следует

$$\|\mathfrak{z}^N\|_{\Im([0,T];V,H)} \leqslant 2\rho_8\left[\sqrt{\|\varphi^N\|_V^2 + \|\psi^N\|_H^2} + \|\mathfrak{g}\|^{(1)}_{1,[0,T],Y^*} + \|f\|_{1,[0,T],H}\right], \tag{6.3.16}$$

где $\varphi^N \equiv \sum\limits_{m=1}^{N} \varphi_m e_m$, $\psi^N \equiv \sum\limits_{m=1}^{N} \psi_m e_m$.

Поскольку

$$\lim_{N\to\infty} \|\varphi^N - \varphi\|_V = 0, \;\; \lim_{N\to\infty} \|\psi^N - \psi\|_H = 0, \tag{6.3.17}$$

то справедливо предельное соотношение

$$\lim_{N\to\infty} [\|\varphi^N\|_V + \|\psi^N\|_H] = \|\varphi\|_V + \|\psi\|_H. \tag{6.3.18}$$

Поэтому найдётся константа $\rho_9 > 0$, такая, что

$$\|\mathfrak{z}^N\|_{\text{Э}([0,T];V,H)} \leqslant \rho_9 \;\; \forall\, N = 1, 2, \ldots. \tag{6.3.19}$$

На основании (6.3.19) и теоремы 2.4.9 заключаем, что найдутся подпоследовательность $\mathfrak{z}^{N_m}$, $m = 1, 2, \ldots$, последовательности $\mathfrak{z}^N$, $N = 1, 2, \ldots$, и функция $\mathfrak{z} \in \text{Э}([0,T]; V, H)$, такие, что

$$\mathfrak{z}^{N_m} \to \mathfrak{z}, \;\; m \to \infty, \;\; \text{слабо в } \mathcal{W}_2^1([0,T]; V, H), \;\; \lim_{m\to\infty} \max_{t\in[0,T]} \|\mathfrak{z}^{N_m}(t) - \mathfrak{z}(t)\|_H = 0; \tag{6.3.20}$$

$$\mathfrak{z}^{N_m} \to \mathfrak{z}, \;\; m \to \infty, \;\; *\text{–слабо в } L_\infty([0,T], V); \;\; \dot{\mathfrak{z}}^{N_m} \to \dot{\mathfrak{z}}, \;\; m \to \infty, \;\; *\text{–слабо в } L_\infty([0,T], H);$$
$$\mathfrak{z}^{N_m} \to \mathfrak{z}, \;\; m \to \infty, \;\; \text{в } V^*\text{–топологии пространства } C_s([0,T], V);$$
$$\lim_{m\to\infty} \max_{t\in[0,T]} \|\mathfrak{G}[\mathfrak{z}^{N_m}(t)] - \mathfrak{G}[\mathfrak{z}(t)]\|_Z = 0, \;\; \lim_{m\to\infty} \max_{t\in[0,T]} \|\mathfrak{C}[\mathfrak{z}^{N_m}(t)] - \mathfrak{C}[\mathfrak{z}(t)]\|_Y = 0.$$

Перепишем задачу Коши (6.3.13), (6.3.14) для $N = N_m$ в виде

$$\langle \ddot{\mathfrak{z}}^{N_m}(t), e_k\rangle + \langle \mathfrak{A}(t)\mathfrak{z}^{N_m}(t) + \mathfrak{B}(t)\mathfrak{z}^{N_m}(t), e_k\rangle + \langle \mathfrak{F}(t)\mathfrak{G}\mathfrak{z}^{N_m}(t), \mathfrak{G}e_k\rangle_Z = \langle f(t), e_k\rangle_H + \langle \mathfrak{g}(t), \mathfrak{C}e_k\rangle, \tag{6.3.21}$$
$$\mathfrak{z}^{N_m}(0) = \varphi^{N_m}, \;\; \dot{\mathfrak{z}}^{N_m}(0) = \psi^{N_m}, \;\; k = \overline{1, N_m}, \;\; t \in [0,T].$$

Пусть $\eta \in \hat{\text{Э}}([0,T]; V, H)$ — произвольна. Тогда $\eta \in \mathcal{W}_2^1([0,T]; V, H)$ и $\eta(T) = 0$. Согласно лемме 2.4.2, существует последовательность функций $\eta^N \in \mathfrak{M}_T^N$, $N = 1, 2, \ldots$, такая, что $\lim\limits_{N\to\infty} \|\eta^N - \eta\|_{\mathcal{W}_2^1([0,T];V,H)} = 0$. Следовательно,

$$\lim_{m\to\infty} \|\eta^{N_m} - \eta\|_{\mathcal{W}_2^1([0,T];V,H)} = 0. \tag{6.3.22}$$

Из (6.3.21) выводим, что

$$\int_0^T [\langle \ddot{\mathfrak{z}}^{N_m}(t), \eta^{N_m}(t)\rangle + \langle \mathfrak{A}(t)\mathfrak{z}^{N_m}(t), \eta^{N_m}(t)\rangle + \langle \mathfrak{B}(t)\mathfrak{z}^{N_m}(t), \eta^{N_m}(t)\rangle + \langle \mathfrak{F}(t)\mathfrak{G}\mathfrak{z}^{N_m}(t), \mathfrak{G}\eta^{N_m}(t)\rangle_Z]dt =$$
$$= \int_0^T \langle f(t), \eta^{N_m}(t)\rangle_H dt + \int_0^T \langle \mathfrak{g}(t), \mathfrak{C}\eta^{N_m}(t)\rangle dt, \;\; \mathfrak{z}^{N_m}(0) = \varphi^{N_m}, \;\; \dot{\mathfrak{z}}^{N_m}(0) = \psi^{N_m}.$$

Интегрируя по частям, заключаем, что

$$\int_0^T [-\langle \dot{\mathfrak{z}}^{N_m}(t), \dot{\eta}^{N_m}(t)\rangle + \langle \mathfrak{A}(t)\mathfrak{z}^{N_m}(t), \eta^{N_m}(t)\rangle + \langle \mathfrak{B}(t)\mathfrak{z}^{N_m}(t), \eta^{N_m}(t)\rangle + \langle \mathfrak{F}(t)\mathfrak{G}\mathfrak{z}^{N_m}(t), \mathfrak{G}\eta^{N_m}(t)\rangle_Z]dt = \tag{6.3.23}$$
$$= \langle \psi^{N_m}, \eta^{N_m}(0)\rangle + \int_0^T \langle f(t), \eta^{N_m}(t)\rangle_H dt + \int_0^T \langle \mathfrak{g}(t), \mathfrak{C}\eta^{N_m}(t)\rangle dt, \;\; \mathfrak{z}^{N_m}(0) = \varphi^{N_m}.$$

Переходя в данном соотношении к пределу при $m \to \infty$, на основании (6.3.20) и (6.3.22) заключаем, что

$$\int_0^T [-\langle \dot{\mathfrak{z}}(t), \dot{\eta}(t)\rangle + \langle \mathfrak{A}(t)\mathfrak{z}(t), \eta(t)\rangle + \langle \mathfrak{B}(t)\mathfrak{z}(t), \eta(t)\rangle + \langle \mathfrak{F}(t)\mathfrak{G}\mathfrak{z}(t), \mathfrak{G}\eta(t)\rangle_Z]dt = \langle \psi, \eta(0)\rangle + \int_0^T \langle f(t), \eta(t)\rangle_H dt +$$
$$+ \int_0^T \langle \mathfrak{g}(t), \mathfrak{C}\eta(t)\rangle dt, \;\; \forall\, \eta \in \hat{\text{Э}}([0,T]; V, H); \;\; \mathfrak{z}(0) = \varphi.$$

Это означает, что $\mathfrak{z} \in \mathfrak{Э}([0,T];V,H)$ — решение задачи Коши (6.3.4), (6.3.5) в смысле определения 6.3.1.

Итак, существование решения задачи Коши (6.3.4), (6.3.5) в смысле определения 6.3.1 — доказано.

3) Докажем априорную оценку (6.3.11). В самом деле, на основании (6.3.18), для каждого $\varepsilon > 0$ найдётся номер $m_0(\varepsilon) \geqslant 1$, такой, что при всех $m \geqslant m_0(\varepsilon)$ справедливо неравенство

$$\sqrt{\|\varphi^{N_m}\|_V^2 + \|\psi^{N_m}\|_H^2} \leqslant \sqrt{\|\varphi\|_V^2 + \|\psi\|_H^2} + \varepsilon. \tag{6.3.24}$$

Далее, из (6.3.16) следует, что

$$\|\mathfrak{z}^{N_m}\|_{\mathfrak{Э}([0,T];V,H)} \leqslant 2\rho_8 \left[\sqrt{\|\varphi\|_V^2 + \|\psi\|_H^2} + \|\mathfrak{g}\|^{(1)}_{1,[0,T],Y^*} + \|f\|_{1,[0,T],H} + \varepsilon\right], \ \ \forall m \geqslant m_0(\varepsilon).$$

Из теоремы 2.4.9 и соотношений (6.3.20) следует, что

$$\|\mathfrak{z}\|_{\mathfrak{Э}([0,T];V,H)} \leqslant 2\rho_8 \left[\sqrt{\|\varphi\|_V^2 + \|\psi\|_H^2} + \|\mathfrak{g}\|^{(1)}_{1,[0,T],Y^*} + \|f\|_{1,[0,T],H} + \varepsilon\right].$$

Устремляя затем ε к нулю, получаем оценку (6.3.11) с $\varkappa_1 = 2\rho_8$. Теорема полностью доказана. ■

Теорема 6.3.2. *Пусть $\mathfrak{z}$ — решение задачи Коши (6.3.4), (6.3.5) в смысле определения 6.3.1. Тогда $\dot{\mathfrak{z}} \in C_s([0,T],H)$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{z}$ — решение задачи Коши (6.3.4), (6.3.5) в смысле определения 6.3.1. Тогда, на основании леммы 6.3.1, $\ddot{\mathfrak{z}} \in L_1([0,T],V^*)$. Поэтому $\dot{\mathfrak{z}} \in W_1^1([0,T],V^*)$. На основании теоремы 2.3.3 отсюда следует, что $z_t \in C_s([0,T],V^*)$. Пользуясь теперь включением $z_t \in L_\infty([0,T],H)$ и леммой 2.3.1, получаем требуемое утверждение. ■

Теорема 6.3.3. *Пусть $\mathfrak{z}$ — решение задачи Коши (6.3.4), (6.3.5) в смысле определения 6.3.1. Тогда $\mathfrak{z} \in \mathfrak{C}([0,T];V,H)$, причём найдётся постоянная $\varkappa_2 > 0$, зависящая лишь от T, c_1, c_2, $c_3 > 0$ и от $\|\mathfrak{C}\|_{V\to Y}$, $\|\mathfrak{G}\|_{V\to Z}$, такая, что*

$$\|\mathfrak{z}\|_{\mathfrak{C}([0,T];V,H)} \leqslant \varkappa_2[\sqrt{\|\varphi\|_V^2 + \|\psi\|_H^2} + \|f\|_{1,[0,T],H} + \|\mathfrak{g}\|^{(1)}_{1,[0,T],Y^*}]. \tag{6.3.25}$$

Доказательство. Включение $\mathfrak{z} \in \mathfrak{C}([0,T];V,H)$ вытекает из предыдущей теоремы и определения класса $\mathfrak{C}([0,T];V,H)$. Поэтому достаточно доказать лишь оценку (6.3.25).

В самом деле, из оценки (6.3.11) следует, что

$$\sup_{t\in[0,T]} \|\mathfrak{z}(t)\|_V + \operatorname*{vraisup}_{t\in[0,T]} \|\dot{\mathfrak{z}}(t)\|_H \leqslant \varkappa_1[\sqrt{\|\varphi\|_V^2 + \|\psi\|_H^2} + \|f\|_{1,[0,T],H} + \|\mathfrak{g}\|^{(1)}_{1,[0,T],Y^*}].$$

На основании леммы 1.3.1 и включения $\mathfrak{z} \in \mathfrak{C}([0,T];V,H)$ из данного неравенства выводим, что

$$\sup_{t\in[0,T]} \|\mathfrak{z}(t)\|_V + \sup_{t\in[0,T]} \|\dot{\mathfrak{z}}(t)\|_H \leqslant \varkappa_1[\sqrt{\|\varphi\|_V^2 + \|\psi\|_H^2} + \|f\|_{1,[0,T],H} + \|\mathfrak{g}\|^{(1)}_{1,[0,T],Y^*}].$$

Как следствие,

$$\|\mathfrak{z}\|_{\mathfrak{C}([0,T];V,H)} \equiv \sup_{t\in[0,T]} \sqrt{\|\mathfrak{z}(t)\|_V^2 + \|\dot{\mathfrak{z}}(t)\|_H^2} \leqslant \sup_{t\in[0,T]} \|\mathfrak{z}(t)\|_V + \sup_{t\in[0,T]} \|\dot{\mathfrak{z}}(t)\|_H \leqslant$$
$$\leqslant \varkappa_1[\sqrt{\|\varphi\|_V^2 + \|\psi\|_H^2} + \|f\|_{1,[0,T],H} + \|\mathfrak{g}\|^{(1)}_{1,[0,T],Y^*}].$$

Итак, оценка (6.3.25) доказана, причём можно взять $\varkappa_2 = \varkappa_1$. ■

6.3.2. Параметрическая задача Коши для однородного уравнения

При каждом $\psi \in H$ определим функцию $\mathfrak{y}[\psi](t,\tau)$, $t \in [0,T]$, $\tau \in [0,T]$, при $t \in [0,\tau]$ как решение задачи Коши

$$\mathfrak{y}_{tt} + \mathfrak{A}(t)\mathfrak{y} + \mathfrak{B}(t)\mathfrak{y} + \mathfrak{G}^*\mathfrak{F}(t)\mathfrak{G}\mathfrak{y} = 0, \ \ t \in [0,\tau], \tag{6.3.26}$$
$$\mathfrak{y}|_{t=\tau} = 0, \ \ \mathfrak{y}_t|_{t=\tau} = \psi, \tag{6.3.27}$$

а при $t \in [0,T]$ — как решение задачи Коши

$$\mathfrak{y}_{tt} + \mathfrak{A}(t)\mathfrak{y} + \mathfrak{B}(t)\mathfrak{y} + \mathfrak{G}^*\mathfrak{F}(t)\mathfrak{G}\mathfrak{y} = 0, \ \ t \in [\tau,T], \tag{6.3.28}$$
$$\mathfrak{y}|_{t=\tau} = 0, \ \ \mathfrak{y}_t|_{t=\tau} = \psi. \tag{6.3.29}$$

Покажем, что справедлива

Теорема 6.3.4. *Справедливо включение* $\mathfrak{y}[\psi] \in C([0,T], \mathcal{C}([0,T];V,H))$, *понимаемое в том смысле, что функция*

$$[0,T] \ni \tau \mapsto \mathfrak{y}[\psi](\cdot,\tau) \in \mathcal{C}([0,T];V,H)$$

непрерывна на отрезке $[0,T]$ *в смысле нормы пространства* $\mathcal{C}([0,T];V,H)$. *При этом найдётся постоянная* $\varkappa_3 > 0$, *зависящая лишь от* T, c_1, c_2, $c_3 > 0$ *и от* $\|\mathfrak{G}\|_{V\to Z}$, *такая, что*

$$\max_{\tau\in[0,T]} \|\mathfrak{y}[\psi](\cdot,\tau)\|_{\mathcal{C}([0,T];V,H)} \leqslant \varkappa_3\|\psi\|_H. \tag{6.3.30}$$

Доказательство. 1) Прежде всего отметим, что, в силу теоремы 6.3.1, функция $\mathfrak{y}[\psi](\cdot,\tau)$ однозначно определяется на $[0,T]$, $\mathfrak{y}[\psi](\cdot,\tau) \in \text{Э}([0,T];V,H)$ при всех $\tau \in [0,T]$, и найдётся константа $\varkappa_1 > 0$,, зависящая лишь от T, c_1, c_2, $c_3 > 0$ и от $\|\mathfrak{C}\|_{V\to Y}$, $\|\mathfrak{G}\|_{V\to Z}$, такая, что

$$\sup_{t\in[0,\tau]} \|\mathfrak{y}[\psi](t,\tau)\|_V + \operatorname*{vraisup}_{t\in[0,\tau]} \|\mathfrak{y}_t[\psi](t,\tau)\|_H \leqslant \varkappa_1\|\psi\|_H;$$
$$\sup_{t\in[\tau,T]} \|\mathfrak{y}[\psi](t,\tau)\|_V + \operatorname*{vraisup}_{t\in[\tau,T]} \|\mathfrak{y}_t[\psi](t,\tau)\|_H \leqslant \varkappa_1\|\psi\|_H.$$

Следовательно,

$$\sup_{\tau\in[0,T]} \|\mathfrak{y}[\psi](\cdot,\tau)\|_{\text{Э}([0,T];V,H)} \leqslant 2\varkappa_1\|\psi\|_H. \tag{6.3.31}$$

Заметим также, что $\mathfrak{y}[\psi]$ линейно зависит от $\psi \in H$.

2) Докажем теперь включение $\mathfrak{y}[\psi] \in C([0,T], \text{Э}([0,T];V,H))$. Для этого воспользуемся методом Галёркина. Пусть

$$\psi^N \equiv \sum_{m=1}^{N} \psi_m e_m,\ \ \psi_j \equiv \langle \psi, e_m\rangle_H,\ \ j,\, N = 1,2,\ldots.$$

Тогда

$$\lim_{N\to\infty} \|\psi^N - \psi\|_H = 0. \tag{6.3.32}$$

Будем искать приближение $\mathfrak{y}^N[\psi]$ к функции $\mathfrak{y}[\psi]$ в виде

$$\mathfrak{y}^N[\psi](t,\tau) \equiv \sum_{k=1}^{N} h_k^N(t,\tau)e_k,$$

где набор функций h_k^N, $k = \overline{1,N}$, является решением задачи Коши

$$h_{ktt}^N(t,\tau) + \sum_{m=1}^{N} q_{km}(t)h_m^N(t,\tau) = 0, \tag{6.3.33}$$
$$h_k^N(t,\tau)|_{t=\tau} = 0,\ \ h_{kt}^N(t,\tau)|_{t=\tau} = \psi_k,\ \ k = \overline{1,N},$$

в которой

$$q_{km}(t) \equiv \langle \mathfrak{A}(t)e_m, e_k\rangle + \langle \mathfrak{B}(t)e_m, e_k\rangle + \langle \mathfrak{F}(t)\mathfrak{G}e_m, \mathfrak{G}e_k\rangle_Z.$$

Согласно лемме 5.3.1, существует единственный набор функций h_k^N, $k = \overline{1,N}$, непрерывных на Γ и имеющих на Γ непрерывные производные h_{kt}^N, $h_{k\tau}^N$, h_{ktt}^N, $h_{kt\tau}^N$, $h_{k\tau t}^N$, $k = \overline{1,N}$, являющийся решением задачи Коши (6.3.33). Кроме того, производные $h_{k\tau tt}^N$, $k = \overline{1,N}$, также существуют и непрерывны на Γ, а набор функций $h_{k\tau}^N$, $k = \overline{1,N}$, является решением задачи Коши

$$h_{k\tau tt}^N(t,\tau) + \sum_{m=1}^{N} q_{km}(t)h_{m\tau}^N(t,\tau) = 0, \tag{6.3.34}$$
$$h_{k\tau}^N(t,\tau)|_{t=\tau} = -\psi_k,\ \ h_{k\tau t}^N(t,\tau)|_{t=\tau} = 0,\ \ k = \overline{1,N}.$$

Как следствие, для функций $\mathfrak{y}^N[\psi]$ и $\xi^N[\psi] \equiv \mathfrak{y}^N_\tau[\psi]$ справедливы тождества

$$\langle \mathfrak{y}^N_{tt}[\psi](t,\tau), e_k\rangle + \langle \mathfrak{A}(t)\mathfrak{y}^N[\psi](t,\tau) + \mathfrak{B}(t)\mathfrak{y}^N[\psi](t,\tau), e_k\rangle + \langle \mathfrak{F}(t)\mathfrak{G}\mathfrak{y}^N[\psi](t,\tau), \mathfrak{G}e_k\rangle_Z = 0, \tag{6.3.35}$$
$$\mathfrak{y}^N[\psi]|_{t=\tau} = 0,\ \ \mathfrak{y}^N_t[\psi]|_{t=\tau} = \psi^N,\ \ k=\overline{1,N},\ \ (t,\tau)\in\Gamma;$$

$$\langle \xi^N_{tt}[\psi](t,\tau), e_k\rangle + \langle \mathfrak{A}(t)\xi^N[\psi](t,\tau) + \mathfrak{B}(t)\xi^N[\psi](t,\tau), e_k\rangle + \langle \mathfrak{F}(t)\mathfrak{G}\xi^N[\psi](t,\tau), \mathfrak{G}e_k\rangle_Z = 0, \tag{6.3.36}$$
$$\xi^N[\psi]|_{t=\tau} = -\psi^N,\ \ \xi^N_t[\psi]|_{t=\tau} = 0,\ \ k=\overline{1,N},\ \ (t,\tau)\in\Gamma.$$

Рассуждая затем подобно тому, как это делалось при выводе оценки (6.3.16), заключаем, что

$$\|\mathfrak{y}^N[\psi](\cdot,\tau)\|_{\mathrm{Э}([0,T];V,H)} \leqslant C\|\psi\|_H,\ \ \|\xi^N[\psi](\cdot,\tau)\|_{\mathrm{Э}([0,T];V,H)} \leqslant C\|\psi\|_H,$$

где постоянная $C>0$ определяется лишь числами T, c_1, c_2, $c_3>0$ и $\|\mathfrak{C}\|_{V\to Y}$, $\|\mathfrak{G}\|_{V\to Z}$.

Следовательно, при всех τ_1, $\tau_2\in[0,T]$

$$\|\mathfrak{y}^N[\psi](\cdot,\tau_1) - \mathfrak{y}^N[\psi](\cdot,\tau_2)\|_{\mathrm{Э}([0,T];V,H)} = \Big\|\sum_{m=1}^N h^N_m(\cdot,\tau_1)e_m - \sum_{m=1}^N h^N_m(\cdot,\tau_2)e_m\Big\|_{\mathrm{Э}([0,T];V,H)} =$$
$$= \Big\|\sum_{m=1}^N [h^N_m(\cdot,\tau_1) - h^N_m(\cdot,\tau_2)]e_m\Big\|_{\mathrm{Э}([0,T];V,H)} = \Big\|\sum_{m=1}^N \int_{\tau_2}^{\tau_1} h^N_{m\tau}(\cdot,\tau)e_m d\tau\Big\|_{\mathrm{Э}([0,T];V,H)} =$$
$$= \Big\|\int_{\tau_2}^{\tau_1} \sum_{m=1}^N h^N_{m\tau}(\cdot,\tau)e_m d\tau\Big\|_{\mathrm{Э}([0,T];V,H)} = \Big\|\int_{\tau_2}^{\tau_1} \xi^N[\psi](\cdot,\tau)d\tau\Big\|_{\mathrm{Э}([0,T];V,H)} \leqslant$$
$$\leqslant \Big|\int_{\tau_2}^{\tau_1} \|\xi^N[\psi](\cdot,\tau)\|_{\mathrm{Э}([0,T];V,H)}d\tau\Big| \leqslant C|\tau_1-\tau_2|\|\psi\|_H.$$

Таким образом, при всех τ, τ_1, $\tau_2\in[0,T]$,

$$\|\mathfrak{y}^N[\psi](\cdot,\tau)\|_{\mathrm{Э}([0,T];V,H)} \leqslant C\|\psi\|_H, \tag{6.3.37}$$
$$\|\mathfrak{y}^N[\psi](\cdot,\tau_1) - \mathfrak{y}^N[\psi](\cdot,\tau_2)\|_{\mathrm{Э}([0,T];V,H)} \leqslant C|\tau_1-\tau_2|\|\psi\|_H. \tag{6.3.38}$$

Рассуждая как при получении тождества (6.3.23), заключаем, что

$$\int_0^\tau [-\langle \mathfrak{y}^N_t[\psi](t,\tau), \eta^N(t)\rangle + \langle \mathfrak{A}(t)\mathfrak{y}^N[\psi](t,\tau), \eta^N(t)\rangle + \langle \mathfrak{B}(t)\mathfrak{y}^N[\psi](t,\tau), \eta^N(t)\rangle + \tag{6.3.39}$$
$$+\langle \mathfrak{F}(t)\mathfrak{G}\mathfrak{y}^N[\psi](t,\tau), \mathfrak{G}\eta^N(t)\rangle_Z]dt = -\langle \psi^N, \eta^N(\tau)\rangle,\ \ \forall\,\eta^N\in\mathfrak{K}^N_0[0,\tau];\ \ \mathfrak{y}^N[\psi]|_{t=\tau} = 0;$$

$$\int_\tau^T [-\langle \mathfrak{y}^N_t[\psi](t,\tau), \eta^N(t)\rangle + \langle \mathfrak{A}(t)\mathfrak{y}^N[\psi](t,\tau), \eta^N(t)\rangle + \langle \mathfrak{B}(t)\mathfrak{y}^N[\psi](t,\tau), \eta^N(t)\rangle + \tag{6.3.40}$$
$$+\langle \mathfrak{F}(t)\mathfrak{G}\mathfrak{y}^N[\psi](t,\tau), \mathfrak{G}\eta^N(t)\rangle_Z]dt = \langle \psi^N, \eta^N(\tau)\rangle,\ \ \forall\,\eta^N\in\mathfrak{K}^T_T[\tau,T];\ \ \mathfrak{y}^N[\psi]|_{t=\tau} = 0.$$

Произвольно выберем и зафиксируем τ_1, $\tau_2\in[0,T]$. Ввиду неравенства (6.3.37) и теоремы 2.4.9 заключаем, что найдутся подпоследовательность N_m, $m=1,2,\dots$, последовательности $N=1,2,\dots$, и функции $\mathfrak{y}^-(\cdot,\tau_i)\in\mathrm{Э}([0,\tau_i];V,H)$, $\mathfrak{y}^+(\cdot,\tau_i)\in\mathrm{Э}([\tau_i,T];V,H)$, $\mathfrak{y}^*(\cdot,\tau_i)\in\mathrm{Э}([0,T];V,H)$, $i=1,2$, такие, что

$$\lim_{m\to\infty}\max_{t\in[0,\tau_i]}\|\mathfrak{y}^{N_m}[\psi](t,\tau_i) - \mathfrak{y}^-(t,\tau_i)\|_H = 0,\ \ \lim_{m\to\infty}\max_{t\in[\tau_i,T]}\|\mathfrak{y}^{N_m}[\psi](t,\tau_i) - \mathfrak{y}^+(t,\tau_i)\|_H = 0, \tag{6.3.41}$$
$$\mathfrak{y}^{N_m}[\psi](\cdot,\tau_i)\to\mathfrak{y}^-(\cdot,\tau_i),\ \ m\to\infty,\ \text{ слабо в } \mathcal{W}^1_2([0,\tau_i];V,H),$$
$$\mathfrak{y}^{N_m}[\psi](\cdot,\tau_i)\to\mathfrak{y}^+(\cdot,\tau_i),\ \ m\to\infty,\ \text{ слабо в } \mathcal{W}^1_2([\tau_i,T];V,H),$$
$$\mathfrak{y}^{N_m}[\psi](\cdot,\tau_i)\to\mathfrak{y}^-(\cdot,\tau_i),\ \ m\to\infty,\ \ast\text{–слабо в } L_\infty([0,\tau_i],V),$$
$$\mathfrak{y}^{N_m}[\psi](\cdot,\tau_i)\to\mathfrak{y}^+(\cdot,\tau_i),\ \ m\to\infty,\ \ast\text{–слабо в } L_\infty([\tau_i,T],V),$$
$$\mathfrak{y}^{N_m}_t[\psi](\cdot,\tau_i)\to\mathfrak{y}^-_t(\cdot,\tau_i),\ \ m\to\infty,\ \ast\text{–слабо в } L_\infty([0,\tau_i],H),$$
$$\mathfrak{y}^{N_m}_t[\psi](\cdot,\tau_i)\to\mathfrak{y}^+_t(\cdot,\tau_i),\ \ m\to\infty,\ \ast\text{–слабо в } L_\infty([\tau_i,T],H),$$
$$\mathfrak{y}^{N_m}[\psi](\cdot,\tau_i)\to\mathfrak{y}^*(\cdot,\tau_i),\ \ m\to\infty,\ \text{ слабо в } \mathcal{W}^1_2([0,T];V,H),$$
$$\lim_{m\to\infty}\max_{t\in[0,\tau_i]}\|\mathfrak{G}[\mathfrak{y}^{N_m}[\psi](\cdot,\tau_i)] - \mathfrak{G}[\mathfrak{y}^-(t,\tau_i)]\|_Z = 0,\ \ \lim_{m\to\infty}\max_{t\in[\tau_i,T]}\|\mathfrak{G}[\mathfrak{y}^{N_m}[\psi](\cdot,\tau_i)] - \mathfrak{G}[\mathfrak{y}^+(t,\tau_i)]\|_Z = 0,\ \ i=1,2.$$

Переходя к пределу при $m \to \infty$ в (6.3.39) и (6.3.40) с $N = N_m$, $\tau = \tau_i$, $i = 1, 2$, получим, что $\mathfrak{y}^*(\cdot, \tau_i) \equiv \mathfrak{y}[\psi](\cdot, \tau_i)$, $\mathfrak{y}^-(\cdot, \tau_i) \equiv \mathfrak{y}[\psi](\cdot, \tau_i)|_{[0,\tau_i]}$, $\mathfrak{y}^+(\cdot, \tau_i) \equiv \mathfrak{y}[\psi](\cdot, \tau_i)|_{[\tau_i,T]}$, $i = 1, 2$.

Используя предельные соотношения (6.3.41), теорему 2.4.9, и неравенство (6.3.38), заключаем, что

$$\|\mathfrak{y}[\psi](\cdot, \tau_1) - \mathfrak{y}[\psi](\cdot, \tau_2)\|_{Э([0,T];V,H)} \leqslant C|\tau_1 - \tau_2|\|\psi\|_H \ \ \forall \tau_1, \ \ \tau_2 \in [0, T]. \tag{6.3.42}$$

Таким образом, включение $\mathfrak{y}[\psi] \in C([0, T], Э([0, T]; V, H))$ доказано.

3) Докажем включение $\mathfrak{y}[\psi] \in C([0, T], Є([0, T]; V, H))$. В самом деле, на основании теоремы 6.3.3, при всех $\tau \in [0, T]$ справедливо включение $\mathfrak{y}[\psi](\cdot, \tau) \in Є([0, T]; V, H))$. Кроме того, из доказанного во второй части данного доказательства включения $\mathfrak{y}[\psi] \in C([0, T], Э([0, T]; V, H))$ следует, что для всех τ и $\tau' \in [0, T]$

$$\|\mathfrak{y}[\psi](\cdot, \tau') - \mathfrak{y}[\psi](\cdot, \tau)\|_{Є([0,T];V,H)} = \sup_{t\in[0,T]}\left[\|\mathfrak{y}[\psi](t, \tau') - \mathfrak{y}[\psi](t, \tau)\|^2_V + \|\mathfrak{y}_t[\psi](t, \tau') - \mathfrak{y}_t[\psi](t, \tau)\|^2_H\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant$$
$$\leqslant \|\mathfrak{y}[\psi](\cdot, \tau') - \mathfrak{y}[\psi](\cdot, \tau)\|_{Э([0,T];V,H)}.$$

Таким образом,

$$\|\mathfrak{y}[\psi](\cdot, \tau') - \mathfrak{y}[\psi](\cdot, \tau)\|_{Є([0,T];V,H)} \leqslant \|\mathfrak{y}[\psi](\cdot, \tau') - \mathfrak{y}[\psi](\cdot, \tau)\|_{Э([0,T];V,H)}. \tag{6.3.43}$$

Из данного неравенства и ранее доказанного включения $\mathfrak{y}[\psi] \in C([0, T], Э([0, T]; V, H))$ и следует включение $\mathfrak{y}[\psi] \in C([0, T], Є([0, T]; V, H))$.

4) Априорная оценка (6.3.30) является следствием неравенств (6.3.31) и (6.3.43). Теорема полностью доказана. ■

Теорема 6.3.5. *Найдётся функция $\Psi \in \mathfrak{S}(\Gamma; V, H)$, такая, что*

$$\mathfrak{y}[h](t, \tau) = \Psi(t, \tau)h \ \ \forall\, (t, \tau) \in \Gamma, \ \ h \in H.$$

Доказательство. В самом деле, на основании теоремы 6.3.4, отображение

$$H \ni h \mapsto \mathfrak{y}[h] \in C([0, T], Є([0, T]; V, H))$$

представляет собой линейный непрерывный оператор. Поэтому, согласно теореме 3.2.5, найдётся функция $\Psi \in \mathfrak{S}(\Gamma; V, H)$, такая, что

$$\mathfrak{y}[h](t, \tau) = \Psi(t, \tau)h \ \ \forall\, (t, \tau) \in \Gamma, \ \ h \in H.$$

Теорема доказана. ■

6.3.3. Представление решения линейного уравнения

В данном разделе мы получим представление решения задачи Коши (6.3.4), (6.3.5).

Прежде всего определим гильбертово пространство $\mathfrak{V}$ как множество пар $\mathfrak{v} \equiv (v, h) \in V \times H$, наделённое скалярным произведением

$$\langle(v_1, h_1), (v_2, h_2)\rangle_{\mathfrak{V}} \equiv \langle v_1, v_2\rangle_V + \langle h_1, h_2\rangle_H.$$

Далее, введём банахово пространство $\mathfrak{W}$ как множество четвёрок $\mathfrak{w} \equiv (v, h, \mathfrak{f}, g) \in V \times H \times L_1([0, T], H) \times W^1_1([0, T], Y^*)$, наделённое нормой

$$\|\mathfrak{w}\|_{\mathfrak{W}} \equiv \|(v, h)\|_{\mathfrak{V}} + \|\mathfrak{f}\|_{1,[0,T],H} + \|g\|^{(1)}_{1,[0,T],Y^*}.$$

Наконец, через Λ обозначим оператор, ставящий в соответствие каждой четвёрке $\mathfrak{w} \equiv (v, h, \mathfrak{f}, g) \in \mathfrak{W}$ решение задачи Коши (6.3.4), (6.3.5) с $\varphi = v$, $\psi = h$, $f = \mathfrak{f}$, $\mathfrak{g} = g$.

Из теоремы 6.3.3 следует, что этот оператор принимает значения в пространстве $Є([0, T]; V, H)$. Кроме того, нетрудно видеть, что этот оператор линеен. Из теоремы 6.3.3 также следует, что оператор Λ — ограничен.

Таким образом, решение задачи Коши (6.3.4), (6.3.5) можно записать в виде

$$\mathfrak{z}(t) = \Lambda[\varphi, \psi, f, \mathfrak{g}](t), \ \ t \in [0, T].$$

Теорема 6.3.6. *Найдутся оператор $\Theta \in \mathcal{L}(W^1_1([0, T], Y^*), Є([0, T]; V, H))$ и функции $\Phi \in \mathfrak{R}([0, T]; V, H)$, $\Psi \in \mathfrak{S}(\Gamma; V, H)$, такие, что при всех $v \in V$, $h \in H$*

$$\Lambda[\varphi, \psi, f, \mathfrak{g}](t) = \Phi(t)\varphi + \Psi(t, 0)\psi + \int\limits_0^t \Psi(t, \xi)f(\xi)d\xi + \Theta[\mathfrak{g}](t) \ \ \forall\, t \in [0, T]. \tag{6.3.44}$$

Доказательство. Введём операторы $\Lambda_1 : V \to \mathfrak{C}([0,T]; V, H)$, $\Lambda_2 : H \to \mathfrak{C}([0,T]; V, H)$, $\Lambda_3 : L_1([0,T], H) \to \mathfrak{C}([0,T]; V, H)$, $\Lambda_4 : W_1^1([0,T], Y^*) \to \mathfrak{C}([0,T]; V, H)$ по формулам

$$\Lambda_1[v] \equiv \Lambda[v, 0, 0, 0], \ \ \Lambda_2[h] \equiv \Lambda[0, h, 0, 0] \ \ \forall\, (v, h) \in V \times H;$$
$$\Lambda_3[\mathfrak{f}] \equiv \Lambda[0, 0, \mathfrak{f}, 0], \ \ \Lambda_4[g] \equiv \Lambda[0, 0, 0, g] \ \ \forall\, \mathfrak{f} \in L_1([0,T], H) \ \ \forall\, g \in W_1^1([0,T], Y^*).$$

Тогда решение задачи Коши (6.3.4), (6.3.5) можно записать в виде

$$\mathfrak{z}(t) = \Lambda_1[\varphi](t) + \Lambda_2[\psi](t) + \Lambda_3[f](t) + \Lambda_4[\mathfrak{g}](t), \ \ t \in [0,T].$$

Положив $\Theta \equiv \Lambda_4$, получим, что

$$\mathfrak{z}(t) = \Lambda_1[\varphi](t) + \Lambda_2[\psi](t) + \Lambda_3[f](t) + \Theta[\mathfrak{g}](t), \ \ t \in [0,T].$$

Далее, на основании теоремы 3.2.3, найдётся функция $\Phi \in \mathfrak{R}([0,T]; V, H)$, такая, что

$$\Lambda_1[\varphi](t) \equiv \Phi(t)\varphi, \ \ t \in [0,T].$$

Как следствие,

$$\mathfrak{z}(t) = \Phi(t)\varphi + \Lambda_2[\psi](t) + \Lambda_3[f](t) + \Theta[\mathfrak{g}](t), \ \ t \in [0,T]. \tag{6.3.45}$$

Нетрудно видеть, что

$$\Lambda_2[\psi](t) \equiv \mathfrak{y}[\psi](t, 0). \ \ t \in [0,T]. \tag{6.3.46}$$

Покажем, что

$$\Lambda_3[f](t) = \int\limits_0^t \mathfrak{e}[f](t,\tau)d\tau, \ \ t \in [0,T], \tag{6.3.47}$$

где $\mathfrak{e}[f]$ — при $t \in [0, \tau]$ решение задачи Коши

$$\mathfrak{e}_{tt} + \mathfrak{A}(t)\mathfrak{e} + \mathfrak{B}(t)\mathfrak{e} + \mathfrak{G}^*\mathfrak{F}(t)\mathfrak{G}\mathfrak{e} = 0, \ \ t \in [0, \tau], \tag{6.3.48}$$
$$\mathfrak{e}|_{t=\tau} = 0, \ \ \mathfrak{e}_t|_{t=\tau} = f(\tau), \tag{6.3.49}$$

а при $t \in [0,T]$ — решение задачи Коши

$$\mathfrak{e}_{tt} + \mathfrak{A}(t)\mathfrak{e} + \mathfrak{B}(t)\mathfrak{e} + \mathfrak{G}^*\mathfrak{F}(t)\mathfrak{G}\mathfrak{e} = 0, \ \ t \in [\tau, T], \tag{6.3.50}$$
$$\mathfrak{e}|_{t=\tau} = 0, \ \ \mathfrak{e}_t|_{t=\tau} = f(\tau). \tag{6.3.51}$$

В самом деле, введём функцию $\mathfrak{w} : [0,T] \to V$ равенством

$$\mathfrak{w}(t) = \int\limits_0^t \mathfrak{e}[f](t,\tau)d\tau, \ \ t \in [0,T].$$

Дифференцируя эту функцию дважды, получим, что

$$\dot{\mathfrak{w}}(t) = \mathfrak{e}[f](t,t) + \int\limits_0^t \mathfrak{e}_t[f](t,\tau)d\tau, \ \ \ddot{\mathfrak{w}}(t) = \mathfrak{e}_t[f](t,t) + \int\limits_0^t \mathfrak{e}_{tt}[f](t,\tau)d\tau, \ \ t \in [0,T].$$

Пользуясь затем определением функции $\mathfrak{e}[f]$, выводим, что

$$\dot{\mathfrak{w}}(t) = \int\limits_0^t \mathfrak{e}_t[f](t,\tau)d\tau, \ \ t \in [0,T]; \ \ \ddot{\mathfrak{w}}(t) = f(t) + \int\limits_0^t \mathfrak{e}_{tt}[f](t,\tau)d\tau, \ \ t \in [0,T]. \tag{6.3.52}$$

Из (6.3.52) вытекает, что

$$\mathfrak{w}(0) = 0, \ \ \dot{\mathfrak{w}}(0) = 0. \tag{6.3.53}$$

Далее, в силу (6.3.52), (6.3.48), (6.3.50),

$$\ddot{\mathfrak{w}}(t)+\mathfrak{A}(t)\mathfrak{w}(t)+\mathfrak{B}(t)\mathfrak{w}(t)+\mathfrak{G}^*\mathfrak{F}(t)\mathfrak{G}\mathfrak{w}(t)=$$
$$=f(t)+\int\limits_0^t[\mathfrak{e}_{tt}[f](t,\tau)+\mathfrak{A}(t)\mathfrak{e}[f](t,\tau)+\mathfrak{B}(t)\mathfrak{e}[f](t,\tau)+\mathfrak{G}^*\mathfrak{F}(t)\mathfrak{G}\mathfrak{e}[f](t,\tau)]d\tau=f(t).$$

Иными словами,

$$\ddot{\mathfrak{w}}(t)+\mathfrak{A}(t)\mathfrak{w}(t)+\mathfrak{B}(t)\mathfrak{w}(t)+\mathfrak{G}^*\mathfrak{F}(t)\mathfrak{G}\mathfrak{w}(t)=f(t),\ \ t\in[0,T]. \tag{6.3.54}$$

Из соотношений (6.3.53) и (6.3.54) и следует равенство (6.3.47).

Из теоремы 6.3.5 и равенств (6.3.46), (6.3.47) вытекает, что найдётся функция $\Psi\in\mathfrak{S}(\Gamma;V,H)$, такая, что

$$\Lambda_2[\psi](t)=\Psi(t,0)\psi,\ \ \Lambda_3[f](t)=\int\limits_0^t\Psi(t,\tau)f(\tau)d\tau,\ \ t\in[0,T].$$

Подставляя эти формулы в соотношение (6.3.45), получим формулу (6.3.44). Теорема полностью доказана. ■

6.3.4. Нелинейное уравнение

Пусть $\varphi\in V$, $\psi\in H$, $f\in L_1([0,T],H)$, $\mathfrak{g}\in W_1^1([0,T],Y^*)$ — фиксированы.

Рассмотрим задачу Коши

$$\ddot{\mathfrak{z}}(t)+\mathfrak{A}(t)\mathfrak{z}(t)+\mathfrak{B}(t)\mathfrak{z}(t)+\mathfrak{G}^*\mathfrak{F}(t)\mathfrak{G}\mathfrak{z}(t)=\mathfrak{b}(t,\mathfrak{z}(t),\dot{\mathfrak{z}}(t))+\mathfrak{C}^*\mathfrak{g}(t),\ \ t\in[0,T], \tag{6.3.55}$$
$$\mathfrak{z}(0)=\varphi,\ \ \dot{\mathfrak{z}}(0)=\psi, \tag{6.3.56}$$

где функция $\mathfrak{b}:[0,T]\times V\times H\to H$ такова, что

1) функция $[0,T]\ni t\mapsto\mathfrak{b}(t,v,h)$ — сильно измерима при всех $v\in V$, $h\in H$;

2) найдётся функция $\mathbf{K}_0\in L_1[0,T]$, такая, что

$$\|\mathfrak{b}(t,v_1,h_1)-\mathfrak{b}(t,v_2,h_2)\|_H\leqslant\mathbf{K}_0(t)\sqrt{\|v_1-v_2\|_V^2+\|h_1-h_2\|_H^2}\ \ \forall\,(t,v_i,h_i)\in[0,T]\times V\times H,\ \ i=1,2;$$

3) найдётся функция $\mathbf{K}_1\in L_1([0,T],H)$, такая, что

$$\|\mathfrak{b}(t,0,0)\|_H\leqslant\|\mathbf{K}_1(t)\|_H\ \ \forall\,t\in[0,T].$$

Дадим следующее

Определение 6.3.3. *Функцию $\mathfrak{z}\in\mathcal{Э}([0,T];V,H)$ назовём решением задачи Коши (6.3.55), (6.3.56), если*

$$\int\limits_0^T[-\langle\dot{\mathfrak{z}}(t),\dot{\eta}(t)\rangle_H+\langle\mathfrak{A}(t)\mathfrak{z}(t),\eta(t)\rangle+\langle\mathfrak{B}(t)\mathfrak{z}(t),\eta(t)\rangle+\langle\mathfrak{F}(t)\mathfrak{G}\mathfrak{z}(t),\mathfrak{G}\eta(t)\rangle_Z]dt= \tag{6.3.57}$$
$$=\langle\psi,\eta(0)\rangle+\int\limits_0^T\langle\mathfrak{b}(t,\mathfrak{z}(t),\dot{\mathfrak{z}}(t)),\eta(t)\rangle_H dt+\int\limits_0^T\langle\mathfrak{g}(t),\mathfrak{C}\eta(t)\rangle\,dt\ \ \forall\,\eta\in\hat{\mathcal{Э}}([0,T];V,H);$$
$$\mathfrak{z}(0)=\varphi.$$

Дадим ещё одно определение решения задачи Коши (6.3.55), (6.3.56).

Определение 6.3.4. *Функцию $\mathfrak{z}\in\mathcal{Э}_2([0,T];V,H)$ назовём решением задачи Коши (6.3.55), (6.3.56), если*

$$\langle\ddot{\mathfrak{z}}(t),v\rangle+\langle\mathfrak{A}(t)\mathfrak{z}(t)+\mathfrak{B}(t)\mathfrak{z}(t)+\mathfrak{G}^*\mathfrak{F}(t)\mathfrak{G}\mathfrak{z}(t),v\rangle= \tag{6.3.58}$$
$$=\langle\mathfrak{b}(t,\mathfrak{z}(t),\dot{\mathfrak{z}}(t)),v\rangle_H+\langle\mathfrak{g}(t),\mathfrak{C}\eta(t)\rangle\ \ \text{при п.в. } t\in[0,T]\ \ \forall v\in V,$$
$$\mathfrak{z}(0)=\varphi,\ \ \dot{\mathfrak{z}}(0)=\psi.$$

Эквивалентность этих двух определений доказывается аналогично тому, как доказывалась эквивалентность определений 6.3.1 и 6.3.2.

Теорема 6.3.7. *Задача Коши (6.3.55), (6.3.56) имеет единственное решение* $\mathfrak{z}$ *в классе* $Э([0,T];V,H)$*, это решение является элементом пространства* $Є([0,T];V,H)$*, и найдётся постоянная* $\varkappa_4 > 0$*, зависящая лишь от чисел* T*,* c_1*,* c_2*,* $c_3 > 0$*, от* $\|\mathfrak{C}\|_{V\to Y}$*,* $\|\mathfrak{G}\|_{V\to Z}$*, и функции* $\mathbf{K}_0 \in L_1[0,T]$*, такая, что*

$$\|\mathfrak{z}\|_{Є([0,T];V,H)} \leqslant \varkappa_2[\sqrt{\|\varphi\|_V^2 + \|\psi\|_H^2} + \|\mathfrak{b}(t,0,0)\|_{1,[0,T],H} + \|\mathfrak{g}\|^{(1)}_{1,[0,T],Y^*}]. \tag{6.3.59}$$

6.3.5. Линейное уравнение с мерой Радона в правой части

6.3.6. Параметрическая задача Коши с ненулевой правой частью

Часть II

Гиперболические уравнения дивергентного вида

Глава 7. Уравнения с главной частью второго порядка ($n = 1$)

Глава 8. Уравнения с главной частью второго порядка ($n > 1$)

Глава 9. Уравнения с главной частью четвёртого порядка $(n = 1)$

Глава 10. Уравнения с главной частью четвёртого порядка $(n > 1)$

Литература

[1] Bales L., Lasiecka I. Negative norm estimates for fully discrete finite element approximations to the wave equation with nonhomogeneous L_2 Dirichlet boundary data // Mathematics of computation. 1995. V.64. No.209. P.89–115.

[2] Ekeland I. On the variational principle //J. Math. Anal. Appl. 1974. V.47. №.2. P.324-353.

[3] Karachalios N., Stavrakakis N. Asymptotic behavior of solutions of some nonlinearly damped equations on $\mathbb{R}^N$ // Topological Methods in Nonlinear Analysis. 2001. V.18. P.73–87.

[4] Lasiecka I., Lions J.-L., Triggiani R. Nonhomogeneous boundary value problems for second-order hyperbolic operators // J. Mat. Pures Appl. 1986. V.65. No.2. P.149—192.

[5] Lasiecka I., Sokolowski J. Regularity and strong convergence of a variational approximation to a nonhomogeneous Dirichlet hyperbolic boundary problem // SIAM J. Math. Anal. 1988. V.19. P.528–540.

[6] Lasiecka I., Triggiani R. Sharp regularity theory for second order hyperbolic equations of Neumann type, I: L_2 nonhomogeneous data // Ann. Mat. Pura Appl. 1990. V.157. P.285—367.

[7] Lasiecka I., Triggiani R. Regularity theory of hyperbolic equations with non-homogeneous Neumann boundary conditions, II: General boundary data // J. Diff. Eq. 1991. V.94. P.112—164.

[8] Mordukhovich B.S. Variational Analysis and Generalized Differentiation, I: Basic Theory. Springer: Berlin, 2006.

[9] Mordukhovich B.S., Shao Y. Nonsmooth sequential analysis in asplund spaces // Trans. Amer. Math. Soc. 1996. V.346. No.4. P.1235-1280.

[10] Ward A.L. Differentiability of vector monotone functions // Proc. London Math. Soc. 1935. V.32. No.2. P.339-362.

[11] Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. — М.: Наука, 1979.

[12] Богачёв В.И. Основы теории меры. Том I. — Москва–Ижевск: НИЦ „Регулярная и хаотическая динамика", 2003.

[13] Букесова Н.Н., Железовский С.Е. О скорости сходимости метода Галеркина для одного класса квазилинейных операторных дифференциальных уравнений // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1999. Т.39. №.9. С.1519–1531.

[14] Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. — М.: Наука, 1977.

[15] Ворович И.И. О некоторых прямых методах в нелинейной теории колебаний пологих оболочек // Изв. АН СССР. Сер. Математическая. 1957. Т.21. С.747–784.

[16] Гаврилов В.С., Сумин М.И. Параметрическая оптимизация нелинейных систем Гурса–Дарбу с фазовыми ограничениями // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2004. Т.44. № 6. С.1002–1022.

[17] Гаврилов В.С., Сумин М.И. Параметрическая задача субоптимального управления системой Гурса-Дарбу с поточечным фазовым ограничением // Известия вузов. Математика. 2005. № 6. С.40–52.

[18] Гаевский Х., Грегёр К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1978.

[19] Дель Санто Д., Митидиери Э. Разрушение решений гиперболической системы: критический случай // Дифф. уравнения. 1998. Т.34. №9. С.1155–1161.

[20] Железовский С.Е. Метод Бубнова–Галеркина для абстрактной квазилинейной задачи о стационарном действии // Дифф. уравнения. 1995. Т.31. №7. С.1222–1231.

[21] Железовский С.Е. Оценки скорости сходимости метода Галёркина для абстрактного гиперболического уравнения // Матем. заметки. 2001. Т.69. Вып.2. С.223–234.

[22] Железовский С.Е. Оценки скорости сходимости проекционно–разностного метода для гиперболических уравнений // Изв. вузов. Математика. 2002. №.1. С.21–30.

[23] Железовский С.Е. К оценкам погрешности метода Галёркина для гиперболических уравнений // Сибирский матем. журн. 2005. Т.46. №.2. С.374–389.

[24] Железовский С.Е. К обоснованию метода Галеркина для гиперболических уравнений // Дифф. уравнения. 2007. Т.43. №.3. С.402–410.

[25] Железовский С.Е. К исследованию сходимости проекционно–разностного метода для гиперболических уравнений // Сибирский матем. журн. 2007. Т.48. №.1. С.93–102.

[26] Железовский С.Е., Букесова Н.Н. Оценки погрешности проекционного метода для абстрактного квазилинейного гиперболического уравнения // Изв. вузов. Математика. 1999. №.5. С.94–96.

[27] Железовский С.Е., Ляшко А.Д. Оценки погрешности метода Галеркина для квазилинейных гиперболических уравнений // Дифф. уравнения. 2001. Т.37. №7. С.941–949.

[28] Зорич В.А. Математический анализ. Часть I. — изд.2–е. — М.: ФАЗИС, 1997.

[29] Ильин В.А., Кулешов А.А. О некоторых свойствах обобщённых решений волнового уравнения из классов L_p и W_p^1 при $p \geq 1$ // Дифф. уравнения. 2012. Т.48. №11. С.1493–1500.

[30] Ильин В.А., Кулешов А.А. Необходимое и достаточное условие принадлежности классу L_p при $p \geq 1$ обобщенного решения смешанной задачи для волнового уравнения // Дифф. уравнения. 2012. Т.48. №12. С.1607–1611.

[31] Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. В 2 ч. Часть II. — М.: Наука, Физматлит, 2000.

[32] Ишмухаметов А.З. Об аппроксимации гиперболических дифференциально–операторных уравнений второго порядка // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1987. Т.27. №.8. С.1154–1165.

[33] Иосида К. Функциональный анализ. — М.: Мир, 1967.

[34] Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988.

[35] Кожанов А.И., Ларькин Н.А. О разрешимости краевых задач для волнового уравнения с нелинейной диссипацией в неоднородных областях // Сибирский матем. журн. 2001. Т.42. №6. С.1275–1299.

[36] Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Многочастотный параметрический резонанс в нелинейном волновом уравнении // Изв. РАН. Сер. математическая. 2002. Т.66. №.6. С.49–64.

[37] Колмогоров А.Ф., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. — изд. 6-е. — М.: Наука, 1988.

[38] Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т1. — М.: Наука, 2003.

[39] Ладыженская О.А. Смешанная задача для гиперболических уравнений. — М.: Гостехиздат, 1953.

[40] Ладыженская О.А. О разрешимости основных краевых задач для уравнений параболического и гиперболического типов // ДАН СССР. 1954. Т.97. №.3. С.395–398.

[41] Ладыженская О.А. О решении нестационарных операторных уравнений // Матем. сб. 1956. Т.39. №.4. С.491–524.

[42] Ладыженская О.А. О нестационарных операторных уравнениях и их приложениях к линейным задачам математической физики // Матем. сб. 1958. Т.45. №.2. С.123–158.

[43] Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. — М.: Наука, 1973.

[44] Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — М.: Наука, 1967.

[45] Лионс Ж.–Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. — М.: Мир, 1972.

[46] Лионс Ж.–Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. — М.: Мир, 1971.

[47] Ломовцев Ф.Е. Гиперболические дифференциальные уравнения второго порядка с разрывными операторными коэффициентами // Дифф. уравнения. 1997. Т.33. №10. С.1394–1403.

[48] Никитин А.А. О смешанной задаче для волнового уравнения с третьим и первым краевым условиями // Дифф. уравнения. 2007. Т.43. №12. С.1692–1699.

[49] Обэн Ж.–П. Нелинейный анализ и его экономические приложения. — М.: Мир, 1988.

[50] Осипов Ю.С., Васильев Ф.П., Потапов М.М. Основы метода динамической регуляризации. — М.: Изд–во МГУ, 1999. — 237с.

[51] Митидиери Э., Похожаев С.И. Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных. // Тр. Математического института им. В.А. Стеклова. 2001. Т.234.

[52] Рамм А.Г. О поведении решения краевой задачи для гиперболического уравнения при $t \to \infty$ // Изв. вузов. Математика. 1966. №.1. С.124–138.

[53] Смирнов В.И. Курс высшей математики. Том V. М.: ГИФМЛ, 1959.

[54] Стейн М. И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.

[55] Сумин М.И. Дисс. ... канд. физ.-мат. наук, Горький: Горьковский гос. ун-т, 1983.

[56] Сумин М.И. О первой вариации в теории оптимального управления системами с распределенными параметрами // Дифференц. уравнения. 1991. Т.27. № 12. С.2179–2181.

[57] Сумин М.И. Субоптимальное управление системами с распределенными параметрами: минимизирующие последовательности, функция значений // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1997. Т.37. № 1. С.23-41.

[58] Сумин М.И. Субоптимальное управление полулинейными эллиптическими уравнениями с фазовыми ограничениями, I: принцип максимума для минимизирующих последовательностей, нормальность. // Изв. вузов. Математика. 2000. № 6. С.33–44.

[59] Сумин М.И. Субоптимальное управление полулинейными эллиптическими уравнениями с фазовыми ограничениями, II: чувствительность, типичность регулярного принципа максимума. // Изв.вузов. Математика. 2000. № 8. С.52–63.

[60] Сумин М.И. Дисс. ... докт. физ.-мат. наук. Н. Новгород: Нижегородский гос. ун-т, 2000.

[61] Сумин М.И. Элементы математической теории оптимального управления. Часть I. Принцип максимума Л.С.Понтрягина в задаче с нефиксированным временем и функциональными ограничениями. Методическая разработка. Нижний Новгород: Изд-во ННГУ. 2001. 48с.

[62] Сумин М.И. Первая вариация и принцип максимума Понтрягина в оптимальном управлении для уравнений в частных производных // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2009. Т.49. №. 6. С.998–1020.

[63] Треногин В.А. Функциональный анализ. — М.: Наука, 1980.

[64] Эдвардс Р. Функциональный анализ. — М.: Мир, 1969.

[65] Якубов С.Я. Равномерно корректная задача Коши для абстрактных гиперболических уравнений // Изв. вузов. Математика. 1970. №.12. С.108–113.

[66] Гаврилов В.С., Сумин М.И. Принцип максимума Понтрягина в параметрической задаче субоптимального управления для дивергентного гиперболического уравнения с фазовым ограничением // В кн. «Международная конференция „Дифференциальные уравнения и топология“, посвященная 100–летию Л.С. Понтрягина. Тезисы докладов. Москва, 17-–22 июня 2008 г.». М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова; МАКС Пресс, 2008. С.329—330.

[67] Гаврилов В.С., Сумин М.И. Параметрическая оптимизация для гиперболического уравнения дивергентного вида с поточечным фазовым ограничением. I // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47. №4. С.550–562.

[68] Гаврилов В.С., Сумин М.И. Параметрическая оптимизация для гиперболического уравнения дивергентного вида с поточечным фазовым ограничением. II // Дифференциальные уравнения. 2011. Т.47. №5. С.724—735.

[69] Mordukhovich B.S., Raymond J.–P. Dirichlet boundary control of hyperbolic equations in the presence of state constraints // Appl. Math. Optim. 2004. V.49. P.145-157.

[70] Mordukhovich B.S., Raymond J.–P. Neumann boundary control of hyperbolic equations with pointwise state constraints // SIAM J. Control Optim. V.43. No.4. 2005. P. 135-137.