

**(Суб)оптимальное управление гиперболическими  
уравнениями дивергентного вида**

**Том 1**

**Теория уравнений**

**В.С. Гаврилов**

7 января 2017 г.

# Оглавление

<b>Введение и обозначения</b>	<b>3</b>
Введение . . . . .	3
Обозначения . . . . .	6
<b>I Сведения из теории функций и функционального анализа</b>	<b>16</b>
<b>1 Функции со значениями в банаховых пространствах</b>	<b>17</b>
1.1 Предел, непрерывность и дифференцируемость . . . . .	17
1.1.1 Функции одного вещественного переменного . . . . .	17
1.1.2 Функции нескольких вещественных переменных . . . . .	26
1.2 Интеграл Римана функции одной вещественной переменной . . . . .	27
1.2.1 Определение интеграла и условия интегрируемости . . . . .	28
1.2.2 Свойства интеграла . . . . .	36
1.3 Интеграл Бохнера . . . . .	41
1.3.1 Определение интеграла Бохнера . . . . .	41
1.3.2 Свойства интеграла Бохнера . . . . .	43
1.3.3 Пространства измеримых функций . . . . .	45
1.4 Интеграл Стильтьеса . . . . .	46
1.4.1 Определение интеграла и условия интегрируемости . . . . .	46
1.4.2 Свойства интеграла . . . . .	48
1.4.3 Представление линейного непрерывного функционала на пространстве непрерывных банаховозначных функций . . . . .	49
1.4.4 Аппроксимация банаховозначных мер Радона, заданных на отрезке числовой оси . . . . .	52
1.5 Функциональные последовательности и ряды . . . . .	54
1.6 Интегралы, зависящие от параметра . . . . .	59
1.7 Сведения из негладкого анализа . . . . .	63
<b>2 Теоремы вложения</b>	<b>64</b>
2.1 Вещественные функции одного вещественного переменного . . . . .	64
2.2 Вещественные функции нескольких вещественных переменных . . . . .	66
2.3 Функции одного переменного, принимающие значения в банаховом пространстве . . . . .	67
2.4 Функции одного переменного и со значениями в гильбертовом пространстве . . . . .	74
2.5 Следствия . . . . .	86
<b>3 О представлении некоторых линейных непрерывных операторов</b>	<b>95</b>
3.1 Абстрактные теоремы . . . . .	95
3.2 Применение абстрактных теорем к энергетическим классам . . . . .	103
3.3 Абстрактное интегро-дифференциальное уравнение . . . . .	112
<b>4 Сведения из теории меры</b>	<b>115</b>
4.1 Предельный переход под знаком измеримой функции . . . . .	115
4.2 Предельный переход под знаком интеграла Лебега . . . . .	119
4.3 Точки Лебега и максимальные функции . . . . .	124
4.4 Аппроксимация мер Радона, заданных на отрезке числовой оси . . . . .	125

<b>5</b>	<b>О некоторых обыкновенных дифференциальных уравнениях</b>	<b>128</b>
5.1	Лемма Гронолла и её следствие . . . . .	128
5.2	Уравнения первого порядка . . . . .	130
5.3	Уравнения второго порядка . . . . .	131
<b>6</b>	<b>Абстрактная задача Коши и энергетическое расширение</b>	<b>133</b>
6.1	Энергетическое расширение . . . . .	133
6.2	Абстрактная задача Коши с автономной главной частью . . . . .	143
6.3	Абстрактная задача Коши с неавтономной главной частью . . . . .	155
6.3.1	Линейное уравнение без меры Радона в правой части . . . . .	156
6.3.2	Параметрическая задача Коши для однородного уравнения . . . . .	164
6.3.3	Представление решения линейного уравнения . . . . .	167
6.3.4	Нелинейное уравнение . . . . .	169
6.3.5	Линейное уравнение с мерой Радона в правой части . . . . .	171
6.3.6	Параметрическая задача Коши с ненулевой правой частью . . . . .	176
<b>II</b>	<b>Гиперболические уравнения дивергентного вида</b>	<b>181</b>
<b>7</b>	<b>Уравнения с главной частью второго порядка (<math>n = 1</math>)</b>	<b>182</b>
<b>8</b>	<b>Уравнения с главной частью второго порядка (<math>n &gt; 1</math>)</b>	<b>183</b>
<b>9</b>	<b>Уравнения с главной частью четвёртого порядка (<math>n = 1</math>)</b>	<b>184</b>
<b>10</b>	<b>Уравнения с главной частью четвёртого порядка (<math>n &gt; 1</math>)</b>	<b>185</b>
	<b>Литература</b>	<b>186</b>

# Введение и обозначения

## Введение

В конце 40-х годов XXв. в работах Ладыженской О.А. было предложено определять обобщённые решения краевых и начально-краевых задач для эллиптических, параболических и гиперболических уравнений с помощью интегральных тождеств, заменяющих собой уравнение, а иногда и часть начальных и граничных условий. Было также отмечено, что для каждой задачи можно вводить различные классы обобщённых решений. Тем самым определение обобщённого решения задачи было отделено от какого-либо способа его получения (в отличие от предшествовавших работ Фридрихса К. и Соболева С.Л.) и от каких бы то ни было аналитических представлений решения (в отличие от работ Гюнтера Н.М. и Лерэ Ж.). Более того, для ряда классов обобщённых решений классических краевых и начально-краевых задач были доказаны теоремы единственности, использующие лишь свойства исследуемых уравнений, вытекающие из их определения.

Вначале Ладыженская О.А. доказала существование обобщённых решений с помощью метода конечных разностей. Тем же методом было исследовано и увеличение гладкости этих обобщённых решений по мере увеличения гладкости исходных данных и коэффициентов задачи. Полученные результаты для случая гиперболических уравнений с начально-краевыми условиями были отражены в работе [39]. Впоследствии в главе IV работы [43] те же результаты доказаны с помощью метода Галёркина.

Затем Ладыженская О.А. [40, 41, 42] и Ворович И.И. [15] предложили так называемый „функциональный метод“<sup>1</sup> исследования начально-краевых задач для гиперболических уравнений<sup>2</sup>.

Более точно, в работах [40, 41, 42] предложено сводить начально-краевые задачи для гиперболических уравнений к задаче Коши для уравнения вида

$$S_1(t)\frac{d^2z}{dt^2} + S_2(t)\frac{dz}{dt} + S_3(t)z = f(t), \quad (0.0.1)$$

и доказаны существование и единственность решений рассматриваемых абстрактных задач Коши. Здесь  $S_i(t)$  — неограниченные линейные операторы в гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}$ , зависящие от времени  $t$  и обладающие некоторыми общими свойствами.

Что касается работы [15], то в ней рассматривалась абстрактная постановка начально-краевых задач для гиперболических уравнений с локально-липпшицевыми нелинейностями по младшим производным и с симметричной автономной главной частью. А именно, рассматривалась задача Коши для абстрактного уравнения вида

$$\omega_{tt} + A_1\omega + A_2\omega + K\omega_t = f(t), \quad (0.0.2)$$

где  $A_1$  — симметричный положительно определённый оператор,  $A_2$  — некоторый нелинейный оператор, действующий из энергетического пространства оператора  $A_1$  в пространство непрерывных функций, а  $K$  — линейный ограниченный оператор, действующий в пространстве суммируемых с квадратом по области  $\Omega$  функций. При этом в работе [15] доказана лишь теорема существования решения задачи Коши для уравнения (0.0.2).

Затем в работах Лионса и Мадженеса [45, 46] было предложено сводить начально-краевые задачи для гиперболических уравнений к задаче Коши для уравнения вида

$$\frac{d^2z}{dt^2} + A(t)z = f(t), \quad t \in [0, T], \quad (0.0.3)$$

$$z(0) = \varphi, \quad \dot{z}(0) = \psi, \quad (0.0.4)$$

<sup>1</sup>Термин, по-видимому, предложен Ладыженской О.А.

<sup>2</sup>В работах [40, 41, 42] речь шла также о параболических уравнениях и уравнениях типа уравнения Шрёдингера.

где  $A(t) \in \mathcal{L}(V, V^*)$ ,  $t \in [0, T]$ , — симметричный оператор,  $\varphi \in V$ ,  $\psi \in H$ , а  $V, H$  — гильбертовы пространства, такие, что  $V \subset H$ , и вложение  $V$  в  $H$  — непрерывно и компактно. При этом предполагается, что при некотором вещественном  $\lambda$  оператор  $A(t)$  — положительно определённый, в том смысле, что

$$\langle A(t)w, w \rangle + \lambda \|w\|_H^2 \geq \|w\|_V^2.$$

Также в работах [45, 46] рассматривались некоторые случаи нелинейности в младших членах уравнений и в главной части.

После работ Лионса и Ладыженской появилось много работ, использующих методы Лионса и Ладыженской для изучения разных аспектов теории гиперболических уравнений дивергентного вида.

Например, в работе Якубова [65] с помощью схемы, предложенной в работах [40, 41, 42] доказана однозначная разрешимость задачи Коши

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + A(t) \frac{dz}{dt} + B(t)z = f(t), \quad t \in [0, T], \quad (0.0.5)$$

$$z(0) = \varphi, \quad \dot{z}(0) = \psi, \quad (0.0.6)$$

в классе функций, сильно непрерывных в норме энергетического пространства оператора  $A(t)$ , имеющих сильно непрерывную в пространстве типа пространства  $L_2$  первую производную по времени.

Далее, в работах Железовского [13], [20]–[27], Ласеки [5, 1], и Ишмухаметова обоснован метод Бубнова–Галёркина приближённого решения гиперболических уравнений дивергентного вида, с локально липшицевой по фазовой переменной и по её младшим производным правой частью. Доказаны локальные теоремы существования и единственности решений, получены оценки скорости сходимости метода Бубнова–Галёркина.

В работе Ишмухаметова [32] для абстрактной задачи Коши вида (0.0.5) обосновывается результат об аппроксимации, дающий возможность получать оценки скорости сходимости в энергетической норме разностных схем для начально–краевых задач для гиперболических уравнений дивергентного вида.

Достаточное большое число работ (см., например, работы [19, 51] и библиографию к ним) посвящено вопросам разрушения решений начально–краевых задач для гиперболических уравнений дивергентного вида. Имеются работы (см., например, [4, 6, 7]), посвящённые получению тонких свойств регулярности решений; работы [29, 29, 48], в которых решение начально–краевой задачи для одномерного волнового решения ищется в пространствах  $L_p$  и  $W_p^1$ ; работы (см., например, [52, 3]), в которых изучается асимптотическое поведение решений начально–краевых задач для гиперболических уравнений.

Кроме того, в работе [35] для одномерного волнового уравнения, рассматриваемого в прямоугольной области, изучается разрешимость некоторых начально–краевых задач, а в работе [36] изучается возможность многопараметрического резонанса в краевой задаче для одномерного волнового уравнения.

Наконец, в работе [47] изучается существование, единственность, и гладкость решений абстрактной задачи Коши, являющейся абстрактной формулировкой начально–краевых задач для гиперболических уравнений дивергентного вида, для случая, когда главная часть разрывна по времени и имеет разные области определения в разные моменты времени.

Отметим, однако, что во всех этих работах рассматриваются уравнения с симметричной главной частью, а при выписывании сопряжённых уравнений принципа максимума для задач оптимизации систем, динамика которых описывается гиперболическими уравнениями дивергентного вида, в случае наличия в исходном уравнении младших производных главная часть сопряжённого уравнения сразу же становится несимметричной. Поясним, о чём идёт речь, для чего рассмотрим следующую простейшую задачу оптимального управления:

$$I[\pi] \rightarrow \min, \quad \pi \in \mathcal{D}, \quad (0.0.7)$$

где  $\mathcal{D} \equiv \{\pi \equiv (u, v) \in \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2\}$ ,  $\mathcal{D}_1 \equiv \{u \in L_\infty^m(Q_T) : u(x, t) \in U \text{ п.в. в } Q_T\}$ ,  $\mathcal{D}_2 \equiv \{v \in L_\infty(\Omega) : v(x) \in V \text{ п.в. в } \Omega\}$ ,  $U \subset \mathbb{R}^m$  — компакт,  $V \subset \mathbb{R}$  — отрезок числовой оси, а функционал  $I$  задаётся равенством

$$I[\pi] \equiv \int_{\Omega} G(x, z[\pi](x, T)) dx.$$

Здесь  $z[\pi]$  — отвечающее паре  $\pi \equiv (u, v) \in \mathcal{D}$  единственное обобщённое решение начально–краевой задачи

$$\begin{aligned} z_{tt} - \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(x, t) z_{x_j}) + a(x, t) z + b_i(x, t) z_{x_i} &= \langle f(x, t), u(x, t) \rangle, \quad (x, t) \in Q_T; \\ z(x, 0) &= \varphi(x), \quad z_t(x, 0) = v(x), \quad x \in \Omega; \quad z(x, t) = 0, \quad (x, t) \in S_T. \end{aligned} \quad (0.0.8)$$

Тогда необходимое условие оптимальности в этой задаче, называемое принципом максимума Л.С.Понтрягина, формулируется следующим образом (вывод принципа максимума, см., например, в работе [62]).

**Теорема 0.0.1.** Пусть управление  $\pi_0 \equiv (u_0, v_0) \in \mathcal{D}$  — оптимально в задаче (0.0.7), в том смысле, что  $I[\pi_0] = \inf_{\pi \in \mathcal{D}} I[\pi]$ . Тогда при почти всех  $(x, t) \in Q_T$  справедливо равенство

$$H(x, t, z[\pi_0](x, t), u_0(x, t), \eta[\pi_0](x, t)) = \max_{w \in U} H(x, t, z[\pi_0](x, t), w, \eta[\pi_0](x, t)), \quad (0.0.9)$$

где  $H(x, t, z, u, \eta) \equiv \eta[a(x, t)z - \langle f(x, t), u \rangle]$ , а  $\eta[\pi_0]$  — решение при  $\pi \equiv \pi_0$  сопряжённой начально-краевой задачи

$$\begin{aligned} \eta_{tt} - \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(x, t)\eta_{x_j} + b_i(x, t)\eta) + a(x, t)\eta &= 0, \quad (x, t) \in Q_T; \\ \eta(x, T) &= 0, \quad \eta_t(x, T) = \nabla_z G(x, z[\pi](x, T)), \quad x \in \Omega; \quad \eta(x, t) = 0, \quad (x, t) \in S_T. \end{aligned} \quad (0.0.10)$$

Таким образом, важной задачей является изучение начально-краевых задач для гиперболических уравнений дивергентного вида с несимметричной главной частью.

В настоящей монографии мы изучаем именно такие уравнения.

Отметим также, что при получении необходимых условий оптимальности для задач оптимального управления с поточечными фазовыми ограничениями множитель Лагранжа, отвечающий оператору, задающему поточечные фазовые ограничения, является мерой Радона, и эта мера Радона появляется в правой части сопряжённого уравнения, отвечающего оператору поточечных фазовых ограничений. Поясним это на примере следующей задачи оптимального управления с поточечными ограничениями:

$$I_0[\pi] \rightarrow \min, \quad I_1[\pi](t) \leq 0 \quad \forall t \in [0, T], \quad \pi \in \mathcal{D}, \quad (0.0.11)$$

где  $\mathcal{D} \equiv \{\pi \equiv (u, v) \in \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2\}$ ,  $\mathcal{D}_1 \equiv \{u \in L^\infty(Q_T) : u(x, t) \in U \text{ п.в. в } Q_T\}$ ,  $\mathcal{D}_2 \equiv \{v \in L_\infty(\Omega) : v(x) \in V \text{ п.в. в } \Omega\}$ ,  $U \subset \mathbb{R}^m$  — компакт,  $V \subset \mathbb{R}$  — отрезок числовой оси, а функционал  $I_0$  и оператор  $I_1$  задаются равенствами

$$I_0[\pi] \equiv \int_{\Omega} G(x, z[\pi](x, T))dx, \quad I_1[\pi](t) \equiv \int_{\Omega} \Phi(x, t, z[\pi](x, t))dx.$$

Здесь  $z[\pi]$  — отвечающее паре  $\pi \equiv (u, v) \in \mathcal{D}$  единственное обобщённое решение начально-краевой задачи (0.0.8).

В этом случае необходимые условия оптимальности выглядят следующим образом<sup>3</sup>:

**Теорема 0.0.2.** Пусть управление  $\pi_0 \equiv (u_0, v_0) \in \mathcal{D}$  — оптимально в задаче (0.0.11). Тогда найдутся неотрицательное вещественное число  $\lambda$  и неотрицательная мера Радона  $\mu \in \mathbf{M}[0, T]$ ,  $\lambda + \|\mu\| = 1$ , такие, что при почти всех  $(x, t) \in Q_T$  справедливо равенство

$$H(x, t, z[\pi_0](x, t), u_0(x, t), \eta[\pi_0, \lambda, \mu](x, t)) = \max_{w \in U} H(x, t, z[\pi_0](x, t), w, \eta[\pi_0, \lambda, \mu](x, t)), \quad (0.0.12)$$

где  $H(x, t, z, u, \eta) \equiv \eta[a(x, t)z - \langle f(x, t), u \rangle]$ , а  $\eta[\pi, \lambda, \mu]$  — решение при  $\pi \equiv \pi_0$  сопряжённой начально-краевой задачи

$$\begin{aligned} \eta_{tt} - \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(x, t)\eta_{x_j} + b_i(x, t)\eta) + a(x, t)\eta &= \nabla_z \Phi(x, t, z[\pi](x, t))\mu(dt) \quad (x, t) \in Q_T; \\ \eta(x, T) &= 0, \quad \eta_t(x, T) = \lambda \nabla_z G(x, z[\pi](x, T)), \quad x \in \Omega; \quad \eta(x, t) = 0, \quad (x, t) \in S_T. \end{aligned} \quad (0.0.13)$$

Поэтому представляется важным изучение свойств решений линейных гиперболических уравнений дивергентного вида с присутствующей в правой части уравнения мерой Радона. Из результатов в этой области нам известны лишь работы [69, 70]. В отличие от них, в данной монографии рассматриваются более общие уравнения и более общие граничные условия.

Используемый в работах [13–16] метод вывода необходимых условий подразумевает аппроксимацию исходной задачи с ПФО задачами, каждая из которых «эквивалентна» задаче с конечным числом функциональных ограничений–неравенств. Далее в каждой аппроксимирующей задаче выводится „аппроксимирующий“ принцип максимума, после чего в семействе этих принципов максимума совершается предельный переход при стремлении числа ограничений к бесконечности. Подобный же подход применяется в [13–16] и при получении результатов, связанных с регулярностью, нормальностью и с чувствительностью.

<sup>3</sup>Подробный вывод этого принципа максимума можно найти, например, в работах [66, 67, 68].

Однако при таком подходе возникает проблема „склейки“ сопряжённых уравнений аппроксимирующих принципов максимума в одно результирующее сопряжённое уравнение, отвечающее исходному фазовому ограничению и содержащее меру Радона в своей правой части. Кроме того, при выводе „аппроксимирующих“ принципов максимума возникает необходимость „подравнивания“ их сопряжённых уравнений с распространением решений этих уравнений на весь цилиндр, в котором рассматривается исходное уравнение. В результате такого „подравнивания“ левая часть сопряжённого уравнения не изменяется, а начальное условие для производной по времени „перекачивается“ в правую часть сопряжённого уравнения, так что в правой части получающегося уравнения оказывается  $\delta$ -мера Радона.

В связи с этим представляется важным изучение свойств решений гиперболических уравнений дивергентного вида с  $\delta$ -мерой Радона в правой части и изучение возможности представления решения линейного уравнения с произвольной мерой Радона в правой части в виде интеграла от решения уравнения с  $\delta$ -мерой Радона в правой части.

Поэтому указанные вопросы подробно рассматриваются в данной монографии. Заметим также, что, насколько нам известно, применительно к гиперболическим уравнениям дивергентного вида никто подобные вопросы ранее не рассматривал.

## Обозначения

Здесь и всюду ниже мы используем следующие обозначения:

$\mathbb{R}^m$  —  $m$ -мерное пространство векторов-столбцов  $x = (x_1, \dots, x_m)$  с евклидовой нормой

$$|x| \equiv \sqrt{\sum_{i=1}^m x_i^2};$$

$\Pi_\varepsilon^m(x^0) \equiv \{x \in \mathbb{R}^m : |x - x^0| < \varepsilon\};$

$\mathbb{R}^{m \times n}$  —  $mn$ -мерное пространство  $(m \times n)$ -матриц  $A = \{a_{ij}\}$  со скалярным произведением

$$\langle A, B \rangle \equiv \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ij};$$

этому скалярному произведению соответствует евклидова норма

$$|A| \equiv \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2};$$

$\mathbf{M}(\mathcal{P})$  — множество всех мер Радона на компакте  $\mathcal{P}$ ,  $\|\mu\|$  — полная вариация меры  $\mu \in \mathbf{M}(\mathcal{P})$ ;

$\mathbf{M}_+(\mathcal{P})$  — множество всех неотрицательных мер Радона на компакте  $\mathcal{P}$ ;

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$  — ограниченная область с кусочно-гладкой границей  $S$ ;

$T > 0$  — константа;

$S_T \equiv S \times (0, T)$ ;

$\alpha_i(s, t)$  — угол между единичным вектором внешней нормали к  $S_T$  в точке  $(s, t) \in S_T$  и осью  $Ox_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ ;

$clX$  — замыкание множества  $X$ ;

$Q_T \equiv \Omega \times (0, T)$ ;

$S' \subseteq S$  — множество, имеющее положительную поверхностную меру;

$S'' \equiv S \setminus S'$  — множество, имеющее положительную поверхностную меру;

$S'_T \equiv S' \times (0, T)$ ;

$S''_T \equiv S'' \times (0, T)$ ;

$Q_{(t_1, t_2)} \equiv \Omega \times (t_1, t_2)$ , где  $t_1, t_2 \in [0, T]$ ;

$Q_{[t_1, t_2]} \equiv \Omega \times [t_1, t_2]$ , где  $t_1, t_2 \in [0, T]$ ;

$S_{(t_1, t_2)} \equiv S \times (t_1, t_2)$ , где  $t_1, t_2 \in [0, T]$ ;

$S'_{(t_1, t_2)} \equiv S' \times (t_1, t_2)$ , где  $t_1, t_2 \in [0, T]$ ;

$S''_{(t_1, t_2)} \equiv S'' \times (t_1, t_2)$ , где  $t_1, t_2 \in [0, T]$ ;

$L_p^m(G)$ , где  $G \subset \mathbb{R}^k$  — ограниченная область, — пространство  $m$ -мерных вектор-функций  $z(x) \equiv (z_1(x), \dots, z_k(x))$ ,  $x \in G$ , с нормой

$$\|z\|_{p,G} \equiv \left[ \int_G |z(x)|^p dx \right]^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty; \quad \|z\|_{\infty,G} = \operatorname{vraisup}_{x \in G} |z(x)|; \quad L_p^1(G) \equiv L_p(G);$$

$L_p([0, T], X)$ , где  $X$  — сепарабельное банахово пространство с нормой  $\|\cdot\|_X$ , — банахово пространство слабо измеримых на  $[0, T]$  функций  $\xi: [0, T] \rightarrow X$ , для которых функция  $[0, T] \ni t \mapsto \|\xi(t)\|_X$  является элементом  $L_p[0, T]$ ; норма в  $L_p([0, T], X)$  определяется так:

$$\|\xi\|_{p,[0,T],X} \equiv \left[ \int_0^T \|\xi(t)\|_X^p dt \right]^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty; \quad \|\xi\|_{p,[0,T],X} \equiv \operatorname{vraisup}_{t \in [0,T]} \|\xi(t)\|_X, \quad p = \infty;$$

$L_{p,1}(Q_T)$  — банахово пространство измеримых по Лебегу на  $Q_T$  функций  $\xi: Q_T \rightarrow \mathbb{R}$  с конечной нормой

$$\|\xi\|_{p,1,Q_T} \equiv \int_0^T \left[ \int_{\Omega} |\xi(x,t)|^p dx \right]^{1/p} dt \quad (1 \leq p < \infty); \quad \|\xi\|_{p,1,Q_T} \equiv \int_0^T \operatorname{vraisup}_{x \in \Omega} |\xi(x,t)| dt \quad (p = \infty);$$

$L_{p,1}(Q_{[t_1,t_2]})$ , где  $t_1, t_2 \in [0, T]$ ,  $t_1 < t_2$ , — банахово пространство измеримых по Лебегу на  $Q_{[t_1,t_2]}$  функций  $\xi: Q_{[t_1,t_2]} \rightarrow \mathbb{R}$  с конечной нормой

$$\|\xi\|_{p,1,Q_{[t_1,t_2]}} \equiv \int_{t_1}^{t_2} \left[ \int_{\Omega} |\xi(x,t)|^p dx \right]^{1/p} dt \quad (1 \leq p < \infty); \quad \|\xi\|_{p,1,Q_{[t_1,t_2]}} \equiv \int_{t_1}^{t_2} \operatorname{vraisup}_{x \in \Omega} |\xi(x,t)| dt \quad (p = \infty);$$

$L_{p,1}(S_T)$  — банахово пространство измеримых по Лебегу на  $S_T$  функций  $\xi: S_T \rightarrow \mathbb{R}$  с конечной нормой

$$\|\xi\|_{p,1,S_T} \equiv \int_0^T \left[ \int_S |\xi(s,t)|^p ds \right]^{1/p} dt \quad (1 \leq p < \infty); \quad \|\xi\|_{p,1,S_T} \equiv \int_0^T \operatorname{vraisup}_{s \in S} |\xi(s,t)| dt \quad (p = \infty);$$

$L_{p,1}(S'_T)$  — банахово пространство измеримых по Лебегу на  $S'_T$  функций  $\xi: S'_T \rightarrow \mathbb{R}$  с конечной нормой

$$\|\xi\|_{p,1,S'_T} \equiv \int_0^T \left[ \int_{S'} |\xi(s,t)|^p ds \right]^{1/p} dt \quad (1 \leq p < \infty); \quad \|\xi\|_{p,1,S'_T} \equiv \int_0^T \operatorname{vraisup}_{s \in S'} |\xi(s,t)| dt \quad (p = \infty);$$

$L_{p,1}(S_T, \mathbb{R}^n)$  — банахово пространство измеримых по Лебегу на  $S_T$  функций  $\xi: S_T \rightarrow \mathbb{R}^n$  с конечной нормой

$$\|\xi\|_{p,1,S_T} \equiv \int_0^T \left[ \int_S |\xi(s,t)|^p ds \right]^{1/p} dt \quad (1 \leq p < \infty); \quad \|\xi\|_{p,1,S_T} \equiv \int_0^T \operatorname{vraisup}_{s \in S} |\xi(s,t)| dt \quad (p = \infty);$$

$L_{p,1}(S'_T, \mathbb{R}^n)$  — банахово пространство измеримых по Лебегу на  $S'_T$  функций  $\xi: S'_T \rightarrow \mathbb{R}^n$  с конечной нормой

$$\|\xi\|_{p,1,S'_T} \equiv \int_0^T \left[ \int_{S'} |\xi(s,t)|^p ds \right]^{1/p} dt \quad (1 \leq p < \infty); \quad \|\xi\|_{p,1,S'_T} \equiv \int_0^T \operatorname{vraisup}_{s \in S'} |\xi(s,t)| dt \quad (p = \infty);$$

$W_p^1[0, T]$ , где  $1 \leq p \leq \infty$ , — множество всех функций  $z \in L_p[0, T]$  с обобщённой производной  $z'$  из  $L_p[0, T]$ ; норма в  $W_p^1[0, T]$  определяется соотношением

$$\|z\|_{p,[0,T]}^{(1)} \equiv \left[ \|z\|_{p,[0,T]}^p + \|z'\|_{p,[0,T]}^p \right]^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty; \quad \|z\|_{p,[0,T]}^{(1)} \equiv \|z\|_{\infty,[0,T]} + \|z'\|_{\infty,[0,T]}, \quad p = \infty;$$

$W_1^2[0, T]$  — множество всех функций  $z \in L_1[0, T]$  с суммируемыми первой и второй обобщёнными производными; норма в  $W_1^2[0, T]$  определяется соотношением

$$\|z\|_{1,[0,T]}^{(2)} \equiv \|z\|_{1,[0,T]} + \|z'\|_{1,[0,T]} + \|z''\|_{1,[0,T]};$$

$W_2^1(G)$ , где  $G \subset \mathbb{R}^k$  — ограниченная область, — гильбертово пространство функций  $z \in L_2(G)$ , у которых все первые обобщённые производные принадлежат  $L_2(G)$ , со скалярным произведением

$$\langle z_1, z_2 \rangle = \int_G \left[ z_1 z_2 + \sum_{i=1}^k z_{1x_i} z_{2x_i} \right] dx;$$



соответствующую норму в этом пространстве обозначим через  $\|\cdot\|_{2,G}^{(1)}$ ;

$W_2^2(G)$ , где  $G \subset \mathbb{R}^k$  — ограниченная область, — гильбертово пространство функций  $z \in L_2(G)$ , у которых все обобщённые производные до второго порядка включительно принадлежат  $L_2(G)$ , со скалярным произведением

$$\langle z_1, z_2 \rangle = \int_G \left[ z_1 z_2 + \sum_{i=1}^k z_{1x_i} z_{2x_i} + \sum_{i,j=1}^k z_{1x_i x_j} z_{2x_i x_j} \right] dx;$$

соответствующую норму в этом пространстве обозначим через  $\|\cdot\|_{2,G}^{(2)}$ ;

$W_{p,1}^{0,1}(Q_T)$  — банахово пространство функций  $\xi \in L_{p,1}(Q_T)$ , для которых  $\xi_t \in L_{p,1}(Q_T)$ ; норма в  $W_{p,1}^{0,1}(Q_T)$  задаётся равенством

$$\|\xi\|_{p,1,Q_T}^{(0,1)} \equiv \|\xi\|_{p,1,Q_T} + \|\xi_t\|_{p,1,Q_T};$$

$W_{p,1}^{0,1}(S_T)$  — банахово пространство функций  $\xi \in L_{p,1}(S_T)$ , для которых  $\xi_t \in L_{p,1}(S_T)$ ; норма в  $W_{p,1}^{0,1}(S_T)$  задаётся равенством

$$\|\xi\|_{p,1,S_T}^{(0,1)} \equiv \|\xi\|_{p,1,S_T} + \|\xi_t\|_{p,1,S_T};$$

$W_{p,1}^{0,1}(S'_T)$  — банахово пространство функций  $\xi \in L_{p,1}(S'_T)$ , для которых  $\xi_t \in L_{p,1}(S'_T)$ ; норма в  $W_{p,1}^{0,1}(S'_T)$  задаётся равенством

$$\|\xi\|_{p,1,S'_T}^{(0,1)} \equiv \|\xi\|_{p,1,S'_T} + \|\xi_t\|_{p,1,S'_T};$$

$W_{p,1}^{0,1}(S_T, \mathbb{R}^n)$  — банахово пространство функций  $\xi \in L_{p,1}(S_T, \mathbb{R}^n)$ , для которых  $\xi_t \in L_{p,1}(S_T, \mathbb{R}^n)$ ; норма в  $W_{p,1}^{0,1}(S_T, \mathbb{R}^n)$  задаётся равенством

$$\|\xi\|_{p,1,S_T}^{(0,1)} \equiv \|\xi\|_{p,1,S_T} + \|\xi_t\|_{p,1,S_T};$$

$W_{p,1}^{0,1}(S'_T, \mathbb{R}^n)$  — банахово пространство функций  $\xi \in L_{p,1}(S'_T, \mathbb{R}^n)$ , для которых  $\xi_t \in L_{p,1}(S'_T, \mathbb{R}^n)$ ; норма в  $W_{p,1}^{0,1}(S'_T, \mathbb{R}^n)$  задаётся равенством

$$\|\xi\|_{p,1,S'_T}^{(0,1)} \equiv \|\xi\|_{p,1,S_T} + \|\xi_t\|_{p,1,S'_T};$$

$C_0^\infty(\Omega)$  — множество всех бесконечно дифференцируемых финитных в  $\Omega$  функций

$\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$  — замыкание в норме пространства  $W_2^1(\Omega)$  множества  $C_0^\infty(\Omega)$ ; норма в  $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$  определяется так же, как и в  $W_2^1(\Omega)$ ;

$\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega|S'')$  — замыкание в норме пространства  $W_2^1(\Omega)$  множества всех бесконечно дифференцируемых в  $\Omega$  и финитных вблизи  $S''$  функций; норма в  $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega|S'')$  определяется так же, как и в  $W_2^1(\Omega)$ ;

$\overset{\circ}{W}_2^{-1}(\Omega)$  — пространство, сопряжённое к  $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ ;

$W_2^{-1}(\Omega)$  — пространство, сопряжённое к  $W_2^1(\Omega)$ ;

$\overset{\circ}{W}_2^{-1}(\Omega|S'')$  — пространство, сопряжённое к  $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega|S'')$ ;

$\overset{\circ}{W}_2^2(\Omega)$  — замыкание в норме пространства  $W_2^2(\Omega)$  множества  $C_0^\infty(\Omega)$ ; норма в  $\overset{\circ}{W}_2^2(\Omega)$  определяется так же, как и в  $W_2^2(\Omega)$ ;

$\overset{\circ}{W}_2^2(\Omega|S'')$  — замыкание в норме пространства  $W_2^2(\Omega)$  множества всех бесконечно дифференцируемых в  $\Omega$  и финитных вблизи  $S''$  функций; норма в  $\overset{\circ}{W}_2^2(\Omega|S'')$  определяется так же, как и в  $W_2^2(\Omega)$ ;

$\overset{\circ}{W}_2^{-2}(\Omega)$  — пространство, сопряжённое к  $\overset{\circ}{W}_2^2(\Omega)$ ;

$W_2^{-2}(\Omega)$  — пространство, сопряжённое к  $W_2^2(\Omega)$ ;

$\overset{\circ}{W}_2^{-2}(\Omega|S'')$  — пространство, сопряжённое к  $\overset{\circ}{W}_2^2(\Omega|S'')$ ;

$C^{\infty,0}(Q_T)$  — множество всех бесконечно дифференцируемых в  $Q_T$  финитных вблизи  $S_T$  функций;

$C^{\infty,0}(Q_{[t_1,t_2]})$ , где  $t_1, t_2 \in [0, T]$ ,  $t_1 < t_2$ , — множество всех бесконечно дифференцируемых в  $Q_T$  финитных вблизи  $S_{[t_1,t_2]}$  функций;

$W_{2,0}^1(Q_T)$  — замыкание множества  $C^{\infty,0}(Q_T)$  в норме  $W_2^1(Q_T)$ ; норма в  $W_{2,0}^1(Q_T)$  задаётся равенством

$$\|z\|_{2,Q_T}^{(1)} \equiv \left[ \int_{Q_T} [z^2 + z_t^2 + |\nabla_x z|^2] dx dt \right]^{1/2};$$

$W_{2,0}^1(Q_{[t_1,t_2]})$ , где  $t_1, t_2 \in [0, T]$ ,  $t_1 < t_2$ , — замыкание множества  $C^{\infty,0}(Q_{[t_1,t_2]})$  в норме  $W_2^1(Q_{[t_1,t_2]})$ ; норма в  $W_{2,0}^1(Q_{[t_1,t_2]})$  задаётся равенством

$$\|z\|_{2,Q_{[t_1,t_2]}}^{(1)} \equiv \left[ \int_{Q_{[t_1,t_2]}} [z^2 + z_t^2 + |\nabla_x z|^2] dx dt \right]^{1/2};$$

$W_{2,0}^1(Q_T|S_T'')$  — замыкание в норме  $W_2^1(Q_T)$  множества бесконечно дифференцируемых в  $Q_T$  финитных вблизи  $S_T''$  функций; норма в  $W_{2,0}^1(Q_T|S_T'')$  задаётся равенством

$$\|z\|_{2,Q_T}^{(1)} \equiv \left[ \int_{Q_T} [z^2 + z_t^2 + |\nabla_x z|^2] dx dt \right]^{1/2};$$

$W_{2,0}^1(Q_{[t_1,t_2]}|S_{[t_1,t_2]}'')$ , где  $t_1, t_2 \in [0, T]$ ,  $t_1 < t_2$ , — замыкание множества бесконечно дифференцируемых в  $Q_{[t_1,t_2]}$  финитных вблизи  $S_{[t_1,t_2]}''$  функций; норма в  $W_{2,0}^1(Q_{[t_1,t_2]}|S_{[t_1,t_2]}'')$  задаётся равенством

$$\|z\|_{2,Q_{[t_1,t_2]}}^{(1)} \equiv \left[ \int_{Q_{[t_1,t_2]}} [z^2 + z_t^2 + |\nabla_x z|^2] dx dt \right]^{1/2};$$

$W_2^{2;1}(Q_T)$  — гильбертово пространство, состоящее из всех функций  $z \in L_2(Q_T)$ , у которых  $z_{x_i}, z_{x_i x_j}, z_t \in L_2(Q_T)$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ ; скалярное произведение в  $W_2^{2;1}(Q_T)$  задаётся формулой

$$\langle z_1, z_2 \rangle = \int_{Q_T} \left[ z_1 z_2 + \sum_{i=1}^k z_{1x_i} z_{2x_i} + \sum_{i,j=1}^k z_{1x_i x_j} z_{2x_i x_j} + z_{1t} z_{2t} \right] dx;$$

норму, отвечающую этому скалярному произведению, обозначим через  $\|z\|_{2,Q_T}^{(2;1)}$ ;

$W_{2,0}^{2;1}(Q_T)$  — замыкание множества  $C^{\infty,0}(Q_T)$  в норме  $W_2^{2;1}(Q_T)$ ; норма в  $W_{2,0}^{2;1}(Q_T)$  задаётся так же, как и в  $W_2^{2;1}(Q_T)$ ;

$W_{2,0}^{2;1}(Q_{[t_1,t_2]})$ , где  $t_1, t_2 \in [0, T]$ ,  $t_1 < t_2$ , — замыкание множества  $C^{\infty,0}(Q_{[t_1,t_2]})$  в норме  $W_2^{2;1}(Q_{[t_1,t_2]})$ ; норма в  $W_{2,0}^{2;1}(Q_{[t_1,t_2]})$  задаётся так же, как и в  $W_2^{2;1}(Q_{[t_1,t_2]})$ ;

$W_{2,0}^{2;1}(Q_T|S_T'')$  — замыкание в норме  $W_2^{2;1}(Q_T)$  множества бесконечно дифференцируемых в  $Q_T$  финитных вблизи  $S_T''$  функций; норма в  $W_{2,0}^{2;1}(Q_T|S_T'')$  задаётся так же, как и в  $W_2^{2;1}(Q_T)$ ;

$W_{2,0}^{2;1}(Q_{[t_1,t_2]}|S_{[t_1,t_2]}'')$ , где  $t_1, t_2 \in [0, T]$ ,  $t_1 < t_2$ , — замыкание множества бесконечно дифференцируемых в  $Q_{[t_1,t_2]}$  финитных вблизи  $S_{[t_1,t_2]}''$  функций; норма в  $W_{2,0}^{2;1}(Q_{[t_1,t_2]}|S_{[t_1,t_2]}'')$  задаётся так же, как и в  $W_2^{2;1}(Q_{[t_1,t_2]})$ ;

$C(\mathcal{P})$ , где  $\mathcal{P}$  — компактное топологическое пространство, — пространство непрерывных на  $\mathcal{P}$  функций  $z: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ , с нормой

$$|z|_{\mathcal{P}}^{(0)} \equiv \max_{p \in \mathcal{P}} |z(p)|;$$

$C(\mathcal{P}, X)$ , где  $(\mathcal{P}, \tau)$  — компактное топологическое пространство, а  $X$  — банахово пространство с нормой  $\|\cdot\|_X$ , — пространство сильно непрерывных на  $\mathcal{P}$  функций  $\xi: \mathcal{P} \rightarrow X$ , т.е. таких, что

$$\forall p \in \mathcal{P} \forall \varepsilon > 0 \exists U = U(\varepsilon, p) \in \tau, p \in U \forall p' \in U : \|\xi(p) - \xi(p')\|_X \leq \varepsilon;$$

норма в этом пространстве задаётся равенством

$$|\xi|_{\mathcal{P}, X}^{(0)} \equiv \max_{p \in \mathcal{P}} \|\xi(p)\|_X;$$

$C^k(\mathcal{P}, X)$ , где  $X$  — банахово пространство с нормой  $\|\cdot\|_X$ , а  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$  — компакт, — пространство  $k$  раз сильно непрерывно дифференцируемых функций  $\xi: \mathcal{P} \rightarrow X$ , с нормой

$$|\xi|_{\mathcal{P}, X}^{(k)} \equiv \sum_{\substack{0 \leq i_1 + \dots + i_k \leq k \\ i_1, \dots, i_k \geq 0}} \max_{p \in \mathcal{P}} \left\| \frac{\partial^{i_1 + \dots + i_k} \xi(p)}{\partial p_1^{i_1} \dots \partial p_k^{i_k}} \right\|_X; \quad C^0(\mathcal{P}, X) \equiv C(\mathcal{P}, X);$$

$$\Gamma \equiv [0, T] \times [0, T];$$

$\mathbb{K}_m^1(\Gamma)$  — множество функций  $h(t, \tau) \in \mathbb{R}^m$ ,  $(t, \tau) \in \Gamma$ , таких, что  $h, h_\tau \in C(\Gamma, \mathbb{R}^m)$ ; норма в этом пространстве задаётся равенством

$$\|h\|_{\mathbb{K}_m^1(\Gamma)} \equiv |h|_{\Gamma, \mathbb{R}^m}^{(0)} + |h_\tau|_{\Gamma, \mathbb{R}^m}^{(0)};$$

$C_s([0, T], X)$ , где  $X$  — банахово пространство, — пространство функций  $\xi: [0, T] \rightarrow X$ , слабо непрерывных на  $[0, T]$ , т.е. таких, что

$$\forall x^* \in X^* \forall \tau \in [0, T]: \lim_{t \rightarrow \tau} \langle \xi(t), x^* \rangle = \langle \xi(\tau), x^* \rangle,$$

где  $X^*$  обозначает сопряжённое к  $X$  пространство, а  $\langle x, x^* \rangle$  — значение линейного непрерывного функционала  $x^* \in X^*$  в точке  $x \in X$  (пространство  $C_s([0, T], X)$  введено в [46]);

$C^\infty[0, T]$  — множество всех бесконечно дифференцируемых на отрезке  $[0, T]$  функций;

$\mathcal{L}(X, Y)$ , где  $X$  и  $Y$  — банаховы пространства с нормами  $\|\cdot\|_X$  и  $\|\cdot\|_Y$  соответственно, — пространство линейных ограниченных операторов, действующих из  $X$  в  $Y$ , наделённое стандартной нормой

$$\|A\|_{X \rightarrow Y} \equiv \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Ax\|_Y;$$

$\mathfrak{D}_2^1(Q_T)$  — „энергетический класс первого рода“, состоящий из измеримых по Лебегу на  $Q_T$  функций  $z$ , удовлетворяющих следующим условиям:

при всех  $t \in [0, T]$  справедливы включения  $z(\cdot, t) \in W_2^1(\Omega)$ ,  $z_t(\cdot, t) \in L_2(\Omega)$ ;

функция  $[0, T] \ni t \mapsto z(\cdot, t)$  — элемент пространства  $C_s([0, T], W_2^1(\Omega))$ ;

функция  $[0, T] \ni t \mapsto z_t(\cdot, t)$  — элемент  $L_\infty([0, T], L_2(\Omega))$ ;

норма в  $\mathfrak{D}_2^1(Q_T)$  задаётся равенством

$$\|z\|_{\mathfrak{D}_2^1(Q_T)} \equiv \sup_{t \in [0, T]} \|z(\cdot, t)\|_{2, \Omega}^{(1)} + \text{vraisup}_{t \in [0, T]} \|z_t(\cdot, t)\|_{2, \Omega};$$

$\hat{\mathfrak{D}}_2^1(Q_T) \equiv \{z \in \mathfrak{D}_2^1(Q_T) : z(x, T) = 0, x \in \Omega\}$ ;

$\mathfrak{E}_2^1(Q_T)$  — „энергетический класс второго рода“, состоящий из функций  $z \in \mathfrak{D}_2^1(Q_T)$ , у которых  $z_t \in C_s([0, T], L_2(\Omega))$ ; норма в  $\mathfrak{E}_2^1(Q_T)$  задаётся равенством

$$\|z\|_{\mathfrak{E}_2^1(Q_T)} \equiv \sup_{t \in [0, T]} \left( \int_{\Omega} [z^2(x, t) + |\nabla_x z(x, t)|^2 + z_t^2(x, t)] dx \right)^{1/2};$$

$\mathfrak{D}_2^1(Q_T)$  — „энергетический класс третьего рода“, т.е. множество всех измеримых по Лебегу функций  $z: Q_T \rightarrow \mathbb{R}$ , таких, что при всех  $t \in [0, T]$  справедливы включения  $z(\cdot, t) \in W_2^1(\Omega)$ ,  $z_t(\cdot, t) \in L_2(\Omega)$ , причём  $z(\cdot, t)$  и  $z_t(\cdot, t)$  непрерывно зависят от  $t \in [0, T]$  в норме пространств  $W_2^1(\Omega)$  и  $L_2(\Omega)$  соответственно; норма в  $\mathfrak{D}_2^1(Q_T)$  определяется равенством

$$\|z\|_{\mathfrak{D}_2^1(Q_T)} \equiv \max_{t \in [0, T]} \left( \int_{\Omega} [|z(x, t)|^2 + |\nabla_x z(x, t)|^2 + |z_t(x, t)|^2] dx \right)^{1/2};$$

$\hat{\mathfrak{D}}_{2,0}^1(Q_T) \equiv \{z \in \mathfrak{D}_2^1(Q_T) : z(\cdot, T) = 0\}$ ;

$\mathfrak{D}_{2,0}^1(Q_T)$  — „энергетический класс первого рода“, состоящий из измеримых по Лебегу на  $Q_T$  функций  $z$ , удовлетворяющих следующим условиям:

при всех  $t \in [0, T]$  справедливы включения  $z(\cdot, t) \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ ,  $z_t(\cdot, t) \in L_2(\Omega)$ ;

функция  $[0, T] \ni t \mapsto z(\cdot, t)$  — элемент пространства  $C_s([0, T], \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega))$ ;

функция  $[0, T] \ni t \mapsto z_t(\cdot, t)$  — элемент  $L_\infty([0, T], L_2(\Omega))$ ;

норма в  $\mathfrak{D}_{2,0}^1(Q_T)$  задаётся так же, как и в  $\mathfrak{D}_2^1(Q_T)$ ;

$\hat{\mathfrak{D}}_{2,0}^1(Q_T) \equiv \{z \in \mathfrak{D}_{2,0}^1(Q_T) : z(x, T) = 0, x \in \Omega\}$ ;

$\mathfrak{E}_{2,0}^1(Q_T)$  — „энергетический класс второго рода“, состоящий из функций  $z \in \mathfrak{D}_{2,0}^1(Q_T)$ , у которых  $z_t \in C_s([0, T], L_2(\Omega))$ ; норма в  $\mathfrak{E}_{2,0}^1(Q_T)$  задаётся так же, как и в  $\mathfrak{E}_2^1(Q_T)$ ;

$\mathfrak{D}_{2,0}^1(Q_T)$  — „энергетический класс третьего рода“, т.е. множество всех измеримых по Лебегу функций  $z: Q_T \rightarrow \mathbb{R}$ , таких, что при всех  $t \in [0, T]$  справедливы включения  $z(\cdot, t) \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ ,  $z_t(\cdot, t) \in L_2(\Omega)$ , причём

$z(\cdot, t)$  и  $z_t(\cdot, t)$  непрерывно зависят от  $t \in [0, T]$  в норме пространств  $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$  и  $L_2(\Omega)$  соответственно; норма в  $\mathfrak{D}_{2,0}^1(Q_T)$  определяется так же, как и в  $\mathfrak{D}_2^1(Q_T)$ ;

$$\hat{\mathfrak{D}}_{2,0}^1(Q_T) \equiv \{z \in \mathfrak{D}_{2,0}^1(Q_T) : z(\cdot, T) = 0\};$$

$\mathfrak{E}_{2,0}^1(Q_T|S_T'')$  — „энергетический класс первого рода“, состоящий из измеримых по Лебегу на  $Q_T$  функций  $z$ , таких, что выполнены следующие условия:

при всех  $t \in [0, T]$  имеют место включения  $z(\cdot, t) \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega|S'')$ ,  $z_t(\cdot, t) \in L_2(\Omega)$ ;

функция  $[0, T] \ni t \mapsto z(\cdot, t)$  — элемент пространства  $C_s([0, T], \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega|S''))$ ;

функция  $[0, T] \ni t \mapsto z_t(\cdot, t)$  — элемент  $L_\infty([0, T], L_2(\Omega))$ ;

норма в  $\mathfrak{E}_{2,0}^1(Q_T|S_T'')$  задаётся так же, как и в  $\mathfrak{D}_2^1(Q_T)$ ;

$$\hat{\mathfrak{E}}_{2,0}^1(Q_T|S_T'') \equiv \{z \in \mathfrak{E}_{2,0}^1(Q_T|S_T'') : z(x, T) = 0, \ x \in \Omega\};$$

$\mathfrak{E}_{2,0}^1(Q_T|S_T'')$  — „энергетический класс второго рода“, состоящий из функций  $z \in \mathfrak{E}_{2,0}^1(Q_T|S_T'')$ , у которых  $z_t \in C_s([0, T], L_2(\Omega))$ ; норма в  $\mathfrak{E}_{2,0}^1(Q_T|S_T'')$  задаётся так же, как и в  $\mathfrak{E}_2^1(Q_T)$ ;

$\mathfrak{E}_{2,0}^1(Q_T|S_T'')$  — „энергетический класс третьего рода“, т.е. множество всех измеримых по Лебегу функций  $z : Q_T \rightarrow \mathbb{R}$ , таких, что при всех  $t \in [0, T]$  справедливы включения  $z(\cdot, t) \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega|S'')$ ,  $z_t(\cdot, t) \in L_2(\Omega)$ , причём  $z(\cdot, t)$  и  $z_t(\cdot, t)$  непрерывно зависят от  $t \in [0, T]$  в норме пространств  $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega|S'')$  и  $L_2(\Omega)$  соответственно; норма в  $\mathfrak{E}_{2,0}^1(Q_T|S_T'')$  определяется тем же соотношением, что и в  $\mathfrak{D}_2^1(Q_T)$ ;

$$\hat{\mathfrak{E}}_{2,0}^1(Q_T|S_T'') \equiv \{z \in \mathfrak{E}_{2,0}^1(Q_T|S_T'') : z(\cdot, T) = 0\};$$

$\mathfrak{E}_2^2(Q_T)$  — „энергетический класс первого рода“, состоящий из измеримых по Лебегу на  $Q_T$  функций  $z$ , удовлетворяющих следующим условиям:

при всех  $t \in [0, T]$  справедливы включения  $z(\cdot, t) \in W_2^2(\Omega)$ ,  $z_t(\cdot, t) \in L_2(\Omega)$ ;

функция  $[0, T] \ni t \mapsto z(\cdot, t)$  — элемент пространства  $C_s([0, T], W_2^2(\Omega))$ ;

функция  $[0, T] \ni t \mapsto z_t(\cdot, t)$  — элемент  $L_\infty([0, T], L_2(\Omega))$ ;

норма в  $\mathfrak{E}_2^2(Q_T)$  задаётся равенством

$$\|z\|_{\mathfrak{E}_2^2(Q_T)} \equiv \sup_{t \in [0, T]} \|z(\cdot, t)\|_{2, \Omega}^{(2)} + \text{vraisup}_{t \in [0, T]} \|z_t(\cdot, t)\|_{2, \Omega};$$

$$\hat{\mathfrak{E}}_2^2(Q_T) \equiv \{z \in \mathfrak{E}_2^2(Q_T) : z(x, T) = 0, \ x \in \Omega\};$$

$\mathfrak{E}_2^2(Q_T)$  — „энергетический класс второго рода“, состоящий из функций  $z \in \mathfrak{E}_2^2(Q_T)$ , у которых  $z_t \in C_s([0, T], L_2(\Omega))$ ; норма в  $\mathfrak{E}_2^2(Q_T)$  задаётся равенством

$$\|z\|_{\mathfrak{E}_2^2(Q_T)} \equiv \sup_{t \in [0, T]} \left( \int_{\Omega} [z^2(x, t) + |\nabla_x z(x, t)|^2 + |\nabla_x^2 z(x, t)|^2 + z_t^2(x, t)] dx \right)^{1/2};$$

$\mathfrak{E}_2^2(Q_T)$  — „энергетический класс третьего рода“, т.е. множество всех измеримых по Лебегу функций  $z : Q_T \rightarrow \mathbb{R}$ , таких, что при всех  $t \in [0, T]$  справедливы включения  $z(\cdot, t) \in W_2^2(\Omega)$ ,  $z_t(\cdot, t) \in L_2(\Omega)$ , причём  $z(\cdot, t)$  и  $z_t(\cdot, t)$  непрерывно зависят от  $t \in [0, T]$  в норме пространств  $W_2^2(\Omega)$  и  $L_2(\Omega)$  соответственно; норма в  $\mathfrak{E}_2^2(Q_T)$  определяется равенством

$$\|z\|_{\mathfrak{E}_2^2(Q_T)} \equiv \max_{t \in [0, T]} \left( \int_{\Omega} [|z(x, t)|^2 + |\nabla_x z(x, t)|^2 + |\nabla_x^2 z(x, t)|^2 + |z_t(x, t)|^2] dx \right)^{1/2};$$

$$\hat{\mathfrak{E}}_2^2(Q_T) \equiv \{z \in \mathfrak{E}_2^2(Q_T) : z(\cdot, T) = 0\};$$

$\mathfrak{E}_{2,0}^2(Q_T)$  — „энергетический класс первого рода“, состоящий из измеримых по Лебегу на  $Q_T$  функций  $z$ , удовлетворяющих следующим условиям:

при всех  $t \in [0, T]$  справедливы включения  $z(\cdot, t) \in \overset{\circ}{W}_2^2(\Omega)$ ,  $z_t(\cdot, t) \in L_2(\Omega)$ ;

функция  $[0, T] \ni t \mapsto z(\cdot, t)$  — элемент пространства  $C_s([0, T], \overset{\circ}{W}_2^2(\Omega))$ ;

функция  $[0, T] \ni t \mapsto z_t(\cdot, t)$  — элемент  $L_\infty([0, T], L_2(\Omega))$ ;

норма в  $\mathfrak{E}_{2,0}^2(Q_T)$  определяется тем же равенством, что и в  $\mathfrak{E}_2^2(Q_T)$ ;

$$\hat{\mathfrak{E}}_{2,0}^2(Q_T) \equiv \{z \in \mathfrak{E}_{2,0}^2(Q_T) : z(x, T) = 0, \ x \in \Omega\};$$

$\mathfrak{E}_{2,0}^2(Q_T)$  — „энергетический класс второго рода“, состоящий из функций  $z \in \mathfrak{E}_{2,0}^2(Q_T)$ , у которых  $z_t \in C_s([0, T], L_2(\Omega))$ ; норма в  $\mathfrak{E}_{2,0}^2(Q_T)$  задаётся так же, как и в  $\mathfrak{E}_2^2(Q_T)$ ;

$\mathfrak{E}_{2,0}^2(Q_T)$  — „энергетический класс третьего рода“, т.е. множество всех измеримых по Лебегу функций  $z : Q_T \rightarrow \mathbb{R}$ , таких, что при всех  $t \in [0, T]$  справедливы включения  $z(\cdot, t) \in \overset{\circ}{W}_2^2(\Omega)$ ,  $z_t(\cdot, t) \in L_2(\Omega)$ , причём

$z(\cdot, t)$  и  $z_t(\cdot, t)$  непрерывно зависят от  $t \in [0, T]$  в норме пространств  $\overset{\circ}{W}_2^2(\Omega)$  и  $L_2(\Omega)$  соответственно; норма в  $\mathfrak{D}_{2,0}^2(Q_T)$  определяется так же, как и в  $\mathfrak{D}_2^2(Q_T)$ ;

$$\hat{\mathfrak{D}}_{2,0}^2(Q_T) \equiv \{z \in \mathfrak{D}_{2,0}^2(Q_T) : z(\cdot, T) = 0\};$$

$\mathfrak{D}_{2,0}^2(Q_T|S_T'')$  — „энергетический класс первого рода“, состоящий из измеримых по Лебегу на  $Q_T$  функций  $z$ , таких, что выполнены следующие условия:

при всех  $t \in [0, T]$  имеют место включения  $z(\cdot, t) \in \overset{\circ}{W}_2^2(\Omega|S'')$ ,  $z_t(\cdot, t) \in L_2(\Omega)$ ;

функция  $[0, T] \ni t \mapsto z(\cdot, t)$  — элемент пространства  $C_s([0, T], \overset{\circ}{W}_2^2(\Omega|S''))$ ;

функция  $[0, T] \ni t \mapsto z_t(\cdot, t)$  — элемент  $L_\infty([0, T], L_2(\Omega))$ ;

норма в  $\mathfrak{D}_{2,0}^2(Q_T|S_T'')$  задаётся так же, как и в  $\mathfrak{D}_2^2(Q_T)$ ;

$$\hat{\mathfrak{D}}_{2,0}^2(Q_T|S_T'') \equiv \{z \in \mathfrak{D}_{2,0}^2(Q_T|S_T'') : z(x, T) = 0, \quad x \in \Omega\};$$

$\mathfrak{E}_{2,0}^2(Q_T|S_T'')$  — „энергетический класс второго рода“, состоящий из функций  $z \in \mathfrak{D}_{2,0}^2(Q_T|S_T'')$ , у которых  $z_t \in C_s([0, T], L_2(\Omega))$ ; норма в  $\mathfrak{E}_{2,0}^2(Q_T|S_T'')$  задаётся так же, как и в  $\mathfrak{E}_2^2(Q_T)$ ;

$\mathfrak{D}_{2,0}^2(Q_T|S_T'')$  — „энергетический класс третьего рода“, т.е. множество всех измеримых по Лебегу функций  $z : Q_T \rightarrow \mathbb{R}$ , таких, что при всех  $t \in [0, T]$  справедливы включения  $z(\cdot, t) \in \overset{\circ}{W}_2^2(\Omega|S'')$ ,  $z_t(\cdot, t) \in L_2(\Omega)$ , причём  $z(\cdot, t)$  и  $z_t(\cdot, t)$  непрерывно зависят от  $t \in [0, T]$  в норме пространств  $\overset{\circ}{W}_2^2(\Omega|S'')$  и  $L_2(\Omega)$  соответственно; норма в  $\mathfrak{D}_{2,0}^2(Q_T|S_T'')$  определяется тем же равенством, что и в  $\mathfrak{D}_2^2(Q_T)$ ;

$$\hat{\mathfrak{D}}_{2,0}^2(Q_T|S_T'') \equiv \{z \in \mathfrak{D}_{2,0}^2(Q_T|S_T'') : z(\cdot, T) = 0\};$$

$\mathbf{V}_0^T[\varphi]$  — полное изменение функции  $\varphi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ , т.е. точная верхняя грань по всевозможным разбиениям  $0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_{k-1} < \tau_k = T$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , сумм вида  $\sum_{j=1}^k |\varphi(\tau_j) - \varphi(\tau_{j-1})|$ ;

$\mathbf{BV}[0, T]$  — множество всех функций  $\varphi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  ограниченной вариации, т.е. таких, что  $\mathbf{V}_0^T[\varphi] < +\infty$ ;

$\mathbf{BV}^0[0, T]$  — множество всех функций  $\varphi \in \mathbf{BV}[0, T]$ , непрерывных справа в каждой точке полуинтервала  $(0, T]$  и равных нулю в точке  $t = 0$ , наделённое нормой  $\|\varphi\|_{\mathbf{BV}^0} \equiv \mathbf{V}_0^T[\varphi]$ ,  $\mathbf{BV}^0[0, T] \equiv (C[0, T])^*$ ;

$\mathfrak{D}_1([0, T]; V, H)$ , где  $V$  и  $H$ ,  $V \subset H$ , — гильбертовы пространства, причём вложение  $V \subset H$  — компактно, — множество функций  $z \in C([0, T], V)$ , у которых  $\dot{z} \in C([0, T], H)$ ; норма в пространстве  $\mathfrak{D}_1([0, T]; V, H)$  задаётся равенством

$$\|z\|_{\mathfrak{D}_1([0, T]; V, H)} \equiv \max_{t \in [0, T]} \sqrt{\|z(t)\|_V^2 + \|\dot{z}(t)\|_H^2};$$

$\mathfrak{D}_2([0, T]; V, H)$  — множество функций  $z \in \mathfrak{D}_1([0, T]; V, H)$ , у которых  $\ddot{z} \in L_1([0, T], V^*)$ ; норма в пространстве  $\mathfrak{D}_2([0, T]; V, H)$  задаётся равенством

$$\|z\|_{\mathfrak{D}_2([0, T]; V, H)} \equiv \max_{t \in [0, T]} \sqrt{\|z(t)\|_V^2 + \|\dot{z}(t)\|_H^2 + \|\ddot{z}\|_{1, [0, T], V^*}};$$

$\text{osc}(f; E)$ , где функция  $f$  определена на некотором множестве  $E$  и принимает значения в метрическом пространстве  $X$  с метрикой  $d$  — колебание функции  $f$  на множестве  $E$ , то есть величина

$$\sup_{t', t'' \in E} d(f(t'), f(t''));$$

$\text{osc}(f; t_0)$ , где функция  $f$  определена на некотором множестве  $E \subset \mathbb{R}$  и принимает значения в метрическом пространстве  $X$  с метрикой  $d$ , а  $t_0 \in E$ , — колебание функции  $f$  в точке  $t_0$ , то есть величина

$$\inf_{r > 0} \text{osc}(f; E \cap (t_0 - r, t_0 + r));$$

через  $\chi(t, \tau)$  обозначается функция, задаваемая соотношениями

$$\chi(t, \tau) = \begin{cases} 1, & \text{при } 0 \leq t \leq \tau \leq T; \\ 0, & \text{при } 0 \leq \tau < t \leq T; \end{cases} \quad (t, \tau) \in [0, T] \times [0, T];$$

$\chi_E(t)$ ,  $t \in [0, T]$ , — характеристическая функция измеримого по Лебегу множества  $E \subseteq [0, T]$ ;

$\delta_\tau$  — мера Дирака, сосредоточенная в точке  $\tau \in \mathbb{R}$ ;

$\Omega^* \equiv \Omega \times [0, 1]$ ;

$Q_T^* \equiv Q_T \times [0, 1]$ ;

(Б)  $\int_E$  — интеграл Бохнера по множеству  $E$ , (Л)  $\int_E$  — интеграл Лебега по множеству  $E$ , (Р)  $\int_E$  — интеграл Римана по множеству  $E$ ; если не оговорено иное, то все интегралы понимаются в смысле Лебега; если  $\Omega \equiv (l_1, l_2)$ , где  $l_1, l_2$ ,  $l_1 < l_2$ , — некоторые вещественные числа, то

- 1) через  $\overset{\circ}{W}_{2[\text{л}]}^1(\Omega)$  обозначим банахово пространство, являющееся замыканием в норме пространства  $W_2^1[l_1, l_2]$  множества всех бесконечно дифференцируемых на  $[l_1, l_2]$  вещественнозначных функций, равных нулю вблизи точки  $x = l_1$ ;
- 2) через  $\overset{\circ}{W}_{2[\text{п}]}^1(\Omega)$  обозначим банахово пространство, являющееся замыканием в норме пространства  $W_2^1[l_1, l_2]$  множества всех бесконечно дифференцируемых на  $[l_1, l_2]$  вещественнозначных функций, равных нулю вблизи точки  $x = l_2$ ;
- 3) под  $\mathfrak{D}_{2,0[\text{л}]}^1(Q_T)$  будем понимать множество функций  $z : Q_T \rightarrow \mathbb{R}$ , таких, что
  - а) при всех  $t \in [0, T]$  справедливы включения  $z(\cdot, t) \in \overset{\circ}{W}_{2[\text{л}]}^1(\Omega)$ ,  $z_t(\cdot, t) \in L_2(\Omega)$ ;
  - б) функция  $[0, T] \ni t \mapsto z(\cdot, t)$  — элемент пространства  $C_s([0, T], \overset{\circ}{W}_{2[\text{л}]}^1(\Omega))$ ;
  - в) функция  $[0, T] \ni t \mapsto z_t(\cdot, t)$  — элемент  $L_\infty([0, T], L_2(\Omega))$ ;
 норма в  $\mathfrak{D}_{2,0[\text{л}]}^1(Q_T)$  задаётся как в  $\mathfrak{D}_2^1(Q_T)$ ;
- 4) под  $\mathfrak{D}_{2,0[\text{п}]}^1(Q_T)$  будем понимать множество функций  $z : Q_T \rightarrow \mathbb{R}$ , таких, что
  - а) при всех  $t \in [0, T]$  справедливы включения  $z(\cdot, t) \in \overset{\circ}{W}_{2[\text{п}]}^1(\Omega)$ ,  $z_t(\cdot, t) \in L_2(\Omega)$ ;
  - б) функция  $[0, T] \ni t \mapsto z(\cdot, t)$  — элемент пространства  $C_s([0, T], \overset{\circ}{W}_{2[\text{п}]}^1(\Omega))$ ;
  - в) функция  $[0, T] \ni t \mapsto z_t(\cdot, t)$  — элемент  $L_\infty([0, T], L_2(\Omega))$ ;
 норма в  $\mathfrak{D}_{2,0[\text{п}]}^1(Q_T)$  задаётся как в  $\mathfrak{D}_2^1(Q_T)$ ;
- 5) под  $\mathfrak{E}_{2,0[\text{л}]}^1(Q_T)$  будем понимать множество функций  $z : Q_T \rightarrow \mathbb{R}$ , таких, что
  - а) при всех  $t \in [0, T]$  справедливы включения  $z(\cdot, t) \in \overset{\circ}{W}_{2[\text{л}]}^1(\Omega)$ ,  $z_t(\cdot, t) \in L_2(\Omega)$ ;
  - б) функция  $[0, T] \ni t \mapsto z(\cdot, t)$  — элемент пространства  $C_s([0, T], \overset{\circ}{W}_{2[\text{л}]}^1(\Omega))$ ;
  - в) функция  $[0, T] \ni t \mapsto z_t(\cdot, t)$  — элемент  $C_s([0, T], L_2(\Omega))$ ;
 норма в  $\mathfrak{E}_{2,0[\text{л}]}^1(Q_T)$  задаётся как в  $\mathfrak{E}_2^1(Q_T)$ ;
- 6) под  $\mathfrak{E}_{2,0[\text{п}]}^1(Q_T)$  будем понимать множество функций  $z : Q_T \rightarrow \mathbb{R}$ , таких, что
  - а) при всех  $t \in [0, T]$  справедливы включения  $z(\cdot, t) \in \overset{\circ}{W}_{2[\text{п}]}^1(\Omega)$ ,  $z_t(\cdot, t) \in L_2(\Omega)$ ;
  - б) функция  $[0, T] \ni t \mapsto z(\cdot, t)$  — элемент пространства  $C_s([0, T], \overset{\circ}{W}_{2[\text{п}]}^1(\Omega))$ ;
  - в) функция  $[0, T] \ni t \mapsto z_t(\cdot, t)$  — элемент  $C_s([0, T], L_2(\Omega))$ ;
 норма в  $\mathfrak{E}_{2,0[\text{п}]}^1(Q_T)$  задаётся как в  $\mathfrak{E}_2^1(Q_T)$ ;
- 7) через  $C_{\text{л}}^{\infty,0}(Q_T)$  обозначается множество всех бесконечно дифференцируемых в  $Q_T$  вещественнозначных функций, равных нулю вблизи левой стороны (стороны  $x = l_1$ ) прямоугольника  $Q_T$ ;
- 8) через  $C_{\text{п}}^{\infty,0}(Q_T)$  обозначается множество всех бесконечно дифференцируемых в  $Q_T$  вещественнозначных функций, равных нулю вблизи правой стороны (стороны  $x = l_2$ ) прямоугольника  $Q_T$ ;
- 9) под  $C_{\text{л}}^{\infty,0}(Q_{[t_1, t_2]})$ , где  $t_1, t_2 \in [0, T]$ ,  $t_1 < t_2$ , понимается множество всех бесконечно дифференцируемых в  $Q_T$  функций, финитных вблизи левой стороны (стороны  $x = l_1$ ) прямоугольника  $Q_T$ ;
- 10) под  $C_{\text{п}}^{\infty,0}(Q_{[t_1, t_2]})$ , где  $t_1, t_2 \in [0, T]$ ,  $t_1 < t_2$ , понимается множество всех бесконечно дифференцируемых в  $Q_T$  функций, финитных вблизи правой стороны (стороны  $x = l_2$ ) прямоугольника  $Q_T$ ;
- 11)  $W_{2,0[\text{л}]}^1(Q_T)$  — замыкание в норме  $W_2^1(Q_T)$  множества  $C_{\text{л}}^{\infty,0}(Q_T)$ ; норма в  $W_{2,0[\text{л}]}^1(Q_T)$  задаётся так же, как и в  $W_2^1(Q_T)$ ;
- 12)  $W_{2,0[\text{п}]}^1(Q_T)$  — замыкание в норме  $W_2^1(Q_T)$  множества  $C_{\text{п}}^{\infty,0}(Q_T)$ ; норма в  $W_{2,0[\text{п}]}^1(Q_T)$  задаётся так же, как и в  $W_2^1(Q_T)$ ;

- 13) положим  $\hat{\mathfrak{A}}_{2,0[\mathfrak{n}]}^1(Q_T) \equiv \{z \in \mathfrak{A}_{2,0[\mathfrak{n}]}^1(Q_T) : z(\cdot, T) = 0\}$ ,  $\hat{\mathfrak{A}}_{2,0[\mathfrak{n}]}^1(Q_T) \equiv \{z \in \mathfrak{A}_{2,0[\mathfrak{n}]}^1(Q_T) : z(\cdot, T) = 0\}$ ,  
 $\hat{\mathfrak{E}}_{2,0[\mathfrak{n}]}^1(Q_T) \equiv \{z \in \mathfrak{E}_{2,0[\mathfrak{n}]}^1(Q_T) : z(\cdot, T) = 0\}$ ,  $\hat{\mathfrak{E}}_{2,0[\mathfrak{n}]}^1(Q_T) \equiv \{z \in \mathfrak{E}_{2,0[\mathfrak{n}]}^1(Q_T) : z(\cdot, T) = 0\}$ ;
- 14) под  $\mathfrak{A}_{2,0[\mathfrak{n}]}^1(Q_T)$  будем понимать множество функций  $z : Q_T \rightarrow \mathbb{R}$ , таких, что
- а) при всех  $t \in [0, T]$  справедливы включения  $z(\cdot, t) \in \mathring{W}_{2[\mathfrak{n}]}^1(\Omega)$ ,  $z_t(\cdot, t) \in L_2(\Omega)$ ;
  - б) функция  $[0, T] \ni t \mapsto z(\cdot, t)$  — элемент пространства  $C([0, T], \mathring{W}_{2[\mathfrak{n}]}^1(\Omega))$ ;
  - в) функция  $[0, T] \ni t \mapsto z_t(\cdot, t)$  — элемент  $C([0, T], L_2(\Omega))$ ;
- норма в  $\mathfrak{A}_{2,0[\mathfrak{n}]}^1(Q_T)$  задаётся как в  $\mathfrak{A}_2^1(Q_T)$ ;
- 15) под  $\mathfrak{A}_{2,0[\mathfrak{n}]}^1(Q_T)$  будем понимать множество функций  $z : Q_T \rightarrow \mathbb{R}$ , таких, что
- а) при всех  $t \in [0, T]$  справедливы включения  $z(\cdot, t) \in \mathring{W}_{2[\mathfrak{n}]}^1(\Omega)$ ,  $z_t(\cdot, t) \in L_2(\Omega)$ ;
  - б) функция  $[0, T] \ni t \mapsto z(\cdot, t)$  — элемент пространства  $C([0, T], \mathring{W}_{2[\mathfrak{n}]}^1(\Omega))$ ;
  - в) функция  $[0, T] \ni t \mapsto z_t(\cdot, t)$  — элемент  $C([0, T], L_2(\Omega))$ ;
- норма в  $\mathfrak{A}_{2,0[\mathfrak{n}]}^1(Q_T)$  задаётся как в  $\mathfrak{A}_2^1(Q_T)$ ;
- 16) положим  $\hat{\mathfrak{A}}_{2,0[\mathfrak{n}]}^1(Q_T) \equiv \{z \in \mathfrak{A}_{2,0[\mathfrak{n}]}^1(Q_T) : z(\cdot, T) = 0\}$ ,  $\hat{\mathfrak{A}}_{2,0[\mathfrak{n}]}^1(Q_T) \equiv \{z \in \mathfrak{A}_{2,0[\mathfrak{n}]}^1(Q_T) : z(\cdot, T) = 0\}$ ;
- 17) через  $\mathring{W}_{2[\mathfrak{n}]}^2(\Omega)$  обозначим банахово пространство, являющееся замыканием в норме пространства  $W_2^2[l_1, l_2]$  множества всех бесконечно дифференцируемых на  $[l_1, l_2]$  вещественнозначных функций, равных нулю вблизи точки  $x = l_1$ ;
- 18) через  $\mathring{W}_{2[\mathfrak{n}]}^2(\Omega)$  обозначим банахово пространство, являющееся замыканием в норме пространства  $W_2^2[l_1, l_2]$  множества всех бесконечно дифференцируемых на  $[l_1, l_2]$  вещественнозначных функций, равных нулю вблизи точки  $x = l_2$ ;
- 19) под  $\mathfrak{A}_{2,0[\mathfrak{n}]}^2(Q_T)$  будем понимать множество функций  $z : Q_T \rightarrow \mathbb{R}$ , таких, что
- а) при всех  $t \in [0, T]$  справедливы включения  $z(\cdot, t) \in \mathring{W}_{2[\mathfrak{n}]}^2(\Omega)$ ,  $z_t(\cdot, t) \in L_2(\Omega)$ ;
  - б) функция  $[0, T] \ni t \mapsto z(\cdot, t)$  — элемент пространства  $C_s([0, T], \mathring{W}_{2[\mathfrak{n}]}^2(\Omega))$ ;
  - в) функция  $[0, T] \ni t \mapsto z_t(\cdot, t)$  — элемент  $L_\infty([0, T], L_2(\Omega))$ ;
- норма в  $\mathfrak{A}_{2,0[\mathfrak{n}]}^2(Q_T)$  задаётся как в  $\mathfrak{A}_2^2(Q_T)$ ;
- 20) под  $\mathfrak{A}_{2,0[\mathfrak{n}]}^2(Q_T)$  будем понимать множество функций  $z : Q_T \rightarrow \mathbb{R}$ , таких, что
- а) при всех  $t \in [0, T]$  справедливы включения  $z(\cdot, t) \in \mathring{W}_{2[\mathfrak{n}]}^2(\Omega)$ ,  $z_t(\cdot, t) \in L_2(\Omega)$ ;
  - б) функция  $[0, T] \ni t \mapsto z(\cdot, t)$  — элемент пространства  $C_s([0, T], \mathring{W}_{2[\mathfrak{n}]}^2(\Omega))$ ;
  - в) функция  $[0, T] \ni t \mapsto z_t(\cdot, t)$  — элемент  $L_\infty([0, T], L_2(\Omega))$ ;
- норма в  $\mathfrak{A}_{2,0[\mathfrak{n}]}^2(Q_T)$  задаётся как в  $\mathfrak{A}_2^2(Q_T)$ ;
- 21) под  $\mathfrak{E}_{2,0[\mathfrak{n}]}^2(Q_T)$  будем понимать множество функций  $z : Q_T \rightarrow \mathbb{R}$ , таких, что
- а) при всех  $t \in [0, T]$  справедливы включения  $z(\cdot, t) \in \mathring{W}_{2[\mathfrak{n}]}^2(\Omega)$ ,  $z_t(\cdot, t) \in L_2(\Omega)$ ;
  - б) функция  $[0, T] \ni t \mapsto z(\cdot, t)$  — элемент пространства  $C_s([0, T], \mathring{W}_{2[\mathfrak{n}]}^2(\Omega))$ ;
  - в) функция  $[0, T] \ni t \mapsto z_t(\cdot, t)$  — элемент  $C_s([0, T], L_2(\Omega))$ ;
- норма в  $\mathfrak{E}_{2,0[\mathfrak{n}]}^2(Q_T)$  задаётся как в  $\mathfrak{E}_2^2(Q_T)$ ;
- 22) под  $\mathfrak{E}_{2,0[\mathfrak{n}]}^2(Q_T)$  будем понимать множество функций  $z : Q_T \rightarrow \mathbb{R}$ , таких, что

а) при всех  $t \in [0, T]$  справедливы включения  $z(\cdot, t) \in \overset{\circ}{W}_{2[\text{н}]}^2(\Omega)$ ,  $z_t(\cdot, t) \in L_2(\Omega)$ ;

б) функция  $[0, T] \ni t \mapsto z(\cdot, t)$  — элемент пространства  $C_s([0, T], \overset{\circ}{W}_{2[\text{н}]}^2(\Omega))$ ;

в) функция  $[0, T] \ni t \mapsto z_t(\cdot, t)$  — элемент  $C_s([0, T], L_2(\Omega))$ ;

норма в  $\mathfrak{E}_{2,0[\text{н}]}^2(Q_T)$  задаётся как в  $\mathfrak{E}_2^2(Q_T)$ ;

23)  $W_{2,0[\text{н}]}^{2;1}(Q_T)$  — замыкание в норме  $W_2^{2;1}(Q_T)$  множества  $C_{\text{л}}^{\infty,0}(Q_T)$ ; норма в  $W_{2,0[\text{н}]}^{2;1}(Q_T)$  задаётся так же, как и в  $W_2^{2;1}(Q_T)$ ;

24)  $W_{2,0[\text{н}]}^{2;1}(Q_T)$  — замыкание в норме  $W_2^{2;1}(Q_T)$  множества  $C_{\text{п}}^{\infty,0}(Q_T)$ ; норма в  $W_{2,0[\text{н}]}^{2;1}(Q_T)$  задаётся так же, как и в  $W_2^{2;1}(Q_T)$ ;

25) положим  $\hat{\mathfrak{Z}}_{2,0[\text{н}]}^2(Q_T) \equiv \{z \in \mathfrak{Z}_{2,0[\text{н}]}^2(Q_T) : z(\cdot, T) = 0\}$ ,  $\hat{\mathfrak{Z}}_{2,0[\text{н}]}^2(Q_T) \equiv \{z \in \mathfrak{Z}_{2,0[\text{н}]}^2(Q_T) : z(\cdot, T) = 0\}$ ,  $\hat{\mathfrak{E}}_{2,0[\text{н}]}^2(Q_T) \equiv \{z \in \mathfrak{E}_{2,0[\text{н}]}^2(Q_T) : z(\cdot, T) = 0\}$ ,  $\hat{\mathfrak{E}}_{2,0[\text{н}]}^2(Q_T) \equiv \{z \in \mathfrak{E}_{2,0[\text{н}]}^2(Q_T) : z(\cdot, T) = 0\}$ ;

26) под  $\mathfrak{Z}_{2,0[\text{н}]}^2(Q_T)$  будем понимать множество функций  $z : Q_T \rightarrow \mathbb{R}$ , таких, что

а) при всех  $t \in [0, T]$  справедливы включения  $z(\cdot, t) \in \overset{\circ}{W}_{2[\text{н}]}^2(\Omega)$ ,  $z_t(\cdot, t) \in L_2(\Omega)$ ;

б) функция  $[0, T] \ni t \mapsto z(\cdot, t)$  — элемент пространства  $C([0, T], \overset{\circ}{W}_{2[\text{н}]}^2(\Omega))$ ;

в) функция  $[0, T] \ni t \mapsto z_t(\cdot, t)$  — элемент  $C([0, T], L_2(\Omega))$ ;

норма в  $\mathfrak{Z}_{2,0[\text{н}]}^2(Q_T)$  задаётся как в  $\mathfrak{Z}_2^2(Q_T)$ ;

27) под  $\mathfrak{Z}_{2,0[\text{н}]}^2(Q_T)$  будем понимать множество функций  $z : Q_T \rightarrow \mathbb{R}$ , таких, что

а) при всех  $t \in [0, T]$  справедливы включения  $z(\cdot, t) \in \overset{\circ}{W}_{2[\text{н}]}^2(\Omega)$ ,  $z_t(\cdot, t) \in L_2(\Omega)$ ;

б) функция  $[0, T] \ni t \mapsto z(\cdot, t)$  — элемент пространства  $C([0, T], \overset{\circ}{W}_{2[\text{н}]}^2(\Omega))$ ;

в) функция  $[0, T] \ni t \mapsto z_t(\cdot, t)$  — элемент  $C([0, T], L_2(\Omega))$ ;

норма в  $\mathfrak{Z}_{2,0[\text{н}]}^2(Q_T)$  задаётся как в  $\mathfrak{Z}_2^2(Q_T)$ ;

28) положим  $\hat{\mathfrak{Z}}_{2,0[\text{н}]}^2(Q_T) \equiv \{z \in \mathfrak{Z}_{2,0[\text{н}]}^2(Q_T) : z(\cdot, T) = 0\}$ ,  $\hat{\mathfrak{Z}}_{2,0[\text{н}]}^2(Q_T) \equiv \{z \in \mathfrak{Z}_{2,0[\text{н}]}^2(Q_T) : z(\cdot, T) = 0\}$ ;

■ — знак окончания доказательства.



## Часть I

# Сведения из теории функций и функционального анализа

# Глава 1. Функции со значениями в банаховых пространствах

## 1.1. Предел, непрерывность и дифференцируемость

Изложение материала настоящего раздела следует [28, 63].

### 1.1.1. Функции одного вещественного переменного

Пусть  $X$  — банахово пространство с нормой  $\|\cdot\|_X$ , и пусть  $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}$  — некоторое множество, а  $t_0 \in \mathbb{R}$  — его предельная точка.

Пусть  $f: \mathcal{T} \rightarrow X$  — некоторая функция.

**Определение 1.1.1.** (Определение предела по Коши) Говорят, что  $a \in X$  — предел функции  $f$  в норме пространства  $X$  при  $t$ , стремящемся к  $t_0$ , и пишут  $\lim_{t \rightarrow t_0}^X f(t) = a$ , если

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \|f(t) - a\|_X = 0,$$

или, что то же самое,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \forall t \in \mathcal{T}, 0 < |t - t_0| < \delta : \|f(t) - a\|_X < \varepsilon.$$

Если не возникает недоразумений, то вместо  $\lim_{t \rightarrow t_0}^X f(t) = a$  пишем  $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = a$ .

**Определение 1.1.2.** (Определение предела по Гейне) Говорят, что  $a \in X$  — предел функции  $f$  в норме пространства  $X$  при  $t$ , стремящемся к  $t_0$ , и пишут  $\lim_{t \rightarrow t_0}^X f(t) = a$ , если для любой последовательности точек  $t_i \in \mathcal{T}$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , сходящейся к точке  $t_0$ , последовательность  $f(t_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , сходится в  $X$  к точке  $a$ .

Из определения предела вещественной функции одного вещественного переменного вытекает

**Теорема 1.1.1.** Определения 1.1.1 и 1.1.2 эквивалентны.

**Определение 1.1.3.** Пусть  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  — банаховы пространства с нормами  $\|\cdot\|_X$ ,  $\|\cdot\|_Y$  и  $\|\cdot\|_Z$  соответственно. Отображение  $\Phi: X \times Y \rightarrow Z$  называется **умножением** элементов пространств  $X$  и  $Y$ , принимающим значения в пространстве  $Z$ , если

- 1)  $\Phi(x_1 + x_2, y) = \Phi(x_1, y) + \Phi(x_2, y)$  для всех  $x_1, x_2 \in X$ ,  $y \in Y$ ;
- 2)  $\Phi(\alpha x, y) = \alpha \Phi(x, y)$  для всех  $x \in X$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $y \in Y$ ;
- 3)  $\Phi(x, y_1 + y_2) = \Phi(x, y_1) + \Phi(x, y_2)$  для всех  $y_1, y_2 \in Y$ ,  $x \in X$ ;
- 4)  $\Phi(x, \alpha y) = \alpha \Phi(x, y)$  для всех  $x \in X$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $y \in Y$ ;
- 5) найдётся постоянная  $K > 0$ , такая, что для всех  $x \in X$ ,  $y \in Y$  выполнено неравенство  $\|\Phi(x, y)\|_Z \leq K \|x\|_X \|y\|_Y$ .

Далее положим  $x \bullet y \equiv \Phi(x, y)$ .

Приведём примеры отображений, удовлетворяющих данному определению.

**Пример 1.1.1.** Пусть  $X = Y = H$  — гильбертово пространство со скалярным произведением  $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ ,  $Z = \mathbb{R}$ , и пусть для всех  $x \in X$ ,  $y \in Y$

$$\Phi(x, y) \equiv \langle x, y \rangle_H.$$

Тогда  $\Phi$  — умножение элементов  $X$  и  $Y$ , принимающее значения в пространстве  $Z$ .

**Пример 1.1.2.** Пусть  $X$  — банахово пространство,  $Y = X^*$ ,  $Z = \mathbb{R}$ , и пусть для всех  $x \in X$ ,  $y \in Y$

$$\Phi(x, y) \equiv \langle x, y \rangle.$$

Тогда  $\Phi$  — умножение элементов  $X$  и  $Y$ , принимающее значения в пространстве  $Z$ .

**Пример 1.1.3.** Пусть  $X, Z$  — банаховы пространство,  $Y = \mathcal{L}(X, Z)$ , и пусть для всех  $x \in X, A \in Y$

$$\Phi(x, A) \equiv Ax.$$

Тогда  $\Phi$  — умножение элементов  $X$  и  $Y$ , принимающее значения в пространстве  $Z$ .

**Пример 1.1.4.** Пусть  $X = \mathcal{L}(V_1, V_2), Y = \mathcal{L}(V_0, V_1), Z = \mathcal{L}(V_0, V_2)$ , где  $V_0, V_1$  и  $V_2$  — банаховы пространства, и пусть для всех  $A \in X, B \in Y$

$$\Phi(A, B) \equiv AB,$$

где  $(AB)(v) \equiv A(B(v))$  для всех  $v \in V_0$ . Тогда  $\Phi$  — умножение элементов  $X$  и  $Y$ , принимающее значения в пространстве  $Z$ .

Перейдём к свойствам предела функции.

**Теорема 1.1.2.** Если  $\lim_{t \rightarrow t_0}^X f(t) = a$ , то найдётся функция  $\alpha: \mathcal{T} \rightarrow X$ , такая, что  $\lim_{t \rightarrow t_0}^X \alpha(t) = 0_X$  и

$$f(t) = a + \alpha(t) \quad \forall t \in \mathcal{T}.$$

**Доказательство.** Достаточно взять  $\alpha(t) \equiv f(t) - a$ . ■

**Теорема 1.1.3.** Если  $a \in X$ , то  $\lim_{t \rightarrow t_0}^X a = a$ .

**Теорема 1.1.4.** Пусть существует предел  $\lim_{t \rightarrow t_0}^X f(t)$ , равный  $a$ . Тогда  $\lim_{t \rightarrow t_0} \|f(t)\|_X = \|a\|_X$ .

**Доказательство.** В самом деле,

$$|\|f(t)\|_X - \|a\|_X| \leq \|f(t) - a\|_X \rightarrow 0, \quad t \rightarrow t_0,$$

что и даёт утверждение теоремы. ■

Из данной теоремы и теории пределов вещественных функций одного вещественного переменного вытекает

**Теорема 1.1.5.** Если функция  $f: \mathcal{T} \rightarrow X$  имеет предел в точке  $t_0$ , то она ограничена в некоторой окрестности этой точки, то есть найдутся  $\delta > 0$  и  $L > 0$ , такие, что

$$\|f(t)\|_X \leq L \quad \forall t \in \mathcal{T} \cap (t_0 - \delta, t_0 + \delta).$$

**Теорема 1.1.6.** Пусть функции  $f: \mathcal{T} \rightarrow X, g: \mathcal{T} \rightarrow X$ , таковы, что существуют пределы  $\lim_{t \rightarrow t_0}^X f(t)$  и  $\lim_{t \rightarrow t_0}^X g(t)$ . Тогда для любых вещественных чисел  $\alpha, \beta$  существует предел функции  $\alpha f(t) + \beta g(t), t \in \mathcal{T}$ , при  $t \rightarrow t_0$ , причём

$$\lim_{t \rightarrow t_0}^X [\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha \lim_{t \rightarrow t_0}^X f(t) + \beta \lim_{t \rightarrow t_0}^X g(t).$$

**Доказательство.** Обозначим предел  $\lim_{t \rightarrow t_0}^X f(t)$  через  $a$ , а предел  $\lim_{t \rightarrow t_0}^X g(t)$  через  $b$ . Тогда

$$\begin{aligned} \|[\alpha f(t) + \beta g(t)] - [\alpha a + \beta b]\|_X &= \|\alpha[f(t) - a] + \beta[g(t) - b]\|_X \leq \\ &\leq |\alpha| \|f(t) - a\|_X + |\beta| \|g(t) - b\|_X \rightarrow 0, \quad t \rightarrow t_0. \end{aligned}$$

Это и означает, что

$$\lim_{t \rightarrow t_0}^X [\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha \lim_{t \rightarrow t_0}^X f(t) + \beta \lim_{t \rightarrow t_0}^X g(t).$$

Теорема доказана. ■

**Теорема 1.1.7.** Пусть функции  $f: \mathcal{T} \rightarrow X, g: \mathcal{T} \rightarrow Y$ , таковы, что существуют пределы  $\lim_{t \rightarrow t_0}^X f(t)$  и  $\lim_{t \rightarrow t_0}^Y g(t)$ . Тогда существует предел функции  $f(t) \bullet g(t), t \in \mathcal{T}$ , при  $t \rightarrow t_0$ , причём

$$\lim_{t \rightarrow t_0}^Z [f(t) \bullet g(t)] = \left[ \lim_{t \rightarrow t_0}^X f(t) \right] \bullet \left[ \lim_{t \rightarrow t_0}^Y g(t) \right].$$

**Доказательство.** Обозначим предел  $\lim_{t \rightarrow t_0}^X f(t)$  через  $a$ , а предел  $\lim_{t \rightarrow t_0}^Y g(t)$  через  $b$ . Тогда

$$\begin{aligned} f(t) \bullet g(t) - a \bullet b &= [(f(t) - a) + a] \bullet g(t) - a \bullet b = [f(t) - a] \bullet g(t) + a \bullet g(t) - a \bullet b = [f(t) - a] \bullet g(t) + \\ &+ a \bullet [g(t) - b] = [f(t) - a] \bullet [(g(t) - b) + b] + a \bullet [g(t) - b] = [f(t) - a] \bullet [g(t) - b] + \\ &+ [f(t) - a] \bullet b + a \bullet [g(t) - b]. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \|f(t) \bullet g(t) - a \bullet b\|_Z &= \|[f(t) - a] \bullet [g(t) - b] + [f(t) - a] \bullet b + a \bullet [g(t) - b]\|_Z \leq \\ &\leq \|[f(t) - a] \bullet [g(t) - b]\|_Z + \|[f(t) - a] \bullet b\|_Z + \|a \bullet [g(t) - b]\|_Z \leq K\|f(t) - a\|_X \|g(t) - b\|_Y + \\ &+ K\|f(t) - a\|_X \|b\|_Y + K\|a\|_X \|g(t) - b\|_Y \rightarrow 0, \quad t \rightarrow t_0. \end{aligned}$$

Последнее означает, что

$$\lim_{t \rightarrow t_0}^Z [f(t) \bullet g(t)] = \left[ \lim_{t \rightarrow t_0}^X f(t) \right] \bullet \left[ \lim_{t \rightarrow t_0}^Y g(t) \right].$$

Теорема доказана. ■

**Теорема 1.1.8.** Если функция  $f: \mathcal{T} \rightarrow X$  имеет равный нулю предел при  $t \rightarrow t_0$ , а функция  $g: \mathcal{T} \rightarrow Y$  ограничена в некоторой окрестности этой точки, то предел функции  $f(t) \bullet g(t)$ ,  $t \in \mathcal{T}$ , при  $t \rightarrow t_0$  равен нулю.

Из определения 1.1.1 и определения непрерывности функции, определённой на метрическом пространстве и принимающей значения в другом метрическом пространстве, следует

**Теорема 1.1.9.** Функция  $f: \mathcal{T} \rightarrow X$  непрерывна в точке  $t_0 \in \mathcal{T}$  тогда и только тогда, когда

$$\lim_{t \rightarrow t_0}^X f(t) = f(t_0).$$

Из данной теоремы и приведённых выше свойств предела вытекают следующие свойства непрерывных функций.

**Теорема 1.1.10.** 1) Пусть функции  $f: \mathcal{T} \rightarrow X$ ,  $g: \mathcal{T} \rightarrow X$ , непрерывны в точке  $t_0 \in \mathcal{T}$ . Тогда для любых вещественных чисел  $\alpha, \beta$  функция  $\alpha f(t) + \beta g(t)$ ,  $t \in \mathcal{T}$ , непрерывна в точке  $t_0$ .

2) Если функция  $f: \mathcal{T} \rightarrow X$  непрерывна в точке  $t_0 \in \mathcal{T}$ , то функция  $[0, T] \ni t \mapsto \|f(t)\|_X$  также непрерывна в этой точке.

3) Пусть функции  $f: \mathcal{T} \rightarrow X$ ,  $g: \mathcal{T} \rightarrow Y$ , непрерывны в точке  $t_0 \in \mathcal{T}$ . Тогда функция  $f(t) \bullet g(t)$ ,  $t \in \mathcal{T}$ , тоже непрерывна в этой точке.

Пусть  $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}$  — некоторый промежуток, и задана функция  $f: \mathcal{T} \rightarrow X$ .

**Определение 1.1.4.** Элемент  $A \in X$  называется **сильной производной** функции  $f$  в точке  $t_0 \in \mathcal{T}$  в норме пространства  $X$ , если

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0}^X \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} = A.$$

Этот элемент  $A$  называется **сильной производной** функции  $f$  в точке  $t_0$ , и обозначается  $f'(t_0)$ , или  $\dot{f}(t_0)$ , или  $\frac{df(t_0)}{dt}$ .

Приведём теперь некоторые свойства производных.

**Теорема 1.1.11.** Если  $A \in X$  — константа, то  $(A)' = 0_X$ .

**Теорема 1.1.12.** Если функции  $f: \mathcal{T} \rightarrow X$  и  $g: \mathcal{T} \rightarrow X$  имеют сильные производные в точке  $t_0 \in \mathcal{T}$ , то для всех вещественных чисел  $\alpha, \beta$  функция  $\alpha f(t) + \beta g(t)$ ,  $t \in \mathcal{T}$ , имеет сильную производную в точке  $t_0$ , причём

$$(\alpha f + \beta g)'(t_0) = \alpha f'(t_0) + \beta g'(t_0).$$

**Доказательство.** В самом деле, пусть  $h(t) \equiv \alpha f(t) + \beta g(t)$ ,  $\Delta h \equiv h(t_0 + \Delta t) - h(t_0)$ . Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\Delta h}{\Delta t} &= \frac{h(t_0 + \Delta t) - h(t_0)}{\Delta t} = \frac{[\alpha f(t_0 + \Delta t) + \beta g(t_0 + \Delta t)] - [\alpha f(t_0) + \beta g(t_0)]}{\Delta t} = \\ &= \frac{\alpha[f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)] + \beta[g(t_0 + \Delta t) - g(t_0)]}{\Delta t} = \alpha \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} + \beta \frac{g(t_0 + \Delta t) - g(t_0)}{\Delta t}. \end{aligned}$$

Пользуясь затем свойствами предела, получаем утверждение теоремы. ■

**Определение 1.1.5.** Функция  $f$  называется **сильно дифференцируемой в точке**  $t_0 \in \mathcal{T}$ , если для приращения функции  $f$  в точке  $t_0$  справедливо представление

$$\Delta f \equiv f(t_0 + \Delta t) - f(t_0) = A\Delta t + \alpha(\Delta t)\Delta t, \quad (1.1.1)$$

где  $A \in X$  — некоторая константа, а принимающая значения в пространстве  $X$  функция  $\alpha$  такова, что  $\|\alpha(\Delta t)\|_X \rightarrow 0$  при  $\Delta t \rightarrow 0$ .

**Теорема 1.1.13.** Представление вида (1.1.1) определяется однозначно.

**Доказательство.** В самом деле, пусть для приращения  $\Delta f$  функции  $f$  в точке  $t_0 \in \mathcal{T}$  справедливы два представления вида (1.1.1), т.е. найдутся  $A_1, A_2 \in X$ , и функции  $\alpha_1(\Delta t), \alpha_2(\Delta t), \|\alpha_1(\Delta t)\|_X \rightarrow 0, \|\alpha_2(\Delta t)\|_X \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0$ , такие, что

$$\Delta f \equiv f(t_0 + \Delta t) - f(t_0) = A_1\Delta t + \alpha_1(\Delta t)\Delta t, \quad \Delta f \equiv f(t_0 + \Delta t) - f(t_0) = A_2\Delta t + \alpha_2(\Delta t)\Delta t.$$

Вычитая из первого равенства второе, будем иметь

$$0_X = [A_1 - A_2]\Delta t + [\alpha_1(\Delta t) - \alpha_2(\Delta t)]\Delta t.$$

Поделив на  $\Delta t$ , получим, что

$$0_X = [A_1 - A_2] + [\alpha_1(\Delta t) - \alpha_2(\Delta t)].$$

Переходя затем к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$ , заключаем, что  $A_1 = A_2$ . Поэтому и  $\alpha_1(\Delta t) \equiv \alpha_2(\Delta t)$ . Теорема доказана. ■

**Теорема 1.1.14.** Функция  $f: \mathcal{T} \rightarrow X$  сильно дифференцируема в точке  $t_0 \in \mathcal{T}$  в том и только том случае, если она имеет в этой точке сильную производную. При этом  $A = f'(t_0)$ .

**Доказательство.** 1) Пусть  $f$  сильно дифференцируема в точке  $t_0$ . Тогда для  $\Delta f \equiv f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$  справедливо представление (1.1.1). Поделив на  $\Delta t$ , выводим, что

$$\frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} = A + \alpha(\Delta t).$$

Поскольку же  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0}^X \alpha(\Delta t) = 0_X$ , то существует предел  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0}^X \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$  и равен  $A$ . Это и означает, что  $f$  имеет в точке  $t_0$  сильную производную  $f'(t_0)$ , причём  $A = f'(t_0)$ .

2) Пусть функция  $f$  имеет в точке  $t_0$  сильную производную  $f'(t_0)$ . Тогда найдётся принимающая значения в  $X$  функция  $\alpha(\Delta t)$ , такая, что  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0}^X \alpha(\Delta t) = 0_X$  и

$$\frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} = f'(t_0) + \alpha(\Delta t).$$

Отсюда следует, что

$$\Delta f \equiv f(t_0 + \Delta t) - f(t_0) = f'(t_0)\Delta t + \alpha(\Delta t)\Delta t.$$

Таким образом, функция  $f$  сильно дифференцируема в точке  $t_0$  и справедливо равенство  $A = f'(t_0)$ . Теорема полностью доказана. ■

**Теорема 1.1.15.** Если функция  $f: \mathcal{T} \rightarrow X$  сильно дифференцируема в точке  $t_0 \in \mathcal{T}$ , то она непрерывна в этой точке в норме пространства  $X$ .

**Доказательство.** В самом деле, поскольку функция  $f$  сильно дифференцируема в точке  $t_0$ , то

$$\Delta f \equiv f(t_0 + \Delta t) - f(t_0) = f'(t_0)\Delta t + \alpha(\Delta t)\Delta t.$$

Поэтому

$$\|\Delta f\|_X \equiv \|f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)\|_X = \|f'(t_0)\Delta t + \alpha(\Delta t)\Delta t\|_X \leq |\Delta t|[\|f'(t_0)\|_X + \|\alpha(\Delta t)\|_X] \rightarrow 0, \quad \Delta t \rightarrow 0,$$

что и доказывает непрерывность  $f$  в точке  $t_0$ . ■

**Теорема 1.1.16.** Пусть функции  $f: \mathcal{T} \rightarrow X$  и  $g: \mathcal{T} \rightarrow Y$  сильно дифференцируемы в точке  $t_0 \in \mathcal{T}$ . Тогда функция  $f(t) \bullet g(t)$ ,  $t \in \mathcal{T}$ , также сильно дифференцируема в этой точке, причём

$$(f \bullet g)'(t_0) = f'(t_0) \bullet g(t_0) + f(t_0) \bullet g'(t_0).$$

**Доказательство.** Действительно, пусть  $h(t) \equiv f(t) \bullet g(t)$ ,  $\Delta f \equiv f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$ ,  $\Delta g \equiv g(t_0 + \Delta t) - g(t_0)$ ,  $\Delta h \equiv h(t_0 + \Delta t) - h(t_0)$ . Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\Delta h}{\Delta t} &= \frac{h(t_0 + \Delta t) - h(t_0)}{\Delta t} = \frac{f(t_0 + \Delta t) \bullet g(t_0 + \Delta t) - f(t_0) \bullet g(t_0)}{\Delta t} = \\ &= \frac{[f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)] \bullet g(t_0 + \Delta t) + f(t_0) \bullet [g(t_0 + \Delta t) - g(t_0)]}{\Delta t} = \frac{\Delta f}{\Delta t} \bullet g(t_0 + \Delta t) + f(t_0) \bullet \frac{\Delta g}{\Delta t}. \end{aligned}$$

Поскольку  $f$  сильно дифференцируема в точке  $t_0$ , то

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0}^X \frac{\Delta f}{\Delta t} = f'(t_0).$$

Так как  $g$  сильно дифференцируема в точке  $t_0$ , то она непрерывна в этой точке, и, кроме того,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0}^X \frac{\Delta g}{\Delta t} = g'(t_0).$$

Поэтому существует предел  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0}^X \frac{\Delta h}{\Delta t}$ , который равен  $f'(t_0) \bullet g(t_0) + f(t_0) \bullet g'(t_0)$ . Теорема доказана. ■

**Определение 1.1.6.** *Определённую на промежутке  $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}$  функцию  $f: \mathcal{T} \rightarrow X$  назовём **сильно непрерывно дифференцируемой в точке**  $t_0 \in \mathcal{T}$ , если она сильно дифференцируема в каждой точке некоторой окрестности точки  $t_0$ , и сильная производная  $f'(t)$  сильно непрерывна в этой точке в норме пространства  $X$ . Функция  $f$  называется **сильно непрерывно дифференцируемой на промежутке**  $\mathcal{T}$ , если она сильно дифференцируема в каждой точке этого промежутка и производная  $f'(t)$ ,  $t \in \mathcal{T}$ , сильно непрерывна на  $\mathcal{T}$  в норме пространства  $X$ . Множество всех сильно непрерывно дифференцируемых на промежутке  $\mathcal{T}$  функций обозначается  $C^1(\mathcal{T}, X)$ .*

**Определение 1.1.7.** *Пусть функция  $f: \mathcal{T} \rightarrow X$  определена и сильно дифференцируема на промежутке  $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}$ . Тогда функция  $f'(t)$ ,  $t \in \mathcal{T}$ , также определена на этом промежутке. Если функция  $f'(t)$ ,  $t \in \mathcal{T}$ , имеет сильную производную в точке  $t_0 \in \mathcal{T}$ , то эту производную называют **сильной второй производной функции  $f$  в точке  $t_0$**  и обозначают  $f''(t_0)$ ,  $\ddot{f}(t_0)$ ,  $f^{(2)}(t_0)$  или  $\frac{d^2 f(t_0)}{dt^2}$ . При этом говорят, что функция  $f$  **дважды сильно дифференцируема в точке  $t_0$** .*

*Если функция  $f$  дважды сильно дифференцируема в каждой точке промежутка  $\mathcal{T}$ , а функция  $f''(t)$ ,  $t \in \mathcal{T}$ , сильно непрерывна на  $\mathcal{T}$  в норме пространства  $X$ , то говорят, что функция  $f$  **дважды сильно непрерывно дифференцируема на промежутке  $\mathcal{T}$** . Множество всех дважды сильно непрерывно дифференцируемых на промежутке  $\mathcal{T}$  функций обозначается  $C^2(\mathcal{T}, X)$ .*

Аналогично определяются производные более высоких порядков и множества  $C^m(\mathcal{T}, X)$  при  $m \geq 2$ .

**Лемма 1.1.1.** *Если  $f \in C_s([0, T], X)$ , то  $\sup_{t \in [0, T]} \|f(t)\|_X < +\infty$ .*

**Доказательство.** Поскольку  $f \in C_s([0, T], X)$ , то при всех  $x^* \in X^*$  функция

$$[0, T] \ni t \mapsto \langle f(t), x^* \rangle$$

непрерывна на  $[0, T]$ . Поэтому найдётся зависящая от  $x^* \in X^*$  постоянная  $C = C(x^*) > 0$ , такая, что

$$|\langle f(t), x^* \rangle| \leq C(x^*) \quad \forall t \in [0, T].$$

Следовательно, в силу вложения  $X \subset X^{**}$  и теоремы о резонансе [33, следствие 1 на стр.104], найдётся постоянная  $C_1 > 0$ , такая, что

$$\|f(t)\|_{X^{**}} \leq C_1 \quad \forall t \in [0, T],$$

откуда, в силу изометричности вложения  $X \subset X^{**}$ , следует, что

$$\sup_{t \in [0, T]} \|f(t)\|_X \leq C_1.$$

Лемма доказана. ■

Предположим теперь, что пространство  $X$  рефлексивно и наделим пространство  $C_s([0, T], X)$  нормой

$$\|f\|_{C_s([0, T], X)} \equiv \sup_{t \in [0, T]} \|f(t)\|_X \quad \forall f \in C_s([0, T], X).$$

которую в дальнейшем будем называть **сильной нормой** пространства  $C_s([0, T], X)$ , соответствующую топологию будем называть  $X$ -топологией пространства  $C_s([0, T], X)$ , а сходящиеся в этой норме последовательности —  $X$ -сходящимися.

**Лемма 1.1.2.** *Пространство  $C_s([0, T], X)$ , наделённое нормой  $\|\cdot\|_{C_s([0, T], X)}$ , является банаховым пространством.*

**Доказательство.** Пусть последовательность  $f_i \in C_s([0, T], X)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , фундаментальна в норме  $\|\cdot\|_{C_s([0, T], X)}$ , то есть

$$\forall \varepsilon > 0 \exists i_0 = i_0(\varepsilon) \geq 1 \forall i, j \geq i_0(\varepsilon) : \|f_i - f_j\|_{C_s([0, T], X)} \leq \varepsilon.$$

С другой стороны, для всех  $i, j = 1, 2, \dots$ ,  $x^* \in X^*$  и всех  $t \in [0, T]$

$$|\langle f_i(t) - f_j(t), x^* \rangle| \leq \|f_i(t) - f_j(t)\|_X \|x^*\|_{X^*}.$$

Поэтому

$$\forall \varepsilon > 0 \exists i_0 = i_0(\varepsilon) \geq 1 \forall i, j \geq i_0(\varepsilon) \forall x^* \in X^* \forall t \in [0, T] : |\langle f_i(t) - f_j(t), x^* \rangle| \leq \varepsilon \|x^*\|_{X^*}. \quad (1.1.2)$$

Это означает, что при каждом  $x^* \in X^*$  последовательность функций

$$[0, T] \ni t \mapsto \langle f_i(t), x^* \rangle, \quad i = 1, 2, \dots,$$

фундаментальна в норме банахова пространства  $C[0, T]$ , а, значит, равномерно сходится к некоторой непрерывной на  $[0, T]$  при каждом фиксированном  $x^* \in X^*$  функции  $F(t, x^*) \in \mathbb{R}$ ,  $t \in [0, T]$ . В частности,

$$\langle f_i(t), x^* \rangle \rightarrow F(t, x^*), \quad i \rightarrow \infty, \quad \forall t \in [0, T].$$

Выберем теперь  $t \in [0, T]$  и зафиксируем. Поскольку элемент  $f_i(t) \in X$  можно рассматривать как элемент пространства  $X^{**}$ , при всех  $i = 1, 2, \dots$ , то мы имеем поточечную сходимость линейных непрерывных функционалов  $f_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots$  над пространством  $X^*$ . Как известно, это означает, что  $F(t, \cdot)$  также является линейным непрерывным функционалом над пространством  $X^*$ , т.е. найдётся функция  $f : [0, T] \rightarrow X^{**}$ , такая, что  $F(t, x^*) \equiv \langle f(t), x^* \rangle$ . Поскольку пространство  $X$  рефлексивно, то  $X^{**}$  можно отождествить с  $X$ , и, как следствие, рассматривать функцию  $f$  как функцию со значениями в  $X$ .

Таким образом, мы доказали, что найдётся функция  $f \in C_s([0, T], X)$ , такая, что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \max_{t \in [0, T]} |\langle f_j(t) - f(t), x^* \rangle| = 0 \quad \forall x^* \in X^*.$$

Устремляя затем в (1.1.2)  $j$  к бесконечности, получим, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists i_0 = i_0(\varepsilon) \geq 1 \forall i \geq i_0(\varepsilon) \forall x^* \in X^* \forall t \in [0, T] : |\langle f_i(t) - f(t), x^* \rangle| \leq \varepsilon \|x^*\|_{X^*}.$$

Переходя здесь к точной верхней грани по  $x^* \in X^*$ , у которых  $\|x^*\|_{X^*} \leq 1$ , в силу изометричного вложения  $X \subset X^{**}$  будем иметь

$$\forall \varepsilon > 0 \exists i_0 = i_0(\varepsilon) \geq 1 \forall i \geq i_0(\varepsilon) \forall t \in [0, T] : \|f_i(t) - f(t)\|_X \leq \varepsilon,$$

откуда следует, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists i_0 = i_0(\varepsilon) \geq 1 \forall i \geq i_0(\varepsilon) : \|f_i - f\|_{C_s([0, T], X)} \leq \varepsilon,$$

что и означает сходимость последовательности  $f_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , к  $f$  в норме  $\|\cdot\|_{C_s([0, T], X)}$ . Лемма полностью доказана. ■

Пусть  $Y$  — банахово пространство с нормой  $\|\cdot\|_Y$ ,  $X \subset Y$ . Пусть вложение  $X \subset Y$  непрерывно и компактно. Иными словами, найдётся постоянная  $\nu > 0$ , такая, что

$$\|x\|_Y \leq \nu \|x\|_X \quad \forall x \in X,$$

и любое ограниченное в норме пространства  $X$  множество предкомпактно в пространстве  $Y$ .

**Лемма 1.1.3.** *Справедливо вложение  $C_s([0, T], X) \subset C([0, T], Y)$ , причём*

$$\max_{t \in [0, T]} \|f(t)\|_Y \leq \nu \sup_{t \in [0, T]} \|f(t)\|_X \quad \forall f \in C_s([0, T], X).$$

**Доказательство.** В самом деле, пусть  $f \in C_s([0, T], X)$  — произвольна. Тогда для любого  $t \in [0, T]$  и любой последовательности  $t_i \in [0, T]$ ,  $i = 1, 2, \dots$ ,  $t_i \rightarrow t$ ,  $i \rightarrow \infty$ , справедливо предельное соотношение  $f(t_i) \rightarrow f(t)$ ,  $i \rightarrow \infty$ , слабо в  $X$ . Поскольку же вложение  $X \subset Y$  компактно, то  $f(t_i) \rightarrow f(t)$ ,  $i \rightarrow \infty$ , сильно в  $Y$ . Таким образом,  $f \in C([0, T], Y)$ . Далее,

$$\|f(t)\|_Y \leq \nu \|f(t)\|_X \leq \nu \sup_{\xi \in [0, T]} \|f(\xi)\|_X \quad \forall t \in [0, T],$$

откуда и следует требуемая оценка. Лемма полностью доказана. ■

Далее нам потребуется ещё одна топология в  $C_s([0, T], X)$ . Введём эту топологию. А именно, следуя [18, теорема 1.2 на стр.149], введём на  $C_s([0, T], X)$  полунормы

$$\mathbf{p}_{x^*}(f) \equiv \max_{t \in [0, T]} |\langle x^*, f(t) \rangle|, \quad x^* \in X^*,$$

задав затем в качестве системы окрестностей нуля семейство множеств

$$\{f \in C_s([0, T], X) : \mathbf{p}_{x_j^*}(f) < \varepsilon_j, \quad j = \overline{1, m}\}, \quad x_j^* \in X^*, \quad \varepsilon_j > 0, \quad j = \overline{1, m}, \quad m \geq 1.$$

Эту топологию в дальнейшем будем называть  $X^*$ -топологией пространства  $C_s([0, T], X)$ , а сходящиеся последовательности в этой топологии будем называть  $X^*$ -сходящимися.

**Лемма 1.1.4.** Пусть  $f_k, f \in C_s([0, T], X)$ ,  $k = 1, 2, \dots, u$

$$f_k \rightarrow f, \quad k \rightarrow \infty, \quad \text{в } X^*\text{-топологии пространства } C_s([0, T], X). \quad (1.1.3)$$

Тогда

$$\sup_{k \geq 1} \sup_{t \in [0, T]} \|f_k(t)\|_X < +\infty.$$

**Доказательство.** В силу (1.1.3) для каждого фиксированного  $x^* \in X^*$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{t \in [0, T]} |\langle x^*, f_k(t) \rangle - \langle x^*, f(t) \rangle| = 0.$$

Поэтому найдётся постоянная  $C = C(x^*) > 0$ , зависящая лишь от  $x^* \in X^*$ , такая, что

$$\max_{t \in [0, T]} |\langle x^*, f_k(t) \rangle| \leq C(x^*) \quad \forall k = 1, 2, \dots$$

Следовательно, в силу вложения  $X \subset X^{**}$  и теоремы о резонансе [33, следствие 1 на стр.104], найдётся постоянная  $C_1 > 0$ , такая, что

$$\|f_k(t)\|_{X^{**}} \leq C_1 \quad \forall t \in [0, T], \quad k = 1, 2, \dots,$$

откуда, в силу изометричности вложения  $X \subset X^{**}$ , следует утверждение леммы. Лемма доказана. ■

**Лемма 1.1.5.** Для сходимости последовательности  $f_k \in C_s([0, T], X)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , к элементу  $f \in C_s([0, T], X)$  в  $X^*$ -топологии пространства  $C_s([0, T], X)$  необходимо и достаточно одновременное выполнение следующих условий:

1) для некоторого числа  $C > 0$  имеет место неравенство

$$\sup_{k \geq 1} \sup_{t \in [0, T]} \|f_k(t)\|_X \leq C; \quad (1.1.4)$$

2) для некоторого всюду плотного (в смысле нормы) в  $X^*$  множества  $Y$  справедливо соотношение

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{t \in [0, T]} |\langle x^*, f_k(t) \rangle - \langle x^*, f(t) \rangle| = 0 \quad \forall x^* \in Y. \quad (1.1.5)$$

**Доказательство.** Необходимость следует из определения  $X^*$ -сходимости в пространстве  $C_s([0, T], X)$  и из леммы 1.1.1. Поэтому докажем лишь достаточность.

В самом деле, пусть  $y \in X^*$  — произвольно. Выберем затем произвольно  $\varepsilon > 0$  и зафиксируем. Наконец, положим  $P = C + \sup_{t \in [0, T]} \|f(t)\|_X$ . Так как  $Y$  всюду плотно в  $X^*$ , то найдётся элемент  $y_\varepsilon \in Y$ , такой, что

$\|y_\varepsilon - y\|_{X^*} \leq \frac{\varepsilon}{2P}$ . Поэтому для всех  $t \in [0, T]$  и всех номеров  $k \geq 1$

$$\begin{aligned} |\langle y, f_k(t) \rangle - \langle y, f(t) \rangle| &= |\langle y - y_\varepsilon, f_k(t) \rangle + \langle y_\varepsilon, f_k(t) - f(t) \rangle + \langle y_\varepsilon - y, f(t) \rangle| \leq \frac{\varepsilon}{2P} \|f_k(t)\|_X + \\ &+ |\langle y_\varepsilon, f_k(t) - f(t) \rangle| + \frac{\varepsilon}{2P} \|f(t)\|_X \leq \frac{\varepsilon}{2P} C + |\langle y_\varepsilon, f_k(t) - f(t) \rangle| + \frac{\varepsilon}{2P} \sup_{\xi \in [0, T]} \|f(\xi)\|_X = \frac{\varepsilon}{2} + \\ &+ |\langle y_\varepsilon, f_k(t) - f(t) \rangle|. \end{aligned}$$



Таким образом,

$$\max_{t \in [0, T]} |\langle y, f_k(t) \rangle - \langle y, f(t) \rangle| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \max_{t \in [0, T]} |\langle y_\varepsilon, f_k(t) - f(t) \rangle|.$$

В силу (1.1.5) найдётся номер  $k_0 = k_0(\varepsilon) \geq 1$ , такой, что при всех  $k \geq k_0(\varepsilon)$

$$\max_{t \in [0, T]} |\langle y_\varepsilon, f_k(t) - f(t) \rangle| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Это означает, что для любого  $\varepsilon > 0$  найдётся номер  $k_0 = k_0(\varepsilon) \geq 1$ , такой, что при всех  $k \geq k_0(\varepsilon)$

$$\max_{t \in [0, T]} |\langle y, f_k(t) \rangle - \langle y, f(t) \rangle| \leq \varepsilon.$$

В силу произвольности выбора  $y \in X^*$  отсюда вытекает, что

$$f_k \rightarrow f, \quad k \rightarrow \infty, \quad \text{в } X^*\text{-топологии пространства } C_s([0, T], X).$$

Лемма полностью доказана. ■

**Лемма 1.1.6.** Пусть  $X$  — рефлексивно,  $X^*$  — сепарабельно,  $\Delta = \{x_1^*, \dots, x_j^*, \dots\}$  — счётное всюду плотное в  $X^*$  подмножество, и пусть  $f_k \in C_s([0, T], X)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , — такая последовательность, что  
1) для некоторого положительного числа  $C > 0$

$$\sup_{k \geq 1} \sup_{t \in [0, T]} \|f_k(t)\|_X \leq C; \quad (1.1.6)$$

2) при любом фиксированном  $x^* \in X^*$  семейство функций

$$[0, T] \ni t \mapsto \langle x^*, f_k(t) \rangle, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (1.1.7)$$

равностепенно непрерывно.

Тогда найдутся подпоследовательность  $f_{k_m}$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , последовательности  $f_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , и элемент  $f \in C_s([0, T], X)$ , такие, что

$$\sup_{k \geq 1} \sup_{t \in [0, T]} \|f(t)\|_X \leq C; \quad (1.1.8)$$

и

$$f_{k_m} \rightarrow f, \quad m \rightarrow \infty, \quad \text{в } X^*\text{-топологии пространства } C_s([0, T], X). \quad (1.1.9)$$

**Доказательство.** Положим

$$\varphi_k(t, x^*) \equiv \langle x^*, f_k(t) \rangle, \quad (t, x^*) \in [0, T] \times X^*, \quad k = 1, 2, \dots$$

В силу условий леммы и теоремы Арцела–Асколи [33, стр.125] найдутся функция  $F_1 \in C[0, T]$  и подпоследовательность  $k_{r,1}$ ,  $r = 1, 2, \dots$ , последовательности  $k = 1, 2, \dots$ , такие, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \max_{t \in [0, T]} |\varphi_{k_{r,1}}(t, x_1^*) - F_1(t)| = 0.$$

Далее, из условий леммы и теоремы Арцела–Асколи вытекает существование таких функции  $F_2 \in C[0, T]$  и подпоследовательности  $k_{r,2}$ ,  $r = 1, 2, \dots$ , последовательности  $k_{r,1}$ ,  $r = 1, 2, \dots$ , что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \max_{t \in [0, T]} |\varphi_{k_{r,2}}(t, x_2^*) - F_2(t)| = 0.$$

Продолжая рассуждения, получаем семейство последовательностей  $\{\varphi_{k_{r,p}}\}_{r=1}^\infty$ ,  $p = 1, 2, \dots$ , и последовательность функций  $F_p \in C[0, T]$ ,  $p = 1, 2, \dots$ , такие, что

$$\{\varphi_{k_{r,p+1}}\}_{r=1}^\infty \subset \{\varphi_{k_{r,p}}\}_{r=1}^\infty, \quad p = 1, 2, \dots; \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \max_{t \in [0, T]} |\varphi_{k_{r,p}}(t, x_p^*) - F_p(t)| = 0, \quad p = 1, 2, \dots$$

Определив затем функцию  $G : [0, T] \times \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  равенством

$$G(t, x_p^*) = F_p(t), \quad p = 1, 2, \dots,$$

Выводим, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \max_{t \in [0, T]} |\varphi_{k_{r,p}}(t, x_p^*) - G(t, x_p^*)| = 0, \quad p = 1, 2, \dots$$

Положив  $k_m \equiv k_{m,m}$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , будем иметь

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \max_{t \in [0, T]} |\varphi_{k_m}(t, x^*) - G(t, x^*)| = 0, \quad \forall x^* \in \Delta. \quad (1.1.10)$$

Для любых  $\lambda_j \in \mathbb{R}$ ,  $x_j^* \in \Delta$ ,  $j = \overline{1, l}$ ,  $l \geq 1$ , положим

$$G\left(t, \sum_{j=1}^l \lambda_j x_j^*\right) = \sum_{j=1}^l \lambda_j G(t, x_j^*).$$

Тогда из (1.1.10) вытекает, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \max_{t \in [0, T]} |\varphi_{k_m}(t, x^*) - G(t, x^*)| = 0 \quad \forall x^* \in \text{lin } \Delta, \quad (1.1.11)$$

где через  $\text{lin } \Delta$  обозначено множество всевозможных конечных линейных комбинаций элементов множества  $\Delta$ . При этом, поскольку  $\Delta$  — всюду плотно в  $X^*$ , то  $\text{lin } \Delta$  — тоже всюду плотно в  $X^*$ .

Таким образом, при каждом фиксированном  $t \in [0, T]$  функционал  $G(t, \cdot)$  линеен на  $\text{lin } \Delta$ . Далее, при всех  $t \in [0, T]$ ,  $x^* \in \text{lin } \Delta$

$$|\varphi_{k_m}(t, x^*)| = |\langle x^*, f_{k_m}(t) \rangle| \leq \|x^*\|_{X^*} \|f_{k_m}(t)\|_X \leq C \|x^*\|_{X^*}.$$

Переходя здесь, с учётом (1.1.11), к пределу при  $m \rightarrow \infty$ , получаем, что

$$|G(t, x^*)| \leq \|x^*\|_{X^*} \|f_{k_m}(t)\|_X \leq C \|x^*\|_{X^*}.$$

Итак, при каждом фиксированном  $t \in [0, T]$  функционал  $G(t, \cdot)$  является линейным непрерывным функционалом на  $\text{lin } \Delta$ , наделённом той же нормой, что и пространство  $X^*$ . Поэтому в силу теоремы Хана–Банаха функционал  $G(t, \cdot)$  можно продолжить до линейного непрерывного функционала  $\tilde{G}(t, \cdot)$ , определённого на всём  $X^*$ .

Так как  $\tilde{G}(t, \cdot) \in X^{**}$ , а  $X$  — рефлексивно, то найдётся  $f(t) \in X$ , такое, что

$$G(t, x^*) = \langle x^*, f(t) \rangle.$$

Следовательно, соотношение (1.1.11) можно переписать в виде

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \max_{t \in [0, T]} |\langle x^*, f_{k_m}(t) - f(t) \rangle| = 0 \quad \forall x^* \in \text{lin } \Delta. \quad (1.1.12)$$

Отсюда следует, что при всех  $x^* \in \text{lin } \Delta$  функция

$$[0, T] \ni t \mapsto \langle x^*, f(t) \rangle \quad (1.1.13)$$

непрерывна на отрезке  $[0, T]$ , как равномерный предел непрерывных на этом отрезке числовых функций. Покажем, что функция (1.1.13) непрерывна на отрезке  $[0, T]$  для всех  $x^* \in X^*$ . В самом деле, пусть  $x^* \in X^*$ , — произвольно. Пусть  $t_0 \in [0, T]$  — некоторая точка. Выберем произвольно  $\varepsilon > 0$  и зафиксируем. Наконец, положим  $P \equiv \sup_{\xi \in [0, T]} \|f(\xi)\|_X$ . Тогда найдётся  $y_\varepsilon \in X^*$ , такое, что  $\|y_\varepsilon - x^*\|_{X^*} \leq \frac{\varepsilon}{4P+2}$ . Тогда для всех  $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} |\langle x^*, f(t) \rangle - \langle x^*, f(t_0) \rangle| &\leq |\langle x^* - y_\varepsilon, f(t) - f(t_0) \rangle| + |\langle y_\varepsilon, f(t) - f(t_0) \rangle| \leq \frac{\varepsilon}{4P+2} 2P + |\langle y_\varepsilon, f(t) - f(t_0) \rangle| = \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + |\langle y_\varepsilon, f(t) - f(t_0) \rangle|. \end{aligned}$$

Далее, в силу доказанной выше непрерывности функции (1.1.13) при всех  $x^* \in \text{lin } \Delta$ , найдётся  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ , такое, что при всех  $t \in [0, T]$ ,  $|t - t_0| < \delta$  выполнено неравенство

$$|\langle y_\varepsilon, f(t) - f(t_0) \rangle| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Таким образом, для любого  $\varepsilon > 0$  найдётся  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ , такое, что при всех  $t \in [0, T]$ ,  $|t - t_0| < \delta$ , выполнено неравенство

$$|\langle x^*, f(t) \rangle - \langle x^*, f(t_0) \rangle| \leq \varepsilon$$

Ввиду произвольности выбора  $x^* \in X^*$  это означает, что функция (1.1.13) непрерывна на отрезке  $[0, T]$  для всех  $x^* \in X^*$ , или, что то же самое,  $f \in C_s([0, T], X)$ . Отсюда, из предельного соотношения (1.1.12), неравенства (1.1.6) и леммы 1.1.5, следует предельное соотношение (1.1.9).

Докажем теперь неравенство (1.1.10). В самом деле,

$$|\langle x^*, f_{k_m}(t) \rangle| \leq \|x^*\|_{X^*} \|f_{k_m}(t)\|_X \leq C \|x^*\|_{X^*} \quad \forall x^* \in X^*, \quad t \in [0, T].$$

Переходя здесь к пределу при  $m \rightarrow \infty$ , будем иметь

$$|\langle x^*, f(t) \rangle| \leq C \|x^*\|_{X^*} \quad \forall x^* \in X^*, \quad t \in [0, T].$$

Отсюда, ввиду вложения  $X \subset X^{**}$ , получаем, что

$$\|f(t)\|_{X^{**}} \leq C \quad \forall t \in [0, T].$$

Ввиду изометричности вложения  $X \subset X^{**}$  отсюда следует неравенство (1.1.10). Лемма полностью доказана. ■

**Лемма 1.1.7.** [18, стр.150, теорема 1.3] Пусть  $X$  — банахово пространство. Тогда множество всевозможных многочленов с коэффициентами из  $X$ , т.е. множество всевозможных функций вида  $\xi(t) = \sum_{k=0}^m a_k t^k$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $a_j \in X$ ,  $j = \overline{0, m}$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ , всюду плотно в  $C([0, T], X)$ .

### 1.1.2. Функции нескольких вещественных переменных

Пусть  $Y$  — банахово пространство с нормой  $\|\cdot\|_Y$ ,  $G \subset \mathbb{R}^m$  — некоторое множество.

**Определение 1.1.8.** Говорят, что функция  $f: G \rightarrow Y$  имеет в норме пространства  $Y$  предел, равный  $y$ , при  $g \rightarrow g_0$ , где  $g_0$  — предельная точка множества  $G$ , и пишут  $\lim_{g \rightarrow g_0}^Y f(g) = y$ , если

$$\lim_{g \rightarrow g_0} \|f(g) - y\|_Y = 0,$$

иными словами,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall g \in G, \quad |g - g_0| < \delta : \|f(g) - y\|_Y < \varepsilon.$$

**Определение 1.1.9.** Говорят, что функция  $f: G \rightarrow Y$  непрерывна в точке  $g_0 \in G$  в норме пространства  $Y$ , если  $\lim_{g \rightarrow g_0}^Y f(g) = f(g_0)$ . Говорят, что функция  $f: G \rightarrow Y$  непрерывна на  $G$  в норме пространства  $Y$ , если она непрерывна в норме пространства  $Y$  в каждой точке множества  $G$ . Множество всех непрерывных на  $G$  функций  $f: G \rightarrow Y$  обозначают  $C(G, Y)$ .

**Определение 1.1.10.** Говорят, что функция  $f: G \rightarrow Y$  равномерно непрерывна на множестве  $G$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall g', g'' \in G, \quad |g' - g''| < \delta : \|f(g') - f(g'')\|_Y < \varepsilon.$$

**Теорема 1.1.17.** Если функция  $f: G \rightarrow Y$  непрерывна на  $G$  в норме пространства  $Y$  и  $G$  — компакт, то функция  $f$  равномерно непрерывна на этом компакте.

**Доказательство.** Пусть это не так, и найдётся  $\varepsilon_0 > 0$ , такое, что для любого  $\delta > 0$  найдутся точки  $g'_\delta, g''_\delta \in G$ ,  $|g'_\delta - g''_\delta| < \delta$ , для которых  $\|f(g'_\delta) - f(g''_\delta)\|_Y \geq \varepsilon_0$ . Пусть  $\delta_j > 0$ ,  $j = 1, 2, \dots$ ,  $\delta_j \rightarrow 0$ ,  $j \rightarrow \infty$ , — некоторая последовательность чисел. Тогда

$$|g'_{\delta_j} - g''_{\delta_j}| < \delta_j, \quad \|f(g'_{\delta_j}) - f(g''_{\delta_j})\|_Y \geq \varepsilon_0, \quad j = 1, 2, \dots \quad (1.1.14)$$

Поскольку  $G \subset \mathbb{R}^m$  — компакт, то найдутся подпоследовательности  $g'_{\delta_{j_i}}, g''_{\delta_{j_i}}$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , последовательностей  $g'_{\delta_j}$  и  $g''_{\delta_j}$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , соответственно и элементы  $g^*, g^{**} \in G$ , такие, что

$$g'_{\delta_{j_i}} \rightarrow g^*, \quad g''_{\delta_{j_i}} \rightarrow g^{**}, \quad i \rightarrow \infty,$$

откуда, в силу первого из неравенств (1.1.14), извлекаем, что  $g^* = g^{**}$ . Полагая во втором из соотношений (1.1.14)  $j = j_i$  и переходя затем к пределу при  $i \rightarrow \infty$ , получим, что  $0 \geq \varepsilon_0 > 0$ . Полученное противоречие доказывает теорему. ■

Пусть далее  $G$  — компакт,  $X$  — нормированное пространство с нормой  $\|\cdot\|_X$ .

**Лемма 1.1.8.** Пусть  $\Pi(g) \in \mathcal{L}(X, Y)$  при всех  $g \in G$ , и пусть при всех  $x \in X$  функция  $G \ni g \mapsto \Pi(g)x$  принадлежит пространству  $C(G, Y)$ . Тогда

$$\sup_{g \in G} \|\Pi(g)\|_{X \rightarrow Y} < +\infty.$$

**Доказательство.** Поскольку при каждом фиксированном  $x \in X$  функция  $G \ni g \mapsto \Pi(g)x$  — элемент пространства  $C(G, Y)$ , то найдётся зависящая от  $x \in X$  постоянная  $K = K(x) > 0$ , такая, что

$$\sup_{g \in G} \|\Pi(g)x\|_Y \leq K(x).$$

Пользуясь теперь теоремой о резонансе, получаем утверждение настоящей леммы. ■

Пусть далее  $X$  — банахово пространство.

**Лемма 1.1.9.** Пусть  $\Pi(t, \xi) \in \mathcal{L}(X, Y)$  при всех  $(t, \xi) \in \Gamma$ , при всех  $x \in X$  функция  $\Gamma \ni (t, \xi) \mapsto \Pi(t, \xi)x$  принадлежит  $C(\Gamma, Y)$ . Если  $z \in C([0, T], X)$ , то функция  $\Gamma \ni (t, \xi) \mapsto \Pi(t, \xi)z(\xi)$  является элементом  $C(\Gamma, Y)$ .

**Доказательство.** В самом деле, пусть  $(t, \xi), (t + \Delta t, \xi + \Delta \xi) \in \Gamma$  — произвольны, и пусть  $z \in C([0, T], X)$ . Тогда, на основании леммы 1.1.8,

$$\begin{aligned} \|\Pi(t + \Delta t, \xi + \Delta \xi)z(\xi + \Delta \xi) - \Pi(t, \xi)z(\xi)\|_Y &\leq \|\Pi(t + \Delta t, \xi + \Delta \xi)[z(\xi + \Delta \xi) - z(\xi)]\|_Y + \\ &+ \|\Pi(t + \Delta t, \xi + \Delta \xi) - \Pi(t, \xi)\|_Y \|z(\xi)\|_X \leq \sup_{(\tau, \eta) \in \Gamma} \|\Pi(\tau, \eta)\| \|z(\xi + \Delta \xi) - z(\xi)\|_X + \\ &+ \|\Pi(t + \Delta t, \xi + \Delta \xi) - \Pi(t, \xi)\|_Y \|z(\xi)\|_X, \end{aligned}$$

откуда, в силу условий настоящей леммы, и вытекает, что функция  $\Gamma \ni (t, \xi) \mapsto \Pi(t, \xi)z(\xi)$  является элементом  $C(\Gamma, Y)$ . ■

**Лемма 1.1.10.** Пусть  $\Pi(t, \xi) \in \mathcal{L}(X, Y)$  при всех  $(t, \xi) \in \Gamma$ , причём при всех  $x \in X$  функция  $\Gamma \ni (t, \xi) \mapsto \Pi(t, \xi)x$  принадлежит  $C(\Gamma, Y)$  и при всех  $(t, \xi) \in \Gamma$  имеет непрерывную на  $\Gamma$  в норме  $Y$  производную  $\Gamma \ni (t, \xi) \mapsto \Pi_t(t, \xi)x$ . Если  $z \in C([0, T], X)$ , то функция  $\Gamma \ni (t, \xi) \mapsto \Pi(t, \xi)z(\xi)$  является элементом  $C(\Gamma, Y)$  и при всех  $(t, \xi) \in \Gamma$  имеет непрерывную в норме  $Y$  на  $\Gamma$  производную по переменной  $t$ . Кроме того,

$$\frac{\partial}{\partial t} \Pi(t, \xi)z(\xi) = \Pi_t(t, \xi)z(\xi) \quad \forall (t, \xi) \in \Gamma.$$

**Доказательство.** Выберем произвольно функцию  $z \in C([0, T], X)$  и зафиксируем. Введём обозначения

$$\Theta_0(t, \xi) \equiv \Pi(t, \xi)z(\xi), \quad \Theta_1(t, \xi) \equiv \Pi_t(t, \xi)z(\xi), \quad (t, \xi) \in \Gamma.$$

Справедливость включений  $\Theta_0, \Theta_1 \in C(\Gamma, Y)$  вытекает из леммы 1.1.9. Следовательно, нужно доказать лишь равенство

$$\Theta_{0t}(t, \xi) = \Theta_1(t, \xi) \quad \forall (t, \xi) \in \Gamma.$$

Действительно, пусть  $(t, \xi), (t + \Delta t, \xi) \in \Gamma$  — произвольны. Тогда

$$\left\| \frac{\Theta_0(t + \Delta t, \xi) - \Theta_0(t, \xi)}{\Delta t} - \Theta_1(t, \xi) \right\|_Y = \left\| \left[ \frac{\Pi(t + \Delta t, \xi) - \Pi(t, \xi)}{\Delta t} - \Pi_t(t, \xi) \right] y(\xi) \right\|_Y \rightarrow 0, \quad \Delta t \rightarrow 0,$$

в силу условий леммы. Лемма доказана. ■

## 1.2. Интеграл Римана функции одной вещественной переменной

В данном разделе приводятся определение и свойства интеграла Римана от функций одной переменной, принимающих значения в банаховом пространстве. Изложение этих сведений следует [38, §23], [63, §25] и [28]. Всюду в настоящем разделе  $X$  — банахово пространство с нормой  $\|\cdot\|_X$ .

Прежде всего нам потребуется следующая

**Лемма 1.2.1.** Пусть последовательность  $x_j \in X$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , такова, что  $\|x_j\|_X \rightarrow \infty$ ,  $j \rightarrow \infty$ . Тогда для всех  $y \in X$  справедливо соотношение  $\|x_j + y\|_X \rightarrow \infty$ ,  $j \rightarrow \infty$ .

**Доказательство.** Заметим, что

$$\|x_j + y\|_X = \|x_j - (-y)\|_X \geq \|x_j\|_X - \|-y\|_X = \|x_j\|_X - \|y\|_X \geq \|x_j\|_X - \|y\|_X,$$

то есть

$$\|x_j + y\|_X \geq \|x_j\|_X - \|y\|_X, \quad j = 1, 2, \dots$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при  $j \rightarrow \infty$ , получаем требуемое соотношение. Лемма доказана. ■

### 1.2.1. Определение интеграла и условия интегрируемости

Разбиением  $\tau$  отрезка  $[a, b]$  называется любая конечная система его точек  $\{t_i\}_{i=0}^{i=i_\tau}$ , такая, что

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_{i_\tau-1} < t_{i_\tau} = b.$$

При этом пишут  $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i=i_\tau}$ . Каждый из отрезков  $[t_{i-1}, t_i]$  называется *отрезком разбиения*  $\tau$ , длину этого отрезка обозначают через  $\Delta t_i$ ,  $\Delta t_i \equiv t_i - t_{i-1}$ ,  $i = \overline{1, i_\tau}$ . Число  $|\tau| = \max_{i=\overline{1, i_\tau}} \Delta t_i$  называется *мелкостью разбиения*  $\tau$ .

Разбиение  $\tau'$  отрезка  $[a, b]$  называется следующим за разбиением  $\tau$  (или продолжающим разбиение  $\tau$ ) того же отрезка, если каждая точка разбиения  $\tau$  является и точкой разбиения  $\tau'$ . Иначе говоря, если каждый отрезок разбиения  $\tau'$  содержится в некотором отрезке разбиения  $\tau$  (говорят ещё, что  $\tau'$  — измельчение разбиения  $\tau$ ). В этом случае пишут  $\tau' \succ \tau$ , или, что то же,  $\tau \prec \tau'$ .

Совокупность всех разбиений отрезка обладает следующими свойствами.

1° Если  $\tau_1 \prec \tau_2$ , а  $\tau_2 \prec \tau_3$ , то  $\tau_1 \prec \tau_3$ .

2° Для любых  $\tau_1$  и  $\tau_2$  существует такое  $\tau$ , что  $\tau \succ \tau_1$  и  $\tau \succ \tau_2$ .

Пусть теперь на отрезке  $[a, b]$  определена функция  $f$ , принимающая значения в банаховом пространстве  $X$ , и пусть  $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i=i_\tau}$  — некоторое разбиение отрезка  $[a, b]$ ,  $\Delta t_i \equiv t_i - t_{i-1}$ ,  $i = \overline{1, i_\tau}$ , а  $|\tau|$  — мелкость этого разбиения.

Зафиксируем произвольным образом точки  $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$ ,  $i = \overline{1, i_\tau}$ , и составим сумму

$$\sigma_\tau(f; \xi_1, \dots, \xi_{i_\tau}) = \sum_{i=1}^{i_\tau} f(\xi_i) \Delta t_i.$$

Суммы такого вида называются *интегральными суммами Римана функции*  $f$ . Иногда будем обозначать их через  $\sigma_\tau(f)$ , или даже просто через  $\sigma_\tau$ . Точки  $\xi_i$ ,  $i = \overline{1, i_\tau}$ , будем называть *отмеченными точками разбиения*  $\tau$ .

**Определение 1.2.1.** Функция  $f$  называется *интегрируемой (по Риману) на отрезке  $[a, b]$* , если существует такой элемент  $A \in X$ , что для любой последовательности разбиений отрезка  $[a, b]$

$$\tau_j = \{t_i^{(j)}\}_{i=0}^{i=i_{\tau_j}}, \quad j = 1, 2, \dots,$$

у которой  $\lim_{j \rightarrow \infty} |\tau_j| = 0$ , и для любого выбора точек  $\xi_i^{(j)} \in [t_{i-1}^{(j)}, t_i^{(j)}]$ ,  $i = \overline{1, i_{\tau_j}}$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , существует предел последовательности интегральных сумм  $\sigma_{\tau_j}(f; \xi_1^{(j)}, \dots, \xi_{i_{\tau_j}}^{(j)})$  и он равен  $A$ :

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left\| \sum_{i=1}^{i_{\tau_j}} f(\xi_i^{(j)}) \Delta t_i^{(j)} - A \right\|_X = 0, \quad (1.2.1)$$

где  $\Delta t_i^{(j)} \equiv t_i^{(j)} - t_{i-1}^{(j)}$ ,  $i = \overline{1, i_{\tau_j}}$ ,  $j = 1, 2, \dots$

При выполнении этих условий элемент  $A$  называется (римановым) *определённым интегралом функции*  $f$  на отрезке  $[a, b]$  и обозначается  $(P) \int_a^b f(t) dt$  или  $\int_a^b f(t) dt$ .

Таким образом,

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{j \rightarrow \infty} \sigma_{\tau_j}(f; \xi_1^{(j)}, \dots, \xi_{i_{\tau_j}}^{(j)}),$$

где последовательность  $\tau_j$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , такова, что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} |\tau_j| = 0.$$

Для краткости в этом случае будем писать просто

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{|\tau| \rightarrow 0} \sigma_\tau(f).$$

Подобно тому, как определение предела функции можно сформулировать двумя эквивалентными способами — с помощью пределов последовательностей и с помощью языка „ $\varepsilon$ - $\delta$ “, — так и определение интеграла Римана можно сформулировать иначе.

**Определение 1.2.2.** Элемент  $A \in X$  называется определённым интегралом функции  $f$  на отрезке  $[a, b]$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  найдётся такое  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ , что, каково бы ни было разбиение  $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i=i_\tau}$  (отрезка  $[a, b]$ ) мелкости, меньшей  $\delta$ , и каковы бы ни были точки  $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$ ,  $i = \overline{1, i_\tau}$ , выполняется неравенство

$$\left\| \sum_{i=1}^{i_\tau} f(\xi_i) \Delta t_i - A \right\|_X = 0,$$

где  $\Delta t_i \equiv t_i - t_{i-1}$ ,  $i = \overline{1, i_\tau}$ .

**Теорема 1.2.1.** Два данных определения интеграла эквивалентны.

**Доказательство.** 1) Покажем, что интеграл в смысле определения 1.2.1 является интегралом в смысле определения 1.2.2. Предположим, что элемент  $A \in X$  является интегралом в смысле определения 1.2.1, но не является интегралом в смысле определения 1.2.2. Поскольку  $A \in X$  не является интегралом в смысле определения 1.2.2, то найдутся  $\varepsilon_0 > 0$ , последовательность чисел  $\delta_j > 0$ ,  $j = 1, 2, \dots$ ,  $\delta_j \rightarrow 0$ ,  $j \rightarrow \infty$ , последовательность разбиений  $\tau_j = \{t_i^{(j)}\}_{i=0}^{i=i_{\tau_j}}$ ,  $|\tau_j| < \delta_j$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , и последовательность наборов  $\xi^{(j)} \equiv \{\xi_1^{(j)}, \dots, \xi_{i_\tau}^{(j)}\}$ ,  $\xi_i^{(j)} \in [t_{i-1}^{(j)}, t_i^{(j)}]$ ,  $i = \overline{1, i_{\tau_j}}$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , такие, что

$$\left\| \sum_{i=1}^{i_{\tau_j}} f(\xi_i^{(j)}) \Delta t_i^{(j)} - A \right\|_X \geq \varepsilon_0,$$

где  $\Delta t_i^{(j)} \equiv t_i^{(j)} - t_{i-1}^{(j)}$ ,  $i = \overline{1, i_{\tau_j}}$ ,  $j = 1, 2, \dots$ . А это противоречит тому, что  $A \in X$  — интеграл в смысле определения 1.2.1.

2) Покажем, что интеграл в смысле определения 1.2.2 является интегралом в смысле определения 1.2.1. Предположим, что элемент  $A \in X$  является интегралом в смысле определения 1.2.2. Пусть  $\tau_j = \{t_i^{(j)}\}_{i=0}^{i=i_{\tau_j}}$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , — последовательность разбиений, такая, что  $\lim_{j \rightarrow \infty} |\tau_j| = 0$ , и пусть точки  $\xi_i^{(j)} \in [t_{i-1}^{(j)}, t_i^{(j)}]$ ,  $i = \overline{1, i_{\tau_j}}$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , — произвольны.

Выберем произвольно  $\varepsilon > 0$  и зафиксируем, после чего подберём по нему число  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  из определения 1.2.2. Так как  $\lim_{j \rightarrow \infty} |\tau_j| = 0$ , то найдётся номер  $j_0 = j_0(\delta(\varepsilon))$ , такой, что  $|\tau_j| < \delta(\varepsilon)$  для всех  $j \geq j_0(\delta(\varepsilon))$ . Поэтому, на основании определения 1.2.2,

$$\left\| \sum_{i=1}^{i_{\tau_j}} f(\xi_i^{(j)}) \Delta t_i^{(j)} - A \right\|_X \leq \varepsilon$$

при всех  $j \geq j_0(\delta(\varepsilon))$ . Иными словами, для произвольной последовательности разбиений отрезка  $[a, b]$

$$\tau_j = \{t_i^{(j)}\}_{i=0}^{i=i_{\tau_j}}, \quad j = 1, 2, \dots,$$

у которой  $\lim_{j \rightarrow \infty} |\tau_j| = 0$ , и для любого выбора точек  $\xi_i^{(j)} \in [t_{i-1}^{(j)}, t_i^{(j)}]$ ,  $i = \overline{1, i_{\tau_j}}$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , существует предел последовательности интегральных сумм  $\sigma_{\tau_j}(f; \xi_1^{(j)}, \dots, \xi_{i_{\tau_j}}^{(j)})$  и он равен  $A$ :

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left\| \sum_{i=1}^{i_{\tau_j}} f(\xi_i^{(j)}) \Delta t_i^{(j)} - A \right\|_X = 0,$$

где  $\Delta t_i^{(j)} \equiv t_i^{(j)} - t_{i-1}^{(j)}$ ,  $i = \overline{1, i_{\tau_j}}$ ,  $j = 1, 2, \dots$ . Следовательно, элемент  $A \in X$  — интеграл в смысле определения 1.2.1. ■

Выше введено понятие определённого интеграла  $\int_a^b f(t)dt$  от функции  $f$  по отрезку  $[a, b]$ ,  $a < b$ .

Для любой функции  $f$ , определённой в точке  $a$ , по определению положим

$$\int_a^a f(t)dt = 0,$$

а для функции, интегрируемой на отрезке  $[a, b]$ ,

$$\int_b^a f(t)dt = - \int_a^b f(t)dt.$$

Аналогично критерию Коши существования предела функции формулируется и доказывается аналогичный критерий существования предела интегральных сумм.

**Теорема 1.2.2.** *Для того, чтобы функция  $f$  была интегрируема на отрезке  $[a, b]$ , необходимо и достаточно, чтобы для любого  $\varepsilon > 0$  существовало такое  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ , что, каковы бы ни были разбиения  $\tau' = \{t'_i\}_{i=0}^{i=i_{\tau'}}$  и  $\tau'' = \{t''_j\}_{j=0}^{j=j_{\tau''}}$ , мелкости, меньшей  $\delta$ , и точки  $\xi'_i \in [t'_{i-1}, t'_i]$ ,  $i = \overline{1, i_{\tau'}}$ ,  $\xi''_j \in [t''_{j-1}, t''_j]$ ,  $j = \overline{1, j_{\tau''}}$ , выполнено неравенство*

$$\|\sigma_{\tau'}(f; \xi'_1, \dots, \xi'_{i_{\tau'}}) - \sigma_{\tau''}(f; \xi''_1, \dots, \xi''_{j_{\tau''}})\|_X < \varepsilon. \quad (1.2.2)$$

**Доказательство.** 1) Докажем необходимость условия (1.2.2). Если функция  $f$  интегрируема в смысле Римана, т.е. существует предел (1.2.1), то согласно определению 1.2.2, для любого  $\varepsilon > 0$  найдётся такое  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ , что, каково бы ни было разбиение  $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i=i_{\tau}}$  (отрезка  $[a, b]$ ) мелкости, меньшей  $\delta$ , и при любом выборе точек  $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$ ,  $i = \overline{1, i_{\tau}}$ , для интегральных сумм  $\sigma_{\tau} = \sigma_{\tau}(f; \xi_1, \dots, \xi_{i_{\tau}})$  выполняется неравенство

$$\|\sigma_{\tau} - A\|_X < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Если теперь  $\sigma_{\tau'} \equiv \sigma_{\tau'}(f; \xi'_1, \dots, \xi'_{i_{\tau'}})$  и  $\sigma_{\tau''} \equiv \sigma_{\tau''}(f; \xi''_1, \dots, \xi''_{j_{\tau''}})$  — две такие интегральные суммы, что  $|\tau'| < \delta$  и  $|\tau''| < \delta$ , то

$$\|\sigma_{\tau'} - \sigma_{\tau''}\|_X = \|(\sigma_{\tau'} - A) + (A - \sigma_{\tau''})\|_X \leq \|\sigma_{\tau'} - A\|_X + \|A - \sigma_{\tau''}\|_X < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

2) Докажем достаточность условия (1.2.2). Пусть для функции  $f: [a, b] \rightarrow X$  выполнено условие (1.2.2) и  $\sigma_{\tau_j} = \sigma_{\tau_j}(f; \xi_1^{(j)}, \dots, \xi_{i_{\tau_j}}^{(j)})$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , — такая последовательность интегральных сумм функции  $f$ , что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} |\tau_j| = 0. \quad (1.2.3)$$

Если  $\varepsilon > 0$  произвольно фиксировано, а  $\delta > 0$  выбрано так, что выполняется условие (1.2.2), то, в силу равенства (1.2.3), существует такой номер  $j_0$ , что для всех  $j > j_0$  выполняется условие  $|\tau_j| < \delta$ . Поэтому для всех  $j' > j_0$  и  $j'' > j_0$  выполняются неравенства  $|\tau_{j'}| < \delta$ ,  $|\tau_{j''}| < \delta$ , и, следовательно, согласно условию (1.2.2), имеет место неравенство

$$\|\sigma_{\tau_{j'}} - \sigma_{\tau_{j''}}\|_X < \varepsilon.$$

Это означает, что последовательность  $\sigma_{\tau_j}$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , фундаментальна в банаховом пространстве  $X$ . Ввиду полноты пространства  $X$  отсюда вытекает существование элемента  $A \in X$ , такого, что  $\lim_{j \rightarrow \infty} \|\sigma_{\tau_j} - A\|_X = 0$ .

Последовательность  $\sigma_{\tau_j}$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , являлась произвольной последовательностью интегральных сумм, для которой выполнялось условие (1.2.3). Поэтому все такие последовательности сходятся, притом к одному и тому же элементу пространства  $X$ . В самом деле, пусть последовательности  $\sigma_{\tau'_j}$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , и  $\sigma_{\tau''_j}$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , таковы, что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} |\tau'_j| = \lim_{j \rightarrow \infty} |\tau''_j| = 0,$$

и, следовательно, найдутся пределы  $A', A'' \in X$ :

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|\sigma_{\tau'_j} - A'\|_X = 0, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \|\sigma_{\tau''_j} - A''\|_X = 0.$$

Составим новую последовательность интегральных сумм,  $\sigma_{\tau_k}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , так:

$$\sigma_{\tau_k} = \begin{cases} \sigma_{\tau'_j}, & \text{если } k = 2j - 1; \\ \sigma_{\tau''_j}, & \text{если } k = 2j; \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots$$

Тогда, очевидно,  $\lim_{k \rightarrow \infty} |\tau_k| = 0$ , и поэтому у последовательности  $\sigma_{\tau_k}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , существует предел (в смысле сходимости по норме пространства  $X$ ).

Предел всякой подпоследовательности сходящейся последовательности равен пределу всей последовательности. Следовательно,

$$A' = \lim_{j \rightarrow \infty} \sigma_{\tau'_j} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_{\tau_k} = \lim_{j \rightarrow \infty} \sigma_{\tau''_j} = A''.$$

Теорема полностью доказана. ■

**Теорема 1.2.3.** Если функция интегрируема (в смысле Римана) на некотором отрезке, то она ограничена на этом отрезке.

**Доказательство.** Пусть функция  $f: [a, b] \rightarrow X$  неограничена на отрезке  $[a, b]$ , и пусть фиксировано некоторое разбиение  $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i=i_\tau}$  этого отрезка. В силу неограниченности функции  $f$  на всём отрезке  $[a, b]$ , она неограничена по крайней мере на одном отрезке разбиения  $\tau$ . Пусть для определённости функция  $f$  неограничена на отрезке  $[t_0, t_1]$ . Тогда на этом отрезке существует последовательность точек  $\xi_1^{(j)} \in [t_0, t_1]$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , такая, что

$$\|f(\xi_1^{(j)})\|_X \geq j, \quad j = 1, 2, \dots$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|f(\xi_1^{(j)})\|_X = +\infty. \quad (1.2.4)$$

Зафиксируем теперь каким-либо образом точки  $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$ ,  $i = \overline{2, i_\tau}$ . Тогда сумма  $\sum_{i=2}^{i_\tau} f(\xi_i) \Delta t_i$  будет иметь определённое значение. Поэтому, в силу (1.2.4) и леммы 1.2.1,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|\sigma_\tau(f; \xi_1^{(j)}, \xi_2, \dots, \xi_{i_\tau})\|_X = \lim_{j \rightarrow \infty} \left\| f(\xi_1^{(j)}) \Delta t_1 + \sum_{i=2}^{i_\tau} f(\xi_i) \Delta t_i \right\|_X = +\infty,$$

и, следовательно, каково бы ни было число  $K > 0$ , всегда можно подобрать такой номер  $j_0$ , что если на отрезке  $[t_0, t_1]$  взять точку  $\xi_1^{(j_0)}$ , то

$$\|\sigma_\tau(f; \xi_1^{(j_0)}, \xi_2, \dots, \xi_{i_\tau})\|_X > K$$

Отсюда следует, что суммы  $\sigma_\tau$  не могут стремиться ни к какому конечному пределу при  $|\tau| \rightarrow 0$ .

Действительно, если бы существовал элемент  $A \in X$ , такой, что

$$\lim_{|\tau| \rightarrow 0} \sigma_\tau = A,$$

то для любого  $\varepsilon > 0$  нашлось бы такое  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ , что для всех разбиений  $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i=i_\tau}$  отрезка  $[a, b]$ , у которых  $|\tau| < \delta(\varepsilon)$ , при любом выборе точек  $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$ ,  $i = \overline{1, i_\tau}$ , выполнялось бы неравенство  $\|\sigma_\tau - A\|_X < \varepsilon$ , и, следовательно,

$$\|\sigma_\tau\|_X = \|(\sigma_\tau - A) + A\|_X \leq \|\sigma_\tau - A\|_X + \|A\|_X < \varepsilon + \|A\|_X.$$

Поскольку же функция  $f$  неограничена, то для любого разбиения  $\tau$  (в том числе и такого, что  $|\tau| < \delta(\varepsilon)$ , если существовало бы указанное  $\delta(\varepsilon)$ ) при любом фиксированном  $\varepsilon > 0$  можно так выбрать точки  $\xi_i$ , что будет выполняться неравенство

$$\|\sigma_\tau\|_X > \varepsilon + \|A\|_X.$$



Полученное противоречие доказывает теорему. ■

Сформулируем и докажем следующее достаточное условие интегрируемости функции  $f: [a, b] \rightarrow X$  на отрезке  $[a, b]$ .

**Теорема 1.2.4.** *Для интегрируемости ограниченной на отрезке  $[a, b]$  функции  $f: [a, b] \rightarrow X$  достаточно, чтобы для любого числа  $\varepsilon > 0$  нашлось такое число  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ , что при любом разбиении  $\tau = \{t_i\}_{i=1}^{i_\tau}$  отрезка  $[a, b]$ ,  $|\tau| < \delta$ , выполнено соотношение*

$$\sum_{i=1}^{i_\tau} \text{osc}(f; [t_{i-1}, t_i]) \Delta t_i < \varepsilon,$$

где  $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ ,  $i = \overline{1, i_\tau}$ .

**Доказательство.** Пусть  $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i_\tau}$  — разбиение отрезка  $[a, b]$ , а  $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$ ,  $i = \overline{1, i_\tau}$ , — произвольные точки. Пусть  $\tilde{\tau} = \{\tilde{t}_j\}_{j=0}^{j_\tau}$  — измельчение разбиения  $\tau$ . Тогда некоторые (а может быть, и все) отрезки  $[t_{i-1}, t_i]$  разбиения  $\tau$  сами подвергаются разбиению  $t_{i-1} = t_{i-1,0} < \dots < t_{i,k_i} = t_i$ . В связи с этим нам будет удобно нумеровать точки разбиения  $\tilde{\tau}$  двумя индексами. В записи  $t_{i,j}$  первый индекс означает, что  $t_{i,j} \in [t_{i-1}, t_i]$ , а второй индекс есть порядковый номер точки на отрезке  $[t_{i-1}, t_i]$ . Теперь естественно положить  $\Delta t_{i,j} = t_{i,j} - t_{i,j-1}$ . Таким образом,  $\Delta t_i = \Delta t_{i,1} + \dots + \Delta t_{i,k_i}$ .

Выберем произвольно точки  $\xi'_{i,j} \in [t_{i,j-1}, t_{i,j}]$ ,  $i = \overline{1, i_\tau}$ ,  $j = \overline{1, k_i}$ , и оценим норму разности интегральных сумм  $\sigma_\tau(f; \xi_1, \dots, \xi_{i_\tau}) - \sigma_{\tilde{\tau}}(f; \xi'_{1,1}, \dots, \xi'_{i_\tau, k_{i_\tau}})$ :

$$\begin{aligned} \|\sigma_\tau(f; \xi_1, \dots, \xi_{i_\tau}) - \sigma_{\tilde{\tau}}(f; \xi'_{1,1}, \dots, \xi'_{i_\tau, k_{i_\tau}})\|_X &= \left\| \sum_{i=1}^{i_\tau} f(\xi_i) \Delta t_i - \sum_{i=1}^{i_\tau} \sum_{j=1}^{k_i} f(\xi'_{i,j}) \Delta t_{i,j} \right\|_X = \\ &= \left\| \sum_{i=1}^{i_\tau} \sum_{j=1}^{k_i} f(\xi_i) \Delta t_{i,j} - \sum_{i=1}^{i_\tau} \sum_{j=1}^{k_i} f(\xi'_{i,j}) \Delta t_{i,j} \right\|_X = \left\| \sum_{i=1}^{i_\tau} \sum_{j=1}^{k_i} [f(\xi_i) - f(\xi'_{i,j})] \Delta t_{i,j} \right\|_X \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^{i_\tau} \sum_{j=1}^{k_i} \|f(\xi_i) - f(\xi'_{i,j})\|_X \Delta t_{i,j} \leq \sum_{i=1}^{i_\tau} \sum_{j=1}^{k_i} \text{osc}(f; [t_{i-1}, t_i]) \Delta t_{i,j} = \sum_{i=1}^{i_\tau} \text{osc}(f; [t_{i-1}, t_i]) \Delta t_i. \end{aligned}$$

Из полученной оценки нормы разности интегральных сумм следует, что если функция  $f$  удовлетворяет достаточным условиям, сформулированным в данной теореме, то по любому  $\varepsilon > 0$  можно найти такое  $\delta > 0$ , что для любого разбиения  $\tau$  отрезка  $[a, b]$ ,  $|\tau| < \delta$ , и для измельчения  $\tilde{\tau}$  разбиения  $\tau$  будем иметь

$$\|\sigma_\tau(f) - \sigma_{\tilde{\tau}}(f)\|_X < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Если теперь  $\tau'$  и  $\tau''$  — произвольные разбиения отрезка  $[a, b]$ ,  $|\tau'| < \delta$ ,  $|\tau''| < \delta$ , то, рассмотрев разбиение  $\tilde{\tau} = \tau' \cup \tau''$ , являющееся измельчением обоих разбиений  $\tau'$ ,  $\tau''$ , по доказанному будем иметь

$$\|\sigma_{\tau'}(f) - \sigma_{\tilde{\tau}}(f)\|_X < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \|\sigma_{\tau''}(f) - \sigma_{\tilde{\tau}}(f)\|_X < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда следует, что

$$\|\sigma_{\tau'} - \sigma_{\tau''}\|_X = \|(\sigma_{\tau'} - \sigma_{\tilde{\tau}}) + (\sigma_{\tilde{\tau}} - \sigma_{\tau''})\|_X \leq \|\sigma_{\tau'} - \sigma_{\tilde{\tau}}\|_X + \|\sigma_{\tilde{\tau}} - \sigma_{\tau''}\|_X < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

как только  $|\tau'| < \delta$ ,  $|\tau''| < \delta$ . Таким образом, в силу теоремы 1.2.2, функция  $f$  — интегрируема в смысле Римана на отрезке  $[a, b]$ . ■

**Следствие 1.2.1.** *Если функция  $f: [a, b] \rightarrow X$  сильно непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , то  $f$  интегрируема на отрезке  $[a, b]$ .*

**Доказательство.** Если  $f$  непрерывна на отрезке, то она ограничена на нём. Поэтому на основании теоремы 1.2.4 достаточно показать, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \forall \text{ разбиения } \tau = \{t_i\}_{i=0}^{i_\tau}, |\tau| < \delta : \sum_{i=1}^{i_\tau} \text{osc}(f; [t_{i-1}, t_i]) \Delta t_i < \varepsilon, \quad (1.2.5)$$

где  $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ ,  $i = \overline{1, i_\tau}$ .

Так как  $f$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , то она равномерно непрерывна на этом отрезке, ввиду чего

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \eta = \eta(\varepsilon) > 0 \forall t', t'' \in [a, b], |t' - t''| < \eta : \|f(t') - f(t'')\|_X \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}. \quad (1.2.6)$$

Выберем произвольно  $\varepsilon > 0$  и подберём по нему  $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$  согласно (1.2.6). Выберем произвольно разбиение  $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i_\tau}$ , у которого  $|\tau| < \eta$ . Выберем  $i = \overline{1, i_\tau}$  и зафиксируем. Тогда для любых  $\xi', \xi'' \in [t_{i-1}, t_i]$ , ввиду неравенства  $\Delta t_i \leq |\tau| < \eta$  и условия (1.2.6) имеет место неравенство

$$\|f(\xi') - f(\xi'')\|_X \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)},$$

откуда вытекает, что

$$\text{osc}(f; [t_{i-1}, t_i]) \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Итак,

$$\text{osc}(f; [t_{i-1}, t_i]) \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad i = \overline{1, i_\tau}.$$

Поэтому

$$\sum_{i=1}^{i_\tau} \text{osc}(f; [t_{i-1}, t_i]) \Delta t_i \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{i=1}^{i_\tau} \Delta t_i = \frac{\varepsilon}{2(b-a)} (b-a) < \varepsilon.$$

Таким образом, мы доказали (1.2.5) с  $\delta(\varepsilon) = \eta(\varepsilon)$ . Следствие доказано. ■

Далее нам потребуется несколько результатов о колебаниях функций. Во всех этих результатах  $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}$  — некоторое множество.

**Лемма 1.2.2.** *Если функция  $f: \mathcal{T} \rightarrow X$  ограничена на множестве  $\mathcal{T}$ , т.е. если найдётся постоянная  $c > 0$ , такая, что при всех  $t \in \mathcal{T}$  выполнено неравенство  $\|f(t)\|_X \leq c$ , то для всех  $t \in \mathcal{T}$  выполняется неравенство*

$$\text{osc}(f; t) \leq 2c. \quad (1.2.7)$$

**Доказательство.** В самом деле, для любого  $t_0 \in \mathcal{T}$

$$\begin{aligned} \text{osc}(f; t_0) &= \inf_{r>0} \text{osc}(f; \mathcal{T} \cap (t_0 - r, t_0 + r)) = \inf_{r>0} \sup_{t', t'' \in \mathcal{T} \cap (t_0 - r, t_0 + r)} \|f(t') - f(t'')\|_X \leq \\ &\leq \inf_{r>0} \sup_{t', t'' \in \mathcal{T} \cap (t_0 - r, t_0 + r)} [\|f(t')\|_X + \|f(t'')\|_X] \leq 2c. \end{aligned}$$

Лемма доказана. ■

Для дальнейшего полезно ввести множество

$$\mathcal{T}_\varepsilon \equiv \{t \in \mathcal{T} : \text{osc}(f; t) \geq \varepsilon\}, \quad (1.2.8)$$

где  $\varepsilon > 0$  — произвольно.

Если  $\eta < \varepsilon$ , то ясно, что из неравенства  $\text{osc}(f; t) \geq \varepsilon$  следует неравенство  $\text{osc}(f; t) \geq \eta$ , и поэтому

$$\mathcal{T}_\varepsilon \subset \mathcal{T}_\eta. \quad (1.2.9)$$

**Лемма 1.2.3.** *Функция  $f: \mathcal{T} \rightarrow X$  сильно непрерывна в точке  $t \in \mathcal{T}$  тогда и только тогда, когда*

$$\text{osc}(f; t) = 0. \quad (1.2.10)$$

**Доказательство.** 1) Если функция  $f$  сильно непрерывна в точке  $t_0 \in \mathcal{T}$ , то для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta > 0$ , что для всех точек  $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \cap \mathcal{T}$  выполняется неравенство  $\|f(t) - f(t_0)\|_X < \frac{\varepsilon}{2}$ . Поэтому для любых точек  $t', t'' \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \cap \mathcal{T}$  имеем

$$\|f(t') - f(t'')\|_X \leq \|f(t') - f(t_0)\|_X + \|f(t_0) - f(t'')\|_X < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.,$$

и, следовательно,

$$\text{osc}(f; t_0) = \inf_{r>0} \text{osc}(f; \mathcal{T} \cap (t_0 - r, t_0 + r)) \leq \text{osc}(f; \mathcal{T} \cap (t_0 - \delta, t_0 + \delta)) \leq \varepsilon.$$

А так как  $\varepsilon > 0$  — произвольно, то это означает, что  $\text{osc}(f; t_0) = 0$ .

2) Наоборот, если  $\text{osc}(f; t_0) = 0$ , то для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta > 0$ , что  $\text{osc}(f; \mathcal{T} \cap (t_0 - \delta, t_0 + \delta)) < \varepsilon$ . Тогда для любого  $t \in \mathcal{T} \cap (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$  получаем, что

$$\|f(t) - f(t_0)\|_X \leq \text{osc}(f; \mathcal{T} \cap (t_0 - \delta, t_0 + \delta)) < \varepsilon,$$

т.е. функция  $f$  сильно непрерывна в точке  $t_0$ . ■

**Следствие 1.2.2.** Если  $\mathcal{T}^*$  — множество точек разрыва функции  $f: \mathcal{T} \rightarrow X$ , то

$$\mathcal{T}^* = \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{T}_{1/j}. \quad (1.2.11)$$

**Доказательство.** Если точка  $t_0 \in \mathcal{T}$  является точкой разрыва функции  $f$ , то, в силу леммы 1.2.3,  $\text{osc}(f; t_0) > 0$ , а поэтому  $t_0 \in \mathcal{T}_\varepsilon$  при  $\varepsilon = \text{osc}(f; t_0)$ . Отсюда следует, что множество  $\mathcal{T}^*$  точек разрыва функции  $f$  представимо в виде

$$\mathcal{T}^* = \bigcup_{\varepsilon > 0} \mathcal{T}_\varepsilon.$$

Ясно, что  $\bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{T}_{1/j} \subset \bigcup_{\varepsilon > 0} \mathcal{T}_\varepsilon$ , ибо каждое слагаемое левой части включения является слагаемым правой.

С другой стороны, если для данного  $\varepsilon > 0$  выбрать натуральное  $j$  так, чтобы  $\frac{1}{j} < \varepsilon$ , то, в силу включения (1.2.9), будем иметь  $\mathcal{T}_\varepsilon \subset \mathcal{T}_{1/j}$ , и, следовательно,  $\bigcup_{\varepsilon > 0} \mathcal{T}_\varepsilon \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{T}_{1/j}$ . Таким образом,

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{T}_{1/j} = \bigcup_{\varepsilon > 0} \mathcal{T}_\varepsilon = \mathcal{T}^*.$$

Следствие доказано. ■

**Лемма 1.2.4.** При любом  $\varepsilon > 0$  все точки прикосновения множества  $\mathcal{T}_\varepsilon$ , содержащиеся во множестве  $\mathcal{T}$ , содержатся и в  $\mathcal{T}_\varepsilon$ , т.е. если  $t \in (cl \mathcal{T}_\varepsilon) \cap \mathcal{T}$ , то  $t \in \mathcal{T}_\varepsilon$ .

**Доказательство.** Пусть  $\varepsilon > 0$  и  $t_0 \in (cl \mathcal{T}_\varepsilon) \cap \mathcal{T}$ . Зададим произвольно  $\eta > 0$ . В силу определения колебания функции в точке существует такой интервал  $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ , что

$$\text{osc}(f; (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \cap \mathcal{T}) < \text{osc}(f; t_0) + \eta.$$

Точка  $t_0$  является точкой прикосновения множества  $\mathcal{T}_\varepsilon$ , ввиду чего существует такая последовательность  $t_j \in \mathcal{T}_\varepsilon$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , что  $\lim_{j \rightarrow \infty} t_j = t_0$ . Следовательно, найдётся такой номер  $j_0$ , что  $t_{j_0} \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \cap \mathcal{T}_\varepsilon$ .

Согласно определению колебания функции в точке, отсюда вытекает, что

$$\text{osc}(f; (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \cap \mathcal{T}) \geq \text{osc}(f; (t_{j_0} - \delta', t_{j_0} + \delta') \cap \mathcal{T}) \geq \text{osc}(f; t_{j_0}),$$

где  $\delta' = \frac{1}{2} \min\{t_{j_0} - (t_0 - \delta), (t_0 + \delta) - t_{j_0}\}$ .

Таким образом,

$$\text{osc}(f; t_0) > \text{osc}(f; (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \cap \mathcal{T}) - \eta \geq \text{osc}(f; t_{j_0}) - \eta \geq \varepsilon - \eta,$$

так как из  $t_{j_0} \in \mathcal{T}_\varepsilon$  следует  $\text{osc}(f; t_{j_0}) \geq \varepsilon$ .

Поскольку  $\text{osc}(f; t_0) \geq \varepsilon - \eta$  при любом  $\eta > 0$ , то  $\text{osc}(f; t_0) \geq \varepsilon$ , т.е.  $t_0 \in \mathcal{T}_\varepsilon$ . ■

**Следствие 1.2.3.** Если множество  $\mathcal{T}$ , на котором задана функция  $f: \mathcal{T} \rightarrow X$ , — замкнуто, то при любом  $\varepsilon > 0$  множество  $\mathcal{T}_\varepsilon$  — также замкнуто.

**Следствие 1.2.4.** Пусть дана функция  $f: [a, b] \rightarrow X$ . Тогда при любом  $\varepsilon > 0$  множество  $([a, b])_\varepsilon$  — замкнуто и ограничено.

**Лемма 1.2.5.** Пусть задана функция  $f: [a, b] \rightarrow X$  и существует такое  $\varepsilon > 0$ , что для всех точек  $t$  отрезка  $[a, b]$  выполняется неравенство

$$\text{osc}(f; t) < \varepsilon. \quad (1.2.12)$$

Тогда существует такое разбиение  $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i=i_\tau}$  отрезка  $[a, b]$ , что для всех  $i = \overline{1, i_\tau}$  имеет место неравенство

$$\text{osc}(f; [t_{i-1}, t_i]) < \varepsilon. \quad (1.2.13)$$

**Доказательство.** В силу выполнения условия (1.2.12) для любой точки  $\xi \in [a, b]$  существует такой интервал  $(\xi - r_\xi, \xi + r_\xi)$ , что

$$\text{osc}(f; (\xi - r_\xi, \xi + r_\xi) \cap [a, b]) < \varepsilon. \quad (1.2.14)$$

Система интервалов

$$(\xi - r_\xi, \xi + r_\xi), \quad \xi \in [a, b], \quad (1.2.15)$$

образует покрытие отрезка  $[a, b]$ , и если

$$\Delta_\xi \equiv [\xi - \frac{1}{2}r_\xi, \xi + \frac{1}{2}r_\xi] \cap [a, b], \quad (1.2.16)$$

то

$$\text{osc}(f; \Delta_\xi) \leq \text{osc}(f; (\xi - r_\xi, \xi + r_\xi) \cap [a, b]) < \varepsilon.$$

Выделим, согласно лемме Гейне–Бореля, из покрытия (1.2.15) конечное подпокрытие

$$(\xi_1 - r_{\xi_1}, \xi_1 + r_{\xi_1}), \dots, (\xi_m - r_{\xi_m}, \xi_m + r_{\xi_m})$$

и обозначим концы промежутков

$$(\xi_j - r_{\xi_j}, \xi_j + r_{\xi_j}) \cap [a, b]$$

через  $\alpha_j$  и  $\beta_j$ ,  $j = \overline{1, m}$ .

Пусть  $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i=i_\tau}$  — разбиение отрезка  $[a, b]$ , состоящее из всех точек  $\alpha_j, \beta_j$ ,  $j = \overline{1, m}$ . Каждый отрезок  $[t_{i-1}, t_i]$  этого разбиения имеет одну из следующих форм:  $[\alpha_j, \beta_j]$ ,  $[\alpha_j, \alpha_k]$ ,  $[\beta_j, \alpha_k]$ ,  $[\beta_j, \beta_k]$ ,  $j, k = \overline{1, m}$ , и целиком содержится в одном из отрезков  $\Delta_{\xi_1}, \Delta_{\xi_m}$  (см. (1.2.16)). Иначе говоря, для каждого отрезка  $[t_{i-1}, t_i]$  существует такой отрезок  $\Delta_{\xi_{j_i}}$ ,  $1 \leq j_i \leq m$ , что  $[t_{i-1}, t_i] \subset \Delta_{\xi_{j_i}}$ . Поэтому

$$\text{osc}(f; [t_{i-1}, t_i]) \leq \text{osc}(f; \Delta_{\xi_{j_i}}) < \varepsilon.$$

Лемма доказана. ■

**Следствие 1.2.5.** В условиях леммы 1.2.5

$$\sum_{i=1}^{i_\tau} \text{osc}(f; [t_{i-1}, t_i]) \Delta t_i < \varepsilon(b-a). \quad (1.2.17)$$

**Теорема 1.2.5.** (Дю Буа–Реймон) Для интегрируемости ограниченной на отрезке  $[a, b]$  функции  $f: [a, b] \rightarrow X$  достаточно, чтобы для любого  $\varepsilon > 0$  и любого  $\delta > 0$  множество всех точек  $t \in [a, b]$ , в которых  $\text{osc}(f; t) \geq \varepsilon$ , можно было покрыть конечной системой интервалов с суммой длин, меньшей  $\delta$ .

**Доказательство.** Пусть для любых чисел  $\varepsilon > 0$  и  $\delta > 0$  множество  $\mathcal{T}_\varepsilon = [a, b]_\varepsilon$  можно покрыть конечной системой интервалов, сумма длин которых меньше  $\delta > 0$ . Функция  $f$  ограничена на отрезке  $[a, b]$ , поэтому существует такая постоянная  $c > 0$ , что

$$\|f(t)\|_X \leq c \quad \forall t \in [a, b]. \quad (1.2.18)$$

Зададим произвольно  $\varepsilon > 0$  и возьмём  $\delta = \frac{\varepsilon}{4c}$ . Существует конечная система интервалов  $(\alpha_i, \beta_i)$ ,  $i = \overline{1, p}$ , покрывающая множество  $\mathcal{T}_{\frac{\varepsilon}{2(b-a)}}$ , с суммой длин, меньшей  $\frac{\varepsilon}{4c}$ :

$$\mathcal{T}_{\frac{\varepsilon}{2(b-a)}} \subset \bigcup_{i=1}^p (\alpha_i, \beta_i), \quad (1.2.19)$$

$$\sum_{i=1}^p (\beta_i - \alpha_i) < \frac{\varepsilon}{4c}. \quad (1.2.20)$$

Объединение всех соответствующих отрезков  $[\alpha_i, \beta_i]$ ,  $i = \overline{1, p}$ , можно представить в виде объединения конечного множества отрезков  $[\lambda_l, \mu_l]$ ,  $l = \overline{1, m}$ , с непересекающимися попарно внутренностями и с концами  $\lambda_l, \mu_l$ , равными либо  $\alpha_i$ , либо  $\beta_i$ , либо  $a$ , либо  $b$ . Тогда в силу (1.2.20)

$$\sum_{l=1}^m (\mu_l - \lambda_l) = \sum_{i=1}^p (\beta_i - \alpha_i) < \frac{\varepsilon}{4c}.$$

Так как ввиду (1.2.18)

$$\text{osc}(f; [\lambda_l, \mu_l]) < 2c,$$

то

$$\sum_{l=1}^m \text{osc}(f; [\lambda_l, \mu_l])(\mu_l - \lambda_l) < 2c \sum_{l=1}^m (\mu_l - \lambda_l) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Удалим из отрезка  $[a, b]$  все точки, принадлежащие отрезкам  $[\alpha_i, \beta_i]$ ,  $i = \overline{1, p}$ . Оставшееся множество представляет собой объединение конечного множества промежутков с концами  $\xi_j$  и  $\eta_j$ ,  $\xi_j < \eta_j$ ,  $j = \overline{1, r}$ , среди которых может быть не более двух полуинтервалов с концами  $\xi_j = a$  или  $\eta_j = b$ , а все остальные являются интервалами. При этом, согласно включению (1.2.19), пересечение каждого из отрезков  $[\xi_j, \eta_j]$  с множеством  $\mathcal{T}_{\frac{\varepsilon}{2(b-a)}}$  пусто. Следовательно, в любой точке  $t \in [\xi_j, \eta_j]$ ,  $j = \overline{1, r}$ , выполняется неравенство

$$\text{osc}(f; t) < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Ясно также, что  $\sum_{j=1}^r (\eta_j - \xi_j) \leq b - a$ . Отсюда, в силу следствия 1.2.5, вытекает, что для

каждого отрезка  $[\xi_j, \eta_j]$  существует такое его разбиение  $\tau_j = \{\zeta_{k_j}\}_{k_j=0}^{k_j=k_{\tau_j}}$ , что

$$\sum_{k_j=1}^{k_{\tau_j}} \text{osc}(f; [\zeta_{k_j-1}, \zeta_{k_j}])(\zeta_{k_j} - \zeta_{k_j-1}) < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(\eta_j - \xi_j).$$

Пусть теперь  $\tau = \{\tau_\nu\}_{\nu=0}^{\nu=\nu_\tau}$  — разбиение всего отрезка  $[a, b]$ , состоящее из всех точек  $\lambda_l, \mu_l$ ,  $l = \overline{1, m}$ , и точек  $\zeta_{k_j}$ ,  $k_j = \overline{1, k_{\tau_j}}$ ,  $j = \overline{1, r}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{\nu_\tau} \text{osc}(f; [t_{\nu-1}, t_\nu]) \Delta t_\nu &= \sum_{l=1}^m \text{osc}(f; [\lambda_l, \mu_l])(\mu_l - \lambda_l) + \sum_{j=1}^r \sum_{k_j=1}^{k_{\tau_j}} \text{osc}(f; [\zeta_{k_j-1}, \zeta_{k_j}])(\zeta_{k_j} - \zeta_{k_j-1}) < \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{j=1}^r (\eta_j - \xi_j) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Согласно теореме 1.2.4 это означает, что функция  $f$  интегрируема на отрезке  $[a, b]$ . ■

**Теорема 1.2.6.** (Лебег) Для интегрируемости ограниченной на отрезке  $[a, b]$  функции  $f: [a, b] \rightarrow X$  достаточно, чтобы множество её точек разрыва было множеством лебеговой меры нуль.

**Доказательство.** Пусть множество  $\mathcal{T}^*$  точек разрыва функции  $f$ , ограниченной на отрезке  $\mathcal{T} = [a, b]$ , является множеством лебеговой меры нуль. Зададим произвольно  $\varepsilon > 0$  и  $\delta > 0$ . Тогда существует не более чем счётная система интервалов, покрывающая множество  $\mathcal{T}^*$ , с суммой длин интервалов, меньшей  $\delta$ . Выберем натуральное число  $j$  так, чтобы  $\frac{1}{j} < \varepsilon$ . Указанная выше система интервалов, являясь покрытием

множества  $\mathcal{T}^*$ , покрывает, в силу формулы  $\mathcal{T}^* = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{T}_{1/k}$  (см. (1.2.11)), множество  $\mathcal{T}_{1/j}$ , а следовательно,

и множество  $\mathcal{T}_\varepsilon$ , ибо  $\mathcal{T}_\varepsilon \subset \mathcal{T}_{1/j}$  (см. (1.2.9)). Множество  $\mathcal{T}_\varepsilon$  является ограниченным замкнутым множеством (см. следствие 1.2.4). Поэтому, согласно лемме Гейне–Бореля, из рассматриваемой системы покрывающих его интервалов можно выделить конечную систему интервалов, по-прежнему покрывающих множество  $\mathcal{T}_\varepsilon$ , причём сумма длин входящих в неё интервалов (она не превосходит суммы длин всех интервалов исходной системы, покрывающей множество  $\mathcal{T}^*$ ) меньше  $\delta$ . В силу теоремы 1.2.5 отсюда следует интегрируемость функции  $f$ . ■

### 1.2.2. Свойства интеграла

**Теорема 1.2.7.** Если  $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  — скалярная интегрируемая (в смысле Римана) на отрезке  $[a, b]$  функция, а  $x_0 \in X$ , то функция  $[0, T] \ni t \mapsto x_0 \varphi(t)$  — интегрируема на отрезке  $[a, b]$ , и

$$\int_a^b x_0 \varphi(t) dt = x_0 \int_a^b \varphi(t) dt.$$

**Доказательство.** Положим  $f(t) = x_0 \varphi(t)$ ,  $t \in [a, b]$ . Далее, пусть  $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i=i_\tau}$  — некоторое разбиение отрезка  $[a, b]$ , и пусть точки  $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$ ,  $i = \overline{1, i_\tau}$ , — произвольны. Тогда

$$\sigma_\tau(f; \xi_1, \dots, \xi_{i_\tau}) = \sum_{i=1}^{i_\tau} f(\xi_i) \Delta t_i = \sum_{i=1}^{i_\tau} x_0 \varphi(\xi_i) \Delta t_i = x_0 \sum_{i=1}^{i_\tau} \varphi(\xi_i) \Delta t_i = x_0 \sigma_\tau(\varphi; \xi_1, \dots, \xi_{i_\tau}),$$

то есть

$$\sigma_\tau(f; \xi_1, \dots, \xi_{i_\tau}) = x_0 \sigma_\tau(\varphi; \xi_1, \dots, \xi_{i_\tau}).$$

Поскольку функция  $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  — интегрируема (в смысле Римана) на отрезке  $[a, b]$ , то существует предел интегральных сумм  $\sigma_\tau(\varphi; \xi_1, \dots, \xi_{i_\tau})$  при  $|\tau| \rightarrow 0$ , в силу чего существует и предел интегральных сумм  $\sigma_\tau(f; \xi_1, \dots, \xi_{i_\tau})$  при  $|\tau| \rightarrow 0$ . Переходя затем к пределу при  $|\tau| \rightarrow 0$ , получаем требуемое равенство. ■

**Теорема 1.2.8.** Если функция  $f: [a, b] \rightarrow X$  интегрируема на отрезке  $[a, b]$ , а  $k \in \mathbb{R}$  — константа, то функция  $kf$  также интегрируема по отрезку  $[a, b]$ , причём

$$\int_a^b kf(t)dt = k \int_a^b f(t)dt$$

**Доказательство.** Действительно, для любого разбиения  $\tau$  справедливо равенство  $\sigma_\tau(kf) = k\sigma_\tau(f)$ , откуда и следует утверждение теоремы. ■

**Теорема 1.2.9.** Если функции  $f: [a, b] \rightarrow X$  и  $g: [a, b] \rightarrow X$  интегрируемы на отрезке  $[a, b]$ , то функция  $f + g$  также интегрируема по отрезку  $[a, b]$ , причём

$$\int_a^b [f(t) + g(t)]dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt.$$

**Доказательство.** В самом деле, для любого разбиения  $\tau$  имеет место равенство  $\sigma_\tau(f + g) = \sigma_\tau(f) + \sigma_\tau(g)$ , откуда и следует утверждение теоремы. ■

**Теорема 1.2.10.** Если функция  $f: [a, b] \rightarrow X$  п.в. на отрезке  $[a, b]$  сильно непрерывна и ограничена на этом отрезке, то для всякого  $c \in (a, b)$  она интегрируема по отрезкам  $[a, c]$  и  $[c, b]$ , причём

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

**Доказательство.** Пусть  $\tau_1$  — разбиение отрезка  $[a, c]$ ,  $\tau_2$  — разбиение отрезка  $[c, b]$ , а  $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$  — разбиение отрезка  $[a, b]$ . Тогда  $\sigma_\tau(f) = \sigma_{\tau_1}(f) + \sigma_{\tau_2}(f)$ . Если  $|\tau_1| \rightarrow 0$  и  $|\tau_2| \rightarrow 0$ , то и  $|\tau| \rightarrow 0$ , и в пределе получаем нужное равенство. ■

**Теорема 1.2.11.** Если функция  $f: [a, b] \rightarrow X$  п.в. на отрезке  $[a, b]$  сильно непрерывна и ограничена на этом отрезке, то функция  $[a, b] \ni t \mapsto \|f(t)\|_X$  интегрируема в смысле Римана по отрезку  $[a, b]$ , причём

$$\left\| \int_a^b f(t)dt \right\|_X \leq \int_a^b \|f(t)\|_X dt.$$

**Доказательство.** Поскольку функция  $f: [a, b] \rightarrow X$  п.в. на отрезке  $[a, b]$  сильно непрерывна и ограничена на этом отрезке, то функция  $g(t) = \|f(t)\|_X$ ,  $t \in [a, b]$ , непрерывна п.в. на отрезке  $[a, b]$  и ограничена на этом отрезке, и, как следствие, в силу критерия Лебега интегрируемости числовых функций, интегрируема по Риману на отрезке  $[a, b]$ . Для завершения доказательства осталось заметить, что для любого разбиения  $\tau$  имеет место соотношение  $\|\sigma_\tau(f)\|_X \leq \sigma_\tau(g)$ . ■

**Теорема 1.2.12.** Пусть для элементов пространства  $X$  определено умножение справа на элементы банахова пространства  $Y$ . Тогда если функция  $f: [a, b] \rightarrow X$  интегрируема на отрезке  $[a, b]$ , а  $y \in Y$  — константа, то функция  $[a, b] \ni t \mapsto f(t) \bullet y$  также интегрируема по отрезку  $[a, b]$ , причём

$$\int_a^b [f(t) \bullet y]dt = \left[ \int_a^b f(t)dt \right] \bullet y.$$

**Доказательство.** Положим  $g(t) = f(t) \bullet y$ ,  $t \in [a, b]$ . Далее, пусть  $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i_\tau}$  — некоторое разбиение отрезка  $[a, b]$ , и пусть точки  $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$ ,  $i = \overline{1, i_\tau}$ , — произвольны. Тогда

$$\sigma_\tau(g; \xi_1, \dots, \xi_{i_\tau}) = \sum_{i=1}^{i_\tau} [f(\xi_i) \bullet y] \Delta t_i = \left[ \sum_{i=1}^{i_\tau} f(\xi_i) \Delta t_i \right] \bullet y = \sigma_\tau(f; \xi_1, \dots, \xi_{i_\tau}) \bullet y,$$

то есть

$$\sigma_\tau(g; \xi_1, \dots, \xi_{i_\tau}) = \sigma_\tau(f; \xi_1, \dots, \xi_{i_\tau}) \bullet y.$$

Поскольку функция  $f: [a, b] \rightarrow X$  — интегрируема (в смысле Римана) на отрезке  $[a, b]$ , то существует предел интегральных сумм  $\sigma_\tau(f; \xi_1, \dots, \xi_{i_\tau})$  при  $|\tau| \rightarrow 0$ , в силу чего существует и предел интегральных сумм  $\sigma_\tau(g; \xi_1, \dots, \xi_{i_\tau})$  при  $|\tau| \rightarrow 0$ . Переходя затем к пределу при  $|\tau| \rightarrow 0$ , получаем требуемое равенство. ■

**Теорема 1.2.13.** Пусть для элементов пространства  $X$  определено умножение слева на элементы банахова пространства  $Z$ . Тогда если функция  $f: [a, b] \rightarrow X$  интегрируема на отрезке  $[a, b]$ , а  $z \in Z$  — константа, то функция  $[a, b] \ni t \mapsto z \bullet f(t)$  также интегрируема по отрезку  $[a, b]$ , причём

$$\int_a^b [z \bullet f(t)] dt = z \bullet \left[ \int_a^b f(t) dt \right].$$

**Доказательство.** Положим  $g(t) = z \bullet f(t)$ ,  $t \in [a, b]$ . Далее, пусть  $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i_\tau}$  — некоторое разбиение отрезка  $[a, b]$ , и пусть точки  $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$ ,  $i = \overline{1, i_\tau}$ , — произвольны. Тогда

$$\sigma_\tau(g; \xi_1, \dots, \xi_{i_\tau}) = \sum_{i=1}^{i_\tau} [z \bullet f(\xi_i)] \Delta t_i = z \bullet \left[ \sum_{i=1}^{i_\tau} f(\xi_i) \Delta t_i \right] = z \bullet \sigma_\tau(f; \xi_1, \dots, \xi_{i_\tau}),$$

то есть

$$\sigma_\tau(g; \xi_1, \dots, \xi_{i_\tau}) = z \bullet \sigma_\tau(f; \xi_1, \dots, \xi_{i_\tau}).$$

Поскольку функция  $f: [a, b] \rightarrow X$  — интегрируема (в смысле Римана) на отрезке  $[a, b]$ , то существует предел интегральных сумм  $\sigma_\tau(f; \xi_1, \dots, \xi_{i_\tau})$  при  $|\tau| \rightarrow 0$ , в силу чего существует и предел интегральных сумм  $\sigma_\tau(g; \xi_1, \dots, \xi_{i_\tau})$  при  $|\tau| \rightarrow 0$ . Переходя затем к пределу при  $|\tau| \rightarrow 0$ , получаем требуемое равенство. ■

**Теорема 1.2.14.** Пусть функция  $f: [a, b] \rightarrow X$  ограничена на отрезке  $[a, b]$  и п.в. на этом отрезке сильно непрерывна. Пусть  $g(t) = \int_a^t f(p) dp$ ,  $t \in [a, b]$ . Тогда функция  $g$  сильно непрерывна в каждой точке отрезка  $[a, b]$ .

**Доказательство.** Поскольку функция  $f$  ограничена на отрезке  $[a, b]$ , то найдётся постоянная  $c > 0$ , такая, что

$$\|f(t)\|_X \leq c \quad \forall t \in [a, b].$$

Поэтому для любого  $t_0 \in [a, b]$  и для всех  $\Delta t$ ,  $|\Delta t| \leq \min\{t_0 - a, b - t_0\}$

$$\|g(t_0 + \Delta t) - g(t_0)\|_X = \left\| \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} f(p) dp \right\|_X \leq \left| \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \|f(p)\|_X dp \right| \leq c |\Delta t|,$$

ввиду чего

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \|g(t_0 + \Delta t) - g(t_0)\|_X = 0.$$

Как следствие, функция  $g$  сильно непрерывна в точке  $t_0 \in [a, b]$ . Так как точка  $t_0 \in [a, b]$  выбрана произвольно, то функция  $g$  сильно непрерывна в каждой точке отрезка  $[a, b]$ . Теорема доказана. ■

**Теорема 1.2.15.** Пусть функция  $f: [a, b] \rightarrow X$  ограничена на отрезке  $[a, b]$  и п.в. на этом отрезке сильно непрерывна. Пусть  $g(t) = \int_a^t f(p) dp$ ,  $t \in [a, b]$ . Тогда в точке  $t_0 \in [a, b]$  сильной непрерывности функции  $f$  функция  $g$  сильно дифференцируема, и  $g'(t_0) = f(t_0)$ .

**Доказательство.** Так как функция  $f$  сильно непрерывна в точке  $t_0 \in [a, b]$ , то

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \forall p \in [a, b], \quad |p - t_0| < \delta : \|f(p) - f(t_0)\|_X < \varepsilon. \quad (1.2.21)$$

Кроме того,

$$\left\| \frac{g(t_0 + \Delta t) - g(t_0)}{\Delta t} - f(t_0) \right\|_X \leq \frac{1}{|\Delta t|} \left| \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \|f(p) - f(t_0)\|_X dp \right|. \quad (1.2.22)$$

Выберем произвольно  $\varepsilon > 0$  и подберём по нему  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  согласно (1.2.21), и пусть  $0 < |\Delta t| < \delta$ . Тогда, согласно (1.2.21), для всех  $p$ , лежащих между  $t_0$  и  $t_0 + \Delta t$ , имеем

$$\|f(p) - f(t_0)\|_X \leq \varepsilon,$$

ввиду чего

$$\left| \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \|f(p) - f(t_0)\|_X dp \right| \leq \varepsilon |\Delta t|.$$

Подставляя последнее неравенство в соотношение (1.2.22), заключаем, что

$$\left\| \frac{g(t_0 + \Delta t) - g(t_0)}{\Delta t} - f(t_0) \right\|_X \leq \varepsilon. \quad (1.2.23)$$

Иными словами, для любого  $\varepsilon > 0$  можно подобрать (согласно (1.2.21))  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  так, чтобы при всех  $0 < |\Delta t| < \delta$  выполнялось неравенство (1.2.23). А это и означает, что функция  $g$  сильно дифференцируема в точке  $t_0$ , и выполнено равенство  $g'(t_0) = f(t_0)$ . ■

**Следствие 1.2.6.** Если функция  $f: [a, b] \rightarrow X$  сильно непрерывна в каждой точке отрезка  $[a, b]$ , то функция

$$g(t) = \int_a^t f(p) dp, \quad t \in [a, b],$$

сильно непрерывно дифференцируема на отрезке  $[a, b]$ .

**Теорема 1.2.16.** Пусть функция  $f: [a, b] \rightarrow X$  сильно дифференцируема во всех точках отрезка  $[a, b]$ , а производная  $f': [a, b] \rightarrow X$  интегрируема в смысле Римана по отрезку  $[a, b]$ . Тогда справедлива формула Ньютона–Лейбница

$$\int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a).$$

**Доказательство.** Для элементов пространства  $X$  определено умножение справа на элементы сопряжённого пространства  $X^*$ . Поэтому для любого  $x^* \in X^*$

$$\left\langle \int_a^b f'(t) dt, x^* \right\rangle = \int_a^b \langle f'(t), x^* \rangle dt = \int_a^b \frac{d}{dt} \langle f(t), x^* \rangle dt = \langle f(t), x^* \rangle \Big|_a^b = \langle f(b) - f(a), x^* \rangle,$$

поскольку для скалярных функций формула Ньютона–Лейбница имеет место. Следовательно,  $\langle z, x^* \rangle = 0$  для любого  $x^* \in X^*$ , где  $z = \int_a^b f'(t) dt - f(b) + f(a)$ . Это возможно только при  $z = 0$ , что и требовалось доказать. ■

**Теорема 1.2.17.** Пусть  $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$  — непрерывно дифференцируемое строго монотонное отображение отрезка  $\alpha \leq p \leq \beta$  в отрезок  $a \leq t \leq b$ , с соответствием концов  $\varphi(\alpha) = a$ ,  $\varphi(\beta) = b$  или  $\varphi(\alpha) = b$ ,  $\varphi(\beta) = a$ . Тогда при любой функции  $f: [a, b] \rightarrow X$ , интегрируемой в смысле Римана на отрезке  $[a, b]$ , функция  $g(p) \equiv f(\varphi(p))\varphi'(p)$ ,  $p \in [\alpha, \beta]$ , интегрируема на отрезке  $[\alpha, \beta]$  и справедливо равенство

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(p))\varphi'(p) dp. \quad (1.2.24)$$

**Доказательство.** Поскольку  $\varphi$  — строго монотонное отображение отрезка  $[\alpha, \beta]$  на отрезок  $[a, b]$  с соответствием концов, то любое разбиение  $\tau_p = \{p_i\}_{i=0}^m$  отрезка  $[\alpha, \beta]$  посредством образов  $t_i = \varphi(p_i)$ ,  $i = \overline{0, m}$ , точек разбиения  $\tau_p$  порождает разбиение  $\tau_t$  отрезка  $[a, b]$ , которое можно условно обозначить  $\varphi(\tau_p)$ . При этом  $t_0 = a$ , если  $\varphi(\alpha) = a$ , и  $t_0 = b$ , если  $\varphi(\alpha) = b$ . Из равномерной непрерывности функции  $\varphi$  на отрезке  $[\alpha, \beta]$  следует, что если  $|\tau_p| \rightarrow 0$ , то величина  $|\tau_t|$  также стремится к нулю. Произвольно выберем отмеченные точки  $\xi_i$ ,  $i = \overline{1, m}$ , разбиения  $\tau_t$ .



Используя теорему Лагранжа, преобразуем интегральную сумму  $\sigma_{\tau_t}(f; \xi_1, \dots, \xi_m)$  следующим образом:

$$\sum_{i=1}^m f(\xi_i) \Delta t_i = \sum_{i=1}^m f(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^m f(\varphi(\eta_i)) \varphi'(\bar{\eta}_i)(p_i - p_{i-1}) = \sum_{i=1}^m f(\varphi(\eta_i)) \varphi'(\bar{\eta}_i) \Delta p_i.$$

Здесь  $t_i = \varphi(p_i)$ ,  $\xi_i = \varphi(\eta_i)$ ,  $\xi_i$  лежит на отрезке с концами  $t_{i-1}$  и  $t_i$ , а точки  $\eta_i$  и  $\bar{\eta}_i$  лежат на отрезке с концами  $p_{i-1}$  и  $p_i$ .

Далее,

$$\sum_{i=1}^m f(\varphi(\eta_i)) \varphi'(\bar{\eta}_i) \Delta p_i = \sum_{i=1}^m f(\varphi(\eta_i)) \varphi'(\eta_i) \Delta p_i + \sum_{i=1}^m f(\varphi(\eta_i)) [\varphi'(\bar{\eta}_i) - \varphi'(\eta_i)] \Delta p_i.$$

Оценим последнюю сумму. Поскольку функция  $f$  интегрируема в смысле Римана на отрезке  $[a, b]$ , то она ограничена на этом отрезке, т.е. найдётся постоянная  $c > 0$ , такая, что  $\|f(t)\|_X \leq c$  для всех  $t \in [a, b]$ . Поэтому

$$\left\| \sum_{i=1}^m f(\varphi(\eta_i)) [\varphi'(\bar{\eta}_i) - \varphi'(\eta_i)] \Delta p_i \right\|_X \leq c \sum_{i=1}^m \text{osc}(\varphi'; \Delta_i) \Delta p_i,$$

где  $\Delta_i$  — отрезок с концами  $p_{i-1}$  и  $p_i$ .

Последняя сумма стремится к нулю при  $|\tau_p| \rightarrow 0$ , поскольку  $\varphi'$  — непрерывная на отрезке  $[\alpha, \beta]$  вещественнозначная функция.

Таким образом, мы показали, что

$$\sum_{i=1}^m f(\xi_i) \Delta t_i = \sum_{i=1}^m f(\varphi(\eta_i)) \varphi'(\eta_i) \Delta p_i + \gamma,$$

где  $\gamma \rightarrow 0$  при  $|\tau_p| \rightarrow 0$ . Как уже отмечалось, если  $|\tau_p| \rightarrow 0$ , то и  $|\tau_t| \rightarrow 0$ . Так как функция  $f$  интегрируема в смысле Римана на отрезке  $[a, b]$ , то при  $|\tau_t| \rightarrow 0$  сумма в левой части последнего равенства стремится к интегралу  $\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t) dt$ . Значит, при  $|\tau_p| \rightarrow 0$  и сумма в правой части этого равенства имеет (и притом тот же) предел.

Но сумму  $\sum_{i=1}^m f(\varphi(\eta_i)) \varphi'(\eta_i) \Delta p_i$  можно считать совершенно произвольной интегральной суммой функции  $g$ , соответствующей разбиению  $\tau_p$ , с отмеченными точками  $\eta_1, \dots, \eta_m$ , поскольку, ввиду строгой монотонности функции  $\varphi$ , любой набор точек  $\eta_1, \dots, \eta_m$  можно получить из некоторого соответствующего ему набора  $\xi_1, \dots, \xi_m$  отмеченных точек разбиения  $\tau_t = \varphi(\tau_p)$ .

Таким образом, предел этой суммы есть, по определению, интеграл от функции  $g$  по отрезку  $[\alpha, \beta]$ , и мы доказали одновременно как интегрируемость функции  $g$ , так и формулу (1.2.24). ■

**Теорема 1.2.18.** Пусть для элементов банахова пространства  $X$  определено умножение справа на элементы банахова пространства  $Y$ . Пусть, кроме того, функции  $f: [a, b] \rightarrow X$  и  $g: [a, b] \rightarrow Y$  сильно дифференцируемы всюду на отрезке  $[a, b]$ , а функции  $f'$  и  $g'$  ограничены на отрезке  $[a, b]$  и почти всюду на этом отрезке сильно непрерывны. Тогда

$$\int_a^b [f(t) \bullet g'(t)] dt = [f(t) \bullet g(t)]_a^b - \int_a^b [f'(t) \bullet g(t)] dt.$$

**Доказательство.** Поскольку функции  $f$  и  $g$  сильно дифференцируемы всюду на отрезке  $[a, b]$ , то функция  $h(t) \equiv f(t) \bullet g(t)$ ,  $t \in [a, b]$ , при всех  $t \in [a, b]$  сильно дифференцируема, причём

$$\frac{dh(t)}{dt} = f'(t) \bullet g(t) + f(t) \bullet g'(t), \quad t \in [a, b].$$

В силу данной формулы и условий на функции  $f, g, f', g'$  получаем, что функция  $h'$  ограничена на отрезке  $[a, b]$  и почти всюду на этом отрезке сильно непрерывна, ввиду чего функция  $h'$  интегрируема в смысле Римана по отрезку  $[a, b]$ . Поэтому применима формула Ньютона–Лейбница, согласно которой

$$\int_a^b h'(t) dt = h(t)|_a^b.$$

Подставляя сюда выражение для функции  $h$ , будем иметь

$$\begin{aligned} \int_a^b [f'(t) \bullet g(t) + f(t) \bullet g'(t)] dt &= [f(t) \bullet g(t)]_a^b, \quad \int_a^b [f'(t) \bullet g(t)] dt + \int_a^b [f(t) \bullet g'(t)] dt = [f(t) \bullet g(t)]_a^b, \\ \int_a^b [f(t) \bullet g'(t)] dt &= [f(t) \bullet g(t)]_a^b - \int_a^b [f'(t) \bullet g(t)] dt. \end{aligned}$$

Теорема доказана. ■

### 1.3. Интеграл Бохнера

Материал настоящего раздела взят из [33, глава V, с.187–194] и [64]. Всюду в данном разделе  $X$  — сепарабельное банахово пространство с нормой  $\|\cdot\|_X$ .

#### 1.3.1. Определение интеграла Бохнера

Дадим следующее определение.

**Определение 1.3.1.** Пусть  $(\mathfrak{S}, \mathfrak{B}, \mu)$  — положительное пространство с мерой, и пусть  $f : \mathfrak{S} \rightarrow X$  — некоторое отображение.

Это отображение называется **слабо  $\mathfrak{B}$ -измеримым**, если для любого элемента  $x^* \in X^*$  числовая функция  $\mathfrak{S} \ni \mathfrak{s} \mapsto \langle f(\mathfrak{s}), x^* \rangle$  является  $\mathfrak{B}$ -измеримой.

Отображение  $f$  называется **простым**, если оно принимает постоянные отличные от нуля значения на каждом из множеств  $B_j$ , образующих конечную систему непересекающихся  $\mathfrak{B}$ -измеримых множеств, причём  $\mu(B_j) < +\infty$  и  $f(\mathfrak{s}) = 0$  для  $\mathfrak{s} \in \mathfrak{S} \setminus \bigcup_j B_j$ .

Отображение  $f$  называется **сильно  $\mathfrak{B}$ -измеримым**, если существует последовательность простых отображений  $f_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , такая, что  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|f_k(\mathfrak{s}) - f(\mathfrak{s})\|_X = 0$  при  $\mu$ -п.в.  $\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}$ .

**Теорема 1.3.1.** (Петтис) Для того, чтобы функция  $f : \mathfrak{S} \rightarrow X$  была сильно  $\mathfrak{B}$ -измеримой, необходимо и достаточно, чтобы она была слабо  $\mathfrak{B}$ -измеримой.

Пусть на пространстве с мерой  $(\mathfrak{S}, \mathfrak{B}, \mu)$  задана простая функция  $f$ , принимающая значения в пространстве  $X$ . Пусть  $f$  принимает значения  $x_i \neq 0$ ,  $i = \overline{1, r}$ , на множествах  $B_i \in \mathfrak{B}_i$ ,  $i = \overline{1, r}$ , соответственно, все множества  $B_i$  попарно не пересекаются и  $\mu(B_i)$ ,  $i = \overline{1, r}$ . Пусть, кроме того,  $f(\mathfrak{s}) = 0$  для  $\mathfrak{s} \in \mathfrak{S} \setminus \bigcup_{j=1}^r B_j$ .

Тогда **интегралом (Бохнера) функции  $f$  по множеству  $\mathfrak{S}$**  называется сумма  $\sum_{j=1}^r x_j \mu(B_j)$ , и эта сумма обозначается через  $(B) \int_{\mathfrak{S}} f(\mathfrak{s}) \mu(d\mathfrak{s})$  или через  $\int_{\mathfrak{S}} f(\mathfrak{s}) \mu(d\mathfrak{s})$ .

**Определение 1.3.2.** Функция  $f : \mathfrak{S} \rightarrow X$ , называется  $\mu$ -**интегрируемой по Бохнеру**, если существует последовательность простых функций  $f_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , сильно сходящаяся к  $f$  при  $\mu$ -п.в.  $\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}$ , и такая, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathfrak{S}} \|f_k(\mathfrak{s}) - f(\mathfrak{s})\|_X \mu(d\mathfrak{s}) = 0. \quad (1.3.1)$$

Тогда предел

$$\lim_{k \rightarrow \infty}^X \left[ (B) \int_{\mathfrak{S}} f_k(\mathfrak{s}) \mu(d\mathfrak{s}) \right] \quad (1.3.2)$$

называется **интегралом (Бохнера) функции  $f$  по множеству  $\mathfrak{S}$**  и обозначается либо как  $\int_{\mathfrak{S}} f(\mathfrak{s}) \mu(d\mathfrak{s})$ , либо как  $(B) \int_{\mathfrak{S}} f(\mathfrak{s}) \mu(d\mathfrak{s})$ .

При этом для любого  $B \in \mathfrak{B}$  по определению положим

$$(B) \int_B f(\mathfrak{s}) \mu(d\mathfrak{s}) = \lim_{k \rightarrow \infty}^X \left[ (B) \int_{\mathfrak{S}} \chi_B(\mathfrak{s}) f_k(\mathfrak{s}) \mu(d\mathfrak{s}) \right], \quad (1.3.3)$$

где  $\chi_B$  — характеристическая функция множества  $B$ .

**Теорема 1.3.2.** *Определение интеграла Бохнера корректно.*

**Доказательство.** Так как функция  $f$  сильно  $\mathfrak{B}$ -измерима, то условие (1.3.1) имеет смысл.

Покажем, что предел (1.3.3) существует. В самом деле, при всех  $k, j \geq 1$

$$\begin{aligned} \left\| (\mathfrak{B}) \int_{\mathfrak{S}} \chi_B(\mathfrak{s}) f_k(\mathfrak{s}) \mu(d\mathfrak{s}) - (\mathfrak{B}) \int_{\mathfrak{S}} \chi_B(\mathfrak{s}) f_j(\mathfrak{s}) \mu(d\mathfrak{s}) \right\|_X &= \left\| (\mathfrak{B}) \int_{\mathfrak{S}} \chi_B(\mathfrak{s}) [f_k(\mathfrak{s}) - f_j(\mathfrak{s})] \mu(d\mathfrak{s}) \right\|_X \leq \\ &\leq \int_B \|f_k(\mathfrak{s}) - f_j(\mathfrak{s})\|_X \mu(d\mathfrak{s}) \leq \int_B \|f_k(\mathfrak{s}) - f(\mathfrak{s})\|_X \mu(d\mathfrak{s}) + \int_B \|f(\mathfrak{s}) - f_j(\mathfrak{s})\|_X \mu(d\mathfrak{s}). \end{aligned}$$

В силу условия (1.3.1) отсюда вытекает фундаментальность последовательности

$$\int_{\mathfrak{S}} \chi_B(\mathfrak{s}) f_k(\mathfrak{s}) \mu(d\mathfrak{s}), \quad k = 1, 2, \dots,$$

в норме пространства  $X$ . Поскольку же  $X$  полно, то у этой последовательности существует предел. Иными словами, предел (1.3.3) существует.

Докажем теперь, что этот предел не зависит от выбора последовательности  $f_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . В самом деле, пусть  $f'_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , и  $f''_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , — две последовательности из определения интеграла, и пусть

$$\lim_{k \rightarrow \infty}^X \left[ (\mathfrak{B}) \int_{\mathfrak{S}} \chi_B(\mathfrak{s}) f'_k(\mathfrak{s}) \mu(d\mathfrak{s}) \right] = A, \quad \lim_{k \rightarrow \infty}^X \left[ (\mathfrak{B}) \int_{\mathfrak{S}} \chi_B(\mathfrak{s}) f''_k(\mathfrak{s}) \mu(d\mathfrak{s}) \right] = B.$$

Составив последовательность

$$\tilde{f}_k = \begin{cases} f'_m, & k = 2m - 1, \quad m = 1, 2, \dots; \\ f''_m, & k = 2m, \quad m = 1, 2, \dots; \end{cases}$$

получим, что для неё тоже существует предел (1.3.3), причём этот предел равен как  $A$ , так и  $B$ . Следовательно,  $A = B$ . Теорема доказана. ■

**Теорема 1.3.3.** (Бохнер) *Для того, чтобы сильно  $\mathfrak{B}$ -измеримая функция была  $\mu$ -интегрируемой по Бохнеру, необходимо и достаточно, чтобы функция  $\mathfrak{S} \ni \mathfrak{s} \mapsto \|f(\mathfrak{s})\|_X$  была  $\mu$ -интегрируемой.*

**Доказательство.** 1) Докажем необходимость. Нетрудно видеть, что

$$\|f(\mathfrak{s})\|_X \leq \|f_k(\mathfrak{s})\|_X + \|f(\mathfrak{s}) - f_k(\mathfrak{s})\|_X.$$

Поэтому из условия (1.3.1) и  $\mu$ -интегрируемости функции

$$\mathfrak{S} \ni \mathfrak{s} \mapsto \|f_k(\mathfrak{s})\|_X$$

следует, что функция

$$\mathfrak{S} \ni \mathfrak{s} \mapsto \|f(\mathfrak{s})\|_X$$

тоже  $\mu$ -интегрируема, и

$$\int_B \|f(\mathfrak{s})\|_X \mu(d\mathfrak{s}) \leq \int_B \|f_k(\mathfrak{s})\|_X \mu(d\mathfrak{s}) + \int_B \|f(\mathfrak{s}) - f_k(\mathfrak{s})\|_X \mu(d\mathfrak{s}).$$

Поскольку же при всех  $k, j \geq 1$

$$\left| \int_B \|f_k(\mathfrak{s})\|_X \mu(d\mathfrak{s}) - \int_B \|f_j(\mathfrak{s})\|_X \mu(d\mathfrak{s}) \right| \leq \int_B |\|f_k(\mathfrak{s})\|_X - \|f_j(\mathfrak{s})\|_X| \mu(d\mathfrak{s}) \leq \int_B \|f_k(\mathfrak{s}) - f_j(\mathfrak{s})\|_X \mu(d\mathfrak{s}),$$

то, ввиду условия (1.3.1), существует предел

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_B \|f_k(\mathfrak{s})\|_X \mu(d\mathfrak{s}),$$

причём

$$\int_B \|f(\mathfrak{s})\|_X \mu(d\mathfrak{s}) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_B \|f_k(\mathfrak{s})\|_X \mu(d\mathfrak{s}).$$

2) Докажем достаточность. Пусть  $f_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , — произвольная последовательность простых функций, такая, что  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|f_k(\mathfrak{s}) - f(\mathfrak{s})\|_X = 0$  при  $\mu$ -п.в.  $\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}$ . Введём вспомогательные функции  $g_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , следующим образом:

$$g_k(\mathfrak{s}) = \begin{cases} f_k(\mathfrak{s}), & \text{если } \|f_k(\mathfrak{s})\|_X \leq \|f(\mathfrak{s})\|_X [1 + \frac{1}{k}]; \\ 0, & \text{если } \|f_k(\mathfrak{s})\|_X > \|f(\mathfrak{s})\|_X [1 + \frac{1}{k}]. \end{cases}$$

Тогда

$$\|g_k(\mathfrak{s})\|_X \leq \|f(\mathfrak{s})\|_X [1 + \frac{1}{k}]$$

и  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|g_k(\mathfrak{s}) - f(\mathfrak{s})\|_X = 0$  при  $\mu$ -п.в.  $\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}$ . Так как функция  $\mathfrak{S} \ni \mathfrak{s} \mapsto \|f(\mathfrak{s})\|_X$  —  $\mu$ -интегрируема и  $\|g_k(\mathfrak{s}) - f(\mathfrak{s})\|_X \leq 2\|f(\mathfrak{s})\|_X [1 + \frac{1}{k}]$ , то, в силу теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла Лебега,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathfrak{S}} \|g_k(\mathfrak{s}) - f(\mathfrak{s})\|_X \mu(d\mathfrak{s}) = 0.$$

А это и означает, что функция  $f$  интегрируема по Бохнеру. Теорема полностью доказана. ■

### 1.3.2. Свойства интеграла Бохнера

**Следствие 1.3.1.** Если функция  $f : \mathfrak{S} \rightarrow X$   $\mu$ -интегрируема по Бохнеру, то для любого  $B \in \mathfrak{B}$

$$\left\| \int_B f(\mathfrak{s}) \mu(d\mathfrak{s}) \right\|_X \leq \int_B \|f(\mathfrak{s})\|_X \mu(d\mathfrak{s}).$$

Из этого следствия и абсолютной непрерывности интеграла Лебега вытекает

**Следствие 1.3.2.** Интеграл Бохнера —  $\mu$ -абсолютно-непрерывен.

Из линейности операции предельного перехода вытекает

**Следствие 1.3.3.** Пусть функции  $f : \mathfrak{S} \rightarrow X$  и  $g : \mathfrak{S} \rightarrow X$  —  $\mu$ -интегрируемы по Бохнеру, а  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Тогда для всех  $B \in \mathfrak{B}$

$$\int_B [f(\mathfrak{s}) + g(\mathfrak{s})] \mu(d\mathfrak{s}) = \int_B f(\mathfrak{s}) \mu(d\mathfrak{s}) + \int_B g(\mathfrak{s}) \mu(d\mathfrak{s}), \quad \int_B [\lambda f(\mathfrak{s})] \mu(d\mathfrak{s}) = \lambda \int_B f(\mathfrak{s}) \mu(d\mathfrak{s}).$$

**Следствие 1.3.4.** Пусть  $Y$  и  $Z$  — банаховы пространства, функции  $f : \mathfrak{S} \rightarrow X$  и  $g : \mathfrak{S} \rightarrow Y$  —  $\mu$ -интегрируемы по Бохнеру,  $x_0 \in X$  и  $y_0 \in Y$  — константы, и пусть определено умножение  $\bullet$  элементов пространств  $X$  и  $Y$ , принимающее значения в  $Z$ . Тогда для всех  $B \in \mathfrak{B}$

$$\int_B [f(\mathfrak{s}) \bullet y_0] \mu(d\mathfrak{s}) = \left[ \int_B f(\mathfrak{s}) \mu(d\mathfrak{s}) \right] \bullet y_0, \quad \int_B [x_0 \bullet g(\mathfrak{s})] \mu(d\mathfrak{s}) = x_0 \bullet \left[ \int_B g(\mathfrak{s}) \mu(d\mathfrak{s}) \right].$$

Пусть  $\mathfrak{S} \equiv [t_0, t_1]$  — отрезок числовой оси,  $\mathfrak{B}$  —  $\sigma$ -алгебра измеримых по Лебегу подмножеств этого отрезка,  $\mu$  — мера Лебега на числовой оси. Тогда если функция  $f : [t_0, t_1] \rightarrow X$  —  $\mu$ -интегрируема, то для всех  $t, \tau \in [t_0, t_1]$  положим по определению

$$\int_t^\tau f(\xi) d\xi = \begin{cases} \int_{[t, \tau]} f(\xi) d\xi, & \text{если } t \leq \tau; \\ - \int_{[\tau, t]} f(\xi) d\xi, & \text{если } t \geq \tau. \end{cases}$$

**Теорема 1.3.4.** Пусть  $\mathfrak{S} \equiv [t_0, t_1]$  — отрезок числовой оси,  $\mathfrak{B}$  —  $\sigma$ -алгебра измеримых по Лебегу подмножеств этого отрезка,  $\mu$  — мера Лебега на числовой оси. Тогда если функция  $f : [t_0, t_1] \rightarrow X$  —  $\mu$ -интегрируема по Бохнеру, то функция

$$[t_0, t_1] \ni t \mapsto (B) \int_{t_0}^t f(\xi) d\xi$$

сильно дифференцируема при п.в.  $t \in [t_0, t_1]$  и справедливо равенство

$$\frac{d}{dt} \left[ (B) \int_{t_0}^t f(\xi) d\xi \right] = f(t) \text{ при п.в. } t \in [t_0, t_1].$$

**Доказательство.** Введём обозначение

$$\Phi(t) \equiv (B) \int_{t_0}^t f(\xi) d\xi, \quad t \in [t_0, t_1].$$

Таким образом, нам нужно показать, что функция  $\Phi$  при п.в.  $t \in [t_0, t_1]$  имеет сильную производную  $\Phi'(t)$  и  $\Phi'(t) = f(t)$ .

Пусть  $t, t + \Delta t \in [t_0, t_1]$ . Тогда

$$\frac{\Phi(t + \Delta t) - \Phi(t)}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \left[ \int_{t_0}^{t+\Delta t} f(\xi) d\xi - \int_{t_0}^t f(\xi) d\xi \right] = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} f(\xi) d\xi.$$

Пусть  $f_k, k = 1, 2, \dots$ , — последовательность простых функций, такая, что

$$\|f_k(t')\|_X \leq \|f(t')\|_X \left[ 1 + \frac{1}{k} \right]$$

и  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|f_k(t') - f(t')\|_X = 0$  при п.в.  $t' \in [t_0, t_1]$ . Нетрудно видеть, что

$$\frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} f(\xi) d\xi - f(t) = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} [f(\xi) - f_k(\xi)] d\xi + \left[ \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} f_k(\xi) d\xi - f_k(t) \right] + [f_k(t) - f(t)].$$

Поэтому

$$\left\| \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} f(\xi) d\xi - f(t) \right\|_X \leq \left\| \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \|f(\xi) - f_k(\xi)\|_X d\xi \right\| + \left\| \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} f_k(\xi) d\xi - f_k(t) \right\|_X + \|f_k(t) - f(t)\|_X.$$

Поскольку  $f_k$  — простая функция, то второе слагаемое в правой части данного равенства почти всюду равно нулю. Таким образом,

$$\left\| \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} f(\xi) d\xi - f(t) \right\|_X \leq \left\| \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \|f(\xi) - f_k(\xi)\|_X d\xi \right\| + \|f_k(t) - f(t)\|_X.$$

Следовательно,

$$\overline{\lim}_{\Delta t \rightarrow 0} \left\| \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} f(\xi) d\xi - f(t) \right\|_X \leq \overline{\lim}_{\Delta t \rightarrow 0} \left\| \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \|f(\xi) - f_k(\xi)\|_X d\xi \right\| + \|f_k(t) - f(t)\|_X.$$

Так как функция  $[t_0, t_1] \ni \xi \mapsto \|f(\xi) - f_k(\xi)\|_X$  интегрируема в смысле Лебега, то предел в правой части данного неравенства почти всюду равен  $\|f_k(t) - f(t)\|_X$ .

Итак, при п.в.  $t \in [t_0, t_1]$

$$\overline{\lim}_{\Delta t \rightarrow 0} \left\| \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} f(\xi) d\xi - f(t) \right\|_X \leq 2\|f_k(t) - f(t)\|_X.$$

Устремляя затем  $k$  к бесконечности, получаем, что при п.в.  $t \in [t_0, t_1]$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\| \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} f(\xi) d\xi - f(t) \right\|_X = 0.$$

Теорема доказана. ■

**Теорема 1.3.5.** Пусть функция  $f : [0, T] \rightarrow X$  интегрируема в смысле Римана. Тогда она интегрируема и в смысле Бохнера, и её интегралы Римана и Бохнера совпадают.

**Доказательство.** В самом деле, поскольку функция  $f$  интегрируема в смысле Римана, то при всех  $x^* \in X^*$  интегрируема в смысле Римана же числовая функция

$$[0, T] \ni t \mapsto \langle f(t), x^* \rangle. \quad (1.3.4)$$

Следовательно, при всех  $x^* \in X^*$  функция (1.3.4) измерима в смысле Лебега и интегрируема в смысле Лебега. Значит функция  $f$  сильно измерима и интегрируема в смысле Бохнера. Поэтому

$$\left\langle \left( \text{P} \right) \int_0^T f(t) dt, x^* \right\rangle = (\text{Л}) \langle f(t), x^* \rangle dt = \left\langle \left( \text{Б} \right) \int_0^T f(t) dt, x^* \right\rangle.$$

Таким образом, при всех  $x^* \in X^*$

$$\left\langle \left( \text{P} \right) \int_0^T f(t) dt - \left( \text{Б} \right) \int_0^T f(t) dt, x^* \right\rangle = 0.$$

А это и означает, что

$$\left( \text{P} \right) \int_0^T f(t) dt = \left( \text{Б} \right) \int_0^T f(t) dt.$$

Теорема доказана. ■

### 1.3.3. Пространства измеримых функций

Пусть  $1 \leq p \leq \infty$ , а  $(\mathfrak{S}, \mathfrak{B}, \mu)$  — положительное пространство с мерой. Через  $\mathfrak{L}_p((\mathfrak{S}, \mathfrak{B}, \mu), X)$  обозначаем множество всех сильно  $\mathfrak{B}$ -измеримых функций  $f : \mathfrak{S} \rightarrow X$ , таких, что

$$\int_{\mathfrak{S}} \|f(\mathfrak{s})\|_X^p \mu(d\mathfrak{s}) < +\infty \text{ при } 1 \leq p < \infty; \mu\text{-vraisup}_{\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}} \|f(\mathfrak{s})\|_X < +\infty \text{ при } p = \infty.$$

Нетрудно видеть, что  $\mathfrak{L}_p((\mathfrak{S}, \mathfrak{B}, \mu), X)$  — линейное пространство.

Далее, через  $L_p((\mathfrak{S}, \mathfrak{B}, \mu), X)$  обозначим множество классов эквивалентных (в смысле равенства  $\mu$ -п.в.) функций из  $\mathfrak{L}_p((\mathfrak{S}, \mathfrak{B}, \mu), X)$ . Положим

$$\|f\|_{p,(\mathfrak{S},\mathfrak{B},\mu),X} \equiv \left[ \int_{\mathfrak{S}} \|f(\mathfrak{s})\|_X^p \mu(d\mathfrak{s}) \right]^{1/p} \text{ при } 1 \leq p < \infty; \|f\|_{p,(\mathfrak{S},\mathfrak{B},\mu),X} \equiv \mu\text{-vraisup}_{\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}} \|f(\mathfrak{s})\|_X \text{ при } p = \infty.$$

Несложно показать, что  $\|\cdot\|_{p,(\mathfrak{S},\mathfrak{B},\mu),X}$  — норма в  $L_p((\mathfrak{S}, \mathfrak{B}, \mu), X)$ , и что пространство  $L_p((\mathfrak{S}, \mathfrak{B}, \mu), X)$ , наделённое этой нормой, — полно.

В завершение настоящего раздела приведём следующий результат.

**Лемма 1.3.1.** Если  $f \in C_s([0, T], X)$ , то  $f \in L_\infty([0, T], X)$ , причём

$$\sup_{t \in [0, T]} \|f(t)\|_X = \text{vraisup}_{t \in [0, T]} \|f(t)\|_X.$$

**Доказательство.** Поскольку  $f$  слабо непрерывна на отрезке  $[0, T]$ , то она слабо измерима на этом отрезке. Так как пространство  $X$  — сепарабельно, то из слабой измеримости следует сильная измеримость. Из этого обстоятельства и леммы 1.1.1 вытекает, что

$$\text{vraisup}_{t \in [0, T]} \|f(t)\|_X \leq \sup_{t \in [0, T]} \|f(t)\|_X < +\infty,$$

откуда и получаем включение  $f \in L_\infty([0, T], X)$ .

Итак, для завершения доказательства нам достаточно показать, что

$$\sup_{t \in [0, T]} \|f(t)\|_X \leq \operatorname{vraisup}_{t \in [0, T]} \|f(t)\|_X.$$

В самом деле, пусть  $x^* \in X^*$  — произвольный элемент. Ввиду слабой непрерывности функции  $f$  на отрезке  $[0, T]$ , вещественнозначная функция

$$[0, T] \ni t \mapsto \langle f(t), x^* \rangle$$

непрерывна на отрезке  $[0, T]$ . Как следствие,

$$\sup_{t \in [0, T]} \langle f(t), x^* \rangle = \operatorname{vraisup}_{\xi \in [0, T]} \langle f(\xi), x^* \rangle.$$

Поэтому при всех  $t \in [0, T]$

$$\langle f(t), x^* \rangle \leq \operatorname{vraisup}_{\xi \in [0, T]} \langle f(\xi), x^* \rangle \leq \operatorname{vraisup}_{\xi \in [0, T]} \|f(\xi)\|_X \|x^*\|_{X^*}.$$

Переходя здесь к точной верхней грани по  $x^* \in X^*$ , у которых  $\|x^*\|_{X^*} \leq 1$ , получим, что при любом  $t \in [0, T]$

$$\|f(t)\|_{X^{**}} \leq \operatorname{vraisup}_{\xi \in [0, T]} \|f(\xi)\|_X,$$

откуда, на основании изометричности вложения  $X \subset X^{**}$ , вытекает, что

$$\sup_{t \in [0, T]} \|f(t)\|_X \leq \operatorname{vraisup}_{t \in [0, T]} \|f(t)\|_X.$$

Лемма полностью доказана. ■

## 1.4. Интеграл Стильтьеса

Материал данного раздела, за исключением, может быть, раздела 1.4.3, можно найти в [63, раздел 25.3].

### 1.4.1. Определение интеграла и условия интегрируемости

Прежде чем определить понятие интеграла Стильтьеса, введём понятие банаховозначной функции ограниченной вариации.

Пусть на отрезке  $[a, b]$  числовой оси задана функция  $y$ , принимающая значения в банаховом пространстве  $Y$  с нормой  $\|\cdot\|_Y$ . Пусть  $\tau = \{t_i\}_{i=0}^N$  — некоторое разбиение отрезка  $[a, b]$ . Составим сумму

$$\mathbf{V}_a^b[y; \tau] \equiv \sum_{i=1}^N \|y(t_i) - y(t_{i-1})\|_Y.$$

**Определение 1.4.1.** Величина  $\mathbf{V}_a^b[y] \equiv \sup_{\tau} \mathbf{V}_a^b[y; \tau]$  называется **полной вариацией** функции  $y$  на отрезке  $[a, b]$ . Если эта величина конечна, то будем называть функцию  $y$  **функцией ограниченной вариации**. Множество всех функций ограниченной вариации, принимающих значения в  $Y$ , будем обозначать  $\mathbf{BV}([a, b], Y)$ .

**Лемма 1.4.1.** Если функция  $y$  удовлетворяет на отрезке  $[a, b]$  условию Липшица, то есть найдётся постоянная  $L > 0$ , такая, что для всех  $t', t'' \in [a, b]$  выполнено неравенство  $\|y(t'') - y(t')\|_Y \leq L|t' - t''|$ , то функция  $y$  является функцией ограниченной вариации, причём

$$\mathbf{V}_a^b[y] \leq L(b - a).$$

**Доказательство.** В самом деле, пусть  $\tau = \{t_i\}_{i=0}^N$  — некоторое разбиение отрезка  $[a, b]$ . Тогда, в силу липшицевости функции  $y$ ,

$$\mathbf{V}_a^b[y; \tau] \equiv \sum_{i=1}^N \|y(t_i) - y(t_{i-1})\|_Y \leq L \sum_{i=1}^N |t_i - t_{i-1}| = L(b - a).$$

Взяв в получившемся неравенстве точную верхнюю грань по всевозможным разбиениям  $\tau$ , получим требуемое. ■

**Лемма 1.4.2.** Если функция  $y$  сильно дифференцируема всюду на отрезке  $[a, b]$ , и производная  $y'$  ограничена на этом отрезке, то функция  $y$  — функция ограниченной вариации.

**Доказательство.** 1) Прежде всего докажем нужное для доказательства вспомогательное неравенство. Выберем произвольно элемент  $y^* \in Y^*$  и зафиксируем. Введём функцию  $\Phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  равенством

$$\Phi(t) \equiv \langle y(t), y^* \rangle, \quad t \in [a, b].$$

Выберем затем произвольно точки  $t', t'' \in [a, b]$ ,  $t' < t''$ , и зафиксируем. Поскольку функция  $y$  всюду на отрезке  $[a, b]$  сильно дифференцируема, то всюду на этом отрезке дифференцируема функция  $\Phi$ . Как следствие, функция  $\Phi$  дифференцируема на отрезке  $[t', t'']$ . Значит, в силу теоремы Лагранжа о среднем, найдётся число  $\theta \in (0, 1)$ , такое, что

$$\Phi(t'') - \Phi(t') = \Phi'(t' + \theta(t'' - t'))(t'' - t'),$$

или, в силу определения функции  $\Phi$ ,

$$\langle y(t'') - y(t'), y^* \rangle = \langle y'(t' + \theta(t'' - t')), y^* \rangle (t'' - t'). \quad (1.4.1)$$

Здесь возможны два случая:  $y(t') = y(t'')$  и  $y(t') \neq y(t'')$ .

Предположим, что  $y(t') = y(t'')$ . Тогда, очевидно, справедливо неравенство

$$\|y(t'') - y(t')\|_Y \leq \sup_{t \in [t', t'']} \|y'(t)\|_Y (t'' - t'). \quad (1.4.2)$$

Пусть теперь  $y(t') \neq y(t'')$ . Тогда, в силу следствия из теоремы Хана–Банаха, найдётся линейный непрерывный функционал  $y^* \in Y^*$ , такой, что  $\|y^*\|_{Y^*} = 1$ ,  $\langle y(t'') - y(t'), y^* \rangle = \|y(t'') - y(t')\|_Y$ . Подставляя такой функционал  $y^*$  в (1.4.1), получаем, что

$$\begin{aligned} \|y(t'') - y(t')\|_Y &= \langle y'(t' + \theta(t'' - t')), y^* \rangle (t'' - t') \leq \\ &\leq \|y'(t' + \theta(t'' - t'))\|_Y \|y^*\|_{Y^*} (t'' - t') \leq \sup_{t \in [t', t'']} \|y'(t)\|_Y (t'' - t'). \end{aligned}$$

Иными словами, и в этом случае справедливо неравенство (1.4.2).

Таким образом, для всех  $t', t'' \in [a, b]$ ,  $t' < t''$ , справедливо неравенство (1.4.2).

2) Докажем теперь конечность полной вариации функции  $y$ . В самом деле, пусть  $\tau = \{t_i\}_{i=0}^N$  — некоторое разбиение отрезка  $[a, b]$ . Тогда, в силу доказанного неравенства (1.4.2),

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_a^b[y; \tau] &\equiv \sum_{i=1}^N \|y(t_i) - y(t_{i-1})\|_Y \leq \sum_{i=1}^N \sup_{t \in [t_{i-1}, t_i]} \|y'(t)\|_Y |t_i - t_{i-1}| \leq \\ &\leq \left[ \sup_{t \in [a, b]} \|y'(t)\|_Y \right] \sum_{i=1}^N |t_i - t_{i-1}| = (b - a) \sup_{t \in [a, b]} \|y'(t)\|_Y, \end{aligned}$$

то есть

$$\mathbf{V}_a^b[y; \tau] \leq (b - a) \sup_{t \in [a, b]} \|y'(t)\|_Y.$$

Взяв в получившемся неравенстве точную верхнюю грань по всевозможным разбиениям  $\tau$ , получим требуемое утверждение. ■

Пусть  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  — банаховы пространства с нормами  $\|\cdot\|_X$ ,  $\|\cdot\|_Y$  и  $\|\cdot\|_Z$  соответственно, причём для элементов  $x \in X$  определено умножение справа на элементы  $y \in Y$  со значениями в  $Z$  ( $x \bullet y \in Z$ ). Пусть, далее, на отрезке  $[a, b]$  заданы функции  $x$  и  $y$ , принимающие значения в пространствах  $X$  и  $Y$  соответственно.

Пусть  $\tau = \{t_i\}_{i=0}^N$  — некоторое разбиение отрезка  $[a, b]$ , а  $\theta_i \in [t_{i-1}, t_i]$ ,  $i = \overline{1, N}$ , — промежуточные точки. Составим интегральную сумму

$$\sigma_\tau = \sigma_\tau(x; y; \theta_1, \dots, \theta_N) = \sum_{i=1}^N x(\theta_i) \bullet [y(t_i) - y(t_{i-1})].$$



**Определение 1.4.2.** Функция  $x$  называется **интегрируемой по Стильтьесу** на отрезке  $[a, b]$  относительно функции  $y$ , если существует такой элемент  $A \in Z$ , что для любой последовательности разбиений отрезка  $[a, b]$

$$\tau_j = \{t_i^{(j)}\}_{i=0}^{i=i_{\tau_j}}, \quad j = 1, 2, \dots,$$

у которой  $\lim_{j \rightarrow \infty} |\tau_j| = 0$ , и для любого выбора точек  $\xi_i^{(j)} \in [t_{i-1}^{(j)}, t_i^{(j)}]$ ,  $i = \overline{1, i_{\tau_j}}$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , существует предел последовательности интегральных сумм  $\sigma_{\tau_j}(x; y; \xi_1^{(j)}, \dots, \xi_{i_{\tau_j}}^{(j)})$  и он равен  $A$ :

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left\| \sum_{i=1}^{i_{\tau_j}} x(\theta_i) \bullet [y(t_i) - y(t_{i-1})] - A \right\|_X = 0. \quad (1.4.3)$$

При выполнении этих условий элемент  $A$  называется **интегралом Стильтьеса** функции  $x$  на отрезке  $[a, b]$  относительно функции  $y$  и обозначается  $(C) \int_a^b x(t) \bullet dy(t)$  или  $\int_a^b f(t) \bullet dy(t)$ .

Можно показать, что справедлива следующая

**Теорема 1.4.1.** Если функция  $x$  сильно непрерывна на  $[a, b]$ , а функция  $y$  является функцией ограниченной вариации на  $[a, b]$ , то функция  $x$  интегрируема в смысле Стильтьеса на  $[a, b]$  относительно функции  $y$ , причём

$$\left\| \int_a^b x(t) \bullet dy(t) \right\|_Z \leq K \|x\|_{[a,b],X}^{(0)} \mathbf{V}_a^b[y],$$

где  $K$  — норма билинейной формы, задающей умножение.

## 1.4.2. Свойства интеграла

Приведём теперь некоторые свойства интеграла Стильтьеса.

**Лемма 1.4.3.** Если  $x_0 \in X$ , то

$$\int_a^b x_0 \bullet dy(t) = x_0 \bullet [y(b) - y(a)].$$

**Лемма 1.4.4.** Если  $x(t) = x_0 \varphi(t)$ ,  $t \in [a, b]$ , где  $x_0 \in X$ ,  $\varphi \in C[a, b]$ , то

$$\int_a^b x_0 \varphi(t) \bullet dy(t) = x_0 \bullet \int_a^b \varphi(t) \bullet dy(t).$$

**Лемма 1.4.5.** Если  $y(t) = y_0 \psi(t)$ ,  $t \in [a, b]$ , где  $y_0 \in Y$ ,  $\varphi \in \mathbf{BV}[a, b]$ , то

$$\int_a^b x(t) \bullet d[y_0 \psi(t)] = \left[ \int_a^b x(t) \bullet d\psi(t) \right] \bullet y_0.$$

**Лемма 1.4.6.** Если  $x, x_1, x_2 \in C([a, b], X)$ , а  $y, y_1, y_2 \in \mathbf{BV}([a, b], Y)$ , то

$$\begin{aligned} \int_a^b [x_1(t) + x_2(t)] \bullet dy(t) &= \int_a^b x_1(t) \bullet dy(t) + \int_a^b x_2(t) \bullet dy(t), \\ \int_a^b x(t) \bullet d[y_1(t) + y_2(t)] &= \int_a^b x(t) \bullet dy_1(t) + \int_a^b x(t) \bullet dy_2(t). \end{aligned}$$

**Лемма 1.4.7.** Если  $x$  и  $y$  — непрерывные функции ограниченной вариации, то справедлива формула интегрирования по частям,

$$\int_a^b x(t) \bullet dy(t) + \int_a^b dx(t) \bullet y(t) = x(t) \bullet y(t) \Big|_a^b.$$

**Лемма 1.4.8.** Если  $c \in (a, b)$ , то

$$\int_a^b x(t) \bullet dy(t) = \int_a^c x(t) \bullet dy(t) + \int_c^b x(t) \bullet dy(t).$$

**Лемма 1.4.9.** Пусть функция  $x$  — непрерывна на  $[a, b]$ , функция  $y$  — функция ограниченной вариации на  $[a, b]$ . Пусть, кроме того,  $t = \omega(p)$ ,  $p \in [\alpha, \beta]$ , — строго возрастающая, непрерывная на  $[\alpha, \beta]$  функция, причём  $\omega(\alpha) = a$ ,  $\omega(\beta) = b$ . Тогда функция  $y(\omega(p))$ ,  $p \in [\alpha, \beta]$ , — функция ограниченной вариации на  $[\alpha, \beta]$ , и справедливо равенство

$$\int_a^b x(t) \bullet dy(t) = \int_\alpha^\beta x(\omega(p)) \bullet dy(\omega(p)). \quad (1.4.4)$$

### 1.4.3. Представление линейного непрерывного функционала на пространстве непрерывных банаховозначных функций

В данном разделе мы докажем теорему о представлении линейного непрерывного функционала над банаховым пространством  $C([a, b], X)$ , где  $X$  — банахово пространство с нормой  $\|\cdot\|_X$ .

**Теорема 1.4.2.** Пусть банахово пространство  $X$  — рефлексивно, и пусть  $\mathcal{F} : C([a, b], X) \rightarrow \mathbb{R}$  — линейный непрерывный функционал. Тогда найдётся функция ограниченной вариации  $g : [a, b] \rightarrow X^*$ , такая, что

$$\mathcal{F}[f] = \int_a^b \langle x(t), dg(t) \rangle \quad \forall f \in C([a, b], X), \quad (1.4.5)$$

причём

$$\|\mathcal{F}\|_{(C([a, b], X))^*} = \mathbf{V}_a^b[g]. \quad (1.4.6)$$

**Доказательство.** Поскольку пространство  $C([a, b], X)$  является замкнутым подпространством пространства ограниченных функций,  $BF([a, b], X)$ , то, согласно теореме Хана–Банаха, функционал  $\mathcal{F}$  можно с сохранением нормы продолжить до непрерывного функционала на  $BF([a, b], X)$ . Результат продолжения также обозначим  $\mathcal{F}$ .

Введём семейство функций  $w_{\tau, x} : [a, b] \rightarrow X$ , где  $\tau \in [a, b]$ ,  $x \in X$  — параметры, формулами

$$w_{a, x}(t) \equiv 0; \quad w_{\tau, x}(t) \equiv \begin{cases} x, & \text{если } t \in [a, \tau], \\ 0, & \text{если } t \in (\tau, b], \end{cases} \quad \text{при } \tau > a.$$

Нетрудно видеть, что функции  $w_{\tau, x}$  удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{aligned} w_{\tau, x} &\in BF([a, b], X), \quad \|w_{\tau, x}\|_{BF([a, b], X)} \leq \|x\|_X \quad \forall x \in X, \quad \tau \in [a, b]; \\ w_{\tau, x_1 + x_2} &= w_{\tau, x_1} + w_{\tau, x_2}, \quad w_{\tau, \lambda x} = \lambda w_{\tau, x} \quad \forall x, x_1, x_2 \in X, \quad \lambda \in \mathbb{R}; \\ w_{\tau_2, x}(t) - w_{\tau_1, x}(t) &= \chi_{(\tau_1, \tau_2]}(t)x, \quad \forall \tau_1, \tau_2 \in [a, b], \quad \tau_1 < \tau_2 \quad \forall x \in X. \end{aligned} \quad (1.4.7)$$

Далее, поскольку  $\mathcal{F}$  — линейный непрерывный функционал, то при всех  $\tau \in [a, b]$  и  $x \in X$

$$|\mathcal{F}[w_{\tau, x}]| \leq \|\mathcal{F}\| \|w_{\tau, x}\|_{BF([a, b], X)} \leq \|\mathcal{F}\| \|x\|_X,$$

ввиду чего при всех  $\tau \in [a, b]$  отображение

$$X \ni x \mapsto \mathcal{F}[w_{\tau, x}]$$

является линейным непрерывным функционалом над  $X$ . Значит найдётся элемент  $g(\tau) \in X^*$ , такой, что

$$\langle x, g(\tau) \rangle = \mathcal{F}[w_{\tau, x}] \quad \forall x \in X, \quad \tau \in [a, b]. \quad (1.4.8)$$

Таким образом, мы построили функцию  $g : [a, b] \rightarrow X^*$ . Докажем, что она является функцией ограниченной вариации.

В самом деле, пусть  $\xi = \{t_i\}_{i=0}^N$  — некоторое разбиение отрезка  $[a, b]$ . Рассмотрим величину

$$\mathbf{V}_a^b[g; \xi] \equiv \sum_{i=1}^N \|g(t_i) - g(t_{i-1})\|_{X^*}.$$

Для каждого  $i = \overline{1, N}$  возможны два случая: либо  $g(t_i) - g(t_{i-1}) \neq 0$ , либо  $g(t_i) - g(t_{i-1}) = 0$ .

Пусть  $g(t_i) - g(t_{i-1}) \neq 0$ . Тогда, по следствию из теоремы Хана–Банаха, найдётся линейный непрерывный функционал  $y_i \in X^{**}$ , такой, что

$$\|y_i\|_{X^{**}} = 1, \quad \langle y_i, g(t_i) - g(t_{i-1}) \rangle = \|g(t_i) - g(t_{i-1})\|_{X^*}.$$

Поскольку  $X$  — рефлексивно, то последние соотношения означают, что найдётся элемент  $x_i \in X$ , такой, что

$$\|x_i\|_X = 1, \quad \langle x_i, g(t_i) - g(t_{i-1}) \rangle = \|g(t_i) - g(t_{i-1})\|_{X^*}.$$

Введём элементы  $\alpha_i \in X$ ,  $i = \overline{1, N}$ , формулами

$$\alpha_i = \begin{cases} x_i, & \text{при } g(t_i) - g(t_{i-1}) \neq 0; \\ 0, & \text{при } g(t_i) - g(t_{i-1}) = 0. \end{cases}$$

Тогда выводим, что

$$\|\alpha_i\|_X \leq 1, \quad \langle \alpha_i, g(t_i) - g(t_{i-1}) \rangle = \|g(t_i) - g(t_{i-1})\|_{X^*}, \quad i = \overline{1, N}.$$

Как следствие,

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_a^b[g; \xi] &\equiv \sum_{i=1}^N \|g(t_i) - g(t_{i-1})\|_{X^*} = \sum_{i=1}^N \langle \alpha_i, g(t_i) - g(t_{i-1}) \rangle = \sum_{i=1}^N [\langle \alpha_i, g(t_i) \rangle - \langle \alpha_i, g(t_{i-1}) \rangle] = \\ &= \sum_{i=1}^N [\mathcal{F}[w_{t_i, \alpha_i}] - \mathcal{F}[w_{t_{i-1}, \alpha_i}]] = \sum_{i=1}^N \mathcal{F}[w_{t_i, \alpha_i} - w_{t_{i-1}, \alpha_i}] = \sum_{i=1}^N \mathcal{F}[\chi_{(t_{i-1}, t_i]} \alpha_i] = \mathcal{F} \left[ \sum_{i=1}^N \chi_{(t_{i-1}, t_i]} \alpha_i \right] \leq \\ &\leq \|\mathcal{F}\| \sup_{t \in [a, b]} \left\| \sum_{i=1}^N \chi_{(t_{i-1}, t_i]}(t) \alpha_i \right\|_X \leq \|\mathcal{F}\| \sup_{t \in [a, b]} \sum_{i=1}^N \chi_{(t_{i-1}, t_i]}(t) \|\alpha_i\|_X \leq \|\mathcal{F}\|. \end{aligned}$$

Итак,

$$\mathbf{V}_a^b[g; \xi] \leq \|\mathcal{F}\|.$$

Поскольку же разбиение отрезка  $[a, b]$  было выбрано произвольно, то

$$\mathbf{V}_a^b[g] \leq \|\mathcal{F}\|. \quad (1.4.9)$$

Итак, мы построили по функционалу  $\mathcal{F}$  функцию ограниченной вариации  $g : [a, b] \rightarrow X^*$ . Покажем теперь, что с помощью этой функции функционал  $\mathcal{F}$  можно записать в виде (1.4.5).

Пусть  $f : [a, b] \rightarrow X$  — произвольная непрерывная функция. Поскольку она непрерывна на отрезке, то она и равномерно непрерывна на этом отрезке. Выберем теперь произвольно число  $\varepsilon > 0$  и зафиксируем. Подберём по этому  $\varepsilon > 0$  число  $\delta = \delta(\varepsilon)$  так, чтобы при всех  $t', t'' \in [a, b]$ ,  $|t' - t''| \leq \delta$  выполнялось неравенство  $\|f(t') - f(t'')\|_X < \varepsilon$ . Выберем теперь разбиение  $\xi$  так, чтобы его мелкость была меньше  $\delta$ , и рассмотрим кусочно-постоянную функцию  $f_\varepsilon$ ,

$$f_\varepsilon(t) = \begin{cases} f(t_i), & \text{при } t_{i-1} < t \leq t_i, \quad i = \overline{1, N}; \\ f(t_1), & \text{при } t = a. \end{cases}$$

Эту функцию можно записать в виде

$$f_\varepsilon(t) = \sum_{i=1}^N [w_{t_i, f(t_i)}(t) - w_{t_{i-1}, f(t_i)}(t)].$$

Из определения функции  $f_\varepsilon$  следует, что при всех  $t \in [a, b]$

$$\|f(t) - f_\varepsilon(t)\|_X < \varepsilon,$$

или, иначе говоря,

$$\|f - f_\varepsilon\|_{BF([a,b],X)} \leq \varepsilon.$$

Найдём значение функционала  $\mathcal{F}$  на элементе  $f_\varepsilon$ . Ввиду линейности этого функционала и определения функций  $w_{\tau,x}$  оно равно

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f_\varepsilon] &= \mathcal{F} \left[ \sum_{i=1}^N [w_{t_i, f(t_i)} - w_{t_{i-1}, f(t_i)}] \right] = \sum_{i=1}^N [\mathcal{F}[w_{t_i, f(t_i)}] - \mathcal{F}[w_{t_{i-1}, f(t_i)}]] = \\ &= \sum_{i=1}^N [\langle f(t_i), g(t_i) \rangle - \langle f(t_i), g(t_{i-1}) \rangle] = \sum_{i=1}^N \langle f(t_i), g(t_i) - g(t_{i-1}) \rangle, \end{aligned}$$

т.е. представляет собой интегральную сумму для интеграла

$$\int_a^b \langle x(t), dg(t) \rangle.$$

Поэтому при достаточно мелком разбиении отрезка  $[a, b]$

$$\left| \mathcal{F}[f_\varepsilon] - \int_a^b \langle x(t), dg(t) \rangle \right| < \varepsilon.$$

В то же время

$$|\mathcal{F}[f] - \mathcal{F}[f_\varepsilon]| \leq \|\mathcal{F}\| \|f - f_\varepsilon\|_{BF([a,b],X)} \leq \|\mathcal{F}\| \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\left| \mathcal{F}[f] - \int_a^b \langle x(t), dg(t) \rangle \right| < \varepsilon[1 + \|\mathcal{F}\|].$$

Отсюда в силу произвольности  $\varepsilon$  получаем равенство (1.4.5).

Соотношение же (1.4.6) следует из оценки (1.4.9) и свойств интеграла Стильтьеса.

Теорема полностью доказана. ■

**Замечание 1.4.1.** Из свойств интеграла Стильтьеса следует, что формула (1.4.5) для любой функции  $g \in \mathbf{BV}([a, b], X^*)$  задаёт линейный непрерывный функционал над  $C([a, b], X)$ . При этом несложно показать, что если функции  $g_1$  и  $g_2$  задают один и тот же функционал, то  $g_1 - g_2 \equiv \text{const}$  во всех точках непрерывности функции  $g_1 - g_2$ .

Таким образом, каждому линейному непрерывному функционалу над  $C([a, b], X)$  соответствует целый класс функций ограниченной вариации. В каждом таком классе можно выбрать одну и только одну функцию, непрерывную справа в каждой точке полуинтервала  $(a, b]$  и равную нулю в точке  $a$ . Множество всех таких функций ограниченной вариации обозначим через  $\mathbf{BV}^0([0, T], X)$ . Можно показать, что это множество, наделённое нормой  $\|\varphi\|_{\mathbf{BV}^0, X} \equiv \mathbf{V}_0^T[\varphi]$ , является банаховым пространством. Заметим, что функция  $g$ , построенная при доказательстве теоремы, является именно функцией из  $\mathbf{BV}^0([0, T], X)$ .

С учётом вышеприведённого замечания теорему 1.4.2 можно переписать в следующем виде.

**Теорема 1.4.3.** Существует изометричный изоморфизм пространств  $(C([a, b], X))^*$  и  $\mathbf{BV}^0([0, T], X)$ , устанавливаемый равенством

$$\mathcal{F}[f] = \int_a^b \langle x(t), dg(t) \rangle \quad \forall f \in C([a, b], X).$$

#### 1.4.4. Аппроксимация банаховозначных мер Радона, заданных на отрезке числовой оси

**Лемма 1.4.10.** Пусть  $X$  — рефлексивное банахово пространство,  $[a, b]$  — отрезок числовой оси. Для любой меры  $\mu \in \mathbf{M}([a, b], X^*)$  найдётся последовательность функций  $\omega^k \in C([a, b], X^*)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , такая, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{[a, b]} \langle \zeta(t), \mu^k(dt) \rangle = \int_{[a, b]} \langle \zeta(t), \mu(dt) \rangle, \quad \forall \zeta \in C([a, b], X), \quad (1.4.10)$$

где  $\mu^k(E) \equiv \int_E \omega^k(t) dt$ ,  $E \subseteq [a, b]$  — борелевское подмножество отрезка  $[a, b]$ ,  $k = 1, 2, \dots$ .

**Доказательство.** Разобьём доказательство на несколько этапов.

1) Покажем вначале, что для любой меры  $\mu \in \mathbf{M}([a, b], X^*)$  найдётся последовательность мер

$$\bar{\mu}^m \equiv \sum_{i=1}^{i_m} \lambda_{i,m} \delta_{t_{i,m}}, \quad m = 1, 2, \dots,$$

где  $t_{i,m} \in [0, T]$ ,  $i = \overline{1, i_m}$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , такая, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{[a, b]} \langle \zeta(t), \bar{\mu}^m(dt) \rangle = \int_{[a, b]} \langle \zeta(t), \mu(dt) \rangle, \quad \forall \zeta \in C([a, b], X). \quad (1.4.11)$$

В самом деле,  $(C([a, b], X))^*$  изометрично изоморфно  $\mathbf{M}([a, b], X^*)$ . С другой стороны,  $(C([a, b], X))^*$  изометрично изоморфно  $\mathbf{BV}^0([a, b], X^*)$ . Следовательно, существует изоморфизм

$$\mathcal{F}: \mathbf{M}([a, b], X^*) \rightarrow \mathbf{BV}^0([a, b], X^*),$$

такой, что

$$\|\mathcal{F}[\mu]\|_{\mathbf{BV}^0} = \|\mu\|, \quad \forall \mu \in \mathbf{M}([a, b], X^*). \quad (1.4.12)$$

Пусть функционал  $\mathcal{A}: C([a, b], X) \rightarrow \mathbb{R}$  задаётся формулой

$$\mathcal{A}[\zeta] = \int_{[a, b]} \langle \zeta(t), \mu(dt) \rangle, \quad \forall \zeta \in C([a, b], X). \quad (1.4.13)$$

Тогда, очевидно,  $\mathcal{A} \in (C([a, b], X))^*$ , и, стало быть,

$$\mathcal{A}[\zeta] = \int_{[a, b]} \langle \zeta(t), d\mathcal{F}[\mu](t) \rangle, \quad \forall \zeta \in C([a, b], X), \quad (1.4.14)$$

где интеграл понимается в смысле интеграла Стильтьеса по отрезку  $[a, b]$ . Пусть  $\bar{t}_{i,m} = \frac{Ti}{m}$ ,  $i = \overline{0, m}$ ,  $\bar{t}_{i,m+1} = \bar{t}_{i,m}$ ,  $\lambda_{i,m} \equiv \mathcal{F}[\mu](\bar{t}_{i,m}) - \mathcal{F}[\mu](\bar{t}_{i-1,m})$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $\lambda_{i,m+1} = \mathcal{F}[\mu](\bar{t}_{i,m})$ ,  $i_m = m + 1$ ,  $t_{i,m} = \bar{t}_{i-1,m}$ ,  $i = \overline{1, i_m}$ . Тогда, в силу определения интеграла Стильтьеса по отрезку  $[a, b]$ ,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{i_m} \langle \zeta(t_{i,m}), \lambda_{i,m} \rangle = \int_{[a, b]} \langle \zeta(t), d\mathcal{F}[\mu](t) \rangle, \quad \forall \zeta \in C([a, b], X).$$

Полагая  $\bar{\mu}^m \equiv \sum_{i=1}^{i_m} \lambda_{i,m} \delta_{t_{i,m}}$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , перепишем последнее равенство в виде

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{[a, b]} \langle \zeta(t), \bar{\mu}^m(dt) \rangle = \int_{[a, b]} \langle \zeta(t), \mu(dt) \rangle, \quad \forall \zeta \in C([a, b], X),$$

что в совокупности с (1.4.12)–(1.4.14) и даёт (1.4.11).

2) Докажем существование непрерывных функций, упомянутых в формулировке леммы. Пусть  $\varepsilon_s > 0$ ,  $s = 1, 2, \dots$ ,  $\varepsilon_s \rightarrow 0$ ,  $s \rightarrow \infty$ , — некоторая последовательность чисел, и пусть

$$\begin{aligned}\omega_{i,m}^s(t) &\equiv \frac{\chi_{(t_{i,m}-\varepsilon_s, t_{i,m}+\varepsilon_s) \cap (a,b)}(t)}{\text{meas}\{(t_{i,m}-\varepsilon_s, t_{i,m}+\varepsilon_s) \cap (a,b)\}}, \quad i = \overline{1, i_m}, \\ \bar{\omega}_m^s(t) &\equiv \sum_{i=1}^{i_m} \lambda_{i,m} \omega_{i,m}^s(t), \quad m, s = 1, 2, \dots, \quad t \in [a, b], \\ \bar{\mu}_s^m(E) &\equiv \int_E \bar{\omega}_m^s(t) dt, \quad E \subseteq [a, b], \quad m, s = 1, 2, \dots\end{aligned}$$

Тогда, очевидно,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_{[a,a]} \langle \zeta(t), \bar{\mu}_s^m(dt) \rangle = \int_{[a,b]} \langle \zeta(t), \bar{\mu}^m(dt) \rangle, \quad \forall \zeta \in C([a, b], X). \quad (1.4.15)$$

Пусть теперь  $h_p > 0$ ,  $p = 1, 2, \dots$ ,  $h_p \rightarrow 0$ ,  $p \rightarrow \infty$ , — некоторая последовательность чисел, и пусть  $\bar{\mu}_{s,p}^m(E) \equiv \int_E \bar{\omega}_m^{s,p}(t) dt$ ,  $E \subseteq [a, b]$ ,  $m, s, p = 1, 2, \dots$ , где  $\bar{\omega}_m^{s,p}$  — усреднение с параметром  $h_p > 0$  с ядром, независимым от  $m, s, p = 1, 2, \dots$ , функции  $\bar{\omega}_m^s$ . Пользуясь свойствами средних функций и теоремой Радона–Никодима, заключаем, что

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_{[a,b]} \langle \zeta(t), \bar{\mu}_{s,p}^m(dt) \rangle = \int_{[a,b]} \langle \zeta(t), \bar{\mu}_s^m(dt) \rangle, \quad \forall \zeta \in C([a, b], X). \quad (1.4.16)$$

Из (1.4.11) следует, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} |\bar{\mu}^m - \mu|_w = 0, \quad (1.4.17)$$

где  $|\cdot|_w$  — слабая норма [14] в  $\mathbf{M}([a, b], X^*)$ .

Выберем произвольно  $\alpha > 0$  и зафиксируем.

Согласно (1.4.17), найдётся номер  $m_0(\alpha) \geq 1$ , такой, что

$$|\bar{\mu}^{m_0(\alpha)} - \mu|_w \leq \frac{\alpha}{3}.$$

Далее, согласно (1.4.15),

$$\lim_{s \rightarrow \infty} |\bar{\mu}_s^{m_0(\alpha)} - \bar{\mu}^{m_0(\alpha)}|_w = 0.$$

Поэтому найдётся номер  $s_0(\alpha) \geq 1$ , такой, что

$$|\bar{\mu}_{s_0(\alpha)}^{m_0(\alpha)} - \bar{\mu}^{m_0(\alpha)}|_w \leq \frac{\alpha}{3}.$$

Наконец, согласно (1.4.16),

$$\lim_{p \rightarrow \infty} |\bar{\mu}_{s_0(\alpha),p}^{m_0(\alpha)} - \bar{\mu}_{s_0(\alpha)}^{m_0(\alpha)}|_w = 0,$$

в силу чего найдётся номер  $p_0(\alpha) \geq 1$ , такой, что

$$|\bar{\mu}_{s_0(\alpha),p_0(\alpha)}^{m_0(\alpha)} - \bar{\mu}_{s_0(\alpha)}^{m_0(\alpha)}|_w \leq \frac{\alpha}{3}.$$

Таким образом,

$$|\bar{\mu}_{s_0(\alpha),p_0(\alpha)}^{m_0(\alpha)} - \mu|_w \leq |\bar{\mu}_{s_0(\alpha),p_0(\alpha)}^{m_0(\alpha)} - \bar{\mu}_{s_0(\alpha)}^{m_0(\alpha)}|_w + |\bar{\mu}_{s_0(\alpha)}^{m_0(\alpha)} - \bar{\mu}^{m_0(\alpha)}|_w + |\bar{\mu}^{m_0(\alpha)} - \mu|_w \leq \frac{\alpha}{3} + \frac{\alpha}{3} + \frac{\alpha}{3} = \alpha,$$

то есть

$$|\bar{\mu}_{s_0(\alpha),p_0(\alpha)}^{m_0(\alpha)} - \mu|_w \leq \alpha. \quad (1.4.18)$$

Пусть  $\alpha_k > 0$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ,  $\alpha_k \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow \infty$ , — некоторая последовательность. Тогда из (1.4.18) следует, что

$$\bar{\mu}_{s_0(\alpha_k),p_0(\alpha_k)}^{m_0(\alpha_k)} \rightarrow \mu, \quad k \rightarrow \infty, \quad * \text{—слабо}.$$

Следовательно, в качестве искомой последовательности  $\omega^k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , можно взять последовательность  $\omega^k \equiv \bar{\omega}_{m_0(\alpha_k)}^{s_0(\alpha_k),p_0(\alpha_k)}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Лемма доказана. ■

## 1.5. Функциональные последовательности и ряды

Пусть  $X$  — банахово пространство с нормой  $\|\cdot\|_X$ ,  $\mathcal{P}$  — некоторое множество.

**Определение 1.5.1.** Говорят, что последовательность функций  $f_j: \mathcal{P} \rightarrow X$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , равномерно по  $p \in \mathcal{P}$  сходится в норме пространства  $X$  к функции  $f: \mathcal{P} \rightarrow X$  при  $j \rightarrow \infty$  и пишем  $f_j \xrightarrow[p \in \mathcal{P}]{X} f$ ,  $j \rightarrow \infty$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists j_0 = j_0(\varepsilon) \geq 1 \forall j \geq j_0(\varepsilon) \forall p \in \mathcal{P} : \|f_j(p) - f(p)\|_X \leq \varepsilon.$$

**Теорема 1.5.1.** (Критерий равномерной сходимости) Для того, чтобы последовательность функций  $f_j: \mathcal{P} \rightarrow X$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , равномерно по  $p \in \mathcal{P}$  сходилась в норме пространства  $X$  к некоторой функции  $f: \mathcal{P} \rightarrow X$  при  $j \rightarrow \infty$ , необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall \varepsilon > 0 \exists j_0 = j_0(\varepsilon) \geq 1 \forall j \geq j_0(\varepsilon) \forall k = 1, 2, \dots \forall p \in \mathcal{P} : \|f_{j+k}(p) - f_j(p)\|_X \leq \varepsilon. \quad (1.5.1)$$

**Доказательство.** 1) Необходимость. Пусть  $f_j \xrightarrow[p \in \mathcal{P}]{X} f$ ,  $j \rightarrow \infty$ , для некоторой функции  $f: \mathcal{P} \rightarrow X$ . Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  найдётся номер  $j_0 = j_0(\varepsilon) \geq 1$ , такой, что

$$\sup_{p \in \mathcal{P}} \|f_j(p) - f(p)\|_X \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall j \geq j_0(\varepsilon).$$

Поэтому

$$\sup_{p \in \mathcal{P}} \|f_{j+k}(p) - f(p)\|_X \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall j \geq j_0(\varepsilon) \quad \forall k = 1, 2, \dots$$

Как следствие,

$$\begin{aligned} \sup_{p \in \mathcal{P}} \|f_{j+k}(p) - f_j(p)\|_X &\leq \sup_{p \in \mathcal{P}} \|f_{j+k}(p) - f(p)\|_X + \sup_{p \in \mathcal{P}} \|f(p) - f_j(p)\|_X \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \\ &\quad \forall j \geq j_0(\varepsilon) \quad \forall k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Таким образом, необходимость доказана.

2) Достаточность. Пусть выполнено условие (1.5.1). Тогда для каждого фиксированного  $p \in \mathcal{P}$  получаем последовательность  $f_j(p) \in X$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , фундаментальную в  $X$ . Поскольку  $X$  — полно, то при каждом фиксированном  $p \in \mathcal{P}$  найдётся элемент  $f(p) \in X$ , такой, что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|f_j(p) - f(p)\|_X = 0.$$

Устремляя теперь в (1.5.1)  $k$  к бесконечности, выводим, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists j_0 = j_0(\varepsilon) \geq 1 \forall j \geq j_0(\varepsilon) \forall p \in \mathcal{P} : \|f_j(p) - f(p)\|_X \leq \varepsilon.$$

А это и означает, что  $f_j \xrightarrow[p \in \mathcal{P}]{X} f$ ,  $j \rightarrow \infty$ . Теорема доказана. ■

**Определение 1.5.2.** Пусть дана последовательность функций  $f_j: \mathcal{P} \rightarrow X$ ,  $j = 1, 2, \dots$ . Говорят, что функциональный ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} f_j(p)$$

сходится к некоторой функции  $F(p)$  равномерно на  $\mathcal{P}$ , если

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{p \in \mathcal{P}} \left\| \sum_{j=1}^k f_j(p) - F(p) \right\|_X = 0.$$

Пусть  $\mathcal{H}$  — сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$  и соответствующей нормой  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ . Пусть, кроме того,  $e_j$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , — ортогональный базис в  $\mathcal{H}$ .

**Теорема 1.5.2.** Пусть даны функции  $f_j: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $j = 1, 2, \dots$ . Тогда если найдётся числовая последовательность  $\alpha_j$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , такая, что

$$\sup_{p \in \mathcal{P}} |f_j(p)| \leq \alpha_j, \quad j = 1, 2, \dots,$$

и сходится числовой ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^2 \|e_j\|_{\mathcal{H}}^2,$$

то функциональный ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} f_j(p) e_j$$

сходится равномерно.

**Доказательство.** Для доказательства воспользуемся теоремой 1.5.1. Прежде всего заметим, что для всех  $i, k = 1, 2, \dots$  и всех  $p \in \mathcal{P}$  имеет место неравенство

$$\left\| \sum_{j=1}^{k+i} f_j(p) e_j - \sum_{j=1}^i f_j(p) e_j \right\|^2 = \left\| \sum_{j=i+1}^{k+i} f_j(p) e_j \right\|^2 = \sum_{j=i+1}^{k+i} |f_j(p)|^2 \|e_j\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \sum_{j=i+1}^{k+i} \alpha_j^2 \|e_j\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Таким образом,

$$\left\| \sum_{j=1}^{k+i} f_j(p) e_j - \sum_{j=1}^i f_j(p) e_j \right\|^2 \leq \sum_{j=i+1}^{k+i} \alpha_j^2 \|e_j\|_{\mathcal{H}}^2$$

для всех  $i, k = 1, 2, \dots$  и всех  $p \in \mathcal{P}$ .

Поскольку числовой ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^2 \|e_j\|_{\mathcal{H}}^2,$$

сходится, то для любого  $\varepsilon > 0$  найдётся номер  $i_0 = i_0(\varepsilon) \geq 1$ , такой, что для всех  $i \geq i_0(\varepsilon)$  и всех  $k \geq 1$

$$\sum_{j=i+1}^{k+i} \alpha_j^2 \|e_j\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \varepsilon^2.$$

Поэтому

$$\sup_{p \in \mathcal{P}} \left\| \sum_{j=1}^{k+i} f_j(p) e_j - \sum_{j=1}^i f_j(p) e_j \right\| \leq \sqrt{\sum_{j=i+1}^{k+i} \alpha_j^2 \|e_j\|_{\mathcal{H}}^2} \leq \varepsilon$$

при всех  $i \geq i_0(\varepsilon)$  и всех  $k \geq 1$ . Согласно теореме 1.5.1 это означает, что функциональная последовательность

$$\mathcal{P} \ni p \mapsto \sum_{j=1}^k f_j(p) e_j, \quad k = 1, 2, \dots,$$

равномерно по  $p \in \mathcal{P}$  сходится в норме пространства  $\mathcal{H}$  к некоторой функции  $F: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{H}$  при  $k \rightarrow \infty$ , что, в свой черёд, означает равномерную сходимость функционального ряда

$$\sum_{j=1}^{\infty} f_j(p) e_j.$$

Теорема доказана. ■

Пусть теперь  $\mathcal{P}$  — компактное топологическое пространство.

**Теорема 1.5.3.** Пусть последовательность функций  $f_j \in C(\mathcal{P}, X)$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , равномерно по  $p \in \mathcal{P}$  сходится в норме пространства  $X$  к некоторой функции  $f: \mathcal{P} \rightarrow X$  при  $j \rightarrow \infty$ . Тогда  $f \in C(\mathcal{P}, X)$ .

**Доказательство.** Выберем произвольно  $\varepsilon > 0$  и зафиксируем. В силу того, что  $f_j \xrightarrow[X]{\mathcal{P}} f$ ,  $j \rightarrow \infty$ , можно выбрать номер  $j_0 = j_0(\varepsilon) \geq 1$  так, чтобы

$$\sup_{p \in \mathcal{P}} \|f_j(p) - f(p)\|_X \leq \frac{\varepsilon}{3}$$



при всех  $j \geq j_0(\varepsilon)$ , и, в частности,

$$\sup_{p \in \mathcal{P}} \|f_{j_0(\varepsilon)}(p) - f(p)\|_X \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Выберем теперь  $p_0 \in \mathcal{P}$  и зафиксируем. Поскольку  $f_{j_0(\varepsilon)} \in C(\mathcal{P}, X)$ , то по заданному  $\varepsilon > 0$  можно так подобрать окрестность  $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\varepsilon)$  точки  $p_0$ , чтобы для всех  $p \in \mathcal{V}(\varepsilon)$

$$\|f_{j_0(\varepsilon)}(p) - f_{j_0(\varepsilon)}(p_0)\|_X \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \|f(p) - f(p_0)\|_X &\leq \|f(p) - f_{j_0(\varepsilon)}(p)\|_X + \|f_{j_0(\varepsilon)}(p) - f_{j_0(\varepsilon)}(p_0)\|_X + \|f_{j_0(\varepsilon)}(p_0) - f(p_0)\|_X \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

для всех  $p \in \mathcal{V}(\varepsilon)$ . Таким образом, для любого  $\varepsilon > 0$  найдётся окрестность  $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\varepsilon)$  точки  $p_0$ , такая, что при всех  $p \in \mathcal{V}(\varepsilon)$

$$\|f(p) - f(p_0)\|_X \leq \varepsilon.$$

В силу произвольности  $p_0 \in \mathcal{P}$  это означает, что  $f \in C(\mathcal{P}, X)$ . ■

**Следствие 1.5.1.** Пусть дана последовательность функций  $f_j \in C(\mathcal{P}, X)$ ,  $j = 1, 2, \dots$ . Если функциональный ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} f_j(p)$$

сходится равномерно на  $\mathcal{P}$ , то сумма ряда является элементом  $f \in C(\mathcal{P}, X)$ .

**Теорема 1.5.4.** Пусть последовательность функций  $f_j \in C^1([0, T], X)$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , при каждом  $t \in [0, T]$  сходится в норме  $X$  к функции  $f: [0, T] \rightarrow X$ , а последовательность производных  $f'_j$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , равномерно по  $t \in [0, T]$  сходится в норме пространства  $X$  к некоторой функции  $g: [0, T] \rightarrow X$  при  $j \rightarrow \infty$ . Тогда  $f \in C^1([0, T], X)$  и  $f' = g$ . Иными словами,

$$\frac{d}{dt} \left[ \lim_{j \rightarrow \infty} f_j(t) \right] = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{df_j(t)}{dt} \quad \forall t \in [0, T].$$

**Доказательство.** В силу теоремы 1.5.3 имеет место включение  $g \in C([0, T], X)$ . Далее, поскольку  $f_j \in C^1([0, T], X)$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , то

$$f_j(t) - f_j(0) - \int_0^t f'_j(\tau) d\tau = 0 \quad \forall t \in [0, T]. \quad (1.5.2)$$

Выберем произвольно  $t \in [0, T]$  и зафиксируем. Тогда, в силу условий теоремы,

$$\begin{aligned} \left\| \left[ f_j(t) - f_j(0) - \int_0^t f'_j(\tau) d\tau \right] - \left[ f(t) - f(0) - \int_0^t g'(\tau) d\tau \right] \right\|_X &\leq \|f_j(t) - f(t)\|_X + \|f_j(0) - f(0)\|_X + \\ &+ \left\| \int_0^t [f'_j(\tau) - g(\tau)] d\tau \right\|_X \leq \|f_j(t) - f(t)\|_X + \|f_j(0) - f(0)\|_X + \int_0^t \|f'_j(\tau) - g(\tau)\|_X d\tau \leq \\ &\leq \|f_j(t) - f(t)\|_X + \|f_j(0) - f(0)\|_X + t \max_{\tau \in [0, T]} \|f'_j(\tau) - g(\tau)\|_X \rightarrow 0, \quad j \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Переходя теперь с учётом данного соотношения к пределу при  $j \rightarrow \infty$  в равенстве (1.5.2), получим, что

$$f(t) - f(0) - \int_0^t g(\tau) d\tau = 0 \quad \forall t \in [0, T].$$

В силу свойств интеграла Римана и непрерывности функции  $g$  в норме  $X$  это означает, что  $f \in C^1([0, T], X)$  и  $f' = g$ . Теорема доказана. ■

Следствием данной теоремы является

**Теорема 1.5.5.** Пусть дана последовательность функций  $f_j \in C(\Gamma, X)$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , таких, что  $f_{jt} \in C(\Gamma, X)$ ,  $j = 1, 2, \dots$ . Пусть, кроме того, последовательность  $f_j$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , сходится при каждом  $(t, \xi) \in \Gamma$  в норме  $X$  к функции  $f: \Gamma \rightarrow X$ , и при каждом фиксированном  $\xi \in [0, T]$  последовательность  $f_{jt}(\cdot, \xi)$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , равномерно по  $t \in [0, T]$  сходится в норме  $X$  к функции  $g(\cdot, \xi)$ . Тогда при каждом фиксированном  $\xi \in [0, T]$  функция  $f(\cdot, \xi)$  является элементом  $C^1([0, T], X)$  и  $f_t = g$ .

**Доказательство.** Выберем произвольно  $\xi \in [0, T]$  и зафиксируем. Положим  $\Phi_{j,\xi}(t) \equiv f_j(t, \xi)$ ,  $\Psi_{j,\xi}(t) \equiv f_{jt}(t, \xi)$ ,  $\Phi_{0,\xi}(t) \equiv f(t, \xi)$ ,  $\Psi_{0,\xi}(t) \equiv g(t, \xi)$ ,  $j = 1, 2, \dots$ ,  $t \in [0, T]$ . Тогда получим, что при каждом  $t \in [0, T]$  последовательность  $\Phi_{j,\xi}$ ,  $j = 1, 2, \dots$ ,  $t \in [0, T]$ , сходится в норме  $X$  к  $\Phi_{0,\xi}$ , а последовательность  $\Psi_{j,\xi}$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , равномерно по  $t \in [0, T]$  сходится в норме  $X$  к  $\Psi_{0,\xi}$ . Таким образом, для последовательности  $\Phi_{j,\xi}(t) \equiv f_j(t, \xi)$ ,  $j = 1, 2, \dots$ ,  $t \in [0, T]$ , выполнены условия теоремы 1.5.4, откуда и следуют утверждения доказываемой теоремы. Теорема доказана. ■

**Следствие 1.5.2.** Пусть дана последовательность функций  $f_j \in C^1([0, T], X)$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , и пусть функциональный ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} f_j(t)$$

сходится в норме  $X$  при каждом фиксированном  $t \in [0, T]$  к функции  $F: [0, T] \rightarrow X$ , а функциональный ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} f'_j(t)$$

равномерно по  $t \in [0, T]$  сходится в норме  $X$  к функции  $G: [0, T] \rightarrow X$ . Тогда  $F \in C^1([0, T], X)$  и  $F' = G$ . Иными словами,

$$\frac{d}{dt} \left[ \sum_{j=1}^{\infty} f_j(t) \right] = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{df_j(t)}{dt} \quad \forall t \in [0, T].$$

**Следствие 1.5.3.** Пусть дана последовательность функций  $f_j \in C(\Gamma, X)$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , таких, что  $f_{jt} \in C(\Gamma, X)$ ,  $j = 1, 2, \dots$ . Пусть, кроме того, функциональный ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} f_j(t, \xi)$$

сходится в норме  $X$  при каждом фиксированном  $(t, \xi) \in \Gamma$  к функции  $F: \Gamma \rightarrow X$ , и при каждом фиксированном  $\xi \in [0, T]$  ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} f_{jt}(t, \xi)$$

равномерно по  $t \in [0, T]$  сходится в норме  $X$  к функции  $G(\cdot, \xi)$ . Тогда при каждом фиксированном  $\xi \in [0, T]$  функция  $F(\cdot, \xi)$  является элементом  $C^1([0, T], X)$  и  $F_t = G$ .

**Лемма 1.5.1.** [31] (Признак Дини равномерной сходимости) Пусть  $G \subset \mathbb{R}^m$  — компакт, а функции  $f_k: G \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , и функция  $f: G \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывны на  $G$ , причём  $f_k(x) \rightarrow f(x)$ ,  $k \rightarrow \infty$ , при всех  $x \in G$ . Тогда если либо

$$f_k(x) \geq f_{k+1}(x) \quad \forall k = 1, 2, \dots, \quad x \in G,$$

либо

$$f_{k+1}(x) \geq f_k(x) \quad \forall k = 1, 2, \dots, \quad x \in G,$$

то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{x \in G} |f_k(x) - f(x)| = 0.$$

**Лемма 1.5.2.** Пусть  $H$  — сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением  $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$  и соответствующей нормой  $\| \cdot \|_H$ . Пусть  $h_k \in H$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , — ортогональный базис в  $H$ ,

$p \in [1, +\infty)$ ,  $s \geq 0$  — фиксированное целое число,  $G_1 \subset \mathbb{R}^{m_1}$ ,  $G_2 \subset \mathbb{R}^{m_2}$  — компакты. Тогда для любых функций  $\vartheta_0 \in L_p(G_1, H)$ ,  $\vartheta_1 \in C^s(G_1, H)$ ,  $\vartheta_2 \in C^s(G_1, L_p(G_2, H))$  справедливы равенства

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|\vartheta_0^N - \vartheta_0\|_{p, G_1, H} = 0, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} |\vartheta_1^N - \vartheta_1|_{G_1, H}^{(s)} = 0, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} |\vartheta_2^N - \vartheta_2|_{G_1, L_p(G_2, H)}^{(s)} = 0,$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} \vartheta_0^N(x) &\equiv \sum_{k=1}^N \vartheta_{0k}(x) h_k, \quad \vartheta_1^N(x) \equiv \sum_{k=1}^N \vartheta_{1k}(x) h_k, \quad \vartheta_2^N(x, y) \equiv \sum_{k=1}^N \vartheta_{2k}(x, y) h_k, \\ \vartheta_{0j}(x) &\equiv \langle \vartheta_0(x), h_j \rangle_H, \quad \vartheta_{1j}(x) \equiv \langle \vartheta_1(x), h_j \rangle_H, \quad \vartheta_{2j}(x, y) \equiv \langle \vartheta_2(x, y), h_j \rangle_H, \\ &(x, y) \in G_1 \times G_2, \quad j, N = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

**Доказательство.** 1) Докажем сначала утверждение о функции  $\vartheta_0$ . Действительно, поскольку  $h_k \in H$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , — ортогональный базис в  $H$ , то

$$\begin{aligned} \|\vartheta_0^N(x) - \vartheta_0(x)\|_H^p &= \left[ \|\vartheta_0(x)\|_H^2 - \sum_{j=1}^N [\|h_j\|_H \vartheta_{0j}(x)]^2 \right]^{p/2} \leq \|\vartheta_0(x)\|_H^p \text{ при п.в. } x \in G_1; \\ \|\vartheta_0^N(x) - \vartheta_0(x)\|_H^p &\rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty, \text{ при п.в. } x \in G_1. \end{aligned}$$

Пользуясь затем теоремой Лебега о предельном переходе под знаком интеграла Лебега, заключаем, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|\vartheta_0^N - \vartheta_0\|_{p, G_1, H} = 0.$$

2) Докажем утверждение о функции  $\vartheta_1$ . Пусть мультииндекс  $i = (i_1, \dots, i_{m_1})$ ,  $|i| = \overline{0, s}$ , — произволен. Положим  $r_{N,i}(x) \equiv \left\| \frac{\partial^{|i|} \vartheta_1^N(x)}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_{m_1}^{i_{m_1}}} - \frac{\partial^{|i|} \vartheta_1(x)}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_{m_1}^{i_{m_1}}} \right\|_H$ ,  $x \in G_1$ . Тогда нетрудно видеть, что  $r_{N,i}$  непрерывна на  $G_1$ , причём

$$r_{N,i}(x) \geq r_{N+1,i}(x) \quad \forall x \in G_1, \quad N = 1, 2, \dots; \quad r_{N,i}(x) \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty, \quad \forall x \in G_1.$$

Применяя лемму 1.5.1, получаем, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |\vartheta_1^N - \vartheta_1|_{G_1, H}^{(s)} = 0.$$

3) Докажем утверждение о функции  $\vartheta_2$ . Пусть мультииндекс  $i = (i_1, \dots, i_{m_1})$ ,  $|i| = \overline{0, s}$ , — произволен. Положим  $\tau_{N,i}(x) \equiv \left\| \frac{\partial^{|i|} \vartheta_2^N(x, \cdot)}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_{m_1}^{i_{m_1}}} - \frac{\partial^{|i|} \vartheta_2(x, \cdot)}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_{m_1}^{i_{m_1}}} \right\|_{p, G_2, H}$ ,  $x \in G_1$ . В силу доказанного в первом пункте справедливы соотношения

$$\tau_{N,i}(x) \geq \tau_{N+1,i}(x) \quad \forall x \in G_1, \quad N = 1, 2, \dots; \quad \tau_{N,i}(x) \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty, \quad \forall x \in G_1.$$

Применяя лемму 1.5.1, получаем, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |\vartheta_2^N - \vartheta_2|_{G_1, L_p(G_2, H)}^{(s)} = 0.$$

Лемма полностью доказана. ■

Пусть  $V$  и  $H$  — сепарабельные гильбертовы пространства со скалярными произведениями  $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$  и  $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$  соответственно. Нормы, соответствующие этим скалярным произведениям, обозначим через  $\|\cdot\|_V$  и  $\|\cdot\|_H$ . Пусть, кроме того,  $V \subset H$ , причём это вложение плотно и компактно. Наконец, пусть  $g_k \in V$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , — ортогональная в  $V$  и ортонормированная в  $H$  система, такая, что для любых  $\varphi \in V$  и  $\psi \in H$  справедливо равенство

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|\varphi^N - \varphi\|_V = 0, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \|\psi^N - \psi\|_H = 0, \quad (1.5.3)$$

где

$$\varphi^N \equiv \sum_{m=1}^N \varphi_m g_m, \quad \psi^N \equiv \sum_{m=1}^N \psi_m g_m, \quad \varphi_k \equiv \langle \varphi, g_k \rangle_H, \quad \psi_k \equiv \langle \psi, g_k \rangle_H, \quad k, N = 1, 2, \dots$$

Пусть  $s \geq 0$  — фиксированное целое число,  $G \subset \mathbb{R}^m$  — замкнутая ограниченная область с кусочно-гладкой границей.

Покажем, что справедлива

**Лемма 1.5.3.** Для любых функций  $\vartheta_0 \in C^s(G, V)$ ,  $\vartheta_1 \in C^s(G, H)$ ,  $\vartheta_2 \in C^s([0, T], L_1(G, H))$ ,  $\vartheta_3 \in C^s(G \times [0, T], V)$  имеют место соотношения

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |\vartheta_0^N - \vartheta_0|_{G, V}^{(s)} = 0, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} |\vartheta_1^N - \vartheta_1|_{G, H}^{(s)} = 0, \quad (1.5.4)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |\vartheta_2^N - \vartheta_2|_{[0, T], L_1(G, H)}^{(s)} = 0, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} |\vartheta_3^N - \vartheta_3|_{G \times [0, T], V}^{(s)} = 0, \quad (1.5.5)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} \vartheta_0^N(x) &\equiv \sum_{k=1}^N \vartheta_{0k}(x) g_k, \quad \vartheta_1^N(x) \equiv \sum_{k=1}^N \vartheta_{1k}(x) g_k, \quad \vartheta_2^N(x, t) \equiv \sum_{k=1}^N \vartheta_{2k}(x, t) g_k, \\ \vartheta_3^N(x, t) &\equiv \sum_{k=1}^N \vartheta_{3k}(x, t) g_k, \quad \vartheta_{0j}(x) \equiv \langle \vartheta_0(x), g_j \rangle_H, \quad \vartheta_{1j}(x) \equiv \langle \vartheta_1(x), g_j \rangle_H, \quad \vartheta_{2j}(x, t) \equiv \langle \vartheta_2(x, t), g_j \rangle_H, \\ \vartheta_{3j}(x, t) &\equiv \langle \vartheta_3(x, t), g_j \rangle_H, \quad (x, t) \in G \times [0, T], \quad j, N = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

При этом пространство  $C^1(G, V)$  всюду плотно в  $C(G, H)$ , а пространство  $C^1(G \times [0, T], V)$  всюду плотно в  $C([0, T], L_1(G, H))$ .

**Доказательство.** 1) Предельные соотношения (1.5.4) и (1.5.5) являются непосредственными следствиями условий на систему  $g_j \in V$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , и леммы 1.5.2.

2) Утверждение о плотности  $C^1(G_1, V)$  в  $C(G_1, H)$  является следствием классической теоремы Вейерштрасса об аппроксимации непрерывных на отрезке вещественнозначных функций многочленами и предельных соотношений (1.5.4) и (1.5.5).

3) Докажем утверждение о плотности  $C^1(G \times [0, T], V)$  в  $C([0, T], L_1(G, H))$ . Нетрудно видеть, что  $\vartheta_{2k} \in C([0, T], L_1(G))$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Поэтому нам достаточно доказать, что пространство  $C^1(G \times [0, T])$  всюду плотно в пространстве  $C([0, T], L_1(G))$ . В самом деле, согласно лемме 1.1.7, множество многочленов с коэффициентами из  $L_1(G)$  всюду плотно в  $C([0, T], L_1(G))$ . Поскольку же, как известно, множество  $C^1(G)$  всюду плотно в  $L_1(G)$ , то множество  $C^1(G \times [0, T])$  всюду плотно в пространстве  $C([0, T], L_1(G))$ . Лемма полностью доказана. ■

## 1.6. Интегралы, зависящие от параметра

Пусть  $X$  — банахово пространство с нормой  $\|\cdot\|_X$ ,  $Y$  — банахово пространство с нормой  $\|\cdot\|_Y$ .

**Теорема 1.6.1.** Пусть задана функция  $f: \Gamma \rightarrow X$ . Если  $f \in C(\Gamma, X)$ , то функция

$$[0, T] \ni t \mapsto (P) \int_0^t f(t, \xi) d\xi$$

принадлежит классу  $C([0, T], X)$ .

**Доказательство.** Поскольку  $f \in C(\Gamma, X)$ , то согласно теореме 1.1.17 она равномерно непрерывна на  $\Gamma$ , т.е.

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \forall (t', \xi'), (t'', \xi'') \in \Gamma, |(t', \xi') - (t'', \xi'')| < \delta : \\ \|f(t', \xi') - f(t'', \xi'')\|_X &< \frac{\varepsilon}{T}. \end{aligned} \quad (1.6.1)$$

Пусть  $t_0, t \in [0, T]$  — произвольны. Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^t f(t, \xi) d\xi - \int_0^{t_0} f(t_0, \xi) d\xi &= \int_0^t f(t, \xi) d\xi - \int_0^{t_0} f(t, \xi) d\xi + \int_0^{t_0} [f(t, \xi) - f(t_0, \xi)] d\xi = \\ &= \int_{t_0}^t f(t, \xi) d\xi + \int_0^{t_0} [f(t, \xi) - f(t_0, \xi)] d\xi, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t f(t, \xi) d\xi - \int_0^{t_0} f(t_0, \xi) d\xi \right\|_X &\leq \left| \int_{t_0}^t \|f(t, \xi)\|_X d\xi \right| + \int_0^{t_0} \|f(t, \xi) - f(t_0, \xi)\|_X d\xi \leq \\ &\leq |t - t_0| \max_{(\tau, \xi) \in \Gamma} \|f(\tau, \xi)\|_X + \int_0^T \|f(t, \xi) - f(t_0, \xi)\|_X d\xi. \end{aligned}$$

Таким образом, нам достаточно лишь доказать, что

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^T \|f(t, \xi) - f(t_0, \xi)\|_X d\xi = 0. \quad (1.6.2)$$

В самом деле, выберем произвольно  $\varepsilon > 0$  и зафиксируем. Подберём  $\delta = \delta(\varepsilon)$  согласно (1.6.1) и выберем  $t \in [0, T]$  так, чтобы  $|t - t_0| < \delta$ . Тогда, в силу (1.6.1),

$$\|f(t, \xi) - f(t_0, \xi)\|_X < \frac{\varepsilon}{T}$$

при всех  $\xi \in [0, T]$ . Поэтому

$$\int_0^T \|f(t, \xi) - f(t_0, \xi)\|_X d\xi \leq \varepsilon.$$

Таким образом, соотношение (1.6.2), а вместе с ним и настоящая теорема, доказаны. ■

**Лемма 1.6.1.** Пусть  $\Pi(t, \xi) \in \mathcal{L}(X, Y)$  при всех  $(t, \xi) \in \Gamma$ , при всех  $x \in X$  функция  $\Gamma \ni (t, \xi) \mapsto \Pi(t, \xi)x$  принадлежит  $C(\Gamma, Y)$ , и пусть  $z \in L_1([0, T], X)$ . Тогда функция

$$[0, T] \ni t \mapsto \int_0^t \Pi(t, \xi) z(\xi) d\xi$$

непрерывна на  $[0, T]$  в норме  $Y$ .

**Доказательство.** Выберем произвольно функцию  $y \in L_1([0, T], X)$  и зафиксируем. Введём обозначение

$$\Theta(t) = \int_0^t \Pi(t, \xi) y(\xi) d\xi, \quad t \in [0, T].$$

Согласно лемме 1.1.8, найдётся постоянная  $K > 0$ , такая, что

$$\sup_{(t, \xi) \in \Gamma} \|\Pi(t, \xi)\|_{X \rightarrow Y} \leq K.$$

Поэтому при каждом фиксированном  $t \in [0, T]$  функция  $[0, T] \ni \xi \mapsto \Pi(t, \xi)z(\xi)$  принадлежит пространству  $L_1([0, T], Y)$ .

Утверждение леммы эквивалентно включению  $\Theta \in C([0, T], Y)$ . Докажем его.

Пусть  $t, t + \Delta t \in [0, T]$  — произвольны. Тогда

$$\begin{aligned} \Theta(t + \Delta t) - \Theta(t) &= \int_0^{t+\Delta t} \Pi(t + \Delta t, \xi) y(\xi) d\xi - \int_0^t \Pi(t, \xi) y(\xi) d\xi = \\ &= \int_0^{t+\Delta t} [\Pi(t + \Delta t, \xi) - \Pi(t, \xi)] y(\xi) d\xi + \int_t^{t+\Delta t} \Pi(t, \xi) y(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\|\Theta(t + \Delta t) - \Theta(t)\|_Y \leq \int_0^T \|\Pi(t + \Delta t, \xi) - \Pi(t, \xi)\|_Y d\xi + \left\| \int_t^{t+\Delta t} \Pi(t, \xi) y(\xi) d\xi \right\|_Y.$$

Первое слагаемое в правой части последнего неравенства стремится к нулю при  $\Delta t \rightarrow 0$  в силу теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла Лебега, а второе — за счёт абсолютной непрерывности интеграла Бохнера. Таким образом, включение  $\Theta \in C([0, T], X)$  доказано, а вместе с ним полностью доказана и данная лемма. ■

**Теорема 1.6.2.** Пусть задана функция  $f: \Gamma \rightarrow X$ ,  $f = f(t, \xi)$ . Если  $f, f_t \in C(\Gamma, X)$ , то функция

$$[0, T] \ni t \mapsto \int_0^t f(t, \xi) d\xi \quad (1.6.3)$$

непрерывно дифференцируема на  $[0, T]$  в норме  $X$ , причём

$$\frac{d}{dt} \int_0^t f(t, \xi) d\xi = f(t, t) + \int_0^t f_t(t, \xi) d\xi \quad \forall t \in [0, T]. \quad (1.6.4)$$

**Доказательство.** Введём обозначения

$$\Theta_0(t) \equiv \int_0^t f(t, \xi) d\xi, \quad \Theta_1(t) \equiv f(t, t) + \int_0^t f_t(t, \xi) d\xi, \quad t \in [0, T].$$

Принадлежность функций  $\Theta_0$  и  $\Theta_1$  банахову пространству  $C([0, T], X)$  следует из условий на функцию  $f$  и теоремы 1.6.1. Таким образом, нам нужно лишь доказать, что  $\Theta'_0 = \Theta_1$ .

В самом деле, пусть  $t, t + \Delta t \in [0, T]$  — произвольны. Тогда

$$\begin{aligned} \Theta_0(t + \Delta t) - \Theta_0(t) &= \int_0^{t+\Delta t} f(t + \Delta t, \xi) d\xi - \int_0^t f(t, \xi) d\xi = \int_0^{t+\Delta t} f(t + \Delta t, \xi) d\xi - \int_0^t f(t + \Delta t, \xi) d\xi + \\ &+ \int_0^t [f(t + \Delta t, \xi) - f(t, \xi)] d\xi = \int_t^{t+\Delta t} f(t + \Delta t, \xi) d\xi + \int_0^t [f(t + \Delta t, \xi) - f(t, \xi)] d\xi = \\ &= \int_t^{t+\Delta t} [f(t + \Delta t, \xi) - f(t, t)] d\xi + \int_t^{t+\Delta t} f(t, t) d\xi + \int_0^t [f(t + \Delta t, \xi) - f(t, \xi)] d\xi = \Delta t f(t, t) + \\ &+ \int_0^t [f(t + \Delta t, \xi) - f(t, \xi)] d\xi + \int_t^{t+\Delta t} [f(t + \Delta t, \xi) - f(t, t)] d\xi, \end{aligned}$$

откуда вытекает, что

$$\begin{aligned} \frac{\Theta_0(t + \Delta t) - \Theta_0(t)}{\Delta t} &= f(t, t) + \int_0^t \frac{f(t + \Delta t, \xi) - f(t, \xi)}{\Delta t} d\xi + \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} [f(t + \Delta t, \xi) - f(t, t)] d\xi = \\ &= f(t, t) + \int_0^t f_t(t, \xi) d\xi + \int_0^t \left[ \frac{f(t + \Delta t, \xi) - f(t, \xi)}{\Delta t} - f_t(t, \xi) \right] d\xi + \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} [f(t + \Delta t, \xi) - f(t, t)] d\xi = \\ &= \Theta_1(t) + \int_0^t \left[ \frac{f(t + \Delta t, \xi) - f(t, \xi)}{\Delta t} - f_t(t, \xi) \right] d\xi + \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} [f(t + \Delta t, \xi) - f(t, t)] d\xi = \Theta_1(t) + \\ &+ \int_0^t \left[ \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} f_t(\eta, \xi) d\eta - f_t(t, \xi) \right] d\xi + \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} [f(t + \Delta t, \xi) - f(t, t)] d\xi = \Theta_1(t) + \\ &+ \int_0^t \left[ \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} [f_t(\eta, \xi) - f_t(t, \xi)] d\eta \right] d\xi + \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} [f(t + \Delta t, \xi) - f(t, t)] d\xi. \end{aligned}$$

Итак,

$$\frac{\Theta_0(t + \Delta t) - \Theta_0(t)}{\Delta t} - \Theta_1(t) = \int_0^t \left[ \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} [f_t(\eta, \xi) - f_t(t, \xi)] d\eta \right] d\xi + \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} [f(t + \Delta t, \xi) - f(t, t)] d\xi.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\Theta_0(t + \Delta t) - \Theta_0(t)}{\Delta t} - \Theta_1(t) \right\|_X &\leq \left| \frac{1}{\Delta t} \int_0^T \left[ \int_t^{t+\Delta t} \|f_t(\eta, \xi) - f_t(t, \xi)\|_X d\eta \right] d\xi \right| + \\ &+ \left| \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \|f(t + \Delta t, \xi) - f(t, t)\|_X d\xi \right|. \end{aligned}$$

Поскольку  $f, f_t \in C(\Gamma, X)$ , то, согласно теореме 1.1.17 они равномерно непрерывны на  $\Gamma$ , т.е.

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \forall (t', \xi'), (t'', \xi'') \in \Gamma, |(t', \xi') - (t'', \xi'')| < \delta : \\ \|f(t', \xi') - f(t'', \xi'')\|_X < \frac{\varepsilon}{2T}, \|f_t(t', \xi') - f_t(t'', \xi'')\|_X < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \quad (1.6.5)$$

Выберем произвольно  $\varepsilon > 0$  и подберём по нему  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  согласно (1.6.5). Пусть теперь  $|\Delta t| < \frac{\delta}{\sqrt{2}}$ . Тогда  $|(\eta, \xi) - (t, \xi)| < \delta$  при всех  $\eta$ , лежащих между  $t$  и  $t + \Delta t$  и всех  $\xi \in [0, T]$ , откуда, в силу (1.6.5), вытекает, что при всех таких  $\eta$  и  $\xi$

$$\|f_t(\eta, \xi) - f_t(t, \xi)\|_X \leq \frac{\varepsilon}{2T},$$

и, как следствие

$$\left| \frac{1}{\Delta t} \int_0^T \left[ \int_t^{t+\Delta t} \|f_t(\eta, \xi) - f_t(t, \xi)\|_X d\eta \right] d\xi \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда выводим, что при  $|\Delta t| < \frac{\delta}{\sqrt{2}}$

$$\left\| \frac{\Theta_0(t + \Delta t) - \Theta_0(t)}{\Delta t} - \Theta_1(t) \right\|_X \leq \frac{\varepsilon}{2} + \left| \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \|f(t + \Delta t, \xi) - f(t, t)\|_X d\xi \right|.$$

Поскольку  $|\Delta t| < \frac{\delta}{\sqrt{2}}$ , то  $|(t + \Delta t, \xi) - (t, t)| = \sqrt{|\Delta t|^2 + |\xi - t|^2} \leq |\Delta t| \sqrt{2} < \delta$  при всех  $\xi$ , лежащих между  $t$  и  $t + \Delta t$ . Поэтому, на основании (1.6.5), при всех таких  $\xi$

$$\|f(t + \Delta t, \xi) - f(t, t)\|_X \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

вследствие чего

$$\left| \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \|f(t + \Delta t, \xi) - f(t, t)\|_X d\xi \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Итак,

$$\left\| \frac{\Theta_0(t + \Delta t) - \Theta_0(t)}{\Delta t} - \Theta_1(t) \right\|_X \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

при  $|\Delta t| < \frac{\delta}{\sqrt{2}}$ , что и доказывает равенство  $\Theta'_0 = \Theta_1$ . Теорема полностью доказана. ■

Из леммы 1.1.10 и только что доказанной теоремы вытекает

**Теорема 1.6.3.** Пусть  $\Pi(t, \xi) \in \mathcal{L}(X, Y)$  при всех  $(t, \xi) \in \Gamma$ , причём при всех  $x \in X$  функция  $\Gamma \ni (t, \xi) \mapsto \Pi(t, \xi)x$  принадлежит  $C(\Gamma, Y)$  и при всех  $(t, \xi) \in \Gamma$  имеет непрерывную на  $\Gamma$  в норме  $Y$  производную  $\Gamma \ni (t, \xi) \mapsto \Pi_t(t, \xi)x$ . Если  $z \in C([0, T], X)$ , то функция

$$[0, T] \ni t \mapsto \int_0^t \Pi(t, \xi) z(\xi) d\xi$$

непрерывно дифференцируема на  $[0, T]$  в норме  $X$  и

$$\frac{d}{dt} \int_0^t \Pi(t, \xi) z(\xi) d\xi = \Pi(t, t) z(t) + \int_0^t \Pi_t(t, \xi) z(\xi) d\xi \quad \forall t \in [0, T].$$

## 1.7. Сведения из негладкого анализа

Для дальнейшего нам потребуются нижеследующие определение и результаты [8], [9]. Пусть  $\Xi \subset \mathbb{R}^m$  — непустое замкнутое множество,  $\varepsilon \geq 0$ ,  $x \in \Xi$ . Непустое множество

$$\hat{N}_\varepsilon(x; \Xi) \equiv \{x^* \in \mathbb{R}^m : \limsup_{u \xrightarrow{\Xi} x} \frac{\langle x^*, u - x \rangle}{|u - x|} \leq \varepsilon\}$$

называется множеством  $\varepsilon$ -нормалей Фреше ко множеству  $\Xi$  в точке  $x$ . Здесь  $u \xrightarrow{\Xi} x$  означает, что  $u \rightarrow x$  при  $u \in \Xi$ . В частности,  $\hat{N}_0(x; \Xi)$  называется конусом нормалей Фреше ко множеству  $\Xi$  в точке  $x$  и обозначается через  $\hat{N}(x; \Xi)$ . Определим (основной, предельный) нормальный конус в точке  $\bar{x} \in \Xi$  как  $N(\bar{x}; \Xi) \equiv \limsup_{x \xrightarrow{\Xi, \varepsilon \downarrow 0} \bar{x}} \hat{N}_\varepsilon(x; \Xi)$ .

Можно показать (подробности в [8], [9]), что  $N(\bar{x}; \Xi) \equiv \limsup_{x \xrightarrow{\Xi, \varepsilon \downarrow 0} \bar{x}} \hat{N}(x; \Xi)$ . Для полунепрерывной снизу функции  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  и  $\bar{x} \in \text{dom } f$  субдифференциал Фреше  $\hat{\partial}f(\bar{x})$  функции  $f$  в точке  $\bar{x} \in \text{dom } f$  определяется как

$$\hat{\partial}f(\bar{x}) \equiv \left\{x^* \in \mathbb{R}^m : \liminf_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{f(x) - f(\bar{x}) - \langle x^*, x - \bar{x} \rangle}{|x - \bar{x}|} \geq 0\right\},$$

или, эквивалентно, как

$$\hat{\partial}f(\bar{x}) \equiv \left\{x^* \in \mathbb{R}^m : (x^*, -1) \in \hat{N}((\bar{x}, f(\bar{x})); \text{epi } f)\right\}.$$

Для любого  $\bar{x} \in \text{dom } f$  множества

$$\begin{aligned} \partial f(\bar{x}) &\equiv \{x^* \in \mathbb{R}^m : (x^*, -1) \in N((\bar{x}, f(\bar{x})); \text{epi } f)\}, \\ \partial^\infty f(\bar{x}) &\equiv \{x^* \in \mathbb{R}^m : (x^*, 0) \in N((\bar{x}, f(\bar{x})); \text{epi } f)\}, \end{aligned}$$

называются соответственно субдифференциалом и сингулярным субдифференциалом функции  $f$  в точке  $\bar{x}$  в смысле [8], [9]. Если функция  $f$  полунепрерывна снизу, то справедливы следующие соотношения:

$$\partial f(\bar{x}) = \limsup_{x \xrightarrow{f} \bar{x}} \hat{\partial}f(x), \quad \partial^\infty f(\bar{x}) = \limsup_{x \xrightarrow{f} \bar{x}; \varepsilon \downarrow 0} \varepsilon \hat{\partial}f(x), \quad (1.7.1)$$

где  $x \xrightarrow{f} \bar{x}$  означает, что  $x \rightarrow \bar{x}$ ,  $f(x) \rightarrow f(\bar{x})$ . Мы имеем  $\partial^\infty f(\bar{x}) = \{0\}$ , если  $f$  липшицева в окрестности точки  $\bar{x}$ .

Справедлив следующий важный результат (см. [8], [9]).

**Лемма 1.7.1.** Пусть  $\Xi \subset \mathbb{R}^m$  — непустое замкнутое множество. Тогда множество точек  $\{x \in \Xi : \hat{N}(x; \Xi) \neq \{0\}\}$ , т.е. множество всех граничных точек множества  $\Xi$ , в которых существует ненулевая нормаль Фреше, всюду плотно во множестве всех граничных точек множества  $\Xi$ . Кроме того, для любой полунепрерывной снизу функции  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  множество  $\{x \in \text{dom } f : \hat{\partial}f(x) \neq \emptyset\}$  всюду плотно в  $\text{dom } f$ .

Из определения субдифференциала Фреше функции  $f$  в точке  $x$  непосредственно вытекает

**Лемма 1.7.2.** Пусть  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  — полунепрерывная снизу функция,  $x \in \text{dom } f$ . Если  $(x^*, -\bar{v}) \in \hat{N}((x, f(x)); \text{epi } f)$ ,  $\bar{v} > 0$ , то для любого  $\varepsilon > 0$  найдется окрестность  $\Pi_\varepsilon^m(x)$  точки  $x$ , такая, что  $\bar{v}f(x') - \bar{v}f(x) - \langle x^*, x' - x \rangle + \varepsilon|x' - x| \geq 0 \quad \forall x' \in \Pi_\varepsilon^m(x)$ .



# Глава 2. Теоремы вложения

## 2.1. Вещественные функции одного вещественного переменного

Сформулируем прежде всего следующий классический результат.

**Теорема 2.1.1.** *Множество  $W_1^1[0, T]$  совпадает с множеством всех абсолютно непрерывных на отрезке  $[0, T]$  функций. При этом если функция  $\xi \in W_1^1[0, T]$ , то производная функции  $\xi$ , понимаемая в классическом смысле, существует почти всюду на отрезке  $[0, T]$  и почти всюду совпадает с обобщённой производной в смысле Соболева.*

Следствием данной теоремы является

**Теорема 2.1.2.** *Пусть  $\xi \in W_p^1[0, T]$ ,  $p \in [1, +\infty]$ . Тогда найдётся константа  $A_1 = A_1(p, T) > 0$ , зависящая лишь от  $p \in [1, +\infty]$  и от  $T > 0$ , такая, что*

$$\max_{t \in [0, T]} |\xi(t)| \leq A_1 \|\xi\|_{p, [0, T]}^{(1)}.$$

При этом если  $p > 1$ , то вложение  $W_p^1[0, T] \subset C[0, T]$  — компактно.

**Доказательство.** 1) Пусть  $p = 1$ . Пусть  $\xi \in W_1^1[0, T]$ . Тогда, на основании теоремы 2.1.1,  $\xi$  абсолютно непрерывна на отрезке  $[0, T]$ , причём производная функции  $\xi$ , понимаемая в классическом смысле, существует почти всюду на отрезке  $[0, T]$  и почти всюду совпадает с обобщённой производной в смысле Соболева. Поэтому при всех  $t, \tau \in [0, T]$

$$\xi(t) = \xi(\tau) + \int_{\tau}^t \xi'(\omega) d\omega.$$

Следовательно,

$$|\xi(t)| \leq |\xi(\tau)| + \left| \int_{\tau}^t |\xi'(\omega)| d\omega \right|.$$

Интегрируя по переменной  $\tau \in [0, T]$ , получаем, что

$$T|\xi(t)| \leq \int_0^T |\xi(\tau)| d\tau + \int_0^T \left| \int_{\tau}^t |\xi'(\omega)| d\omega \right| d\tau \leq \int_0^T |\xi(\tau)| d\tau + T \int_0^T |\xi'(\tau)| d\tau \leq \max\{1, T\} \|\xi\|_{1, [0, T]}^{(1)},$$

то есть

$$|\xi(t)| \leq \max\{1, T^{-1}\} \|\xi\|_{1, [0, T]}^{(1)} \quad \forall t \in [0, T],$$

откуда следует требуемая оценка с  $A_1 = \max\{1, \frac{1}{T}\}$ .

2) Пусть  $p = \infty$ , и пусть  $\xi \in W_{\infty}^1[0, T]$ . Нетрудно видеть, что  $\xi \in W_1^1[0, T]$ . В силу теоремы 2.1.1 функция  $\xi$  абсолютно непрерывна на отрезке  $[0, T]$ , производная функции  $\xi$ , понимаемая в классическом смысле, существует почти всюду на отрезке  $[0, T]$  и почти всюду совпадает с обобщённой производной в смысле Соболева. Поэтому при всех  $t, \tau \in [0, T]$

$$\xi(t) = \xi(\tau) + \int_{\tau}^t \xi'(\omega) d\omega.$$

Следовательно,

$$|\xi(t)| \leq |\xi(\tau)| + \left| \int_{\tau}^t |\xi'(\omega)| d\omega \right| \leq \|\xi\|_{\infty, [0, T]} + T \|\xi'\|_{\infty, [0, T]} \leq \max\{1, T\} \|\xi\|_{\infty, [0, T]}^{(1)}.$$

Таким образом,

$$\max_{t \in [0, T]} |\xi(t)| \leq \max\{1, T\} \|\xi\|_{\infty, [0, T]}^{(1)},$$

и, следовательно, можно взять  $A_1 = \max\{1, T\}$ .

Докажем теперь компактность вложения  $W_{\infty}^1[0, T] \subset C[0, T]$ . Пусть  $\mathfrak{M} \subset W_{\infty}^1[0, T]$  — ограничено в норме пространства  $W_{\infty}^1[0, T]$ , то есть найдётся постоянная  $C > 0$ , такая, что

$$\|\psi\|_{\infty, [0, T]}^{(1)} \leq C \quad \forall \psi \in \mathfrak{M}.$$

Тогда

$$|\psi|_{[0, T]}^{(0)} \leq A_1 C \quad \forall \psi \in \mathfrak{M}.$$

Пусть  $t', t'' \in [0, T]$ ,  $\psi \in \mathfrak{M}$  — произвольны. Тогда

$$|\psi(t') - \psi(t'')| \leq \left| \int_{t'}^{t''} |\psi'(\omega)| d\omega \right| \leq C |t' - t''|.$$

Следовательно, множество  $\mathfrak{M}$  равномерно ограничено в норме пространства  $C[0, T]$  и равностепенно непрерывно. Поэтому, в силу теоремы Арцела–Асколи, множество  $\mathfrak{M}$  предкомпактно в  $C[0, T]$ .

3) Пусть  $1 < p < \infty$ , и пусть  $\xi \in W_p^1[0, T]$ . Нетрудно видеть, что  $\xi \in W_1^1[0, T]$ . В силу теоремы 2.1.1 функция  $\xi$  абсолютно непрерывна на отрезке  $[0, T]$ , производная функции  $\xi$ , понимаемая в классическом смысле, существует почти всюду на отрезке  $[0, T]$  и почти всюду совпадает с обобщённой производной в смысле Соболева. Поэтому при всех  $t, \tau \in [0, T]$

$$|\xi(t)|^p = |\xi(\tau)|^p + \int_{\tau}^t p |\xi(\omega)|^{p-1} \operatorname{sgn} \xi(\omega) \xi'(\omega) d\omega \leq |\xi(\tau)|^p + p \left| \int_{\tau}^t |\xi(\omega)|^{p-1} |\xi'(\omega)| d\omega \right|.$$

Проинтегрировав последнее неравенство по переменной  $\tau \in [0, T]$ , получим, что

$$\begin{aligned} T |\xi(t)|^p &\leq \int_0^T |\xi(\tau)|^p d\tau + p \int_0^T \left| \int_{\tau}^t |\xi(\omega)|^{p-1} |\xi'(\omega)| d\omega \right| d\tau \leq \int_0^T |\xi(\tau)|^p d\tau + pT \int_0^T |\xi(\omega)|^{p-1} |\xi'(\omega)| d\omega \leq \\ &\leq \int_0^T |\xi(\tau)|^p d\tau + pT \left[ \int_0^T |\xi(\omega)|^p d\omega \right]^{\frac{p-1}{p}} \left[ \int_0^T |\xi'(\omega)|^p d\omega \right]^{1/p} = \|\xi\|_{p, [0, T]}^p + pT \|\xi\|_{p, [0, T]}^{p-1} \|\xi'\|_{p, [0, T]} = \\ &= \|\xi\|_{p, [0, T]}^{p-1} [\|\xi\|_{p, [0, T]} + pT \|\xi'\|_{p, [0, T]}] \leq \left[ \max_{\omega \in [0, T]} |\xi(\omega)| \right]^{p-1} T^{\frac{p-1}{p}} [\|\xi\|_{p, [0, T]} + pT \|\xi'\|_{p, [0, T]}] \leq \\ &\leq \left[ \max_{\omega \in [0, T]} |\xi(\omega)| \right]^{p-1} T^{\frac{p-1}{p}} \left[ 1 + (pT)^{\frac{p}{p-1}} \right]^{\frac{p-1}{p}} \|\xi\|_{p, [0, T]}^{(1)}. \end{aligned}$$

Как следствие,

$$\left[ \max_{t \in [0, T]} |\xi(t)| \right]^p \leq \left[ \max_{\omega \in [0, T]} |\xi(\omega)| \right]^{p-1} T^{\frac{p-1}{p}} T^{-1} \left[ 1 + (pT)^{\frac{p}{p-1}} \right]^{\frac{p-1}{p}} \|\xi\|_{p, [0, T]}^{(1)},$$

откуда

$$\max_{t \in [0, T]} |\xi(t)| \leq T^{\frac{p-1}{p}} T^{-1} \left[ 1 + (pT)^{\frac{p}{p-1}} \right]^{\frac{p-1}{p}} \|\xi\|_{p, [0, T]}^{(1)},$$

так что можно взять постоянную  $A_1 = T^{\frac{p-1}{p}} T^{-1} \left[ 1 + (pT)^{\frac{p}{p-1}} \right]^{\frac{p-1}{p}}$ .

Докажем теперь компактность вложения  $W_p^1[0, T] \subset C[0, T]$ . Пусть  $\mathfrak{M} \subset W_p^1[0, T]$  — ограничено в норме пространства  $W_p^1[0, T]$ , то есть найдётся постоянная  $C > 0$ , такая, что

$$\|\psi\|_{p, [0, T]}^{(1)} \leq C \quad \forall \psi \in \mathfrak{M}.$$

Тогда

$$|\psi|_{[0,T]}^{(0)} \leq A_1 C \quad \forall \psi \in \mathfrak{M}.$$

Пусть  $t', t'' \in [0, T]$ ,  $\psi \in \mathfrak{M}$  — произвольны. Тогда

$$|\psi(t') - \psi(t'')| \leq \left| \int_{t'}^{t''} |\psi'(\omega)| d\omega \right| \leq |t' - t''|^{\frac{p-1}{p}} \|\psi'\|_{p,[0,T]} \leq C |t' - t''|^{\frac{p-1}{p}}.$$

Следовательно, множество  $\mathfrak{M}$  равномерно ограничено в норме пространства  $C[0, T]$  и равностепенно непрерывно. Поэтому, в силу теоремы Арцела–Асколи, множество  $\mathfrak{M}$  предкомпактно в  $C[0, T]$ . ■

## 2.2. Вещественные функции нескольких вещественных переменных

**Теорема 2.2.1.** [43, стр.84–85] Если  $n < 2t$ , то справедливо вложение  $W_2^m(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$ , причём найдётся постоянная  $A_2 = A_2(m, n, \Omega) > 0$ , зависящая лишь от  $m$ , размерности  $n$  и области  $\Omega$ , такая, что

$$|z|_{\Omega}^{(0)} \leq A_2 \|z\|_{2,\Omega}^{(m)}.$$

Кроме того, вложение  $W_2^m(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$  компактно.

Если  $n = 2t$ , то при всех  $p \in (1, \infty)$  справедливо вложение  $W_2^m(\Omega) \subset L_p(\Omega)$ , причём найдётся постоянная  $A_3 = A_3(m, n, p, \Omega) > 0$ , зависящая лишь от  $p \in (1, \infty)$ ,  $m$ , размерности  $n$  и области  $\Omega$ , такая, что

$$\|z\|_{p,\Omega} \leq A_3 \|z\|_{2,\Omega}^{(m)}.$$

Кроме того, вложение  $W_2^m(\Omega) \subset L_p(\Omega)$  компактно.

Если  $n > 2t$ , то при всех  $p \in (1, \frac{2n}{n-2m})$  справедливо вложение  $W_2^m(\Omega) \subset L_p(\Omega)$ , причём найдётся постоянная  $A_4 = A_4(m, n, p, \Omega) > 0$ , зависящая лишь от  $p \in (1, \frac{2n}{n-2m})$ ,  $m$ , размерности  $n$  и области  $\Omega$ , такая, что

$$\|z\|_{p,\Omega} \leq A_4 \|z\|_{2,\Omega}^{(m)}.$$

Кроме того, вложение  $W_2^m(\Omega) \subset L_p(\Omega)$  компактно.

**Теорема 2.2.2.** [43, стр.84–85] Если  $n = 2t$ , то при всех  $q \in (1, \infty)$  справедливо вложение  $W_2^m(\Omega) \subset L_q(S)$ , причём найдётся постоянная  $A_5 = A_5(m, n, q, \Omega) > 0$ , зависящая лишь от  $q \in (1, \infty)$ ,  $m$ , размерности  $n$  и области  $\Omega$ , такая, что

$$\|z\|_{q,S} \leq A_5 \|z\|_{2,\Omega}^{(m)}.$$

Кроме того, вложение  $W_2^m(\Omega) \subset L_q(S)$  компактно.

Если  $n > 2t$ , то при всех  $q \in (1, \frac{2(n-1)}{n-2m})$  справедливо вложение  $W_2^m(\Omega) \subset L_q(S)$ , причём найдётся постоянная  $A_6 = A_6(m, n, q, \Omega) > 0$ , зависящая лишь от  $q \in (1, \frac{2(n-1)}{n-2m})$ ,  $m$ , размерности  $n$  и области  $\Omega$ , такая, что

$$\|z\|_{q,S} \leq A_6 \|z\|_{2,\Omega}^{(m)}.$$

Кроме того, вложение  $W_2^m(\Omega) \subset L_q(S)$  компактно.

**Теорема 2.2.3.** [43, неравенство (6.24) главы 1] Для всех  $z \in W_2^1(\Omega)$  и всех  $\varepsilon > 0$  справедливо неравенство

$$\int_S z^2 ds \leq \int_{\Omega} [\varepsilon |\nabla_x z|^2 + A_7(\varepsilon) z^2] dx,$$

где постоянная  $A_7 = A_7(\varepsilon) > 0$  зависит лишь от области  $\Omega$ , размерности  $n$  и числа  $\varepsilon > 0$ .

### 2.3. Функции одного переменного, принимающие значения в банаховом пространстве

Пусть  $X$  — сепарабельное банахово пространство с нормой  $\|\cdot\|_X$ , и пусть  $\mathfrak{D}(0, T) \equiv C_0^\infty(0, T)$ .

**Определение 2.3.1.** Говорят, что последовательность функций  $\varphi_j \in \mathfrak{D}(0, T)$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , сходится в  $\mathfrak{D}(0, T)$  к функции  $\varphi \in \mathfrak{D}(0, T)$ , если найдётся отрезок  $[\tau_1, \tau_2] \subset [0, T]$ ,  $0 < \tau_1 < \tau_2 < T$ , такой, что носители  $\text{supp } \varphi_j \equiv \text{cl}\{t \in [0, T] : \varphi_j(t) \neq 0\}$  функций  $\varphi_j$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , содержатся в  $[\tau_1, \tau_2]$  и

$$\lim_{j \rightarrow \infty} |\varphi_j^{(m)} - \varphi^{(m)}|_{[0, T]}^{(0)} = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

При этом будем писать  $\varphi_j \xrightarrow{\mathfrak{D}(0, T)} \varphi$ ,  $j \rightarrow \infty$ .

Линейное пространство  $\mathfrak{D}(0, T)$  с данным понятием сходимости называется основным пространством, а его элементы — основными (или пробными) функциями.

**Определение 2.3.2.** Обобщённой функцией или распределением со значениями в  $X$  называется всякий линейный оператор  $f: \mathfrak{D}(0, T) \rightarrow X$ , слабо непрерывный на  $\mathfrak{D}(0, T)$ , т.е. такой, что

$$f(\varphi_j) \rightarrow f(\varphi), \quad j \rightarrow \infty, \quad \text{слабо в } X,$$

для любых  $\varphi, \varphi_j \in \mathfrak{D}$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , для которых  $\varphi_j \xrightarrow{\mathfrak{D}(0, T)} \varphi$ ,  $j \rightarrow \infty$ .

Говорят, что последовательность обобщённых функций  $f_j$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , сходится к обобщённой функции  $f$ , если для всех  $\varphi \in \mathfrak{D}$

$$f_j(\varphi) \rightarrow f(\varphi), \quad j \rightarrow \infty, \quad \text{слабо в } X.$$

Линейное пространство всех обобщённых функций с таким понятием сходимости принято обозначать  $\mathfrak{D}'((0, T), X)$ , а саму сходимость — через  $f_j \xrightarrow{\mathfrak{D}'((0, T), X)} f$ ,  $j \rightarrow \infty$ .

Покажем, что всякую функцию  $f \in L_1([0, T], X)$  можно интерпретировать как обобщённую функцию и тем самым установить поэлементное вложение

$$L_1([0, T], X) \subset \mathfrak{D}'((0, T), X). \quad (2.3.1)$$

В самом деле, пусть  $f \in L_1([0, T], X)$  — некоторая функция. Определим оператор  $F_f: \mathfrak{D}(0, T) \rightarrow X$  по правилу

$$F_f(\varphi) = (\text{Б}) \int_0^T f(t) \varphi(t) dt \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(0, T). \quad (2.3.2)$$

Это определение корректно, ибо функция  $[0, T] \ni t \mapsto f(t) \varphi(t) \in X$  интегрируема по Бохнеру на  $[0, T]$ . Следовательно, оператор  $F_f$  определён всюду в  $\mathfrak{D}(0, T)$ . Линейность оператора  $F_f$  следует из линейности интеграла Бохнера. Проверим слабую непрерывность оператора  $F_f$ . В самом деле, пусть  $x^* \in X^*$ ,  $\varphi \in \mathfrak{D}(0, T)$ ,  $\varphi_j \in \mathfrak{D}(0, T)$ ,  $j = 1, 2, \dots$ ,  $\varphi_j \xrightarrow{\mathfrak{D}(0, T)} \varphi$ ,  $j \rightarrow \infty$ , — произвольны. Тогда

$$\begin{aligned} |\langle F_f(\varphi_j) - F_f(\varphi), x^* \rangle| &= \left| \left\langle (\text{Б}) \int_0^T f(t) [\varphi_j(t) - \varphi(t)] dt, x^* \right\rangle \right| \leq \int_0^T |\langle f(t) [\varphi_j(t) - \varphi(t)], x^* \rangle| dt \leq \\ &\leq |\varphi_j - \varphi|_{[0, T]}^{(0)} \|x^*\|_{X^*} \int_0^T \|f(t)\|_X dt \rightarrow 0, \quad j \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$F_f(\varphi_j) \rightarrow F_f(\varphi), \quad j \rightarrow \infty, \quad \text{слабо в } X,$$

для любых  $\varphi, \varphi_j \in \mathfrak{D}$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , для которых  $\varphi_j \xrightarrow{\mathfrak{D}(0, T)} \varphi$ ,  $j \rightarrow \infty$ . Итак,  $F_f \in \mathfrak{D}'((0, T), X)$ . Убедимся в том, что разные элементы  $f, g \in L_1([0, T], X)$  порождают разные операторы  $F_f, F_g \in \mathfrak{D}'((0, T), X)$ . В самом деле, пусть для некоторых  $f, g \in L_1([0, T], X)$  оказалось, что  $F_f = F_g$ , то есть

$$(\text{Б}) \int_0^T [f(t) - g(t)] \varphi(t) dt = 0 \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(0, T).$$

Тогда для любого  $x^* \in X^*$

$$0 = \left\langle (B) \int_0^T [f(t) - g(t)] \varphi(t) dt, x^* \right\rangle = \int_0^T \langle [f(t) - g(t)] \varphi(t), x^* \rangle dt = \int_0^T \varphi(t) \langle f(t) - g(t), x^* \rangle dt \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(0, T).$$

Иными словами,

$$\int_0^T \varphi(t) \langle f(t) - g(t), x^* \rangle dt = 0 \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(0, T).$$

А это возможно, лишь если при п.в.  $t \in [0, T]$

$$\langle f(t) - g(t), x^* \rangle = 0.$$

В силу произвольности  $x^* \in X^*$  и следствия из теоремы Хана–Банаха заключаем, что при п.в.  $t \in [0, T]$

$$f(t) = g(t),$$

то есть  $f = g$  как элементы пространства  $L_1([0, T], X)$ .

Обобщённую функцию, порождённую обычной функцией  $f \in L_1([0, T], X)$  по правилу (2.3.2), называют регулярной обобщённой функцией.

**Определение 2.3.3.** Производной порядка  $m$  обобщённой функции  $f \in \mathfrak{D}'((0, T), X)$ , называется обобщённая функция  $f^{(m)} \in \mathfrak{D}'((0, T), X)$ , действующая по правилу

$$f^{(m)}(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^m f(\varphi^{(m)}) \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(0, T). \quad (2.3.3)$$

Убедимся в том, что равенство (2.3.3) действительно определяет обобщённую функцию. В самом деле, если  $\varphi \in \mathfrak{D}(0, T)$ , то и  $\varphi^{(m)} \in \mathfrak{D}(0, T)$ , так что правая часть (2.3.3) действительно имеет смысл. Следовательно, оператор  $f^{(m)}$  определён на всём основном пространстве. Линейность данного оператора следует из определения обобщённой функции. Проверим непрерывность оператора  $f^{(m)}$ . Если  $\varphi_j \xrightarrow{\mathfrak{D}(0, T)} \varphi$ ,  $j \rightarrow \infty$ , то, очевидно,  $\varphi_j^{(m)} \xrightarrow{\mathfrak{D}(0, T)} \varphi^{(m)}$ ,  $j \rightarrow \infty$ . В силу слабой непрерывности  $f$  и равенства (2.3.3) для всех  $x^* \in X^*$  при  $j \rightarrow \infty$  имеем сходимость

$$\langle f^{(m)}(\varphi_j), x^* \rangle = \langle (-1)^m f(\varphi_j^{(m)}), x^* \rangle \rightarrow \langle (-1)^m f(\varphi^{(m)}), x^* \rangle = \langle f^{(m)}(\varphi), x^* \rangle.$$

Это означает, что  $f^{(m)}(\varphi_j) \rightarrow f^{(m)}(\varphi)$ ,  $j \rightarrow \infty$ , слабо в  $X$ , и, как следствие,  $f^{(m)} \in \mathfrak{D}'((0, T), X)$ .

Итак, установлено, что любая обобщённая функция имеет производную любого порядка  $m = 0, 1, 2, \dots$ , также являющуюся обобщённой функцией (здесь считается, что  $f^{(0)} = f$ ).

Из (2.3.3) видно, что если  $f_j \xrightarrow{\mathfrak{D}'((0, T), X)} f$ ,  $j \rightarrow \infty$ , то и  $f_j^{(m)} \xrightarrow{\mathfrak{D}'((0, T), X)} f^{(m)}$ ,  $j \rightarrow \infty$ , для всех  $m = 0, 1, 2, \dots$

Если обобщённая функция  $f$  и её производная  $f'$  являются регулярными, т.е.

$$f(\varphi) = (B) \int_0^T f_0(t) \varphi(t) dt, \quad f'(\varphi) = (B) \int_0^T f_1(t) \varphi(t) dt \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(0, T),$$

для некоторых функций  $f_0, f_1 \in L_1([0, T], X)$ , то, в соответствии с определением 2.3.3,

$$(B) \int_0^T f_1(t) \varphi(t) dt = -(B) \int_0^T f_0(t) \varphi'(t) dt \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(0, T). \quad (2.3.4)$$

В частности, если  $X = \mathbb{R}$ , то регулярная производная регулярной обобщённой функции совпадает с обобщённой производной в смысле Соболева. Если же  $f \in C^k([0, T], X)$ , то производные функции  $f$  в смысле определения 2.3.3 до порядка  $k$  включительно являются регулярными обобщёнными функциями и совпадают с поточечными производными  $f^{(m)}(t)$ ,  $t \in [0, T]$ ,  $m = 0, 1, \dots, k$ . Если же  $f \in C^\infty([0, T], X)$ , то сказанное относится к производным всех порядков.

Пусть  $1 \leq p \leq \infty$ . Через  $W_p^1([0, T], X)$  обозначим множество функций  $f \in L_p([0, T], X)$ , имеющих первую обобщённую производную  $f'$ , принадлежащую  $L_p([0, T], T)$ . Норму в  $W_p^1([0, T], X)$  зададим равенством

$$\|f\|_{p,[0,T],X}^{(1)} \equiv \left[ \int_0^T [\|f(t)\|_X^p + \|f'(t)\|_X^p] dt \right]^{1/p} \quad \text{при } 1 \leq p < \infty;$$

$$\|f\|_{p,[0,T],X}^{(1)} \equiv \|f\|_{p,[0,T],X} + \|f'\|_{p,[0,T],X} \quad \text{при } p = \infty.$$

**Теорема 2.3.1.** *Пространство  $W_p^1([0, T], X)$  полно при всех  $1 \leq p \leq \infty$ .*

**Доказательство.** Пусть последовательность  $f_j \in W_p^1([0, T], X)$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , — фундаментальна в норме пространства  $W_p^1([0, T], X)$ , т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists j_0 = j_0(\varepsilon) \geq 1 \forall j \geq j_0(\varepsilon), k \geq 1 : \|f_{j+k} - f_j\|_{p,[0,T],X}^{(1)} \leq \varepsilon. \quad (2.3.5)$$

Из данного неравенства, в силу определения нормы в пространстве  $W_p^1([0, T], X)$ , выводим, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists j_0 = j_0(\varepsilon) \geq 1 \forall j \geq j_0(\varepsilon), k \geq 1 : \|f_{j+k} - f_j\|_{p,[0,T],X} \leq \varepsilon, \|f'_{j+k} - f'_j\|_{p,[0,T],X} \leq \varepsilon.$$

Это означает, что последовательности  $f_j$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , и  $f'_j$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , фундаментальны в пространстве  $L_p([0, T], X)$ . Поскольку же пространство  $L_p([0, T], X)$  полно, то найдутся функции  $g_0, g_1 \in L_p([0, T], X)$ , такие, что

$$\|f_j - g_0\|_{p,[0,T],X} \rightarrow 0, \|f'_j - g_1\|_{p,[0,T],X} \rightarrow 0, j \rightarrow \infty. \quad (2.3.6)$$

Поэтому

$$\|f_j - g_0\|_{1,[0,T],X} \rightarrow 0, \|f'_j - g_1\|_{1,[0,T],X} \rightarrow 0, j \rightarrow \infty. \quad (2.3.7)$$

Так как  $f_j \in W_p^1([0, T], X)$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , то, ввиду определения класса  $W_p^1([0, T], X)$ , справедливо интегральное тождество

$$(B) \int_0^T f'_j(t) \varphi(t) dt = -(B) \int_0^T f_j(t) \varphi'(t) dt \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(0, T). \quad (2.3.8)$$

Перейдём в данном тождестве к пределу при  $j \rightarrow \infty$ . Прежде всего заметим, что

$$\left\| (B) \int_0^T f'_j(t) \varphi(t) dt - (B) \int_0^T g_1(t) \varphi(t) dt \right\|_X = \left\| (B) \int_0^T [f'_j(t) - g_1(t)] \varphi(t) dt \right\|_X \leq$$

$$\leq \int_0^T \| [f'_j(t) - g_1(t)] \varphi(t) \|_X dt = \int_0^T \| f'_j(t) - g_1(t) \|_X |\varphi(t)| dt \leq |\varphi|_{[0,T]}^{(0)} \| f'_j - g_1 \|_{1,[0,T],X} \rightarrow 0, j \rightarrow \infty,$$

на основании (2.3.7). Итак,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left\| (B) \int_0^T f'_j(t) \varphi(t) dt - (B) \int_0^T g_1(t) \varphi(t) dt \right\|_X = 0. \quad (2.3.9)$$

Во-вторых,

$$\left\| \left[ -(B) \int_0^T f_j(t) \varphi(t) dt \right] - \left[ -(B) \int_0^T g_0(t) \varphi(t) dt \right] \right\|_X = \left\| -(B) \int_0^T [f_j(t) - g_0(t)] \varphi(t) dt \right\|_X \leq$$

$$\leq \int_0^T \| [f_j(t) - g_0(t)] \varphi(t) \|_X dt = \int_0^T \| f_j(t) - g_0(t) \|_X |\varphi(t)| dt \leq |\varphi|_{[0,T]}^{(0)} \| f_j - g_0 \|_{1,[0,T],X} \rightarrow 0, j \rightarrow \infty,$$

на основании (2.3.7). Как следствие,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left\| \left[ -(\text{Б}) \int_0^T f_j(t) \varphi(t) dt \right] - \left[ -(\text{Б}) \int_0^T g_0(t) \varphi(t) dt \right] \right\|_X = 0. \quad (2.3.10)$$

Переходя теперь в интегральном тождестве (2.3.8) с учётом предельных соотношений (2.3.9) и (2.3.10), получаем, что

$$(\text{Б}) \int_0^T g_1(t) \varphi(t) dt = -(\text{Б}) \int_0^T g_0(t) \varphi'(t) dt \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(0, T).$$

Данное тождество означает, что функция  $g_0$  является элементом пространства  $W_p^1([0, T], X)$ , причём  $g'_0$ , регулярная первая обобщённая производная функции  $g_0$ , совпадает с функцией  $g_1$ . Осталось доказать, что последовательность  $f_j$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , сходится в норме пространства  $W_p^1([0, T], X)$  к функции  $g_0$ .

Предположим сначала, что  $p \neq \infty$ . Тогда неравенство (2.3.5) можно переписать в виде

$$\forall \varepsilon > 0 \exists j_0 = j_0(\varepsilon) \geq 1 \forall j \geq j_0(\varepsilon), k \geq 1 : [\|f_{j+k} - f_j\|_{p,[0,T],X}^p + \|f'_{j+k} - f'_j\|_{p,[0,T],X}^p]^{1/p} \leq \varepsilon.$$

Устремляя здесь  $k$  к бесконечности и учтя соотношения (2.3.6), будем иметь

$$\forall \varepsilon > 0 \exists j_0 = j_0(\varepsilon) \geq 1 \forall j \geq j_0(\varepsilon) : [\|g_0 - f_j\|_{p,[0,T],X}^p + \|g'_0 - f'_j\|_{p,[0,T],X}^p]^{1/p} \leq \varepsilon.$$

А это и означает, что  $\|g_0 - f_j\|_{p,[0,T],X}^{(1)} \rightarrow 0$ ,  $j \rightarrow \infty$ . Иными словами, мы доказали полноту пространства  $W_p^1([0, T], X)$  при  $p \neq \infty$ .

Пусть теперь  $p = \infty$ . Тогда неравенство (2.3.5) можно записать в виде

$$\forall \varepsilon > 0 \exists j_0 = j_0(\varepsilon) \geq 1 \forall j \geq j_0(\varepsilon), k \geq 1 : \|f_{j+k} - f_j\|_{\infty,[0,T],X} + \|f'_{j+k} - f'_j\|_{\infty,[0,T],X} \leq \varepsilon.$$

Переходя в данном неравенстве к пределу при  $k \rightarrow \infty$  и учтя соотношения (2.3.6), выводим, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists j_0 = j_0(\varepsilon) \geq 1 \forall j \geq j_0(\varepsilon), k \geq 1 : \|g_0 - f_j\|_{\infty,[0,T],X} + \|g'_0 - f'_j\|_{\infty,[0,T],X} \leq \varepsilon.$$

Последнее и даёт, что  $\|g_0 - f_j\|_{p,[0,T],X}^{(1)} \rightarrow 0$ ,  $j \rightarrow \infty$ . Таким образом, мы доказали полноту пространства  $W_\infty^1([0, T], X)$ . Теорема полностью доказана. ■

**Теорема 2.3.2.** Если при некотором  $p$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , функция  $f \in W_p^1([0, T], X)$ , то при всех  $x^* \in X^*$  функция

$$[0, T] \ni t \mapsto \langle f(t), x^* \rangle \quad (2.3.11)$$

является элементом  $W_p^1[0, T]$ , а её обобщённой производной в смысле Соболева является функция

$$[0, T] \ni t \mapsto \langle f'(t), x^* \rangle. \quad (2.3.12)$$

**Доказательство.** Покажем сначала, что функции (2.3.11) и (2.3.12) при всех  $x^* \in X^*$  принадлежат пространству  $L_p[0, T]$ . В самом деле, нетрудно видеть, что при всех  $t \in [0, T]$

$$|\langle f(t), x^* \rangle| \leq \|f(t)\|_X \|x^*\|_{X^*}, \quad |\langle f'(t), x^* \rangle| \leq \|f'(t)\|_X \|x^*\|_{X^*}.$$

Поскольку же  $f, f' \in L_p([0, T], X)$ , то функции (2.3.11) и (2.3.12) при всех  $x^* \in X^*$  принадлежат пространству  $L_p[0, T]$ .

Докажем теперь, что функция (2.3.12) является обобщённой производной в смысле Соболева функции (2.3.11). Действительно, поскольку  $f \in W_p^1([0, T], X)$ , то имеет место интегральное тождество

$$(\text{Б}) \int_0^T f'(t) \varphi(t) dt = -(\text{Б}) \int_0^T f(t) \varphi'(t) dt \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(0, T).$$

Поэтому при всех  $\varphi \in \mathfrak{D}(0, T)$  и всех  $x^* \in X^*$

$$\begin{aligned} \left\langle \left( \text{Б} \right) \int_0^T f'(t) \varphi(t) dt, x^* \right\rangle &= \left\langle - \left( \text{Б} \right) \int_0^T f(t) \varphi'(t) dt, x^* \right\rangle; \quad \int_0^T \langle f'(t) \varphi(t), x^* \rangle dt = - \int_0^T \langle f(t) \varphi'(t), x^* \rangle dt; \\ \int_0^T \langle f'(t), x^* \rangle \varphi(t) dt &= - \int_0^T \langle f(t), x^* \rangle \varphi'(t) dt; \end{aligned}$$

то есть

$$\int_0^T \langle f'(t), x^* \rangle \varphi(t) dt = - \int_0^T \langle f(t), x^* \rangle \varphi'(t) dt \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(0, T).$$

Последнее тождество и даёт утверждение леммы. ■

**Теорема 2.3.3.** Пусть  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $f \in W_p^1([0, T], X)$ . Тогда  $f \in C([0, T], X)$ , и справедлива оценка

$$\max_{t \in [0, T]} \|f(t)\|_X \leq A_1 \|f\|_{p, [0, T], X}^{(1)}, \quad (2.3.13)$$

где постоянная  $A_1 > 0$ , зависящая лишь от  $1 \leq p \leq \infty$  и от  $T > 0$  та же, что и в теореме 2.1.2.

**Доказательство.** Пусть  $1 \leq p \leq \infty$  и  $f \in W_p^1([0, T], X)$  — произвольны. Выберем произвольно  $x^* \in X^*$  и зафиксируем. Положим  $F(t, x^*) \equiv \langle f(t), x^* \rangle$ ,  $t \in [0, T]$ . Согласно теореме 2.3.2,  $F(\cdot, x^*) \in W_p^1[0, T]$ . В силу теоремы 2.1.2 отсюда следует, что  $F(\cdot, x^*) \in C[0, T]$ , причём справедлива оценка

$$\max_{t \in [0, T]} |F(t, x^*)| \leq A_1 \|F(\cdot, x^*)\|_{p, [0, T]}^{(1)}.$$

Из определения норм в пространствах  $W_p^1([0, T], X)$  и  $W_p^1[0, T]$  следует, что

$$\|F(\cdot, x^*)\|_{p, [0, T]}^{(1)} \leq \|f\|_{p, [0, T], X}^{(1)} \|x^*\|_{X^*}.$$

Поэтому при всех  $x^* \in X^*$  и всех  $t \in [0, T]$

$$|\langle f(t), x^* \rangle| \leq A_1 \|f\|_{p, [0, T], X}^{(1)} \|x^*\|_{X^*}.$$

Переходя здесь к точной верхней грани по всем  $x^* \in X^*$ , для которых  $\|x^*\|_{X^*} \leq 1$  и пользуясь изометричностью вложения  $X \subset X^{**}$ , заключаем, что

$$\sup_{t \in [0, T]} \|f(t)\|_X \leq A_1 \|f\|_{p, [0, T], X}^{(1)}. \quad (2.3.14)$$

Итак, мы доказали, что если  $f \in W_p^1([0, T], X)$ , то  $f \in C_s([0, T], X)$  и имеет место оценка (2.3.14). Для завершения доказательства теоремы достаточно показать, что  $f \in C([0, T], X)$ . Поскольку, как нетрудно видеть,  $W_p^1([0, T], X) \subset W_1^1([0, T], X)$  при  $p > 1$ , то достаточно доказать, что  $W_1^1([0, T], X) \subset C([0, T], X)$ .

В самом деле, пусть  $f \in W_1^1([0, T], X)$ ,  $x^* \in X^*$ ,  $t', t'' \in [0, T]$ , — произвольны. Тогда

$$|\langle f(t') - f(t''), x^* \rangle| = \left| \int_{t'}^{t''} \langle f'(\xi), x^* \rangle d\xi \right| \leq \left| \int_{t'}^{t''} \|f'(\xi)\|_X d\xi \right| \|x^*\|_{X^*}.$$

Взяв здесь точную верхнюю грань по всем  $x^* \in X^*$ , у которых  $\|x^*\|_{X^*} \leq 1$  и пользуясь изометричностью вложения  $X \subset X^{**}$ , заключаем, что

$$\|f(t') - f(t'')\|_X \leq \left| \int_{t'}^{t''} \|f'(\xi)\|_X d\xi \right|.$$

Из данного неравенства и абсолютной непрерывности интеграла Бохнера и следует справедливость включения  $f \in C([0, T], X)$ . Теорема полностью доказана. ■

**Определение 2.3.4.** Функция  $f: [0, T] \rightarrow X$  называется абсолютно непрерывной, если найдутся функция  $g \in L_1([0, T], X)$  и константа  $C \in X$ , такие, что при всех  $t \in [0, T]$  справедливо представление

$$f(t) = C + (B) \int_0^t g(\xi) d\xi.$$



Множество всех абсолютно непрерывных функций со значениями в  $X$  обозначим  $AC([0, T], X)$ .

**Теорема 2.3.4.** Множество  $AC([0, T], X)$  совпадает с множеством  $W_1^1([0, T], X)$ .

**Доказательство.** 1) Докажем сначала вложение  $W_1^1([0, T], X) \subset AC([0, T], X)$ . Выберем произвольно  $f \in W_1^1([0, T], X)$  и зафиксируем. Пусть  $x^* \in X^*$  — произвольно. Тогда, согласно теореме 2.3.2, функция

$$[0, T] \ni t \mapsto \langle f(t), x^* \rangle$$

является элементом  $W_1^1[0, T]$ , а её обобщённой производной в смысле Соболева является функция

$$[0, T] \ni t \mapsto \langle f'(t), x^* \rangle.$$

Поэтому, в силу теоремы 2.1.1, при всех  $t \in [0, T]$  справедливо представление

$$\langle f(t), x^* \rangle = \langle f(0), x^* \rangle + \int_0^t \langle f'(\xi), x^* \rangle d\xi,$$

эквивалентное соотношению

$$\langle f(t) - f(0), x^* \rangle - \int_0^t \langle f'(\xi), x^* \rangle d\xi = 0.$$

В силу свойств интеграла Бохнера отсюда извлекаем, что

$$\langle f(t) - f(0), x^* \rangle - \left\langle (\text{Б}) \int_0^t f'(\xi) d\xi, x^* \right\rangle = 0,$$

или, иначе,

$$\left\langle f(t) - f(0) - (\text{Б}) \int_0^t f'(\xi) d\xi, x^* \right\rangle = 0 \quad \forall x^* \in X^*.$$

Это означает, что при всех  $t \in [0, T]$

$$f(t) - f(0) - (\text{Б}) \int_0^t f'(\xi) d\xi = 0.$$

Таким образом, функция  $f$  абсолютно непрерывна на отрезке  $[0, T]$ , причём в качестве  $C$  можно взять  $f(0)$ , а в качестве функции  $g \in L_1([0, T], X)$  — обобщённую производную  $f'$ . Итак, в силу произвольности  $f \in W_1^1([0, T], X)$ , мы доказали вложение  $W_1^1([0, T], X) \subset AC([0, T], X)$ .

2) Докажем теперь вложение  $AC([0, T], X) \subset W_1^1([0, T], X)$ . Выберем произвольно  $f \in AC([0, T], X)$  и зафиксируем. Тогда найдутся функция  $g \in L_1([0, T], X)$  и константа  $C \in X$ , такие, что при всех  $t \in [0, T]$  справедливо представление

$$f(t) = C + (\text{Б}) \int_0^t g(\xi) d\xi.$$

Следовательно, для всех  $x^* \in X^*$

$$\langle f(t), x^* \rangle = \langle C, x^* \rangle + \left\langle (\text{Б}) \int_0^t g(\xi) d\xi, x^* \right\rangle,$$

откуда, в силу свойств интеграла Бохнера,

$$\langle f(t), x^* \rangle = \langle C, x^* \rangle + \int_0^t \langle g(\xi), x^* \rangle d\xi \quad \forall t \in [0, T].$$

Это означает, что функция

$$[0, T] \ni t \mapsto \langle f(t), x^* \rangle$$

абсолютно непрерывна на отрезке  $[0, T]$ . Поэтому, в силу теоремы 2.1.1, функция

$$[0, T] \ni t \mapsto \langle f(t), x^* \rangle$$

является элементом  $W_1^1[0, T]$ , а её обобщённой производной в смысле Соболева является функция

$$[0, T] \ni t \mapsto \langle g(t), x^* \rangle.$$

Иными словами, справедливо интегральное тождество

$$\int_0^T \langle f(t), x^* \rangle \varphi'(t) dt = - \int_0^T \langle g(t), x^* \rangle \varphi(t) dt \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(0, T).$$

Ясно, что, в силу свойств интеграла Бохнера, данное тождество можно переписать в виде

$$\left\langle \left( \text{Б} \right) \int_0^T f(t) \varphi'(t) dt, x^* \right\rangle = - \left\langle \left( \text{Б} \right) \int_0^T g(t) \varphi(t) dt, x^* \right\rangle \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(0, T),$$

или, что то же самое,

$$\left\langle \left( \text{Б} \right) \int_0^T f(t) \varphi'(t) dt + \left( \text{Б} \right) \int_0^T g(t) \varphi(t) dt, x^* \right\rangle = 0 \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(0, T).$$

В силу произвольности  $x^* \in X^*$  отсюда следует, что

$$\left( \text{Б} \right) \int_0^T f(t) \varphi'(t) dt = - \left( \text{Б} \right) \int_0^T g(t) \varphi(t) dt \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(0, T).$$

Последнее и означает, что  $f \in W_1^1([0, T], X)$ , причём функция  $g$  является регулярной обобщённой производной функции  $f$ .

Теорема полностью доказана. ■

**Следствие 2.3.1.** Если  $f \in W_1^1([0, T], X)$ , то при всех  $t, \tau \in [0, T]$

$$f(t) - f(\tau) = \left( \text{Б} \right) \int_{\tau}^t f'(\xi) d\xi.$$

Нам также потребуется

**Лемма 2.3.1.** [46, лемма 8.1, стр.307] Пусть  $X$  и  $Y$  — два банаховых пространства,  $X \subset Y$  с непрерывным вложением,  $X$  рефлексивно. Тогда

$$L_\infty([0, T], X) \cap C_s([0, T], Y) = C_s([0, T], X).$$

**Теорема 2.3.5.** Множество многочленов с коэффициентами из  $X$  всюду плотно в  $W_1^1([0, T], X)$ .

**Доказательство.** Пусть  $f \in W_1^1([0, T], X)$ . В силу теоремы 2.3.4 найдутся функция  $g \in L_1([0, T], X)$  и константа  $C \in X$ , такие, что

$$f(t) = C + \int_0^t g(\xi) d\xi \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.3.15)$$

Поскольку, как известно,  $C([0, T], X)$  всюду плотно в  $L_1([0, T], X)$ , а, в силу леммы 1.1.7, множество многочленов с коэффициентами из  $X$  всюду плотно в  $C([0, T], X)$ , то найдётся такая последовательность  $g_j$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , многочленов с коэффициентами из  $X$ , что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|g_j - g\|_{1, [0, T], X} = 0. \quad (2.3.16)$$

Из данного предельного соотношения и равенства (2.3.15) вытекает, что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|f_j - f\|_{1,[0,T],X} = 0, \quad (2.3.17)$$

где

$$f_j(t) = C + \int_0^t g_j(\xi) d\xi \quad \forall t \in [0, T].$$

Так как при п.в.  $t \in [0, T]$  справедливы равенства  $f'_j(t) = g_j(t)$ ,  $f'(t) = g(t)$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , то, ввиду (2.3.16),

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|f'_j - f'\|_{1,[0,T],X} = 0.$$

Из данного равенства совместно с (2.3.17) вытекает, что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|f_j - f\|_{1,[0,T],X}^{(1)} = 0.$$

Отсюда и из произвольности функции  $f \in W_1^1([0, T], X)$  вытекает утверждение теоремы. ■

Приведём теперь следующие конструкции (см. [45, стр.70]). Пусть  $B_0$ ,  $B$  и  $B_1$  — банаховы пространства, причём  $B_0 \subset B \subset B_1$ ,  $B_0$  и  $B_1$  рефлексивны, вложение  $B_0$  в  $B$  компактно, а вложение  $B$  в  $B_1$  — непрерывно. Пусть  $\mathfrak{W} \equiv \{\mathfrak{z} : \mathfrak{z} \in L_{p_0}([0, T], B_0), \dot{\mathfrak{z}} \in L_{p_1}([0, T], B_1), \text{ где } 1 < p_0 < \infty, 1 < p_1 < \infty. \text{ Снабдив } \mathfrak{W} \text{ нормой}$

$$\|\mathfrak{z}\|_{\mathfrak{W}} \equiv \|\mathfrak{z}\|_{p_0,[0,T],B_0} + \|\dot{\mathfrak{z}}\|_{p_1,[0,T],B_1},$$

получим банахово пространство. Нетрудно видеть, что  $\mathfrak{W} \subset L_{p_0}([0, T], B)$ .

**Теорема 2.3.6.** [45, теорема 5.1 на стр.70] При сделанных предположениях вложение пространства  $\mathfrak{W}$  в пространство  $L_{p_0}([0, T], B)$  — компактно.

## 2.4. Функции одного переменного и со значениями в гильбертовом пространстве

Пусть  $V$  и  $H$  — сепарабельные гильбертовы пространства со скалярными произведениями  $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$  и  $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$  соответственно, с соответствующими нормами  $\|\cdot\|_V$  и  $\|\cdot\|_H$ ,  $V \subset H$ , это вложение непрерывно и компактно. Иными словами, найдётся постоянная  $\nu > 0$ , такая, что

$$\|v\|_H \leq \nu \|v\|_V \quad \forall v \in V,$$

причём любое ограниченное в норме  $V$  множество предкомпактно в норме  $H$ .

Через  $\mathcal{W}_2^1([0, T]; V, H)$  обозначим множество функций  $\mathfrak{z} \in L_2([0, T], V)$ , имеющих регулярную обобщённую производную  $\dot{\mathfrak{z}} \in L_2([0, T], H)$ . Наделим  $\mathcal{W}_2^1([0, T]; V, H)$  скалярным произведением

$$\langle \mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2 \rangle_{\mathcal{W}_2^1([0,T];V,H)} \equiv \int_0^T [\langle \mathfrak{z}_1(t), \mathfrak{z}_2(t) \rangle_V + \langle \dot{\mathfrak{z}}_1(t), \dot{\mathfrak{z}}_2(t) \rangle_H] dt,$$

с соответствующей нормой

$$\|\mathfrak{z}\|_{\mathcal{W}_2^1([0,T];V,H)} = \sqrt{\langle \mathfrak{z}, \mathfrak{z} \rangle_{\mathcal{W}_2^1([0,T];V,H)}}.$$

Через  $\mathcal{W}_\infty^1([0, T]; V, H)$  обозначим множество функций  $\mathfrak{z} \in L_\infty([0, T], V)$ , имеющих регулярную обобщённую производную  $\dot{\mathfrak{z}} \in L_\infty([0, T], H)$ . Наделим  $\mathcal{W}_\infty^1([0, T]; V, H)$  нормой

$$\|\mathfrak{z}\|_{\mathcal{W}_\infty^1([0,T];V,H)} \equiv \|\mathfrak{z}\|_{\infty,[0,T],V} + \|\dot{\mathfrak{z}}\|_{\infty,[0,T],H}.$$

**Теорема 2.4.1.** Пространство  $\mathcal{W}_2^1([0, T]; V, H)$  — гильбертово.

**Доказательство.** Предположим, что последовательность  $f_j \in \mathcal{W}_2^1([0, T]; V, H)$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , — фундаментальна в норме пространства  $\mathcal{W}_2^1([0, T]; V, H)$ , т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists j_0 = j_0(\varepsilon) \geq 1 \forall j \geq j_0(\varepsilon), k \geq 1 : \|f_{j+k} - f_j\|_{\mathcal{W}_2^1([0,T];V,H)} \leq \varepsilon. \quad (2.4.1)$$

Отсюда, ввиду определения нормы в пространстве  $\mathcal{W}_2^1([0, T]; V, H)$ , выводим, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists j_0 = j_0(\varepsilon) \geq 1 \forall j \geq j_0(\varepsilon), k \geq 1 : \|f_{j+k} - f_j\|_{2,[0,T],V} \leq \varepsilon, \|f'_{j+k} - f'_j\|_{2,[0,T],H} \leq \varepsilon.$$

Это означает, что последовательности  $f_j, j = 1, 2, \dots$ , и  $f'_j, j = 1, 2, \dots$ , фундаментальны в пространствах  $L_2([0, T], V)$  и  $L_2([0, T], H)$  соответственно. А так как данные пространства полны, то существуют функции  $g_0 \in L_2([0, T], V)$ ,  $g_1 \in L_2([0, T], H)$ , такие, что

$$\|f_j - g_0\|_{2,[0,T],V} \rightarrow 0, \|f'_j - g_1\|_{2,[0,T],H} \rightarrow 0, j \rightarrow \infty. \quad (2.4.2)$$

Поэтому

$$\|f_j - g_0\|_{1,[0,T],V} \rightarrow 0, \|f'_j - g_1\|_{1,[0,T],H} \rightarrow 0, j \rightarrow \infty. \quad (2.4.3)$$

Поскольку  $f_j \in \mathcal{W}_2^1([0, T]; V, H)$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , то, на основании определения класса  $\mathcal{W}_2^1([0, T]; V, H)$ , справедливо интегральное тождество

$$(B) \int_0^T f'_j(t) \varphi(t) dt = -(B) \int_0^T f_j(t) \varphi'(t) dt \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(0, T), \quad (2.4.4)$$

интегралы Бохнера в котором понимаются как интегралы Бохнера от функций со значениями в  $H$ . Совершим в данном тождестве переход к пределу при  $j \rightarrow \infty$ . Во-первых, легко видеть, что

$$\begin{aligned} & \left\| (B) \int_0^T f'_j(t) \varphi(t) dt - (B) \int_0^T g_1(t) \varphi(t) dt \right\|_H = \left\| (B) \int_0^T [f'_j(t) - g_1(t)] \varphi(t) dt \right\|_H \leq \\ & \leq \int_0^T \| [f'_j(t) - g_1(t)] \varphi(t) \|_H dt = \int_0^T \| f'_j(t) - g_1(t) \|_H |\varphi(t)| dt \leq |\varphi|_{[0,T]}^{(0)} \| f'_j - g_1 \|_{1,[0,T],H} \rightarrow 0, j \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

в силу (2.4.3). Итак,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left\| (B) \int_0^T f'_j(t) \varphi(t) dt - (B) \int_0^T g_1(t) \varphi(t) dt \right\|_H = 0. \quad (2.4.5)$$

Во-вторых,

$$\begin{aligned} & \left\| \left[ -(B) \int_0^T f_j(t) \varphi(t) dt \right] - \left[ -(B) \int_0^T g_0(t) \varphi(t) dt \right] \right\|_H = \left\| -(B) \int_0^T [f_j(t) - g_0(t)] \varphi(t) dt \right\|_H \leq \\ & \leq \int_0^T \| [f_j(t) - g_0(t)] \varphi(t) \|_H dt = \int_0^T \| f_j(t) - g_0(t) \|_H |\varphi(t)| dt \leq |\varphi|_{[0,T]}^{(0)} \| f_j - g_0 \|_{1,[0,T],H} \leq \\ & \leq |\varphi|_{[0,T]}^{(0)} \nu \| f_j - g_0 \|_{1,[0,T],V} \rightarrow 0, j \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

на основании (2.4.3). Как следствие,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left\| \left[ -(B) \int_0^T f_j(t) \varphi(t) dt \right] - \left[ -(B) \int_0^T g_0(t) \varphi(t) dt \right] \right\|_H = 0. \quad (2.4.6)$$

Переходя теперь в интегральном тождестве (2.4.4), с учётом предельных соотношений (2.4.5) и (2.4.6), к пределу при  $j \rightarrow \infty$ , получаем, что

$$(B) \int_0^T g_1(t) \varphi(t) dt = -(B) \int_0^T g_0(t) \varphi'(t) dt \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(0, T).$$

Данное тождество означает, что функция  $g_0$  является элементом пространства  $\mathcal{W}_2^1([0, T]; V, H)$ , причём  $g'_0$ , регулярная первая обобщённая производная функции  $g_0$ , совпадает с функцией  $g_1$ . Осталось доказать, что последовательность  $f_j, j = 1, 2, \dots$ , сходится в  $\mathcal{W}_2^1([0, T]; V, H)$  к функции  $g_0$ .

Несложно видеть, что неравенство (2.4.1) можно переписать в виде

$$\forall \varepsilon > 0 \exists j_0 = j_0(\varepsilon) \geq 1 \forall j \geq j_0(\varepsilon), k \geq 1 : [\|f_{j+k} - f_j\|_{2,[0,T],V}^2 + \|f'_{j+k} - f'_j\|_{2,[0,T],H}^2]^{1/2} \leq \varepsilon.$$

Устремляя здесь  $k$  к бесконечности и учтя соотношения (2.4.2), будем иметь

$$\forall \varepsilon > 0 \exists j_0 = j_0(\varepsilon) \geq 1 \forall j \geq j_0(\varepsilon) : [\|g_0 - f_j\|_{2,[0,T],V}^2 + \|g'_0 - f'_j\|_{2,[0,T],H}^2]^{1/2} \leq \varepsilon.$$

А это и означает, что  $\|g_0 - f_j\|_{\mathcal{W}_2^1([0,T];V,H)} \rightarrow 0, j \rightarrow \infty$ . Лемма полностью доказана. ■

**Теорема 2.4.2.** Пространство  $\mathcal{W}_\infty^1([0,T];V,H)$  — полно.

**Доказательство.** Предположим, что последовательность  $f_j \in \mathcal{W}_\infty^1([0,T];V,H), j = 1, 2, \dots$ , — фундаментальна в норме пространства  $\mathcal{W}_\infty^1([0,T];V,H)$ , т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists j_0 = j_0(\varepsilon) \geq 1 \forall j \geq j_0(\varepsilon), k \geq 1 : \|f_{j+k} - f_j\|_{\mathcal{W}_\infty^1([0,T];V,H)} \leq \varepsilon. \quad (2.4.7)$$

Отсюда, ввиду определения нормы в пространстве  $\mathcal{W}_\infty^1([0,T];V,H)$ , выводим, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists j_0 = j_0(\varepsilon) \geq 1 \forall j \geq j_0(\varepsilon), k \geq 1 : \|f_{j+k} - f_j\|_{\infty,[0,T],V} \leq \varepsilon, \|f'_{j+k} - f'_j\|_{\infty,[0,T],H} \leq \varepsilon.$$

Это означает, что последовательности  $f_j, j = 1, 2, \dots$ , и  $f'_j, j = 1, 2, \dots$ , фундаментальны в пространствах  $L_\infty([0,T],V)$  и  $L_\infty([0,T],H)$  соответственно. А так как данные пространства полны, то существуют функции  $g_0 \in L_\infty([0,T],V), g_1 \in L_\infty([0,T],H)$ , такие, что

$$\|f_j - g_0\|_{\infty,[0,T],V} \rightarrow 0, \|f'_j - g_1\|_{\infty,[0,T],H} \rightarrow 0, j \rightarrow \infty. \quad (2.4.8)$$

Поэтому

$$\|f_j - g_0\|_{1,[0,T],V} \rightarrow 0, \|f'_j - g_1\|_{1,[0,T],H} \rightarrow 0, j \rightarrow \infty. \quad (2.4.9)$$

Так как  $f_j \in \mathcal{W}_\infty^1([0,T];V,H), j = 1, 2, \dots$ , то, согласно определению класса  $\mathcal{W}_\infty^1([0,T];V,H)$ , имеет место интегральное тождество

$$(B) \int_0^T f'_j(t) \varphi(t) dt = -(B) \int_0^T f_j(t) \varphi'(t) dt \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(0,T), \quad (2.4.10)$$

интегралы Бохнера в котором понимаются как интегралы Бохнера от функций со значениями в  $H$ . Совершим в данном тождестве переход к пределу при  $j \rightarrow \infty$ . Во-первых, легко видеть, что

$$\begin{aligned} & \left\| (B) \int_0^T f'_j(t) \varphi(t) dt - (B) \int_0^T g_1(t) \varphi(t) dt \right\|_H = \left\| (B) \int_0^T [f'_j(t) - g_1(t)] \varphi(t) dt \right\|_H \leq \\ & \leq \int_0^T \|[f'_j(t) - g_1(t)] \varphi(t)\|_H dt = \int_0^T \|f'_j(t) - g_1(t)\|_H |\varphi(t)| dt \leq |\varphi|_{[0,T]}^{(0)} \|f'_j - g_1\|_{1,[0,T],H} \rightarrow 0, j \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

в силу (2.4.9). Итак,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left\| (B) \int_0^T f'_j(t) \varphi(t) dt - (B) \int_0^T g_1(t) \varphi(t) dt \right\|_H = 0. \quad (2.4.11)$$

Во-вторых,

$$\begin{aligned} & \left\| \left[ -(B) \int_0^T f_j(t) \varphi(t) dt \right] - \left[ -(B) \int_0^T g_0(t) \varphi(t) dt \right] \right\|_H = \left\| -(B) \int_0^T [f_j(t) - g_0(t)] \varphi(t) dt \right\|_H \leq \\ & \leq \int_0^T \|[f_j(t) - g_0(t)] \varphi(t)\|_H dt = \int_0^T \|f_j(t) - g_0(t)\|_H |\varphi(t)| dt \leq |\varphi|_{[0,T]}^{(0)} \|f_j - g_0\|_{1,[0,T],H} \leq \\ & \leq |\varphi|_{[0,T]}^{(0)} \nu \|f_j - g_0\|_{1,[0,T],V} \rightarrow 0, j \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

вследствие (2.4.9). Как следствие,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left\| \left[ -(\text{Б}) \int_0^T f_j(t) \varphi(t) dt \right] - \left[ -(\text{Б}) \int_0^T g_0(t) \varphi(t) dt \right] \right\|_H = 0. \quad (2.4.12)$$

Переходя теперь в интегральном тождестве (2.4.10), с учётом предельных соотношений (2.4.11) и (2.4.12), к пределу при  $j \rightarrow \infty$ , получаем, что

$$(\text{Б}) \int_0^T g_1(t) \varphi(t) dt = -(\text{Б}) \int_0^T g_0(t) \varphi'(t) dt \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(0, T).$$

Данное тождество означает, что функция  $g_0$  является элементом пространства  $\mathcal{W}_\infty^1([0, T]; V, H)$ , причём  $g'_0$ , регулярная первая обобщённая производная функции  $g_0$ , совпадает с функцией  $g_1$ . Осталось доказать, что последовательность  $f_j$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , сходится в  $\mathcal{W}_\infty^1([0, T]; V, H)$  к функции  $g_0$ .

Несложно видеть, что неравенство (2.4.1) можно переписать в виде

$$\forall \varepsilon > 0 \exists j_0 = j_0(\varepsilon) \geq 1 \quad \forall j \geq j_0(\varepsilon), \quad k \geq 1 : \|f_{j+k} - f_j\|_{\infty, [0, T], V} + \|f'_{j+k} - f'_j\|_{\infty, [0, T], H} \leq \varepsilon.$$

Устремляя здесь  $k$  к бесконечности и учтя соотношения (2.4.8), будем иметь

$$\forall \varepsilon > 0 \exists j_0 = j_0(\varepsilon) \geq 1 \quad \forall j \geq j_0(\varepsilon) : [\|g_0 - f_j\|_{\infty, [0, T], V} + \|g'_0 - f'_j\|_{\infty, [0, T], H} \leq \varepsilon.$$

А это и означает, что  $\|g_0 - f_j\|_{\mathcal{W}_\infty^1([0, T]; V, H)} \rightarrow 0$ ,  $j \rightarrow \infty$ . Лемма полностью доказана. ■

Из определения классов  $\mathcal{W}_2^1([0, T]; V, H)$  и  $\mathcal{W}_\infty^1([0, T]; V, H)$  вытекают теоретико-множественные вложения  $\mathcal{W}_2^1([0, T]; V, H) \subset W_2^1([0, T], H)$ ,  $\mathcal{W}_\infty^1([0, T]; V, H) \subset W_\infty^1([0, T], H)$ . Поэтому, на основании теоремы 2.3.3, справедлива

**Теорема 2.4.3.** Пусть  $f \in \mathcal{W}_2^1([0, T]; V, H)$ ,  $g \in \mathcal{W}_\infty^1([0, T]; V, H)$ . Тогда  $f, g \in C([0, T], H)$ , причём

$$\begin{aligned} \max_{t \in [0, T]} \|f(t)\|_H &\leq A_1(2, T) \max\{1, \nu\} \|f\|_{\mathcal{W}_2^1([0, T]; V, H)}, \\ \max_{t \in [0, T]} \|g(t)\|_H &\leq A_1(\infty, T) \max\{1, \nu\} \|g\|_{\mathcal{W}_\infty^1([0, T]; V, H)}, \end{aligned}$$

где  $A_1$  — та же постоянная, что и в теореме 2.1.2.

Через  $\mathfrak{E}([0, T]; V, H)$  обозначим множество функций из  $\mathfrak{z} \in C_s([0, T], V)$ , принадлежащих пространству  $W_\infty^1([0, T], H)$ . Зададим в  $\mathfrak{E}([0, T]; V, H)$  норму равенством

$$\|\mathfrak{z}\|_{\mathfrak{E}([0, T]; V, H)} \equiv \|\mathfrak{z}\|_{C_s([0, T], V)} + \|\dot{\mathfrak{z}}\|_{\infty, [0, T], H}.$$

**Теорема 2.4.4.** Пространство  $\mathfrak{E}([0, T]; V, H)$  — банахово.

**Доказательство.** Пусть последовательность  $\mathfrak{z}_j$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , — фундаментальна в норме пространства  $\mathfrak{E}([0, T]; V, H)$ . Это означает, что

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists j_0 = j_0(\varepsilon) \geq 1 \quad \forall j \geq j_0(\varepsilon), \quad k \geq 1 : \\ \|\mathfrak{z}_{j+k} - \mathfrak{z}_j\|_{\mathfrak{E}([0, T]; V, H)} \equiv \|\mathfrak{z}_{j+k} - \mathfrak{z}_j\|_{C_s([0, T], V)} + \|\dot{\mathfrak{z}}_{j+k} - \dot{\mathfrak{z}}_j\|_{\infty, [0, T], H} \leq \varepsilon. \end{aligned} \quad (2.4.13)$$

Таким образом, последовательность  $\mathfrak{z}_j$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , фундаментальна в пространстве  $C_s([0, T], V)$ , наделённом нормой  $\|\cdot\|_{C_s([0, T], V)}$ , а последовательность  $\dot{\mathfrak{z}}_j$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , фундаментальна в норме пространства  $L_\infty([0, T], H)$ . На основании леммы 1.1.2 и полноты пространства  $L_\infty([0, T], H)$  найдутся функции  $\mathfrak{g}_0 \in C_s([0, T], V)$  и  $\mathfrak{g}_1 \in L_\infty([0, T], H)$ , такие, что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|\mathfrak{z}_j - \mathfrak{g}_0\|_{C_s([0, T], V)} = 0, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \|\dot{\mathfrak{z}}_j - \mathfrak{g}_1\|_{\infty, [0, T], H} = 0. \quad (2.4.14)$$

Так как  $\mathfrak{z}_j \in \mathfrak{E}([0, T]; V, H)$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , то  $\mathfrak{z}_j \in W_\infty^1([0, T], H)$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , вследствие чего выполнено интегральное тождество

$$(\text{Б}) \int_0^T \dot{\mathfrak{z}}_j(t) \varphi(t) dt = -(\text{Б}) \int_0^T \mathfrak{z}_j(t) \varphi'(t) dt \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(0, T). \quad (2.4.15)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} & \left\| (\mathcal{B}) \int_0^T \dot{\mathfrak{z}}_j(t) \varphi(t) dt - (\mathcal{B}) \int_0^T \mathfrak{g}_1(t) \varphi(t) dt \right\|_H = \left\| (\mathcal{B}) \int_0^T [\dot{\mathfrak{z}}_j(t) - \mathfrak{g}_1(t)] \varphi(t) dt \right\|_H \leq \\ & \leq \int_0^T \| [\dot{\mathfrak{z}}_j(t) - \mathfrak{g}_1(t)] \varphi(t) \|_H dt = \int_0^T \| \dot{\mathfrak{z}}_j(t) - \mathfrak{g}_1(t) \|_H |\varphi(t)| dt \leq T |\varphi|_{[0,T]}^{(0)} \| \dot{\mathfrak{z}}_j - \mathfrak{g}_1 \|_{\infty, [0,T], H} \rightarrow 0, \quad j \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

ввиду соотношений (2.4.14). Таким образом,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left\| (\mathcal{B}) \int_0^T \dot{\mathfrak{z}}_j(t) \varphi(t) dt - (\mathcal{B}) \int_0^T \mathfrak{g}_1(t) \varphi(t) dt \right\|_H = 0. \quad (2.4.16)$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} & \left\| \left[ -(\mathcal{B}) \int_0^T \dot{\mathfrak{z}}_j(t) \varphi(t) dt \right] - \left[ -(\mathcal{B}) \int_0^T \mathfrak{g}_0(t) \varphi(t) dt \right] \right\|_H = \left\| -(\mathcal{B}) \int_0^T [\dot{\mathfrak{z}}_j(t) - \mathfrak{g}_0(t)] \varphi(t) dt \right\|_H \leq \\ & \leq \int_0^T \| [\dot{\mathfrak{z}}_j(t) - \mathfrak{g}_0(t)] \varphi(t) \|_H dt = \int_0^T \| \dot{\mathfrak{z}}_j(t) - \mathfrak{g}_0(t) \|_H |\varphi(t)| dt \leq \nu T |\varphi|_{[0,T]}^{(0)} \| \dot{\mathfrak{z}}_j - \mathfrak{g}_0 \|_{C_s([0,T], V)} \rightarrow 0, \quad j \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

ввиду соотношений (2.4.14). Следовательно,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left\| \left[ -(\mathcal{B}) \int_0^T \dot{\mathfrak{z}}_j(t) \varphi(t) dt \right] - \left[ -(\mathcal{B}) \int_0^T \mathfrak{g}_0(t) \varphi(t) dt \right] \right\|_H = 0. \quad (2.4.17)$$

Перейдя теперь в (2.4.15) с учётом (2.4.16) и (2.4.17), получаем, что

$$(\mathcal{B}) \int_0^T \mathfrak{g}_1(t) \varphi(t) dt = -(\mathcal{B}) \int_0^T \mathfrak{g}_0(t) \varphi'(t) dt \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(0, T).$$

Поэтому  $g_0 \in W_\infty^1([0, T], H)$ , а её регулярная первая обобщённая производная  $g'_0$  совпадает с  $g_1$ . Поскольку же ранее было доказано включение  $g_0 \in C_s([0, T], V)$ , то  $g_0 \in \mathfrak{D}([0, T]; V, H)$ . Переходя затем к пределу при  $k \rightarrow \infty$  в соотношении (2.4.13) и учтя предельные соотношения (2.4.14), получим, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists j_0 = j_0(\varepsilon) \geq 1 \forall j \geq j_0(\varepsilon) : \| \mathfrak{g}_0 - \dot{\mathfrak{z}}_j \|_{\mathfrak{D}([0,T]; V, H)} \equiv \| \mathfrak{g}_0 - \dot{\mathfrak{z}}_j \|_{C_s([0,T], V)} + \| \mathfrak{g}_0 - \dot{\mathfrak{z}}_j \|_{\infty, [0,T], H} \leq \varepsilon.$$

Последнее же означает, что  $\| \mathfrak{g}_0 - \dot{\mathfrak{z}}_j \|_{\mathfrak{D}([0,T]; V, H)} \rightarrow 0, j \rightarrow \infty$ . Теорема доказана. ■

**Определение 2.4.1.** [14] Пусть  $\mathcal{P}$  — компактное метрическое пространство с метрикой  $d(\cdot, \cdot)$ ,  $X$  — банахово пространство с нормой  $\| \cdot \|_X$ . Множество  $\mathfrak{M} \subset C(\mathcal{P}, X)$  называется **равностепенно непрерывным**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \forall p', p'' \in \mathcal{P}, d(p', p'') \leq \delta \forall f \in \mathfrak{M} : \| f(p') - f(p'') \|_X \leq \varepsilon.$$

**Теорема 2.4.5.** [14] (Теорема Арцела–Асколи) Пусть  $\mathcal{P}$  — компактное метрическое пространство с метрикой  $d(\cdot, \cdot)$ ,  $X$  — банахово пространство с нормой  $\| \cdot \|_X$ . Множество  $\mathfrak{M} \subset C(\mathcal{P}, X)$  предкомпактно в  $C(\mathcal{P}, X)$  тогда и только тогда, когда

- 1) множество  $\mathfrak{M}$  равностепенно непрерывно;
- 2) множество  $\{ f(p) : p \in \mathcal{P}, f \in \mathfrak{M} \} \subset X$  — предкомпактно в  $X$ .

**Теорема 2.4.6.** Если  $\mathfrak{z} \in \mathfrak{D}([0, T]; V, H)$ , то  $\mathfrak{z} \in C([0, T], H)$ , причём

$$\max_{t \in [0, T]} \| \mathfrak{z}(t) \|_H \leq \nu \| \mathfrak{z} \|_{\mathfrak{D}([0, T]; V, H)}.$$

Кроме того, вложение  $\mathfrak{D}([0, T]; V, H) \subset C([0, T], H)$  — компактно.

**Доказательство.** Утверждение о том, что имеет место вложение  $\mathfrak{E}([0, T]; V, H) \subset C([0, T], H)$  и это вложение непрерывно, следует из предыдущей теоремы, очевидного вложения

$$\mathfrak{E}([0, T]; V, H) \subset \mathcal{W}([0, T]; V, H)$$

и определения нормы в пространстве  $\mathfrak{E}([0, T]; V, H)$ . Таким образом, достаточно лишь доказать компактность вложения  $\mathfrak{E}([0, T]; V, H) \subset C([0, T], H)$ .

В самом деле, пусть  $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{E}([0, T]; V, H)$  — ограниченное в норме  $\mathfrak{E}([0, T]; V, H)$  множество. Тогда найдётся постоянная  $K > 0$ , такая, что

$$\forall \mathfrak{z} \in \mathfrak{M} : \sup_{t \in [0, T]} \|\mathfrak{z}(t)\|_V + \text{vraisup}_{t \in [0, T]} \|\dot{\mathfrak{z}}(t)\|_H \leq K.$$

Иными словами, множество

$$\{\mathfrak{z}(t) : t \in [0, T], \mathfrak{z} \in \mathfrak{M}\} \subset V,$$

ограничено в норме  $V$ , и, в силу компактности вложения  $V \subset H$ , предкомпактно в норме пространства  $H$ . Далее, при всех  $h \in H$  и при всех  $t', t'' \in [0, T]$

$$|\langle \mathfrak{z}(t') - \mathfrak{z}(t''), h \rangle_H| = \left| \int_{t''}^{t'} \langle \dot{\mathfrak{z}}(t), h \rangle_H dt \right| \leq \left| \int_{t''}^{t'} \|\dot{\mathfrak{z}}(t)\|_H dt \right| \|h\|_H \leq C|t' - t''| \|h\|_H.$$

Взяв точную верхнюю грань по всем  $h \in H$ ,  $\|h\|_H \leq 1$ , получим, что

$$\|\mathfrak{z}(t') - \mathfrak{z}(t'')\|_H \leq C|t' - t''|.$$

Следовательно, для любого  $\varepsilon > 0$  найдётся  $\delta = \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{C}$ , такое, что для всех  $t', t'' \in [0, T]$ ,  $|t' - t''| < \delta$  и для всех  $\mathfrak{z} \in \mathfrak{M}$  выполнено условие

$$\|\mathfrak{z}(t') - \mathfrak{z}(t'')\|_H < \varepsilon.$$

Следовательно, в силу теоремы 2.4.5, множество  $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{E}([0, T]; V, H)$  предкомпактно в норме пространства  $C([0, T], H)$ . Таким образом, теорема полностью доказана. ■

Через  $\mathbb{W}([0, T]; V, H)$  обозначим множество  $W_\infty^1([0, T], H) \cap L_\infty([0, T], V)$ . Согласно [64, теорема 8.18.3, стр.809],

$$L_\infty([0, T], V) \cong (L_1([0, T], V^*))^*, \quad L_\infty([0, T], H) \cong (L_1([0, T], H))^*, \quad (2.4.18)$$

где знаком  $\cong$  обозначен изометрический изоморфизм банаховых пространств.

Будем говорить, что последовательность  $\mathfrak{z}_j \in \mathbb{W}([0, T]; V, H)$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , сходится к функции  $\mathfrak{z} \in \mathbb{W}([0, T]; V, H)$ , если

$$\mathfrak{z}_j \rightarrow \mathfrak{z}, \quad j \rightarrow \infty, \quad * \text{-слабо в } L_\infty([0, T], V); \quad \dot{\mathfrak{z}}_j \rightarrow \dot{\mathfrak{z}}, \quad j \rightarrow \infty, \quad * \text{-слабо в } L_\infty([0, T], H);$$

то есть

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} \int_0^T \langle \mathfrak{z}_j(t), \varphi(t) \rangle dt &= \int_0^T \langle \mathfrak{z}(t), \varphi(t) \rangle dt \quad \forall \varphi \in L_1([0, T], V^*); \\ \lim_{j \rightarrow \infty} \int_0^T \langle \dot{\mathfrak{z}}_j(t), \varphi(t) \rangle_H dt &= \int_0^T \langle \dot{\mathfrak{z}}(t), \varphi(t) \rangle_H dt \quad \forall \varphi \in L_1([0, T], H). \end{aligned}$$

**Теорема 2.4.7.** Пусть последовательность  $\mathfrak{z}_j \in \mathbb{W}([0, T]; V, H)$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , такова, что для некоторых функций  $\mathfrak{g}_0 \in L_\infty([0, T], V)$  и  $\mathfrak{g}_1 \in L_\infty([0, T], H)$

$$\mathfrak{z}_j \rightarrow \mathfrak{g}_0, \quad j \rightarrow \infty, \quad * \text{-слабо в } L_\infty([0, T], V); \quad \dot{\mathfrak{z}}_j \rightarrow \mathfrak{g}_1, \quad j \rightarrow \infty, \quad * \text{-слабо в } L_\infty([0, T], H). \quad (2.4.19)$$

Тогда  $\mathfrak{g}_0 \in \mathbb{W}([0, T]; V, H)$ , а её регулярная первая обобщённая производная  $\mathfrak{g}'_0$  совпадает с  $\mathfrak{g}_1$ .



**Доказательство.** Пусть найдутся функции  $\mathbf{g}_0 \in L_\infty([0, T], V)$  и  $\mathbf{g}_1 \in L_\infty([0, T], H)$ , такие, что выполнены соотношения (2.4.19). Поскольку  $\mathbf{z}_j \in \mathbb{W}([0, T]; V, H)$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , то имеет место интегральное тождество

$$(\mathbf{B}) \int_0^T \dot{\mathbf{z}}_j(t) \varphi(t) dt = -(\mathbf{B}) \int_0^T \mathbf{z}_j(t) \varphi'(t) dt \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(0, T).$$

Отсюда следует, что при всех  $h \in H$

$$\begin{aligned} \left\langle (\mathbf{B}) \int_0^T \dot{\mathbf{z}}_j(t) \varphi(t) dt, h \right\rangle_H &= \left\langle -(\mathbf{B}) \int_0^T \mathbf{z}_j(t) \varphi'(t) dt, h \right\rangle_H \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(0, T); \\ \int_0^T \langle \dot{\mathbf{z}}_j(t) \varphi(t), h \rangle_H dt &= - \int_0^T \langle \mathbf{z}_j(t) \varphi'(t), h \rangle_H dt \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(0, T); \\ \int_0^T \langle \dot{\mathbf{z}}_j(t), \varphi(t) h \rangle_H dt &= - \int_0^T \langle \mathbf{z}_j(t), \varphi'(t) h \rangle_H dt \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(0, T). \end{aligned}$$

Переходя здесь к пределу при  $j \rightarrow \infty$  с учётом соотношений (2.4.19), будем иметь

$$\int_0^T \langle \mathbf{g}_1(t), \varphi(t) h \rangle_H dt = - \int_0^T \langle \mathbf{g}_0(t), \varphi'(t) h \rangle_H dt \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(0, T).$$

Поэтому при всех  $h \in H$

$$\begin{aligned} \left\langle (\mathbf{B}) \int_0^T \mathbf{g}_1(t) \varphi(t) dt, h \right\rangle_H &= \left\langle -(\mathbf{B}) \int_0^T \mathbf{g}_0(t) \varphi'(t) dt, h \right\rangle_H \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(0, T); \\ \left\langle (\mathbf{B}) \int_0^T \mathbf{g}_1(t) \varphi(t) dt + (\mathbf{B}) \int_0^T \mathbf{g}_0(t) \varphi'(t) dt, h \right\rangle_H &= 0 \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(0, T); \end{aligned}$$

ввиду чего

$$(\mathbf{B}) \int_0^T \mathbf{g}_1(t) \varphi(t) dt + (\mathbf{B}) \int_0^T \mathbf{g}_0(t) \varphi'(t) dt = 0 \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(0, T);$$

или, иначе,

$$(\mathbf{B}) \int_0^T \mathbf{g}_1(t) \varphi(t) dt = -(\mathbf{B}) \int_0^T \mathbf{g}_0(t) \varphi'(t) dt \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(0, T);$$

Последнее и означает, что  $\mathbf{g}_0 \in \mathbb{W}([0, T]; V, H)$ , а её регулярная первая обобщённая производная  $\mathbf{g}'_0$  совпадает с  $\mathbf{g}_1$ . Теорема доказана. ■

**Теорема 2.4.8.** Любая функция  $f \in \mathfrak{E}([0, T]; V, H)$  принадлежит пространству  $\mathbb{W}([0, T]; V, H)$ , причём любое множество, ограниченное в норме пространства  $\mathfrak{E}([0, T]; V, H)$ , секвенциально компактно в  $\mathbb{W}([0, T]; V, H)$ .

**Доказательство.** Теоретико-множественное вложение  $\mathfrak{E}([0, T]; V, H) \subset \mathbb{W}([0, T]; V, H)$  вытекает из определения этих пространств.

Докажем, что любое множество, ограниченное в норме пространства  $\mathfrak{E}([0, T]; V, H)$ , секвенциально компактно в  $\mathbb{W}([0, T]; V, H)$ . В самом деле, пусть последовательность  $\mathbf{z}_j \in \mathfrak{E}([0, T]; V, H)$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , ограничена в норме пространства  $\mathfrak{E}([0, T]; V, H)$ , т.е. найдётся константа  $K > 0$ , такая, что для всех  $j = 1, 2, \dots$

$$\sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{z}_j(t)\|_V + \text{vraisup}_{t \in [0, T]} \|\dot{\mathbf{z}}_j(t)\|_H \leq K. \quad (2.4.20)$$

В силу леммы 1.3.1 отсюда следует, что

$$\text{vraisup}_{t \in [0, T]} \|\mathbf{z}_j(t)\|_V + \text{vraisup}_{t \in [0, T]} \|\dot{\mathbf{z}}_j(t)\|_H \leq K. \quad (2.4.21)$$

Положим  $Y \equiv L_1([0, T], V^*) \oplus L_1([0, T], H)$  и введём в этом пространстве норму равенством

$$\|y\|_Y \equiv \max\{\|\mathbf{m}\|_{1,[0,T],V^*}, \|\mathbf{n}\|_{1,[0,T],H}\} \quad \forall y \equiv (\mathbf{m}, \mathbf{n}) \in Y.$$

В силу изометричных изоморфизмов (2.4.18) пространство  $Y^*$  изометрично изоморфно пространству  $Z \equiv L_\infty([0, T], V) \oplus L_\infty([0, T], H)$ , наделённому нормой

$$\|z\|_Z \equiv \|\mathbf{p}\|_{\infty,[0,T],V} + \|\mathbf{q}\|_{\infty,[0,T],H} \quad \forall z \equiv (\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in Z.$$

Ясно, что теперь (2.4.21) можно переписать в виде

$$\|(\mathfrak{z}_j, \dot{\mathfrak{z}}_j)\|_Z \leq K \quad \forall j \geq 1. \quad (2.4.22)$$

Следовательно, на основании теорем Бишоп и Алаоглу, найдутся пара  $(\tilde{\mathfrak{z}}_0, \tilde{\mathfrak{z}}_1) \in Z$  и подпоследовательность  $j_i, i = 1, 2, \dots$ , последовательности  $j = 1, 2, \dots$ , такие, что

$$(\mathfrak{z}_{j_i}, \dot{\mathfrak{z}}_{j_i}) \rightarrow (\tilde{\mathfrak{z}}_0, \tilde{\mathfrak{z}}_1), \quad i \rightarrow \infty, \quad *-\text{слабо в } Z; \quad \|(\tilde{\mathfrak{z}}_0, \tilde{\mathfrak{z}}_1)\|_Z \leq K.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \mathfrak{z}_{j_i} \rightarrow \tilde{\mathfrak{z}}_0, \quad i \rightarrow \infty, \quad *-\text{слабо в } L_\infty([0, T], V); \quad \dot{\mathfrak{z}}_{j_i} \rightarrow \tilde{\mathfrak{z}}_1, \quad i \rightarrow \infty, \quad *-\text{слабо в } L_\infty([0, T], H); \\ \|\tilde{\mathfrak{z}}_0\|_{\infty,[0,T],V} + \|\tilde{\mathfrak{z}}_1\|_{\infty,[0,T],H} \leq K. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} \int_0^T \langle \mathfrak{z}_{j_i}(t), \varphi(t) \rangle dt &= \int_0^T \langle \tilde{\mathfrak{z}}_0(t), \varphi(t) \rangle dt \quad \forall \varphi \in L_1([0, T], V^*); \\ \lim_{i \rightarrow \infty} \int_0^T \langle \dot{\mathfrak{z}}_{j_i}(t), \varphi(t) \rangle_H dt &= \int_0^T \langle \tilde{\mathfrak{z}}_1(t), \varphi(t) \rangle_H dt \quad \forall \varphi \in L_1([0, T], H); \end{aligned}$$

и, в частности,

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} \int_0^T \langle \mathfrak{z}_{j_i}(t), \varphi(t) \rangle_H dt &= \int_0^T \langle \tilde{\mathfrak{z}}_0(t), \varphi(t) \rangle_H dt \quad \forall \varphi \in L_1([0, T], H); \\ \lim_{i \rightarrow \infty} \int_0^T \langle \dot{\mathfrak{z}}_{j_i}(t), \varphi(t) \rangle_H dt &= \int_0^T \langle \tilde{\mathfrak{z}}_1(t), \varphi(t) \rangle_H dt \quad \forall \varphi \in L_1([0, T], H); \end{aligned} \quad (2.4.23)$$

Поскольку  $\mathfrak{z}_{j_i} \in \mathfrak{D}([0, T]; V, H)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , то  $\mathfrak{z}_{j_i} \in W_\infty^1([0, T], H)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ . Поэтому справедливо интегральное тождество

$$(\text{Б}) \int_0^T \mathfrak{z}_{j_i}(t) \psi'(t) dt = -(\text{Б}) \int_0^T \dot{\mathfrak{z}}_{j_i}(t) \psi(t) dt \quad \forall \psi \in \mathfrak{D}(0, T),$$

из которого следует, что для всех  $h \in H$

$$\int_0^T \langle \mathfrak{z}_{j_i}(t), \psi'(t) h \rangle_H dt = - \int_0^T \langle \dot{\mathfrak{z}}_{j_i}(t), \psi(t) h \rangle_H dt \quad \forall \psi \in \mathfrak{D}(0, T).$$

Переходя здесь на основании (2.4.23) к пределу при  $i \rightarrow \infty$ , получим, что

$$\int_0^T \langle \tilde{\mathfrak{z}}_0(t), \psi'(t) h \rangle_H dt = - \int_0^T \langle \tilde{\mathfrak{z}}_1(t), \psi(t) h \rangle_H dt \quad \forall \psi \in \mathfrak{D}(0, T).$$

Следовательно, для всех  $h \in H$

$$\left\langle (\text{Б}) \int_0^T \tilde{\mathfrak{z}}_0(t) \psi'(t) dt + (\text{Б}) \int_0^T \tilde{\mathfrak{z}}_1(t) \psi(t) dt, h \right\rangle_H = 0 \quad \forall \psi \in \mathfrak{D}(0, T).$$

Это означает, что

$$(B) \int_0^T \tilde{z}_0(t) \psi'(t) dt = -(B) \int_0^T \tilde{z}_1(t) \psi(t) dt \quad \forall \psi \in \mathfrak{D}(0, T),$$

откуда вытекает, что  $\tilde{z}_0 \in L_\infty([0, T], V)$ ,  $\tilde{z}_1 \in L_\infty([0, T], H)$ , и  $\tilde{z}_1$  является регулярной обобщённой производной функции  $\tilde{z}_0$ . Отсюда и из непрерывности вложения  $V \subset H$  следует, что  $\tilde{z}_0 \in W_\infty^1([0, T], H)$ . Поэтому, согласно теореме 2.3.3,  $\tilde{z}_0 \in C([0, T], H)$ . Таким образом,  $\tilde{z}_0 \in C_s([0, T], H) \cap L_\infty([0, T], V)$ . Последнее на основании леммы 2.3.1 даёт включение  $\tilde{z}_0 \in C_s([0, T], V)$ .

Итак, мы доказали, что  $\tilde{z}_0 \in \mathfrak{D}([0, T]; V, H)$ , причём  $\tilde{z}'_0 = \tilde{z}_1$ . Теорема полностью доказана. ■

Докажем теперь справедливость следующего результата.

**Теорема 2.4.9.** Пусть последовательность функций  $\mathfrak{z}_j \in \mathfrak{D}([0, T]; V, H)$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , — ограничена в норме пространства  $\mathfrak{D}([0, T]; V, H)$ , т.е. найдётся постоянная  $K > 0$ , такая, что

$$\|\mathfrak{z}_j\|_{\mathfrak{D}([0, T]; V, H)} \leq K, \quad j = 1, 2, \dots \quad (2.4.24)$$

Тогда найдутся подпоследовательность  $\mathfrak{z}_{j_i}$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , последовательности  $\mathfrak{z}_j$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , и функция  $\mathfrak{z} \in \mathfrak{D}([0, T]; V, H)$ , такие, что

$$\mathfrak{z}_{j_i} \rightarrow \mathfrak{z}, \quad i \rightarrow \infty, \quad \text{слабо в } \mathcal{W}_2^1([0, T]; V, H), \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \max_{t \in [0, T]} \|\mathfrak{z}_{j_i}(t) - \mathfrak{z}(t)\|_H = 0; \quad (2.4.25)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{z}_{j_i} \rightarrow \mathfrak{z}, \quad i \rightarrow \infty, \quad * \text{-слабо в } L_\infty([0, T], V); \quad \dot{\mathfrak{z}}_{j_i} \rightarrow \dot{\mathfrak{z}}, \quad i \rightarrow \infty, \quad * \text{-слабо в } L_\infty([0, T], H); \\ \mathfrak{z}_{j_i} \rightarrow \mathfrak{z}, \quad i \rightarrow \infty, \quad \text{в } V^* \text{-топологии пространства } C_s([0, T], V); \end{aligned}$$

причём

$$\|\mathfrak{z}\|_{\mathfrak{D}([0, T]; V, H)} \leq K. \quad (2.4.26)$$

Кроме того, если  $\mathbf{Z}$  — банахово пространство, а  $A \in \mathcal{L}(V, \mathbf{Z})$  — некоторый компактный оператор, то

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \max_{t \in [0, T]} \|A[\mathfrak{z}_{j_i}(t)] - A[\mathfrak{z}(t)]\|_{\mathbf{Z}} = 0. \quad (2.4.27)$$

**Доказательство.** Разобьём доказательство на шесть шагов.

1) В силу теоремы 2.4.8 и неравенства (2.4.24) найдутся подпоследовательность  $\mathfrak{z}_{j_{i,1}}$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , последовательности  $\mathfrak{z}_j$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , и функция  $\mathfrak{z} \in \mathfrak{D}([0, T]; V, H)$ , такие, что

$$\mathfrak{z}_{j_{i,1}} \rightarrow \mathfrak{z}, \quad i \rightarrow \infty, \quad * \text{-слабо в } L_\infty([0, T], V); \quad \dot{\mathfrak{z}}_{j_{i,1}} \rightarrow \dot{\mathfrak{z}}, \quad i \rightarrow \infty, \quad * \text{-слабо в } L_\infty([0, T], H); \quad (2.4.28)$$

причём выполнено неравенство (2.4.26).

2) Далее, для любого  $h \in H$ ,  $h \neq 0$ , и для любых  $t', t'' \in [0, T]$

$$\begin{aligned} |\langle h, \mathfrak{z}_{j_{i,1}}(t') - \mathfrak{z}_{j_{i,1}}(t'') \rangle_H| &\leq \|h\|_H \|\mathfrak{z}_{j_{i,1}}(t') - \mathfrak{z}_{j_{i,1}}(t'')\|_H = \|h\|_H \left\| (B) \int_{t''}^{t'} \dot{\mathfrak{z}}_{j_{i,1}}(t) dt \right\|_H \leq \\ &\leq \|h\|_H \left| \int_{t''}^{t'} \|\dot{\mathfrak{z}}_{j_{i,1}}(t)\|_H dt \right| \leq K |t' - t''| \|h\|_H. \end{aligned}$$

Это значит, что при любом  $h \in H$  семейство функций

$$[0, T] \ni t \mapsto \langle h, \mathfrak{z}_{j_{i,1}}(t) \rangle_H, \quad i = 1, 2, \dots,$$

равностепенно непрерывно. Поскольку же элемент  $h \in H$  можно отождествить с линейным непрерывным на  $V$  функционалом, действующим по правилу

$$\langle h, v \rangle \equiv \langle h, v \rangle_H, \quad v \in V,$$

то мы доказали, что семейство функций

$$[0, T] \ni t \mapsto \langle v^*, \mathfrak{z}_{j_{i,1}}(t) \rangle, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (2.4.29)$$

равностепенно непрерывно при каждом фиксированном  $v^* \in H$ . Докажем теперь равностепенную непрерывность этого семейства для всех  $v^* \in V^*$ . Выберем произвольно  $v^* \in V$  и зафиксируем. Пусть  $\varepsilon > 0$  — произвольное число. В силу плотности  $H$  в  $V^*$  найдётся элемент  $h_\varepsilon \in H$ , такой, что

$$\|h_\varepsilon - v^*\|_{V^*} \leq \frac{\varepsilon}{4K}.$$

Тогда для всех  $t', t'' \in [0, T]$

$$\begin{aligned} |\langle v^*, \mathfrak{z}_{j_{i,1}}(t') - \mathfrak{z}_{j_{i,1}}(t'') \rangle| &\leq |\langle v^* - h_\varepsilon, \mathfrak{z}_{j_{i,1}}(t') - \mathfrak{z}_{j_{i,1}}(t'') \rangle| + |\langle h_\varepsilon, \mathfrak{z}_{j_{i,1}}(t') - \mathfrak{z}_{j_{i,1}}(t'') \rangle| \leq \frac{\varepsilon}{4K} 2K + \\ &+ |\langle h_\varepsilon, \mathfrak{z}_{j_{i,1}}(t') - \mathfrak{z}_{j_{i,1}}(t'') \rangle|. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$|\langle v^*, \mathfrak{z}_{j_{i,1}}(t') - \mathfrak{z}_{j_{i,1}}(t'') \rangle| \leq \frac{\varepsilon}{2} + |\langle h_\varepsilon, \mathfrak{z}_{j_{i,1}}(t') - \mathfrak{z}_{j_{i,1}}(t'') \rangle|.$$

В силу доказанной выше равностепенной непрерывности семейства (2.4.29) для всех фиксированных  $v^* \in H$ , найдётся  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ , не зависящее от выбора номера  $i \geq 1$ , такое, что для всех  $t', t'' \in [0, T]$ , для которых  $|t' - t''| \leq \delta$ , выполнено неравенство

$$|\langle h_\varepsilon, \mathfrak{z}_{j_{i,1}}(t') - \mathfrak{z}_{j_{i,1}}(t'') \rangle| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно, для любого  $\varepsilon > 0$  найдётся  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ , не зависящее от выбора номера  $i \geq 1$ , такое, что для всех  $t', t'' \in [0, T]$ , для которых  $|t' - t''| \leq \delta$ , справедливо соотношение

$$|\langle v^*, \mathfrak{z}_{j_{i,1}}(t') - \mathfrak{z}_{j_{i,1}}(t'') \rangle| \leq \varepsilon.$$

Иными словами, при любом фиксированном  $v^* \in V^*$  семейство (2.4.29) — равностепенно непрерывно.

В силу равностепенной непрерывности семейства (2.4.29) при всех фиксированных  $v^* \in V^*$  и леммы 1.1.6 найдутся подпоследовательность  $\mathfrak{z}_{j_{i,2}}$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , последовательности  $\mathfrak{z}_{j_{i,1}}$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , и функция  $\hat{\mathfrak{z}} \in C_s([0, T], V)$ , такие, что

$$\mathfrak{z}_{j_{i,2}} \rightarrow \hat{\mathfrak{z}}, \quad i \rightarrow \infty, \quad \text{в } V^*\text{-топологии пространства } C_s([0, T], V). \quad (2.4.30)$$

Покажем, что  $\hat{\mathfrak{z}} = \mathfrak{z}$ . В самом деле, из (2.4.30) следует, что при любых фиксированных  $t \in [0, T]$  и  $v^* \in V^*$  справедливо предельное соотношение

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \langle v^*, \mathfrak{z}_{j_{i,2}}(t) \rangle = \langle v^*, \hat{\mathfrak{z}}(t) \rangle.$$

Отсюда вытекает, что для всех фиксированных  $g \in L_1([0, T], V^*)$  и при п.в.  $t \in [0, T]$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \langle g(t), \mathfrak{z}_{j_{i,2}}(t) \rangle = \langle g(t), \hat{\mathfrak{z}}(t) \rangle.$$

Поскольку, кроме того, в силу неравенства (2.4.26), при п.в.  $t \in [0, T]$

$$|\langle g(t), \mathfrak{z}_{j_{i,2}}(t) \rangle| \leq \|g(t)\|_{V^*} \|\mathfrak{z}_{j_{i,2}}(t)\|_V \leq K \|g(t)\|_{V^*}$$

Поэтому, в силу теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла Лебега,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_0^T \langle g(t), \mathfrak{z}_{j_{i,2}}(t) \rangle dt = \int_0^T \langle g(t), \hat{\mathfrak{z}}(t) \rangle dt.$$

Иными словами, последовательность  $\mathfrak{z}_{j_{i,2}}$ ,  $i = 1, 2, \dots$ ,  $*$ -слабо в  $L_1([0, T], V)$  сходится к функции  $\hat{\mathfrak{z}} \in C_s([0, T], V)$ . Ввиду (2.4.28) это означает, что  $\hat{\mathfrak{z}} = \mathfrak{z}$ .

3) Далее, поскольку последовательность функций  $\mathfrak{z}_j \in \mathfrak{E}([0, T]; V, H)$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , — ограничена в норме пространства  $\mathfrak{E}([0, T]; V, H)$ , то она ограничена и в норме пространства  $\mathcal{W}_2^1([0, T]; V, H)$ . Поскольку же последнее пространство гильбертово, то найдутся подпоследовательность  $\mathfrak{z}_{j_{i,3}}$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , последовательности  $\mathfrak{z}_{j_{i,2}}$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , и функция  $\tilde{\mathfrak{z}} \in \mathcal{W}_2^1([0, T]; V, H)$ , такие, что

$$\mathfrak{z}_{j_{i,3}} \rightarrow \tilde{\mathfrak{z}}, \quad i \rightarrow \infty, \quad \text{слабо в } \mathcal{W}_2^1([0, T]; V, H). \quad (2.4.31)$$

Из данного соотношения вытекает, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_0^T \langle g(t), \mathfrak{z}_{j_i,3}(t) \rangle_V dt = \int_0^T \langle g(t), \check{\mathfrak{z}}(t) \rangle_V dt \quad \forall g \in L_2([0, T], V).$$

С другой стороны, в силу (2.4.28),

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_0^T \langle g(t), \mathfrak{z}_{j_i,3}(t) \rangle_V dt = \int_0^T \langle g(t), \mathfrak{z}(t) \rangle_V dt \quad \forall g \in L_2([0, T], V).$$

Отсюда следует, что  $\check{\mathfrak{z}} = \mathfrak{z}$ .

4) В силу теоремы 2.4.6 и неравенства (2.4.24) найдутся подпоследовательность  $\mathfrak{z}_{j_i,4}$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , последовательности  $\mathfrak{z}_{j_i,3}$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , и функция  $\check{\mathfrak{z}} \in C([0, T], H)$ , такие, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \max_{t \in [0, T]} \|\mathfrak{z}_{j_i,4}(t) - \check{\mathfrak{z}}(t)\|_H = 0. \quad (2.4.32)$$

Покажем, что  $\check{\mathfrak{z}} = \mathfrak{z}$ . В самом деле, из (2.4.28) следует, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_0^T \langle g(t), \mathfrak{z}_{j_i,4}(t) \rangle_H dt = \int_0^T \langle g(t), \mathfrak{z}(t) \rangle_H dt \quad \forall g \in L_1([0, T], H). \quad (2.4.33)$$

С другой стороны, из (2.4.32) следует, что

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T \langle g(t), \mathfrak{z}_{j_i,4}(t) \rangle_H dt - \int_0^T \langle g(t), \check{\mathfrak{z}}(t) \rangle_H dt \right| &= \left| \int_0^T \langle g(t), \mathfrak{z}_{j_i,4}(t) - \check{\mathfrak{z}}(t) \rangle_H dt \right| \leq \int_0^T |\langle g(t), \mathfrak{z}_{j_i,4}(t) - \check{\mathfrak{z}}(t) \rangle_H| dt \leq \\ &\leq \int_0^T \|g(t)\|_H \|\mathfrak{z}_{j_i,4}(t) - \check{\mathfrak{z}}(t)\|_H dt \leq \max_{t \in [0, T]} \|\mathfrak{z}_{j_i,4}(t) - \check{\mathfrak{z}}(t)\|_H \int_0^T \|g(t)\|_H dt \rightarrow 0, \quad i \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Отсюда и из (2.4.33) вытекает, что  $\check{\mathfrak{z}} = \mathfrak{z}$ .

5) Собирая вместе соотношения (2.4.28) (2.4.30), (2.4.31), (2.4.32), и полагая  $\mathfrak{z}_{j_i} \equiv \mathfrak{z}_{j_i,4}$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , получаем соотношения (2.4.25) и (2.4.26).

6) Докажем теперь соотношение (2.4.27). В самом деле, поскольку

$$\mathfrak{z}_{j_i} \rightarrow \mathfrak{z}, \quad i \rightarrow \infty, \quad \text{в } V^*\text{-топологии пространства } C_s([0, T], V),$$

то

$$\forall v^* \in V^* : \lim_{i \rightarrow \infty} \max_{t \in [0, T]} |\langle v^*, \mathfrak{z}_{j_i}(t) - \mathfrak{z}(t) \rangle| = 0. \quad (2.4.34)$$

Отсюда вытекает, что при каждом фиксированном  $t \in [0, T]$

$$\mathfrak{z}_{j_i}(t) \rightarrow \mathfrak{z}(t), \quad i \rightarrow \infty, \quad \text{слабо в } V, \quad (2.4.35)$$

что, в силу компактности оператора  $A$ , даёт соотношение

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|A[\mathfrak{z}_{j_i}(t)] - A[\mathfrak{z}(t)]\|_{\mathbf{Z}} = 0 \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.4.36)$$

Предположим, однако, что соотношение (2.4.27) не выполнено. Тогда найдутся положительное число  $\varepsilon_0$ , подпоследовательность  $i_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , последовательности  $i = 1, 2, \dots$ , и последовательность чисел  $t_k \in [0, T]$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , такие, что

$$\|A[\mathfrak{z}_{j_{i_k}}(t_k)] - A[\mathfrak{z}(t_k)]\|_{\mathbf{Z}} \geq \varepsilon_0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.4.37)$$

В силу компактности отрезка  $[0, T]$  найдутся подпоследовательность последовательности  $t_k \in [0, T]$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , которую мы обозначим так же, как и саму последовательность  $t_k \in [0, T]$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , и точка  $t^* \in [0, T]$ , такие, что  $t_k \rightarrow t^*$ ,  $k \rightarrow \infty$ . Выберем теперь произвольно  $v^* \in V^*$  и зафиксируем. Тогда

$$|\langle v^*, \mathfrak{z}_{j_{i_k}}(t_k) - \mathfrak{z}(t_k) \rangle| \leq |\langle v^*, \mathfrak{z}_{j_{i_k}}(t_k) - \mathfrak{z}_{j_{i_k}}(t^*) \rangle| + |\langle v^*, \mathfrak{z}_{j_{i_k}}(t^*) - \mathfrak{z}(t^*) \rangle| + |\langle v^*, \mathfrak{z}(t^*) - \mathfrak{z}(t_k) \rangle|. \quad (2.4.38)$$

Из включения  $\mathfrak{z} \in C_s([0, T], V)$  следует, что функция  $\mathfrak{z}$  слабо непрерывна в точке  $t^*$ . Поэтому

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0 \forall t \in [0, T], |t - t^*| \leq \delta_1 : |\langle v^*, \mathfrak{z}(t) - \mathfrak{z}(t^*) \rangle| \leq \frac{\varepsilon}{3}. \quad (2.4.39)$$

Далее, в силу доказанной выше равностепенной непрерывности семейства функций

$$[0, T] \ni t \mapsto \langle v^*, \mathfrak{z}_{j_{i_k}}(t_k) \rangle, \quad k = 1, 2, \dots,$$

справедливо соотношение

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0 \forall t', t'' \in [0, T], |t' - t''| \leq \delta_2 : |\langle v^*, \mathfrak{z}_{j_{i_k}}(t') - \mathfrak{z}_{j_{i_k}}(t'') \rangle| \leq \frac{\varepsilon}{3}. \quad (2.4.40)$$

Кроме того, в силу сходимости  $t_k \rightarrow t^*, k \rightarrow \infty$ ,

$$\forall \sigma > 0 \exists k_0 = k_0(\sigma) \geq 1 \forall k \geq k_0(\sigma) : |t_k - t^*| \leq \sigma. \quad (2.4.41)$$

Произвольно зафиксируем  $\varepsilon > 0$  и подберём по нему  $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$  согласно (2.4.39) и  $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$  согласно (2.4.40). Положив  $\delta^*(\varepsilon) \equiv \min\{\delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon)\}$ , будем иметь

$$\begin{aligned} \forall t \in [0, T], |t - t^*| \leq \delta^*(\varepsilon) : |\langle v^*, \mathfrak{z}(t) - \mathfrak{z}(t^*) \rangle| &\leq \frac{\varepsilon}{3}; \\ \forall t', t'' \in [0, T], |t' - t''| \leq \delta^*(\varepsilon) : |\langle v^*, \mathfrak{z}_{j_{i_k}}(t') - \mathfrak{z}_{j_{i_k}}(t'') \rangle| &\leq \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned} \quad (2.4.42)$$

Подберём теперь по  $\delta^*(\varepsilon)$  номер  $k_0 = k_0(\delta^*(\varepsilon))$  согласно (2.4.41). Тогда, в силу (2.4.41), при всех  $k \geq k_0$

$$|t_k - t^*| \leq \delta^*(\varepsilon).$$

Следовательно, ввиду (2.4.42),

$$|\langle v^*, \mathfrak{z}(t^*) - \mathfrak{z}(t_k) \rangle| \leq \frac{\varepsilon}{3}, \quad |\langle v^*, \mathfrak{z}_{j_{i_k}}(t_k) - \mathfrak{z}_{j_{i_k}}(t^*) \rangle| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall k \geq \tilde{k}_0(\varepsilon),$$

где  $\tilde{k}_0(\varepsilon) \equiv k_0(\delta^*(\varepsilon))$ . Поэтому из (2.4.38) вытекает, что

$$|\langle v^*, \mathfrak{z}_{j_{i_k}}(t_k) - \mathfrak{z}(t_k) \rangle| \leq \frac{\varepsilon}{3} + |\langle v^*, \mathfrak{z}_{j_{i_k}}(t^*) - \mathfrak{z}(t^*) \rangle| + \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall k \geq \tilde{k}_0(\varepsilon).$$

Наконец, из (2.4.35) вытекает, что найдётся номер  $k_1 = k_1(\varepsilon) \geq 1$ , такой, что

$$|\langle v^*, \mathfrak{z}_{j_{i_k}}(t^*) - \mathfrak{z}(t^*) \rangle| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall k \geq k_1(\varepsilon).$$

Взяв  $k^*(\varepsilon) \equiv \max\{\tilde{k}_0(\varepsilon), k_1(\varepsilon)\}$ , получим, что

$$|\langle v^*, \mathfrak{z}_{j_{i_k}}(t_k) - \mathfrak{z}(t_k) \rangle| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \quad \forall k \geq k^*(\varepsilon).$$

Итак, для любого  $\varepsilon > 0$  найдётся номер  $k^*(\varepsilon)$ , такой, что для всех  $k \geq k^*(\varepsilon)$  выполнено неравенство

$$|\langle v^*, \mathfrak{z}_{j_{i_k}}(t_k) - \mathfrak{z}(t_k) \rangle| \leq \varepsilon.$$

В силу произвольности выбора  $v^* \in V^*$  это означает, что

$$\mathfrak{z}_{j_{i_k}}(t_k) - \mathfrak{z}(t_k) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty, \quad \text{слабо в } V,$$

что, ввиду компактности оператора  $A$ , даёт предельное соотношение

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|A[\mathfrak{z}_{j_{i_k}}(t_k)] - A[\mathfrak{z}(t_k)]\|_{\mathbf{Z}} = 0,$$

противоречащее неравенству (2.4.37). Таким образом, соотношение (2.4.27) доказано.

Теорема полностью доказана. ■

Пусть  $e_k \in V$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , — ортогональная в  $V$  и ортонормированная в  $H$  система, такая, что для любых  $\varphi \in V$  и  $\psi \in H$  справедливо равенство

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|\varphi^N - \varphi\|_V = 0, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \|\psi^N - \psi\|_H = 0,$$

где

$$\varphi^N \equiv \sum_{m=1}^N \varphi_m e_m, \quad \psi^N \equiv \sum_{m=1}^N \psi_m e_m, \quad \varphi_k \equiv \langle \varphi, e_k \rangle_H, \quad \psi_k \equiv \langle \psi, e_k \rangle_H, \quad k, \quad N = 1, 2, \dots$$

**Лемма 2.4.1.** Пусть  $\mathfrak{M}^N \equiv \{ \sum_{j=1}^N \zeta_j e_j : \zeta_j \in W_2^1[0, T], \zeta_j(T) = 0, j = \overline{1, N} \}$ ,  $\mathfrak{M} \equiv \bigcup_{N=1}^{\infty} \mathfrak{M}^N$ . Тогда  $\mathfrak{M}$

плотно в  $\hat{\mathfrak{D}}_1([0, T]; V, H) \equiv \{z \in \mathfrak{D}_1([0, T]; V, H) : z(T) = 0\}$ .

**Доказательство.** Покажем, что  $\mathfrak{M}$  плотно в  $\hat{\mathfrak{D}}_1([0, T]; V, H)$ .

В самом деле, пусть  $z \in \hat{\mathfrak{D}}_1([0, T]; V, H)$  — произвольна. Тогда, в силу свойств последовательности  $e_j \in V, j = 1, 2, \dots$ ,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \sum_{j=1}^N z_j(t) e_j - z(t) \right\|_V^2 = 0, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \sum_{j=1}^N \dot{z}_j(t) e_j - \dot{z}(t) \right\|_H^2 = 0, \quad \forall t \in [0, T],$$

где  $z_j(t) \equiv \langle z(t), e_j \rangle_H, j = 1, 2, \dots$

Полагая  $z^N(t) \equiv \sum_{j=1}^N z_j(t) e_j, r_{N,0}(t) \equiv \|z^N(t) - z(t)\|_V^2, r_{N,1}(t) \equiv \|\dot{z}^N(t) - \dot{z}(t)\|_H^2, t \in [0, T]$ , запишем последние соотношения в виде

$$\lim_{N \rightarrow \infty} r_{N,0}(t) = 0, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} r_{N,1}(t) = 0, \quad \forall t \in [t_0, t_1]. \quad (2.4.43)$$

Кроме того, как нетрудно видеть,

$$r_{N,0}(t) \geq r_{N+1,0}(t), \quad r_{N,1}(t) \geq r_{N+1,1}(t), \quad \forall t \in [0, T], \quad N = 1, 2, \dots \quad (2.4.44)$$

В силу непрерывности  $r_{N,0}, r_{N,1}$ , на отрезке  $[0, T]$ , соотношений (2.4.43), (2.4.44), и леммы 1.5.1, получаем, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \max_{t \in [0, T]} r_{N,0}(t) = 0, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \max_{t \in [0, T]} r_{N,1}(t) = 0,$$

откуда вытекает, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|z^N - z\|_{\mathfrak{D}_1([0, T]; V, H)} = 0.$$

Итак,  $\mathfrak{M}$  плотно в  $\hat{\mathfrak{D}}_1([0, T]; V, H)$ . Лемма доказана. ■

**Лемма 2.4.2.** Множество  $\mathfrak{M} \equiv \bigcup_{N=1}^{\infty} \mathfrak{M}^N$  плотно в  $\dot{W}_2^1([0, T]; V, H) \equiv \{z \in W_2^1([0, T]; V, H) : z(T) = 0\}$ .

**Доказательство.** Достаточно заметить, что последовательность функций

$$z^N(t) \equiv \sum_{k=1}^N z_k(t) e_k, \quad N = 1, 2, \dots,$$

где  $z_k(t) \equiv \langle z(t), e_k \rangle_H, k = \overline{1, N}$ , такова, что

$$z^N \in \mathfrak{M}^N, \quad N = 1, 2, \dots, \quad \|z^N - z\|_{W_2^1([0, T]; V, H)} \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty.$$

■

## 2.5. Следствия

Пусть  $X$  — компактное топологическое пространство,  $\mu$  — положительная мера Радона на нём. Через  $L_\infty(X, \mu)$  будем обозначать банахово пространство  $\mu$ -существенно ограниченных на  $X$  функций  $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$ , с нормой

$$\|\varphi\|_{L_\infty(X, \mu)} \equiv \mu\text{-vraisup}_{x \in X} |\varphi(x)|.$$

Через  $L_{\infty,1}(X \times [0, T], \mu)$  обозначим множество функций  $\varphi: X \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ , измеримых относительно произведения мер  $\mu \otimes \lambda$ , где  $\lambda$  — мера Лебега на отрезке  $[0, T]$ , и таких, что конечна норма

$$\|\varphi\|_{L_{\infty,1}(X \times [0, T], \mu)} \equiv \int_0^T \mu\text{-vraisup}_{x \in X} |\varphi(x, t)| dt.$$

Наконец, через  $W_{\infty,1}^{0,1}(X \times [0, T], \mu)$  обозначим множество функций  $\varphi \in L_{\infty,1}(X \times [0, T], \mu)$ , для которых  $\varphi_t \in L_{\infty,1}(X \times [0, T], \mu)$ . Норму в классе  $W_{\infty,1}^{0,1}(X \times [0, T], \mu)$  определим равенством

$$\|\varphi\|_{W_{\infty,1}^{0,1}(X \times [0, T], \mu)} \equiv \|\varphi\|_{L_{\infty,1}(X \times [0, T], \mu)} + \|\varphi_t\|_{L_{\infty,1}(X \times [0, T], \mu)},$$

превратив тем самым класс  $W_{\infty,1}^{0,1}(X \times [0, T], \mu)$  в банахово пространство.

Покажем, что справедлива

**Теорема 2.5.1.** *У каждой функции  $f \in W_{\infty,1}^{0,1}(X \times [0, T], \mu)$  при всех  $t \in [0, T]$  существует след  $f(\cdot, t) \in L_{\infty}(X, \mu)$ , непрерывно зависящий от  $t \in [0, T]$  в норме  $L_{\infty}(X, \mu)$ , причём*

$$\max_{t \in [0, T]} \|f(\cdot, t)\|_{L_{\infty}(X, \mu)} \leq A_1 \|f\|_{W_{\infty,1}^{0,1}(X \times [0, T], \mu)}. \quad (2.5.1)$$

**Доказательство.** Выберем произвольно  $f \in W_{\infty,1}^{0,1}(X \times [0, T], \mu)$  и зафиксируем. Для любой функции  $\varphi \in C(X \times [0, T])$ , равной нулю вблизи  $X \times \{0\}$  и  $X \times \{T\}$  и имеющей непрерывную на  $X \times [0, T]$  производную  $\varphi_t$ , справедливо тождество

$$\int_{X \times [0, 1]} f(x, t) \varphi_t(x, t) (\mu \otimes \lambda)(dx dt) = - \int_{X \times [0, 1]} f_t(x, t) \varphi(x, t) (\mu \otimes \lambda)(dx dt).$$

Полагая  $\varphi(x, t) \equiv p(x)q(t)$ , где  $p \in C(X)$ , а  $q \in C^\infty[0, T]$  — финитная на отрезке  $[0, T]$  функция, получим, что для любых таких  $p$  и  $q$

$$\int_X \left[ \int_0^T f(x, t) q'(t) dt + \int_0^T f_t(x, t) q(t) dt \right] p(x) \mu(dx) = 0.$$

Как следствие, какова бы ни была функция  $q$  из указанного класса, при  $\mu$ -п.в.  $x \in X$  имеет место соотношение

$$\int_0^T f(x, t) q'(t) dt = - \int_0^T f_t(x, t) q(t) dt.$$

В силу этого при  $\mu$ -почти всех  $x \in X$  функция  $f(x, \cdot)$  — элемент  $W_1^1[0, T]$ , и, в частности, имеет смысл говорить о следе  $f(\cdot, t)$ .

Покажем, что  $f \in C([0, T], L_{\infty}(X, \mu))$ . Действительно,

$$|f(x, t + \Delta t) - f(x, t)| \leq \left| \int_t^{t+\Delta t} |f_t(x, \tau)| d\tau \right| \leq \left| \int_t^{t+\Delta t} \|f_t(\cdot, \tau)\|_{L_{\infty}(X, \mu)} d\tau \right|,$$

откуда

$$\|f(\cdot, t + \Delta t) - f(\cdot, t)\|_{L_{\infty}(X, \mu)} \leq \left| \int_t^{t+\Delta t} \|f_t(\cdot, \tau)\|_{L_{\infty}(X, \mu)} d\tau \right|.$$

Ввиду этого при всех  $t \in [0, T]$  существует след  $f(\cdot, t) \in L_{\infty}(X, \mu)$ , непрерывно зависящий от  $t \in [0, T]$  в норме  $L_{\infty}(X, \mu)$ .

Докажем теперь оценку (2.5.1). Так как функция  $f(x, \cdot)$  при  $\mu$ -п.в.  $x \in X$  принадлежит пространству  $W_1^1[0, T]$ , то, в соответствии с теоремой 2.1.2, для каждого  $t \in [0, T]$  при  $\mu$ -почти всех  $x \in X$

$$|f(x, t)| \leq A_1 \int_0^T [|f(x, \tau)| + |f_t(x, \tau)|] d\tau.$$

Поэтому  $|f(x, t)| \leq A_1 \|f\|_{W_{\infty,1}^{0,1}(X \times [0, T], \mu)}$ .

Таким образом,  $\|f(\cdot, t)\|_{L_{\infty}(X, \mu)} \leq A_1 \|f\|_{W_{\infty,1}^{0,1}(X \times [0, T], \mu)}$ , что совместно с доказанным ранее включением  $W_{\infty,1}^{0,1}(X \times [0, T], \mu) \subset C([0, T], L_{\infty}(X, \mu))$  даёт оценку (2.5.1). Теорема 2.5.1 полностью доказана. ■



Из теоремы 2.5.1 вытекают следующие три теоремы.

**Теорема 2.5.2.** У каждой функции  $f \in W_{\infty,1}^{0,1}(Q_T)$  при всех  $t \in [0, T]$  существует след  $f(\cdot, t) \in L_\infty(\Omega)$ , непрерывно зависящий от  $t \in [0, T]$  в норме  $L_\infty(\Omega)$ , причём

$$\max_{t \in [0, T]} \|f(\cdot, t)\|_{\infty, \Omega} \leq A_1 \|f\|_{\infty, 1, Q_T}^{(0,1)}. \quad (2.5.2)$$

**Теорема 2.5.3.** У любой функции  $f \in W_{\infty,1}^{0,1}(S_T)$  при каждом  $t \in [0, T]$  существует след  $f(\cdot, t) \in L_\infty(S)$ , непрерывно зависящий от  $t \in [0, T]$  в норме  $L_\infty(S)$ , причём

$$\max_{t \in [0, T]} \|f(\cdot, t)\|_{\infty, S} \leq A_1 \|f\|_{\infty, 1, S_T}^{(0,1)}. \quad (2.5.3)$$

**Теорема 2.5.4.** У любой функции  $f \in W_{\infty,1}^{0,1}(S'_T)$  при каждом  $t \in [0, T]$  существует след  $f(\cdot, t) \in L_\infty(S')$ , непрерывно зависящий от  $t \in [0, T]$  в норме  $L_\infty(S')$ , причём

$$\max_{t \in [0, T]} \|f(\cdot, t)\|_{\infty, S'} \leq A_1 \|f\|_{\infty, 1, S'_T}^{(0,1)}. \quad (2.5.4)$$

Из теоремы 2.3.3 вытекают две следующие теоремы.

**Теорема 2.5.5.** Пусть  $1 \leq p < \infty$ . Тогда у любой функции  $f \in W_{p,1}^{0,1}(S_T)$  при каждом  $t \in [0, T]$  существует след  $f(\cdot, t) \in L_p(S)$ , непрерывно зависящий от  $t \in [0, T]$  в норме  $L_p(S)$ , причём

$$\max_{t \in [0, T]} \|f(\cdot, t)\|_{p, S} \leq A_1 \|f\|_{p, 1, S_T}^{(0,1)}. \quad (2.5.5)$$

**Теорема 2.5.6.** Пусть  $1 \leq p < \infty$ . Тогда у любой функции  $f \in W_{p,1}^{0,1}(S'_T)$  при каждом  $t \in [0, T]$  существует след  $f(\cdot, t) \in L_p(S')$ , непрерывно зависящий от  $t \in [0, T]$  в норме  $L_p(S')$ , причём

$$\max_{t \in [0, T]} \|f(\cdot, t)\|_{p, S'} \leq A_1 \|f\|_{p, 1, S'_T}^{(0,1)}. \quad (2.5.6)$$

Из теорем 2.4.6 и 2.4.9 вытекает

**Лемма 2.5.1.**

- 1) Если  $z \in \mathfrak{D}_2^1(Q_T)$ , то  $z \in W_2^1(Q_T)$ , причём найдётся постоянная  $c_0^* > 0$ , зависящая лишь от  $T > 0$  (например, можно взять  $c_0^* \equiv \sqrt{2T}$ ), такая, что

$$\|z\|_{2, Q_T}^{(1)} \leq c_0^* \|z\|_{\mathfrak{D}_2^1(Q_T)} \quad \forall z \in \mathfrak{D}_2^1(Q_T).$$

- 2) Вложения  $\mathfrak{D}_2^1(Q_T) \subset L_2(S_T)$  и  $\mathfrak{D}_2^1(Q_T) \subset C([0, T], L_2(\Omega))$  непрерывны и компактны.

- 3) Справедливы следующие утверждения:

- а) если  $n = 1$ , то любая функция  $z \in \mathfrak{D}_2^1(Q_T)$  является элементом пространства  $C(\bar{Q}_T)$  и найдётся константа  $c_1^* > 0$ , зависящая лишь от области  $\Omega$ , такая, что

$$|z|_{\bar{Q}_T}^{(0)} \leq c_1^* \|z\|_{\mathfrak{D}_2^1(Q_T)} \quad \forall z \in \mathfrak{D}_2^1(Q_T);$$

- б) если  $n = 2$ , а  $p \in (1, \infty)$ , то любая функция  $z \in \mathfrak{D}_2^1(Q_T)$  является элементом пространства  $C([0, T], L_p(\Omega))$  и найдётся константа  $c_2^* = c_2^*(p) > 0$ , зависящая лишь от области  $\Omega$  и от  $p$ , такая, что

$$\max_{t \in [0, T]} \|z(\cdot, t)\|_{p, \Omega} \leq c_2^*(p) \|z\|_{\mathfrak{D}_2^1(Q_T)} \quad \forall z \in \mathfrak{D}_2^1(Q_T);$$

- в) если  $n > 2$ , а  $p \in (1, \frac{2n}{n-2})$ , то любая функция  $z \in \mathfrak{D}_2^1(Q_T)$  является элементом пространства  $C([0, T], L_p(\Omega))$  и найдётся константа  $c_3^* = c_3^*(p) > 0$ , зависящая лишь от  $p$ , размерности  $n$  и от области  $\Omega$ , такая, что

$$\max_{t \in [0, T]} \|z(\cdot, t)\|_{p, \Omega} \leq c_3^*(p) \|z\|_{\mathfrak{D}_2^1(Q_T)} \quad \forall z \in \mathfrak{D}_2^1(Q_T).$$

- 4) Пусть последовательность функций  $z^m \in \mathfrak{D}_2^1(Q_T)$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , — ограничена в норме пространства  $\mathfrak{D}_2^1(Q_T)$ , т.е. найдётся постоянная  $K > 0$ , такая, что

$$\|z^m\|_{\mathfrak{D}_2^1(Q_T)} \leq K, \quad m = 1, 2, \dots$$

Тогда найдутся подпоследовательность  $z^{m_l}$ ,  $l = 1, 2, \dots$ , последовательности  $z^m$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , и функция  $z \in \mathfrak{D}_2^1(Q_T)$ , такие, что

$$\begin{aligned} z^{m_l} &\rightarrow z, \quad l \rightarrow \infty, \quad \text{слабо в } W_2^1(Q_T), \quad \lim_{l \rightarrow \infty} \max_{t \in [0, T]} \|z^{m_l}(\cdot, t) - z(\cdot, t)\|_{2, \Omega} = 0; \\ z^{m_l} &\rightarrow z, \quad l \rightarrow \infty, \quad * \text{-слабо в } L_\infty([0, T], W_2^1(\Omega)); \quad z_t^{m_l} \rightarrow z_t, \quad l \rightarrow \infty, \quad * \text{-слабо в } L_\infty([0, T], L_2(\Omega)); \\ \lim_{l \rightarrow \infty} |z^{m_l} - z|_{\bar{Q}_T}^{(0)} &= 0 \quad \text{при } n = 1; \quad \max_{t \in [0, T]} \|z^{m_l}(\cdot, t) - z(\cdot, t)\|_{p, S} = 0 \quad \text{при } n > 1; \end{aligned}$$

где  $p$  — число из интервала  $(1, +\infty)$  при  $n = 2$  и из интервала  $(1, \frac{2(n-1)}{n-2})$  при  $n > 2$ ; причём

$$\|z\|_{\mathfrak{D}_2^1(Q_T)} \leq K.$$

Из теорем 2.3.6, 2.4.6 и 2.4.9, цепочки компактных вложений  $W_2^2(\Omega) \subset W_2^1(\Omega) \subset L_2(\Omega)$  и рефлексивности пространств  $W_2^2(\Omega)$  и  $L_2(\Omega)$  вытекает

**Лемма 2.5.2.**

- 1) Если  $z \in \mathfrak{D}_2^2(Q_T)$ , то  $z \in W_2^{2;1}(Q_T)$ , причём

$$\|z\|_{2, Q_T}^{(2;1)} \leq c_0^* \|z\|_{\mathfrak{D}_2^2(Q_T)} \quad \forall z \in \mathfrak{D}_2^2(Q_T),$$

где постоянная  $c_0^* > 0$  — та же, что и в лемме 2.5.1.

- 2) Если  $z \in \mathfrak{D}_2^2(Q_T)$ , то  $z \in C([0, T], W_2^1(\Omega))$ , причём

$$\max_{t \in [0, T]} \|z(\cdot, t)\|_{2, \Omega}^{(1)} \leq \|z\|_{\mathfrak{D}_2^2(Q_T)} \quad \forall z \in \mathfrak{D}_2^2(Q_T).$$

- 3) Вложения  $\mathfrak{D}_2^2(Q_T) \subset L_2(S_T)$ ,  $\mathfrak{D}_2^2(Q_T) \subset C([0, T], L_2(\Omega))$  и  $\mathfrak{D}_2^2(Q_T) \subset L_p([0, T], W_2^1(\Omega))$  непрерывны и компактны при всех  $p \in (1, \infty)$ .

- 4) Если  $z \in \mathfrak{D}_2^2(Q_T)$ , то  $\nabla_x z \in C([0, T], (W_2^1(\Omega))^n)$ , а если ещё  $n \geq 2$ , то  $\nabla_x z \in C([0, T], L_2^n(S))$ .

- 5) Справедливы следующие утверждения:

- а) если  $n < 4$ , то любая функция  $z \in \mathfrak{D}_2^2(Q_T)$  является элементом пространства  $C(\bar{Q}_T)$  и найдётся константа  $c_4^* > 0$ , зависящая лишь от области  $\Omega$ , такая, что

$$|z|_{\bar{Q}_T}^{(0)} \leq c_4^* \|z\|_{\mathfrak{D}_2^2(Q_T)} \quad \forall z \in \mathfrak{D}_2^2(Q_T);$$

- б) если  $n = 4$ , а  $p \in (1, \infty)$ , то любая функция  $z \in \mathfrak{D}_2^2(Q_T)$  является элементом пространства  $C([0, T], L_p(\Omega))$  и найдётся константа  $c_5^* = c_5^*(p) > 0$ , зависящая лишь от области  $\Omega$  и от  $p$ , такая, что

$$\max_{t \in [0, T]} \|z(\cdot, t)\|_{p, \Omega} \leq c_5^*(p) \|z\|_{\mathfrak{D}_2^2(Q_T)} \quad \forall z \in \mathfrak{D}_2^2(Q_T);$$

- в) если  $n > 4$ , а  $p \in (1, \frac{2n}{n-4})$ , то любая функция  $z \in \mathfrak{D}_2^2(Q_T)$  является элементом пространства  $C([0, T], L_p(\Omega))$  и найдётся константа  $c_6^* = c_6^*(p) > 0$ , зависящая лишь от  $p$ , размерности  $n$  и от области  $\Omega$ , такая, что

$$\max_{t \in [0, T]} \|z(\cdot, t)\|_{p, \Omega} \leq c_6^*(p) \|z\|_{\mathfrak{D}_2^2(Q_T)} \quad \forall z \in \mathfrak{D}_2^2(Q_T).$$

- 6) Пусть последовательность функций  $z^m \in \mathfrak{D}_2^2(Q_T)$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , — ограничена в норме пространства  $\mathfrak{D}_2^2(Q_T)$ , т.е. найдётся постоянная  $K > 0$ , такая, что

$$\|z^m\|_{\mathfrak{D}_2^2(Q_T)} \leq K, \quad m = 1, 2, \dots$$

Тогда найдутся подпоследовательность  $z^{m_l}$ ,  $l = 1, 2, \dots$ , последовательности  $z^m$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , и функция  $z \in \mathfrak{D}_2^2(Q_T)$ , такие, что

$$\begin{aligned} z^{m_l} &\rightarrow z, \quad l \rightarrow \infty, \quad \text{слабо в } W_2^{2;1}(Q_T), \quad \lim_{l \rightarrow \infty} \max_{t \in [0, T]} \|z^{m_l}(\cdot, t) - z(\cdot, t)\|_{2, \Omega} = 0; \\ z^{m_l} &\rightarrow z, \quad l \rightarrow \infty, \quad \text{*слабо в } L_\infty([0, T], W_2^2(\Omega)); \quad z_t^{m_l} \rightarrow z_t, \quad l \rightarrow \infty, \quad \text{*слабо в } L_\infty([0, T], L_2(\Omega)); \\ z^{m_l} &\rightarrow z, \quad l \rightarrow \infty, \quad \text{сильно в } L_2([0, T], W_2^1(\Omega)); \\ \lim_{l \rightarrow \infty} |z^{m_l} - z|_{Q_T}^{(0)} &= 0 \quad \text{при } n < 4; \quad \lim_{l \rightarrow \infty} |\nabla_x z^{m_l} - \nabla_x z|_{Q_T}^{(0)} = 0 \quad \text{при } n = 1; \\ \lim_{l \rightarrow \infty} \max_{t \in [0, T]} \|z^{m_l}(\cdot, t) - z(\cdot, t)\|_{p, S} &= 0, \quad \text{при } n > 4; \\ \lim_{l \rightarrow \infty} \max_{t \in [0, T]} \|\nabla_x z^{m_l}(\cdot, t) - \nabla_x z(\cdot, t)\|_{q, S} &= 0, \quad \text{при } n > 1; \end{aligned}$$

где  $p$  — число из интервала  $(1, +\infty)$  при  $n = 2$  и из интервала  $(1, \frac{2(n-1)}{n-2})$  при  $n > 2$ , а  $q$  — число из интервала  $(1, +\infty)$  при  $n = 4$  и из интервала  $(1, \frac{2(n-1)}{n-4})$  при  $n > 4$ ; причём

$$\|z\|_{\mathfrak{D}_2^2(Q_T)} \leq K.$$

**Лемма 2.5.3.** Пусть  $\gamma \in (1, \infty)$  при  $n = 1$  или  $2$  и  $\gamma \in (1, \frac{n}{n-2})$  при  $n > 2$ . Тогда найдутся неубывающие неотрицательные непрерывные функции  $\vartheta_0[\gamma] : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\vartheta_1[\gamma] : [0, \text{meas } \Omega] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\vartheta_0[\gamma](0) = \vartheta_1[\gamma](0) = 0$ , такие, что для любой функции  $z \in \mathfrak{D}_2^1(Q_T)$  и любого измеримого по Лебегу множества  $E \subseteq \Omega$  справедливо неравенство

$$\max_{t \in [0, T]} \|z(\cdot, t)\|_{\gamma, E} \leq \vartheta_0[\gamma](\|z\|_{\mathfrak{D}_2^1(Q_T)}) \vartheta_1[\gamma](\text{meas}_n E).$$

При этом когда понятно, о каком именно  $\gamma$  идёт речь, вместо  $\vartheta_0[\gamma]$  и  $\vartheta_1[\gamma]$  пишем просто  $\vartheta_0$  и  $\vartheta_1$  соответственно.

**Доказательство.** Выберем произвольно функцию  $z \in \mathfrak{D}_2^1(Q_T)$  и измеримое по Лебегу множество  $E \subseteq \Omega$  и зафиксируем. Рассмотрим отдельно случаи  $n = 1$ ,  $n = 2$  и  $n > 2$ .

1) Пусть  $n = 1$ . Тогда, согласно лемме 2.5.1,  $z \in C(\bar{Q}_T)$ , откуда следует, что

$$\int_E |z(x, t)|^\gamma dx \leq \|z\|_{Q_T}^{(0)\gamma} \text{meas } E.$$

Согласно пункту 3.а) леммы 2.5.1,

$$|z|_{Q_T}^{(0)} \leq c_1^* \|z\|_{\mathfrak{D}_2^1(Q_T)}.$$

Поэтому

$$\int_E |z(x, t)|^\gamma dx \leq \|z\|_{Q_T}^{(0)\gamma} \text{meas } E \leq [c_1^* \|z\|_{\mathfrak{D}_2^1(Q_T)}]^\gamma \text{meas } E.$$

Положив  $\vartheta_0(r) \equiv c_1^* r$ ,  $\vartheta_1(M) \equiv M^{1/\gamma}$  при всех  $r \in [0, +\infty)$ ,  $M \in [0, \text{meas } \Omega]$ , получаем требуемое утверждение.

2) Пусть  $n = 2$ . Тогда, согласно лемме 2.5.1,  $z \in C([0, T], L_q(\Omega))$  при всех  $q \in (1, +\infty)$ , в силу чего  $|z|^\gamma \in C([0, T], L_p(\Omega))$  при всех  $p \in (1, +\infty)$ . Далее, по неравенству Гёльдера для интегралов,

$$\begin{aligned} \int_E |z(x, t)|^\gamma dx &\leq \left[ \int_E |z(x, t)|^{\gamma p} dx \right]^{1/p} [\text{meas } E]^{1 - \frac{1}{p}} = \|z(\cdot, t)\|_{\gamma p, E}^\gamma [\text{meas } E]^{1 - \frac{1}{p}} \leq \\ &\leq \left[ \max_{\tau \in [0, T]} \|z(\cdot, \tau)\|_{\gamma p, \Omega} \right]^\gamma [\text{meas } E]^{1 - \frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\int_E |z(x, t)|^\gamma dx \leq \left[ \max_{\tau \in [0, T]} \|z(\cdot, \tau)\|_{\gamma p, \Omega} \right]^\gamma [\text{meas } E]^{1 - \frac{1}{p}}.$$

Согласно пункту 3.б) леммы 2.5.1,

$$\max_{t \in [0, T]} \|z(\cdot, t)\|_{\gamma p, \Omega} \leq c_2^*(p\gamma) \|z\|_{\Theta_2^1(Q_T)}.$$

Как следствие,

$$\int_E |z(x, t)|^\gamma dx \leq [\max_{\tau \in [0, T]} \|z(\cdot, \tau)\|_{\gamma p, \Omega}]^\gamma [\text{meas } E]^{1 - \frac{1}{p}} \leq [c_2^*(\gamma p) \|z\|_{\Theta_2^1(Q_T)}]^\gamma [\text{meas } E]^{1 - \frac{1}{p}}.$$

Положив  $\vartheta_0(r) \equiv c_2^*(\gamma p)r$ ,  $\vartheta_1(M) \equiv M^{\frac{p-1}{p\gamma}}$  при всех  $r \in [0, +\infty)$ ,  $M \in [0, \text{meas } \Omega]$ , получаем требуемое утверждение.

3) Пусть  $n > 2$ . Тогда, согласно лемме 2.5.1,  $z \in C([0, T], L_q(\Omega))$  при всех  $q \in (1, \frac{2n}{n-2})$ , в силу чего  $|z|^\gamma \in C([0, T], L_p(\Omega))$  при всех  $p \in (1, \frac{n}{(n-2)\gamma})$ . Далее, по неравенству Гёльдера для интегралов,

$$\begin{aligned} \int_E |z(x, t)|^\gamma dx &\leq \left[ \int_E |z(x, t)|^{\gamma p} dx \right]^{1/p} [\text{meas } E]^{1 - \frac{1}{p}} = \|z(\cdot, t)\|_{\gamma p, E}^\gamma [\text{meas } E]^{1 - \frac{1}{p}} \leq \\ &\leq [\max_{\tau \in [0, T]} \|z(\cdot, \tau)\|_{\gamma p, \Omega}]^\gamma [\text{meas } E]^{1 - \frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

где  $p \in (1, \frac{2n}{(n-2)\gamma})$  — некоторое число. Таким образом,

$$\int_E |z(x, t)|^\gamma dx \leq [\max_{\tau \in [0, T]} \|z(\cdot, \tau)\|_{\gamma p, \Omega}]^\gamma [\text{meas } E]^{1 - \frac{1}{p}}.$$

Согласно пункту 3.в) леммы 2.5.1,

$$\max_{t \in [0, T]} \|z(\cdot, t)\|_{\gamma p, \Omega} \leq c_3^*(p\gamma) \|z\|_{\Theta_2^1(Q_T)}.$$

Как следствие,

$$\int_E |z(x, t)|^\gamma dx \leq [\max_{\tau \in [0, T]} \|z(\cdot, \tau)\|_{\gamma p, \Omega}]^\gamma [\text{meas } E]^{1 - \frac{1}{p}} \leq [c_3^*(\gamma p) \|z\|_{\Theta_2^1(Q_T)}]^\gamma [\text{meas } E]^{1 - \frac{1}{p}}.$$

Положив  $\vartheta_0(r) \equiv c_3^*(\gamma p)r$ ,  $\vartheta_1(M) \equiv M^{\frac{p-1}{p\gamma}}$  при всех  $r \in [0, +\infty)$ ,  $M \in [0, \text{meas } \Omega]$ , получаем требуемое утверждение.

Лемма полностью доказана. ■

**Лемма 2.5.4.** Пусть при каждом  $t \in [0, T]$  заданы измеримые по Лебегу множества  $E_i(t) \subseteq \Omega$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , такие, что  $\text{meas}_n E_i(t) \rightarrow 0$ ,  $i \rightarrow \infty$ , по мере Лебега на  $[0, T]$ , и пусть  $K \in L_{2,1}(Q_T)$ . Тогда

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_0^T \|K(\cdot, t)\|_{2, E_i(t)} dt = 0. \quad (2.5.7)$$

**Доказательство.** Предположим, что утверждение леммы неверно. Тогда найдутся положительное число  $\varepsilon_0$  и подпоследовательность  $i_j$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , последовательности  $i = 1, 2, \dots$ , такие, что

$$\int_0^T \|K(\cdot, t)\|_{2, E_{i_j}(t)} dt \geq \varepsilon_0, \quad j = 1, 2, \dots \quad (2.5.8)$$

Поскольку  $\text{meas}_n E_i(t) \rightarrow 0$ ,  $i \rightarrow \infty$ , по мере Лебега на  $[0, T]$ , то  $\text{meas}_n E_{i_j}(t) \rightarrow 0$ ,  $j \rightarrow \infty$ , по мере Лебега на  $[0, T]$ , в силу чего найдётся подпоследовательность  $j_m$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , последовательности  $j = 1, 2, \dots$ , такая, что  $\text{meas}_n E_{i_{j_m}}(t) \rightarrow 0$ ,  $m \rightarrow \infty$ , почти всюду на  $[0, T]$ . Пользуясь теперь абсолютной непрерывностью интеграла Лебега, заключаем, что

$$\|K(\cdot, t)\|_{2, E_{i_{j_m}}(t)} \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty, \quad \text{п.в. на } [0, T].$$

Так как, кроме того,

$$\|K(\cdot, t)\|_{2, E_{i_{j_m}}(t)} \leq \|K(\cdot, t)\|_{2, \Omega} \text{ при п.в. на } [0, T],$$

а (в силу включения  $K \in L_{2,1}(Q_T)$ ) функция  $[0, T] \ni t \mapsto \|K(\cdot, t)\|_{2, \Omega}$  принадлежит  $L_1[0, T]$ , то, в силу теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла Лебега,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^T \|K(\cdot, t)\|_{2, E_{i_{j_m}}(t)} dt = 0,$$

что противоречит соотношению (2.5.8). Полученное противоречие доказывает утверждение леммы. ■

**Лемма 2.5.5.** Пусть при каждом  $t \in [0, T]$  заданы измеримые по Лебегу множества  $E_i(t) \subseteq \Omega$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , такие, что  $\text{meas}_n E_i(t) \rightarrow 0$ ,  $i \rightarrow \infty$ , по мере Лебега на  $[0, T]$ ; функция  $K(t)$ ,  $t \in [0, T]$ , — неотрицательна и суммируема по отрезку  $[0, T]$ ; а неотрицательная функция  $\vartheta(q)$ ,  $q \in [0, \text{meas}_n \Omega]$ , — непрерывна и не убывает на  $[0, \text{meas}_n \Omega]$ , и такова, что  $\vartheta(0) = 0$ . Тогда

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_0^T K(t) \vartheta(\text{meas}_n E_i(t)) dt = 0. \quad (2.5.9)$$

**Доказательство.** Пусть это не так, и найдутся  $\varepsilon_0 > 0$  и подпоследовательность  $i_j$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , последовательности  $i = 1, 2, \dots$ , такие, что

$$\int_0^T K(t) \vartheta(\text{meas}_n E_{i_j}(t)) dt \geq \varepsilon_0, \quad j = 1, 2, \dots \quad (2.5.10)$$

Поскольку  $\text{meas}_n E_i(t) \rightarrow 0$ ,  $i \rightarrow \infty$ , по мере Лебега на  $[0, T]$ , то  $\text{meas}_n E_{i_j}(t) \rightarrow 0$ ,  $j \rightarrow \infty$ , по мере Лебега на  $[0, T]$ , в силу чего найдётся подпоследовательность  $j_m$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , последовательности  $j = 1, 2, \dots$ , такая, что  $\text{meas}_n E_{i_{j_m}}(t) \rightarrow 0$ ,  $m \rightarrow \infty$ , почти всюду на  $[0, T]$ . Поэтому, ввиду непрерывности функции  $\vartheta$  на  $[0, \text{meas}_n \Omega]$ ,

$$K(t) \vartheta(\text{meas}_n E_{i_{j_m}}(t)) \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty, \text{ п.в. на } [0, T].$$

Так как

$$K(t) \vartheta(\text{meas}_n E_{i_{j_m}}(t)) \leq K(t) \vartheta(\text{meas}_n \Omega), \quad m = 1, 2, \dots, \text{ п.в. на } [0, T],$$

а функция  $K$  является элементом  $L_1[0, T]$ , то после применения теоремы Лебега о мажорированной сходимости будем иметь

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^T K(t) \vartheta(\text{meas}_n E_{i_{j_m}}(t)) dt = 0,$$

что противоречит неравенству (2.5.10). Следовательно, лемма доказана. ■

**Лемма 2.5.6.** Пусть  $\sigma \in C^\infty(\bar{Q}_T)$ , и пусть  $e_j \in L_2(\Omega)$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , — некоторый ортонормированный базис в  $L_2(\Omega)$ . Тогда ряд Фурье

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j(t) e_j, \quad (2.5.11)$$

где

$$\sigma_j(t) \equiv \int_{\Omega} \sigma(x, t) e_j(x) dx, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (2.5.12)$$

сходится к функции  $\sigma$  в норме пространства  $C^m([0, T], L_2(\Omega))$  при любом  $m \geq 0$ .

**Доказательство.** Поскольку  $\sigma \in C^\infty(\bar{Q}_T)$ , то, очевидно,

$$\sigma_j \in C^\infty[0, T], \quad \frac{d^m \sigma_j(t)}{dt^m} = \int_{\Omega} \frac{\partial^m \sigma(x, t)}{\partial t^m} e_j(x) dx, \quad m, j = 1, 2, \dots \quad (2.5.13)$$

Ясно, что при любом  $t \in [0, T]$  ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{d^m \sigma_j(t)}{dt^m} e_j \quad (2.5.14)$$

сходится в норме  $L_2(\Omega)$  к  $\frac{\partial^m \sigma(x, t)}{\partial t^m}$ ,  $m = 1, 2, \dots$ . Полагая  $r_{N, m}(t) \equiv \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial^m \sigma(x, t)}{\partial t^m} - \sum_{j=1}^N \frac{d^m \sigma_j(t)}{dt^m} e_j(x) \right]^2 dx$ ,  $N = 1, 2, \dots$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ , заключаем отсюда, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} r_{N, m}(t) = 0, \quad \forall t \in [t_0, t_1]; \quad r_{N, m} \in C[0, T], \quad N = 1, 2, \dots, \quad m = 0, 1, 2, \dots;$$

$$r_{N+1, m}(t) \leq r_{N, m}(t), \quad \forall t \in [0, T], \quad N = 1, 2, \dots, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Поэтому, в силу леммы 1.5.1,  $\lim_{N \rightarrow \infty} \max_{t \in [0, T]} r_{N, m}(t) = 0$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ , что означает сходимость ряда (2.5.11) к функции  $\sigma$  в норме пространства  $C^m([0, T], L_2(\Omega))$  при любом  $m \geq 0$ . ■

Положим  $x' \equiv (x_1, \dots, x_{n-1})$ .

Ниже нам потребуется следующая (см., например, [62, лемма 6])

**Лемма 2.5.7.** Пусть множество конечной положительной меры Лебега  $\mathcal{A}_1 \subset \mathbb{R}^{n-1}$  и отрезок  $\mathcal{A}_2 \equiv [a_1, a_2] \subset \mathbb{R}$  таковы, что  $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \subset \Omega$ . Тогда найдётся, зависящая только от отрезка  $\mathcal{A}_2$ , постоянная  $C > 0$ , такая, что для любой функции  $\zeta \in \mathcal{E}_2^1(Q_T)$

$$\sup_{t \in [0, T]} \left[ \int_{\mathcal{A}_1} \|\zeta(x', \cdot, t)\|_{\infty, \mathcal{A}_2}^2 dx' \right]^{1/2} \leq C \|\zeta\|_{\mathcal{E}_2^1(Q_T)}.$$

**Доказательство.** На основании классического свойства обобщённо дифференцируемых функций (см., например, [53, с.344]) можно без ограничения общности считать при п.в.  $x' \in \mathcal{A}_1$  и всех  $t \in [0, T]$  функцию  $\zeta_{x_n}(x', \cdot, t): \mathcal{A}_2 \rightarrow \mathbb{R}^1$  обобщённой производной функции  $\zeta(x', \cdot, t): \mathcal{A}_2 \rightarrow \mathbb{R}^1$ . Поэтому по элементарной теореме вложения (см., например, [53, с.359],  $p = 2$ ,  $l = 1$ ,  $n = 1$ ) имеем при п.в.  $x' \in \mathcal{A}_1$  и всех  $t \in [0, T]$

$$\|\zeta(x', \cdot, t)\|_{\infty, \mathcal{A}_2} \leq C \sqrt{\|\zeta(x', \cdot, t)\|_{2, \mathcal{A}_2}^2 + \|\zeta_{x_n}(x', \cdot, t)\|_{2, \mathcal{A}_2}^2},$$

где  $C > 0$  не зависит ни от  $x' \in \mathcal{A}_1$ , ни от  $t \in [0, T]$ . Возводя в квадрат обе части этого неравенства и интегрируя затем по множеству  $\mathcal{A}_1$ , получаем, что

$$\left[ \int_{\mathcal{A}_1} \|\zeta(x', \cdot, t)\|_{\infty, \mathcal{A}_2}^2 dx' \right]^{1/2} \leq C \left[ \int_{\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2} [|\zeta(x, t)|^2 + |\zeta_{x_n}(x, t)|^2] dx \right]^{1/2} \leq C \|\zeta(\cdot, t)\|_{2, \Omega}^{(1)} \leq C \|\zeta\|_{\mathcal{E}_2^1(Q_T)}.$$

Лемма доказана. ■

**Лемма 2.5.8.** Пусть множество конечной положительной меры Лебега  $\mathcal{A}_1 \subset \mathbb{R}^{n-1}$  и отрезок  $\mathcal{A}_2 \equiv [a_1, a_2] \subset \mathbb{R}$  таковы, что  $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \subset \Omega$ . Тогда для любой функции  $\zeta \in \mathcal{E}_2^1(Q_T)$

$$\left[ \int_0^T dt \int_{\mathcal{A}_1} \|\zeta(x', \cdot, t)\|_{\infty, \mathcal{A}_2}^2 dx' \right]^{1/2} \leq C [\|\zeta\|_{\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times [0, T]}^2 + \|\nabla_x \zeta\|_{\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times [0, T]}^2]^{1/2},$$

где положительную постоянную  $C$  можно взять такой же, как в предыдущей лемме

**Доказательство.** На основании классического свойства обобщённо дифференцируемых функций (см., например, [53, с.344]) можно без ограничения общности считать при п.в.  $x' \in \mathcal{A}_1$  и всех  $t \in [0, T]$  функцию  $\zeta_{x_n}(x', \cdot, t): \mathcal{A}_2 \rightarrow \mathbb{R}^1$  обобщённой производной функции  $\zeta(x', \cdot, t): \mathcal{A}_2 \rightarrow \mathbb{R}^1$ . Поэтому по элементарной теореме вложения (см., например, [53, с.359],  $p = 2$ ,  $l = 1$ ,  $n = 1$ ) имеем при п.в.  $x' \in \mathcal{A}_1$  и всех  $t \in [0, T]$

$$\|\zeta(x', \cdot, t)\|_{\infty, \mathcal{A}_2} \leq C \sqrt{\|\zeta(x', \cdot, t)\|_{2, \mathcal{A}_2}^2 + \|\zeta_{x_n}(x', \cdot, t)\|_{2, \mathcal{A}_2}^2},$$

где  $C > 0$  не зависит ни от  $x' \in \mathcal{A}_1$ , ни от  $t \in [0, T]$ . Возводя в квадрат обе части этого неравенства и интегрируя затем по множеству  $\mathcal{A}_1 \times [0, T]$ , получаем требуемое неравенство. Лемма доказана. ■

**Лемма 2.5.9.** Множество  $W_1^1[0, T]$  всюду плотно в пространстве  $L_1[0, T]$ .

**Доказательство.** В самом деле, как известно [53], множество  $C[0, T]$  всюду плотно в  $L_1[0, T]$ . Поскольку же в  $C[0, T]$  всюду плотно множество всех многочленов с вещественными коэффициентами, а любой

многочлен является элементом пространства  $W_1^1[0, T]$ , то  $W_1^1[0, T]$  всюду плотно в пространстве  $L_1[0, T]$ . Лемма доказана. ■

**Лемма 2.5.10.** *Множество  $W_{2,1}^{0,1}(S_T)$  всюду плотно в пространстве  $L_{2,1}(S_T)$ .*

**Доказательство.** Нетрудно видеть, что пространство  $W_{2,1}^{0,1}(S_T)$  изометрично изоморфно пространству  $W_1^1([0, T], L_2(S))$ , а пространство  $L_{2,1}(S_T)$  изометрично изоморфно пространству  $L_1([0, T], L_2(S))$ . Таким образом, нам нужно доказать, что  $W_1^1([0, T], L_2(S))$  всюду плотно в  $L_1([0, T], L_2(S))$ . Как известно (см., например, [14]), множество  $C([0, T], L_2(S))$  всюду плотно в пространстве  $L_1([0, T], L_2(S))$ . Поскольку же, в силу леммы 1.1.7, множество всевозможных многочленов с коэффициентами из  $L_2(S)$  всюду плотно в  $C([0, T], L_2(S))$ , а любой такой многочлен, как несложно заметить, является функцией из  $W_1^1([0, T], L_2(S))$ , то  $W_1^1([0, T], L_2(S))$  всюду плотно в  $L_1([0, T], L_2(S))$ . Лемма доказана. ■

**Лемма 2.5.11.** *Множество  $W_{2,1}^{0,1}(S'_T)$  всюду плотно в пространстве  $L_{2,1}(S'_T)$ .*

**Доказательство.** Нетрудно видеть, что пространство  $W_{2,1}^{0,1}(S'_T)$  изометрично изоморфно пространству  $W_1^1([0, T], L_2(S'))$ , а пространство  $L_{2,1}(S'_T)$  изометрично изоморфно пространству  $L_1([0, T], L_2(S'))$ . Таким образом, нам нужно доказать, что  $W_1^1([0, T], L_2(S'))$  всюду плотно в  $L_1([0, T], L_2(S'))$ . Как известно (см., например, [14]), множество  $C([0, T], L_2(S'))$  всюду плотно в пространстве  $L_1([0, T], L_2(S'))$ . Поскольку же, в силу леммы 1.1.7, множество всевозможных многочленов с коэффициентами из  $L_2(S')$  всюду плотно в  $C([0, T], L_2(S'))$ , а любой такой многочлен, как несложно заметить, является функцией из  $W_1^1([0, T], L_2(S'))$ , то  $W_1^1([0, T], L_2(S'))$  всюду плотно в  $L_1([0, T], L_2(S'))$ . Лемма доказана. ■

# Глава 3. О представлении некоторых линейных непрерывных операторов

## 3.1. Абстрактные теоремы

В данном разделе мы доказываем некоторые результаты о представлении некоторых линейных непрерывных операторов. Всюду в данном разделе  $X, Y$  — банаховы пространства с нормами  $\|\cdot\|_X$  и  $\|\cdot\|_Y$  соответственно,  $\mathcal{P}$  — компактное метрическое пространство,  $[a, b]$  — отрезок числовой оси.

**Теорема 3.1.1.** *Если оператор  $A : X \rightarrow C(\mathcal{P}, Y)$  — линеен и ограничен, то найдётся функция  $B : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ , непрерывная в смысле сильной операторной топологии пространства  $\mathcal{L}(X, Y)$ , такая, что*

$$A[f](p) = B(p)f \quad \forall f \in X \quad \forall p \in \mathcal{P}. \quad (3.1.1)$$

При этом

$$\|A\|_{X \rightarrow C(\mathcal{P}, Y)} = \sup_{p \in \mathcal{P}} \|B(p)\|_{X \rightarrow Y}. \quad (3.1.2)$$

Обратно, если функция  $B : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$  — непрерывна в смысле сильной операторной топологии пространства  $\mathcal{L}(X, Y)$ , то формула (3.1.1) задаёт линейный непрерывный оператор, действующий из  $X$  в  $C(\mathcal{P}, Y)$ .

**Доказательство.** Доказательство разобьём на три части.

1) Покажем, что если функция  $B : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$  — непрерывна в смысле сильной операторной топологии пространства  $\mathcal{L}(X, Y)$ , то формула (3.1.1) задаёт линейный непрерывный оператор, действующий из  $X$  в  $C(\mathcal{P}, Y)$ .

Действительно, пусть функция  $B : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$  — непрерывна в смысле сильной операторной топологии пространства  $\mathcal{L}(X, Y)$ . Тогда при всех  $f \in X$  справедливо включение  $A[f] \in C(\mathcal{P}, Y)$ , а линейность оператора  $A$  очевидна. Таким образом,  $A$  — линейный оператор, действующий из  $X$  в  $C(\mathcal{P}, Y)$ .

Докажем ограниченность оператора  $A$ . Поскольку функция  $B : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$  — непрерывна в смысле сильной операторной топологии пространства  $\mathcal{L}(X, Y)$ , то при всех  $f \in X$  функция

$$\mathcal{P} \ni p \mapsto (B(p)f) \in Y$$

непрерывна в смысле сильной топологии пространства  $Y$ . Следовательно, в силу теоремы о резонансе, при каждом фиксированном  $f \in X$  конечна величина  $\sup_{p \in \mathcal{P}} \|B(p)f\|_Y$ . Поэтому, снова в силу теоремы о резонансе, конечна величина  $\sup_{p \in \mathcal{P}} \|B(p)\|_{X \rightarrow Y}$ . Как следствие,

$$\|A[f](p)\|_Y \leq \|B(p)\|_{X \rightarrow Y} \|f\|_X \leq \sup_{q \in \mathcal{P}} \|B(q)\|_{X \rightarrow Y} \|f\|_X.$$

Переходя здесь к точной верхней грани по  $p \in \mathcal{P}$ , выводим, что

$$\|A[f]\|_{C(\mathcal{P}, Y)} \leq \sup_{q \in \mathcal{P}} \|B(q)\|_{X \rightarrow Y} \|f\|_X.$$

А это и означает, что оператор  $A$  — ограничен.

2) Докажем, что для любого линейного непрерывного оператора  $A : X \rightarrow C(\mathcal{P}, Y)$  найдётся функция  $B : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ , непрерывная в смысле сильной операторной топологии пространства  $\mathcal{L}(X, Y)$ , такая, что справедливо представление (3.1.1). В самом деле, пусть оператор  $A : X \rightarrow C(\mathcal{P}, Y)$  — линеен и ограничен. Тогда при всех  $f \in X$

$$\sup_{p \in \mathcal{P}} \|A[f](p)\|_Y \leq \|A\|_{X \rightarrow C(\mathcal{P}, Y)} \|f\|_X.$$

Следовательно, при каждом фиксированном  $p \in \mathcal{P}$

$$\|A[f](p)\|_Y \leq \|A\|_{X \rightarrow C(\mathcal{P}, Y)} \|f\|_X \quad \forall f \in X.$$



Иными словами, при каждом фиксированном  $p$  отображение

$$X \ni f \mapsto A[f](p) \in Y$$

является линейным ограниченным оператором, действующим из  $X$  в  $Y$ . Обозначив этот оператор через  $B(p)$ , получаем представление (3.1.1). Непрерывность функции  $B : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$  в смысле сильной операторной топологии пространства  $\mathcal{L}(X, Y)$  следует из того, что при всех  $f \in X$  справедливо включение  $A[f] \in C(\mathcal{P}, Y)$ .

3) Докажем равенство (3.1.2):

$$\|A\|_{X \rightarrow C(\mathcal{P}, Y)} = \sup_{\|f\|_X \leq 1} \sup_{p \in \mathcal{P}} \|A[f](p)\|_Y = \sup_{p \in \mathcal{P}} \sup_{\|f\|_X \leq 1} \|B(p)f\|_Y = \sup_{p \in \mathcal{P}} \|B(p)\|_{X \rightarrow Y},$$

что и требовалось доказать. ■

**Теорема 3.1.2.** Пусть пространство  $Y$  — рефлексивно. Если оператор  $A : X \rightarrow C_s(\mathcal{P}, Y)$  — линейен и ограничен (считаем, что пространство  $C_s(\mathcal{P}, Y)$  наделено сильной нормой), то найдётся функция  $B : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ , непрерывная в смысле слабой операторной топологии пространства  $\mathcal{L}(X, Y)$ , такая, что

$$A[f](p) = B(p)f \quad \forall f \in X \quad \forall p \in \mathcal{P}. \quad (3.1.3)$$

При этом

$$\|A\|_{X \rightarrow C_s(\mathcal{P}, Y)} = \sup_{p \in \mathcal{P}} \|B(p)\|_{X \rightarrow Y}. \quad (3.1.4)$$

Обратно, если функция  $B : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$  — непрерывна в смысле слабой операторной топологии пространства  $\mathcal{L}(X, Y)$ , то формула (3.1.3) задаёт линейный непрерывный оператор, действующий из  $X$  в  $C_s(\mathcal{P}, Y)$ .

**Доказательство.** Доказательство разобьём на три части.

1) Покажем, что если функция  $B : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$  — непрерывна в смысле слабой операторной топологии пространства  $\mathcal{L}(X, Y)$ , то формула (3.1.3) задаёт линейный непрерывный оператор, действующий из  $X$  в  $C_s(\mathcal{P}, Y)$ .

Действительно, пусть функция  $B : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$  — непрерывна в смысле слабой операторной топологии пространства  $\mathcal{L}(X, Y)$ . Тогда при всех  $f \in X$  справедливо включение  $A[f] \in C_s(\mathcal{P}, Y)$ , а линейность оператора  $A$  очевидна. Таким образом,  $A$  — линейный оператор, действующий из  $X$  в  $C_s(\mathcal{P}, Y)$ .

Докажем ограниченность оператора  $A$ . Поскольку функция  $B : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$  — непрерывна в смысле слабой операторной топологии пространства  $\mathcal{L}(X, Y)$ , то при всех  $f \in X$  функция

$$\mathcal{P} \ni p \mapsto (B(p)f) \in Y$$

непрерывна в смысле слабой топологии пространства  $Y$ . Следовательно, в силу теоремы о резонансе, при каждом фиксированном  $f \in X$  конечна величина  $\sup_{p \in \mathcal{P}} \|B(p)f\|_Y$ . Поэтому, снова в силу теоремы о резонансе, конечна величина  $\sup_{p \in \mathcal{P}} \|B(p)\|_{X \rightarrow Y}$ . Как следствие,

$$\|A[f](p)\|_Y \leq \|B(p)\|_{X \rightarrow Y} \|f\|_X \leq \sup_{q \in \mathcal{P}} \|B(q)\|_{X \rightarrow Y} \|f\|_X.$$

Переходя здесь к точной верхней грани по  $p \in \mathcal{P}$ , выводим, что

$$\|A[f]\|_{C_s(\mathcal{P}, Y)} \leq \sup_{q \in \mathcal{P}} \|B(q)\|_{X \rightarrow Y} \|f\|_X.$$

А это и означает, что оператор  $A$  — ограничен.

2) Докажем, что для любого линейного непрерывного оператора  $A : X \rightarrow C_s(\mathcal{P}, Y)$  найдётся функция  $B : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ , непрерывная в смысле слабой операторной топологии пространства  $\mathcal{L}(X, Y)$ , такая, что справедливо представление (3.1.3). В самом деле, пусть оператор  $A : X \rightarrow C_s(\mathcal{P}, Y)$  — линейен и ограничен. Тогда при всех  $f \in X$

$$\sup_{p \in \mathcal{P}} \|A[f](p)\|_Y \leq \|A\|_{X \rightarrow C_s(\mathcal{P}, Y)} \|f\|_X.$$

Следовательно, при каждом фиксированном  $p \in \mathcal{P}$

$$\|A[f](p)\|_Y \leq \|A\|_{X \rightarrow C_s(\mathcal{P}, Y)} \|f\|_X \quad \forall f \in X.$$

Иными словами, при каждом фиксированном  $p$  отображение

$$X \ni f \mapsto A[f](p) \in Y$$

является линейным ограниченным оператором, действующим из  $X$  в  $Y$ . Обозначив этот оператор через  $B(p)$ , получаем представление (3.1.3). Непрерывность функции  $B : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$  в смысле слабой операторной топологии пространства  $\mathcal{L}(X, Y)$  следует из того, что при всех  $f \in X$  справедливо включение  $A[f] \in C_s(\mathcal{P}, Y)$ .

3) Докажем равенство (3.1.4):

$$\|A\|_{X \rightarrow C_s(\mathcal{P}, Y)} = \sup_{\|f\|_X \leq 1} \sup_{p \in \mathcal{P}} \|A[f](p)\|_Y = \sup_{p \in \mathcal{P}} \sup_{\|f\|_X \leq 1} \|B(p)f\|_Y = \sup_{p \in \mathcal{P}} \|B(p)\|_{X \rightarrow Y},$$

что и требовалось доказать. ■

**Следствие 3.1.1.** Пусть пространство  $X$  — сепарабельно. Если оператор  $A : L_1([a, b], X) \rightarrow C_s(\mathcal{P}, Y)$  — линеен и ограничен (считаем, что пространство  $C_s(\mathcal{P}, Y)$  наделено сильной нормой), то найдётся функция  $B : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{L}(L_1([a, b], X), Y)$ , непрерывная в смысле слабой операторной топологии пространства  $\mathcal{L}(L_1([a, b], X), Y)$ , такая, что

$$A[f](p) = B(p)f \quad \forall f \in L_1([a, b], X) \quad \forall p \in \mathcal{P}. \quad (3.1.5)$$

При этом

$$\|A\|_{L_1([a, b], X) \rightarrow C_s(\mathcal{P}, Y)} = \sup_{p \in \mathcal{P}} \|B(p)\|_{L_1([a, b], X) \rightarrow Y}. \quad (3.1.6)$$

Обратно, если функция  $B : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{L}(L_1([a, b], X), Y)$  — непрерывна в смысле слабой операторной топологии пространства  $\mathcal{L}(L_1([a, b], X), Y)$ , то формула (3.1.5) задаёт линейный непрерывный оператор, действующий из  $L_1([a, b], X)$  в  $C_s(\mathcal{P}, Y)$ .

**Теорема 3.1.3.** Пусть пространства  $X$  и  $Y$  — рефлексивны и сепарабельны.

Если оператор  $A : L_1([a, b], X) \rightarrow Y$  — линеен и ограничен, то найдётся функция  $B : [a, b] \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ , такая, что при всех  $x \in X$  отображение

$$[a, b] \ni t \mapsto (B(t)x) \in Y \quad (3.1.7)$$

слабо измеримо, конечна величина

$$\operatorname{vraisup}_{t \in [a, b]} \|B(t)\|_{X \rightarrow Y}, \quad (3.1.8)$$

и справедливо представление

$$A[f] = (B) \int_a^b B(t)f(t)dt \quad \forall f \in L_1([a, b], X). \quad (3.1.9)$$

При этом

$$\|A\|_{L_1([a, b], X) \rightarrow Y} = \operatorname{vraisup}_{t \in [a, b]} \|B(t)\|_{X \rightarrow Y}. \quad (3.1.10)$$

Обратно, если функция  $B : [a, b] \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$  обладает указанными выше свойствами, то формула (3.1.9) задаёт линейный непрерывный оператор, действующий из  $L_1([a, b], X)$  в  $Y$ .

**Доказательство.** Разобьём доказательство на две части.

1) Докажем, что если функция  $B : [a, b] \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$  обладает указанными выше свойствами, то формула (3.1.9) задаёт линейный непрерывный оператор, действующий из  $L_1([a, b], X)$  в  $Y$ . В самом деле, поскольку при любом  $x \in X$  слабо измеримо отображение (3.1.7), а пространства  $X$  и  $Y$  сепарабельны, то сильно измеримо отображение

$$[a, b] \ni t \mapsto (B(t)f(t)) \in Y. \quad (3.1.11)$$

Далее, в силу непрерывности оператора  $B(t)$  и конечности величины (3.1.8) заключаем, что при всех  $f \in L_1([a, b], X)$  и п.в.  $t \in [a, b]$

$$\|B(t)f(t)\|_Y \leq [\operatorname{vraisup}_{\tau \in [a, b]} \|B(\tau)\|_Y] \|f(t)\|_X. \quad (3.1.12)$$

Поэтому, в силу суммируемости функции  $f$ , суммируема и функция (3.1.11), так что формула (3.1.9) действительно задаёт оператор, действующий из  $L_1([a, b], X)$  в  $Y$ . Линейность этого оператора очевидна. Докажем его ограниченность. Из оценки (3.1.12), равенства (3.1.9) и свойств интеграла Бохнера следует, что

$$\|A[f]\|_Y \leq [\text{vraisup}_{\tau \in [a, b]} \|B(\tau)\|_Y] \|f\|_{1, [a, b], X} \quad \forall f \in L_1([a, b], X),$$

что и означает ограниченность оператора  $A$ .

2) Докажем, что если оператор  $A : L_1([a, b], X) \rightarrow Y$  — линейен и ограничен, то найдётся функция  $B : [a, b] \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ , такая, что при всех  $x \in X$  отображение (3.1.7) — слабо измеримо, конечна величина (3.1.8), справедливо представление (3.1.9), и имеет место равенство (3.1.10).

Выберем произвольно  $y^* \in Y^*$  и зафиксируем. Тогда отображение

$$L_1([a, b], X) \ni f \mapsto \langle A[f], y^* \rangle, \quad (3.1.13)$$

является линейным непрерывным функционалом над  $L_1([a, b], X)$ , вследствие чего найдётся функция  $g_{y^*} \in L_\infty([a, b], X^*)$ , такая, что

$$\langle A[f], y^* \rangle = \int_a^b \langle f(t), g_{y^*}(t) \rangle dt \quad \forall y^* \in Y^* \quad \forall f \in L_1([a, b], X), \quad (3.1.14)$$

причём

$$\sup_{\|f\|_{1, [a, b], X} \leq 1} \langle A[f], y^* \rangle = \text{vraisup}_{t \in [a, b]} \|g_{y^*}(t)\|_{X^*} \quad \forall y^* \in Y^*. \quad (3.1.15)$$

Покажем, что при п.в.  $t \in [a, b]$  отображение

$$Y^* \ni y^* \mapsto g_{y^*}(t) \in X^* \quad (3.1.16)$$

линейно.

Действительно, если  $y_1^*, y_2^* \in Y^*$ , то, с одной стороны, в силу (3.1.14),

$$\langle A[f], y_1^* + y_2^* \rangle = \int_a^b \langle f(t), g_{y_1^* + y_2^*}(t) \rangle dt. \quad (3.1.17)$$

С другой стороны, в силу (3.1.14),

$$\langle A[f], y_1^* + y_2^* \rangle = \langle A[f], y_1^* \rangle + \langle A[f], y_2^* \rangle = \int_a^b \langle f(t), g_{y_1^*}(t) \rangle dt + \int_a^b \langle f(t), g_{y_2^*}(t) \rangle dt. \quad (3.1.18)$$

Вычитая (3.1.18) из (3.1.17), будем иметь

$$0 = \int_a^b \langle f(t), g_{y_1^* + y_2^*}(t) - g_{y_1^*}(t) - g_{y_2^*}(t) \rangle dt \quad \forall f \in L_1([a, b], X),$$

ввиду чего

$$g_{y_1^* + y_2^*}(t) = g_{y_1^*}(t) + g_{y_2^*}(t) \quad \text{при п.в. } t \in [a, b], \quad \forall y_1^*, y_2^* \in Y^*. \quad (3.1.19)$$

Кроме того, если  $y^* \in Y^*$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , то, с одной стороны, согласно (3.1.14),

$$\langle A[f], \lambda y^* \rangle = \int_a^b \langle f(t), g_{\lambda y^*}(t) \rangle dt. \quad (3.1.20)$$

С другой стороны, в силу (3.1.14),

$$\langle A[f], \lambda y^* \rangle = \lambda \langle A[f], y^* \rangle = \lambda \int_a^b \langle f(t), g_{y^*}(t) \rangle dt = \int_a^b \langle f(t), \lambda g_{y^*}(t) \rangle dt. \quad (3.1.21)$$

Вычитая (3.1.21) из (3.1.20), выводим, что

$$0 = \int_a^b \langle f(t), g_{\lambda y^*}(t) - \lambda g_{y^*}(t) \rangle dt \quad \forall f \in L_1([a, b], X).$$

Поэтому

$$g_{\lambda y^*}(t) = \lambda g_{y^*}(t) \quad \text{при п.в. } t \in [a, b], \forall y^* \in Y^* \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}. \quad (3.1.22)$$

Из (3.1.19) и (3.1.22) следует, что при почти всех  $t \in [a, b]$  отображение (3.1.16) — линейно. Обозначим это отображение через  $\Lambda(t)$ .

Докажем, что при почти всех  $t \in [a, b]$  оператор  $\Lambda(t) : Y^* \rightarrow X^*$  — ограничен.

Так как оператор  $A$  — линейен и ограничен, то конечна величина  $\|A\|_{L_1([a, b], X) \rightarrow Y} \equiv \sup_{\|f\|_{1, [a, b], X} \leq 1} \|A[f]\|_Y$ , и, значит,

$$\|A\|_{L_1([a, b], X) \rightarrow Y} \equiv \sup_{\|f\|_{1, [a, b], X} \leq 1} \|A[f]\|_Y = \sup_{\|f\|_{1, [a, b], X} \leq 1} \sup_{\|y^*\|_{Y^*} \leq 1} |\langle A[f], y^* \rangle| = \sup_{\|y^*\|_{Y^*} \leq 1} \sup_{\|f\|_{1, [a, b], X} \leq 1} |\langle A[f], y^* \rangle|,$$

откуда, пользуясь (3.1.15), выводим, что

$$\|A\|_{L_1([a, b], X) \rightarrow Y} = \sup_{\|y^*\|_{Y^*} \leq 1} \operatorname{vraisup}_{t \in [a, b]} \|\Lambda(t)y^*\|_{X^*} = \operatorname{vraisup}_{t \in [a, b]} \sup_{\|y^*\|_{Y^*} \leq 1} \|\Lambda(t)y^*\|_{X^*}.$$

Отсюда следует, что, во-первых,  $\Lambda(t) \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$  при п.в.  $t \in [a, b]$ ; во-вторых, конечна величина

$$\operatorname{vraisup}_{t \in [a, b]} \|\Lambda(t)\|_{Y^* \rightarrow X^*};$$

и, в-третьих, что

$$\|A\|_{L_1([a, b], X) \rightarrow Y} = \operatorname{vraisup}_{t \in [a, b]} \|\Lambda(t)\|_{Y^* \rightarrow X^*}. \quad (3.1.23)$$

Итак, мы доказали, что найдётся функция  $\Lambda : [a, b] \rightarrow \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ , такая, что справедливо представление

$$\langle A[f], y^* \rangle = \int_a^b \langle f(t), \Lambda(t)y^* \rangle dt \quad \forall y^* \in Y^* \quad \forall f \in L_1([a, b], X), \quad (3.1.24)$$

Поскольку  $\Lambda(t)$  — линейный ограниченный оператор, то для него существует сопряжённый оператор  $B(t) \in \mathcal{L}(X^{**}, Y^{**})$ , причём

$$\|\Lambda(t)\|_{Y^* \rightarrow X^*} = \|B(t)\|_{X^{**} \rightarrow Y^{**}}.$$

Поскольку пространства  $X$  и  $Y$  — рефлексивны, то можно считать, что  $B(t) \in \mathcal{L}(X, Y)$ .

Поэтому равенства (3.1.23) и (3.1.24) можно переписать в виде следующих соотношений:

$$\|A\|_{L_1([a, b], X) \rightarrow Y} = \operatorname{vraisup}_{t \in [a, b]} \|B(t)\|_{X \rightarrow Y}, \quad (3.1.25)$$

$$\langle A[f], y^* \rangle = \int_a^b \langle B(t)f(t), y^* \rangle dt \quad \forall y^* \in Y^* \quad \forall f \in L_1([a, b], X). \quad (3.1.26)$$

Ясно, что равенство (3.1.25) представляет собою соотношение (3.1.10).

Далее, из (3.1.26) следует, что при всех  $y^* \in Y^*$

$$\left\langle A[f] - \int_a^b B(t)f(t)dt, y^* \right\rangle = 0,$$

откуда, пользуясь теоремой Хана–Банаха, получаем представление (3.1.9). ■

**Теорема 3.1.4.** Пусть пространства  $X$  и  $Y$  — рефлексивны и сепарабельны.

Если оператор  $A : L_1([a, b], X) \rightarrow C_s(\mathcal{P}, Y)$  — линейен и непрерывен (считаем, что пространство  $C_s(\mathcal{P}, Y)$  наделено сильной нормой), то найдётся функция  $F : \mathcal{P} \times [a, b] \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ , такая, что

1) при всех  $p \in \mathcal{P}$  отображение

$$[a, b] \ni t \mapsto [F(p, t)x] \in Y \quad (3.1.27)$$

слабо измеримо при каждом фиксированном  $x \in X$ ;

2) конечна величина

$$\sup_{p \in \mathcal{P}} \operatorname{vraisup}_{t \in [a, b]} \|F(p, t)\|_{X \rightarrow Y}; \quad (3.1.28)$$

3) при любом  $p_0 \in \mathcal{P}$

$$\int_a^b F(p, t)f(t)dt \rightarrow \int_a^b F(p_0, t)f(t)dt \text{ слабо в } Y \text{ при } p \rightarrow p_0 \quad \forall f \in L_1([a, b], X); \quad (3.1.29)$$

4) справедливо представление

$$A[f](p) = (B) \int_a^b F(p, t)f(t)dt \quad \forall f \in L_1([a, b], X) \quad \forall p \in \mathcal{P}. \quad (3.1.30)$$

При этом

$$\|A\|_{L_1([a, b], X) \rightarrow C_s(\mathcal{P}, Y)} = \sup_{p \in \mathcal{P}} \operatorname{vraisup}_{t \in [a, b]} \|F(p, t)\|_{X \rightarrow Y}. \quad (3.1.31)$$

Обратно, если функция  $F : \mathcal{P} \times [a, b] \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$  обладает свойствами 1)–3), то формула (3.1.30) задаёт линейный непрерывный оператор, действующий из  $L_1([a, b], X)$  в  $C_s(\mathcal{P}, Y)$ .

**Доказательство.** 1) Покажем, что если функция  $F : \mathcal{P} \times [a, b] \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$  обладает свойствами 1)–3), то формула (3.1.30) задаёт линейный непрерывный оператор, действующий из  $L_1([a, b], X)$  в  $C_s(\mathcal{P}, Y)$ .

В самом деле, из первого свойства и сепарабельности пространства  $Y$  следует, что отображение

$$[a, b] \ni t \mapsto [F(p, t)f(t)] \in Y$$

сильно измеримо при всех  $p \in \mathcal{P}$ ,  $f \in L_1([a, b], X)$ . Кроме того, при почти всех  $t \in [a, b]$

$$\|F(p, t)f(t)\|_Y \leq [\sup_{q \in \mathcal{P}} \operatorname{vraisup}_{t \in [a, b]} \|F(q, t)\|_{X \rightarrow Y}] \|f(t)\|_X.$$

Поэтому интеграл в правой части равенства (3.1.30) существует при всех  $p \in \mathcal{P}$ . То, что при всех  $f \in L_1([a, b], X)$  выполнено включение  $A[f] \in C_s(\mathcal{P}, Y)$ , следует из третьего свойства. Итак, оператор  $A$  действует из  $L_1([a, b], X)$  в  $C_s(\mathcal{P}, Y)$ . Линейность этого оператора очевидна. Докажем ограниченность:

$$\|A[f](p)\|_Y \leq \int_a^b \|F(p, t)f(t)\|_Y dt \leq [\sup_{q \in \mathcal{P}} \operatorname{vraisup}_{t \in [a, b]} \|F(q, t)\|_{X \rightarrow Y}] \|f\|_{1, [a, b], X}.$$

Переходя здесь к точной верхней грани по  $p \in \mathcal{P}$ , будем иметь

$$\|A[f]\|_{C_s(\mathcal{P}, Y)} \leq [\sup_{q \in \mathcal{P}} \operatorname{vraisup}_{t \in [a, b]} \|F(q, t)\|_{X \rightarrow Y}] \|f\|_{1, [a, b], X} \quad \forall f \in L_1([a, b], X),$$

что и означает непрерывность оператора  $A$ .

2) Докажем теперь, что если оператор  $A : L_1([a, b], X) \rightarrow C_s(\mathcal{P}, Y)$  — линеен и непрерывен, то найдётся функция  $F : \mathcal{P} \times [a, b] \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ , обладающая свойствами 1)–3), такая, что справедливы представление (3.1.30) и равенство (3.1.31).

Действительно, поскольку оператор  $A$  — линеен и ограничен, то, согласно следствию 3.1.1, найдётся функция  $E : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{L}(L_1([a, b], X), Y)$ , непрерывная в смысле слабой операторной топологии пространства  $\mathcal{L}(L_1([a, b], X), Y)$ , такая, что

$$A[f](p) = E(p)f \quad \forall f \in L_1([a, b], X) \quad \forall p \in \mathcal{P}; \quad (3.1.32)$$

$$\|A\|_{L_1([a, b], X) \rightarrow C_s(\mathcal{P}, Y)} = \sup_{p \in \mathcal{P}} \|E(p)\|_{L_1([a, b], X) \rightarrow Y}. \quad (3.1.33)$$

Выберем произвольно  $p \in \mathcal{P}$  и зафиксируем. Поскольку  $E(p) \in \mathcal{L}(L_1([a, b], X), Y)$ , то, согласно теореме 3.1.3, найдётся функция  $B_p : [a, b] \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ , такая, что

а) при всех  $x \in X$  слабо измеримо отображение

$$[a, b] \ni t \mapsto (B_p(t)x) \in Y;$$

б) конечна величина

$$\text{vraisup}_{t \in [a, b]} \|B_p(t)\|_{X \rightarrow Y};$$

в) справедливо представление

$$E(p)f = (\text{Б}) \int_a^b B_p(t)f(t)dt \quad \forall p \in \mathcal{P} \quad \forall f \in L_1([a, b], X);$$

г) имеет место равенство

$$\|E(p)\|_{L_1([a, b], X) \rightarrow Y} = \text{vraisup}_{t \in [a, b]} \|B_p(t)\|_{X \rightarrow Y}.$$

Положив  $F(p, t) \equiv B_p(t)$ ,  $p \in \mathcal{P}$ ,  $t \in [a, b]$ , получим требуемое утверждение. Теорема полностью доказана. ■

**Теорема 3.1.5.** Пусть пространство  $Y$  — сепарабельно. Если оператор  $A : X \rightarrow L_\infty([a, b], Y)$  — линеен и непрерывен, то найдётся функция  $B : [a, b] \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ , такая, что

1) при всех  $x \in X$  слабо измеримо отображение

$$[a, b] \ni t \mapsto [B(t)x] \in Y; \quad (3.1.34)$$

2) конечна величина

$$\text{vraisup}_{t \in [a, b]} \|B(t)\|_{X \rightarrow Y}; \quad (3.1.35)$$

3) справедливо представление

$$A[f](t) = B(t)f \quad \text{при н.в. } t \in [a, b] \quad \forall f \in X; \quad (3.1.36)$$

4) имеет место равенство

$$\|A\|_{X \rightarrow L_\infty([a, b], Y)} = \text{vraisup}_{t \in [a, b]} \|B(t)\|_{X \rightarrow Y}. \quad (3.1.37)$$

Обратно, если функция  $B : [a, b] \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$  обладает свойствами 1) и 2), то формула (3.1.36) задаёт линейный ограниченный оператор, действующий из  $X$  в  $L_\infty([a, b], Y)$ .

**Доказательство.** Доказательство разобьём на две части.

1) Докажем, что если  $B : [a, b] \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$  обладает свойствами 1) и 2), то формула (3.1.36) задаёт линейный ограниченный оператор, действующий из  $X$  в  $L_\infty([a, b], Y)$ . Отметим, что из свойств 1)–2) следует корректность определения оператора  $A$ . Линейность оператора  $A$  — очевидна. Докажем его ограниченность. Действительно, при почти всех  $t \in [a, b]$ , в силу свойства 2),

$$\|A[f](t)\|_Y = \|B(t)f\|_Y \leq [\text{vraisup}_{\tau \in [a, b]} \|B(\tau)\|_{X \rightarrow Y}] \|f\|_X;$$

откуда вытекает, что

$$\text{vraisup}_{t \in [a, b]} \|A[f](t)\|_Y = \|B(t)f\|_Y \leq [\text{vraisup}_{\tau \in [a, b]} \|B(\tau)\|_{X \rightarrow Y}] \|f\|_X.$$

А это и означает ограниченность оператора  $A$ .

2) Покажем, что если оператор  $A : X \rightarrow L_\infty([a, b], Y)$  — линеен и непрерывен, то найдётся функция  $B : [a, b] \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ , обладающая свойствами 1) и 2), и такая, что справедливы представление (3.1.36) и равенство (3.1.37).

В самом деле, если оператор  $A : X \rightarrow L_\infty([a, b], Y)$  — линейен и непрерывен, то при всех  $f \in X$

$$\operatorname{vraisup}_{t \in [a, b]} \|A[f](t)\|_Y \leq \|A\|_{X \rightarrow L_\infty([a, b], Y)} \|f\|_X.$$

Следовательно, при почти всех  $t \in [a, b]$

$$\|A[f](t)\|_Y \leq \|A\|_{X \rightarrow L_\infty([a, b], Y)} \|f\|_X.$$

Иными словами, при почти всех  $t \in [a, b]$  отображение

$$X \ni f \mapsto [A[f](t)] \in Y$$

является линейным ограниченным оператором, действующим из  $X$  в  $Y$ . Обозначив этот оператор через  $B(t)$ , получаем представление (3.1.36).

Далее, поскольку оператор  $A$  — линейен и ограничен, то конечна величина

$$\|A\|_{X \rightarrow L_\infty([a, b], Y)} \equiv \sup_{\|f\|_X \leq 1} \|A[f]\|_{\infty, [a, b], Y}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \|A\|_{X \rightarrow L_\infty([a, b], Y)} &\equiv \sup_{f \in X} \|A[f]\|_{\infty, [a, b], Y} = \sup_{\|f\|_X \leq 1} \operatorname{vraisup}_{t \in [a, b]} \|A[f](t)\|_Y = \\ &= \sup_{\|f\|_X \leq 1} \operatorname{vraisup}_{t \in [a, b]} \|B(t)f\|_Y = \operatorname{vraisup}_{t \in [a, b]} \sup_{\|f\|_X \leq 1} \|B(t)f\|_Y = \operatorname{vraisup}_{t \in [a, b]} \|B(t)\|_{X \rightarrow Y}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что, во-первых, конечна величина (3.1.35); и, во-вторых, что справедливо равенство (3.1.37). ■

**Теорема 3.1.6.** Пусть пространства  $X$  и  $Y$  — рефлексивны и сепарабельны. Если оператор  $A : L_1([a, b], X) \rightarrow L_\infty([c, d], Y)$  — линейен и непрерывен, то найдётся функция  $F : [c, d] \times [a, b] \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ , такая, что

1) при всех  $x \in X$  слабо измеримо отображение

$$[c, d] \times [a, b] \ni (t, \tau) \mapsto [F(t, \tau)x] \in Y; \quad (3.1.38)$$

2) конечна величина

$$\operatorname{vraisup}_{(t, \tau) \in [c, d] \times [a, b]} \|F(t, \tau)\|_{X \rightarrow Y}; \quad (3.1.39)$$

3) справедливо представление

$$A[f](t) = (B) \int_a^b F(t, \tau) f(\tau) d\tau \quad \text{при п.в. } t \in [c, d], \forall f \in L_1([a, b], X); \quad (3.1.40)$$

4) имеет место равенство

$$\|A\|_{L_1([a, b], X) \rightarrow L_\infty([c, d], Y)} = \operatorname{vraisup}_{(t, \tau) \in [c, d] \times [a, b]} \|F(t, \tau)\|_{X \rightarrow Y}. \quad (3.1.41)$$

Обратно, если функция  $F : [c, d] \times [a, b] \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$  обладает свойствами 1) и 2), то формула (3.1.40) задаёт линейный непрерывный оператор, действующий из  $L_1([a, b], X)$  в  $L_\infty([c, d], Y)$ .

**Доказательство.** 1) Докажем, что если функция  $F : [c, d] \times [a, b] \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$  обладает свойствами 1) и 2), то формула (3.1.40) задаёт линейный непрерывный оператор, действующий из  $L_1([a, b], X)$  в  $L_\infty([c, d], Y)$ .

В самом деле, пусть это так. Тогда при почти всех  $t \in [c, d]$  измеримо отображение

$$[a, b] \ni \tau \mapsto [F(t, \tau)f(\tau)] \in Y.$$

Далее, при почти всех  $(t, \tau) \in [c, d] \times [a, b]$ , в силу свойства 2),

$$\|F(t, \tau)f(\tau)\|_Y \leq \left[ \operatorname{vraisup}_{(t', \tau') \in [c, d] \times [a, b]} \|F(t', \tau')\|_{X \rightarrow Y} \right] \|f(\tau)\|_X. \quad (3.1.42)$$

Поэтому, ввиду суммируемости функции  $f$ , интеграл в правой части формулы (3.1.40) имеет смысл.

Из неравенства (3.1.42) следует, что при почти всех  $t \in [c, d]$

$$\|A[f](t)\|_Y \leq [\text{vraisup}_{(t', \tau') \in [c, d] \times [a, b]} \|F(t', \tau')\|_{X \rightarrow Y}] \|f\|_{1, [a, b], X},$$

откуда вытекает, во-первых, что оператор  $A$  корректно определён; и, во-вторых, что этот оператор ограничен. Линейность же оператора  $A$  очевидна.

2) Докажем, что если оператор  $A : L_1([a, b], X) \rightarrow L_\infty([c, d], Y)$  — линеен и непрерывен, то найдётся функция  $F : [c, d] \times [a, b] \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ , обладающая свойствами 1)–2), и такая, что справедливы представление (3.1.40) и равенство (3.1.41).

В самом деле, на основании теоремы 3.1.5, найдётся функция  $E : [c, d] \rightarrow \mathcal{L}(L_1([a, b], X), Y)$ , такая, что а) при всех  $f \in L_1([a, b], X)$  слабо измеримо отображение

$$[c, d] \ni t \mapsto [E(t)f] \in Y;$$

б) конечна величина

$$\text{vraisup}_{t \in [c, d]} \|E(t)\|_{L_1([a, b], X) \rightarrow Y};$$

в) справедливо представление

$$A[f](t) = E(t)f \text{ при п.в. } t \in [c, d] \quad \forall f \in L_1([a, b], X);$$

г) имеет место равенство

$$\|A\|_{L_1([a, b], X) \rightarrow L_\infty([c, d], Y)} = \text{vraisup}_{t \in [c, d]} \|E(t)\|_{L_1([a, b], X) \rightarrow Y}.$$

Выберем теперь произвольно  $t \in [c, d]$  и зафиксируем. Поскольку  $E(t) \in \mathcal{L}(L_1([a, b], X), Y)$ , то, согласно теореме 3.1.3, найдётся функция  $B_t : [a, b] \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ , такая, что

д) при каждом фиксированном  $x \in X$  слабо измеримо отображение

$$[a, b] \ni \tau \mapsto [B_t(\tau)x] \in Y;$$

е) конечна величина

$$\text{vraisup}_{\tau \in [a, b]} \|B_t(\tau)\|_{X \rightarrow Y};$$

ё) справедливо представление

$$E(t)f = (\text{Б}) \int_a^b B_t(\tau)f(\tau)d\tau \text{ при п.в. } t \in [c, d] \quad \forall f \in L_1([a, b], X);$$

ж) выполняется равенство

$$\|E(t)\|_{L_1([a, b], X) \rightarrow Y} = \text{vraisup}_{\tau \in [a, b]} \|B_t(\tau)\|_{X \rightarrow Y}.$$

Положив затем  $F(t, \tau) \equiv B_t(\tau)$ ,  $(t, \tau) \in [c, d] \times [a, b]$ , получаем требуемое утверждение. ■

## 3.2. Применение абстрактных теорем к энергетическим классам

В данном разделе мы выводим представления линейных непрерывных операторов, определённых на пространстве суммируемых по Бохнеру функций, и принимающих значения в энергетических классах.

Пусть  $V$  и  $H$  — сепарабельные гильбертовы пространства со скалярными произведениями  $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$  и  $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$  соответственно, с соответствующими нормами  $\|\cdot\|_V$  и  $\|\cdot\|_H$ ,  $V \subset H$ , и это вложение непрерывно. Иными словами, найдётся постоянная  $\nu > 0$ , такая, что

$$\|v\|_H \leq \nu \|v\|_V \quad \forall v \in V.$$

**Теорема 3.2.1.** Пусть оператор  $A : L_1([0, T], H) \rightarrow \mathcal{E}([0, T]; V, H)$  — линеен и непрерывен. Тогда найдётся функция  $\Psi : \Gamma \rightarrow \mathcal{L}(V, H)$ , такая, что



1) при каждом фиксированном  $h \in H$  и всех  $t \in [0, T]$  измеримо отображение

$$[0, T] \ni \tau \mapsto [\Psi(t, \tau)h] \in V; \quad (3.2.1)$$

2) конечна величина

$$\sup_{t \in [0, T]} \operatorname{vraisup}_{\tau \in [0, T]} \|\Psi(t, \tau)\|_{H \rightarrow V}; \quad (3.2.2)$$

3) при любом  $t_0 \in [0, T]$

$$\int_0^T \Psi(t, \tau) f(\tau) d\tau \rightarrow \int_0^T \Psi(t_0, \tau) f(\tau) d\tau \text{ слабо в } V \text{ при } t \rightarrow t_0 \quad \forall f \in L_1([0, T], H); \quad (3.2.3)$$

4) при почти всех  $\tau \in [0, T]$  и при каждом фиксированном  $h \in H$  функция

$$[0, T] \ni t \mapsto [\Psi(t, \tau)h] \in V \quad (3.2.4)$$

является элементом пространства  $W_\infty^1([0, T], H)$  и  $\Psi_t(t, \tau) \in \mathcal{L}(H, H)$  при всех  $(t, \tau) \in \Gamma$ ;

5) при всех фиксированных  $h \in H$  измеримо отображение

$$\Gamma \ni (t, \tau) \mapsto [\Psi_t(t, \tau)h] \in H; \quad (3.2.5)$$

6) конечна величина

$$\operatorname{vraisup}_{(t, \tau) \in \Gamma} \|\Psi_t(t, \tau)\|_{H \rightarrow H}; \quad (3.2.6)$$

7) справедливы представления

$$A[f](t) = \int_a^b \Psi(t, \tau) f(\tau) d\tau, \quad \frac{dA[f](t)}{dt} = \int_a^b \Psi_t(t, \tau) f(\tau) d\tau \text{ при п.в. } t \in [0, T] \quad \forall f \in L_1([0, T], H); \quad (3.2.7)$$

8) имеет место неравенство

$$\|A\|_{L_1([0, T], H) \rightarrow \mathcal{E}([0, T]; V, H)} \leq \sup_{t \in [0, T]} \operatorname{vraisup}_{\tau \in [0, T]} \|\Psi(t, \tau)\|_{H \rightarrow V} + \operatorname{vraisup}_{(t, \tau) \in \Gamma} \|\Psi_t(t, \tau)\|_{H \rightarrow H}. \quad (3.2.8)$$

Обратно, если функция  $\Psi : \Gamma \rightarrow \mathcal{L}(V, H)$  обладает свойствами 1)–6), то оператор  $A$ , задаваемый соотношениями (3.2.7), является линейным ограниченным оператором, действующим из  $L_1([0, T], H)$  в  $\mathcal{E}([0, T]; V, H)$ .

**Доказательство.** 1) Пусть оператор  $A : L_1([0, T], H) \rightarrow \mathcal{E}([0, T]; V, H)$  — линеен и непрерывен.

Введём операторы  $B : L_1([0, T], H) \rightarrow C_s([0, T], V)$  и  $E : L_1([0, T], H) \rightarrow L_\infty([0, T], H)$  равенствами

$$B[f](t) = A[f](t), \quad E[f](t) = \frac{dA[f](t)}{dt} \text{ при п.в. } t \in [0, T] \quad \forall f \in L_1([0, T], H).$$

Нетрудно видеть, что операторы  $B$  и  $E$  — линейны и непрерывны. Поэтому, согласно теоремам 3.1.4 и 3.1.6, найдутся функции  $F : \Gamma \rightarrow \mathcal{L}(H, V)$  и  $G : \Gamma \rightarrow \mathcal{L}(H, H)$ , такие, что

а) при всех фиксированных  $t \in [0, T]$  и  $h \in H$  измеримо отображение

$$[0, T] \ni \tau \mapsto [F(t, \tau)h] \in V;$$

б) при всех фиксированных  $h \in H$  измеримо отображение

$$\Gamma \ni (t, \tau) \mapsto [G(t, \tau)h] \in H;$$

в) конечны величины

$$\sup_{t \in [0, T]} \operatorname{vraisup}_{\tau \in [0, T]} \|F(t, \tau)\|_{H \rightarrow V}$$

и

$$\operatorname{vraisup}_{(t, \tau) \in \Gamma} \|\Psi_t(t, \tau)\|_{H \rightarrow H};$$

г) при любом  $t_0 \in [0, T]$

$$\int_0^T F(t, \tau) f(\tau) d\tau \rightarrow \int_0^T F(t_0, \tau) f(\tau) d\tau \text{ слабо в } V \text{ при } t \rightarrow t_0 \quad \forall f \in L_1([0, T], H);$$

д) имеют место представления

$$B[f](t) = \int_a^b F(t, \tau) f(\tau) d\tau, \quad E[f](t) = \int_a^b G(t, \tau) f(\tau) d\tau \text{ при п.в. } t \in [0, T] \quad \forall f \in L_1([0, T], H);$$

е) справедливы равенства

$$\|B\|_{L_1([0, T], H) \rightarrow C_s([0, T], V)} = \sup_{t \in [0, T]} \operatorname{vraisup}_{\tau \in [0, T]} \|F(t, \tau)\|_{H \rightarrow V}, \quad \|E\|_{L_1([0, T], H) \rightarrow L_\infty([0, T], H)} = \operatorname{vraisup}_{(t, \tau) \in \Gamma} \|G(t, \tau)\|_{H \rightarrow H}.$$

Далее, в силу определения класса  $\mathfrak{D}([0, T]; V, H)$ , операторов  $B$  и  $E$ , и того, что оператор  $A$  принимает значения в  $\mathfrak{D}([0, T]; V, H)$ , вытекает, что

$$\int_0^T E[f](t) \varphi(t) dt = - \int_0^T B[f](t) \varphi'(t) dt \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(0, T) \quad \forall f \in L_1([0, T], H).$$

Подставив сюда представления операторов  $B$  и  $E$ , выводим, что

$$\int_{\Gamma} G(t, \tau) f(\tau) \varphi(t) dt d\tau = - \int_{\Gamma} F(t, \tau) f(\tau) \varphi'(t) dt d\tau \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(0, T) \quad \forall f \in L_1([0, T], H),$$

откуда следует, что

$$\int_0^T \left[ \int_0^T G(t, \tau) f(\tau) \varphi(t) dt \right] d\tau = - \int_0^T \left[ \int_0^T F(t, \tau) f(\tau) \varphi'(t) dt \right] d\tau \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(0, T) \quad \forall f \in L_1([0, T], H).$$

Ограничившись в данном соотношении функциями  $f$  вида  $f(\tau) \equiv h\psi(\tau)$ ,  $\tau \in [0, T]$ , где  $h \in H$ ,  $\psi \in \mathfrak{D}(0, T)$ , заключаем, что

$$\int_0^T \left[ \int_0^T G(t, \tau) h\varphi(t) dt + \int_0^T F(t, \tau) h\varphi'(t) dt \right] \psi(\tau) d\tau = 0 \quad \forall \varphi, \psi \in \mathfrak{D}(0, T).$$

Это означает, что при почти всех  $t \in [0, T]$

$$\int_0^T G(t, \tau) h\varphi(t) dt = - \int_0^T F(t, \tau) h\varphi'(t) dt \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(0, T).$$

Таким образом, в качестве функции  $\Psi$  можно взять функцию  $F$ .

Докажем теперь неравенство (3.2.8). В самом деле, при всех  $f \in L_1([0, T], H)$

$$\begin{aligned} \|A[f]\|_{\mathfrak{D}([0, T]; V, H)} &= \|B[f]\|_{C_s([0, T], V)} + \|E[f]\|_{\infty, [0, T], H} \leq \\ &\leq \left[ \sup_{t \in [0, T]} \operatorname{vraisup}_{\tau \in [0, T]} \|\Psi(t, \tau)\|_{H \rightarrow V} + \operatorname{vraisup}_{(t, \tau) \in \Gamma} \|\Psi_t(t, \tau)\|_{H \rightarrow H} \right] \|f\|_{1, [0, T], H}. \end{aligned}$$

Перейдя здесь к точной верхней грани по  $f \in L_1([0, T], H)$ , получаем требуемое неравенство.

2) Утверждение о том, что если функция  $\Psi : \Gamma \rightarrow \mathcal{L}(V, H)$  обладает свойствами 1)–6), то оператор  $A$ , задаваемый соотношениями (3.2.7), является линейным ограниченным оператором, действующим из  $L_1([0, T], H)$  в  $\mathfrak{D}([0, T]; V, H)$ , вытекает непосредственно из этих свойств. ■

Введём теперь пространство  $\mathfrak{E}([0, T]; V, H)$  как множество функций  $f \in \mathfrak{D}([0, T]; V, H)$ , у которых  $\dot{f} \in C_s([0, T], H)$ . Норму в классе  $\mathfrak{E}([0, T]; V, H)$  определим равенством

$$\|f\|_{\mathfrak{E}([0, T]; V, H)} = \sup_{t \in [0, T]} \sqrt{\|f(t)\|_V^2 + \|\dot{f}(t)\|_H^2}.$$

Нетрудно показать, что введённое пространство является банаховым.

**Теорема 3.2.2.** Пусть оператор  $A : L_1([0, T], H) \rightarrow \mathcal{E}([0, T]; V, H)$  — линейен и непрерывен. Тогда найдётся функция  $\Psi : \Gamma \rightarrow \mathcal{L}(H, V)$ , такая, что

1) при каждом фиксированном  $h \in H$  и всех  $t \in [0, T]$  измеримо отображение

$$[0, T] \ni \tau \mapsto [\Psi(t, \tau)h] \in V; \quad (3.2.9)$$

2) конечна величина

$$\sup_{t \in [0, T]} \text{vraisup}_{\tau \in [0, T]} \|\Psi(t, \tau)\|_{H \rightarrow V}; \quad (3.2.10)$$

3) при любом  $t_0 \in [0, T]$

$$\int_0^T \Psi(t, \tau) f(\tau) d\tau \rightarrow \int_0^T \Psi(t_0, \tau) f(\tau) d\tau \text{ слабо в } V \text{ при } t \rightarrow t_0 \quad \forall f \in L_1([0, T], H); \quad (3.2.11)$$

4) при почти всех  $\tau \in [0, T]$  и при каждом фиксированном  $h \in H$  функция

$$[0, T] \ni t \mapsto [\Psi(t, \tau)h] \in V \quad (3.2.12)$$

является элементом пространства  $W_\infty^1([0, T], H)$  и  $\Psi_t(t, \tau) \in \mathcal{L}(H, H)$  при всех  $(t, \tau) \in \Gamma$ ;

5) при каждом фиксированном  $h \in H$  и всех  $t \in [0, T]$  измеримо отображение

$$[0, T] \ni \tau \mapsto [\Psi_t(t, \tau)h] \in H; \quad (3.2.13)$$

6) конечна величина

$$\sup_{t \in [0, T]} \text{vraisup}_{\tau \in [0, T]} \|\Psi_t(t, \tau)\|_{H \rightarrow H}; \quad (3.2.14)$$

7) при любом  $t_0 \in [0, T]$

$$\int_0^T \Psi_t(t, \tau) f(\tau) d\tau \rightarrow \int_0^T \Psi_t(t_0, \tau) f(\tau) d\tau \text{ слабо в } H \text{ при } t \rightarrow t_0 \quad \forall f \in L_1([0, T], H); \quad (3.2.15)$$

8) справедливы представления

$$A[f](t) = \int_a^b \Psi(t, \tau) f(\tau) d\tau, \quad \frac{dA[f](t)}{dt} = \int_a^b \Psi_t(t, \tau) f(\tau) d\tau \text{ при п.в. } t \in [0, T] \quad \forall f \in L_1([0, T], H); \quad (3.2.16)$$

9) имеет место неравенство

$$\|A\|_{L_1([0, T], H) \rightarrow \mathcal{E}([0, T]; V, H)} \leq [\sup_{t \in [0, T]} \text{vraisup}_{\tau \in [0, T]} \|\Psi(t, \tau)\|_{H \rightarrow V}^2 + \sup_{t \in [0, T]} \text{vraisup}_{\tau \in [0, T]} \|\Psi_t(t, \tau)\|_{H \rightarrow H}^2]^{1/2}. \quad (3.2.17)$$

Обратно, если функция  $\Psi : \Gamma \rightarrow \mathcal{L}(V, H)$  обладает свойствами 1)–7), то оператор  $A$ , задаваемый соотношениями (3.2.16), является линейным ограниченным оператором, действующим из  $L_1([0, T], H)$  в  $\mathcal{E}([0, T]; V, H)$ .

**Доказательство.** 1) Пусть оператор  $A : L_1([0, T], H) \rightarrow \mathcal{E}([0, T]; V, H)$  — линейен и непрерывен.

Введём операторы  $B : L_1([0, T], H) \rightarrow C_s([0, T], V)$  и  $E : L_1([0, T], H) \rightarrow C_s([0, T], H)$  равенствами

$$B[f](t) = A[f](t), \quad E[f](t) = \frac{dA[f](t)}{dt} \text{ при п.в. } t \in [0, T] \quad \forall f \in L_1([0, T], H).$$

Нетрудно видеть, что операторы  $B$  и  $E$  — линейны и непрерывны. Поэтому, согласно теореме 3.1.4, найдутся функции  $F : \Gamma \rightarrow \mathcal{L}(H, V)$  и  $G : \Gamma \rightarrow \mathcal{L}(H, H)$ , такие, что

а) при всех фиксированных  $t \in [0, T]$  и  $h \in H$  измеримы отображения

$$[0, T] \ni \tau \mapsto [F(t, \tau)h] \in V, \quad [0, T] \ni \tau \mapsto [G(t, \tau)h] \in H;$$

б) конечны величины

$$\sup_{t \in [0, T]} \operatorname{vraisup}_{\tau \in [0, T]} \|F(t, \tau)\|_{H \rightarrow V}, \quad \sup_{t \in [0, T]} \operatorname{vraisup}_{\tau \in [0, T]} \|G(t, \tau)\|_{H \rightarrow H};$$

в) при любом  $t_0 \in [0, T]$

$$\begin{aligned} \int_0^T F(t, \tau) f(\tau) d\tau &\rightarrow \int_0^T F(t_0, \tau) f(\tau) d\tau \quad \text{слабо в } V \text{ при } t \rightarrow t_0, \\ \int_0^T G(t, \tau) f(\tau) d\tau &\rightarrow \int_0^T G(t_0, \tau) f(\tau) d\tau \quad \text{слабо в } H \text{ при } t \rightarrow t_0, \forall f \in L_1([0, T], H); \end{aligned}$$

г) имеют место представления

$$B[f](t) = \int_a^b F(t, \tau) f(\tau) d\tau, \quad E[f](t) = \int_a^b G(t, \tau) f(\tau) d\tau \quad \text{при п.в. } t \in [0, T] \quad \forall f \in L_1([0, T], H);$$

е) справедливы равенства

$$\begin{aligned} \|B\|_{L_1([0, T], H) \rightarrow C_s([0, T], V)} &= \sup_{t \in [0, T]} \operatorname{vraisup}_{\tau \in [0, T]} \|F(t, \tau)\|_{H \rightarrow V}, \\ \|E\|_{L_1([0, T], H) \rightarrow L_\infty([0, T], H)} &= \sup_{t \in [0, T]} \operatorname{vraisup}_{\tau \in [0, T]} \|G(t, \tau)\|_{H \rightarrow H}. \end{aligned}$$

Далее, из определения класса  $\mathfrak{E}([0, T]; V, H)$ , операторов  $B$  и  $E$ , и того, что оператор  $A$  принимает значения в  $\mathfrak{E}([0, T]; V, H)$ , вытекает, что

$$\int_0^T E[f](t) \varphi(t) dt = - \int_0^T B[f](t) \varphi'(t) dt \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(0, T) \quad \forall f \in L_1([0, T], H).$$

Подставив сюда представления операторов  $B$  и  $E$ , выводим, что

$$\int_{\Gamma} G(t, \tau) f(\tau) \varphi(t) dt d\tau = - \int_{\Gamma} F(t, \tau) f(\tau) \varphi'(t) dt d\tau \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(0, T) \quad \forall f \in L_1([0, T], H),$$

откуда следует, что

$$\int_0^T \left[ \int_0^T G(t, \tau) f(\tau) \varphi(t) dt \right] d\tau = - \int_0^T \left[ \int_0^T F(t, \tau) f(\tau) \varphi'(t) dt \right] d\tau \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(0, T) \quad \forall f \in L_1([0, T], H).$$

Ограничившись в данном соотношении функциями  $f$  вида  $f(\tau) \equiv h\psi(\tau)$ ,  $\tau \in [0, T]$ , где  $h \in H$ ,  $\psi \in \mathfrak{D}(0, T)$ , заключаем, что

$$\int_0^T \left[ \int_0^T G(t, \tau) h\varphi(t) dt + \int_0^T F(t, \tau) h\varphi'(t) dt \right] \psi(\tau) d\tau = 0 \quad \forall \varphi, \psi \in \mathfrak{D}(0, T).$$

Это означает, что при почти всех  $t \in [0, T]$

$$\int_0^T G(t, \tau) h\varphi(t) dt = - \int_0^T F(t, \tau) h\varphi'(t) dt \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(0, T).$$

Таким образом, в качестве функции  $\Psi$  можно взять функцию  $F$ .

Докажем теперь неравенство (3.2.17). В самом деле, при всех  $f \in L_1([0, T], H)$

$$\begin{aligned} \|A[f]\|_{\mathfrak{E}([0, T]; V, H)} &= \sup_{t \in [0, T]} [\|B[f](t)\|_V^2 + \|E[f](t)\|_H^2]^{1/2} \leq \\ &\leq \left[ \sup_{t \in [0, T]} \operatorname{vraisup}_{\tau \in [0, T]} \|\Psi(t, \tau)\|_{H \rightarrow V}^2 + \sup_{t \in [0, T]} \operatorname{vraisup}_{\tau \in [0, T]} \|\Psi_t(t, \tau)\|_{H \rightarrow H}^2 \right]^{1/2} \|f\|_{1, [0, T], H}. \end{aligned}$$

Перейдя здесь к точной верхней грани по  $f \in L_1([0, T], H)$ , получаем требуемое неравенство.

2) Утверждение о том, что если функция  $\Psi : \Gamma \rightarrow \mathcal{L}(V, H)$  обладает свойствами 1)–7), то оператор  $A$ , задаваемый соотношениями (3.2.16), является линейным ограниченным оператором, действующим из  $L_1([0, T], H)$  в  $\mathcal{E}([0, T]; V, H)$ , вытекает непосредственно из этих свойств. ■

**Теорема 3.2.3.** Пусть оператор  $A : V \rightarrow \mathcal{E}([0, T]; V, H)$  — линейен и непрерывен. Тогда найдётся функция  $\Phi : [0, T] \rightarrow \mathcal{L}(V, V)$ , такая, что

1) при каждом фиксированном  $v \in V$  отображение

$$[0, T] \ni t \mapsto [\Phi(t)v] \in V; \quad (3.2.18)$$

непрерывно в слабой топологии пространства  $V$ , принадлежит классу  $W_\infty^1([0, T], H)$ , и при всех  $t \in [0, T]$  имеет место включение  $\Phi'(t) \in \mathcal{L}(V, H)$ ;

2) при каждом фиксированном  $h \in H$  отображение

$$[0, T] \ni t \mapsto [\Phi'(t)h] \in H \quad (3.2.19)$$

непрерывно в слабой топологии пространства  $H$ ;

3) конечны величины

$$\sup_{t \in [0, T]} \|\Phi(t)\|_{V \rightarrow V}; \quad (3.2.20)$$

и

$$\sup_{t \in [0, T]} \|\Phi'(t)\|_{V \rightarrow H}; \quad (3.2.21)$$

4) справедливы представления

$$A[v](t) = \Phi(t)v, \quad \frac{dA[v](t)}{dt} = \Phi'(t)v \quad \forall v \in V; \quad (3.2.22)$$

5) имеет место неравенство

$$\|A\|_{V \rightarrow \mathcal{E}([0, T]; V, H)} \leq \left[ \sup_{t \in [0, T]} \|\Phi(t)\|_{V \rightarrow V}^2 + \sup_{t \in [0, T]} \|\Phi'(t)\|_{V \rightarrow H}^2 \right]^{1/2}. \quad (3.2.23)$$

Обратно, если функция  $\Phi : [0, T] \rightarrow \mathcal{L}(V, V)$  обладает свойствами 1)–3), то оператор  $A$ , задаваемый соотношениями (3.2.22), является линейным ограниченным оператором, действующим из  $V$  в  $\mathcal{E}([0, T]; V, H)$ .

**Доказательство.** 1) Пусть оператор  $A : V \rightarrow \mathcal{E}([0, T]; V, H)$  — линейен и непрерывен.

Введём операторы  $B : V \rightarrow C_s([0, T], V)$  и  $E : V \rightarrow C_s([0, T], H)$  равенствами

$$B[v](t) = A[v](t), \quad E[v](t) = \frac{dA[v](t)}{dt} \quad \forall v \in V.$$

Нетрудно видеть, что операторы  $B$  и  $E$  — линейны и непрерывны. Поэтому, согласно теореме 3.1.2, найдутся функции  $F : [0, T] \rightarrow \mathcal{L}(V, V)$  и  $G : [0, T] \rightarrow \mathcal{L}(V, H)$ , непрерывные в слабых операторных топологиях соответствующих пространств, и такие, что

$$B[v](t) = F(t)v \quad \forall v \in V \quad \forall t \in [0, T]; \quad (3.2.24)$$

$$E[v](t) = G(t)v \quad \forall v \in V \quad \forall t \in [0, T]; \quad (3.2.25)$$

$$\|B\|_{V \rightarrow C_s([0, T], V)} = \sup_{t \in [0, T]} \|F(t)\|_{V \rightarrow V}; \quad (3.2.26)$$

$$\|E\|_{V \rightarrow C_s([0, T], H)} = \sup_{t \in [0, T]} \|G(t)\|_{V \rightarrow H}. \quad (3.2.27)$$

Далее, из определения класса  $\mathcal{E}([0, T]; V, H)$ , операторов  $B$  и  $E$ , и того, что оператор  $A$  принимает значения в  $\mathcal{E}([0, T]; V, H)$ , вытекает, что

$$\int_0^T E[v](t)\varphi(t)dt = - \int_0^T B[v](t)\varphi'(t)dt \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(0, T) \quad \forall v \in V.$$

Подставив сюда представления операторов  $B$  и  $E$ , выводим, что

$$\int_0^T G(t)v\varphi(t)dt = - \int_0^T F(t)v\varphi'(t)dt \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(0, T) \quad \forall v \in V,$$

откуда следует, что в качестве функции  $\Phi$  можно взять функцию  $F$ .

Докажем теперь неравенство (3.2.23). В самом деле,

$$\|A[v]\|_{\mathfrak{E}([0, T]; V, H)} = \sup_{t \in [0, T]} [\|B[v](t)\|_V^2 + \|E[v](t)\|_H^2]^{1/2} \leq [\sup_{t \in [0, T]} \|\Phi(t)\|_{V \rightarrow V}^2 + \sup_{t \in [0, T]} \|\Phi'(t)\|_{V \rightarrow H}^2]^{1/2} \|v\|_V.$$

Перейдя здесь к точной верхней грани по  $v \in V$ , у которых  $\|v\|_V \leq 1$ , получаем требуемое неравенство.

2) Утверждение о том, что если функция  $\Phi : [0, T] \rightarrow \mathcal{L}(V, V)$  обладает свойствами 1)–3), то оператор  $A$ , задаваемый соотношениями (3.2.22), является линейным ограниченным оператором, действующим из  $V$  в  $\mathfrak{E}([0, T]; V, H)$ , вытекает непосредственно из этих свойств. ■

**Теорема 3.2.4.** Пусть оператор  $A : H \rightarrow \mathfrak{E}([0, T]; V, H)$  — линеен и непрерывен. Тогда найдётся функция  $\Psi : [0, T] \rightarrow \mathcal{L}(H, V)$ , такая, что

1) при каждом фиксированном  $h \in H$  отображение

$$[0, T] \ni t \mapsto [\Psi(t)v] \in V; \quad (3.2.28)$$

непрерывно в слабой топологии пространства  $V$ , принадлежит классу  $W_\infty^1([0, T], H)$ , и при всех  $t \in [0, T]$  имеет место включение  $\Psi'(t) \in \mathcal{L}(H, H)$ ;

2) при каждом фиксированном  $h \in H$  отображение

$$[0, T] \ni t \mapsto [\Psi'(t)h] \in H \quad (3.2.29)$$

непрерывно в слабой топологии пространства  $H$ ;

3) конечны величины

$$\sup_{t \in [0, T]} \|\Psi(t)\|_{H \rightarrow V}; \quad (3.2.30)$$

и

$$\sup_{t \in [0, T]} \|\Psi'(t)\|_{H \rightarrow H}; \quad (3.2.31)$$

4) справедливы представления

$$A[h](t) = \Psi(t)h, \quad \frac{dA[h](t)}{dt} = \Psi'(t)h \quad \forall h \in H; \quad (3.2.32)$$

5) имеет место неравенство

$$\|A\|_{H \rightarrow \mathfrak{E}([0, T]; V, H)} \leq [\sup_{t \in [0, T]} \|\Psi(t)\|_{H \rightarrow V}^2 + \sup_{t \in [0, T]} \|\Psi'(t)\|_{H \rightarrow H}^2]^{1/2}. \quad (3.2.33)$$

Обратно, если функция  $\Psi : [0, T] \rightarrow \mathcal{L}(H, V)$  обладает свойствами 1)–3), то оператор  $A$ , задаваемый соотношениями (3.2.32), является линейным ограниченным оператором, действующим из  $H$  в  $\mathfrak{E}([0, T]; V, H)$ .

**Доказательство.** 1) Пусть оператор  $A : H \rightarrow \mathfrak{E}([0, T]; V, H)$  — линеен и непрерывен.

Введём операторы  $B : H \rightarrow C_s([0, T], V)$  и  $E : H \rightarrow C_s([0, T], H)$  равенствами

$$B[v](t) = A[v](t), \quad E[v](t) = \frac{dA[v](t)}{dt} \quad \forall v \in V.$$

Нетрудно видеть, что операторы  $B$  и  $E$  — линейны и непрерывны. Поэтому, согласно теореме 3.1.2, найдутся функции  $F : [0, T] \rightarrow \mathcal{L}(H, V)$  и  $G : [0, T] \rightarrow \mathcal{L}(H, H)$ , непрерывные в слабых операторных топологиях соответствующих пространств, и такие, что

$$B[v](t) = F(t)v \quad \forall v \in V \quad \forall t \in [0, T]; \quad (3.2.34)$$

$$E[v](t) = G(t)v \quad \forall v \in V \quad \forall t \in [0, T]; \quad (3.2.35)$$

$$\|B\|_{H \rightarrow C_s([0, T], V)} = \sup_{t \in [0, T]} \|F(t)\|_{H \rightarrow V}; \quad (3.2.36)$$

$$\|E\|_{H \rightarrow C_s([0, T], H)} = \sup_{t \in [0, T]} \|G(t)\|_{H \rightarrow H}. \quad (3.2.37)$$

Далее, из определения класса  $\mathfrak{E}([0, T]; V, H)$ , операторов  $B$  и  $E$ , и того, что оператор  $A$  принимает значения в  $\mathfrak{E}([0, T]; V, H)$ , вытекает, что

$$\int_0^T E[v](t)\varphi(t)dt = - \int_0^T B[v](t)\varphi'(t)dt \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(0, T) \quad \forall v \in V.$$

Подставив сюда представления операторов  $B$  и  $E$ , выводим, что

$$\int_0^T G(t)v\varphi(t)dt = - \int_0^T F(t)v\varphi'(t)dt \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(0, T) \quad \forall v \in V,$$

откуда следует, что в качестве функции  $\Psi$  можно взять функцию  $F$ .

Докажем теперь неравенство (3.2.33). В самом деле,

$$\|A[v]\|_{\mathfrak{E}([0, T]; V, H)} = \sup_{t \in [0, T]} [\|B[v](t)\|_V^2 + \|E[v](t)\|_H^2]^{1/2} \leq [\sup_{t \in [0, T]} \|\Phi(t)\|_{H \rightarrow V}^2 + \sup_{t \in [0, T]} \|\Phi'(t)\|_{H \rightarrow H}^2]^{1/2} \|v\|_V.$$

Перейдя здесь к точной верхней грани по  $v \in V$ , у которых  $\|v\|_V \leq 1$ , получаем требуемое неравенство.

2) Утверждение о том, что если функция  $\Psi : [0, T] \rightarrow \mathcal{L}(H, V)$  обладает свойствами 1)–3), то оператор  $A$ , задаваемый соотношениями (3.2.32), является линейным ограниченным оператором, действующим из  $H$  в  $\mathfrak{E}([0, T]; V, H)$ , вытекает непосредственно из этих свойств. ■

Далее под  $\mathfrak{R}([0, T]; V, H)$  будем понимать множество функций  $\Psi : [0, T] \rightarrow \mathcal{L}(V, V)$ , таких, что

1) при каждом фиксированном  $v \in V$  отображение

$$[0, T] \ni t \mapsto [\Psi(t)v] \in V;$$

непрерывно в слабой топологии пространства  $V$ , принадлежит классу  $W_\infty^1([0, T], H)$ , и при всех  $t \in [0, T]$  имеет место включение  $\Psi'(t) \in \mathcal{L}(V, H)$ ;

2) при каждом фиксированном  $v \in V$  отображение

$$[0, T] \ni t \mapsto [\Psi'(t)v] \in H$$

непрерывно в слабой топологии пространства  $H$ .

**Теорема 3.2.5.** Пусть оператор  $A : H \rightarrow C([0, T], \mathfrak{E}([0, T]; V, H))$  — линейен и непрерывен. Тогда найдётся функция  $\Psi : \Gamma \rightarrow \mathcal{L}(H, V)$ , такая, что

1) при каждом фиксированном  $h \in H$  и каждом фиксированном  $\tau \in [0, T]$  отображение

$$[0, T] \ni t \mapsto [\Psi(t, \tau)h] \in V; \quad (3.2.38)$$

непрерывно в слабой топологии пространства  $V$ , принадлежит классу  $W_\infty^1([0, T], H)$ , и при всех  $(t, \tau) \in \Gamma$  имеет место включение  $\Psi_t(t, \tau) \in \mathcal{L}(H, H)$ ;

2) при каждом фиксированном  $h \in H$  и каждом фиксированном  $\tau \in [0, T]$  отображение

$$[0, T] \ni t \mapsto [\Psi_t(t, \tau)h] \in H \quad (3.2.39)$$

непрерывно в слабой топологии пространства  $H$ ;

3) конечны величины

$$\sup_{(t, \tau) \in \Gamma} \|\Psi(t, \tau)\|_{H \rightarrow V}; \quad (3.2.40)$$

и

$$\sup_{(t, \tau) \in \Gamma} \|\Psi_t(t, \tau)\|_{H \rightarrow H}; \quad (3.2.41)$$

4) при всех  $h \in [0, T]$  и всех  $\tau \in [0, T]$  выполнены соотношения

$$\lim_{\tau' \rightarrow \tau} \sup_{t \in [0, T]} \|\Psi(t, \tau') - \Psi(t, \tau)\|_V = 0, \quad \lim_{\tau' \rightarrow \tau} \sup_{t \in [0, T]} \|\Psi_t(t, \tau') - \Psi_t(t, \tau)\|_H = 0;$$

5) справедливы представления

$$A[h](\tau)(t) = \Psi(t, \tau)h, \quad \frac{d[A[h](\tau)](t)}{dt} = \Psi_t(t, \tau)h \quad \forall h \in H; \quad (3.2.42)$$

б) имеет место неравенство

$$\|A\|_{H \rightarrow C([0,T], \mathfrak{E}([0,T]; V, H))} \leq \left[ \sup_{(t, \tau) \in \Gamma} \|\Psi(t, \tau)\|_{H \rightarrow V}^2 + \sup_{(t, \tau) \in \Gamma} \|\Psi_t(t, \tau)\|_{H \rightarrow H}^2 \right]^{1/2}. \quad (3.2.43)$$

Обратно, если функция  $\Psi : \Gamma \rightarrow \mathcal{L}(H, V)$  обладает свойствами 1)–4), то оператор  $A$ , задаваемый соотношениями (3.2.42), является линейным ограниченным оператором, действующим из  $H$  в  $C([0, T], \mathfrak{E}([0, T]; V, H))$ .

**Доказательство.** 1) Пусть оператор  $A : H \rightarrow C([0, T], \mathfrak{E}([0, T]; V, H))$  — линеен и непрерывен. Тогда, на основании теоремы 3.1.1, найдётся функция  $B : [0, T] \rightarrow \mathcal{L}(H, \mathfrak{E}([0, T]; V, H))$ , такая, что

$$A[h](\tau) = B(\tau)h, \quad \forall h \in H, \quad \tau \in [0, T]; \quad (3.2.44)$$

$$\lim_{\tau' \rightarrow \tau} \|[B(\tau') - B(\tau)]h\|_{\mathfrak{E}([0,T]; V, H)} = 0, \quad \forall h \in H, \quad \tau \in [0, T]; \quad (3.2.45)$$

$$\|A\|_{H \rightarrow C([0,T], \mathfrak{E}([0,T]; V, H))} = \sup_{\tau \in [0, T]} \|B(\tau)\|_{H \rightarrow \mathfrak{E}([0,T]; V, H)}. \quad (3.2.46)$$

Выберем произвольно  $\tau \in [0, T]$  и зафиксируем. Тогда  $B(\tau) \in \mathcal{L}(H, \mathfrak{E}([0, T]; V, H))$ . Поэтому, на основании теоремы 3.2.4, найдётся функция  $E(\cdot; \tau) : [0, T] \rightarrow \mathcal{L}(H, V)$ , такая, что

а) при каждом фиксированном  $h \in H$  отображение

$$[0, T] \ni t \mapsto [E(t; \tau)h] \in V; \quad (3.2.47)$$

непрерывно в слабой топологии пространства  $V$ , принадлежит классу  $W_\infty^1([0, T], H)$ , и при всех  $t \in [0, T]$  имеет место включение  $E_t(t; \tau) \in \mathcal{L}(H, H)$ ;

б) при каждом фиксированном  $h \in H$  отображение

$$[0, T] \ni t \mapsto [E_t(t; \tau)h] \in H \quad (3.2.48)$$

непрерывно в слабой топологии пространства  $H$ ;

в) конечны величины

$$\sup_{t \in [0, T]} \|E(t; \tau)\|_{H \rightarrow V}; \quad (3.2.49)$$

и

$$\sup_{t \in [0, T]} \|E_t(t; \tau)\|_{H \rightarrow H}; \quad (3.2.50)$$

г) справедливы представления

$$[B(\tau)h](t) = E(t; \tau)h, \quad \frac{d[B(\tau)h](t)}{dt} = E_t(t; \tau)h, \quad \forall h \in H, \quad t \in [0, T]; \quad (3.2.51)$$

д) имеет место неравенство

$$\|B(\tau)\|_{H \rightarrow \mathfrak{E}([0,T]; V, H)} \leq \left[ \sup_{t \in [0, T]} \|E(t; \tau)\|_{H \rightarrow V}^2 + \sup_{t \in [0, T]} \|E_t(t; \tau)\|_{H \rightarrow H}^2 \right]^{1/2}. \quad (3.2.52)$$

Положив теперь  $\Psi(t, \tau) \equiv E(t; \tau)$ , получим требуемое.

2) Утверждение о том, что если функция  $\Psi : \Gamma \rightarrow \mathcal{L}(H, V)$  обладает свойствами 1)–4), то оператор  $A$ , определённый соотношениями (3.2.42), является линейным ограниченным оператором, действующим из  $H$  в  $C([0, T], \mathfrak{E}([0, T]; V, H))$ , вытекает непосредственно из этих свойств. ■

Далее  $\mathfrak{S}(\Gamma; V, H)$  будет обозначать множество функций  $\Psi : \Gamma \rightarrow \mathcal{L}(H, V)$ , таких, что

1) при каждом фиксированном  $h \in H$  и каждом фиксированном  $\tau \in [0, T]$  отображение

$$[0, T] \ni t \mapsto [\Psi(t, \tau)h] \in V;$$

непрерывно в слабой топологии пространства  $V$ , принадлежит классу  $W_\infty^1([0, T], H)$ , и при всех  $(t, \tau) \in \Gamma$  имеет место включение  $\Psi_t(t, \tau) \in \mathcal{L}(H, H)$ ;

2) при каждом фиксированном  $h \in H$  и каждом фиксированном  $\tau \in [0, T]$  отображение

$$[0, T] \ni t \mapsto [\Psi_t(t, \tau)h] \in H$$

непрерывно в слабой топологии пространства  $H$ ;

3) при всех  $h \in [0, T]$  и всех  $\tau \in [0, T]$  выполнены соотношения

$$\lim_{\tau' \rightarrow \tau} \sup_{t \in [0, T]} \|[\Psi(t, \tau') - \Psi(t, \tau)]h\|_V = 0, \quad \lim_{\tau' \rightarrow \tau} \sup_{t \in [0, T]} \|[\Psi_t(t, \tau') - \Psi_t(t, \tau)]h\|_H = 0.$$



### 3.3. Абстрактное интегро–дифференциальное уравнение

Пусть  $V$  и  $H$  — сепарабельные гильбертовы пространства со скалярными произведениями  $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$  и  $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$  соответственно, с соответствующими нормами  $\| \cdot \|_V$  и  $\| \cdot \|_H$ ,  $V \subset H$ , и это вложение непрерывно. Иными словами, найдётся постоянная  $\nu > 0$ , такая, что

$$\|v\|_H \leq \nu \|v\|_V \quad \forall v \in V.$$

Рассмотрим интегро–дифференциальное уравнение

$$\mathfrak{z}(t) = \omega(t) + \int_0^t \Psi(t, \tau) g(\tau, \mathfrak{z}(\tau), \dot{\mathfrak{z}}(\tau)) d\tau, \quad t \in [0, T]. \quad (3.3.1)$$

Считаем, что выполнены следующие условия:

- 1) функция  $\omega : [0, T] \rightarrow V$  — элемент класса  $\mathcal{C}([0, T]; V, H)$ ;
- 2) функция  $g : [0, T] \times V \times H \rightarrow H$  — измерима по  $t \in [0, T]$  при всех  $(v, h) \in V \times H$ ;
- 3) найдётся функция  $K_0 \in L_1[0, T]$ , такая, что

$$\|g(t, v_1, h_1) - g(t, v_2, h_2)\|_H \leq K_0(t) \sqrt{\|v_1 - v_2\|_V^2 + \|h_1 - h_2\|_H^2} \quad \forall (t, v_i, h_i) \in [0, T] \times V \times H, \quad i = 1, 2;$$

- 4) найдётся функция  $K_1 \in L_1[0, T]$ , такая, что

$$\|g(t, 0, 0)\|_H \leq K_1(t) \quad \text{при п.в. } t \in [0, T];$$

- 5) функция  $\Psi : \Gamma \rightarrow \mathcal{L}(H, H)$  такова, что формула

$$A[f](t) = \int_0^t \Psi(t, \tau) f(\tau) d\tau \quad \text{при всех } t \in [0, T] \quad \forall f \in L_1([0, T], H),$$

задаёт линейный ограниченный оператор, действующий из  $L_1([0, T], H)$  в  $\mathcal{C}([0, T]; V, H)$ , причём

$$\Psi(t, t) = 0, \quad \forall t \in [0, T].$$

**Определение 3.3.1.** Функцию  $\mathfrak{z} \in \mathcal{C}([0, T]; V, H)$  назовём решением интегро–дифференциального уравнения (3.3.1), если функция  $\mathfrak{z}$  при всех  $t \in [0, T]$  удовлетворяет этому уравнению.

Основным результатом данного раздела является

**Теорема 3.3.1.** Существует единственное решение  $\mathfrak{z}$  интегро–дифференциального уравнения (3.3.1), причём найдётся постоянная  $B > 0$ , такая, что

$$\|\mathfrak{z}\|_{\mathcal{C}([0, T]; V, H)} \leq B[\|\omega\|_{\mathcal{C}([0, T]; V, H)} + \|g(\cdot, 0, 0)\|_{1, [0, T], H}]. \quad (3.3.2)$$

**Доказательство.** 1) Докажем вначале, что решение уравнения (3.3.1) существует и единственно. Введём оператор  $\Lambda : \mathcal{C}([0, T]; V, H) \rightarrow \mathcal{C}([0, T]; V, H)$  равенством

$$\Lambda[\mathfrak{z}](t) = \omega(t) + \int_0^t \Psi(t, \tau) g(\tau, \mathfrak{z}(\tau), \dot{\mathfrak{z}}(\tau)) d\tau, \quad t \in [0, T] \quad \forall \mathfrak{z} \in \mathcal{C}([0, T]; V, H).$$

Для доказательства существования и единственности решения уравнения (3.3.1) нам достаточно показать, что некоторая степень этого оператора является сжимающим отображением.

Прежде всего заметим, что при всех  $\mathfrak{z}^1, \mathfrak{z}^2 \in \mathcal{C}([0, T]; V, H)$

$$\|\Lambda[\mathfrak{z}^1](t) - \Lambda[\mathfrak{z}^2](t)\|_V \leq \int_0^t K_0(\xi) M \sqrt{\|\mathfrak{z}^1(\xi) - \mathfrak{z}^2(\xi)\|_V^2 + \|\dot{\mathfrak{z}}^1(\xi) - \dot{\mathfrak{z}}^2(\xi)\|_H^2} d\xi,$$

$$\left\| \frac{d\Lambda[\mathfrak{z}^1](t)}{dt} - \frac{d\Lambda[\mathfrak{z}^2](t)}{dt} \right\|_H \leq \int_0^t K_0(\xi) M \sqrt{\|\mathfrak{z}^1(\xi) - \mathfrak{z}^2(\xi)\|_V^2 + \|\dot{\mathfrak{z}}^1(\xi) - \dot{\mathfrak{z}}^2(\xi)\|_H^2} d\xi, \quad \forall t \in [0, T],$$

где введено обозначение

$$M \equiv \max\left\{ \sup_{t \in [0, T]} \operatorname{vraisup}_{\tau \in [0, T]} \|\Psi(t, \tau)\|_{H \rightarrow V}, \sup_{t \in [0, T]} \operatorname{vraisup}_{\tau \in [0, T]} \|\Psi_t(t, \tau)\|_{H \rightarrow H} \right\}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} & \sqrt{\|\Lambda[\mathfrak{z}^1](t) - \Lambda[\mathfrak{z}^2](t)\|_V^2 + \left\| \frac{d\Lambda[\mathfrak{z}^1](t)}{dt} - \frac{d\Lambda[\mathfrak{z}^2](t)}{dt} \right\|_H^2} \leq \\ & \leq \int_0^t 2K_0(\xi) M \sqrt{\|\mathfrak{z}^1(\xi) - \mathfrak{z}^2(\xi)\|_V^2 + \|\dot{\mathfrak{z}}^1(\xi) - \dot{\mathfrak{z}}^2(\xi)\|_H^2} d\xi. \end{aligned}$$

Определив функцию  $\sigma: \mathcal{C}([0, T]; V, H) \rightarrow BF[0, T]$  равенством

$$\sigma[y](t) \equiv \sqrt{\|y(t)\|_V^2 + \|\dot{y}(t)\|_H^2}, \quad t \in [0, T],$$

получим, что

$$\sigma[\Lambda[\mathfrak{z}^1] - \Lambda[\mathfrak{z}^2]](t) \leq 2 \int_0^t K_0(\xi) M \sigma[\mathfrak{z}^1 - \mathfrak{z}^2](\xi) d\xi, \quad \forall t \in [0, T].$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sigma[\Lambda^2[\mathfrak{z}^1] - \Lambda^2[\mathfrak{z}^2]](t) &= \sigma[\Lambda[\Lambda_0[\mathfrak{z}^1]] - \Lambda[\Lambda_0[\mathfrak{z}^2]]](t) \leq \int_0^t 2K_0(\xi) M \sigma[\Lambda[\mathfrak{z}^1] - \Lambda[\mathfrak{z}^2]](\xi) d\xi \leq \\ &\leq \int_0^t 2K_0(\xi_1) M \left[ \int_0^{\xi_1} 2K_0(\xi_2) M \sigma[\mathfrak{z}^1 - \mathfrak{z}^2](\xi_2) d\xi_2 \right] d\xi_1 \leq \\ &\leq \sup_{\xi \in [0, T]} \sigma[\mathfrak{z}^1 - \mathfrak{z}^2](\xi) \int_0^t 2K_0(\xi_1) M \left[ \int_0^{\xi_1} 2K_0(\xi_2) M d\xi_2 \right] d\xi_1 = \sup_{\xi \in [0, T]} \sigma[\mathfrak{z}^1 - \mathfrak{z}^2](\xi) \frac{1}{2!} \left[ \int_0^t 2K_0(\xi) M d\xi \right]^2. \end{aligned}$$

Итак,

$$\begin{aligned} \sigma[\Lambda[\mathfrak{z}^1] - \Lambda[\mathfrak{z}^2]](t) &\leq \sup_{\xi \in [0, T]} \sigma[\mathfrak{z}^1 - \mathfrak{z}^2](\xi) \int_0^t 2K_0(\xi) M d\xi, \\ \sigma[\Lambda^2[\mathfrak{z}^1] - \Lambda^2[\mathfrak{z}^2]](t) &\leq \sup_{\xi \in [0, T]} \sigma[\mathfrak{z}^1 - \mathfrak{z}^2](\xi) \frac{1}{2!} \left[ \int_0^t 2K_0(\xi) M d\xi \right]^2 \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Пусть для некоторого  $m \geq 1$  доказано, что

$$\sigma[\Lambda^m[\mathfrak{z}^1] - \Lambda^m[\mathfrak{z}^2]](t) \leq \sup_{\xi \in [0, T]} \sigma[\mathfrak{z}^1 - \mathfrak{z}^2](\xi) \frac{1}{m!} \left[ \int_0^t 2K_0(\xi) M d\xi \right]^m \quad \forall t \in [0, T].$$

Тогда при всех  $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} \sigma[\Lambda^{m+1}[\mathfrak{z}^1] - \Lambda^{m+1}[\mathfrak{z}^2]](t) &= \sigma[\Lambda[\Lambda^m[\mathfrak{z}^1]] - \Lambda[\Lambda^m[\mathfrak{z}^2]]](t) \leq \int_0^t 2K_0(\xi) M \sigma[\Lambda^m[\mathfrak{z}^1] - \Lambda^m[\mathfrak{z}^2]](\xi) d\xi \leq \\ &\leq \int_0^t 2K_0(\xi_1) M \left[ \sup_{\tau \in [0, T]} \sigma[\mathfrak{z}^1 - \mathfrak{z}^2](\tau) \frac{1}{m!} \left[ \int_0^{\xi_1} 2K_0(\xi_2) M d\xi_2 \right]^m \right] d\xi_1 = \\ &= \sup_{\tau \in [0, T]} \sigma[\mathfrak{z}^1 - \mathfrak{z}^2](\tau) \frac{1}{(m+1)!} \left[ \int_0^t 2K_0(\xi) M d\xi \right]^{m+1}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\sigma[\Lambda^m[\mathfrak{z}^1] - \Lambda^m[\mathfrak{z}^2]](t) \leq \sup_{\xi \in [0, T]} \sigma[\mathfrak{z}^1 - \mathfrak{z}^2](\xi) \frac{1}{m!} \left[ \int_0^t 2K_0(\xi) M d\xi \right]^m \quad \forall t \in [0, T], \quad m = 1, 2, \dots$$

Отсюда выводим, что

$$\|\Lambda^m[\mathfrak{z}^1] - \Lambda^m[\mathfrak{z}^2]\|_{\mathfrak{C}([0, T]; V, H)} \leq \frac{1}{m!} \left[ \int_0^T 2K_0(\xi) M d\xi \right]^m \|\mathfrak{z}^1 - \mathfrak{z}^2\|_{\mathfrak{C}([0, T]; V, H)}, \quad m = 1, 2, \dots$$

А это и означает, что некоторая степень оператора  $\Lambda: \mathfrak{C}([0, T]; V, H) \rightarrow \mathfrak{C}([0, T]; V, H)$  является сжатием, что, в силу принципа неподвижной точки Банаха, означает существование единственного решения уравнения (3.3.1).

2) Докажем оценку (3.3.2). В самом деле,

$$\|\mathfrak{z}(t)\|_V \leq \|\omega(t)\|_V + \int_0^t \|\Psi(t, \tau)\|_{H \rightarrow V} \|g(\tau, \mathfrak{z}(\tau), \dot{\mathfrak{z}}(\tau))\|_H d\tau \leq \|\omega\|_{\mathfrak{C}([0, T]; V, H)} + \int_0^t M \|g(\tau, \mathfrak{z}(\tau), \dot{\mathfrak{z}}(\tau))\|_H d\tau.$$

Аналогично получаем, что

$$\|\dot{\mathfrak{z}}(t)\|_H \leq \|\dot{\omega}(t)\|_H + \int_0^t \|\Psi_t(t, \tau)\|_{H \rightarrow H} \|g(\tau, \mathfrak{z}(\tau), \dot{\mathfrak{z}}(\tau))\|_H d\tau \leq \|\omega\|_{\mathfrak{C}([0, T]; V, H)} + \int_0^t M \|g(\tau, \mathfrak{z}(\tau), \dot{\mathfrak{z}}(\tau))\|_H d\tau.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sigma[\mathfrak{z}](t) &\leq 2 \left[ \|\omega\|_{\mathfrak{C}([0, T]; V, H)} + \int_0^t M \|g(\tau, \mathfrak{z}(\tau), \dot{\mathfrak{z}}(\tau))\|_H d\tau \right] \leq 2 \left[ \|\omega\|_{\mathfrak{C}([0, T]; V, H)} + \int_0^t M \|g(\tau, 0, 0)\|_H d\tau \right] + \\ &+ \int_0^t 2M \|g(\tau, \mathfrak{z}(\tau), \dot{\mathfrak{z}}(\tau)) - g(\tau, 0, 0)\|_H d\tau \leq 2 \left[ \|\omega\|_{\mathfrak{C}([0, T]; V, H)} + \int_0^T M \|g(\tau, 0, 0)\|_H d\tau \right] + \int_0^t 2MK_0(\tau) \sigma[\mathfrak{z}](\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Применяя затем лемму 5.1.1, заключаем, что

$$\sigma[\mathfrak{z}](t) \leq 2 \left[ \|\omega\|_{\mathfrak{C}([0, T]; V, H)} + \int_0^T M \|g(\tau, 0, 0)\|_H d\tau \right] \exp \left[ \int_0^T 2K_0(\tau) M d\tau \right] \quad \forall t \in [0, T].$$

Это и означает выполнение оценки (3.3.2) с  $B \equiv 2 \exp(\int_0^T 2K_0(\xi) M d\xi) \max\{1, M\}$ . Теорема полностью доказана. ■

# Глава 4. Сведения из теории меры

## 4.1. Предельный переход под знаком измеримой функции

Пусть  $(X, \Sigma, \mu)$  — конечное положительное пространство с мерой,  $Y \subset \mathbb{R}^k$  — некоторое замкнутое множество,  $\lambda$  — мера Лебега на  $Y$ . Пусть функция  $\Psi: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  измерима относительно произведения мер  $\mu \otimes \lambda$  на  $X \times Y$  и непрерывна по  $y \in Y$  при  $\mu$ -п.в.  $x \in X$ . Пусть, кроме того, для любого  $B > 0$  найдётся постоянная  $\hat{C}(B) > 0$ , такая, что  $|\Psi(x, y)| \leq \hat{C}(B)$  при  $\mu$ -п.в.  $x \in X$  и при всех  $y \in cl(\Pi_B^k(0)) \cap Y$ .

Справедлив следующий результат, являющийся обобщением следствия 2.2.6 на стр.142 монографии [12].

**Лемма 4.1.1.** *Если последовательность  $\mu$ -измеримых функций  $f_i: X \rightarrow Y$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , сходится к функции  $f: X \rightarrow Y$  по мере  $\mu$ , то*

$$\Psi(x, f_i(x)) \rightarrow \Psi(x, f(x)), \quad i \rightarrow \infty,$$

по мере  $\mu$ .

**Доказательство.** Предположим, что утверждение данной леммы неверно. Тогда найдутся положительные числа  $\sigma_0$  и  $\varepsilon_0$ , а также подпоследовательность  $f_{i_j}$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , последовательности  $f_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , такие, что

$$\mu\{x \in X : |\Psi(x, f_{i_j}(x)) - \Psi(x, f(x))| \geq \sigma_0\} > \varepsilon_0, \quad j = 1, 2, \dots \quad (4.1.1)$$

Поскольку последовательность  $f_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , сходится по мере  $\mu$  к функции  $f$ , то и любая её подпоследовательность сходится по мере  $\mu$  к той же функции. В частности, этим свойством обладает и последовательность  $f_{i_j}$ ,  $j = 1, 2, \dots$ . Поскольку последовательность  $f_{i_j}$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , сходится по мере  $\mu$  к функции  $f$ , то можно выделить подпоследовательность  $f_{i_{j_l}}$ ,  $l = 1, 2, \dots$ , последовательности  $f_{i_j}$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , сходящуюся к функции  $f$   $\mu$ -почти всюду на  $X$ . Следовательно,

$$\Psi(x, f_{i_{j_l}}(x)) \rightarrow \Psi(x, f(x)), \quad l \rightarrow \infty,$$

при  $\mu$ -п.в.  $x \in X$ . В силу данного обстоятельства имеет место следующая сходимост по мере  $\mu$ :

$$\Psi(x, f_{i_{j_l}}(x)) \rightarrow \Psi(x, f(x)), \quad l \rightarrow \infty.$$

А это противоречит неравенству (4.1.1). Таким образом, лемма доказана. ■

Дадим следующее

**Определение 4.1.1.** Пусть  $G$  — множество элементов некоторой природы, и пусть при каждом  $g \in G$  заданы  $\mu$ -измеримые функции  $f_i(\cdot, g)$ ,  $f(\cdot, g)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , принимающие значения в  $\mathbb{R}^m$ . Будем говорить, что последовательность функций  $f_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , сходится к функции  $f$  на  $X$  по мере  $\mu$  равномерно по  $g \in G$  и писать  $f_i \xrightarrow[g \in G]{(X, \Sigma, \mu)} f$ ,  $i \rightarrow \infty$ , если

$$\forall \sigma > 0 : \lim_{i \rightarrow \infty} \sup_{g \in G} \mu\{x \in X : |f_i(x, g) - f(x, g)| \geq \sigma\} = 0.$$

**Лемма 4.1.2.** Пусть  $G$  — компактное метрическое пространство с метрикой  $d$ , и пусть функции  $f_i: X \times G \rightarrow Y$ ,  $f: X \times G \rightarrow Y$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , таковы, что  $f_i, f$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , измеримы по  $x \in X$  при всех  $g \in G$  и непрерывны по  $g \in G$  при  $\mu$ -п.в.  $x \in X$ . Пусть, кроме того, выполнено соотношение

$$f_i \xrightarrow[g \in G]{(X, \Sigma, \mu)} f, \quad i \rightarrow \infty, \quad (4.1.2)$$

и найдётся функция  $K: [0, +\infty) \times [0, \text{diam } G] \rightarrow [0, +\infty)$ , такая, что  $\lim_{\delta \rightarrow +0} K(\sigma, \delta) = K(\sigma, 0) = 0$  при всех  $\sigma > 0$ , и

$$\forall \sigma > 0 \forall g', g'' \in G \forall i = 1, 2, \dots : \mu\{x \in X : |f_i(x, g') - f_i(x, g'')| \geq \sigma\} \leq K(\sigma, d(g', g'')). \quad (4.1.3)$$

Тогда

$$\Theta_i \xrightarrow[g \in G]{(X, \Sigma, \mu)} \Theta, \quad i \rightarrow \infty,$$

где  $\Theta_i(x, g) \equiv \Psi(x, f_i(x, g))$ ,  $\Theta(x, g) \equiv \Psi(x, f(x, g))$ ,  $i = 1, 2, \dots$

**Доказательство.** Предположим, что утверждение леммы неверно. Тогда найдутся числа  $\sigma_0, \varepsilon_0 > 0$ , подпоследовательность  $i_j, j = 1, 2, \dots$ , последовательности  $i = 1, 2, \dots$ , и последовательность  $g_j \in G, j = 1, 2, \dots$ , такие, что

$$\mu\{x \in X : |\Psi(x, f_{i_j}(x, g_j)) - \Psi(x, f(x, g_j))| \geq \sigma_0\} \geq \varepsilon_0, \quad j = 1, 2, \dots$$

Поскольку  $G$  — компактное метрическое пространство, то найдутся подпоследовательность  $j_s, s = 1, 2, \dots$ , последовательности  $j = 1, 2, \dots$  и точка  $g^* \in G$ , такие, что  $g_{j_s} \rightarrow g^*, s \rightarrow \infty$ , в  $G$ . Поэтому

$$\mu\{x \in X : |\Psi(x, f_{i_{j_s}}(x, g_{j_s})) - \Psi(x, f(x, g_{j_s}))| \geq \sigma_0\} \geq \varepsilon_0, \quad s = 1, 2, \dots \quad (4.1.4)$$

В силу соотношения (4.1.3) можем записать, что

$$\mu\{x \in X : |f_{i_{j_s}}(x, g_{j_s}) - f_{i_{j_s}}(x, g^*)| \geq \sigma\} \leq K(\sigma, |g_{j_s} - g^*|), \quad s = 1, 2, \dots, \quad \forall \sigma > 0,$$

откуда следует, что имеет место следующая сходимость по мере  $\mu$  на  $X$ :

$$f_{i_{j_s}}(x, g_{j_s}) - f_{i_{j_s}}(x, g^*) \rightarrow 0, \quad s \rightarrow \infty.$$

Поэтому найдётся подпоследовательность  $s_p, p = 1, 2, \dots$ , последовательности  $s = 1, 2, \dots$ , такая, что

$$f_{i_{j_{s_p}}}(x, g_{j_{s_p}}) - f_{i_{j_{s_p}}}(x, g^*) \rightarrow 0, \quad f_{i_{j_{s_p}}}(x, g^*) - f(x, g^*) \rightarrow 0, \quad p \rightarrow \infty,$$

при  $\mu$ -п.в.  $x \in X$ . Следовательно, при  $\mu$ -п.в.  $x \in X$

$$|f_{i_{j_{s_p}}}(x, g_{j_{s_p}}) - f(x, g^*)| \leq |f_{i_{j_{s_p}}}(x, g_{j_{s_p}}) - f_{i_{j_{s_p}}}(x, g^*)| + |f_{i_{j_{s_p}}}(x, g^*) - f(x, g^*)| \rightarrow 0, \quad p \rightarrow \infty.$$

Это означает, что  $\mu$ -п.в.  $x \in X$

$$\Psi(x, f_{i_{j_{s_p}}}(x, g_{j_{s_p}})) - \Psi(x, f(x, g_{j_{s_p}})) \rightarrow 0, \quad p \rightarrow \infty,$$

что противоречит соотношению (4.1.4). Таким образом, лемма доказана. ■

**Лемма 4.1.3.** Если последовательности  $\mu$ -измеримых функций  $f_i^1: X \rightarrow Y, f_i^2: X \rightarrow Y, i = 1, 2, \dots$ , таковы, что  $f_i^1 - f_i^2 \rightarrow 0, i \rightarrow \infty$ , по мере  $\mu$ , и найдётся постоянная  $K > 0$ , такая, что при  $\mu$ -п.в.  $x \in X$  и при всех  $i = 1, 2, \dots$

$$\max\{|f_i^1(x)|, |f_i^2(x)|\} \leq K,$$

то

$$\Psi(\cdot, f_i^1(\cdot)) - \Psi(\cdot, f_i^2(\cdot)) \rightarrow 0, \quad i \rightarrow \infty, \quad \text{по мере } \mu.$$

**Доказательство.** Пусть утверждение леммы неверно. Тогда найдутся числа  $\sigma_0, \varepsilon_0 > 0$ , и подпоследовательность  $i_j, j = 1, 2, \dots$ , последовательности  $i = 1, 2, \dots$ , такие, что

$$\mu\{x \in X : |\Psi(x, f_{i_j}^1(x)) - \Psi(x, f_{i_j}^2(x))| \geq \sigma_0\} \geq \varepsilon_0, \quad j = 1, 2, \dots \quad (4.1.5)$$

Поскольку  $f_i^1 - f_i^2 \rightarrow 0, i \rightarrow \infty$ , по мере  $\mu$ , то найдётся подпоследовательность  $j_p, k = 1, \dots$ , последовательности  $j = 1, 2, \dots$ , такая, что

$$f_{i_{j_p}}^1(x) - f_{i_{j_p}}^2(x) \rightarrow 0, \quad p \rightarrow \infty, \quad \mu\text{-п.в.} \quad (4.1.6)$$

Выберем  $x \in X$  так, чтобы  $\Psi(x, \cdot)$  была непрерывна на  $Y \cap \text{cl}\Pi_K^k(0)$  и выполнялось (4.1.6), а затем зафиксируем. Так как  $\Psi(x, \cdot)$  — непрерывна на  $Y \cap \text{cl}\Pi_K^k(0)$ , то

$$\forall \eta > 0 \exists \delta = \delta(\eta) > 0 \forall y', y'' \in Y \cap \text{cl}\Pi_K^k(0), \quad |y' - y''| < \delta : |\Psi(x, y') - \Psi(x, y'')| < \eta. \quad (4.1.7)$$

Ввиду (4.1.6)

$$\forall \delta > 0 \exists p_0 = p_0(\delta) \geq 1 \forall p \geq p_0(\delta) : |f_{i_{j_p}}^1(x) - f_{i_{j_p}}^2(x)| < \delta. \quad (4.1.8)$$

Выберем  $\eta > 0$  и зафиксируем. Подберём по выбранному  $\eta > 0$  число  $\delta(\eta) > 0$  согласно (4.1.7). По выбранному  $\delta = \delta(\eta) > 0$  найдём номер  $\tilde{p}_0(\eta) \equiv p_0(\delta(\eta)) \geq 1$  согласно (4.1.8). Как следствие,

$$|\Psi(x, f_{i_{j_p}}^1(x)) - \Psi(x, f_{i_{j_p}}^2(x))| < \eta \quad \forall p \geq \tilde{p}_0(\eta).$$

Иными словами,

$$\Psi(x, f_{i_{j_p}}^1(x)) - \Psi(x, f_{i_{j_p}}^2(x)) \rightarrow 0, \quad p \rightarrow \infty.$$

В силу способа выбора точки  $x \in X$  это означает, что

$$\Psi(x, f_{i_{j_p}}^1(x)) - \Psi(x, f_{i_{j_p}}^2(x)) \rightarrow 0, \quad p \rightarrow \infty, \quad \mu\text{-п.в.},$$

что противоречит соотношению (4.1.5). Лемма доказана. ■

**Лемма 4.1.4.** Пусть функция  $\Psi$  при  $\mu$ -п.в.  $x \in X$  равномерно непрерывна на  $Y$ . Если последовательности  $\mu$ -измеримых функций  $f_i^1: X \rightarrow Y$ ,  $f_i^2: X \rightarrow Y$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , таковы, что  $f_i^1 - f_i^2 \rightarrow 0$ ,  $i \rightarrow \infty$ , по мере  $\mu$ , то

$$\Psi(\cdot, f_i^1(\cdot)) - \Psi(\cdot, f_i^2(\cdot)) \rightarrow 0, \quad i \rightarrow \infty, \quad \text{по мере } \mu.$$

**Доказательство.** Предположим, что утверждение леммы неверно. Тогда найдутся числа  $\sigma_0, \varepsilon_0 > 0$ , и подпоследовательность  $i_j, j = 1, 2, \dots$ , последовательности  $i = 1, 2, \dots$ , такие, что

$$\mu\{x \in X : |\Psi(x, f_{i_j}^1(x)) - \Psi(x, f_{i_j}^2(x))| \geq \sigma_0\} \geq \varepsilon_0, \quad j = 1, 2, \dots \quad (4.1.9)$$

Поскольку  $f_i^1 - f_i^2 \rightarrow 0$ ,  $i \rightarrow \infty$ , по мере  $\mu$ , то найдётся подпоследовательность  $j_l, l = 1, \dots$ , последовательности  $j = 1, 2, \dots$ , такая, что

$$f_{i_{j_l}}^1(x) - f_{i_{j_l}}^2(x) \rightarrow 0, \quad l \rightarrow \infty, \quad \mu\text{-п.в.} \quad (4.1.10)$$

Выберем  $x \in X$  так, чтобы  $\Psi(x, \cdot)$  была непрерывна на  $Y$  и выполнялось (4.1.10), а затем зафиксируем. Так как  $\Psi(x, \cdot)$  равномерно непрерывна на  $Y$ , то

$$\forall \eta > 0 \exists \delta = \delta(\eta) > 0 \forall y', y'' \in Y, \quad |y' - y''| < \delta : |\Psi(x, y') - \Psi(x, y'')| < \eta. \quad (4.1.11)$$

Ввиду (4.1.10)

$$\forall \delta > 0 \exists l_0 = l_0(\delta) \geq 1 \forall l \geq l_0(\delta) : |f_{i_{j_l}}^1(g) - f_{i_{j_l}}^2(g)| < \delta. \quad (4.1.12)$$

Выберем  $\eta > 0$  и зафиксируем. Подберём по выбранному  $\eta > 0$  число  $\delta(\eta) > 0$  согласно (4.1.11). По выбранному  $\delta = \delta(\eta) > 0$  найдём номер  $\tilde{l}_0(\eta) \equiv l_0(\delta(\eta)) \geq 1$  согласно (4.1.12). Как следствие,

$$|\Psi(x, f_{i_{j_l}}^1(x)) - \Psi(x, f_{i_{j_l}}^2(x))| < \eta \quad \forall l \geq \tilde{l}_0(\eta).$$

Иными словами,

$$\Psi(x, f_{i_{j_l}}^1(x)) - \Psi(x, f_{i_{j_l}}^2(x)) \rightarrow 0, \quad l \rightarrow \infty.$$

В силу способа выбора точки  $x \in X$  это означает, что

$$\Psi(x, f_{i_{j_l}}^1(x)) - \Psi(x, f_{i_{j_l}}^2(x)) \rightarrow 0, \quad l \rightarrow \infty, \quad \mu\text{-п.в.},$$

что противоречит соотношению (4.1.9). Лемма доказана. ■

**Лемма 4.1.5.** Пусть  $\Pi \subset \mathbb{R}^{m_1}$  — множество, имеющее конечную положительную меру Лебега; а функция  $F: \Pi \times \mathbb{R}^{m_2} \rightarrow \mathbb{R}^{m_3}$  такова, что  $F(\cdot, y)$  — измерима по Лебегу при всех  $y \in \mathbb{R}^{m_2}$ ,  $F(x, \cdot)$  — непрерывна при п.в.  $x \in \Pi$ , и для любого  $B > 0$  найдётся постоянная  $\mathfrak{C}(B) > 0$ , такая, что  $|F(x, y)| \leq \mathfrak{C}(B)$  при п.в.  $x \in \Pi$  и при всех  $y \in \text{cl} \Pi_B^{m_2}(0)$ .

Тогда если последовательности равномерно ограниченных в норме  $L_\infty^{m_2}(\Pi)$  функций  $f_i^1, f_i^2, i = 1, 2, \dots$ , таковы, что  $f_i^1 - f_i^2 \rightarrow 0, i \rightarrow \infty$ , по мере Лебега, то при всех  $p \in [1, +\infty)$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|F(\cdot, f_i^1(\cdot)) - F(\cdot, f_i^2(\cdot))\|_{p, \Pi} = 0.$$

**Доказательство.** Согласно лемме 4.1.3,

$$|F(x, f_i^1(x)) - F(x, f_i^2(x))|^p \rightarrow 0, \quad i \rightarrow \infty, \quad \text{по мере Лебега на } \Pi.$$

Из данного соотношения, справедливой при п.в.  $x \in \Pi$  и всех  $i = 1, 2, \dots$  оценки

$$|F(x, f_i^1(x)) - F(x, f_i^2(x))|^p \leq (2\mathfrak{C}(K))^p$$

и теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла Лебега, и следует утверждение настоящей леммы. Лемма доказана. ■

**Лемма 4.1.6.** Пусть  $G$  — топологическое пространство, и пусть функции  $f_i^1: X \times G \rightarrow Y$ ,  $f_i^2: X \times G \rightarrow Y$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , таковы, что  $f_i^1, f_i^2$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , измеримы по  $x \in X$  при всех  $g \in G$  и непрерывны по  $g \in G$  при  $\mu$ -п.в.  $x \in X$ . Пусть, кроме того, выполнено соотношение

$$f_i^1 - f_i^2 \xrightarrow[g \in G]{(X, \Sigma, \mu)} 0, \quad i \rightarrow \infty, \quad (4.1.13)$$

и найдётся постоянная  $K > 0$ , такая, что при  $\mu$ -п.в.  $x \in X$  и при всех  $i = 1, 2, \dots$

$$\max_{g \in G} \max\{|f_i^1(x, g)|, |f_i^2(x, g)|\} \leq K,$$

Тогда

$$\Theta_i \xrightarrow[g \in G]{(X, \Sigma, \mu)} 0, \quad i \rightarrow \infty,$$

где  $\Theta_i(x, g) \equiv \Psi(x, f_i^1(x, g)) - \Psi(x, f_i^2(x, g))$ ,  $i = 1, 2, \dots$

**Доказательство.** Предположим, что утверждение леммы неверно. Тогда найдутся положительные числа  $\sigma_0$  и  $\varepsilon_0$ , а также подпоследовательность  $i_j$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , последовательности  $j = 1, 2, \dots$ , и последовательность  $g_j \in G$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , такие, что

$$\mu\{x \in X : |\Psi(x, f_{i_j}^1(x, g_j)) - \Psi(x, f_{i_j}^2(x, g_j))| \geq \sigma_0\} \geq \varepsilon_0, \quad j = 1, 2, \dots \quad (4.1.14)$$

Поскольку  $f_i^1 - f_i^2 \xrightarrow[g \in G]{(X, \Sigma, \mu)} 0$ ,  $i \rightarrow \infty$ , то  $f_{i_j}^1 - f_{i_j}^2 \xrightarrow[g \in G]{(X, \Sigma, \mu)} 0$ ,  $j \rightarrow \infty$ , ввиду чего

$$\forall \delta > 0 : \mu\{x \in X : |f_{i_j}^1(x, g_j) - f_{i_j}^2(x, g_j)| \geq \delta\} \leq \sup_{g \in G} \mu\{x \in X : |f_{i_j}^1(x, g) - f_{i_j}^2(x, g)| \geq \delta\} \rightarrow 0, \quad j \rightarrow \infty.$$

Следовательно,

$$f_{i_j}^1(\cdot, g_j) - f_{i_j}^2(\cdot, g_j) \rightarrow 0, \quad j \rightarrow \infty, \quad \text{по мере } \mu.$$

Пользуясь теперь леммой 4.1.3, получаем, что

$$\Theta_{i_j} \xrightarrow[g \in G]{(X, \Sigma, \mu)} 0, \quad j \rightarrow \infty,$$

а это противоречит соотношению (4.1.14). Лемма доказана. ■

**Лемма 4.1.7.** Предположим, что функция  $\Psi$  при  $\mu$ -п.в.  $x \in X$  равномерно непрерывна на  $Y$ . Пусть  $G$  — топологическое пространство, и пусть функции  $f_i^1: X \times G \rightarrow Y$ ,  $f_i^2: X \times G \rightarrow Y$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , таковы, что  $f_i^1, f_i^2$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , измеримы по  $x \in X$  при всех  $g \in G$  и непрерывны по  $g \in G$  при  $\mu$ -п.в.  $x \in X$ . Пусть, кроме того, выполнено соотношение

$$f_i^1 - f_i^2 \xrightarrow[g \in G]{(X, \Sigma, \mu)} 0, \quad i \rightarrow \infty. \quad (4.1.15)$$

Тогда

$$\Theta_i \xrightarrow[g \in G]{(X, \Sigma, \mu)} 0, \quad i \rightarrow \infty,$$

где  $\Theta_i(x, g) \equiv \Psi(x, f_i^1(x, g)) - \Psi(x, f_i^2(x, g))$ ,  $i = 1, 2, \dots$

**Доказательство.** Предположим, что утверждение леммы неверно. Тогда найдутся положительные числа  $\sigma_0$  и  $\varepsilon_0$ , а также подпоследовательность  $i_j$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , последовательности  $j = 1, 2, \dots$ , и последовательность  $g_j \in G$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , такие, что

$$\mu\{x \in X : |\Psi(x, f_{i_j}^1(x, g_j)) - \Psi(x, f_{i_j}^2(x, g_j))| \geq \sigma_0\} \geq \varepsilon_0, \quad j = 1, 2, \dots \quad (4.1.16)$$

Поскольку  $f_i^1 - f_i^2 \xrightarrow[g \in G]{(X, \Sigma, \mu)} 0$ ,  $i \rightarrow \infty$ , то  $f_{i_j}^1 - f_{i_j}^2 \xrightarrow[g \in G]{(X, \Sigma, \mu)} 0$ ,  $j \rightarrow \infty$ , ввиду чего

$$\forall \delta > 0 : \mu\{x \in X : |f_{i_j}^1(x, g_j) - f_{i_j}^2(x, g_j)| \geq \delta\} \leq \sup_{g \in G} \mu\{x \in X : |f_{i_j}^1(x, g) - f_{i_j}^2(x, g)| \geq \delta\} \rightarrow 0, \quad j \rightarrow \infty.$$

Следовательно,

$$f_{i_j}^1(\cdot, g_j) - f_{i_j}^2(\cdot, g_j) \rightarrow 0, \quad j \rightarrow \infty, \quad \text{по мере } \mu.$$

Пользуясь теперь леммой 4.1.4, получаем, что

$$\Theta_{i_j} \stackrel{(X, \Sigma, \mu)}{\Rightarrow}_{g \in G} 0, \quad j \rightarrow \infty,$$

а это противоречит соотношению (4.1.16). Лемма доказана. ■

## 4.2. Предельный переход под знаком интеграла Лебега

Пусть  $(X, \Sigma, \mu)$  — конечное положительное пространство с мерой  $\mu$ .

**Определение 4.2.1.** [12, определение 4.5.1 на стр.310] Множество функций  $\mathcal{F} \subset L_1(X, \Sigma, \mu)$  называется равномерно интегрируемым, если

$$\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \sup_{f \in \mathcal{F}} \int_{\{x \in X : |f(x)| > \sigma\}} |f(x)| \mu(dx) = 0.$$

**Определение 4.2.2.** [12, определение 4.5.2 на стр.311] Говорят, что множество  $\mathcal{F} \subset L_1(X, \Sigma, \mu)$  имеет равномерно абсолютно непрерывные интегралы, если для всякого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ , что для всех  $A \in \Sigma$ ,  $\mu(A) < \delta$ , выполнено неравенство

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \int_A |f(x)| \mu(dx) < \varepsilon.$$

**Лемма 4.2.1.** [12, предложение 4.5.3 на стр.311] Множество  $\mathcal{F}$   $\mu$ -интегрируемых функций равномерно интегрируемо в точности тогда, когда оно ограничено в  $L_1(X, \Sigma, \mu)$  и имеет равномерно абсолютно непрерывные интегралы. Если же мера  $\mu$  не имеет атомов, то равномерная интегрируемость равносильна равномерной абсолютной непрерывности интегралов.

Из доказательства предложения 4.5.3 на стр.311 монографии [12] следует

**Лемма 4.2.2.** Если мера  $\mu$  не имеет атомов, то равномерная абсолютная непрерывность интегралов функций семейства  $\mathcal{F} \subset L_1(X, \Sigma, \mu)$  влечёт ограниченность функций этого семейства в норме пространства  $L_1(X, \Sigma, \mu)$ .

**Лемма 4.2.3.** [12, теорема 4.5.4 на стр.312] (Теорема Лебега–Витали) Предположим, что  $f$  —  $\mu$ -измеримая функция, а  $f_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , — последовательность  $\mu$ -интегрируемых функций. Тогда следующие утверждения равносильны:

- 1) последовательность  $f_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , сходится к  $f$  по мере  $\mu$  и равномерно интегрируема;
- 2) функция  $f$  интегрируема и последовательность  $f_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , сходится к  $f$  в  $L_1(X, \Sigma, \mu)$ .

В дальнейшем нам потребуется также следующий результат, являющийся обобщением классической теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла Лебега.

**Лемма 4.2.4.** Пусть  $G$  — секвенциально компактное топологическое пространство. Пусть функции  $f_i: X \times G \rightarrow R^m$ ,  $f: X \times G \rightarrow R^m$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , таковы, что  $f_i(\cdot, g)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , измеримы при всех  $g \in G$ ;  $f_i(x, \cdot)$ ,  $f(x, \cdot)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , — секвенциально непрерывны на  $G$ ; и, кроме того,

$$f_i \stackrel{(X, \Sigma, \mu)}{\Rightarrow}_{g \in G} f, \quad i \rightarrow \infty$$

Если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \forall A \in \Sigma, \mu(A) < \delta : \sup_{i \geq 1} \sup_{g \in G} \int_A |f_i(x, g)| \mu(dx) < \varepsilon, \quad (4.2.1)$$

$$\sup_{i \geq 1} \sup_{g \in G} \int_X |f_i(x, g)| \mu(dx) \leq C, \quad (4.2.2)$$



для некоторой положительной постоянной  $C > 0$ , то функция  $f(\cdot, g)$   $\mu$ -интегрируема при всех  $g \in G$ , причём

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sup_{g \in G} \left| \int_X f_i(x, g) \mu(dx) - \int_X f(x, g) \mu(dx) \right| = 0. \quad (4.2.3)$$

Кроме того,  $\lim_{i \rightarrow \infty} \sup_{g \in G} \int_X |f(x, g) - f_i(x, g)| \mu(dx) = 0$ .

**Доказательство.** Функция  $f(\cdot, g)$   $\mu$ -измерима при всех  $g \in G$ , поскольку является пределом сходящейся по мере  $\mu$  последовательности  $\mu$ -измеримых функций. Заметим, что  $\mu$ -интегрируемость функции  $f(\cdot, g)$  при всех  $g \in G$  следует из леммы Фату и оценки (4.2.2). При этом справедливо неравенство

$$\sup_{g \in G} \int_X |f(x, g)| \mu(dx) \leq C.$$

Для всех  $\sigma > 0$ ,  $g \in G$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , положим  $X^i(\sigma, g) \equiv \{x \in X : |f_i(x, g) - f(x, g)| \geq \sigma\}$ . Тогда, в силу условия леммы,

$$\forall \sigma > 0 \forall \delta > 0 \exists i_0 = i_0(\delta, \sigma) \geq 1, \forall i \geq i_0(\delta, \sigma) : \sup_{g \in G} \mu(X^i(\sigma, g)) \leq \delta. \quad (4.2.4)$$

Покажем, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \eta = \eta(\varepsilon) > 0 \forall A \in \Sigma, \mu(A) < \eta(\varepsilon) : \sup_{g \in G} \int_A |f(x, g)| \mu(dx) < \varepsilon. \quad (4.2.5)$$

В самом деле, пусть это не так. Тогда

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \forall \eta > 0 \exists A_\eta \in \Sigma, \mu(A_\eta) < \eta \exists g_\eta \in G : \int_{A_\eta} |f(x, g_\eta)| \mu(dx) \geq \varepsilon_0.$$

Пусть  $\eta_m > 0$ ,  $m = 1, 2, \dots$ ,  $\eta_m \rightarrow 0$ ,  $m \rightarrow \infty$ , — некоторая последовательность чисел. Тогда получаем, что

$$\mu(A_{\eta_m}) \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty; \quad \int_{A_{\eta_m}} |f(x, g_{\eta_m})| \mu(dx) \geq \varepsilon_0, \quad m = 1, 2, \dots$$

Поскольку  $G$  — секвенциально компактное топологическое пространство, то найдутся подпоследовательность  $m_s$ ,  $s = 1, 2, \dots$ , последовательности  $m = 1, 2, \dots$  и точка  $g^* \in G$ , такие, что  $g_{\eta_{m_s}} \rightarrow g^*$ ,  $s \rightarrow \infty$ , в  $G$ . Поэтому

$$f(x, g_{\eta_{m_s}}) \rightarrow f(x, g^*), \quad s \rightarrow \infty, \quad \text{при } \mu\text{-п.в. } x \in X,$$

откуда в силу секвенциальной непрерывности  $f$  на  $G$  следует, что

$$\int_X |f(x, g_{\eta_{m_s}}) - f(x, g^*)| \mu(dx) \rightarrow 0, \quad s \rightarrow \infty. \quad (4.2.6)$$

Таким образом,

$$\varepsilon_0 \leq \int_{A_{\eta_{m_s}}} |f(x, g_{\eta_{m_s}})| \mu(dx) \leq \int_X |f(x, g_{\eta_{m_s}}) - f(x, g^*)| \mu(dx) + \int_{A_{\eta_{m_s}}} |f(x, g^*)| \mu(dx).$$

Переходя здесь к пределу при  $s \rightarrow \infty$  и пользуясь соотношением (4.2.6) и абсолютной непрерывностью интеграла Лебега, заключаем, что  $0 < \varepsilon_0 \leq 0$ , что невозможно. Следовательно, соотношение (4.2.5) доказано.

Далее,

$$\begin{aligned} & \sup_{g \in G} \left| \int_X f_i(x, g) \mu(dx) - \int_X f(x, g) \mu(dx) \right| \leq \sup_{g \in G} \int_X |f_i(x, g) - f(x, g)| \mu(dx) \leq \\ & \leq \sup_{g \in G} \int_{X^i(\sigma, g)} |f_i(x, g) - f(x, g)| \mu(dx) + \sup_{g \in G} \int_{X \setminus X^i(\sigma, g)} |f_i(x, g) - f(x, g)| \mu(dx) \leq \\ & \leq \sup_{g \in G} \int_{X^i(\sigma, g)} |f_i(x, g)| \mu(dx) + \sup_{g \in G} \int_{X^i(\sigma, g)} |f(x, g)| \mu(dx) + \sigma \mu(X). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \sup_{g \in G} \left| \int_X f_i(x, g) \mu(dx) - \int_X f(x, g) \mu(dx) \right| &\leq \sup_{g \in G} \int_X |f_i(x, g) - f(x, g)| \mu(dx) \leq \\ &\leq \sup_{g \in G} \int_{X^i(\sigma, g)} |f_i(x, g)| \mu(dx) + \sup_{g \in G} \int_{X^i(\sigma, g)} |f(x, g)| \mu(dx) + \sigma \mu(X). \end{aligned}$$

Выберем произвольно  $\varepsilon > 0$  и зафиксируем. Положим  $\sigma = \sigma_0 = \frac{\varepsilon}{3\mu(X)}$  и подберём  $\delta = \delta(\frac{\varepsilon}{3}) > 0$  согласно (4.2.1). Найдём затем  $i_1 = i_0(\delta(\frac{\varepsilon}{3}), \sigma_0) \geq 1$  в соответствии с (4.2.4). Тогда получим, что

$$\sup_{g \in G} \int_{X^i(\sigma, g)} |f_i(x, g)| \mu(dx) \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall i \geq i_1.$$

Подберём  $\eta = \eta(\frac{\varepsilon}{3}) > 0$  согласно (4.2.5) и найдём  $i_2 = i_0(\eta(\frac{\varepsilon}{3}), \sigma_0) \geq 1$  из (4.2.4). Положив  $i^* = \max\{i_1, i_2\}$ , будем иметь

$$\sup_{g \in G} \int_{X^i(\sigma, g)} |f_i(x, g)| \mu(dx) \leq \frac{\varepsilon}{3}, \quad \sup_{g \in G} \int_{X^i(\sigma, g)} |f(x, g)| \mu(dx) \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall i \geq i^*.$$

Как следствие,

$$\begin{aligned} \sup_{g \in G} \left| \int_X f_i(x, g) \mu(dx) - \int_X f(x, g) \mu(dx) \right| &\leq \sup_{g \in G} \int_X |f_i(x, g) - f(x, g)| \mu(dx) \leq \\ &\leq \sup_{g \in G} \int_{X^i(\sigma_0, g)} |f_i(x, g)| \mu(dx) + \sup_{g \in G} \int_{X^i(\sigma_0, g)} |f(x, g)| \mu(dx) + \sigma \mu(X) \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

при всех  $i \geq i^*$ . Лемма доказана. ■

**Следствие 4.2.1.** Если выполнены условия лемм 4.1.3 или 4.1.4, и, кроме того, семейства функций

$$\begin{aligned} X \ni x &\mapsto \Psi(x, f_i^1(x)), \quad i = 1, 2, \dots, \\ X \ni x &\mapsto \Psi(x, f_i^2(x)), \quad i = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

равномерно интегрируемы, то

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left| \int_X \Psi(x, f_i^1(x)) \mu(dx) - \int_X \Psi(x, f_i^2(x)) \mu(dx) \right| = 0.$$

Кроме того,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_X |\Psi(x, f_i^1(x)) - \Psi(x, f_i^2(x))| \mu(dx) = 0.$$

**Следствие 4.2.2.** Если выполнены условия лемм 4.1.6 или 4.1.7, и, кроме того, семейства функций

$$\begin{aligned} X \ni x &\mapsto \Psi(x, f_i^1(x, g)), \quad g \in G, \quad i = 1, 2, \dots, \\ X \ni x &\mapsto \Psi(x, f_i^2(x, g)), \quad g \in G, \quad i = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

равномерно интегрируемы, то

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sup_{g \in G} \left| \int_X \Psi(x, f_i^1(x, g)) \mu(dx) - \int_X \Psi(x, f_i^2(x, g)) \mu(dx) \right| = 0.$$

Кроме того,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sup_{g \in G} \int_X |\Psi(x, f_i^1(x, g)) - \Psi(x, f_i^2(x, g))| \mu(dx) = 0.$$

**Лемма 4.2.5.** Если последовательность почти всюду (на  $[0, T]$ ) неотрицательных функций  $\varphi_j \in L_2[0, T]$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , слабо в  $L_2[0, T]$  сходится к функции  $\varphi \in L_2[0, T]$ , то функция  $\varphi$  также почти всюду неотрицательна, причём

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|\varphi_j\|_{1, [0, T]} = \|\varphi\|_{1, [0, T]}. \quad (4.2.7)$$

**Доказательство.** Пусть  $\mathcal{A} \subseteq [0, T]$  — произвольное измеримое по Лебегу множество. Поскольку последовательность  $\varphi_j$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , слабо в  $L_2[0, T]$  сходится к функции  $\varphi$ , то

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_0^T \varphi_j(t) \chi_{\mathcal{A}}(t) dt = \int_0^T \varphi(t) \chi_{\mathcal{A}}(t) dt,$$

где  $\chi_{\mathcal{A}}$  — характеристическая функция множества  $\mathcal{A}$ . Таким образом,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{A}} \varphi_j(t) dt = \int_{\mathcal{A}} \varphi(t) dt \quad \forall \mathcal{A} \subseteq [0, T]. \quad (4.2.8)$$

Отсюда, ввиду неотрицательности функций  $\varphi_j \in L_2[0, T]$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , почти всюду на  $[0, T]$ , вытекает, что

$$\int_{\mathcal{A}} \varphi(t) dt \geq 0 \quad \forall \mathcal{A} \subseteq [0, T]. \quad (4.2.9)$$

Покажем, что функция  $\varphi$  неотрицательна почти всюду на  $[0, T]$ . В самом деле, пусть это не так. Тогда найдутся множество  $\mathcal{A} \subseteq [0, T]$ , имеющее положительную меру Лебега, и положительное число  $\beta > 0$ , такие, что

$$\varphi(t) \leq -\beta \quad \text{при п.в. } t \in \mathcal{A}.$$

Следовательно,

$$\int_{\mathcal{A}} \varphi(t) dt \leq -\beta \operatorname{meas} \mathcal{A} < 0,$$

что противоречит соотношению (4.2.9). Итак, неотрицательность функции  $\varphi$  почти всюду на  $[0, T]$  доказана.

Что же касается предельного соотношения (4.2.7), то оно является следствием соотношения (4.2.8). Лемма полностью доказана. ■

Из данной леммы вытекает

**Следствие 4.2.3.** Если последовательность функций  $\varphi_j \in L_2^m[0, T]$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , все компоненты которых неотрицательны почти всюду на  $[0, T]$ , слабо в  $L_2^m[0, T]$  сходится к функции  $\varphi \in L_2^m[0, T]$ , то все компоненты функции  $\varphi$  также неотрицательны почти всюду на  $[0, T]$ , причём

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|\varphi_j\|_{1, [0, T]} = \|\varphi\|_{1, [0, T]}.$$

**Лемма 4.2.6.** Пусть  $\Pi \subset \mathbb{R}^{m_1}$  — ограниченное множество, мера Лебега которого конечна и положительна;  $\mathbf{U} \subset \mathbb{R}^{m_2}$  — компакт;  $\mathbf{D} \equiv \{\mathbf{u} \in L_{\infty}^{m_2}(\Pi) : \mathbf{u}(x) \in \mathbf{U} \text{ при п.в. } x \in \Pi\}$ . Наконец, пусть функция  $\varphi: \Pi \times \mathbf{U} \rightarrow \mathbb{R}$  измерима (в смысле Лебега) по совокупности всех своих переменных, при п.в.  $x \in \Pi$  функция  $\varphi(x, \cdot)$  непрерывна на  $\mathbf{U}$ , и найдётся постоянная положительная постоянная  $K$ , такая, что  $|\varphi(x, v)| \leq K$  при всех  $(x, v) \in \Pi \times \mathbf{U}$ . Тогда

$$\min_{\mathbf{u}(\cdot) \in \mathbf{D}} \int_{\Pi} \varphi(x, \mathbf{u}(x)) dx = \int_{\Pi} \min_{v \in \mathbf{U}} \varphi(x, v) dx.$$

**Доказательство.** В самом деле, нетрудно видеть, что при всех  $\mathbf{u}(\cdot) \in \mathbf{D}$

$$\int_{\Pi} \varphi(x, \mathbf{u}(x)) dx \geq \int_{\Pi} \min_{v \in \mathbf{U}} \varphi(x, v) dx.$$

Переходя здесь к точной нижней грани по  $\mathbf{u}(\cdot) \in \mathbf{D}$ , получаем, что

$$\min_{\mathbf{u}(\cdot) \in \mathbf{D}} \int_{\Pi} \varphi(x, \mathbf{u}(x)) dx \geq \int_{\Pi} \min_{v \in \mathbf{U}} \varphi(x, v) dx. \quad (4.2.10)$$

Обозначим через  $\mathbf{u}_{\min}(\cdot)$  функцию из  $\mathbf{D}$ , удовлетворяющую соотношению

$$\varphi(x, \mathbf{u}_{\min}(x)) = \min_{v \in \mathbf{U}} \varphi(x, v) \text{ при п.в. } x \in \Pi.$$

Тогда из соотношения (4.2.10) выводим, что

$$\min_{\mathbf{u}(\cdot) \in \mathbf{D}} \int_{\Pi} \varphi(x, \mathbf{u}(x)) dx \geq \int_{\Pi} \varphi(x, \mathbf{u}_{\min}(x)) dx,$$

что, ввиду включения  $\mathbf{u}_{\min}(\cdot) \in \mathbf{D}$ , может выполняться лишь в случае, когда

$$\min_{\mathbf{u}(\cdot) \in \mathbf{D}} \int_{\Pi} \varphi(x, \mathbf{u}(x)) dx = \int_{\Pi} \varphi(x, \mathbf{u}_{\min}(x)) dx.$$

Из данного равенства и определения функции  $\mathbf{u}_{\min}(\cdot)$  и вытекает утверждение леммы. Лемма доказана. ■

**Лемма 4.2.7.** Пусть  $\Pi \subset \mathbb{R}^{m_1}$  — ограниченное множество, мера Лебега которого конечна и положительна;  $\mathbf{U} \subset \mathbb{R}^{m_2}$  — компакт;  $\mathbf{D} \equiv \{\mathbf{u} \in L_{\infty}^{m_2}(\Pi) : \mathbf{u}(x) \in \mathbf{U} \text{ при п.в. } x \in \Pi\}$ . Пусть функция  $\varphi: \Pi \times \mathbf{U} \rightarrow \mathbb{R}$  измерима (в смысле Лебега) по совокупности всех своих переменных, при п.в.  $x \in \Pi$  функция  $\varphi(x, \cdot)$  непрерывна на  $\mathbf{U}$ , и найдётся постоянная положительная постоянная  $K$ , такая, что  $|\varphi(x, v)| \leq K$  при всех  $(x, v) \in \Pi \times \mathbf{U}$ . Наконец, пусть  $\mathbf{u}_0(\cdot) \in \mathbf{D}$  — некоторая функция. Тогда соотношения

$$\min_{\mathbf{u}(\cdot) \in \mathbf{D}} \int_{\Pi} \varphi(x, \mathbf{u}(x)) dx = \int_{\Pi} \varphi(x, \mathbf{u}_0(x)) dx \quad (4.2.11)$$

и

$$\varphi(x, \mathbf{u}_0(x)) = \min_{v \in \mathbf{U}} \varphi(x, v) \text{ при п.в. } x \in \Pi. \quad (4.2.12)$$

эквивалентны.

**Доказательство.** 1) Пусть выполнено соотношение (4.2.11). Тогда, на основании леммы 4.2.6,

$$\min_{\mathbf{u}(\cdot) \in \mathbf{D}} \int_{\Pi} \varphi(x, \mathbf{u}(x)) dx = \int_{\Pi} \min_{v \in \mathbf{U}} \varphi(x, v) dx.$$

Следовательно,

$$\int_{\Pi} \varphi(x, \mathbf{u}_0(x)) dx = \min_{\mathbf{u}(\cdot) \in \mathbf{D}} \int_{\Pi} \varphi(x, \mathbf{u}(x)) dx = \int_{\Pi} \min_{v \in \mathbf{U}} \varphi(x, v) dx.$$

Иными словами,

$$\int_{\Pi} [\varphi(x, \mathbf{u}_0(x)) - \min_{v \in \mathbf{U}} \varphi(x, v)] dx = 0.$$

А поскольку подынтегральная функция в полученном выражении неотрицательна, то выполнено соотношение (4.2.12). Итак, из выполнения соотношения (4.2.11) следует выполнение соотношения (4.2.12).

2) Пусть теперь выполнено соотношение (4.2.12). Интегрируя (4.2.12) по  $x \in \Pi$ , будем иметь

$$\int_{\Pi} \varphi(x, \mathbf{u}_0(x)) dx = \int_{\Pi} \min_{v \in \mathbf{U}} \varphi(x, v) dx.$$

Так как на основании леммы 4.2.6

$$\min_{\mathbf{u}(\cdot) \in \mathbf{D}} \int_{\Pi} \varphi(x, \mathbf{u}(x)) dx = \int_{\Pi} \min_{v \in \mathbf{U}} \varphi(x, v) dx,$$

то

$$\int_{\Pi} \varphi(x, \mathbf{u}_0(x)) dx = \int_{\Pi} \min_{v \in \mathbf{U}} \varphi(x, v) dx = \min_{\mathbf{u}(\cdot) \in \mathbf{D}} \int_{\Pi} \varphi(x, \mathbf{u}(x)) dx.$$

Иначе говоря, выполнено соотношение (4.2.11). Таким образом, из выполнения соотношения (4.2.12) следует выполнение соотношения (4.2.11). Лемма полностью доказана. ■

### 4.3. Точки Лебега и максимальные функции

**Лемма 4.3.1.** [54] Если функция  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  — локально суммируема, то справедливо равенство

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\text{meas } \Pi_r^n(x)} \int_{\Pi_r^n(x)} f(y) dy = f(x) \text{ для п.в. } x \in \mathbb{R}^n.$$

**Определение 4.3.1.** [54] Пусть дана функция  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Максимальной функцией  $(Mf)$  функции  $f$  называется функция

$$(Mf)(x) \equiv \sup_{r > 0} \frac{1}{\text{meas } \Pi_r^n(x)} \int_{\Pi_r^n(x)} |f(y)| dy, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Справедлива следующая

**Лемма 4.3.2.** [54] Пусть дана функция  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

1) Если  $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ , где  $p \in [1, \infty]$ , то  $(Mf)$  — п.в. конечна.

2) Если  $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ , то

$$\forall \alpha > 0 : \text{meas}\{x \in \mathbb{R}^n : (Mf)(x) > \alpha\} \leq \frac{\tilde{A}}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx,$$

где  $\tilde{A} > 0$  — константа, зависящая только от размерности  $n$  (например, можно взять  $\tilde{A} = 5^n$ ).

3) Если  $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ , где  $p \in (1, \infty]$ , то  $(Mf) \in L_p(\mathbb{R}^n)$  и

$$\|Mf\|_{p, \mathbb{R}^n} \leq \tilde{A}_p \|f\|_{p, \mathbb{R}^n},$$

где  $\tilde{A}_p$  зависит лишь от  $p$  и  $n$ .

**Определение 4.3.2.** [55]–[60] Пусть  $G \subset \mathbb{R}^n$  — открытое множество. Точку  $x \in G$  назовем  $(l, m)$ -точкой Лебега суммируемой функции  $f: G \rightarrow \mathbb{R}^1$ ,  $1 \leq l \leq m \leq n$ , если  $f(x) \neq \infty$  и

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{(2h)^{m-l+1}} \int_{x_l-h}^{x_l+h} \cdots \int_{x_m-h}^{x_m+h} |f(x_1, \dots, x_{l-1}, y_1, \dots, y_{m-l+1}, x_{m+1}, \dots, x_n) - f(x)| dy_1 \dots dy_{m-l+1} = 0.$$

**Замечание 4.3.1.** Легко видеть, что  $(1, n)$ -точка Лебега есть точка Лебега в обычном смысле [54].

**Лемма 4.3.3.** [55] – [60] При любых фиксированных  $l, m$ ,  $1 \leq l \leq m \leq n$  п.в. точки открытого множества  $G$  есть  $(l, m)$ -точки Лебега суммируемой функции  $f: G \rightarrow \mathbb{R}^1$ .

**Определение 4.3.3.** Пусть  $m_1, m_2 \geq 1$  — натуральные числа,  $m = m_1 + m_2$ ;  $X \subset \mathbb{R}^{m_1}$ ,  $Y \subset \mathbb{R}^{m_2}$  — открытые множества, и пусть функция  $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  — суммируема по множеству  $X \times Y$ . Точку  $\tilde{y} \in Y$ , для которой  $\int_X |f(x, \tilde{y})| dx \neq \infty$ , назовём интегральной точкой Лебега функции  $f$  по переменной  $y$ , если

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{(2h)^{m_2}} \int_{\tilde{y}_1-h}^{\tilde{y}_1+h} \cdots \int_{\tilde{y}_{m_2}-h}^{\tilde{y}_{m_2}+h} dy \int_X |f(x, y) - f(x, \tilde{y})| dx = 0.$$

**Замечание 4.3.2.** Нетрудно видеть, что интегральная точка Лебега функции  $f$  по переменной  $y$  — это в точности точка Лебега функции

$$Y \ni y \mapsto \int_X f(x, y) dx.$$

Справедлива следующая

**Лемма 4.3.4.** Пусть  $m_1, m_2 \geq 1$  — натуральные числа,  $m = m_1 + m_2$ ;  $X \subset \mathbb{R}^{m_1}$ ,  $Y \subset \mathbb{R}^{m_2}$  — открытые множества, и пусть функция  $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  — суммируема по множеству  $X \times Y$ . Тогда почти все точки множества  $Y$  являются интегральными точками Лебега функции  $f$  по переменной  $y$ . **Доказательство.** Поскольку функция  $f$  суммируема по множеству  $X \times Y$ , то, в силу теоремы Фубини, функция

$$Y \ni y \mapsto \int_X f(x, y) dx$$

почти всюду конечна и является элементом  $L_1(Y)$ . Пользуясь затем замечанием 4.3.2 и леммой 4.3.1, получаем, что п.в. точки множества  $Y$  являются интегральными точками Лебега функции  $f$  по переменной  $y$ . ■

**Определение 4.3.4.** Пусть  $m_1, m_2 \geq 1$  — натуральные числа,  $m = m_1 + m_2$ ;  $X \subset \mathbb{R}^{m_1}$ ,  $Y \subset \mathbb{R}^{m_2}$  — открытые множества, и пусть функция  $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  — суммируема по множеству  $X \times Y$ . Точку  $\tilde{x} \in X$ , для которой  $\int_Y |f(\tilde{x}, y)| dy \neq \infty$ , назовём интегральной  $(l, r)$ -точкой Лебега,  $1 \leq l \leq r \leq m_1$ , функции  $f$  по переменной  $x$ , если точка  $\tilde{x}$  является  $(l, r)$ -точкой Лебега функции

$$X \ni x \mapsto \int_Y f(x, y) dy.$$

Из леммы 4.3.2 и определения 4.3.4 вытекает

**Лемма 4.3.5.** Пусть  $m_1, m_2 \geq 1$  — натуральные числа,  $m = m_1 + m_2$ ;  $X \subset \mathbb{R}^{m_1}$ ,  $Y \subset \mathbb{R}^{m_2}$  — открытые множества, и пусть функция  $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  — суммируема по множеству  $X \times Y$ . Тогда при любых фиксированных  $l, r$ ,  $1 \leq l \leq r \leq m_1$ , почти все точки множества  $X$  являются интегральными  $(l, r)$ -точками Лебега функции  $f$  по переменной  $x$ .

## 4.4. Аппроксимация мер Радона, заданных на отрезке числовой оси

**Лемма 4.4.1.** Для любой меры  $\mu \in \mathbf{M}[0, T]$  найдётся последовательность функций  $\omega^k \in C[0, T]$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , такая, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{[0, T]} \zeta(t) \mu^k(dt) = \int_{[0, T]} \zeta(t) \mu(dt), \quad \forall \zeta \in C[0, T], \quad (4.4.1)$$

где  $\mu^k(E) \equiv \int_E \omega^k(t) dt$ ,  $E \subseteq [0, T]$  — борелевское подмножество отрезка  $[0, T]$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , причём если мера  $\mu \in \mathbf{M}[0, T]$  — неотрицательна, то  $\omega^k(t) \geq 0$ ,  $\forall t \in [0, T]$ ,  $k = 1, 2, \dots$ .

**Доказательство.** Разобьём доказательство на несколько этапов.

1) Покажем вначале, что для любой меры  $\mu \in \mathbf{M}[0, T]$  найдётся последовательность мер

$$\bar{\mu}^m \equiv \sum_{i=1}^{i_m} \lambda_{i,m} \delta_{t_{i,m}}, \quad m = 1, 2, \dots,$$

где  $\lambda_{i,m} \in \mathbb{R}$ ,  $i = \overline{1, i_m}$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , — неотрицательны, если мера  $\mu \in \mathbf{M}[0, T]$  — неотрицательна,  $t_{i,m} \in [0, T]$ ,  $i = \overline{1, i_m}$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , такая, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{[0, T]} \zeta(t) \bar{\mu}^m(dt) = \int_{[0, T]} \zeta(t) \mu(dt), \quad \forall \zeta \in C[0, T]. \quad (4.4.2)$$

В самом деле, согласно [14],  $(C[0, T])^*$  изометрично изоморфно  $\mathbf{M}[0, T]$ . С другой стороны, согласно [37],  $(C[0, T])^*$  изометрично изоморфно  $\mathbf{BV}^0[0, T]$ . Следовательно, существует изоморфизм

$$\mathcal{F}: \mathbf{M}[0, T] \rightarrow \mathbf{BV}^0[0, T],$$

такой, что

$$\|\mathcal{F}[\mu]\|_{\mathbf{BV}^0} = \|\mu\|, \quad \forall \mu \in \mathbf{M}[0, T]. \quad (4.4.3)$$

Пусть функционал  $\mathcal{A}: C[0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  задаётся формулой

$$\mathcal{A}[\zeta] = \int_{[0, T]} \zeta(t) \mu(dt), \quad \forall \zeta \in C[0, T]. \quad (4.4.4)$$

Тогда, очевидно,  $\mathcal{A} \in (C[0, T])^*$ , и, стало быть, согласно [37],

$$\mathcal{A}[\zeta] = \int_{[0, T]} \zeta(t) d\mathcal{F}[\mu](t), \quad \forall \zeta \in C[0, T], \quad (4.4.5)$$

где интеграл понимается в смысле интеграла Стильтьеса по отрезку  $[0, T]$ . Пусть  $\bar{t}_{i,m} = \frac{Ti}{m}$ ,  $i = \overline{0, m}$ ,  $\bar{t}_{i,m+1} = \bar{t}_{i,m}$ ,  $\lambda_{i,m} \equiv \mathcal{F}[\mu](\bar{t}_{i,m}) - \mathcal{F}[\mu](\bar{t}_{i-1,m})$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $\lambda_{i,m+1} = \mathcal{F}[\mu](\bar{t}_{i,m})$ ,  $i_m = m + 1$ ,  $t_{i,m} = \bar{t}_{i-1,m}$ ,  $i = \overline{1, i_m}$ . Тогда, в силу определения интеграла Стильтьеса по отрезку  $[0, T]$ ,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{i_m} \zeta(t_{i,m}) \lambda_{i,m} = \int_{[0,T]} \zeta(t) d\mathcal{F}[\mu](t), \quad \forall \zeta \in C[0, T].$$

Полагая  $\bar{\mu}^m \equiv \sum_{i=1}^{i_m} \lambda_{i,m} \delta_{t_{i,m}}$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , перепишем последнее неравенство в виде

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{[0,T]} \zeta(t) \bar{\mu}^m(dt) = \int_{[0,T]} \zeta(t) \mu(dt), \quad \forall \zeta \in C[0, T],$$

что в совокупности с (4.4.3)–(4.4.5) и даёт (4.4.2).

Ясно, что если функция  $\mathcal{F}[\mu]$  монотонно не убывает, то построенные меры  $\bar{\mu}^m$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , будут неотрицательными, и, следовательно, мера  $\mu$  также будет неотрицательной, как  $*$ -слабый предел таких мер. В силу же (4.4.3), неотрицательная мера  $\mu$  может породить лишь монотонно неубывающую функцию  $\mathcal{F}[\mu]$ . Итак, коэффициенты мер  $\bar{\mu}^m$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , можно считать неотрицательными, если мера  $\mu$  — неотрицательна.

2) Докажем существование непрерывных функций, упомянутых в формулировке леммы. Пусть  $\varepsilon_s > 0$ ,  $s = 1, 2, \dots$ ,  $\varepsilon_s \rightarrow 0$ ,  $s \rightarrow \infty$ , — некоторая последовательность чисел, и пусть

$$\begin{aligned} \omega_{i,m}^s(t) &\equiv \frac{\chi_{(t_{i,m}-\varepsilon_s, t_{i,m}+\varepsilon_s) \cap (0, T)}(t)}{\text{meas}\{(t_{i,m}-\varepsilon_s, t_{i,m}+\varepsilon_s) \cap (0, T)\}}, \quad i = \overline{1, i_m}, \\ \bar{\omega}_m^s(t) &\equiv \sum_{i=1}^{i_m} \lambda_{i,m} \omega_{i,m}^s(t), \quad m, s = 1, 2, \dots, \quad t \in [0, T], \\ \bar{\mu}_s^m(E) &\equiv \int_E \bar{\omega}_m^s(t) dt, \quad E \subseteq [0, T], \quad m, s = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Тогда, очевидно,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_{[0,T]} \zeta(t) \bar{\mu}_s^m(dt) = \int_{[0,T]} \zeta(t) \bar{\mu}^m(dt), \quad \forall \zeta \in C[0, T]. \quad (4.4.6)$$

Пусть теперь  $h_p > 0$ ,  $p = 1, 2, \dots$ ,  $h_p \rightarrow 0$ ,  $p \rightarrow \infty$ , — некоторая последовательность чисел, и пусть  $\bar{\mu}_{s,p}^m(E) \equiv \int_E \bar{\omega}_m^{s,p}(t) dt$ ,  $E \subseteq [0, T]$ ,  $m, s, p = 1, 2, \dots$ , где  $\bar{\omega}_m^{s,p}$  — усреднение с параметром  $h_p > 0$  с ядром, независимым от  $m, s, p = 1, 2, \dots$ , функции  $\bar{\omega}_m^s$ . Пользуясь свойствами средних функций и теоремой Радона–Никодима, заключаем, что

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_{[0,T]} \zeta(t) \bar{\mu}_{s,p}^m(dt) = \int_{[0,T]} \zeta(t) \bar{\mu}_s^m(dt), \quad \forall \zeta \in C[0, T]. \quad (4.4.7)$$

Из (4.4.2) следует, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} |\bar{\mu}^m - \mu|_w = 0, \quad (4.4.8)$$

где  $|\cdot|_w$  — слабая норма [14] в  $\mathbf{M}[0, T]$ .

Выберем произвольно  $\alpha > 0$  и зафиксируем.

Согласно (4.4.8), найдётся номер  $m_0(\alpha) \geq 1$ , такой, что

$$|\bar{\mu}^{m_0(\alpha)} - \mu|_w \leq \frac{\alpha}{3}.$$

Далее, согласно (4.4.6),

$$\lim_{s \rightarrow \infty} |\bar{\mu}_s^{m_0(\alpha)} - \bar{\mu}^{m_0(\alpha)}|_w = 0.$$

Поэтому найдётся номер  $s_0(\alpha) \geq 1$ , такой, что

$$|\bar{\mu}_{s_0(\alpha)}^{m_0(\alpha)} - \bar{\mu}^{m_0(\alpha)}|_w \leq \frac{\alpha}{3}.$$

Наконец, согласно (4.4.7),

$$\lim_{p \rightarrow \infty} |\bar{\mu}_{s_0(\alpha),p}^{m_0(\alpha)} - \bar{\mu}_{s_0(\alpha)}^{m_0(\alpha)}|_w = 0,$$

в силу чего найдётся номер  $p_0(\alpha) \geq 1$ , такой, что

$$|\bar{\mu}_{s_0(\alpha),p_0(\alpha)}^{m_0(\alpha)} - \bar{\mu}_{s_0(\alpha)}^{m_0(\alpha)}|_w \leq \frac{\alpha}{3}.$$

Таким образом,

$$|\bar{\mu}_{s_0(\alpha),p_0(\alpha)}^{m_0(\alpha)} - \mu|_w \leq |\bar{\mu}_{s_0(\alpha),p_0(\alpha)}^{m_0(\alpha)} - \bar{\mu}_{s_0(\alpha)}^{m_0(\alpha)}|_w + |\bar{\mu}_{s_0(\alpha)}^{m_0(\alpha)} - \bar{\mu}^{m_0(\alpha)}|_w + |\bar{\mu}^{m_0(\alpha)} - \mu|_w \leq \frac{\alpha}{3} + \frac{\alpha}{3} + \frac{\alpha}{3} = \alpha,$$

то есть

$$|\bar{\mu}_{s_0(\alpha),p_0(\alpha)}^{m_0(\alpha)} - \mu|_w \leq \alpha. \quad (4.4.9)$$

Пусть  $\alpha_k > 0$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ,  $\alpha_k \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow \infty$ , — некоторая последовательность. Тогда из (4.4.9) следует, что

$$\bar{\mu}_{s_0(\alpha_k),p_0(\alpha_k)}^{m_0(\alpha_k)} \rightarrow \mu, \quad k \rightarrow \infty, \quad * \text{-слабо}.$$

Следовательно, в качестве искомой последовательности  $\omega^k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , можно взять последовательность  $\omega^k \equiv \bar{\omega}_{m_0(\alpha_k)}^{s_0(\alpha_k),p_0(\alpha_k)}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Лемма доказана. ■



# Глава 5. О некоторых обыкновенных дифференциальных уравнениях

## 5.1. Лемма Гронуолла и её следствие

**Лемма 5.1.1.** [11] Пусть функции  $\varepsilon(t)$ ,  $\lambda(t)$ ,  $t \in [\alpha, \beta]$ , — измеримые по Лебегу функции, неотрицательные п.в. на отрезке  $[\alpha, \beta]$ ; и пусть произведение  $\varepsilon(t)\lambda(t)$ ,  $t \in [\alpha, \beta]$ , — суммируемо по отрезку  $[\alpha, \beta]$ . Если для некоторых  $b \geq 0$ ,  $\tau \in [\alpha, \beta]$ , и п.в.  $t \in [\alpha, \beta]$  справедливо неравенство

$$\varepsilon(t) \leq \left| \int_{\tau}^t \varepsilon(\xi)\lambda(\xi)d\xi \right| + b,$$

то

$$\varepsilon(t) \leq b \exp \left( \left| \int_{\tau}^t \lambda(\xi)d\xi \right| \right) \text{ при п.в. } t \in [\alpha, \beta].$$

**Лемма 5.1.2.** Пусть  $\sigma(t)$ ,  $t \in [\alpha, \beta]$ , — непрерывная неотрицательная на  $[\alpha, \beta]$  функция;  $\varkappa(t)$ ,  $t \in [\alpha, \beta]$ , — неотрицательная суммируемая по  $[\alpha, \beta]$  функция, и, наконец, пусть  $\gamma$ ,  $\omega \geq 0$ . Тогда если

$$\sigma(t) \leq \gamma[\sigma(\alpha) + \omega \max_{\xi \in [\alpha, t]} \sqrt{\sigma(\xi)}] + \int_{\alpha}^t \varkappa(\xi)\sigma(\xi)d\xi \quad \forall t \in [\alpha, \beta], \quad (5.1.1)$$

то

$$\max_{t \in [\alpha, \beta]} \sqrt{\sigma(t)} \leq \gamma[\sqrt{\sigma(\alpha)} + \omega] \exp \left( \int_{\alpha}^{\beta} \varkappa(\xi)d\xi \right). \quad (5.1.2)$$

**Доказательство.** Введём функцию  $y: [\alpha, \beta] \rightarrow R$  формулой  $y(t) \equiv \max_{\xi \in [\alpha, t]} \sqrt{\sigma(\xi)}$ ,  $t \in [\alpha, \beta]$ . Тогда (5.1.1) примет вид

$$\sigma(t) \leq \gamma[\sigma(\alpha) + \omega y(t)] + \int_{\alpha}^t \varkappa(\xi)\sigma(\xi)d\xi \quad \forall t \in [\alpha, \beta]. \quad (5.1.3)$$

Отметим, что функция  $y$  монотонно не убывает на отрезке  $[\alpha, \beta]$  и

$$\frac{1}{y(t_1)} \geq \frac{1}{y(t_2)}, \quad t_1 \leq t_2, \text{ если } y(t_1) > 0. \quad (5.1.4)$$

Обозначим через  $\mathcal{N}$  множество нулей функции  $y$ . Покажем, что либо  $\mathcal{N} = \emptyset$ , либо  $\mathcal{N}$  представимо в виде  $\mathcal{N} = [\alpha, \sup \mathcal{N}]$ . В случае  $\mathcal{N} = \{\alpha\}$  последнее очевидно. Поэтому пусть  $\mathcal{N} \neq \emptyset$ ,  $\mathcal{N} \neq \{\alpha\}$ . Заметим, что в силу неубывания функции  $y$

$$\forall t \in \mathcal{N} : [\alpha, t] \subseteq \mathcal{N}. \quad (5.1.5)$$

Пусть  $t^* = \sup \mathcal{N}$ . На основании определения верхней грани найдётся строго монотонно возрастающая последовательность  $t_k \in \mathcal{N}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , такая, что  $t_k \rightarrow t^*$ ,  $k \rightarrow \infty$ . Таким образом, ввиду (5.1.5),  $[\alpha, t^*) = \bigcup_{k=1}^{\infty} [\alpha, t_k] \subseteq \mathcal{N}$ . Пользуясь теперь непрерывностью функции  $\sigma$ , заключаем, что  $\mathcal{N} = [\alpha, \sup \mathcal{N}]$ .

Ясно, что если  $\mathcal{N} = [\alpha, \beta]$ , то неравенство (5.1.2) справедливо.

Пусть  $\mathcal{N} = \emptyset$ . Поделив (5.1.3) на  $y(t)$  и воспользовавшись (5.1.4), получим соотношение

$$\frac{\sigma(t)}{y(t)} \leq \gamma[\sqrt{\sigma(\alpha)} + \omega] + \int_{\alpha}^t \varkappa(\xi) \frac{\sigma(\xi)}{y(\xi)} d\xi \quad \forall t \in [\alpha, \beta].$$

Применив к нему лемму (5.1.1), получим, что

$$\frac{\sigma(t)}{y(t)} \leq \gamma[\sqrt{\sigma(\alpha)} + \omega] \exp \left( \int_{\alpha}^{\beta} \kappa(\xi) d\xi \right) \quad \text{при п.в. } t \in [\alpha, \beta].$$

В частности,

$$\frac{\sigma(t)}{y(\tau)} \leq \gamma[\sqrt{\sigma(\alpha)} + \omega] \exp \left( \int_{\alpha}^{\beta} \kappa(\xi) d\xi \right) \quad \text{при п.в. } t \in [\alpha, \tau] \text{ при всех } \tau \in (\alpha, \beta].$$

Переходя здесь к точной верхней грани по  $t \in [\alpha, \tau]$ , получаем неравенство (5.1.2).

Пусть  $\mathcal{N} = \{\alpha\}$ . Тогда неравенство (5.1.2) заведомо выполнено при  $t = \alpha$ . Предположим теперь, что  $t > \alpha$ . Поделив (5.1.3) на  $y(t)$  и воспользовавшись (5.1.4), выводим, что

$$\frac{\sigma(t)}{y(t)} \leq \gamma\omega + \int_{\alpha}^t \kappa(\xi) \frac{\sigma(\xi)}{y(\xi)} d\xi \quad \forall t \in [\alpha, \beta].$$

Применив к данному неравенству лемму (5.1.1), получим, что

$$\frac{\sigma(t)}{y(t)} \leq \gamma[\sqrt{\sigma(\alpha)} + \omega] \exp \left( \int_{\alpha}^{\beta} \kappa(\xi) d\xi \right) \quad \text{при п.в. } t \in [\alpha, \beta].$$

В частности,

$$\frac{\sigma(t)}{y(\tau)} \leq \gamma\omega \exp \left( \int_{\alpha}^{\beta} \kappa(\xi) d\xi \right) \quad \text{при п.в. } t \in [\alpha, \tau] \text{ при всех } \tau \in (\alpha, \beta].$$

Переходя здесь к точной верхней грани по  $t \in [\alpha, \tau]$ , получаем неравенство (5.1.2).

Пусть  $\mathcal{N} = [\alpha, t^*]$  и  $t^* \in (\alpha, \beta)$ . Тогда неравенство (5.1.2) заведомо выполнено при  $t \in [\alpha, t^*]$ . Предположим теперь, что  $t > t^*$ . Поделив (5.1.3) на  $y(t)$  и воспользовавшись (5.1.4), заключаем, что

$$\frac{\sigma(t)}{y(t)} \leq \gamma\omega + \int_{t^*}^t \kappa(\xi) \frac{\sigma(\xi)}{y(\xi)} d\xi \quad \forall t \in [t^*, \beta].$$

Применив к данному неравенству лемму 5.1.1, получим, что

$$\frac{\sigma(t)}{y(t)} \leq \gamma[\sqrt{\sigma(\alpha)} + \omega] \exp \left( \int_{\alpha}^{\beta} \kappa(\xi) d\xi \right) \quad \text{при п.в. } t \in [t^*, \beta].$$

В частности,

$$\frac{\sigma(t)}{y(\tau)} \leq \gamma\omega \exp \left( \int_{t^*}^{\beta} \kappa(\xi) d\xi \right) \quad \text{при п.в. } t \in [t^*, \tau] \text{ при всех } \tau \in (t^*, \beta].$$

Переходя здесь к точной верхней грани по  $t \in [t^*, \tau]$ , получаем неравенство

$$\max_{t \in [t^*, \beta]} \sqrt{\sigma(t)} \leq \gamma\omega \exp \left( \int_{\alpha}^{\beta} \kappa(\xi) d\xi \right).$$

А с учётом того, что  $\sigma(t) \equiv 0$ ,  $t \in [\alpha, t^*]$ , будем иметь

$$\max_{t \in [\alpha, \beta]} \sqrt{\sigma(t)} \leq \gamma\omega \exp \left( \int_{\alpha}^{\beta} \kappa(\xi) d\xi \right).$$

А это и есть требуемое неравенство (5.1.2). ■

## 5.2. Уравнения первого порядка

Пусть  $\mathfrak{A} \in C([0, T], \mathbb{R}^{m \times m})$ ,  $\mathfrak{B} \in C^1(\Gamma, \mathbb{R}^m)$ ,  $\varphi \in C^1([0, T], \mathbb{R}^m)$ .

Введём при каждом  $\tau \in [0, T]$  функцию  $h(t, \tau)$ ,  $(t, \tau) \in \Gamma$ , как решение задачи Коши

$$h_t(t, \tau) = \mathfrak{A}(t)h(t, \tau) + \mathfrak{B}(t, \tau), \quad (t, \tau) \in \Gamma, \quad (5.2.1)$$

$$h(\tau, \tau) = \varphi(\tau), \quad \tau \in [0, T]. \quad (5.2.2)$$

Дадим следующее

**Определение 5.2.1.** Функцию  $h \in C^1(\Gamma, \mathbb{R}^m)$  назовём решением задачи (5.2.1)–(5.2.2), если она всюду в  $\Gamma$  удовлетворяет уравнению (5.2.1) и при всех  $\tau \in [0, T]$  удовлетворяет начальному условию (5.2.2).

Покажем, что справедлива следующая

**Лемма 5.2.1.** Задача Коши (5.2.1)–(5.2.2) имеет единственное решение  $h \in C^1(\Gamma, \mathbb{R}^m)$ . При этом функция  $h$  имеет непрерывные на  $\Gamma$  производные  $h_{\tau t}$  и  $h_{t\tau}$ , а функция  $h_\tau$  является решением задачи Коши

$$h_{\tau t}(t, \tau) = \mathfrak{A}(t)h_\tau(t, \tau) + \mathfrak{B}_\tau(t, \tau), \quad (t, \tau) \in \Gamma; \quad h_\tau(t, \tau)|_{t=\tau} = \varphi'(\tau) - [\mathfrak{A}(\tau)\varphi(\tau) + \mathfrak{B}(\tau, \tau)]. \quad (5.2.3)$$

**Доказательство.** 1) Покажем, что задача Коши (5.2.1)–(5.2.2) эквивалентна некоторому интегральному уравнению.

В самом деле, пусть  $h \in C^1(\Gamma, \mathbb{R}^m)$  — решение задачи Коши (5.2.1)–(5.2.2). Проинтегрировав уравнение (5.2.1) по  $t$  от  $\tau$  до  $\xi$ , получим, что  $h$  является принадлежащим классу  $\mathbb{K}_m^1(\Gamma)$  решением интегрального уравнения

$$h(\xi, \tau) = \varphi(\tau) + \int_{\tau}^{\xi} [\mathfrak{A}(t)h(t, \tau) + \mathfrak{B}(t, \tau)] dt, \quad (\xi, \tau) \in \Gamma. \quad (5.2.4)$$

Обратно, пусть  $h$  — принадлежащее классу  $\mathbb{K}_m^1(\Gamma)$  решение интегрального уравнения (5.2.4). Тогда она имеет производную по  $t$ , при всех  $(t, \tau) \in \Gamma$  удовлетворяет уравнению (5.2.1) и при всех  $\tau \in [0, T]$  удовлетворяет начальному условию (5.2.2).

Итак, любое принадлежащее классу  $C^1(\Gamma, \mathbb{R}^m)$  решение задачи Коши (5.2.1)–(5.2.2) является принадлежащим классу  $\mathbb{K}_m^1(\Gamma)$  решением интегрального уравнения (5.2.4), и наоборот, любое принадлежащее классу  $\mathbb{K}_m^1(\Gamma)$  решение интегрального уравнения (5.2.4) является принадлежащим классу  $C^1(\Gamma, \mathbb{R}^m)$  решением задачи Коши (5.2.1)–(5.2.2).

Покажем, что интегральное уравнение (5.2.4) имеет единственное решение в классе  $\mathbb{K}_m^1(\Gamma)$ . Введём оператор  $\mathfrak{C}: \mathbb{K}_m^1(\Gamma) \rightarrow \mathbb{K}_m^1(\Gamma)$  равенством

$$\mathfrak{C}[h](t, \tau) = \varphi(\tau) + \int_{\tau}^t [\mathfrak{A}(\xi)h(\xi, \tau) + \mathfrak{B}(\xi, \tau)] d\xi, \quad (t, \tau) \in \Gamma,$$

и покажем, что некоторая степень этого оператора является сжатием.

Заметим прежде всего, что

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \mathfrak{C}[h](t, \tau) = \varphi'(\tau) - [\mathfrak{A}(\tau)h(\tau, \tau) + \mathfrak{B}(\tau, \tau)] + \int_{\tau}^t [\mathfrak{A}(\xi)h_\tau(\xi, \tau) + \mathfrak{B}_\tau(\xi, \tau)] d\xi, \quad (t, \tau) \in \Gamma.$$

Пусть теперь  $h_1, h_2 \in \mathbb{K}_m^1(\Gamma)$  — произвольны. Тогда

$$\begin{aligned} |\mathfrak{C}[h_1](t, \tau) - \mathfrak{C}[h_2](t, \tau)| &\leq K \left| \int_{\tau}^t |h_1(\xi, \tau) - h_2(\xi, \tau)| d\xi \right| \leq K |h_1 - h_2|_{\Gamma, \mathbb{R}^m}^{(0)} |t - \tau|, \\ \left| \frac{\partial}{\partial \tau} \mathfrak{C}[h_1](t, \tau) - \frac{\partial}{\partial \tau} \mathfrak{C}[h_2](t, \tau) \right| &\leq K \left| \int_{\tau}^t |h_{1\tau}(\xi, \tau) - h_{2\tau}(\xi, \tau)| d\xi \right| \leq K |h_{1\tau} - h_{2\tau}|_{\Gamma, \mathbb{R}^m}^{(0)} |t - \tau|, \\ &\quad (t, \tau) \in \Gamma, \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

где  $K = \max_{t \in [0, T]} |\mathfrak{A}(t)|$ .

Предположим, что для некоторого  $k \geq 1$  уже доказано, что

$$\begin{aligned} |\mathfrak{C}^k[h_1](t, \tau) - \mathfrak{C}^k[h_2](t, \tau)| &\leq \frac{(K|t - \tau|)^k}{k!} |h_1 - h_2|_{\Gamma, \mathbb{R}^m}^{(0)}, \\ \left| \frac{\partial}{\partial \tau} \mathfrak{C}^k[h_1](t, \tau) - \frac{\partial}{\partial \tau} \mathfrak{C}^k[h_2](t, \tau) \right| &\leq \frac{(K|t - \tau|)^k}{k!} |h_{1\tau} - h_{2\tau}|_{\Gamma, \mathbb{R}^m}^{(0)}, \quad (t, \tau) \in \Gamma. \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

Тогда, согласно (5.2.5) и предположению индукции,

$$\begin{aligned} |\mathfrak{C}^{k+1}[h_1](t, \tau) - \mathfrak{C}^{k+1}[h_2](t, \tau)| &= |\mathfrak{C}[\mathfrak{C}^k[h_1]](t, \tau) - \mathfrak{C}[\mathfrak{C}^k[h_2]](t, \tau)| \leq \\ &\leq K \left| \int_{\tau}^t |\mathfrak{C}^k[h_1](\xi, \tau) - \mathfrak{C}^k[h_2](\xi, \tau)| d\xi \right| \leq \frac{K^{k+1}}{k!} |h_1 - h_2|_{\Gamma, \mathbb{R}^m}^{(0)} \left| \int_{\tau}^t |\xi - \tau|^k d\xi \right| = \frac{(K|t - \tau|)^{k+1}}{(k+1)!} |h_1 - h_2|_{\Gamma, \mathbb{R}^m}^{(0)}; \\ \left| \frac{\partial}{\partial \tau} \mathfrak{C}^{k+1}[h_1](t, \tau) - \frac{\partial}{\partial \tau} \mathfrak{C}^{k+1}[h_2](t, \tau) \right| &= \left| \frac{\partial}{\partial \tau} \mathfrak{C}[\mathfrak{C}^k[h_1]](t, \tau) - \frac{\partial}{\partial \tau} \mathfrak{C}[\mathfrak{C}^k[h_2]](t, \tau) \right| \leq \\ &\leq K \left| \int_{\tau}^t \left| \frac{\partial}{\partial \tau} \mathfrak{C}^k[h_1](\xi, \tau) - \frac{\partial}{\partial \tau} \mathfrak{C}^k[h_2](\xi, \tau) \right| d\xi \right| \leq \frac{K^{k+1}}{k!} |h_{1\tau} - h_{2\tau}|_{\Gamma, \mathbb{R}^m}^{(0)} \left| \int_{\tau}^t |\xi - \tau|^k d\xi \right| = \\ &= \frac{(K|t - \tau|)^{k+1}}{(k+1)!} |h_{1\tau} - h_{2\tau}|_{\Gamma, \mathbb{R}^m}^{(0)}. \end{aligned}$$

Таким образом, оценка (5.2.6) имеет место для всех  $k \geq 1$ . Поэтому

$$|\mathfrak{C}^k[h_1] - \mathfrak{C}^k[h_2]|_{\Gamma, \mathbb{R}^m}^{(0)} \leq \frac{(KT)^k}{k!} |h_1 - h_2|_{\Gamma, \mathbb{R}^m}^{(0)}, \quad \left| \frac{\partial}{\partial \tau} \mathfrak{C}^k[h_1] - \frac{\partial}{\partial \tau} \mathfrak{C}^k[h_2] \right|_{\Gamma, \mathbb{R}^m}^{(0)} \leq \frac{(KT)^k}{k!} |h_{1\tau} - h_{2\tau}|_{\Gamma, \mathbb{R}^m}^{(0)},$$

откуда

$$\|\mathfrak{C}^k[h_1] - \mathfrak{C}^k[h_2]\|_{\mathbb{K}_m^1(\Gamma)} \leq \frac{(KT)^k}{k!} \|h_1 - h_2\|_{\mathbb{K}_m^1(\Gamma)}.$$

Следовательно, некоторая степень оператора  $\mathfrak{C}$  является сжатием, на основании чего интегральное уравнение (5.2.4) имеет единственное решение в классе  $\mathbb{K}_m^1(\Gamma)$ . Ввиду доказанной выше эквивалентности задачи Коши (5.2.1)–(5.2.2) и интегрального уравнения (5.2.4) это даёт однозначную разрешимость задачи Коши (5.2.1)–(5.2.2) в классе  $C^1(\Gamma, \mathbb{R}^m)$ .

2) Докажем теперь, что функция  $h_\tau$  является решением задачи Коши (5.2.3). В самом деле, продифференцировав интегральное уравнение (5.2.4) по переменной  $\tau$ , будем иметь

$$h_\tau(t, \tau) = \varphi'(\tau) - [\mathfrak{A}(\tau)\varphi(\tau) + \mathfrak{B}(\tau, \tau)] + \int_{\tau}^t [\mathfrak{A}(\xi)h(\xi, \tau) + \mathfrak{B}(\xi, \tau)] d\xi, \quad (t, \tau) \in \Gamma.$$

Дифференцируя данное равенство по  $t$ , получаем, что функция  $h_\tau$  является решением задачи Коши (5.2.3).

3) Из доказанной ранее непрерывной дифференцируемости функции  $h$  и того, что  $h_\tau$  — решение задачи Коши (5.2.3), следует, что функция  $h_{\tau t}$  непрерывна на  $\Gamma$ . Дифференцируя теперь по переменной  $\tau$  уравнение (5.2.1), получим непрерывность на  $\Gamma$  функции  $h_{t\tau}$ .

Лемма полностью доказана. ■

### 5.3. Уравнения второго порядка

Пусть  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in C([0, T], \mathbb{R}^{m \times m})$ ,  $\mathcal{C} \in C^1(\Gamma, \mathbb{R}^m)$ ,  $\varphi, \psi \in C^1([0, T], \mathbb{R}^m)$ . Рассмотрим задачу Коши

$$y_{tt}(t, \tau) + \mathcal{A}(t)y_t(t, \tau) + \mathcal{B}(t)y(t, \tau) = \mathcal{C}(t, \tau), \quad (t, \tau) \in \Gamma; \quad (5.3.1)$$

$$y(t, \tau)|_{t=\tau} = \varphi(\tau), \quad y_t(t, \tau)|_{t=\tau} = \psi(\tau), \quad t \in [0, T]. \quad (5.3.2)$$

Дадим следующее

**Определение 5.3.1.** Функцию  $y \in C^1(\Gamma, \mathbb{R}^m)$ , имеющую непрерывные на  $\Gamma$  производные  $y_{tt}$ ,  $y_{t\tau}$ ,  $y_{\tau t}$ , назовём решением задачи Коши (5.3.1)–(5.3.2), если она при всех  $(t, \tau) \in \Gamma$  удовлетворяет уравнению (5.3.1) и при всех  $\tau \in [0, T]$  удовлетворяет начальным условиям (5.3.2).

Покажем, что справедлива

**Лемма 5.3.1.** *Задача Коши (5.3.1)–(5.3.2) имеет единственное решение  $y$ , понимаемое в только что определённом смысле, причём существует непрерывная на  $\Gamma$  производная  $y_{\tau t}$ , а функция  $y_\tau$  является решением задачи Коши*

$$y_{\tau t t}(t, \tau) + \mathcal{A}(t)y_{\tau t}(t, \tau) + \mathcal{B}(t)y_\tau(t, \tau) = \mathcal{C}_\tau(t, \tau), \quad (t, \tau) \in \Gamma; \quad (5.3.3)$$

$$y_\tau(t, \tau)|_{t=\tau} = \varphi'(\tau) - \psi(\tau), \quad y_{\tau t}(t, \tau)|_{t=\tau} = \psi'(\tau) + \mathcal{A}(\tau)\psi(\tau) + \mathcal{B}(\tau)\varphi(\tau) + \mathcal{C}(\tau, \tau), \quad t \in [0, T]. \quad (5.3.4)$$

**Доказательство.** Сделаем замену  $h_1 \equiv y$ ,  $h_2 \equiv y_t$ , и введём матрицу–функцию  $\mathfrak{A}(t)$ ,  $t \in [0, T]$  размерности  $2m \times 2m$ ,  $2m$ –мерные вектор–функции  $\mathfrak{B}(t, \tau)$ ,  $\tilde{\varphi}(\tau)$ ,  $h(t, \tau)$ ,  $(t, \tau) \in \Gamma$ , соотношениями

$$h(t, \tau) = \begin{bmatrix} h_1(t, \tau) \\ h_2(t, \tau) \end{bmatrix}, \quad \tilde{\varphi}(\tau) = \begin{bmatrix} \varphi(\tau) \\ \psi(\tau) \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{B}(t, \tau) = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathcal{C}(t, \tau) \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{A}(t) = \left[ \begin{array}{c|c} O_{m \times m} & E_m \\ \hline -\mathcal{B}(t) & -\mathcal{A}(t) \end{array} \right],$$

где  $O_{m \times m}$  — нулевая  $m \times m$ –матрица,  $E_m$  — единичная матрица порядка  $m$ .

Тогда задача Коши (5.3.1)–(5.3.2) примет вид

$$h_t(t, \tau) = \mathfrak{A}(t)h(t, \tau) + \mathfrak{B}(t, \tau), \quad (t, \tau) \in \Gamma; \quad h(t, \tau)|_{t=\tau} = \tilde{\varphi}(\tau), \quad \tau \in [0, T].$$

Применив к данной задаче Коши лемму 5.2.1, получим утверждения доказываемой леммы. ■

# Глава 6. Абстрактная задача Коши и энергетическое расширение

## 6.1. Энергетическое расширение

Изложение материала настоящего раздела следует [50, Глава IV, §2].

Пусть  $H$  — сепарабельное вещественное гильбертово пространство со скалярным произведением  $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$  и соответствующей нормой  $\| \cdot \|_H$ . Пусть  $A : H \rightarrow H$  — линейный неограниченный оператор с областью определения  $D(A)$ , плотной в  $H$ . Пусть оператор  $A$  симметричен, т.е.

$$\langle Af, \varphi \rangle_H = \langle f, A\varphi \rangle_H \quad \forall f, \varphi \in D(A), \quad (6.1.1)$$

и положительно определённый, т.е.

$$\langle Af, f \rangle_H \geq \mu \|f\|_H^2 \quad \forall f \in D(A), \quad (6.1.2)$$

где  $\mu > 0$  — константа, не зависящая от выбора  $f \in D(A)$ .

Опишем процесс энергетического расширения такого оператора.

Обозначим через  $H^*$  сопряжённое к  $H$  пространство линейных непрерывных функционалов, заданных на  $H$ . Согласно теореме Рисса, для любого  $f \in H^*$  существует, и притом единственный, элемент  $\eta \in H$ , такой, что

$$\langle f, \varphi \rangle = \langle \eta, \varphi \rangle_H \quad \forall \varphi \in H; \quad \|f\|_{H^*} = \|\eta\|_H.$$

Равенство  $R_H f = \eta$  определяет оператор  $R_H : H^* \rightarrow H$ , называемый оператором Рисса. Перечислим некоторые свойства оператора  $R_H$ .

1) Справедливо равенство

$$\langle f, \varphi \rangle = \langle R_H f, \varphi \rangle_H \quad \forall f \in H^*, \varphi \in H.$$

2) Оператор  $R_H$  — линейен:

$$R_H(\alpha f + \beta g) = \alpha R_H f + \beta R_H g \quad \forall f, g \in H^*, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

3) Оператор  $R_H$  — ограничен, с нормой  $\|R_H\|_{H^* \rightarrow H} = 1$ , и изометричен, т.е. сохраняет норму:

$$\|R_H f\|_H = \|f\|_{H^*} \quad \forall f \in H^*.$$

4) Сопряжённое пространство  $H^*$  является гильбертовым, причём скалярное произведение в нём задаётся формулой

$$\langle f, g \rangle_{H^*} = \langle R_H f, R_H g \rangle_H \quad \forall f, g \in H^*. \quad (6.1.3)$$

5) Оператор  $R_H$  взаимно однозначно отображает  $H^*$  на  $H$ , норма обратного оператора  $R_H^{-1} : H \rightarrow H^*$  равна единице, и оператор  $R_H^{-1}$  — изометричен, т.е.

$$\|R_H^{-1} \eta\|_{H^*} = \|\eta\|_H, \quad \langle R_H^{-1} \eta, \varphi \rangle = \langle \eta, \varphi \rangle_H \quad \forall \eta, \varphi \in H.$$

6) Справедливо равенство  $R_H^* = R_H^{-1}$ .

В самом деле, в силу (6.1.3)

$$\langle f, g \rangle_{H^*} = \langle R_H f, R_H g \rangle_H = \langle R_H^* R_H f, g \rangle_H \quad \forall f, g \in H^*.$$

Поэтому

$$f = R_H^* R_H f \quad \forall f \in H^*,$$

то есть

$$R_H^* R_H = I,$$

где  $I$  — тождественный оператор.

Таким образом, оператор Рисса  $R_H$  устанавливает взаимно однозначное изометричное соответствие между пространствами  $H$  и  $H^*$ . Это соответствие обозначают  $H \simeq H^*$ . В силу указанного соответствия далее будем отождествлять пространства  $H$  и  $H^*$  и писать просто  $H = H^*$ , не различая элементы  $R_H f$  и  $f$ ,  $R_H^{-1} \eta$  и  $\eta$ , и опуская в рассуждениях и формулах символы  $R_H$  и  $R_H^{-1}$ .

**Определение 6.1.1.** Пусть  $V, H$  — гильбертовы пространства. Говорят, что вложение  $V \subset H$  плотно и непрерывно, если

- 1) имеет место поэлементное вложение:  $\forall v \in V : v \in H$ ;
- 2) справедливо условие

$$\forall f \in H \forall \varepsilon > 0 \exists v_\varepsilon \in V : \|f - v_\varepsilon\|_H \leq \varepsilon$$

(плотность вложения);

- 3) выполняется неравенство

$$\exists C > 0 \forall v \in V : \|v\|_H \leq C \|v\|_V \quad (6.1.4)$$

(непрерывность вложения).

Пусть  $V^*$  — сопряжённое к  $V$  пространство. Если вложение  $V \subset H$  непрерывно, то, оказывается, можно говорить о вложении  $H \subset V^*$ . В самом деле, возьмём произвольный элемент  $f \in H$ . Тогда  $R_H^{-1} f \in H^*$ , причём

$$\langle R_H^{-1} f, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle_H \quad \forall f, \varphi \in H.$$

Так как  $V \subset H$ , то это равенство выполняется при всех  $\varphi \in V$ . Отсюда с учётом (6.1.4) имеем

$$|\langle R_H^{-1} f, v \rangle| = |\langle f, v \rangle_H| \leq \|f\|_H \|v\|_H \leq \|f\|_H C \|v\|_V \quad \forall v \in V. \quad (6.1.5)$$

Это означает, что  $R_H^{-1} f$  является линейным непрерывным функционалом на  $V$ , т.е.  $R_H^{-1} f \in V^*$ . Поскольку при отождествлении  $H = H^*$  элементы  $f$  и  $R_H^{-1} f$  мы не различаем, то можно считать, что  $f \in V^*$  и

$$\langle f, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle_H \quad \forall f, \varphi \in H.$$

Таким образом, вложение  $H \subset V^*$  действительно имеет смысл, и мы приходим к цепочке вложений

$$V \subset H \simeq H^* \subset V^*. \quad (6.1.6)$$

**Теорема 6.1.1.** Если вложение  $V \subset H$  плотно и непрерывно, то и вложение  $H \subset V^*$  тоже плотно и непрерывно.

**Доказательство.** Прежде всего нужно убедиться, что вложение  $H \subset V^*$  является поэлементным, т.е. разные элементы  $f, g \in H$  при описанном вложении порождают разные функционалы из  $V^*$ . В самом деле, если два элемента  $f, g \in H$  порождают один и тот же функционал, то  $\langle f, v \rangle = \langle g, v \rangle$ , или, иначе,

$$\langle R_H^{-1} f, v \rangle_H = \langle R_H^{-1} g, v \rangle_H \quad \forall v \in V.$$

Следовательно,

$$\langle R_H^{-1}(f - g), v \rangle_H \quad \forall v \in V.$$

Отсюда и из плотности вложения  $V \subset H$  следует, что  $R_H^{-1}(f - g) = 0$ , т.е.  $f = g$ .

Нетрудно убедиться в том, что вложение  $H \subset V^*$  непрерывно. Действительно, из определения нормы функционала

$$\|f\|_{V^*} = \sup_{v \in V, \|v\|_V \leq 1} |\langle f, v \rangle|$$

и соотношений (6.1.5) следует, что

$$\|f\|_{V^*} = \sup_{v \in V, \|v\|_V \leq 1} |\langle R_H^{-1} f, v \rangle| \leq C \|f\|_H \quad \forall f \in H. \quad (6.1.7)$$

Докажем, что вложение  $V \subset V^*$  — плотно. Для этого достаточно установить, что  $cl(R_H^{-1}(V)) = V^*$ , где  $cl(R_H^{-1}(V))$  — замыкание множества  $R_H^{-1}(V) = \{u \in V^* | \exists v \in V : u = R_H^{-1} v\}$  в норме  $V^*$ . Предположим

противное, т.е. что  $cl(R_H^{-1}(V)) \neq V^*$ . Так как  $R_H^{-1}(V) \subset V^*$ , то, по теореме Хана–Банаха, найдётся функционал  $f_0 \in V^{**}$ , такой, что  $f_0 \neq 0$ , но  $\langle f_0, R_H^{-1}v \rangle = 0$  при всех  $v \in V$ . Пусть  $R_V$  и  $R_{V^*}$  — операторы Рисса в пространствах  $V$  и  $V^*$  соответственно. Тогда отображение  $R_{V^*}^{-1}R_V^{-1} : V \rightarrow V^{**}$  является изоморфизмом пространств  $V$  и  $V^{**}$ . Поэтому найдётся элемент  $h_0 \in V$ , такой, что  $f_0 = R_{V^*}^{-1}R_V^{-1}h_0$ . С учётом свойств операторов Рисса  $R_V$  и  $R_{V^*}$ , для всех  $v \in V$  имеем

$$\begin{aligned} 0 &= \langle f_0, R_H^{-1}v \rangle = \langle R_{V^*}^{-1}R_V^{-1}h_0, R_H^{-1}v \rangle = \langle R_V^{-1}h_0, R_H^{-1}v \rangle_{V^*} = \\ &= \langle h_0, R_V R_H^{-1}v \rangle_V = \langle h_0, R_V^{-1}R_V R_H^{-1}v \rangle = \langle h_0, R_H^{-1}v \rangle = \langle h_0, v \rangle_H. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\langle h_0, v \rangle_H = 0 \quad \forall v \in V.$$

Учитывая плотность вложения  $V \subset H$ , заключаем, что  $h_0 = 0$ , а тогда и  $f_0 = 0$ , что противоречит выбору элемента  $f_0$ . Следовательно,  $cl(R_H^{-1}(V)) = V^*$ , т.е. вложение  $V \subset V^*$  — плотно. Из цепочки вложений (6.1.6) тогда следует и плотность вложения

$$H \simeq H^* = R_H^{-1}(H) \subset V^*.$$

Теорема доказана. ■

Заодно выяснилось, что  $V^*$  является пополнением пространств  $R_H^{-1}(V)$  и  $R_H^{-1}(H)$  в норме  $\|f\|_{V^*} = \|R_H f\|_H$ .

Рассмотрим цепочку вложений (6.1.6) для случая, когда пространство  $V$  представляет собой так называемое энергетическое пополнение области определения  $D(A)$  линейного неограниченного оператора  $A$ , обладающего свойствами (6.1.1), (6.1.2) и опишем расширение оператора  $A$  на пространство  $V$ . Заметим, что линейное многообразие  $D(A)$  превращается евклидово пространство, если в нём ввести скалярное произведение по формуле

$$\langle u, v \rangle_A = \langle Au, v \rangle_H \quad \forall u, v \in D(A). \quad (6.1.8)$$

Соответствующую норму будем обозначать  $\|\cdot\|_A$ . Справедливость аксиом скалярного произведения и нормы следует из линейности оператора  $A$  и его свойств (6.1.1), (6.1.2). Пространство  $D(A)$  пополним в норме  $\|\cdot\|_A$ , и получившееся в результате пополнения гильбертово пространство обозначим через  $H_A$ . Как известно, пространство  $H_A$  состоит из идеальных элементов, представляющих собой классы  $\mathcal{U}$  эквивалентных фундаментальных в норме  $\|\cdot\|_A$  последовательностей. Напомним, что последовательность  $u_k \in D(A)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , называется фундаментальной в норме  $\|\cdot\|_A$ , если  $\|u_k - u_m\|_A \rightarrow 0$ ,  $k, m \rightarrow \infty$ ; а две фундаментальные  $u_k \in D(A)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , и  $v_k \in D(A)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , называются эквивалентными, если  $\|u_k - v_k\|_A \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow \infty$ . Операции сложения и умножения на число определяются так. Пусть  $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in H_A$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Выберем произвольные фундаментальные последовательности  $\{u_k\} \in \mathcal{U}$ ,  $\{v_k\} \in \mathcal{V}$ , и в качестве  $\mathcal{U} + \mathcal{V}$  и  $\alpha\mathcal{U}$  примем классы последовательностей, эквивалентных последовательностям  $\{u_k + v_k\}$  и  $\{\alpha u_k\}$  соответственно. Скалярное произведение и норму в  $H_A$  вводится так:

$$\langle \mathcal{U}, \mathcal{V} \rangle_A = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle u_k, v_k \rangle_A, \quad \|\mathcal{U}\|_A = \sqrt{\langle \mathcal{U}, \mathcal{U} \rangle_A}.$$

Исходное подпространство  $D(A)$  является подпространством в  $H_A$  в следующем смысле. Каждый элемент  $u \in D(A)$  порождает класс  $\mathcal{U}$  фундаментальных последовательностей, эквивалентных стационарной последовательности  $u_k = u$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Ясно, что такой класс  $\mathcal{U}$  состоит из последовательностей  $\{u_k\}$ , сходящихся к элементу  $u$  в норме  $\|\cdot\|_A$ . Пусть  $\tilde{D}(A)$  — множество классов фундаментальных последовательностей, эквивалентных какой-либо стационарной последовательности элементов множества  $D(A)$ . Если классы  $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \tilde{D}(A)$  порождены стационарными последовательностями, соответствующими элементам  $u, v \in D(A)$ , то

$$\langle \mathcal{U}, \mathcal{V} \rangle_A = \langle u, v \rangle_A = \langle Au, v \rangle_H.$$

Ясно, что  $\tilde{D}(A)$  представляет собой подпространство в  $H_A$ , изоморфное  $D(A)$  и плотное в  $H_A$ . Пространство  $H_A$  описано.

Следует заметить, что с классами фундаментальных последовательностей работать неудобно. Поэтому дадим другое, более удобное, описание пространства  $H_A$ .

Покажем, что каждому классу  $\mathcal{U} \in H_A$  можно следующим образом поставить в соответствие элемент  $u \in H$ . Возьмём произвольную фундаментальную последовательность  $\{u_k\} \in \mathcal{U}$ . Из неравенства (6.1.2) следует, что

$$\|u_k - u_m\|_H^2 \leq \frac{1}{\mu} \|u_k - u_m\|_A^2 \rightarrow 0, \quad k, m \rightarrow \infty.$$



Это значит, что последовательность  $\{u_k\}$  фундаментальна в  $H$ , и, в силу полноты  $H$ , сходится к некоторому элементу  $u \in H$ :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k - u\|_H = 0.$$

Нетрудно видеть, что элемент  $u$  не зависит от выбора последовательности  $\{u_k\} \in \mathcal{U}$ . Искомый элемент  $u \in H$ , соответствующий классу  $\mathcal{U}$ , построен. Это соответствие кратко будем обозначать так:  $\mathcal{U} \Rightarrow u$ . Построенное соответствие, очевидно, линейно: если  $\mathcal{U} \Rightarrow u$ ,  $\mathcal{V} \Rightarrow v$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , то  $\mathcal{W} = \alpha\mathcal{U} + \beta\mathcal{V} \Rightarrow \alpha u + \beta v$ . Важно убедиться, что разным классам  $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in H_A$  соответствуют разные элементы  $u, v \in H$ . Допустим, что  $u = v$ . Тогда, в силу линейности построенного соответствия, классу  $\mathcal{W} = \mathcal{U} - \mathcal{V}$  соответствует элемент  $w = u - v = 0 \in H$ . Покажем, что это возможно только в том случае, когда  $\mathcal{W} = 0$ , т.е.  $\mathcal{W}$  — класс фундаментальных последовательностей, эквивалентных стационарной нулевой последовательности  $u_k = 0$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Возьмём произвольный элемент  $\mathcal{Z} \in \tilde{D}(A)$ . По определению множества  $\tilde{D}(A)$ , существует элемент  $z \in D(A)$ , такой, что стационарная последовательность  $z_k = z$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , принадлежит классу  $\mathcal{Z}$ . Пусть  $\{w_k\} \in \mathcal{W}$ . Так как  $\mathcal{W} \Rightarrow w = 0$ , то  $w_k \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow \infty$ , в норме  $\|\cdot\|_H$ . Тогда с учётом равенства (6.1.1) имеем

$$\langle \mathcal{W}, \mathcal{Z} \rangle_A = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle w_k, z_k \rangle_A = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle Aw_k, z \rangle_H = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle w_k, Az \rangle_H = \langle 0, Az \rangle_H = 0.$$

Таким образом,

$$\langle \mathcal{W}, \mathcal{Z} \rangle_A = 0 \quad \forall \mathcal{Z} \in \tilde{D}(A).$$

Так как  $\tilde{D}(A)$  плотно в  $H_A$ , то последнее равенство возможно только при  $\mathcal{W} = 0$ , т.е. при  $\mathcal{U} = \mathcal{V}$ . Тем самым доказано, что если  $\mathcal{U} \neq \mathcal{V}$ ,  $\mathcal{U} \Rightarrow u$ ,  $\mathcal{V} \Rightarrow v$ , то  $u \neq v$ .

Через  $V_A$  обозначим множество, состоящее из тех элементов  $u \in H$ , которые соответствуют какому-либо классу  $\mathcal{U} \in H_A$ . Линейность построенного соответствия  $\mathcal{U} \Rightarrow u$  гарантирует, что  $V_A$  — линейное подпространство пространства  $H$ , с операциями, совпадающими с операциями исходного пространства  $H$ , причём  $V_A$  изоморфно  $H_A$ . Введём в  $V_A$  скалярное произведение по правилу

$$\langle u, v \rangle_{V_A} = \langle \mathcal{U}, \mathcal{V} \rangle_A, \quad \text{где } \mathcal{U}, \mathcal{V} \in H_A, \mathcal{U} \Rightarrow u, \mathcal{V} \Rightarrow v.$$

В результате линейное пространство  $V_A$  превращается в евклидово пространство, изометричное гильбертову пространству  $H_A$ . Значит,  $V_A$  также является полным пространством.

Гильбертово пространство  $V_A$  принято называть энергетическим пространством, соответствующим симметричному положительному оператору  $A : H \rightarrow H$ . Так как  $\tilde{D}(A) \Rightarrow D(A)$  и  $\tilde{D}(A)$  плотно в  $H_A$ , то  $D(A)$  — подпространство в  $V_A$ , плотное в  $V_A$ . В дальнейшем построенные изометричные гильбертовы пространства  $H_A$  и  $V_A$  будем отождествлять и использовать в качестве основного обозначение  $V_A$ .

Энергетическое пространство  $V_A$  по самому построению поэлементно вкладывается в пространство  $H$ . Это вложение плотно, так как  $D(A) \subset V_A \subset H$  и  $D(A)$  плотно в  $H$  ввиду определения оператора  $A$ . Кроме того, это вложение непрерывно, что вытекает из неравенства

$$\|u\|_H \leq \frac{1}{\sqrt{\mu}} \|u\|_A \quad \forall u \in V_A. \quad (6.1.9)$$

Справедливость этого неравенства для  $u \in D(A)$  непосредственно следует из (6.1.2), (6.1.8). Если же  $u \in V_A$ ,  $u \notin D(A)$ , то из построения пространства  $V_A$  и плотности  $D(A)$  в  $V_A$  следует существование последовательности  $u_k \in D(A)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , такой, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k - u\|_H = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k - u\|_A = 0.$$

Отсюда, зная, что (6.1.9) верно для  $u = u_k \in D(A)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , и переходя к пределу при  $k \rightarrow \infty$ , с учётом непрерывности норм в  $H$  и  $V_A$  получим (6.1.9) для всех  $u \in V_A$ .

Итак, вложение  $V_A \subset H$  двух гильбертовых пространств является поэлементным, плотным, и непрерывным. Тогда справедлива цепочка вложений (6.1.6):

$$V = V_A \subset H^* \simeq H \subset V_A^* = V^*, \quad (6.1.10)$$

в которой, согласно теореме 6.1.1, вложение  $H^* \subset V_A^*$  — также поэлементное, плотное, и непрерывное. Неравенство (6.1.7) здесь имеет вид

$$\|u\|_{V_A^*} \leq \frac{1}{\sqrt{\mu}} \|u\|_H \quad \forall u \in H. \quad (6.1.11)$$

Пользуясь (6.1.9)–(6.1.11), доопределим оператор  $A$  на всё пространство  $V_A$ . Напомним, что оператор  $A$  пока что определён на линейном многообразии  $D(A)$ , плотном в  $V_A$ , его значения  $Af$  принадлежат  $H$  при всех  $f \in D(A)$ , и, кроме того, он обладает свойствами (6.1.1), (6.1.2).

Пользуясь приведённой выше трактовкой включения (6.1.10), будем считать, что

$$Af \in H \simeq H^* \subset V_A^*,$$

т.е.  $Af$  — линейный непрерывный функционал над  $V_A$ , определённый так (напоминаем, что элементы  $R_H^{-1}(Af)$  и  $Af$  отождествляются):

$$\langle Af, \varphi \rangle = \langle Af, \varphi \rangle_H = \langle f, \varphi \rangle_A \quad \forall \varphi \in V_A \subset H \quad \forall f \in D(A) \subset V_A, \quad (6.1.12)$$

и, следовательно, оператор  $A$  действует из  $V_A$  в  $V_A^*$ . Этот оператор является ограниченным. В самом деле, из (6.1.12) имеем

$$|\langle Af, \varphi \rangle| = |\langle f, \varphi \rangle_A| \leq \|f\|_A \|\varphi\|_A \quad \forall \varphi \in V_A \quad \forall f \in D(A).$$

Это означает, что

$$\|Af\|_{V_A^*} = \sup_{\varphi \in V_A, \|\varphi\|_A \leq 1} \langle Af, \varphi \rangle \leq \|f\|_A \quad \forall f \in D(A), \quad (6.1.13)$$

т.е.  $\|A\| \leq 1$ . Таким образом,  $A \in \mathcal{L}(V_A, V_A^*)$ , область определения  $D(A)$  — плотна в  $H$ . Тогда существует оператор  $\tilde{A}$  с областью определения  $D(\tilde{A}) = V_A$ , областью значений  $R(\tilde{A}) \subset V_A^*$ , являющийся продолжением оператора  $A$ . Оператор  $\tilde{A}$  строится так. Если  $f \in D(A)$ , то полагаем  $\tilde{A}f = Af$ . Если  $f \in V_A$ , но  $f \notin D(A)$ , то, в силу построения пространства  $V_A$ , существует последовательность  $f_k \in D(A)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , такая, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|f_k - f\|_H = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|f_k - f\|_A = 0.$$

Тогда

$$\|Af_k - Af_m\|_{V_A^*} = \|A(f_k - f_m)\|_{V_A^*} \leq \|A\| \|f_k - f_m\|_A \rightarrow 0$$

при  $k, m \rightarrow \infty$ . Это значит, что последовательность  $Af_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , — фундаментальна в  $V_A^*$ . Поэтому, в силу полноты пространства  $V_A^*$ , найдётся элемент  $y \in V_A^*$ , такой, что  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|Af_k - y\|_{V_A^*} = 0$ . Нетрудно видеть, что элемент  $y$  зависит лишь от  $f$ , а не от последовательности  $f_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , аппроксимирующей  $f$ . Положим по определению  $\tilde{A}f = y$ . Построенный оператор  $\tilde{A}$  определён на всём пространстве  $V_A$  и является линейным. Кроме того, из неравенства (6.1.13), справедливого при  $f = f_k \in D(A)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , предельным переходом по  $k \rightarrow \infty$  получим

$$\|\tilde{A}f\|_{V_A^*} \leq \|f\|_A \quad \forall f \in V_A.$$

Следовательно,  $\tilde{A} \in \mathcal{L}(V_A, V_A^*)$ , причём  $\|\tilde{A}\| \leq 1$ . Устремляя в равенстве (6.1.12), записанном для  $f = f_k$ ,  $k$  к бесконечности, получаем, что

$$\langle \tilde{A}f, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle_A \quad \forall f, \varphi \in V_A. \quad (6.1.14)$$

В (6.1.14) переменные  $f$  и  $\varphi$  равноправны. Поэтому

$$\langle \tilde{A}f, \varphi \rangle = \langle \varphi, f \rangle_A.$$

Отсюда и из равенства  $\langle f, \varphi \rangle_A = \langle \varphi, f \rangle_A$  следует, что

$$\langle \tilde{A}f, \varphi \rangle = \langle f, \tilde{A}\varphi \rangle \quad \forall f, \varphi \in V_A,$$

т.е.  $\tilde{A}$  — симметричный оператор (здесь и далее символы  $\langle \tilde{A}f, \varphi \rangle$  и  $\langle \varphi, \tilde{A}f \rangle$ , обозначающие значение функционала  $\tilde{A}f \in V_A^*$  на элементе  $\varphi$ , считаются равноправными). Далее, из (6.1.9) и (6.1.14) вытекает положительная определённость оператора  $\tilde{A}$ :

$$\mu \|f\|_H^2 \leq \|f\|_A^2 = \langle f, f \rangle_A = \langle \tilde{A}f, f \rangle \quad \forall f \in V_A.$$

Полученный оператор  $\tilde{A}$  часто называют энергетическим расширением оператора  $A$ .

Заметим, что равенство (6.1.14) можно интерпретировать как явное определение расширенного оператора  $\tilde{A}$ , так как оно задаёт правило действия значения  $\tilde{A}f$  оператора  $\tilde{A}$  на произвольный элемент  $\varphi \in V_A$  при каждом  $f \in V_A$ . Более того, из (6.1.14) вытекает тесная связь между оператором  $\tilde{A}$  и оператором Рисса  $R_{V_A} : V^* \rightarrow V$  пространства  $V^*$ :

$$\tilde{A} = R_{V_A}^{-1}. \quad (6.1.15)$$

В самом деле, для оператора  $R_{V_A}$  имеем (свойство 5)):

$$\langle R_{V_A}^{-1}f, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle_A \quad \forall f, \varphi \in V_A.$$

Отсюда и из (6.1.14) получаем

$$\langle \tilde{A}f, \varphi \rangle = \langle R_{V_A}^{-1}f, \varphi \rangle \quad \forall f, \varphi \in V_A,$$

что равносильно (6.1.15). Из (6.1.15) и свойств оператора Рисса следует, что область значений  $R(\tilde{A})$  оператора  $\tilde{A}$  совпадает с  $V_A^*$ , оператор  $\tilde{A}$  взаимно однозначно отображает  $V_A$  на  $V_A^*$ , обратный оператор  $\tilde{A}^{-1} = R_{V_A} \in \mathcal{L}(V_A^*, V_A)$ ,  $\|\tilde{A}\| = \|\tilde{A}^{-1}\| = 1$ , а скалярное произведение в  $V_A^*$  с учётом формул (6.1.3), (6.1.15) можно записать в виде

$$\langle f, g \rangle_{V_A^*} = \langle R_{V_A}f, R_{V_A}g \rangle_{V_A} = \langle \tilde{A}^{-1}f, \tilde{A}^{-1}g \rangle_{V_A} \quad \forall f, g \in V_A.$$

Исследуем теперь существование счётной системы собственных элементов оператора  $\tilde{A}$ . Для удобства изложения оператор  $\tilde{A}$  переобозначим через  $A$ ; а область его определения,  $V_A$ , будем обозначать просто через  $V$ . Иначе говоря, будем предполагать, что описанные выше процедуры расширения уже проведены, и сам оператор  $A$  является энергетическим расширением некоторого линейного, неограниченного, симметричного, положительно определённого оператора с областью определения, плотной в вещественном сепарабельном гильбертовом пространстве  $H$ . Таким образом  $A \in \mathcal{L}(V, V^*)$ , где  $V$  — энергетическое гильбертово пространство,  $V^*$  — сопряжённое к  $V$  пространство,  $D(A) = V$  — область определения оператора  $A$ ,  $R(A) = V^*$  — область значений оператора  $A$ . Оператор  $A$  симметричен:

$$\langle Au, v \rangle = \langle u, Av \rangle \quad \forall u, v \in V, \quad (6.1.16)$$

положительно определёнен:

$$\exists \mu > 0 \quad \forall u \in V : \langle Au, u \rangle \geq \mu \|u\|_H^2, \quad (6.1.17)$$

и осуществляет взаимно однозначное отображение пространства  $V$  на пространство  $V^*$ ; обратный оператор  $A^{-1}$  принадлежит  $\mathcal{L}(V^*, V)$ ,  $\|A\| = \|A^{-1}\| = 1$ . Скалярное произведение и норма в  $V$  равны соответственно  $\langle u, v \rangle_V = \langle Au, v \rangle$  и  $\|u\|_V = \langle Au, u \rangle^{1/2}$ , а скалярное произведение и норма в  $V^*$  определяются как

$$\langle f, g \rangle_{V^*} = \langle A^{-1}f, A^{-1}g \rangle_V = \langle f, A^{-1}g \rangle \quad \forall f, g \in V.$$

Имеют место вложения

$$V \subset H \simeq H^* \subset V^*, \quad (6.1.18)$$

причём эти вложения являются плотными и непрерывными, т.е.

$$\|f\|_H \leq C \|f\|_V \quad \forall f \in V$$

и

$$\|f\|_{V^*} \leq C \|f\|_H \quad \forall f \in H,$$

где  $C = \mu^{-1/2}$ . Напоминаем также, что в (6.1.16), (6.1.17), и далее запись  $\langle f, v \rangle$  означает результат применения функционала  $f \in V^*$  к элементу  $v \in V$ ; то же означает записать  $\langle v, f \rangle$ . Если о функционале  $f \in V^*$  дополнительно известно, что  $f \in H$  или  $f \in V$ , то, как следует из определения вложения (6.1.18),  $\langle f, v \rangle = \langle f, v \rangle_H$  для любых  $f \in H$  и, тем более, для любых  $f \in V$ .

От оператора  $A$  дополнительно будем требовать, чтобы порождаемое им энергетическое пространство  $V$  вкладывалось в пространство  $H$  компактно.

**Определение 6.1.2.** Собственным элементом оператора  $A$ , соответствующим собственному числу  $\lambda$ , называется элемент  $e \in V$ ,  $e \neq 0$ , такой, что

$$Ae = \lambda e. \quad (6.1.19)$$

Поскольку  $Ae \in V^*$  и (в силу (6.1.18))  $V \subset V^*$ , то равенство (6.1.19) понимается как равенство двух линейных функционалов над  $V$ , т.е. как

$$\langle Ae, \varphi \rangle = \lambda \langle e, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in V.$$

**Теорема 6.1.2.** Пусть  $A \in \mathcal{L}(V, V^*)$  — энергетическое расширение линейного, неограниченного, симметричного, положительно определённого оператора с областью определения, плотной в  $H$ , и пусть вложение  $V \subset H$  компактно. Тогда оператор  $A$  обладает счётной системой собственных чисел  $\lambda_k$ ,

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = +\infty,$$

а соответствующая система  $e_k \in V$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , собственных элементов образует ортонормированный базис в  $H$ . При этом система  $\frac{e_k}{\sqrt{\lambda_k}}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , является ортонормированным базисом в  $V$ , а система  $e_k \sqrt{\lambda_k}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , — ортонормированным базисом в  $V^*$ . Для элементов и их норм в пространствах  $H$ ,  $V$ ,  $V^*$  имеют место представления

$$v = \sum_{j=1}^{\infty} v_j e_j, \quad v_j = \langle v, e_j \rangle_H, \quad j = 1, 2, \dots, \quad \|v\|_V^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \omega_j^2 |v_j|^2, \quad \forall v \in V; \quad (6.1.20)$$

$$h = \sum_{j=1}^{\infty} h_j e_j, \quad h_j = \langle h, e_j \rangle_H, \quad j = 1, 2, \dots, \quad \|h\|_H^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |h_j|^2, \quad \forall h \in H; \quad (6.1.21)$$

$$v^* = \sum_{j=1}^{\infty} v_j^* e_j, \quad v_j^* = \langle v^*, e_j \rangle, \quad j = 1, 2, \dots, \quad \|v^*\|_{V^*}^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|v_j^*|^2}{\omega_j^2}, \quad \forall v^* \in V^*; \quad (6.1.22)$$

где

$$\omega_j \equiv \sqrt{\lambda_j}, \quad j = 1, 2, \dots$$

**Доказательство.** Рассмотрим вспомогательную задачу минимизации

$$J(u) \equiv \langle Au, u \rangle = \|u\|_V^2 \rightarrow \inf, \quad u \in U_1 \equiv \{u \in V : \|u\|_H = 1\}. \quad (6.1.23)$$

Из (6.1.17) следует, что

$$\lambda_1 = \inf_{u \in U_1} J(u) \geq \mu > 0.$$

Пусть  $u_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , — произвольная минимизирующая последовательность задачи (6.1.23), т.е.

$$u_n \in V, \quad \|u_n\|_H = 1, \quad n = 1, 2, \dots; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} J(u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_V^2 = \lambda_1.$$

Поскольку числовая последовательность  $\|u_n\|_V^2$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , сходится, то она ограничена. Это означает, что последовательность  $u_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , ограничена в норме пространства  $V$ . В силу компактности вложения  $V \subset H$  из последовательности  $u_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , можно выделить сходящуюся в норме пространства  $H$  к некоторому элементу  $e_1 \in H$  подпоследовательность. Без ограничения общности можем считать, что сама последовательность  $u_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , сходится к  $e_1$  сильно в  $H$ . Из того, что  $\|u_n\|_H = 1$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , следует, что  $\|e_1\|_H = 1$ .

Покажем, что  $e_1 \in V$  и  $\|u_n - e_1\|_V \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Для этого сначала установим, что последовательность  $u_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , фундаментальна в  $V$ . С этой целью возьмём произвольный элемент  $v \in V$  и положим

$$w_n = (u_n + tv) \|u_n + tv\|_H^{-1}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Так как  $w_n \in U_1$ , то  $J(w_n) \geq \lambda_1$ , что равносильно неравенству

$$\|u_n + tv\|_V^2 \geq \lambda_1 \|u_n + tv\|_H^2 \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

или, что то же, неравенству

$$t^2 [\|v\|_V^2 - \lambda_1 \|v\|_H^2] + 2t [\langle u_n, v \rangle_V - \lambda_1 \langle u_n, v \rangle_H] + J(u_n) - \lambda_1 \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \forall v \in V. \quad (6.1.24)$$

Поделив данное неравенство на  $t^2$  и перейдя затем к пределу при  $t \rightarrow \infty$ , получим, что

$$\|v\|_V^2 - \lambda_1 \|v\|_H^2 \geq 0 \quad \forall v \in V. \quad (6.1.25)$$

Если коэффициент при  $t^2$  в (6.1.24) отличен от нуля, то для выполнения неравенства (6.1.24) при всех  $t \in \mathbb{R}$  необходимо, чтобы

$$(\langle u_n, v \rangle_V - \lambda_1 \langle u_n, v \rangle_H)^2 - (\|v\|_V^2 - \lambda_1 \|v\|^2 H)(J(u_n) - \lambda_1) \leq 0 \quad \forall v \in V. \quad (6.1.26)$$

Если коэффициент при  $t^2$  в (6.1.24) равен нулю, то (6.1.24) имеет место лишь тогда, когда коэффициент при  $t$  также равен нулю, что снова приводит к (6.1.26). Таким образом, неравенство (6.1.26) верно во всех случаях, и выполняется при всех  $v \in V$ .

Возьмём в (6.1.25), (6.1.26)  $v = u_n - u_m \in V$ . Учтывая, что  $J(u_n) \geq \lambda_1 > 0$ , получим

$$\begin{aligned} |\langle u_n, u_n - u_m \rangle_V - \lambda_1 \langle u_n, u_n - u_m \rangle_H| &\leq (\|u_n - u_m\|_V^2 - \lambda_1 \|u_n - u_m\|^2 H)^{1/2} (J(u_n) - \lambda_1)^{1/2} \leq \\ &\leq \|u_n - u_m\|_V (J(u_n) - \lambda_1)^{1/2} \leq C_0 (J(u_n) - \lambda_1)^{1/2}, \quad m, n = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

где  $C_0$  — некоторая константа. Поменяв ролями  $n$  и  $m$ , выводим, что

$$|\langle u_m, u_m - u_n \rangle_V - \lambda_1 \langle u_m, u_m - u_n \rangle_H| \leq C_0 (J(u_m) - \lambda_1)^{1/2}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|u_n - u_m\|_V^2 - \lambda_1 \|u_n - u_m\|^2 H = (\langle u_n, u_n - u_m \rangle_V - \lambda_1 \langle u_n, u_n - u_m \rangle_H) - \\ &- (\langle u_m, u_m - u_n \rangle_V - \lambda_1 \langle u_m, u_m - u_n \rangle_H) \leq C_0 [(J(u_n) - \lambda_1)^{1/2} + (J(u_m) - \lambda_1)^{1/2}], \end{aligned}$$

или, иначе,

$$\|u_n - u_m\|_V^2 \leq \lambda_1 \|u_n - u_m\|^2 H + C_0 [(J(u_n) - \lambda_1)^{1/2} + (J(u_m) - \lambda_1)^{1/2}], \quad m, n = 1, 2, \dots$$

Правая часть этого неравенства при  $n, m \rightarrow \infty$  стремится к нулю, ибо последовательность  $u_n, n = 1, 2, \dots$ , фундаментальна в  $H$  и минимизирует функционал  $J$  на  $U_1$ . Как следствие, последовательность  $u_n, n = 1, 2, \dots$ , — фундаментальна в  $V$ , и потому сильно в  $V$  сходится к некоторому элементу  $\tilde{e}_1 \in V$ . В силу (6.1.17), из сходимости в  $V$  следует сходимость в  $H$ , что означает совпадение элементов  $e_1$  и  $\tilde{e}_1$ . Таким образом,  $u_n \rightarrow e_1, n \rightarrow \infty$ , в норме пространства  $V$ , в силу чего

$$J(u_n) = \|u_n\|_V^2 \rightarrow \|e_1\|_V^2 = J(e_1) = \lambda_1, \quad n \rightarrow \infty; \quad e_1 \in U_1, \quad J(e_1) = \lambda_1 = \|e_1\|_V^2;$$

т.е.  $e_1$  — решение задачи (6.1.23). Покажем, что  $e_1$  — собственный вектор оператора  $A$ , соответствующий собственному числу  $\lambda_1$ . С этой целью совершим в (6.1.24) предельный переход при  $n \rightarrow \infty$ . С учётом равенства  $\|e_1\|_V^2 = \lambda_1$  получим неравенство

$$t^2 [\|v\|_V^2 - \lambda_1 \|v\|^2 H] + 2t [\langle e_1, v \rangle_V - \lambda_1 \langle e_1, v \rangle_H] \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \forall v \in V,$$

выполнение которого при всех  $t \in \mathbb{R}$  возможно только тогда, когда коэффициент при  $t$  равен нулю:

$$\lambda_1 \langle e_1, v \rangle_H = \langle e_1, v \rangle_V = \langle A e_1, v \rangle \quad \forall v \in V. \quad (6.1.27)$$

Это означает, что  $\lambda_1$  — собственное число оператора  $A$ , а  $e_1$  — соответствующий этому числу собственный элемент.

Для доказательства существования следующего собственного числа  $\lambda_2 \geq \lambda_1 \geq \mu > 0$  и соответствующего ему собственного элемента  $e_2$  в  $V$ , возьмём подпространство

$$V^1 = \{v \in V : \langle e_1, v \rangle_V = 0\}$$

и рассмотрим в  $V^1$  вспомогательную задачу минимизации, аналогичную задаче (6.1.23):

$$J(u) \equiv \langle Au, u \rangle = \|u\|_V^2 \rightarrow \inf, \quad u \in U_2 \equiv \{u \in V^1 : \|u\|_H = 1\}. \quad (6.1.28)$$

Полезно заметить, что  $V^1 = V \cap H^1$ , где  $H^1 = \{v \in H : \langle e_1, v \rangle_H = 0\}$ . В самом деле, если  $v \in V$ , то как видно из (6.1.27), равенство  $\langle e_1, v \rangle_V = 0$  имеет место тогда и только тогда, когда  $\langle e_1, v \rangle_H = 0$ .

Так как  $U_2 \subset U_1$ , то  $\lambda_2 = \inf_{u \in U_2} J(u) \geq \lambda_1 \geq \mu > 0$ . Рассуждая затем так же, как при исследовании задачи (6.1.23), с заменой  $V$  на  $V^1$ ,  $\lambda_1$  на  $\lambda_2$ , устанавливаем, что существует элемент  $e_2 \in U_2$ , такой, что  $J(e_2) = \lambda_2$ ; и что  $\lambda_2$  — собственное число оператора  $A$ , а  $e_2$  — соответствующий собственный элемент, причём

$$\langle e_1, e_2 \rangle_V = 0, \quad \langle e_1, e_2 \rangle_H = 0, \quad \|e_2\|_H = 1, \quad \|e_2\|_V^2 = \lambda_2.$$

Далее сделаем индуктивное предположение: пусть уже построены собственные элементы  $e_1, \dots, e_k$ , соответствующие собственным числам

$$\mu \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{k-1} \leq \lambda_k,$$

такие, что

$$e_i \in V, \langle e_i, e_j \rangle_H = 0, \langle e_i, e_j \rangle_V = 0, i \neq j, \|e_i\|_H = 1, \|e_i\|_V^2 = \lambda_i, i, j = \overline{1, k}.$$

Тогда вводим в  $V$  подпространство

$$V^k = \{v \in V : \langle e_1, v \rangle_V = 0, \dots, \langle e_k, v \rangle_V = 0\}$$

и рассматриваем задачу минимизации

$$J(u) \equiv \langle Au, u \rangle = \|u\|_V^2 \rightarrow \inf, u \in U_{k+1} \equiv \{u \in V^k : \|u\|_H = 1\}. \quad (6.1.29)$$

Аналогично (6.1.23), (6.1.28) доказываем существование элемента

$$e_{k+1} \in U_{k+1}, J(e_{k+1}) = \lambda_{k+1} = \inf_{u \in U_{k+1}} J(u) \geq \lambda_k,$$

где  $\lambda_k$  — собственное число оператора  $A$ , а  $e_{k+1}$  — соответствующий собственный элемент, причём

$$\langle e_i, e_{k+1} \rangle_V = 0, \langle e_i, e_{k+1} \rangle_H = 0, \|e_{k+1}\|_H = 1, \|e_{k+1}\|_V^2 = \lambda_{k+1} \quad \forall i = \overline{1, k}.$$

В бесконечномерном пространстве  $V$  этот процесс построения собственных чисел может быть продолжен неограниченно, и в результате мы получим последовательность собственных чисел оператора  $A$ ,

$$0 < \mu \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots,$$

и последовательность соответствующих им собственных элементов  $e_1, \dots, e_k, \dots$ , причём

$$e_k \in V, \|e_k\|_H = 1, \|e_k\|_V^2 = \lambda_k, \langle e_k, e_j \rangle_V = 0, \langle e_k, e_j \rangle_H = 0, k \neq j, k, j = 1, 2, \dots,$$

т.е. система  $e_k, k = 1, 2, \dots$ , является ортонормированной системой в  $H$ , а система  $\frac{e_k}{\sqrt{\lambda_k}}, k = 1, 2, \dots$ , — ортонормированной системой в  $V$ .

Убедимся в том, что система  $e_k \sqrt{\lambda_k}, k = 1, 2, \dots$ , является ортонормированной системой в  $V^*$ . В самом деле, поскольку

$$\langle f, g \rangle_{V^*} = \langle A^{-1}f, A^{-1}g \rangle_V \quad \forall f, g \in V^*, \quad A^{-1}e_k = \frac{1}{\lambda_k} e_k,$$

то при  $i \neq k$

$$\langle e_i, e_k \rangle_{V^*} = \langle A^{-1}e_i, A^{-1}e_k \rangle_V = \frac{1}{\lambda_i \lambda_k} \langle e_i, e_k \rangle_V = 0,$$

а при  $i = k$  отсюда же имеем

$$\|e_k\|_{V^*}^2 = \frac{1}{\lambda_k^2} \|e_k\|_V^2 = \frac{\lambda_k}{\lambda_k^2} = \frac{1}{\lambda_k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Докажем, что на самом деле система  $e_k, k = 1, 2, \dots$ , образует ортонормированный базис в пространстве  $H$ , система  $\frac{e_k}{\sqrt{\lambda_k}}, k = 1, 2, \dots$ , — ортонормированный базис в пространстве  $V$ , а система  $e_k \sqrt{\lambda_k}, k = 1, 2, \dots$ , — ортонормированный базис в  $V^*$ . Для этого сначала покажем, что  $\lambda_k \rightarrow \infty, k \rightarrow \infty$ . В самом деле, если бы неубывающая последовательность  $\lambda_k, k = 1, 2, \dots$ , имела бы конечный предел  $\lambda$ , то из равенств  $\|e_k\|_V^2 = \lambda_k, k = 1, 2, \dots$ , следовало бы, что  $\|e_k\|_V^2 \rightarrow \lambda < \infty, k \rightarrow \infty$ , т.е. последовательность  $e_k, k = 1, 2, \dots$ , была бы ограниченной в норме пространства  $V$ . По условию теоремы, вложение  $V \subset H$  — компактно, и поэтому из последовательности  $e_k, k = 1, 2, \dots$ , можно было бы выделить подпоследовательность  $e_{k_m}, m = 1, 2, \dots$ , сильно сходящуюся в норме пространства  $H$ . Однако последовательность  $e_k, k = 1, 2, \dots$ , — ортонормированная система в  $H$ , и потому  $\|e_{k_m} - e_{k_n}\|_H^2 = \|e_{k_m}\|_H^2 - 2\langle e_{k_m}, e_{k_n} \rangle_H + \|e_{k_n}\|_H^2 = 2$  для всех  $m, n = 1, 2, \dots$ , т.е. последовательность  $e_{k_m}, m = 1, 2, \dots$ , фундаментальной в норме пространства  $H$  быть не может. Полученное противоречие означает, что на самом деле  $\lambda_k \rightarrow \infty, k \rightarrow \infty$ . Далее докажем, что система  $e_k, k = 1, 2, \dots$ , полна в  $V$ , т.е. если для некоторого  $v \in V$  выполнено равенство  $\langle e_k, v \rangle_V = 0$ ,

$k = 1, 2, \dots$ , то  $v = 0$ . Предположим противное: пусть существует элемент  $e \in V$ ,  $e \neq 0$ , такой, что  $\langle e_k, e \rangle_V = 0$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Тогда

$$e \in V^\infty = \{v \in V : \langle e_k, v \rangle_V = 0, \quad k = 1, 2, \dots\}.$$

где  $V^\infty$  — подпространство в  $V$ . По аналогии с (6.1.23), (6.1.28), (6.1.29) рассмотрим задачу минимизации

$$J(u) = \|u\|_V^2 \rightarrow \inf, \quad u \in U_\infty = \{u' \in V^\infty : \|u'\|_H = 1\}.$$

Рассуждая так же, как и выше, показываем, что существует собственный элемент  $e_\infty \in U_\infty$  оператора  $A$ , отвечающий собственному числу

$$\lambda_\infty = J(u_\infty) = \|u_\infty\|_V^2 = \inf_{u \in U_\infty} J(u).$$

Так как  $U_\infty \subset U_k$  при всех  $k = 1, 2, \dots$ , то  $\lambda_k \leq \lambda_\infty < \infty$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , а это противоречит уже установленному соотношению

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = +\infty.$$

Полнота системы  $e_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , в пространстве  $V$  доказана. Это означает, что линейная оболочка элементов  $e_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , плотна в  $V$ , и, в силу плотности вложений  $V \subset H \simeq H^* \subset V^*$ , эта линейная оболочка будет плотна также и в пространствах  $H$  и  $V^*$ . Отсюда следует, что ортонормированная система  $\frac{e_k}{\sqrt{\lambda_k}}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , — полна в  $V$ , ортонормированная система  $e_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , — полна в  $H$ , а ортонормированная система  $e_k \sqrt{\lambda_k}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , — полна в  $V^*$ . Поэтому система  $\frac{e_k}{\sqrt{\lambda_k}}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , — ортонормированный базис в пространстве  $V$ , система  $e_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , — ортонормированный базис в пространстве  $H$ , система  $e_k \sqrt{\lambda_k}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , — ортонормированный базис в пространстве  $V^*$ , а любой элемент из пространств  $V$ ,  $H$ ,  $V^*$  разлагается в сильно сходящийся ряд Фурье по соответствующей системе. Так, если  $u \in H$ , то

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k e_k, \quad u_k = \langle u, e_k \rangle_H,$$

а равенство

$$\|u\|_H^2 = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^2$$

представляет собой обычное равенство Парсеваля–Стеклова. Если  $u \in V$ , то

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} v_k \left[ \frac{e_k}{\sqrt{\lambda_k}} \right], \quad v_k = \left\langle u, \frac{e_k}{\sqrt{\lambda_k}} \right\rangle_V = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \langle A e_k, u \rangle = \sqrt{\lambda_k} \langle u, e_k \rangle_H = \sqrt{\lambda_k} u_k,$$

а равенство Парсеваля–Стеклова в пространстве  $V$  записывается в виде

$$\|u\|_V^2 = \sum_{k=1}^{\infty} v_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k u_k^2.$$

Наконец, если  $u \in V^*$ , то

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} w_k [e_k \sqrt{\lambda_k}], \quad w_k = \langle u, e_k \sqrt{\lambda_k} \rangle_{V^*} = \langle u, A^{-1}(e_k \sqrt{\lambda_k}) \rangle = \left\langle u, \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} e_k \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \langle u, e_k \rangle = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} u_k,$$

а равенство Парсеваля–Стеклова принимает вид

$$\|u\|_V^2 = \sum_{k=1}^{\infty} w_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} u_k^2.$$

Теорема полностью доказана. ■

## 6.2. Абстрактная задача Коши с автономной главной частью

Пусть  $H$  — сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением  $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$  и соответствующей нормой  $\| \cdot \|_H$ . Пусть  $\mathfrak{A} \in \mathcal{L}(V, V^*)$  — энергетическое расширение некоторого линейного неограниченного симметричного положительно определённого оператора с плотной в  $H$  областью определения,  $V$  — энергетическое пространство. Оператор  $\mathfrak{A}$  симметричен

$$\langle \mathfrak{A}f, g \rangle = \langle f, \mathfrak{A}g \rangle_H \quad \forall f, g \in V;$$

положительно определённый

$$\langle \mathfrak{A}f, f \rangle \geq \mu \|f\|_H^2 \quad \forall f \in V,$$

где  $\mu > 0$  — некоторая постоянная, не зависящая от выбора  $f \in V$ ; и осуществляет взаимно однозначное отображение  $V$  на  $V^*$ ; обратный оператор  $\mathfrak{A}^{-1} \in \mathcal{L}(V^*, V)$ ,  $\|\mathfrak{A}\| = \|\mathfrak{A}^{-1}\| = 1$ . Скалярное произведение и норма в  $V$  равны соответственно  $\langle u, v \rangle_V = \langle \mathfrak{A}u, v \rangle$  и  $\|u\|_V = \sqrt{\langle \mathfrak{A}u, u \rangle}$ , а скалярное произведение и норма в  $V^*$  определяются как  $\langle f, g \rangle_{V^*} = \langle \mathfrak{A}^{-1}f, \mathfrak{A}^{-1}g \rangle_V = \langle f, \mathfrak{A}^{-1}g \rangle$  и  $\|f\|_{V^*} = \|\mathfrak{A}^{-1}f\|_V$ . Согласно разделу 6.1, имеют место вложения

$$V \subset H \simeq H^* \subset V^*,$$

причём эти вложения плотны и непрерывны, т.е.

$$\|f\|_H \leq C \|f\|_V \quad \forall f \in V; \quad \|f\|_{V^*} \leq C \|f\|_H \quad \forall f \in H;$$

где  $C = \mu^{-1/2}$ . Пусть, кроме того, вложение  $V \subset H$  — компактно.

Пусть отображение  $\beta: \mathfrak{D}_1([0, T]; V, H) \rightarrow L_1([0, T], H)$  таково, что для некоторой функции  $K_0 \in L_1[0, T]$

$$\begin{aligned} \|\beta[\mathfrak{z}_1](t) - \beta[\mathfrak{z}_2](t)\|_H &\leq K_0(t) \sqrt{\|\mathfrak{z}_1(t) - \mathfrak{z}_2(t)\|_V^2 + \|\dot{\mathfrak{z}}_1(t) - \dot{\mathfrak{z}}_2(t)\|_H^2} \\ \forall (t, \mathfrak{z}_i) &\in [0, T] \times \mathfrak{D}_1([0, T]; V, H), \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (6.2.1)$$

Наконец, пусть  $\varphi \in V$ ,  $\psi \in H$ ,  $P \in L_1(\Gamma, \mathcal{L}(H, H))$ .

Рассмотрим задачу Коши

$$\ddot{\mathfrak{z}}(t) + \mathfrak{A}\dot{\mathfrak{z}}(t) = \beta[\mathfrak{z}](t) + \int_0^t P(t, \tau) \dot{\mathfrak{z}}(\tau) d\tau, \quad t \in [0, T], \quad (6.2.2)$$

$$\mathfrak{z}(0) = \varphi, \quad \dot{\mathfrak{z}}(0) = \psi, \quad (6.2.3)$$

и дадим следующее

**Определение 6.2.1.** Функцию  $\mathfrak{z} \in \mathfrak{D}_1([0, T]; V, H)$  назовём решением задачи Коши (6.2.2), (6.2.3), если

$$\begin{aligned} \int_0^T [-\langle \dot{\mathfrak{z}}(t), \dot{\eta}(t) \rangle_H + \langle \mathfrak{A}\dot{\mathfrak{z}}(t), \eta(t) \rangle] dt &= \langle \psi, \eta(0) \rangle + \int_0^T \langle \theta[t, \mathfrak{z}], \eta(t) \rangle_H dt \quad \forall \eta \in \hat{\mathfrak{D}}_1([0, T]; V, H); \\ \mathfrak{z}(0) &= \varphi. \end{aligned} \quad (6.2.4)$$

Под  $\hat{\mathfrak{D}}_1([0, T]; V, H)$  мы в данном определении понимаем множество  $\{\mathfrak{z} \in \mathfrak{D}_1([0, T]; V, H) : \mathfrak{z}(T) = 0\}$ , а под  $\theta[t, \mathfrak{z}]$  — выражение

$$\beta[\mathfrak{z}](t) + \int_0^t P(t, \tau) \dot{\mathfrak{z}}(\tau) d\tau, \quad t \in [0, T].$$

Начиная с этого момента здесь и всюду ниже через  $e_j$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , мы обозначаем последовательность элементов  $V$ , таких, что

$$\begin{aligned} \langle e_i, e_j \rangle_H &= \delta_j^i, \quad \langle e_i, e_j \rangle_V = \delta_j^i \lambda_j, \quad Ae_j = \lambda_j e_j, \quad i, j = 1, 2, \dots, \\ 0 < \lambda_1 &\leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_j \leq \lambda_{j+1} \leq \dots, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \lambda_j = +\infty. \end{aligned} \quad (6.2.5)$$



Согласно разделу 6.1,

$$v = \sum_{j=1}^{\infty} v_j e_j, \quad v_j = \langle v, e_j \rangle_H, \quad j = 1, 2, \dots, \quad \|v\|_V^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \omega_j^2 |v_j|^2, \quad \forall v \in V; \quad (6.2.6)$$

$$h = \sum_{j=1}^{\infty} h_j e_j, \quad h_j = \langle h, e_j \rangle_H, \quad j = 1, 2, \dots, \quad \|h\|_H^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |h_j|^2, \quad \forall h \in H; \quad (6.2.7)$$

$$v^* = \sum_{j=1}^{\infty} v_j^* e_j, \quad v_j^* = \langle v^*, e_j \rangle, \quad j = 1, 2, \dots, \quad \|v^*\|_{V^*}^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|v_j^*|^2}{\omega_j^2}, \quad \forall v^* \in V^*; \quad (6.2.8)$$

где

$$\omega_j \equiv \sqrt{\lambda_j}, \quad j = 1, 2, \dots$$

Дадим ещё одно определение решения задачи Коши (6.2.2), (6.2.3).

**Определение 6.2.2.** Функцию  $\mathfrak{z} \in \mathfrak{D}_2([0, T]; V, H)$  назовём решением задачи Коши (6.2.2), (6.2.3), если

$$\begin{aligned} \langle \ddot{\mathfrak{z}}(t), v \rangle + \langle \mathfrak{A}\mathfrak{z}(t), v \rangle &= \langle \theta[t, \mathfrak{z}], v \rangle \quad \text{при н.в. } t \in [0, T] \quad \forall v \in V, \\ \mathfrak{z}(0) &= \varphi, \quad \dot{\mathfrak{z}}(0) = \psi. \end{aligned} \quad (6.2.9)$$

Пусть  $\mathfrak{M}^N \equiv \{ \sum_{j=1}^N \zeta_j e_j : \zeta_j \in W_2^1[0, T], \zeta_j(T) = 0, j = \overline{1, N} \}$ ,  $\mathfrak{M} \equiv \bigcup_{N=1}^{\infty} \mathfrak{M}^N$ .

Докажем, что справедлива следующая

**Лемма 6.2.1.** Определения 6.2.1 и 6.2.2 — эквивалентны.

**Доказательство.** 1) Докажем, что если функция  $\mathfrak{z} \in \mathfrak{D}_2([0, T]; V, H)$  является решением в смысле определения 6.2.2, то она является и решением в смысле определения 6.2.1.

В самом деле, пусть  $\mathfrak{z} \in \mathfrak{D}_2([0, T]; V, H)$  — решение в смысле определения 6.2.2.

Поскольку, согласно лемме 2.4.1,  $\mathfrak{M} \equiv \bigcup_{N=1}^{\infty} \mathfrak{M}^N$  плотно в  $\hat{\mathfrak{D}}_1([0, T]; V, H)$ , то нам достаточно доказать, что тождество (6.2.4) справедливо для функций  $\eta$ , имеющих вид  $\eta(t) \equiv \zeta(t)e_j$ ,  $t \in [0, T]$ , где  $\zeta \in W_2^1[0, T]$ ,  $\zeta(T) = 0$ .

Действительно, применив взяв в равенстве (6.2.9)  $v = \zeta(t)e_j$ ,  $t \in [0, T]$ , и проинтегрировав результат по  $t \in [0, T]$ , будем иметь

$$\int_0^T \langle \ddot{\mathfrak{z}}(t), \zeta(t)e_j \rangle dt + \int_0^T \langle \mathfrak{A}\mathfrak{z}(t), \zeta(t)e_j \rangle dt = \int_0^T \langle \theta[t, \mathfrak{z}], \zeta(t)e_j \rangle dt.$$

Взяв первый из стоящих слева интегралов по частям, получим справедливость тождества (6.2.4) для функций  $\eta$ , имеющих вид  $\eta(t) \equiv \zeta(t)e_j$ ,  $t \in [0, T]$ , где  $\zeta \in W_2^1[0, T]$ ,  $\zeta(T) = 0$ .

Таким образом, мы доказали, что если  $\mathfrak{z} \in \mathfrak{D}_2([0, T]; V, H)$  является решением в смысле определения 6.2.2, то она является и решением в смысле определения 6.2.1.

2) Докажем теперь, что если функция  $\mathfrak{z} \in \mathfrak{D}_1([0, T]; V, H)$  является решением в смысле определения 6.2.1, то она является и решением в смысле определения 6.2.2.

Подставляя в интегральное тождество (6.2.4)  $\eta(t) \equiv \zeta(t)v$ ,  $t \in [0, T]$ , где  $\zeta \in W_2^1[0, T]$ ,  $\zeta(T) = 0$ ,  $v \in V$ , заключаем, что

$$\int_0^T \langle -\dot{\mathfrak{z}}(t), \zeta'(t)v \rangle dt + \int_0^T \langle \mathfrak{A}\mathfrak{z}(t), \zeta(t)v \rangle dt = \int_0^T \langle \theta[t, \mathfrak{z}], \zeta(t)v \rangle dt + \langle \psi, \zeta(0)v \rangle. \quad (6.2.10)$$

В частности, для всех  $\zeta \in \mathfrak{D}(0, T)$

$$\int_0^T \langle -\dot{\mathfrak{z}}(t), \zeta'(t)v \rangle dt + \int_0^T \langle \mathfrak{A}\mathfrak{z}(t), \zeta(t)v \rangle dt = \int_0^T \langle \theta[t, \mathfrak{z}], \zeta(t)v \rangle dt + \langle \psi, \zeta(0)v \rangle. \quad (6.2.11)$$

Положив затем  $\tilde{\theta}(\zeta) \equiv \int_0^T \theta[t, \mathfrak{z}](t)\zeta(t) dt$ ,  $\mathfrak{Z}(\zeta) \equiv \int_0^T \mathfrak{z}(t)\zeta(t) dt$ , и замечая, что  $\mathfrak{Z}'(\zeta) \equiv -\int_0^T \mathfrak{z}(t)\dot{\zeta}(t) dt$ , из тождества (6.2.11) получаем, что

$$-\mathfrak{Z}'(\zeta') + \mathfrak{A}\mathfrak{Z}(\zeta) = \tilde{\theta}(\zeta), \quad \forall \zeta \in \mathfrak{D}(0, T),$$

или, иначе,

$$\mathfrak{Z}''(\zeta) + \mathfrak{A}\mathfrak{Z}(\zeta) = \tilde{\theta}(\zeta) \quad \forall \zeta \in \mathfrak{D}(0, T).$$

Последнее означает, что  $\mathfrak{Z}''$  — регулярна, и лежит в  $L_1([0, T], V^*)$ . Поэтому  $\mathfrak{z} \in \mathfrak{D}_2([0, T]; V, H)$ , и

$$\langle \ddot{\mathfrak{z}}(t) + \mathfrak{A}\mathfrak{z}(t) - \theta[t, \mathfrak{z}], v \rangle = 0, \quad \forall v \in V. \quad (6.2.12)$$

Взяв по частям первый из интегралов, стоящих в левой части тождества 6.2.10, выводим, что

$$\int_0^T \langle \ddot{\mathfrak{z}}(t) + \mathfrak{A}\mathfrak{z}(t) - \theta[t, \mathfrak{z}], \zeta(t)v \rangle dt + \langle \dot{\mathfrak{z}}(0), \zeta(0)v \rangle = \langle \psi, \zeta(0)v \rangle.$$

Учтя здесь равенство (6.2.12), получим, что

$$\langle \dot{\mathfrak{z}}(0) - \psi, v \rangle = 0 \quad \forall v \in V.$$

Иными словами,

$$\dot{\mathfrak{z}}(0) = \psi.$$

Из этого соотношения и соотношения (6.2.12) и вытекает, что  $\mathfrak{z}$  является решением в смысле определения 6.2.2.

Лемма полностью доказана. ■

Покажем, что задача Коши (6.2.2), (6.2.3) эквивалентна некоторому интегро-дифференциальному уравнению в пространстве  $\mathfrak{D}_1([0, T]; V, H)$ . Для этого нам потребуется ввести ряд обозначений и доказать ряд результатов.

Прежде всего для любого  $h \in H$  положим

$$\Pi_1(t)h = \sum_{m=1}^{\infty} \cos(\omega_m t) h_m e_m, \quad \Pi_2(t, \xi)h = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(\omega_m(t - \xi))}{\omega_m} h_m e_m, \quad (t, \xi) \in \Gamma.$$

Справедлива следующая

**Лемма 6.2.2.** 1) При всех  $(t, \xi) \in \Gamma$  справедливы включения  $\Pi_1(t) \in \mathcal{L}(H, H)$ ,  $\Pi_1(t) \in \mathcal{L}(V, V)$ ,  $\Pi_2(t, \xi) \in \mathcal{L}(H, V)$ , причём при всех  $(t, \xi) \in \Gamma$  имеют место неравенства

$$\|\Pi_1(t)\|_{H \rightarrow H} \leq 1, \quad \|\Pi_1(t)\|_{V \rightarrow V} \leq 1, \quad \|\Pi_2(t, \xi)\|_{H \rightarrow V} \leq 1.$$

- 2) При каждом  $h \in H$  ряд для  $\Pi_1(t)h$  сходится в норме  $H$  равномерно по  $t \in [0, T]$ .
- 3) При каждом  $v \in V$  ряд для  $\Pi_1(t)v$  сходится в норме  $V$  равномерно по  $t \in [0, T]$ .
- 4) При каждом  $h \in H$  ряд для  $\Pi_2(t, \xi)h$  сходится в норме  $V$  равномерно по  $(t, \xi) \in \Gamma$ .
- 5) При каждом  $h \in H$  функция  $[0, T] \ni t \mapsto \Pi_1(t)h$  принадлежит  $C([0, T], H)$ .
- 6) При каждом  $v \in V$  функция  $[0, T] \ni t \mapsto \Pi_1(t)v$  — элемент пространства  $C([0, T], V)$ .
- 7) При каждом  $h \in H$  функция  $\Gamma \ni (t, \xi) \mapsto \Pi_2(t, \xi)h$  принадлежит  $C(\Gamma, V)$ .
- 8) Для любой функции  $y \in C([0, T], H)$  функция  $\Gamma \ni (t, \xi) \mapsto \Pi_2(t, \xi)y(\xi)$  — элемент  $C(\Gamma, V)$ .

**Доказательство.** 1) Докажем первое утверждение леммы. В самом деле, пусть  $h \in H$ ,  $v \in V$ ,  $(t, \xi) \in \Gamma$ , — произвольны. Тогда

$$\begin{aligned} \|\Pi_1(t)h\|_H^2 &= \sum_{m=1}^{\infty} \cos^2(\omega_m t) h_m^2 \leq \sum_{m=1}^{\infty} h_m^2 = \|h\|_H^2, \quad \|\Pi_1(t)v\|_V^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \cos^2(\omega_m t) v_m^2 \omega_m^2 \leq \sum_{m=1}^{\infty} v_m^2 \omega_m^2 = \|v\|_V^2, \\ \|\Pi_2(t, \xi)h\|_V^2 &= \sum_{m=1}^{\infty} \left| \frac{\sin(\omega_m(t - \xi))}{\omega_m} h_m \right|^2 \omega_m^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \sin^2(\omega_m(t - \xi)) h_m^2 \leq \sum_{m=1}^{\infty} h_m^2 = \|h\|_H^2. \end{aligned}$$

Таким образом, при всех  $h \in H$ ,  $v \in V$ ,  $(t, \xi) \in \Gamma$  имеют место соотношения

$$\|\Pi_1(t)v\|_V \leq \|h\|_H, \quad \|\Pi_1(t)v\|_V \leq \|v\|_V, \quad \|\Pi_2(t, \xi)h\|_V \leq \|h\|_H,$$

которые и доказывают первое утверждение леммы.

2) Докажем остальные утверждения леммы. Пусть  $h \in H$ ,  $v \in V$  — произвольны. Во-первых, заметим, что  $[0, T]$  и  $\Gamma$ , рассматриваемые со стандартной топологией, — компактные топологические пространства. При этом функции

$$[0, T] \ni t \mapsto \cos(\omega_m t) h_m \in \mathbb{R}, \quad [0, T] \ni t \mapsto \cos(\omega_m t) v_m \in \mathbb{R}, \quad m = 1, 2, \dots,$$

непрерывны на  $[0, T]$ , а функции

$$\Gamma \ni (t, \xi) \mapsto \frac{\sin(\omega_m(t - \xi))}{\omega_m} h_m \in \mathbb{R}, \quad m = 1, 2, \dots,$$

непрерывны на  $\Gamma$ .

Во-вторых, при всех  $(t, \xi) \in \Gamma$  имеют место оценки

$$|\cos(\omega_m t) h_m| \leq |h_m|, \quad |\cos(\omega_m t) v_m| \leq |v_m|, \quad \left| \frac{\sin(\omega_m(t - \xi))}{\omega_m} h_m \right| \leq \frac{1}{\omega_m} |h_m|, \quad m = 1, 2, \dots,$$

из которых следует, что

$$\begin{aligned} |\cos(\omega_m t) h_m|^2 \|e_m\|_H^2 &\leq |h_m|^2, \quad |\cos(\omega_m t) v_m|^2 \|e_m\|_V^2 \leq |v_m|^2 \omega_m^2, \\ \left| \frac{\sin(\omega_m(t - \xi))}{\omega_m} h_m \right|^2 \|e_m\|_V^2 &\leq |h_m|^2, \quad m = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Пользуясь теперь теоремой 1.5.2, получаем второе, третье и четвёртое утверждения леммы.

Пятое, шестое и седьмое утверждения являются следствиями второго, третьего и четвёртого утверждений и следствия 1.5.1.

Восьмое утверждение вытекает из включения  $y \in C([0, T], H)$ , седьмого утверждения и леммы 1.1.9. Лемма полностью доказана. ■

Из лемм 1.6.1 и 6.2.2 вытекает

**Лемма 6.2.3.** Для любой функции  $y \in L_1([0, T], H)$  функция

$$[0, T] \ni t \mapsto \int_0^t \Pi_2(t, \xi) y(\xi) d\xi$$

непрерывна по  $t \in [0, T]$  в норме  $V$ .

Для каждого  $y \in \mathfrak{D}_1([0, T]; V, H)$  положим

$$\Lambda_0[y](t) \equiv \Pi_1(t) \varphi + \Pi_2(t, 0) \psi + \int_0^t \Pi_2(t, \xi) \theta[\xi, y] d\xi, \quad t \in [0, T]. \quad (6.2.13)$$

Из лемм 6.2.2 и 6.2.3 следует, что

$$\Lambda_0[y] \in C([0, T], V) \quad \forall y \in \mathfrak{D}_1([0, T]; V, H). \quad (6.2.14)$$

Изучим теперь дифференциальные свойства функции  $\Lambda_0[y]$ . Для этого нам потребуется ввести два линейных оператора.

Для любых  $v \in V$  и  $h \in H$  положим

$$\Pi_3(t)v = \sum_{m=1}^{\infty} [-\omega_m \sin(\omega_m t)] v_m e_m, \quad \Pi_4(t, \xi)h = \sum_{m=1}^{\infty} \cos(\omega_m(t - \xi)) h_m e_m, \quad (t, \xi) \in \Gamma.$$

**Лемма 6.2.4.** 1) При всех  $(t, \xi) \in \Gamma$  справедливы включения  $\Pi_3(t) \in \mathcal{L}(V, H)$ ,  $\Pi_4(t, \xi) \in \mathcal{L}(H, H)$ , причём при всех  $(t, \xi) \in \Gamma$  имеют место неравенства

$$\|\Pi_3(t)\|_{V \rightarrow H} \leq 1, \quad \|\Pi_4(t, \xi)\|_{H \rightarrow H} \leq 1.$$

2) При каждом  $v \in V$  ряд для  $\Pi_3(t)v$  сходится в норме  $H$  равномерно по  $t \in [0, T]$ .

3) При каждом  $h \in H$  ряд для  $\Pi_4(t, \xi)h$  сходится в норме  $H$  равномерно по  $(t, \xi) \in \Gamma$ .

4) При каждом  $v \in V$  функция  $[0, T] \ni t \mapsto \Pi_3(t)v$  — элемент пространства  $C([0, T], H)$ .

5) При каждом  $h \in H$  функция  $\Gamma \ni (t, \xi) \mapsto \Pi_4(t, \xi)h$  принадлежит  $C(\Gamma, H)$ .

**Доказательство.** 1) Докажем первое утверждение леммы. В самом деле, пусть  $h \in H$ ,  $v \in V$ ,  $(t, \xi) \in \Gamma$ , — произвольны. Тогда

$$\begin{aligned} \|\Pi_3(t)v\|_H^2 &= \sum_{m=1}^{\infty} \omega_m^2 \sin^2(\omega_m t) v_m^2 \leq \sum_{m=1}^{\infty} \omega_m^2 v_m^2 = \|v\|_V^2, \\ \|\Pi_4(t, \xi)h\|_H^2 &= \sum_{m=1}^{\infty} \cos^2(\omega_m(t - \xi)) h_m^2 \leq \sum_{m=1}^{\infty} h_m^2 = \|h\|_H^2. \end{aligned}$$

Таким образом, при всех  $h \in H$ ,  $v \in V$ ,  $(t, \xi) \in \Gamma$  имеют место соотношения

$$\|\Pi_3(t)v\|_H \leq \|v\|_V, \quad \|\Pi_4(t, \xi)h\|_H \leq \|h\|_H,$$

которые и доказывают первое утверждение леммы.

2) Докажем остальные утверждения леммы. Пусть  $h \in H$ ,  $v \in V$  — произвольны. Во-первых, заметим, что  $[0, T]$  и  $\Gamma$ , рассматриваемые со стандартной топологией, — компактные топологические пространства. При этом функции

$$[0, T] \ni t \mapsto -\omega_m \sin(\omega_m t) v_m \in \mathbb{R}, \quad m = 1, 2, \dots,$$

непрерывны на  $[0, T]$ , а функции

$$\Gamma \ni (t, \xi) \mapsto \cos(\omega_m(t - \xi)) h_m \in \mathbb{R}, \quad m = 1, 2, \dots,$$

непрерывны на  $\Gamma$ .

Во-вторых, при всех  $(t, \xi) \in \Gamma$  имеют место оценки

$$|-\omega_m \sin(\omega_m t) v_m| \leq \omega_m |v_m|, \quad |\cos(\omega_m(t - \xi)) h_m| \leq |h_m|, \quad m = 1, 2, \dots,$$

из которых следует, что

$$|-\omega_m \sin(\omega_m t) v_m|^2 \|e_m\|_H^2 \leq \omega_m^2 |v_m|^2, \quad |\cos(\omega_m(t - \xi)) h_m|^2 \|e_m\|_H^2 \leq |h_m|^2, \quad m = 1, 2, \dots$$

Пользуясь теперь теоремой 1.5.2, получаем второе и третье утверждения леммы.

Четвёртое и пятое утверждения вытекают из второго и третьего и из следствия 1.5.1. Лемма полностью доказана. ■

**Лемма 6.2.5.** При всех  $h \in H$  и  $v \in V$ ,  $(t, \xi) \in \Gamma$  справедливы равенства

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\| \left[ \frac{\Pi_1(t + \Delta t) - \Pi_1(t)}{\Delta t} - \Pi_3(t) \right] v \right\|_H = 0, \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\| \left[ \frac{\Pi_2(t + \Delta t, \xi) - \Pi_2(t, \xi)}{\Delta t} - \Pi_4(t, \xi) \right] h \right\|_H = 0.$$

**Доказательство.** 1) Предельное соотношение

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\| \left[ \frac{\Pi_1(t + \Delta t) - \Pi_1(t)}{\Delta t} - \Pi_3(t) \right] v \right\|_H = 0$$

вытекает из непрерывности вложения  $V \subset H$ , третьего утверждения леммы 6.2.2, второго утверждения леммы 6.2.4 и следствия 1.5.2.

2) Равенство

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\| \left[ \frac{\Pi_2(t + \Delta t, \xi) - \Pi_2(t, \xi)}{\Delta t} - \Pi_4(t, \xi) \right] h \right\|_H = 0$$

вытекает из непрерывности вложения  $V \subset H$ , четвёртого утверждения леммы 6.2.2, третьего утверждения леммы 6.2.4 и следствия 1.5.3. ■

Из лемм 1.6.1 и 6.2.4 вытекает

**Лемма 6.2.6.** Для любой функции  $y \in L_1([0, T], H)$  функция

$$[0, T] \ni t \mapsto \int_0^t \Pi_4(t, \xi) y(\xi) d\xi$$

непрерывна по  $t \in [0, T]$  в норме  $H$ .

Из лемм 6.2.2 и 6.2.6 и теоремы 1.6.3 вытекает

**Лемма 6.2.7.** Для любой функции  $y \in C([0, T], H)$  функция

$$[0, T] \ni t \mapsto \int_0^t \Pi_2(t, \xi) y(\xi) d\xi$$

непрерывно дифференцируема на  $[0, T]$  в норме пространства  $H$ , причём

$$\frac{d}{dt} \int_0^t \Pi_2(t, \xi) y(\xi) d\xi = \int_0^t \Pi_4(t, \xi) y(\xi) d\xi \quad \forall t \in [0, T].$$

**Лемма 6.2.8.** Для любой функции  $y \in L_1([0, T], H)$  функция

$$[0, T] \ni t \mapsto \int_0^t \Pi_2(t, \xi) y(\xi) d\xi$$

непрерывно дифференцируема на  $[0, T]$  в норме пространства  $H$ , причём

$$\frac{d}{dt} \int_0^t \Pi_2(t, \xi) y(\xi) d\xi = \int_0^t \Pi_4(t, \xi) y(\xi) d\xi \quad \forall t \in [0, T].$$

**Доказательство.** Для всех  $y \in L_1([0, T], H)$  положим

$$\Xi_1[y](t) = \int_0^t \Pi_2(t, \xi) y(\xi) d\xi, \quad \Xi_2[y](t) = \int_0^t \Pi_4(t, \xi) y(\xi) d\xi, \quad t \in [0, T].$$

Предположим сначала, что  $y \in C([0, T], H)$ . Тогда, согласно лемме 6.2.7, для всех  $h \in H$  выполнено тождество

$$\left\langle \Xi_1[y](t) - \Xi_1[y](0) - \int_0^t \Xi_2[y](\eta) d\eta, h \right\rangle_H = 0 \quad \forall t \in [0, T].$$

Пусть теперь  $y \in L_1([0, T], H)$ . Тогда найдётся последовательность  $y_j \in C([0, T], H)$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , такая, что  $\lim_{j \rightarrow \infty} \|y_j - y\|_{1, [0, T], H} = 0$ . Для каждого  $j = 1, 2, \dots$  можем записать тождество

$$\left\langle \Xi_1[y_j](t) - \Xi_1[y_j](0) - \int_0^t \Xi_2[y_j](\eta) d\eta, h \right\rangle_H = 0 \quad \forall t \in [0, T].$$

Перейдя затем к пределу при  $j \rightarrow \infty$ , получаем требуемое равенство для случая  $y \in L_1([0, T], H)$ . Лемма полностью доказана. ■

Для каждого  $y \in \mathfrak{D}_1([0, T]; V, H)$  положим

$$\Lambda_1[y](t) \equiv \Pi_3(t)\varphi + \Pi_4(t, 0)\psi + \int_0^t \Pi_4(t, \xi)\theta[\xi, y] d\xi, \quad t \in [0, T].$$

Из лемм 6.2.4 и 6.2.6 следует, что

$$\Lambda_1[y] \in C([0, T], H) \quad \forall y \in \mathfrak{D}_1([0, T]; V, H).$$

Кроме того, согласно леммам 6.2.5 и 6.2.8, при каждом  $y \in \mathfrak{D}_1([0, T]; V, H)$  функция  $\Lambda_0[y]$  непрерывно дифференцируема на  $[0, T]$  в норме  $H$ , причём

$$\frac{d}{dt} \Lambda_0[y](t) = \Lambda_1[y](t) \quad \forall t \in [0, T].$$

Итак, мы доказали, что  $\Lambda_0$  можно рассматривать как оператор, переводящий пространство  $\mathfrak{D}_1([0, T]; V, H)$  в себя.

Изучим теперь возможность дальнейшего дифференцирования функции  $\Lambda_0[y]$ , или, что то же самое, дифференциальные свойства функции  $\Lambda_1[y]$ .

Для всех  $h \in H$ ,  $v \in V$  положим

$$\Pi_5(t)v = \sum_{m=1}^{\infty} [-\omega_m^2 \cos(\omega_m t)] v_m e_m, \quad \Pi_6(t, \xi)h = \sum_{m=1}^{\infty} [-\omega_m \sin(\omega_m(t - \xi))] h_m e_m, \quad (t, \xi) \in \Gamma.$$

**Лемма 6.2.9.** 1) При всех  $(t, \xi) \in \Gamma$  справедливы включения  $\Pi_5(t) \in \mathcal{L}(V, V^*)$ ,  $\Pi_6(t, \xi) \in \mathcal{L}(H, V^*)$ , причём при всех  $(t, \xi) \in \Gamma$  имеют место неравенства

$$\|\Pi_5(t)\|_{V \rightarrow V^*} \leq 1, \quad \|\Pi_6(t, \xi)\|_{H \rightarrow V^*} \leq 1.$$

- 2) При каждом  $v \in V$  ряд для  $\Pi_5(t)v$  сходится в норме  $V^*$  равномерно по  $t \in [0, T]$ .  
3) При каждом  $h \in H$  ряд для  $\Pi_6(t, \xi)h$  сходится в норме  $V^*$  равномерно по  $(t, \xi) \in \Gamma$ .  
4) При каждом  $v \in V$  функция  $[0, T] \ni t \mapsto \Pi_5(t)v$  — элемент пространства  $C([0, T], V^*)$ .  
5) При каждом  $h \in H$  функция  $\Gamma \ni (t, \xi) \mapsto \Pi_6(t, \xi)h$  принадлежит  $C(\Gamma, V^*)$ .

**Доказательство.** 1) Докажем первое утверждение леммы. В самом деле, пусть  $h \in H$ ,  $v \in V$ ,  $(t, \xi) \in \Gamma$ , — произвольны. Тогда

$$\begin{aligned}\|\Pi_5(t)v\|_{V^*}^2 &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_m^2} |-\omega_m^2 \cos(\omega_m t)|^2 v_m^2 \leq \sum_{m=1}^{\infty} \omega_m^2 v_m^2 = \|v\|_V^2, \\ \|\Pi_6(t, \xi)h\|_{V^*}^2 &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_m^2} |-\omega_m \sin(\omega_m(t - \xi))|^2 h_m^2 \leq \sum_{m=1}^{\infty} h_m^2 = \|h\|_H^2.\end{aligned}$$

Таким образом, при всех  $h \in H$ ,  $v \in V$ ,  $(t, \xi) \in \Gamma$  имеют место соотношения

$$\|\Pi_5(t)v\|_{V^*} \leq \|v\|_V, \quad \|\Pi_6(t, \xi)h\|_{V^*} \leq \|h\|_H,$$

которые и доказывают первое утверждение леммы.

2) Докажем остальные утверждения леммы. Пусть  $h \in H$ ,  $v \in V$  — произвольны. Во-первых, заметим, что  $[0, T]$  и  $\Gamma$ , рассматриваемые со стандартной топологией, — компактные топологические пространства. При этом функции

$$[0, T] \ni t \mapsto -\omega_m^2 \cos(\omega_m t) v_m \in \mathbb{R}, \quad m = 1, 2, \dots,$$

непрерывны на  $[0, T]$ , а функции

$$\Gamma \ni (t, \xi) \mapsto -\omega_m \sin(\omega_m(t - \xi)) h_m \in \mathbb{R}, \quad m = 1, 2, \dots,$$

непрерывны на  $\Gamma$ .

Во-вторых, при всех  $(t, \xi) \in \Gamma$  имеют место оценки

$$|-\omega_m^2 \cos(\omega_m t) v_m| \leq \omega_m^2 |v_m|, \quad |-\omega_m \sin(\omega_m(t - \xi)) h_m| \leq \omega_m |h_m|, \quad m = 1, 2, \dots,$$

из которых следует, что

$$|-\omega_m^2 \cos(\omega_m t) v_m|^2 \|e_m\|_{V^*}^2 \leq \omega_m^2 |v_m|^2, \quad |-\omega_m \sin(\omega_m(t - \xi)) h_m|^2 \|e_m\|_{V^*}^2 \leq |h_m|^2, \quad m = 1, 2, \dots$$

Пользуясь теперь теоремой 1.5.2, получаем второе и третье утверждения леммы.

Четвёртое и пятое утверждения вытекают из второго и третьего утверждений и из следствия 1.5.1.

Лемма полностью доказана. ■

**Лемма 6.2.10.** При всех  $h \in H$  и  $v \in V$ ,  $(t, \xi) \in \Gamma$  справедливы равенства

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\| \left[ \frac{\Pi_3(t + \Delta t) - \Pi_3(t)}{\Delta t} - \Pi_5(t) \right] v \right\|_{V^*} = 0, \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\| \left[ \frac{\Pi_4(t + \Delta t, \xi) - \Pi_4(t, \xi)}{\Delta t} - \Pi_6(t, \xi) \right] h \right\|_{V^*} = 0.$$

**Доказательство.** 1) Предельное соотношение

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\| \left[ \frac{\Pi_3(t + \Delta t) - \Pi_3(t)}{\Delta t} - \Pi_5(t) \right] v \right\|_{V^*} = 0$$

следует из непрерывности вложений  $V \subset H \cong H^* \subset V^*$ , второго утверждения леммы 6.2.4, второго утверждения леммы 6.2.9 и следствия 1.5.2.

2) Равенство

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\| \left[ \frac{\Pi_4(t + \Delta t, \xi) - \Pi_4(t, \xi)}{\Delta t} - \Pi_6(t, \xi) \right] h \right\|_{V^*} = 0$$

вытекает из непрерывности вложений  $V \subset H \cong H^* \subset V^*$ , третьего утверждения леммы 6.2.4, третьего утверждения леммы 6.2.9 и следствия 1.5.3. ■

Из лемм 1.6.1 и 6.2.9 вытекает

**Лемма 6.2.11.** Для любой функции  $y \in L_1([0, T], H)$  функция

$$[0, T] \ni t \mapsto \int_0^t \Pi_6(t, \xi) y(\xi) d\xi$$

непрерывна по  $t \in [0, T]$  в норме  $V^*$ .

Из лемм 6.2.4 и 6.2.11 и теоремы 1.6.3 вытекает

**Лемма 6.2.12.** Для любой функции  $y \in C([0, T], H)$  функция

$$[0, T] \ni t \mapsto \int_0^t \Pi_4(t, \xi) y(\xi) d\xi$$

непрерывно дифференцируема на  $[0, T]$  в норме пространства  $V^*$ , причём

$$\frac{d}{dt} \int_0^t \Pi_4(t, \xi) y(\xi) d\xi = \int_0^t \Pi_6(t, \xi) y(\xi) d\xi \quad \forall t \in [0, T].$$

**Лемма 6.2.13.** Для любой функции  $y \in L_1([0, T], H)$  функция

$$[0, T] \ni t \mapsto \int_0^t \Pi_4(t, \xi) y(\xi) d\xi$$

абсолютно непрерывна на  $[0, T]$  в норме пространства  $V^*$ , причём её обобщённая производная имеет вид

$$\frac{d}{dt} \int_0^t \Pi_4(t, \xi) y(\xi) d\xi = y(t) + \int_0^t \Pi_6(t, \xi) y(\xi) d\xi \quad \forall t \in [0, T].$$

**Доказательство.** Для всех  $y \in L_1([0, T], H)$  положим

$$\Xi_1[y](t) = \int_0^t \Pi_4(t, \xi) y(\xi) d\xi, \quad \Xi_2[y](t) = y(t) + \int_0^t \Pi_6(t, \xi) y(\xi) d\xi, \quad t \in [0, T].$$

Предположим сначала, что  $y \in C([0, T], H)$ . Тогда, согласно лемме 6.2.12, для всех  $v \in V$  выполнено тождество

$$\left\langle \Xi_1[y](t) - \Xi_1[y](0) - \int_0^t \Xi_2[y](\eta) d\eta, v \right\rangle = 0 \quad \forall t \in [0, T].$$

Пусть теперь  $y \in L_1([0, T], H)$ . Тогда найдётся последовательность  $y_j \in C([0, T], H)$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , такая, что  $\lim_{j \rightarrow \infty} \|y_j - y\|_{1, [0, T], H} = 0$ . Для каждого  $j = 1, 2, \dots$  можем записать тождество

$$\left\langle \Xi_1[y_j](t) - \Xi_1[y_j](0) - \int_0^t \Xi_2[y_j](\eta) d\eta, v \right\rangle = 0 \quad \forall t \in [0, T].$$

Перейдя затем к пределу при  $j \rightarrow \infty$ , получаем требуемое равенство для случая  $y \in L_1([0, T], H)$ . Лемма полностью доказана. ■

Для каждого  $y \in \mathfrak{D}_1([0, T]; V, H)$  положим

$$\Lambda_2[y](t) \equiv \Pi_5(t) \varphi + \Pi_6(t, 0) \psi + \int_0^t \Pi_6(t, \xi) \theta[\xi, y] d\xi, \quad t \in [0, T].$$

Из лемм 6.2.9, 6.2.10, 6.2.11 и 6.2.13 следует, что

$$\Lambda_1[y] \in W_1^1([0, T], V^*) \quad \forall y \in \mathfrak{D}_1([0, T]; V, H),$$

причём

$$\frac{d}{dt} \Lambda_1[y](t) = \Lambda_2[y](t) \quad \forall t \in [0, T].$$

Итак, мы доказали, что  $\Lambda_0$  можно рассматривать как оператор, переводящий элементы пространства  $\mathfrak{D}_1([0, T]; V, H)$  в элементы пространства  $\mathfrak{D}_2([0, T]; V, H)$ .

Заметим также, что из определения операторов  $\Lambda_0$  и  $\Lambda_2$  следует, что

$$\Lambda_2[y](t) = -\mathfrak{A}\Lambda_0[y](t) + \theta[t, y], \quad \forall t \in [0, T], \quad y \in \mathfrak{D}_1([0, T]; V, H). \quad (6.2.15)$$

Рассмотрим теперь интегро-дифференциальное уравнение

$$y(t) = \Lambda_0[y](t), \quad t \in [0, T]. \quad (6.2.16)$$

Связь между решениями из  $\mathfrak{D}_1([0, T]; V, H)$  уравнения (6.2.16) и решениями из  $\mathfrak{D}_2([0, T]; V, H)$  задачи Коши (6.2.2)–(6.2.3) даёт следующая

**Лемма 6.2.14.** *Всякое решение  $y \in \mathfrak{D}_1([0, T]; V, H)$  уравнения (6.2.16) является одновременно и решением из  $\mathfrak{D}_2([0, T]; V, H)$  задачи Коши (6.2.2)–(6.2.3). Обратно, всякое решение  $y \in \mathfrak{D}_2([0, T]; V, H)$  задачи Коши (6.2.2)–(6.2.3) является решением уравнения (6.2.16) в классе  $\mathfrak{D}_1([0, T]; V, H)$ .*

**Доказательство.** 1) Пусть  $y \in \mathfrak{D}_1([0, T]; V, H)$  — решение уравнения (6.2.16). Как было доказано выше, ряд для  $\Lambda_1[y](t)$  можно почленно дифференцировать, и полученный дифференцированием ряд сходится равномерно по  $t \in [0, T]$  в норме  $H$  к непрерывной в норме  $H$  функции. Поэтому

$$\dot{y}(t) = \Lambda_1[y](t), \quad \forall t \in [0, T]. \quad (6.2.17)$$

Как показано выше, функция  $\Lambda_1[y]$  абсолютно непрерывна по  $t \in [0, T]$  в норме пространства  $V^*$ . Дифференцируя равенство (6.2.17) и пользуясь равенством (6.2.15), получаем, что

$$\ddot{y}(t) = -\mathfrak{A}\Lambda_0[y](t) + \theta[t, y] \quad \text{при п.в. } t \in [0, T].$$

Поскольку  $y \in \mathfrak{D}_1([0, T]; V, H)$  — решение уравнения (6.2.16), то только что полученное равенство можно переписать в виде

$$\ddot{y}(t) + \mathfrak{A}y(t) = \theta[t, y] \quad \text{при п.в. } t \in [0, T].$$

Итак, если  $y \in \mathfrak{D}_1([0, T]; V, H)$  — решение уравнения (6.2.16), то  $y \in \mathfrak{D}_2([0, T]; V, H)$  и при п.в.  $t \in [0, T]$  удовлетворяет уравнению (6.2.2). Покажем, что  $y$  удовлетворяет начальным условиям (6.2.3).

В самом деле, т.к.  $y$  — решение уравнения (6.2.16), то  $y(0) = \Lambda[y](0) = \Pi_1(0)\varphi = \varphi$ . Кроме того, в силу (6.2.17),  $\dot{y}(0) = \tilde{\Lambda}[y](0) = \Pi_4(0, 0)\psi = \psi$ . Итак, функция  $y$  удовлетворяет начальным условиям (6.2.3).

Следовательно, если  $y \in \mathfrak{D}_1([0, T]; V, H)$  — решение уравнения (6.2.16), то  $y \in \mathfrak{D}_2([0, T]; V, H)$  и является решением из  $\mathfrak{D}_2([0, T]; V, H)$  задачи Коши (6.2.2)–(6.2.3).

2) Покажем, что всякое решение  $y \in \mathfrak{D}_2([0, T]; V, H)$  задачи Коши (6.2.2)–(6.2.3) является решением уравнения (6.2.16) в классе  $\mathfrak{D}_1([0, T]; V, H)$ . В самом деле, пусть  $y \in \mathfrak{D}_2([0, T]; V, H)$  — решение задачи Коши (6.2.2)–(6.2.3). Тогда

$$\langle \ddot{y}(t), e_j \rangle + \langle \mathfrak{A}y(t), e_j \rangle = \langle \theta[t, y], e_j \rangle,$$

т.е.

$$\ddot{y}_j(t) + \omega_k^2 y_j(t) = [\theta[t, y]]_j, \quad k = 1, 2, \dots$$

Следовательно,

$$y_j(t) = \cos(\omega_j t)\varphi_j + \frac{\sin(\omega_j t)}{\omega_j}\psi_j + \int_0^t \frac{\sin(\omega_j(t-\xi))}{\omega_j} [\theta[\xi, y]]_j d\xi,$$

что, в силу определения оператора  $\Lambda_0$ , означает, что

$$y(t) = \Lambda_0[y](t), \quad t \in [0, T].$$

Итак, всякое решение  $y \in \mathfrak{D}_2([0, T]; V, H)$  задачи Коши (6.2.2)–(6.2.3) является решением уравнения (6.2.16) в классе  $\mathfrak{D}_1([0, T]; V, H)$ . Лемма доказана. ■



Прежде чем доказывать существование и единственность решения уравнения (6.2.16), преобразуем выражения для  $\Lambda_0$  и  $\Lambda_1$ , используя определение величины  $\theta[t, y]$ :

$$\begin{aligned}\Lambda_0[y](t) &\equiv \Pi_1(t)\varphi + \Pi_2(t, 0)\psi + \int_0^t \Pi_2(t, \xi)\theta[\xi, y] d\xi = \Pi_1(t)\varphi + \Pi_2(t, 0)\psi + \\ &+ \int_0^t \Pi_2(t, \xi)\beta[y](\xi) d\xi + \int_0^t \Pi_2(t, \xi) \left[ \int_0^\xi P(\xi, \tau)\dot{y}(\tau) d\tau \right] d\xi, \quad t \in [0, T], \quad y \in \mathfrak{D}_1([0, T]; V, H); \\ \Lambda_1[y](t) &\equiv \Pi_3(t)\varphi + \Pi_4(t, 0)\psi + \int_0^t \Pi_4(t, \xi)\theta[\xi, y] d\xi = \Pi_3(t)\varphi + \Pi_4(t, 0)\psi + \\ &+ \int_0^t \Pi_3(t, \xi)\beta[y](\xi) d\xi + \int_0^t \Pi_3(t, \xi) \left[ \int_0^\xi P(\xi, \tau)\dot{y}(\tau) d\tau \right] d\xi, \quad t \in [0, T], \quad y \in \mathfrak{D}_1([0, T]; V, H).\end{aligned}$$

Поменяв порядок интегрирования в последнем интеграле в формуле для  $\Lambda_0$  и в последнем интеграле в формуле для  $\Lambda_1$ , получим, что

$$\begin{aligned}\Lambda_0[y](t) &\equiv \Pi_1(t)\varphi + \Pi_2(t, 0)\psi + \int_0^t \Pi_2(t, \xi)\beta[y](\xi) d\xi + \int_0^t \tilde{\Pi}_2(t, \tau)\dot{y}(\tau) d\tau, \\ \Lambda_1[y](t) &\equiv \Pi_3(t)\varphi + \Pi_4(t, 0)\psi + \int_0^t \Pi_4(t, \xi)\beta[y](\xi) d\xi + \int_0^t \tilde{\Pi}_4(t, \tau)\dot{y}(\tau) d\tau, \\ t &\in [0, T], \quad y \in \mathfrak{D}_1([0, T]; V, H),\end{aligned}$$

где введены обозначения

$$\tilde{\Pi}_2(t, \tau) = \int_\tau^t \Pi_2(t, \xi)P(\xi, \tau)d\xi, \quad \tilde{\Pi}_4(t, \tau) = \int_\tau^t \Pi_4(t, \xi)P(\xi, \tau)d\xi, \quad (t, \tau) \in \Gamma, \quad y \in \mathfrak{D}_1([0, T]; V, H).$$

При этом заметим, что

$$\begin{aligned}\|\tilde{\Pi}_2(t, \tau)h\|_V &\leq \int_\tau^t \|\Pi_2(t, \xi)\|_{H \rightarrow V} \|P(\xi, \tau)\|_{H \rightarrow H} \|h\|_H d\xi \leq \|h\|_H \int_0^T \|P(\xi, \tau)\|_{H \rightarrow H} d\xi, \\ \|\tilde{\Pi}_4(t, \tau)h\|_H &\leq \int_\tau^t \|\Pi_4(t, \xi)\|_{H \rightarrow H} \|P(\xi, \tau)\|_{H \rightarrow H} \|h\|_H d\xi \leq \|h\|_H \int_0^T \|P(\xi, \tau)\|_{H \rightarrow H} d\xi, \\ (t, \tau) &\in \Gamma, \quad h \in H.\end{aligned}$$

Введя обозначения

$$\begin{aligned}\eta_1[y](t, \tau) &\equiv \Pi_2(t, \tau)\beta[y](\tau) + \tilde{\Pi}_2(t, \tau)\dot{y}(\tau), \quad \eta_2[y](t, \tau) \equiv \Pi_4(t, \tau)\beta[y](\tau) + \tilde{\Pi}_4(t, \tau)\dot{y}(\tau), \\ (t, \tau) &\in \Gamma, \quad y \in \mathfrak{D}_1([0, T]; V, H),\end{aligned}$$

получим, что выражения для  $\Lambda_0$  и  $\Lambda_1$  можно переписать в виде

$$\begin{aligned}\Lambda_0[y](t) &\equiv \Pi_1(t)\varphi + \Pi_2(t, 0)\psi + \int_0^t \eta_1[y](t, \tau) d\tau, \quad \Lambda_1[y](t) \equiv \Pi_3(t)\varphi + \Pi_4(t, 0)\psi + \int_0^t \eta_2[y](t, \tau) d\tau, \\ t &\in [0, T], \quad y \in \mathfrak{D}_1([0, T]; V, H).\end{aligned}$$

Далее, пусть  $y_1, y_2 \in \mathfrak{D}_1([0, T]; V, H)$  — произвольны. Тогда при всех  $(t, \tau) \in \Gamma$

$$\begin{aligned}
& \|\eta_1[y_1](t, \tau) - \eta_1[y_2](t, \tau)\|_V \leq \|\Pi_2(t, \tau)[\beta[y_1](\tau) - \beta[y_2](\tau)]\|_V + \|\tilde{\Pi}_2(t, \tau)[\dot{y}_1(\tau) - \dot{y}_2(\tau)]\|_V \leq \\
& \leq \|\Pi_2(t, \tau)\|_{H \rightarrow V} \|\beta[y_1](\tau) - \beta[y_2](\tau)\|_H + \|\tilde{\Pi}_2(t, \tau)\|_{H \rightarrow V} \|\dot{y}_1(\tau) - \dot{y}_2(\tau)\|_H \leq \|\beta[y_1](\tau) - \beta[y_2](\tau)\|_H + \\
& + \|\dot{y}_1(\tau) - \dot{y}_2(\tau)\|_H \int_0^T \|P(\xi, \tau)\|_{H \rightarrow H} d\xi \leq K_0(\tau) \sqrt{\|y_1(t) - y_2(t)\|_V^2 + \|\dot{y}_1(t) - \dot{y}_2(t)\|_H^2} + \\
& + \sqrt{\|y_1(t) - y_2(t)\|_V^2 + \|\dot{y}_1(t) - \dot{y}_2(t)\|_H^2} \int_0^T \|P(\xi, \tau)\|_{H \rightarrow H} d\xi \equiv \tilde{K}_0(\tau) \sqrt{\|y_1(t) - y_2(t)\|_V^2 + \|\dot{y}_1(t) - \dot{y}_2(t)\|_H^2}, \\
& \|\eta_2[y_1](t, \tau) - \eta_2[y_2](t, \tau)\|_H \leq \|\Pi_4(t, \tau)[\beta[y_1](\tau) - \beta[y_2](\tau)]\|_H + \|\tilde{\Pi}_2(t, \tau)[\dot{y}_1(\tau) - \dot{y}_2(\tau)]\|_H \leq \\
& \leq \|\Pi_2(t, \tau)\|_{H \rightarrow H} \|\beta[y_1](\tau) - \beta[y_2](\tau)\|_H + \|\tilde{\Pi}_2(t, \tau)\|_{H \rightarrow H} \|\dot{y}_1(\tau) - \dot{y}_2(\tau)\|_H \leq \|\beta[y_1](\tau) - \beta[y_2](\tau)\|_H + \\
& + \|\dot{y}_1(\tau) - \dot{y}_2(\tau)\|_H \int_0^T \|P(\xi, \tau)\|_{H \rightarrow H} d\xi \leq K_0(\tau) \sqrt{\|y_1(t) - y_2(t)\|_V^2 + \|\dot{y}_1(t) - \dot{y}_2(t)\|_H^2} + \\
& + \sqrt{\|y_1(t) - y_2(t)\|_V^2 + \|\dot{y}_1(t) - \dot{y}_2(t)\|_H^2} \int_0^T \|P(\xi, \tau)\|_{H \rightarrow H} d\xi \equiv \tilde{K}_0(\tau) \sqrt{\|y_1(t) - y_2(t)\|_V^2 + \|\dot{y}_1(t) - \dot{y}_2(t)\|_H^2},
\end{aligned}$$

где введено обозначение

$$\tilde{K}_0(\tau) \equiv K_0(\tau) + \int_0^T \|P(\xi, \tau)\|_{H \rightarrow H} d\xi, \quad \tau \in [0, T].$$

Иначе говоря, при всех  $y_1, y_2 \in \mathfrak{D}_1([0, T]; V, H)$  и всех  $(t, \tau) \in \Gamma$

$$\begin{aligned}
& \|\eta_1[y_1](t, \tau) - \eta_1[y_2](t, \tau)\|_V \leq \tilde{K}_0(\tau) \sqrt{\|y_1(t) - y_2(t)\|_V^2 + \|\dot{y}_1(t) - \dot{y}_2(t)\|_H^2}, \\
& \|\eta_2[y_1](t, \tau) - \eta_2[y_2](t, \tau)\|_H \leq \tilde{K}_0(\tau) \sqrt{\|y_1(t) - y_2(t)\|_V^2 + \|\dot{y}_1(t) - \dot{y}_2(t)\|_H^2}.
\end{aligned}$$

Докажем теперь следующий результат о существовании и единственности решения уравнения (6.2.16).

**Лемма 6.2.15.** Уравнение (6.2.16) имеет единственное решение  $y \in \mathfrak{D}_1([0, T]; V, H)$ . Более того, существует постоянная  $\tilde{c} > 0$ , определяемая лишь функцией  $\tilde{K}_0 \in L_1[0, T]$ , такая, что

$$\|y\|_{\mathfrak{D}_1([0, T]; V, H)} \leq \tilde{c} \left[ \sqrt{\|\varphi\|_V^2 + \|\psi\|_H^2} + \int_0^T \|\beta[0](t)\|_H dt \right]. \quad (6.2.18)$$

**Доказательство.** 1) Докажем вначале, что решение уравнения (6.2.16) существует и единственно. Для этого нам достаточно показать, что некоторая степень оператора  $\Lambda_0: \mathfrak{D}_1([0, T]; V, H) \rightarrow \mathfrak{D}_1([0, T]; V, H)$  является сжимающим отображением. В силу (6.2.1),

$$\begin{aligned}
& \|\Lambda_0[y^1](t) - \Lambda_0[y^2](t)\|_V \leq \int_0^t \tilde{K}_0(\xi) \sqrt{\|y^1(\xi) - y^2(\xi)\|_V^2 + \|\dot{y}^1(\xi) - \dot{y}^2(\xi)\|_H^2} d\xi, \\
& \left\| \frac{d\Lambda_0[y^1](t)}{dt} - \frac{d\Lambda_0[y^2](t)}{dt} \right\|_H \leq \int_0^t \tilde{K}_0(\xi) \sqrt{\|y^1(\xi) - y^2(\xi)\|_V^2 + \|\dot{y}^1(\xi) - \dot{y}^2(\xi)\|_H^2} d\xi, \quad \forall t \in [0, T].
\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
& \sqrt{\|\Lambda_0[y^1](t) - \Lambda_0[y^2](t)\|_V^2 + \left\| \frac{d\Lambda_0[y^1](t)}{dt} - \frac{d\Lambda_0[y^2](t)}{dt} \right\|_H^2} \leq \\
& \leq 2 \int_0^t \tilde{K}_0(\xi) \sqrt{\|y^1(\xi) - y^2(\xi)\|_V^2 + \|\dot{y}^1(\xi) - \dot{y}^2(\xi)\|_H^2} d\xi.
\end{aligned}$$

Определив функцию  $\sigma: \mathfrak{D}_1([0, T]; V, H) \rightarrow C[0, T]$  равенством  $\sigma[y](t) \equiv \sqrt{\|y(t)\|_V^2 + \|\dot{y}(t)\|_H^2}$ ,  $t \in [0, T]$ , получим, что

$$\sigma[\Lambda_0[y^1] - \Lambda_0[y^2]](t) \leq 2 \int_0^t \tilde{K}_0(\xi) \sigma[y^1 - y^2](\xi) d\xi, \quad \forall t \in [0, T].$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sigma[\Lambda_0^2[y^1] - \Lambda_0^2[y^2]](t) &= \sigma[\Lambda_0[\Lambda_0[y^1]] - \Lambda_0[\Lambda_0[y^2]]](t) \leq 2 \int_0^t \tilde{K}_0(\xi) \sigma[\Lambda_0[y^1] - \Lambda_0[y^2]](\xi) d\xi \leq \\ &\leq \int_0^t 2\tilde{K}_0(\xi_1) \left[ \int_0^{\xi_1} 2\tilde{K}_0(\xi_2) \sigma[y^1 - y^2](\xi_2) d\xi_2 \right] d\xi_1 \leq \max_{\xi \in [0, T]} \sigma[y^1 - y^2](\xi) \int_0^t 2\tilde{K}_0(\xi_1) \left[ \int_0^{\xi_1} 2\tilde{K}_0(\xi_2) d\xi_2 \right] d\xi_1 = \\ &= \max_{\xi \in [0, T]} \sigma[y^1 - y^2](\xi) \frac{1}{2!} \left[ \int_0^t 2\tilde{K}_0(\xi) d\xi \right]^2. \end{aligned}$$

Итак,

$$\begin{aligned} \sigma[\Lambda_0[y^1] - \Lambda_0[y^2]](t) &\leq \max_{\xi \in [0, T]} \sigma[y^1 - y^2](\xi) \int_0^t 2\tilde{K}_0(\xi) d\xi, \\ \sigma[\Lambda_0^2[y^1] - \Lambda_0^2[y^2]](t) &\leq \max_{\xi \in [0, T]} \sigma[y^1 - y^2](\xi) \frac{1}{2!} \left[ \int_0^t 2\tilde{K}_0(\xi) d\xi \right]^2 \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Пусть для некоторого  $m \geq 1$  доказано, что

$$\sigma[\Lambda_0^m[y^1] - \Lambda_0^m[y^2]](t) \leq \max_{\xi \in [0, T]} \sigma[y^1 - y^2](\xi) \frac{1}{m!} \left[ \int_0^t 2\tilde{K}_0(\xi) d\xi \right]^m \quad \forall t \in [0, T].$$

Тогда при всех  $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} \sigma[\Lambda_0^{m+1}[y^1] - \Lambda_0^{m+1}[y^2]](t) &= \sigma[\Lambda_0[\Lambda_0^m[y^1]] - \Lambda_0[\Lambda_0^m[y^2]]](t) \leq \int_0^t 2\tilde{K}_0(\xi) \sigma[\Lambda_0^m[y^1] - \Lambda_0^m[y^2]](\xi) d\xi \leq \\ &\leq \int_0^t 2\tilde{K}_0(\xi_1) \left[ \max_{\tau \in [0, T]} \sigma[y^1 - y^2](\tau) \frac{1}{m!} \left[ \int_0^{\xi_1} 2\tilde{K}_0(\xi_2) d\xi_2 \right]^m \right] d\xi_1 = \\ &= \max_{\tau \in [0, T]} \sigma[y^1 - y^2](\tau) \frac{1}{(m+1)!} \left[ \int_0^t 2\tilde{K}_0(\xi) d\xi \right]^{m+1}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\sigma[\Lambda_0^m[y^1] - \Lambda_0^m[y^2]](t) \leq \max_{\xi \in [0, T]} \sigma[y^1 - y^2](\xi) \frac{1}{m!} \left[ \int_0^t 2\tilde{K}_0(\xi) d\xi \right]^m \quad \forall t \in [0, T], \quad m = 1, 2, \dots$$

Отсюда выводим, что

$$\|\Lambda_0^m[y^1] - \Lambda_0^m[y^2]\|_{\mathfrak{D}_1([0, T]; V, H)} \leq \frac{1}{m!} \left[ \int_0^T 2\tilde{K}_0(\xi) d\xi \right]^m \|y^1 - y^2\|_{\mathfrak{D}_1([0, T]; V, H)}, \quad m = 1, 2, \dots$$

А это и означает, что некоторая степень оператора  $\Lambda_0: \mathfrak{D}_1([0, T]; V, H) \rightarrow \mathfrak{D}_1([0, T]; V, H)$  является сжатием, что, в силу принципа неподвижной точки Банаха, означает существование единственного решения уравнения (6.2.16).

2) Докажем оценку (6.2.18). В самом деле,

$$\begin{aligned}
\|y(t)\|_V &= \|\Lambda_0[y](t)\|_V = \left\| \Pi_1(t)\varphi + \Pi_2(t, 0)\psi + \int_0^t \eta_1[y](t, \xi) d\xi \right\|_V \leq \|\Pi_1(t)\varphi\|_V + \\
&+ \|\Pi_2(t, 0)\psi\|_V + \int_0^t \|\eta_1[y](t, \xi)\|_V d\xi \leq \|\varphi\|_V + \|\psi\|_H + \int_0^t \|\eta_1[y](t, \xi)\|_H d\xi \leq \\
&\leq \|\varphi\|_V + \|\psi\|_H + \int_0^t \|\eta_1[0](t, \xi)\|_H d\xi + \int_0^t \|\eta_1[y](t, \xi) - \eta_1[0](t, \xi)\|_H d\xi \leq \\
&\leq \|\varphi\|_V + \|\psi\|_H + \int_0^t \|\beta[0](\xi)\|_H d\xi + \int_0^t \tilde{K}_0(\tau)\sigma[y](\tau) d\tau.
\end{aligned}$$

Аналогично получаем, что

$$\|\dot{y}(t)\|_H \leq \|\varphi\|_V + \|\psi\|_H + \int_0^t \|\beta[0](\xi)\|_H d\xi + \int_0^t \tilde{K}_0(\tau)\sigma[y](\tau) d\tau.$$

Следовательно,

$$\sigma[y](t) \leq 2 \left[ \|\varphi\|_V + \|\psi\|_H + \int_0^t \|\beta[0](\xi)\|_H d\xi + \int_0^t \tilde{K}_0(\tau)\sigma[y](\tau) d\tau \right].$$

Окончательно выводим, что

$$\sigma[y](t) \leq 2 \left[ \|\varphi\|_V + \|\psi\|_H + \int_0^T \|\beta[0](\xi)\|_H d\xi \right] + \int_0^t 2\tilde{K}_0(\xi)\sigma[y](\xi) d\xi \quad \forall t \in [0, T].$$

Применяя лемму 5.1.1, заключаем, что

$$\sigma[y](t) \leq 2\sqrt{2} \exp \left[ \int_0^T 2\tilde{K}_0(\xi) d\xi \right] \left[ \sqrt{\|\varphi\|_V^2 + \|\psi\|_H^2} + \int_0^t \|\beta[0](\xi)\|_H d\xi \right] \quad \forall t \in [0, T].$$

Это и означает выполнение оценки (6.2.18) с  $\tilde{c} \equiv 2\sqrt{2} \exp(\int_0^T 2\tilde{K}_0(\xi) d\xi)$ . Лемма полностью доказана. ■

**Теорема 6.2.1.** *Задача Коши (6.2.2)–(6.2.3) имеет единственное решение  $\mathfrak{z} \in \mathfrak{D}_2([0, T]; V, H)$ , причём для этого решения выполнена оценка*

$$\|\mathfrak{z}\|_{\mathfrak{D}_1([0, T]; V, H)} \leq \tilde{c} \left[ \sqrt{\|\varphi\|_V^2 + \|\psi\|_H^2} + \int_0^T \|\beta[0](\xi)\|_H dt \right], \quad (6.2.19)$$

где постоянная  $\tilde{c} > 0$  — та же, что и в лемме 6.2.15.

**Доказательство.** Пусть  $\mathfrak{z} \in \mathfrak{D}_1([0, T]; V, H)$  — решение уравнения (6.2.16) в классе  $\mathfrak{D}_1([0, T]; V, H)$ , которое существует и единственно в силу леммы 6.2.15, причём для этого решения справедлива оценка (6.2.19) с постоянной  $\tilde{c} > 0$ , определяемой лишь функцией  $\tilde{K}_0 \in L_1[0, T]$ . Согласно же лемме 6.2.14,  $\mathfrak{z} \in \mathfrak{D}_2([0, T]; V, H)$  и является решением задачи Коши (6.2.2)–(6.2.3). Теорема доказана. ■

### 6.3. Абстрактная задача Коши с неавтономной главной частью

Пусть  $V, H, Z$  — сепарабельные гильбертовы пространства со скалярными произведениями  $\langle \cdot, \cdot \rangle_V, \langle \cdot, \cdot \rangle_H$  и  $\langle \cdot, \cdot \rangle_Z$ , и с соответствующими нормами  $\|\cdot\|_V, \|\cdot\|_H$  и  $\|\cdot\|_Z$ ; имеет место вложение  $V \subset H$ , и это вложение непрерывно и компактно. Иными словами, найдётся постоянная  $c_0 > 0$ , такая, что

$$\|v\|_H \leq c_0 \|v\|_V \quad \forall v \in V,$$

причём любое ограниченное в норме  $V$  множество предкомпактно в норме  $H$ . Сопряжённое к  $Z$  пространство отождествляем с  $Z$ .

Кроме того, пусть  $T > 0$  — некоторое число,  $Y$  — рефлексивное банахово пространство с нормой  $\|\cdot\|_Y$ , и пусть функции  $\mathfrak{A} : [0, T] \rightarrow \mathcal{L}(V, V^*)$ ,  $\mathfrak{B} : [0, T] \rightarrow \mathcal{L}(H, V^*)$ ,  $\mathfrak{F} : [0, T] \rightarrow \mathcal{L}(Z, Z)$ , и операторы  $\mathfrak{C} \in \mathcal{L}(V, Y)$ ,  $\mathfrak{G} \in \mathcal{L}(V, Z)$  таковы, что

1) при всех  $v \in V$ ,  $h \in H$ ,  $z \in Z$  отображения

$$[0, T] \ni t \mapsto \mathfrak{A}(t)v \in V^*, \quad [0, T] \ni t \mapsto \mathfrak{B}(t)h \in V^*, \quad [0, T] \ni t \mapsto \mathfrak{F}(t)z \in Z,$$

измеримы в смысле Бохнера и абсолютно непрерывны;

2) найдутся постоянные  $c_1, c_2 > 0$ , такие, что

$$\langle \mathfrak{A}(t)v, v \rangle + c_1 \|v\|_H^2 \geq c_2 \|v\|_H^2 \quad \forall v \in V;$$

3) при каждом фиксированном  $t \in [0, T]$  оператор  $\mathfrak{F}(t)$  — самосопряжён;

4) справедливо равенство

$$\langle \mathfrak{A}(t)v, w \rangle = \langle \mathfrak{A}(t)w, v \rangle \quad \forall v, w \in V \text{ при всех } t \in [0, T];$$

5) операторы  $\mathfrak{C}$  и  $\mathfrak{G}$  — компакты;

6) найдётся постоянная  $c_3 > 0$ , такая, что

$$\begin{aligned} & \max_{t \in [0, T]} \|\mathfrak{A}(t)\|_{V \rightarrow V^*} + \max_{t \in [0, T]} \|\mathfrak{B}(t)\|_{H \rightarrow V^*} + \operatorname{vraisup}_{t \in [0, T]} \|\mathfrak{A}'(t)\|_{V \rightarrow V^*} + \operatorname{vraisup}_{t \in [0, T]} \|\mathfrak{B}'(t)\|_{H \rightarrow V^*} + \\ & + \max_{t \in [0, T]} \|\mathfrak{F}(t)\|_{Z \rightarrow Z} + \operatorname{vraisup}_{t \in [0, T]} \|\mathfrak{F}'(t)\|_{Z \rightarrow Z} \leq c_3; \end{aligned}$$

7) для каждого  $\varepsilon > 0$  найдётся число  $c_4 = c_4(\varepsilon) > 0$ , такое, что

$$\|\mathfrak{G}v\|_Z^2 \leq \varepsilon \|v\|_V^2 + c_4(\varepsilon) \|v\|_H^2 \quad \forall v \in V.$$

Пусть  $e_j$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , — последовательность элементов  $V$ , являющихся ортонормированным базисом в  $H$ , ортогональным базисом в  $V$  и ортогональным базисом в  $V^*$ , причём

$$v = \sum_{j=1}^{\infty} v_j e_j, \quad v_j = \langle v, e_j \rangle_H, \quad j = 1, 2, \dots, \quad \|v\|_V^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \|e_j\|_V^2 |v_j|^2, \quad \forall v \in V; \quad (6.3.1)$$

$$h = \sum_{j=1}^{\infty} h_j e_j, \quad h_j = \langle h, e_j \rangle_H, \quad j = 1, 2, \dots, \quad \|h\|_H^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |h_j|^2, \quad \forall h \in H; \quad (6.3.2)$$

$$v^* = \sum_{j=1}^{\infty} v_j^* e_j, \quad v_j^* = \langle v^*, e_j \rangle, \quad j = 1, 2, \dots, \quad \|v^*\|_{V^*}^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \|e_j\|_{V^*}^2 |v_j^*|^2, \quad \forall v^* \in V^*. \quad (6.3.3)$$

### 6.3.1. Линейное уравнение без меры Радона в правой части

Пусть  $\varphi \in V$ ,  $\psi \in H$ ,  $f \in L_1([0, T], H)$ ,  $\mathfrak{g} \in W_1^1([0, T], Y^*)$  — фиксированы.

Рассмотрим задачу Коши

$$\dot{\mathfrak{z}}(t) + \mathfrak{A}(t)\mathfrak{z}(t) + \mathfrak{B}(t)\mathfrak{z}(t) + \mathfrak{G}^* \mathfrak{F}(t) \mathfrak{G} \mathfrak{z}(t) = f(t) + \mathfrak{C}^* \mathfrak{g}(t), \quad t \in [0, T], \quad (6.3.4)$$

$$\mathfrak{z}(0) = \varphi, \quad \dot{\mathfrak{z}}(0) = \psi, \quad (6.3.5)$$

и дадим следующее

**Определение 6.3.1.** Функцию  $\mathfrak{z} \in \mathcal{D}([0, T]; V, H)$  назовём решением задачи Коши (6.3.4), (6.3.5), если

$$\begin{aligned} & \int_0^T [-\langle \dot{\mathfrak{z}}(t), \dot{\eta}(t) \rangle_H + \langle \mathfrak{A}(t)\mathfrak{z}(t), \eta(t) \rangle + \langle \mathfrak{B}(t)\mathfrak{z}(t), \eta(t) \rangle + \langle \mathfrak{F}(t)\mathfrak{G}\mathfrak{z}(t), \mathfrak{G}\eta(t) \rangle_Z] dt = \\ & = \langle \psi, \eta(0) \rangle + \int_0^T \langle f(t), \eta(t) \rangle_H dt + \int_0^T \langle \mathfrak{g}(t), \mathfrak{C}\eta(t) \rangle dt \quad \forall \eta \in \hat{\mathcal{D}}([0, T]; V, H); \\ & \mathfrak{z}(0) = \varphi. \end{aligned} \quad (6.3.6)$$

Под  $\hat{\mathfrak{Z}}([0, T]; V, H)$  мы в данном определении понимаем множество  $\{\mathfrak{z} \in \mathfrak{Z}([0, T]; V, H) : \mathfrak{z}(T) = 0\}$ .

Далее под  $\mathfrak{Z}_2([0, T]; V, H)$  понимается  $\{\mathfrak{z} \in \mathfrak{Z}([0, T]; V, H) : \dot{\mathfrak{z}} \in L_1([0, T], V^*)\}$ .

Дадим ещё одно определение решения задачи Коши (6.3.4), (6.3.5).

**Определение 6.3.2.** Функцию  $\mathfrak{z} \in \mathfrak{Z}_2([0, T]; V, H)$  назовём решением задачи Коши (6.3.4), (6.3.5), если

$$\langle \ddot{\mathfrak{z}}(t), v \rangle + \langle \mathfrak{A}(t)\mathfrak{z}(t) + \mathfrak{B}(t)\mathfrak{z}(t) + \mathfrak{G}^*\mathfrak{F}(t)\mathfrak{G}\mathfrak{z}(t), v \rangle = \langle f(t), v \rangle + \langle \mathfrak{g}(t), \mathfrak{C}\eta(t) \rangle \quad \text{при н.в. } t \in [0, T] \quad \forall v \in V, \quad (6.3.7)$$

$$\mathfrak{z}(0) = \varphi, \quad \dot{\mathfrak{z}}(0) = \psi.$$

Пусть  $\mathfrak{M}^N \equiv \{\sum_{j=1}^N \zeta_j e_j : \zeta_j \in W_2^1[0, T], \zeta_j(T) = 0, j = \overline{1, N}\}$ ,  $\mathfrak{M} \equiv \bigcup_{N=1}^{\infty} \mathfrak{M}^N$ .

Покажем, что справедлива следующая

**Лемма 6.3.1.** Определения 6.3.1 и 6.3.2 — эквивалентны.

**Доказательство.** 1) Докажем, что если функция  $\mathfrak{z} \in \mathfrak{Z}_2([0, T]; V, H)$  является решением в смысле определения 6.3.2, то она является и решением в смысле определения 6.3.1.

В самом деле, пусть  $\mathfrak{z} \in \mathfrak{Z}_2([0, T]; V, H)$  — решение в смысле определения 6.3.2.

Поскольку, согласно лемме 2.4.2, множество  $\mathfrak{M} \equiv \bigcup_{N=1}^{\infty} \mathfrak{M}^N$  плотно в  $\hat{\mathcal{W}}_2^1([0, T]; V, H)$ , то нам достаточно доказать, что тождество (6.3.6) справедливо для функций  $\eta$ , имеющих вид  $\eta(t) \equiv \zeta(t)e_j$ ,  $t \in [0, T]$ , где  $\zeta \in W_2^1[0, T]$ ,  $\zeta(T) = 0$ .

Действительно, взяв в равенстве (6.3.7)  $v = \zeta(t)e_j$ ,  $t \in [0, T]$ , и проинтегрировав результат по  $t \in [0, T]$ , будем иметь

$$\int_0^T \langle \ddot{\mathfrak{z}}(t), \zeta(t)e_j \rangle dt + \int_0^T \langle \mathfrak{A}(t)\mathfrak{z}(t) + \mathfrak{B}(t)\mathfrak{z}(t) + \mathfrak{G}^*\mathfrak{F}(t)\mathfrak{G}\mathfrak{z}(t), \zeta(t)e_j \rangle dt = \int_0^T \langle f(t), \zeta(t)e_j \rangle dt + \int_0^T \langle \mathfrak{g}(t), \mathfrak{C}\eta(t) \rangle dt.$$

Взяв первый из стоящих слева интегралов по частям, получим справедливость тождества (6.3.6) для функций  $\eta$ , имеющих вид  $\eta(t) \equiv \zeta(t)e_j$ ,  $t \in [0, T]$ , где  $\zeta \in W_2^1[0, T]$ ,  $\zeta(T) = 0$ .

Таким образом, мы доказали, что если  $\mathfrak{z} \in \mathfrak{Z}_2([0, T]; V, H)$  является решением в смысле определения 6.3.2, то она является и решением в смысле определения 6.3.1.

2) Докажем теперь, что если функция  $\mathfrak{z} \in \mathfrak{Z}([0, T]; V, H)$  является решением в смысле определения 6.3.1, то она является и решением в смысле определения 6.3.2.

Подставляя в интегральное тождество (6.3.6)  $\eta(t) \equiv \zeta(t)v$ ,  $t \in [0, T]$ , где  $\zeta \in W_2^1[0, T]$ ,  $\zeta(T) = 0$ ,  $v \in V$ , заключаем, что

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle -\dot{\mathfrak{z}}(t), \zeta'(t)v \rangle dt + \int_0^T \langle \mathfrak{A}(t)\mathfrak{z}(t) + \mathfrak{B}(t)\mathfrak{z}(t) + \mathfrak{G}^*\mathfrak{F}(t)\mathfrak{G}\mathfrak{z}(t), \zeta(t)v \rangle dt = \\ = \int_0^T \langle f(t), \zeta(t)v \rangle dt + \langle \psi, \zeta(0)v \rangle + \int_0^T \langle \mathfrak{g}(t), \mathfrak{C}[v\zeta(t)] \rangle dt. \end{aligned} \quad (6.3.8)$$

В частности, для всех  $\zeta \in \mathfrak{D}(0, T)$

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle -\dot{\mathfrak{z}}(t), \zeta'(t)v \rangle dt + \int_0^T \langle \mathfrak{A}(t)\mathfrak{z}(t) + \mathfrak{B}(t)\mathfrak{z}(t) + \mathfrak{G}^*\mathfrak{F}(t)\mathfrak{G}\mathfrak{z}(t), \zeta(t)v \rangle dt = \\ = \int_0^T \langle f(t), \zeta(t)v \rangle dt + \int_0^T \langle \mathfrak{C}^*\mathfrak{g}(t), \zeta(t)v \rangle dt. \end{aligned} \quad (6.3.9)$$

Положив затем  $\tilde{f}(\zeta) \equiv \int_0^T f(t)\zeta(t) dt$ ,  $\mathfrak{Z}(\zeta) \equiv \int_0^T \mathfrak{z}(t)\zeta(t) dt$ ,  $\tilde{\mathfrak{A}}(\zeta) \equiv \int_0^T \mathfrak{A}(t)\mathfrak{z}(t)\zeta(t) dt$ ,  $\tilde{\mathfrak{B}}(\zeta) \equiv \int_0^T \mathfrak{B}(t)\mathfrak{z}(t)\zeta(t) dt$ ,  $\tilde{\mathfrak{F}}(\zeta) \equiv \int_0^T \mathfrak{G}^*\mathfrak{F}(t)\mathfrak{G}\mathfrak{z}(t)\zeta(t) dt$ ,  $\tilde{\mathfrak{g}}(\zeta) \equiv \int_0^T \mathfrak{C}^*\mathfrak{g}(t)\zeta(t) dt$  и замечая, что  $\mathfrak{Z}'(\zeta) \equiv -\int_0^T \dot{\mathfrak{z}}(t)\zeta(t) dt$ , из тождества (6.3.9) получаем, что

$$-\mathfrak{Z}'(\zeta) + \tilde{\mathfrak{A}}(\zeta) + \tilde{\mathfrak{B}}(\zeta) + \tilde{\mathfrak{F}}(\zeta) = \tilde{f}(\zeta) + \tilde{\mathfrak{g}}(\zeta), \quad \forall \zeta \in \mathfrak{D}(0, T),$$

или, иначе,

$$\mathfrak{Z}''(\zeta) + \tilde{\mathfrak{A}}(\zeta) + \tilde{\mathfrak{B}}(\zeta) + \tilde{\mathfrak{F}}(\zeta) = \tilde{f}(\zeta) + \tilde{\mathfrak{g}}(\zeta), \quad \forall \zeta \in \mathfrak{D}(0, T),$$

Последнее означает, что  $\mathfrak{z}''$  — регулярна, и лежит в  $L_1([0, T], V^*)$ . Поэтому  $\mathfrak{z} \in \mathfrak{D}_2([0, T]; V, H)$ , и

$$\langle \ddot{\mathfrak{z}}(t) + \mathfrak{A}(t)\mathfrak{z}(t) + \mathfrak{B}(t)\mathfrak{z}(t) + \mathfrak{G}^*\mathfrak{F}(t)\mathfrak{G}\mathfrak{z}(t) - f(t) - \mathfrak{C}^*\mathfrak{g}(t), v \rangle = 0, \quad \forall v \in V. \quad (6.3.10)$$

Взяв по частям первый из интегралов, стоящих в левой части тождества 6.3.8, выводим, что

$$\int_0^T \langle \ddot{\mathfrak{z}}(t) + \mathfrak{A}(t)\mathfrak{z}(t) + \mathfrak{B}(t)\mathfrak{z}(t) + \mathfrak{G}^*\mathfrak{F}(t)\mathfrak{G}\mathfrak{z}(t) - f(t) - \mathfrak{C}^*\mathfrak{g}(t), \zeta(t)v \rangle dt + \langle \dot{\mathfrak{z}}(0), \zeta(0)v \rangle = \langle \psi, \zeta(0)v \rangle.$$

Учтя здесь равенство (6.3.10), получим, что

$$\langle \dot{\mathfrak{z}}(0) - \psi, v \rangle = 0 \quad \forall v \in V.$$

Иными словами,

$$\dot{\mathfrak{z}}(0) = \psi.$$

Из этого соотношения и соотношения (6.3.10) и вытекает, что  $\mathfrak{z}$  является решением в смысле определения 6.3.2.

Лемма полностью доказана. ■

Покажем, что имеет место

**Теорема 6.3.1.** *Задача Коши (6.3.4), (6.3.5) имеет единственное решение  $\mathfrak{z}$  в смысле определения 6.3.1, причём найдётся постоянная  $\varkappa_1 > 0$ , зависящая лишь от  $T$ ,  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3 > 0$  и от  $\|\mathfrak{C}\|_{V \rightarrow Y}$ ,  $\|\mathfrak{G}\|_{V \rightarrow Z}$ , такая, что*

$$\|\mathfrak{z}\|_{\mathfrak{D}([0, T]; V, H)} \leq \varkappa_1 [\sqrt{\|\varphi\|_V^2 + \|\psi\|_H^2} + \|f\|_{1, [0, T], H} + \|\mathfrak{g}\|_{1, [0, T], Y^*}^{(1)}]. \quad (6.3.11)$$

**Доказательство.** Доказательство разобьём на три части.

1) Докажем сначала единственность решения. В самом деле, пусть  $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2 \in \mathfrak{D}([0, T]; V, H)$  — решения задачи Коши (6.3.4), (6.3.5) в смысле определения 6.3.1, и пусть  $\mathfrak{w} \equiv \mathfrak{z}_1 - \mathfrak{z}_2$ . Тогда  $\mathfrak{w} \in \mathfrak{D}([0, T]; V, H)$  и удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_0^T [-\langle \dot{\mathfrak{w}}(t), \dot{\eta}(t) \rangle_H + \langle \mathfrak{A}(t)\mathfrak{w}(t), \eta(t) \rangle + \langle \mathfrak{B}(t)\mathfrak{w}(t), \eta(t) \rangle + \langle \mathfrak{F}(t)\mathfrak{G}\mathfrak{w}(t), \mathfrak{G}\eta(t) \rangle_Z] dt = 0 \quad (6.3.12)$$

$$\forall \eta \in \mathfrak{D}([0, T]; V, H); \quad \mathfrak{w}(0) = 0.$$

Введём функции  $\eta^\alpha : [0, T] \rightarrow V$  ( $\alpha \in [0, T]$  — параметр) и  $\beta : [0, T] \rightarrow V$  равенствами

$$\eta^\alpha(t) = -\chi_{[0, \alpha]}(t) \int_t^\alpha \mathfrak{w}(\xi) d\xi, \quad \beta(t) = \int_0^t \mathfrak{w}(\xi) d\xi, \quad t \in [0, T].$$

Можно показать, что  $\eta^\alpha \in \mathfrak{D}([0, T]; V, H)$ ,  $\dot{\eta}^\alpha \in L_\infty([0, T], V) \cap C([0, \alpha], V)$ ,  $\ddot{\eta}^\alpha \in C([0, \alpha], H)$ , причём

$$\dot{\eta}^\alpha(t) = \chi_{[0, \alpha]}(t) \mathfrak{w}(t), \quad t \in [0, T]; \quad \ddot{\eta}^\alpha(t) = \dot{\mathfrak{w}}(t), \quad t \in [0, \alpha].$$

Полагая в (6.3.12)  $\eta = \eta^\alpha$ , получаем, что для всех  $\alpha \in [0, T]$

$$\int_0^\alpha [-\langle \ddot{\eta}^\alpha(t), \dot{\eta}^\alpha(t) \rangle_H + \langle \mathfrak{A}(t)\dot{\eta}^\alpha(t), \eta^\alpha(t) \rangle + \langle \mathfrak{B}(t)\dot{\eta}^\alpha(t), \eta^\alpha(t) \rangle + \langle \mathfrak{F}(t)\mathfrak{G}\dot{\eta}^\alpha(t), \mathfrak{G}\eta^\alpha(t) \rangle_Z] dt = 0.$$

Интегрируя это соотношение по частям, выводим, что

$$-\frac{1}{2} [\|\mathfrak{w}(\alpha)\|_H^2 + \langle \mathfrak{A}(0)\eta^\alpha(0), \eta^\alpha(0) \rangle] - \frac{1}{2} \langle \mathfrak{F}(0)\mathfrak{G}\eta^\alpha(0), \mathfrak{G}\eta^\alpha(0) \rangle_Z -$$

$$- \int_0^\alpha \left[ \frac{1}{2} \langle \mathfrak{A}'(t)\eta^\alpha(t), \eta^\alpha(t) \rangle - \langle \mathfrak{B}(t)\dot{\eta}^\alpha(t), \eta^\alpha(t) \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathfrak{F}'(t)\mathfrak{G}\eta^\alpha(t), \mathfrak{G}\eta^\alpha(t) \rangle_Z \right] dt = 0.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} [\|\mathfrak{w}(\alpha)\|_H^2 + \langle \mathfrak{A}(0)\eta^\alpha(0), \eta^\alpha(0) \rangle] &= -\frac{1}{2} \langle \mathfrak{F}(0)\mathfrak{G}\eta^\alpha(0), \mathfrak{G}\eta^\alpha(0) \rangle_Z - \int_0^\alpha \left[ \frac{1}{2} \langle \mathfrak{A}'(t)\eta^\alpha(t), \eta^\alpha(t) \rangle - \langle \mathfrak{B}(t)\dot{\eta}^\alpha(t), \eta^\alpha(t) \rangle + \right. \\
&+ \frac{1}{2} \langle \mathfrak{F}'(t)\mathfrak{G}\eta^\alpha(t), \mathfrak{G}\eta^\alpha(t) \rangle_Z \Big] dt \leq \frac{c_3}{2} \|\mathfrak{G}\eta^\alpha(0)\|_Z^2 + \int_0^\alpha \left[ \frac{1}{2} \|\mathfrak{A}'(t)\|_{V \rightarrow V^*} \|\eta^\alpha(t)\|_V^2 + \|\mathfrak{B}(t)\|_{H \rightarrow V^*} \|\mathfrak{w}(t)\|_H \|\eta^\alpha(t)\|_V + \right. \\
&+ \frac{1}{2} \|\mathfrak{F}'(t)\|_{Z \rightarrow Z} \|\mathfrak{G}\eta^\alpha(t)\|_Z^2 \Big] dt \leq \frac{c_3}{2} \|\mathfrak{G}\eta^\alpha(0)\|_Z^2 + \int_0^\alpha \left[ \frac{1}{2} \|\mathfrak{A}'(t)\|_{V \rightarrow V^*} \|\eta^\alpha(t)\|_V^2 + \frac{1}{2} \|\mathfrak{B}(t)\|_{H \rightarrow V^*} \|\mathfrak{w}(t)\|_H^2 + \right. \\
&+ \frac{1}{2} \|\mathfrak{B}(t)\|_{H \rightarrow V^*} \|\eta^\alpha(t)\|_V^2 + \frac{c_3}{2} \|\mathfrak{G}\|_{V \rightarrow Z}^2 \|\eta^\alpha(t)\|_V^2 \Big] dt \leq \frac{c_3}{2} \|\mathfrak{G}\eta^\alpha(0)\|_Z^2 + \\
&+ \int_0^\alpha c_3 \left[ 1 + \frac{1}{2} \|\mathfrak{G}\|_{V \rightarrow Z}^2 \right] [\|\mathfrak{w}(t)\|_H^2 + \|\eta^\alpha(t)\|_V^2] dt \leq \frac{c_3}{2} \varepsilon \|\eta^\alpha(0)\|_V^2 + \frac{c_3 c_4(\varepsilon)}{2} \|\eta^\alpha(0)\|_H^2 + \\
&+ \int_0^\alpha c_3 \left[ 1 + \frac{1}{2} \|\mathfrak{G}\|_{V \rightarrow Z}^2 \right] [\|\mathfrak{w}(t)\|_H^2 + \|\eta^\alpha(t)\|_V^2] dt = \frac{c_3}{2} \varepsilon \|\eta^\alpha(0)\|_V^2 + \frac{c_3 c_4(\varepsilon)}{2} \left\| \int_0^\alpha \mathfrak{w}(\xi) d\xi \right\|_H^2 + \\
&+ \int_0^\alpha c_3 \left[ 1 + \frac{1}{2} \|\mathfrak{G}\|_{V \rightarrow Z}^2 \right] [\|\mathfrak{w}(t)\|_H^2 + \|\eta^\alpha(t)\|_V^2] dt \leq \frac{c_3}{2} \varepsilon \|\eta^\alpha(0)\|_V^2 + \frac{c_3 c_4(\varepsilon)}{2} \left[ \int_0^\alpha 1 \cdot \|\mathfrak{w}(\xi)\|_H d\xi \right]^2 + \\
&+ \int_0^\alpha c_3 \left[ 1 + \frac{1}{2} \|\mathfrak{G}\|_{V \rightarrow Z}^2 \right] [\|\mathfrak{w}(t)\|_H^2 + \|\eta^\alpha(t)\|_V^2] dt \leq \frac{c_3}{2} \varepsilon \|\eta^\alpha(0)\|_V^2 + \frac{c_3 c_4(\varepsilon)}{2} \alpha \int_0^\alpha \|\mathfrak{w}(\xi)\|_H^2 d\xi + \\
&+ \int_0^\alpha c_3 \left[ 1 + \frac{1}{2} \|\mathfrak{G}\|_{V \rightarrow Z}^2 \right] [\|\mathfrak{w}(t)\|_H^2 + \|\eta^\alpha(t)\|_V^2] dt \leq \frac{c_3}{2} \varepsilon \|\eta^\alpha(0)\|_V^2 + \\
&+ \int_0^\alpha c_3 \left[ 1 + \frac{1}{2} \|\mathfrak{G}\|_{V \rightarrow Z}^2 + \frac{c_4(\varepsilon)}{2} T \right] [\|\mathfrak{w}(t)\|_H^2 + \|\eta^\alpha(t)\|_V^2] dt.
\end{aligned}$$

Итак,

$$\|\mathfrak{w}(\alpha)\|_H^2 + \langle \mathfrak{A}(0)\eta^\alpha(0), \eta^\alpha(0) \rangle - c_3 \varepsilon \|\eta^\alpha(0)\|_V^2 \leq \int_0^\alpha \tilde{c}_0(\varepsilon) [\|\mathfrak{w}(t)\|_H^2 + \|\eta^\alpha(t)\|_V^2] dt,$$

где введено обозначение  $\tilde{c}_0(\varepsilon) = c_3[2 + \|\mathfrak{G}\|_{V \rightarrow Z}^2 + c_4(\varepsilon)T]$ .

Добавив к обеим частям этого неравенства величину  $c_1 \|\eta^\alpha(0)\|_H^2$ , получим, что

$$\begin{aligned}
\|\mathfrak{w}(\alpha)\|_H^2 + (c_2 - c_3 \varepsilon) \|\eta^\alpha(0)\|_V^2 &\leq \int_0^\alpha \tilde{c}_0(\varepsilon) [\|\mathfrak{w}(t)\|_H^2 + \|\eta^\alpha(t)\|_V^2] dt + c_1 \left\| \int_0^\alpha \mathfrak{w}(\xi) d\xi \right\|_H^2 \leq \\
&\leq \int_0^\alpha \tilde{c}_0(\varepsilon) [\|\mathfrak{w}(t)\|_H^2 + \|\eta^\alpha(t)\|_V^2] dt + c_1 c_0^2 \left[ \int_0^\alpha \|\mathfrak{w}(\xi)\|_V d\xi \right]^2 \leq \int_0^\alpha \tilde{c}_1(\varepsilon) [\|\mathfrak{w}(t)\|_H^2 + \|\eta^\alpha(t)\|_V^2] dt,
\end{aligned}$$

где  $\tilde{c}_1(\varepsilon) = \tilde{c}_0(\varepsilon) + c_1 c_0^2 T$ .

Таким образом,

$$\|\mathfrak{w}(\alpha)\|_H^2 + (c_2 - c_3 \varepsilon) \|\eta^\alpha(0)\|_V^2 \leq \int_0^\alpha \tilde{c}_1(\varepsilon) [\|\mathfrak{w}(t)\|_H^2 + \|\eta^\alpha(t)\|_V^2] dt.$$

Взяв здесь  $\varepsilon = \frac{c_2}{2c_3}$  и введя обозначение  $\tilde{c}_2 \equiv \tilde{c}_1\left(\frac{c_2}{2c_3}\right)$ , получим, что

$$\|\mathfrak{w}(\alpha)\|_H^2 + \frac{c_2}{2} \|\eta^\alpha(0)\|_V^2 \leq \int_0^\alpha \tilde{c}_2 [\|\mathfrak{w}(t)\|_H^2 + \|\eta^\alpha(t)\|_V^2] dt.$$



С помощью функции  $\beta$  это можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{w}(\alpha)\|_H^2 + \frac{c_2}{2} \|\beta(\alpha)\|_V^2 &\leq \int_0^\alpha \tilde{c}_2 [\|\mathfrak{w}(t)\|_H^2 + \|\beta(t) - \beta(\alpha)\|_V^2] dt = \int_0^\alpha \tilde{c}_2 [\|\mathfrak{w}(t)\|_H^2 + \|\beta(t)\|_V^2 + \|\beta(\alpha)\|_V^2 - \\ &- 2\langle \beta(t), \beta(\alpha) \rangle_V] dt \leq \int_0^\alpha \tilde{c}_2 [\|\mathfrak{w}(t)\|_H^2 + 2\|\beta(t)\|_V^2 + 2\|\beta(\alpha)\|_V^2] dt = \int_0^\alpha \tilde{c}_2 [\|\mathfrak{w}(t)\|_H^2 + 2\|\beta(t)\|_V^2] dt + \\ &+ 2\tilde{c}_2 \alpha \|\beta(\alpha)\|_V^2 \leq \int_0^\alpha 2\tilde{c}_2 [\|\mathfrak{w}(t)\|_H^2 + \|\beta(t)\|_V^2] dt + 2\tilde{c}_2 \alpha \|\beta(\alpha)\|_V^2. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что

$$\|\mathfrak{w}(\alpha)\|_H^2 + \left(\frac{c_2}{2} - 2\tilde{c}_2 \alpha\right) \|\beta(\alpha)\|_V^2 \leq \int_0^\alpha 2\tilde{c}_2 [\|\mathfrak{w}(t)\|_H^2 + \|\beta(t)\|_V^2] dt.$$

Ограничившись в данном неравенстве числами  $\alpha \in [0, \alpha_0]$ , где  $\alpha_0 \equiv \frac{c_2}{8\tilde{c}_2}$ , получим, что для всех  $\alpha \in [0, \alpha_0]$

$$\|\mathfrak{w}(\alpha)\|_H^2 + \|\beta(\alpha)\|_V^2 \leq \int_0^\alpha \frac{2\tilde{c}_0}{\min\{1, \frac{c_2}{4}\}} [\|\mathfrak{w}(t)\|_H^2 + \|\beta(t)\|_V^2] dt.$$

Применив к данному неравенству лемму Гронуолла, выводим, что

$$\|\mathfrak{w}(\alpha)\|_H^2 + \|\beta(\alpha)\|_V^2 = 0, \quad \alpha \in [0, \alpha_0].$$

Рассуждая аналогичным образом, за конечное число шагов получим, что

$$\|\mathfrak{w}(\alpha)\|_H^2 + \|\beta(\alpha)\|_V^2 = 0, \quad \alpha \in [0, T].$$

Вспоминая теперь определение функции  $\mathfrak{w}$ , заключаем, что единственность решения доказана.

2) Докажем существование решения.

Будем искать приближённое решение  $\mathfrak{z}^N$  задачи Коши (6.3.4), (6.3.5) в виде  $\mathfrak{z}^N(t) \equiv \sum_{m=1}^N h_m^N(t) e_m$ , где набор функций  $h_m^N \in W_1^1[0, T]$ ,  $m = \overline{1, N}$ , — единственное решение задачи Коши

$$\ddot{h}_k^N(t) + \sum_{m=1}^N \mathfrak{a}_{km}(t) h_m^N(t) = f_k(t) + (\mathfrak{C}^* \mathfrak{g}(t))_k, \quad t \in [0, T], \quad (6.3.13)$$

$$h_k^N(0) = \varphi_k, \quad \dot{h}_k^N(0) = \psi_k, \quad k = \overline{1, N}. \quad (6.3.14)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_{km}(t) &\equiv \langle \mathfrak{A}(t) e_m + \mathfrak{B}(t) e_m, e_k \rangle + \langle \mathfrak{F}(t) \mathfrak{G} e_m, \mathfrak{G} e_k \rangle_Z, \quad f_k(t) \equiv \langle f(t), e_k \rangle_H, \quad (\mathfrak{C}^* \mathfrak{g}(t))_k \equiv \langle \mathfrak{C}^* \mathfrak{g}(t), e_k \rangle, \\ \varphi_k &\equiv \langle \varphi, e_k \rangle_H, \quad \psi_k \equiv \langle \psi, e_k \rangle_H, \quad m, k = \overline{1, N}, \quad t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Умножив  $k$ -е уравнение (6.3.13) на  $\dot{h}_k^N(t)$ , сложив все получившиеся уравнения, и проинтегрировав результат по  $t \in [0, \tau]$ , выводим, что

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} [\|\dot{\mathfrak{z}}^N(\tau)\|_H^2 + \langle \mathfrak{A}(\tau) \dot{\mathfrak{z}}^N(\tau), \dot{\mathfrak{z}}^N(\tau) \rangle] - \frac{1}{2} [\|\dot{\mathfrak{z}}^N(0)\|_H^2 + \langle \mathfrak{A}(0) \dot{\mathfrak{z}}^N(0), \dot{\mathfrak{z}}^N(0) \rangle] + \left[ \langle \mathfrak{B}(t) \dot{\mathfrak{z}}^N(t), \dot{\mathfrak{z}}^N(t) \rangle + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2} \langle \mathfrak{F}(t) \mathfrak{G} \dot{\mathfrak{z}}^N(t), \mathfrak{G} \dot{\mathfrak{z}}^N(t) \rangle_Z - \langle \mathfrak{g}(t), \mathfrak{C} \dot{\mathfrak{z}}^N(t) \rangle \right] \Big|_{t=0}^{t=\tau} - \int_0^\tau \left[ \frac{1}{2} \langle \mathfrak{A}'(t) \dot{\mathfrak{z}}^N(t), \dot{\mathfrak{z}}^N(t) \rangle + \langle \mathfrak{B}'(t) \dot{\mathfrak{z}}^N(t), \dot{\mathfrak{z}}^N(t) \rangle + \right. \\ &+ \left. \langle \mathfrak{B}(t) \dot{\mathfrak{z}}^N(t), \dot{\mathfrak{z}}^N(t) \rangle \right] dt - \frac{1}{2} \int_0^\tau \langle \mathfrak{F}'(t) \mathfrak{G} \dot{\mathfrak{z}}^N(t), \mathfrak{G} \dot{\mathfrak{z}}^N(t) \rangle_Z dt = \int_0^\tau \langle f(t), \dot{\mathfrak{z}}^N(t) \rangle_H dt - \int_0^\tau \langle \mathfrak{g}'(t), \mathfrak{C} \dot{\mathfrak{z}}^N(t) \rangle dt. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} [\|\dot{\mathbf{z}}^N(\tau)\|_H^2 + \langle \mathfrak{A}(\tau) \mathbf{z}^N(\tau), \mathbf{z}^N(\tau) \rangle] \leq \frac{1}{2} [\|\dot{\mathbf{z}}^N(0)\|_H^2 + \langle \mathfrak{A}(0) \mathbf{z}^N(0), \mathbf{z}^N(0) \rangle] + \left[ -\langle \mathfrak{B}(t) \mathbf{z}^N(t), \mathbf{z}^N(t) \rangle - \right. \\
& \left. - \frac{1}{2} \langle \mathfrak{F}(t) \mathfrak{G} \mathbf{z}^N(t), \mathfrak{G} \mathbf{z}^N(t) \rangle_Z + \langle \mathfrak{g}(t), \mathfrak{C} \mathbf{z}^N(t) \rangle \right] \Big|_{t=0}^{t=\tau} + \int_0^\tau \left[ \frac{c_3}{2} \|\mathbf{z}^N(t)\|_V^2 + c_3 \|\mathbf{z}^N(t)\|_H \|\mathbf{z}^N(t)\|_V + \right. \\
& \left. + c_3 \|\dot{\mathbf{z}}^N(t)\|_H \|\mathbf{z}^N(t)\|_V \right] dt + \frac{c_3}{2} \int_0^\tau \|\mathfrak{G} \mathbf{z}^N(t)\|_Z^2 dt + \\
& + [\|f\|_{1,[0,T],H} + \|\mathfrak{C}\|_{V \rightarrow Y} \|\mathfrak{g}\|_{1,[0,T],Y^*}^{(1)}] \max_{t \in [0,\tau]} \sqrt{\|\dot{\mathbf{z}}^N(t)\|_H^2 + \|\mathbf{z}^N(t)\|_V^2} \leq \frac{\max\{1, c_3\}}{2} [\|\dot{\mathbf{z}}^N(0)\|_H^2 + \|\mathbf{z}^N(0)\|_V^2] + \\
& + c_3 \|\mathbf{z}^N(\tau)\|_H \|\mathbf{z}^N(\tau)\|_V + c_3 \|\mathbf{z}^N(0)\|_H \|\mathbf{z}^N(0)\|_V + \frac{c_3}{2} \|\mathfrak{G} \mathbf{z}^N(\tau)\|_Z^2 + \frac{c_3}{2} \|\mathfrak{G}\|_{V \rightarrow Z}^2 \|\mathbf{z}^N(0)\|_V^2 + \\
& + \|\mathfrak{g}(\tau)\|_{Y^*} \|\mathfrak{C}\|_{V \rightarrow Y} \|\mathbf{z}^N(\tau)\|_V + \|\mathfrak{g}(0)\|_{Y^*} \|\mathfrak{C}\|_{V \rightarrow Y} \|\mathbf{z}^N(0)\|_V + \int_0^\tau c_3(1 + c_0) [\|\mathbf{z}^N(t)\|_V^2 + \|\dot{\mathbf{z}}^N(t)\|_H^2] dt + \\
& + \frac{c_3 \|\mathfrak{G}\|_{V \rightarrow Z}^2}{2} \int_0^\tau \|\mathbf{z}^N(t)\|_V^2 dt + [\|f\|_{1,[0,T],H} + \|\mathfrak{C}\|_{V \rightarrow Y} \|\mathfrak{g}\|_{1,[0,T],Y^*}^{(1)}] \max_{t \in [0,\tau]} \sqrt{\|\dot{\mathbf{z}}^N(t)\|_H^2 + \|\mathbf{z}^N(t)\|_V^2}.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} [\|\dot{\mathbf{z}}^N(\tau)\|_H^2 + \langle \mathfrak{A}(\tau) \mathbf{z}^N(\tau), \mathbf{z}^N(\tau) \rangle] \leq \rho_1 [\|\dot{\mathbf{z}}^N(0)\|_H^2 + \|\mathbf{z}^N(0)\|_V^2] + \rho_1 \int_0^\tau [\|\mathbf{z}^N(t)\|_V^2 + \|\dot{\mathbf{z}}^N(t)\|_H^2] dt + \\
& + c_3 \|\mathbf{z}^N(\tau)\|_H \|\mathbf{z}^N(\tau)\|_V + \frac{c_3}{2} \|\mathfrak{G} \mathbf{z}^N(\tau)\|_Z^2 + [\|\mathfrak{C}\|_{V \rightarrow Y} [\|\mathfrak{g}(\tau)\|_{Y^*} + \|\mathfrak{g}(0)\|_{Y^*} + \|\mathfrak{g}\|_{1,[0,T],Y^*}^{(1)}] + \\
& + \|f\|_{1,[0,T],H}] \max_{t \in [0,\tau]} \sqrt{\|\dot{\mathbf{z}}^N(t)\|_H^2 + \|\mathbf{z}^N(t)\|_V^2},
\end{aligned}$$

где  $\rho_1 \equiv \max\{1, c_3\} + c_3 c_0 + \frac{c_3 \|\mathfrak{G}\|_{V \rightarrow Z}^2}{2}$ .

Применяя к данному неравенству теорему 2.3.3, будем иметь

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} [\|\dot{\mathbf{z}}^N(\tau)\|_H^2 + \langle \mathfrak{A}(\tau) \mathbf{z}^N(\tau), \mathbf{z}^N(\tau) \rangle] \leq \rho_1 [\|\dot{\mathbf{z}}^N(0)\|_H^2 + \|\mathbf{z}^N(0)\|_V^2] + \rho_1 \int_0^\tau [\|\mathbf{z}^N(t)\|_V^2 + \|\dot{\mathbf{z}}^N(t)\|_H^2] dt + \\
& + c_3 \|\mathbf{z}^N(\tau)\|_H \|\mathbf{z}^N(\tau)\|_V + \frac{c_3}{2} \|\mathfrak{G} \mathbf{z}^N(\tau)\|_Z^2 + \rho_2 [\|\mathfrak{g}\|_{1,[0,T],Y^*}^{(1)} + \|f\|_{1,[0,T],H}] \max_{t \in [0,\tau]} \sqrt{\|\dot{\mathbf{z}}^N(t)\|_H^2 + \|\mathbf{z}^N(t)\|_V^2},
\end{aligned}$$

где  $\rho_2 \equiv [2A_1 + 1] \|\mathfrak{C}\|_{V \rightarrow Y}$ .

Применяя к слагаемому  $\|\mathbf{z}^N(\tau)\|_H \|\mathbf{z}^N(\tau)\|_V$  неравенство Коши с  $\varepsilon$ , заключаем, что

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} [\|\dot{\mathbf{z}}^N(\tau)\|_H^2 + \langle \mathfrak{A}(\tau) \mathbf{z}^N(\tau), \mathbf{z}^N(\tau) \rangle] \leq \rho_1 [\|\dot{\mathbf{z}}^N(0)\|_H^2 + \|\mathbf{z}^N(0)\|_V^2] + \rho_1 \int_0^\tau [\|\mathbf{z}^N(t)\|_V^2 + \|\dot{\mathbf{z}}^N(t)\|_H^2] dt + \\
& + c_3 \left[ \frac{1}{2\varepsilon} \|\mathbf{z}^N(\tau)\|_H^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|\mathbf{z}^N(\tau)\|_V^2 \right] + \frac{c_3}{2} \|\mathfrak{G} \mathbf{z}^N(\tau)\|_Z^2 + \rho_2 [\|\mathfrak{g}\|_{1,[0,T],Y^*}^{(1)} + \|f\|_{1,[0,T],H}] \max_{t \in [0,\tau]} \sqrt{\|\dot{\mathbf{z}}^N(t)\|_H^2 + \|\mathbf{z}^N(t)\|_V^2}.
\end{aligned}$$

Учитывая здесь условия на оператор  $\mathfrak{G}$ , выводим, что

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} [\|\dot{\mathbf{z}}^N(\tau)\|_H^2 + \langle \mathfrak{A}(\tau) \mathbf{z}^N(\tau), \mathbf{z}^N(\tau) \rangle] \leq \rho_1 [\|\dot{\mathbf{z}}^N(0)\|_H^2 + \|\mathbf{z}^N(0)\|_V^2] + \rho_1 \int_0^\tau [\|\mathbf{z}^N(t)\|_V^2 + \|\dot{\mathbf{z}}^N(t)\|_H^2] dt + \\
& + c_3 \left[ \frac{1}{2\varepsilon} \|\mathbf{z}^N(\tau)\|_H^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|\mathbf{z}^N(\tau)\|_V^2 \right] + \frac{c_3}{2} \left[ \varepsilon \|\mathbf{z}^N(\tau)\|_V^2 + c_4(\varepsilon) \|\mathbf{z}^N(\tau)\|_H^2 \right] + \\
& + \rho_2 [\|\mathfrak{g}\|_{1,[0,T],Y^*}^{(1)} + \|f\|_{1,[0,T],H}] \max_{t \in [0,\tau]} \sqrt{\|\dot{\mathbf{z}}^N(t)\|_H^2 + \|\mathbf{z}^N(t)\|_V^2}.
\end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что

$$\begin{aligned} & \|\dot{\mathbf{z}}^N(\tau)\|_H^2 + \langle \mathfrak{A}(\tau)\dot{\mathbf{z}}^N(\tau), \dot{\mathbf{z}}^N(\tau) \rangle - 2c_3\varepsilon\|\dot{\mathbf{z}}^N(\tau)\|_V^2 \leq 2\rho_1[\|\dot{\mathbf{z}}^N(0)\|_H^2 + \|\dot{\mathbf{z}}^N(0)\|_V^2] + \\ & + 2\rho_1 \int_0^\tau [\|\dot{\mathbf{z}}^N(t)\|_V^2 + \|\dot{\mathbf{z}}^N(t)\|_H^2] dt + \rho_3(\varepsilon)\|\dot{\mathbf{z}}^N(\tau)\|_H^2 + 2\rho_2[\|\mathfrak{g}\|_{1,[0,T],Y^*}^{(1)} + \|f\|_{1,[0,T],H}] \max_{t \in [0,\tau]} \sqrt{\|\dot{\mathbf{z}}^N(t)\|_H^2 + \|\dot{\mathbf{z}}^N(t)\|_V^2}, \end{aligned}$$

где  $\rho_3(\varepsilon) \equiv c_3(\varepsilon^{-1} + c_4(\varepsilon))$ .

Прибавляя к обеим частям данного неравенства слагаемое  $c_1\|\dot{\mathbf{z}}^N(\tau)\|_H^2$ , получим, что

$$\begin{aligned} & \|\dot{\mathbf{z}}^N(\tau)\|_H^2 + [c_2 - 2c_3\varepsilon]\|\dot{\mathbf{z}}^N(\tau)\|_V^2 \leq 2\rho_1[\|\dot{\mathbf{z}}^N(0)\|_H^2 + \|\dot{\mathbf{z}}^N(0)\|_V^2] + 2\rho_1 \int_0^\tau [\|\dot{\mathbf{z}}^N(t)\|_V^2 + \|\dot{\mathbf{z}}^N(t)\|_H^2] dt + \\ & + [\rho_3(\varepsilon) + c_1]\|\dot{\mathbf{z}}^N(\tau)\|_H^2 + 2\rho_2[\|\mathfrak{g}\|_{1,[0,T],Y^*}^{(1)} + \|f\|_{1,[0,T],H}] \max_{t \in [0,\tau]} \sqrt{\|\dot{\mathbf{z}}^N(t)\|_H^2 + \|\dot{\mathbf{z}}^N(t)\|_V^2}. \end{aligned}$$

Однако,

$$\begin{aligned} \|\dot{\mathbf{z}}^N(\tau)\|_H^2 &= \left\| \dot{\mathbf{z}}^N(0) + \int_0^\tau \dot{\mathbf{z}}^N(t) dt \right\|_H^2 \leq 2\|\dot{\mathbf{z}}^N(0)\|_H^2 + 2 \left\| \int_0^\tau \dot{\mathbf{z}}^N(t) dt \right\|_H^2 \leq 2c_0^2\|\dot{\mathbf{z}}^N(0)\|_V^2 + 2\tau \int_0^\tau \|\dot{\mathbf{z}}^N(t)\|_H^2 dt \leq \\ & \leq 2c_0^2\|\dot{\mathbf{z}}^N(0)\|_V^2 + 2T \int_0^\tau \|\dot{\mathbf{z}}^N(t)\|_H^2 dt. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} & \|\dot{\mathbf{z}}^N(\tau)\|_H^2 + [c_2 - 2c_3\varepsilon]\|\dot{\mathbf{z}}^N(\tau)\|_V^2 \leq \rho_4(\varepsilon)[\|\dot{\mathbf{z}}^N(0)\|_H^2 + \|\dot{\mathbf{z}}^N(0)\|_V^2] + \rho_5(\varepsilon) \int_0^\tau [\|\dot{\mathbf{z}}^N(t)\|_V^2 + \|\dot{\mathbf{z}}^N(t)\|_H^2] dt + \\ & + 2\rho_2[\|\mathfrak{g}\|_{1,[0,T],Y^*}^{(1)} + \|f\|_{1,[0,T],H}] \max_{t \in [0,\tau]} \sqrt{\|\dot{\mathbf{z}}^N(t)\|_H^2 + \|\dot{\mathbf{z}}^N(t)\|_V^2}, \end{aligned}$$

где  $\rho_4(\varepsilon) \equiv 2\rho_1 + 2c_0^2[\rho_3(\varepsilon) + c_1]$ ,  $\rho_5(\varepsilon) \equiv 2\rho_1 + 2T[\rho_3(\varepsilon) + c_1]$ .

Взяв здесь  $\varepsilon = \varepsilon_0 \equiv \frac{c_2}{4c_3}$ , будем иметь

$$\begin{aligned} & \|\dot{\mathbf{z}}^N(\tau)\|_V^2 + \|\dot{\mathbf{z}}^N(\tau)\|_H^2 \leq \rho_6[\|\dot{\mathbf{z}}^N(0)\|_V^2 + \|\dot{\mathbf{z}}^N(0)\|_H^2] + [\|\mathfrak{g}\|_{1,[0,T],Y^*}^{(1)} + \|f\|_{1,[0,T],H}] \max_{t \in [0,\tau]} \sqrt{\|\dot{\mathbf{z}}^N(t)\|_H^2 + \|\dot{\mathbf{z}}^N(t)\|_V^2} + \\ & + \rho_7 \int_0^\tau [\|\dot{\mathbf{z}}^N(t)\|_V^2 + \|\dot{\mathbf{z}}^N(t)\|_H^2] dt, \end{aligned}$$

где  $\rho_6 \equiv \frac{\max\{\rho_4(\varepsilon_0), 2\rho_2\}}{\min\{1, \frac{c_2}{2}\}}$ ,  $\rho_7 \equiv \frac{\rho_5(\varepsilon)}{\min\{1, \frac{c_2}{2}\}}$ .

Введя обозначение

$$\mathfrak{y}^N(\tau) \equiv \|\dot{\mathbf{z}}^N(\tau)\|_V^2 + \|\dot{\mathbf{z}}^N(\tau)\|_H^2,$$

можем записать

$$\mathfrak{y}^N(\tau) \leq \rho_6[\mathfrak{y}^N(0) + [\|\mathfrak{g}\|_{1,[0,T],Y^*}^{(1)} + \|f\|_{1,[0,T],H}] \max_{t \in [0,\tau]} \sqrt{\mathfrak{y}^N(t)}] + \rho_7 \int_0^\tau \mathfrak{y}^N(t) dt \quad \forall \tau \in [0, T].$$

Применив к данному неравенству лемму 5.1.2, получим, что

$$\max_{t \in [0,T]} \sqrt{\mathfrak{y}^N(t)} \leq \rho_8 \left[ \sqrt{\mathfrak{y}^N(0)} + \|\mathfrak{g}\|_{1,[0,T],Y^*}^{(1)} + \|f\|_{1,[0,T],H} \right], \quad (6.3.15)$$

где  $\rho_8 \equiv \rho_6 \exp[\rho_7 T]$ .

Заметим, что из (6.3.15) следует

$$\|\dot{\mathbf{z}}^N\|_{\Theta([0,T];V,H)} \leq 2\rho_8 \left[ \sqrt{\|\varphi^N\|_V^2 + \|\psi^N\|_H^2} + \|\mathfrak{g}\|_{1,[0,T],Y^*}^{(1)} + \|f\|_{1,[0,T],H} \right], \quad (6.3.16)$$

где  $\varphi^N \equiv \sum_{m=1}^N \varphi_m e_m$ ,  $\psi^N \equiv \sum_{m=1}^N \psi_m e_m$ .  
Поскольку

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|\varphi^N - \varphi\|_V = 0, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \|\psi^N - \psi\|_H = 0, \quad (6.3.17)$$

то справедливо предельное соотношение

$$\lim_{N \rightarrow \infty} [\|\varphi^N\|_V + \|\psi^N\|_H] = \|\varphi\|_V + \|\psi\|_H. \quad (6.3.18)$$

Поэтому найдётся константа  $\rho_9 > 0$ , такая, что

$$\|\mathfrak{z}^N\|_{\mathfrak{E}([0,T];V,H)} \leq \rho_9 \quad \forall N = 1, 2, \dots \quad (6.3.19)$$

На основании (6.3.19) и теоремы 2.4.9 заключаем, что найдутся подпоследовательность  $\mathfrak{z}^{N_m}$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , последовательности  $\mathfrak{z}^N$ ,  $N = 1, 2, \dots$ , и функция  $\mathfrak{z} \in \mathfrak{E}([0, T]; V, H)$ , такие, что

$$\mathfrak{z}^{N_m} \rightarrow \mathfrak{z}, \quad m \rightarrow \infty, \quad \text{слабо в } \mathcal{W}_2^1([0, T]; V, H), \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \max_{t \in [0, T]} \|\mathfrak{z}^{N_m}(t) - \mathfrak{z}(t)\|_H = 0; \quad (6.3.20)$$

$$\mathfrak{z}^{N_m} \rightarrow \mathfrak{z}, \quad m \rightarrow \infty, \quad * \text{-слабо в } L_\infty([0, T], V); \quad \dot{\mathfrak{z}}^{N_m} \rightarrow \dot{\mathfrak{z}}, \quad m \rightarrow \infty, \quad * \text{-слабо в } L_\infty([0, T], H);$$

$$\mathfrak{z}^{N_m} \rightarrow \mathfrak{z}, \quad m \rightarrow \infty, \quad \text{в } V^* \text{-топологии пространства } C_s([0, T], V);$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \max_{t \in [0, T]} \|\mathfrak{G}[\mathfrak{z}^{N_m}(t)] - \mathfrak{G}[\mathfrak{z}(t)]\|_Z = 0, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \max_{t \in [0, T]} \|\mathfrak{C}[\mathfrak{z}^{N_m}(t)] - \mathfrak{C}[\mathfrak{z}(t)]\|_Y = 0.$$

Перепишем задачу Коши (6.3.13), (6.3.14) для  $N = N_m$  в виде

$$\begin{aligned} \langle \ddot{\mathfrak{z}}^{N_m}(t), e_k \rangle + \langle \mathfrak{A}(t) \mathfrak{z}^{N_m}(t) + \mathfrak{B}(t) \dot{\mathfrak{z}}^{N_m}(t), e_k \rangle + \langle \mathfrak{F}(t) \mathfrak{G} \mathfrak{z}^{N_m}(t), \mathfrak{G} e_k \rangle_Z &= \langle f(t), e_k \rangle_H + \langle \mathfrak{g}(t), \mathfrak{C} e_k \rangle, \\ \mathfrak{z}^{N_m}(0) &= \varphi^{N_m}, \quad \dot{\mathfrak{z}}^{N_m}(0) = \psi^{N_m}, \quad k = \overline{1, N_m}, \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (6.3.21)$$

Пусть  $\eta \in \hat{\mathfrak{E}}([0, T]; V, H)$  — произвольна. Тогда  $\eta \in \mathcal{W}_2^1([0, T]; V, H)$  и  $\eta(T) = 0$ . Согласно лемме 2.4.2, существует последовательность функций  $\eta^N \in \mathfrak{M}_T^N$ ,  $N = 1, 2, \dots$ , такая, что  $\lim_{N \rightarrow \infty} \|\eta^N - \eta\|_{\mathcal{W}_2^1([0, T]; V, H)} = 0$ . Следовательно,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|\eta^{N_m} - \eta\|_{\mathcal{W}_2^1([0, T]; V, H)} = 0. \quad (6.3.22)$$

Из (6.3.21) выводим, что

$$\begin{aligned} & \int_0^T [\langle \ddot{\mathfrak{z}}^{N_m}(t), \eta^{N_m}(t) \rangle + \langle \mathfrak{A}(t) \mathfrak{z}^{N_m}(t), \eta^{N_m}(t) \rangle + \langle \mathfrak{B}(t) \dot{\mathfrak{z}}^{N_m}(t), \eta^{N_m}(t) \rangle + \langle \mathfrak{F}(t) \mathfrak{G} \mathfrak{z}^{N_m}(t), \mathfrak{G} \eta^{N_m}(t) \rangle_Z] dt = \\ &= \int_0^T \langle f(t), \eta^{N_m}(t) \rangle_H dt + \int_0^T \langle \mathfrak{g}(t), \mathfrak{C} \eta^{N_m}(t) \rangle dt, \quad \mathfrak{z}^{N_m}(0) = \varphi^{N_m}, \quad \dot{\mathfrak{z}}^{N_m}(0) = \psi^{N_m}. \end{aligned}$$

Интегрируя по частям, заключаем, что

$$\begin{aligned} & \int_0^T [-\langle \dot{\mathfrak{z}}^{N_m}(t), \dot{\eta}^{N_m}(t) \rangle + \langle \mathfrak{A}(t) \mathfrak{z}^{N_m}(t), \eta^{N_m}(t) \rangle + \langle \mathfrak{B}(t) \dot{\mathfrak{z}}^{N_m}(t), \eta^{N_m}(t) \rangle + \langle \mathfrak{F}(t) \mathfrak{G} \mathfrak{z}^{N_m}(t), \mathfrak{G} \eta^{N_m}(t) \rangle_Z] dt = \\ &= \langle \psi^{N_m}, \eta^{N_m}(0) \rangle + \int_0^T \langle f(t), \eta^{N_m}(t) \rangle_H dt + \int_0^T \langle \mathfrak{g}(t), \mathfrak{C} \eta^{N_m}(t) \rangle dt, \quad \mathfrak{z}^{N_m}(0) = \varphi^{N_m}. \end{aligned} \quad (6.3.23)$$

Переходя в данном соотношении к пределу при  $m \rightarrow \infty$ , на основании (6.3.20) и (6.3.22) заключаем, что

$$\begin{aligned} & \int_0^T [-\langle \dot{\mathfrak{z}}(t), \dot{\eta}(t) \rangle + \langle \mathfrak{A}(t) \mathfrak{z}(t), \eta(t) \rangle + \langle \mathfrak{B}(t) \dot{\mathfrak{z}}(t), \eta(t) \rangle + \langle \mathfrak{F}(t) \mathfrak{G} \mathfrak{z}(t), \mathfrak{G} \eta(t) \rangle_Z] dt = \langle \psi, \eta(0) \rangle + \int_0^T \langle f(t), \eta(t) \rangle_H dt + \\ &+ \int_0^T \langle \mathfrak{g}(t), \mathfrak{C} \eta(t) \rangle dt, \quad \forall \eta \in \hat{\mathfrak{E}}([0, T]; V, H); \quad \mathfrak{z}(0) = \varphi. \end{aligned}$$

Это означает, что  $\mathbf{z} \in \mathfrak{D}([0, T]; V, H)$  — решение задачи Коши (6.3.4), (6.3.5) в смысле определения 6.3.1.

Итак, существование решения задачи Коши (6.3.4), (6.3.5) в смысле определения 6.3.1 — доказано.

3) Докажем априорную оценку (6.3.11). В самом деле, на основании (6.3.18), для каждого  $\varepsilon > 0$  найдётся номер  $m_0(\varepsilon) \geq 1$ , такой, что при всех  $m \geq m_0(\varepsilon)$  справедливо неравенство

$$\sqrt{\|\varphi^{N_m}\|_V^2 + \|\psi^{N_m}\|_H^2} \leq \sqrt{\|\varphi\|_V^2 + \|\psi\|_H^2} + \varepsilon. \quad (6.3.24)$$

Далее, из (6.3.16) следует, что

$$\|\mathbf{z}^{N_m}\|_{\mathfrak{D}([0, T]; V, H)} \leq 2\rho_8 \left[ \sqrt{\|\varphi\|_V^2 + \|\psi\|_H^2} + \|\mathfrak{g}\|_{1, [0, T], Y^*}^{(1)} + \|f\|_{1, [0, T], H} + \varepsilon \right], \quad \forall m \geq m_0(\varepsilon).$$

Из теоремы 2.4.9 и соотношений (6.3.20) следует, что

$$\|\mathbf{z}\|_{\mathfrak{D}([0, T]; V, H)} \leq 2\rho_8 \left[ \sqrt{\|\varphi\|_V^2 + \|\psi\|_H^2} + \|\mathfrak{g}\|_{1, [0, T], Y^*}^{(1)} + \|f\|_{1, [0, T], H} + \varepsilon \right].$$

Устремляя затем  $\varepsilon$  к нулю, получаем оценку (6.3.11) с  $\varkappa_1 = 2\rho_8$ . Теорема полностью доказана. ■

**Теорема 6.3.2.** Пусть  $\mathbf{z}$  — решение задачи Коши (6.3.4), (6.3.5) в смысле определения 6.3.1. Тогда  $\dot{\mathbf{z}} \in C_s([0, T], H)$ .

**Доказательство.** Пусть  $\mathbf{z}$  — решение задачи Коши (6.3.4), (6.3.5) в смысле определения 6.3.1. Тогда, на основании леммы 6.3.1,  $\dot{\mathbf{z}} \in L_1([0, T], V^*)$ . Поэтому  $\dot{\mathbf{z}} \in W_1^1([0, T], V^*)$ . На основании теоремы 2.3.3 отсюда следует, что  $z_t \in C_s([0, T], V^*)$ . Пользуясь теперь включением  $z_t \in L_\infty([0, T], H)$  и леммой 2.3.1, получаем требуемое утверждение. ■

**Теорема 6.3.3.** Пусть  $\mathbf{z}$  — решение задачи Коши (6.3.4), (6.3.5) в смысле определения 6.3.1. Тогда  $\mathbf{z} \in \mathfrak{C}([0, T]; V, H)$ , причём найдётся постоянная  $\varkappa_2 > 0$ , зависящая лишь от  $T$ ,  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3 > 0$  и от  $\|\mathfrak{C}\|_{V \rightarrow Y}$ ,  $\|\mathfrak{G}\|_{V \rightarrow Z}$ , такая, что

$$\|\mathbf{z}\|_{\mathfrak{C}([0, T]; V, H)} \leq \varkappa_2 [\sqrt{\|\varphi\|_V^2 + \|\psi\|_H^2} + \|f\|_{1, [0, T], H} + \|\mathfrak{g}\|_{1, [0, T], Y^*}^{(1)}]. \quad (6.3.25)$$

**Доказательство.** Включение  $\mathbf{z} \in \mathfrak{C}([0, T]; V, H)$  вытекает из предыдущей теоремы и определения класса  $\mathfrak{C}([0, T]; V, H)$ . Поэтому достаточно доказать лишь оценку (6.3.25).

В самом деле, из оценки (6.3.11) следует, что

$$\sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{z}(t)\|_V + \text{vraisup}_{t \in [0, T]} \|\dot{\mathbf{z}}(t)\|_H \leq \varkappa_1 [\sqrt{\|\varphi\|_V^2 + \|\psi\|_H^2} + \|f\|_{1, [0, T], H} + \|\mathfrak{g}\|_{1, [0, T], Y^*}^{(1)}].$$

На основании леммы 1.3.1 и включения  $\mathbf{z} \in \mathfrak{C}([0, T]; V, H)$  из данного неравенства выводим, что

$$\sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{z}(t)\|_V + \sup_{t \in [0, T]} \|\dot{\mathbf{z}}(t)\|_H \leq \varkappa_1 [\sqrt{\|\varphi\|_V^2 + \|\psi\|_H^2} + \|f\|_{1, [0, T], H} + \|\mathfrak{g}\|_{1, [0, T], Y^*}^{(1)}].$$

Как следствие,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{z}\|_{\mathfrak{C}([0, T]; V, H)} &\equiv \sup_{t \in [0, T]} \sqrt{\|\mathbf{z}(t)\|_V^2 + \|\dot{\mathbf{z}}(t)\|_H^2} \leq \sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{z}(t)\|_V + \sup_{t \in [0, T]} \|\dot{\mathbf{z}}(t)\|_H \leq \\ &\leq \varkappa_1 [\sqrt{\|\varphi\|_V^2 + \|\psi\|_H^2} + \|f\|_{1, [0, T], H} + \|\mathfrak{g}\|_{1, [0, T], Y^*}^{(1)}]. \end{aligned}$$

Итак, оценка (6.3.25) доказана, причём можно взять  $\varkappa_2 = \varkappa_1$ . ■

### 6.3.2. Параметрическая задача Коши для однородного уравнения

При каждом  $\psi \in H$  определим функцию  $\eta[\psi](t, \tau)$ ,  $t \in [0, T]$ ,  $\tau \in [0, T]$ , при  $t \in [0, \tau]$  как решение задачи Коши

$$\eta_{tt} + \mathfrak{A}(t)\eta + \mathfrak{B}(t)\eta + \mathfrak{G}^*\mathfrak{F}(t)\mathfrak{G}\eta = 0, \quad t \in [0, \tau], \quad (6.3.26)$$

$$\eta|_{t=\tau} = 0, \quad \eta_t|_{t=\tau} = \psi, \quad (6.3.27)$$

а при  $t \in [\tau, T]$  — как решение задачи Коши

$$\eta_{tt} + \mathfrak{A}(t)\eta + \mathfrak{B}(t)\eta + \mathfrak{G}^*\mathfrak{F}(t)\mathfrak{G}\eta = 0, \quad t \in [\tau, T], \quad (6.3.28)$$

$$\eta|_{t=\tau} = 0, \quad \eta_t|_{t=\tau} = \psi. \quad (6.3.29)$$

Покажем, что справедлива

**Теорема 6.3.4.** *Справедливо включение  $\mathfrak{y}[\psi] \in C([0, T], \mathfrak{E}([0, T]; V, H))$ , понимаемое в том смысле, что функция*

$$[0, T] \ni \tau \mapsto \mathfrak{y}[\psi](\cdot, \tau) \in \mathfrak{E}([0, T]; V, H)$$

*непрерывна на отрезке  $[0, T]$  в смысле нормы пространства  $\mathfrak{E}([0, T]; V, H)$ . При этом найдётся постоянная  $\varkappa_3 > 0$ , зависящая лишь от  $T, c_1, c_2, c_3 > 0$  и от  $\|\mathfrak{G}\|_{V \rightarrow Z}$ , такая, что*

$$\max_{\tau \in [0, T]} \|\mathfrak{y}[\psi](\cdot, \tau)\|_{\mathfrak{E}([0, T]; V, H)} \leq \varkappa_3 \|\psi\|_H. \quad (6.3.30)$$

**Доказательство.** 1) Прежде всего отметим, что, в силу теоремы 6.3.1, функция  $\mathfrak{y}[\psi](\cdot, \tau)$  однозначно определяется на  $[0, T]$ ,  $\mathfrak{y}[\psi](\cdot, \tau) \in \mathfrak{D}([0, T]; V, H)$  при всех  $\tau \in [0, T]$ , и найдётся константа  $\varkappa_1 > 0$ , зависящая лишь от  $T, c_1, c_2, c_3 > 0$  и от  $\|\mathfrak{C}\|_{V \rightarrow Y}, \|\mathfrak{G}\|_{V \rightarrow Z}$ , такая, что

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, \tau]} \|\mathfrak{y}[\psi](t, \tau)\|_V + \text{vraisup}_{t \in [0, \tau]} \|\mathfrak{y}_t[\psi](t, \tau)\|_H &\leq \varkappa_1 \|\psi\|_H; \\ \sup_{t \in [\tau, T]} \|\mathfrak{y}[\psi](t, \tau)\|_V + \text{vraisup}_{t \in [\tau, T]} \|\mathfrak{y}_t[\psi](t, \tau)\|_H &\leq \varkappa_1 \|\psi\|_H. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\sup_{\tau \in [0, T]} \|\mathfrak{y}[\psi](\cdot, \tau)\|_{\mathfrak{D}([0, T]; V, H)} \leq 2\varkappa_1 \|\psi\|_H. \quad (6.3.31)$$

Заметим также, что  $\mathfrak{y}[\psi]$  линейно зависит от  $\psi \in H$ .

2) Докажем теперь включение  $\mathfrak{y}[\psi] \in C([0, T], \mathfrak{D}([0, T]; V, H))$ . Для этого воспользуемся методом Галёркина. Пусть

$$\psi^N \equiv \sum_{m=1}^N \psi_m e_m, \quad \psi_j \equiv \langle \psi, e_m \rangle_H, \quad j, N = 1, 2, \dots$$

Тогда

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|\psi^N - \psi\|_H = 0. \quad (6.3.32)$$

Будем искать приближение  $\mathfrak{y}^N[\psi]$  к функции  $\mathfrak{y}[\psi]$  в виде

$$\mathfrak{y}^N[\psi](t, \tau) \equiv \sum_{k=1}^N h_k^N(t, \tau) e_k,$$

где набор функций  $h_k^N, k = \overline{1, N}$ , является решением задачи Коши

$$\begin{aligned} h_{ktt}^N(t, \tau) + \sum_{m=1}^N q_{km}(t) h_m^N(t, \tau) &= 0, \\ h_k^N(t, \tau)|_{t=\tau} &= 0, \quad h_{kt}^N(t, \tau)|_{t=\tau} = \psi_k, \quad k = \overline{1, N}, \end{aligned} \quad (6.3.33)$$

в которой

$$q_{km}(t) \equiv \langle \mathfrak{A}(t) e_m, e_k \rangle + \langle \mathfrak{B}(t) e_m, e_k \rangle + \langle \mathfrak{F}(t) \mathfrak{G} e_m, \mathfrak{G} e_k \rangle_Z.$$

Согласно лемме 5.3.1, существует единственный набор функций  $h_k^N, k = \overline{1, N}$ , непрерывных на  $\Gamma$  и имеющих на  $\Gamma$  непрерывные производные  $h_{kt}^N, h_{k\tau}^N, h_{ktt}^N, h_{k\tau\tau}^N, h_{k\tau t}^N, k = \overline{1, N}$ , являющийся решением задачи Коши (6.3.33). Кроме того, производные  $h_{k\tau\tau}^N, k = \overline{1, N}$ , также существуют и непрерывны на  $\Gamma$ , а набор функций  $h_{k\tau}^N, k = \overline{1, N}$ , является решением задачи Коши

$$\begin{aligned} h_{k\tau\tau}^N(t, \tau) + \sum_{m=1}^N q_{km}(t) h_{m\tau}^N(t, \tau) &= 0, \\ h_{k\tau}^N(t, \tau)|_{t=\tau} &= -\psi_k, \quad h_{k\tau t}^N(t, \tau)|_{t=\tau} = 0, \quad k = \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (6.3.34)$$

Как следствие, для функций  $\mathfrak{y}^N[\psi]$  и  $\xi^N[\psi] \equiv \mathfrak{y}_\tau^N[\psi]$  справедливы тождества

$$\langle \mathfrak{y}_{tt}^N[\psi](t, \tau), e_k \rangle + \langle \mathfrak{A}(t)\mathfrak{y}^N[\psi](t, \tau) + \mathfrak{B}(t)\mathfrak{y}^N[\psi](t, \tau), e_k \rangle + \langle \mathfrak{F}(t)\mathfrak{G}\mathfrak{y}^N[\psi](t, \tau), \mathfrak{G}e_k \rangle_Z = 0, \quad (6.3.35)$$

$$\mathfrak{y}^N[\psi]|_{t=\tau} = 0, \quad \mathfrak{y}_t^N[\psi]|_{t=\tau} = \psi^N, \quad k = \overline{1, N}, \quad (t, \tau) \in \Gamma;$$

$$\langle \xi_{tt}^N[\psi](t, \tau), e_k \rangle + \langle \mathfrak{A}(t)\xi^N[\psi](t, \tau) + \mathfrak{B}(t)\xi^N[\psi](t, \tau), e_k \rangle + \langle \mathfrak{F}(t)\mathfrak{G}\xi^N[\psi](t, \tau), \mathfrak{G}e_k \rangle_Z = 0, \quad (6.3.36)$$

$$\xi^N[\psi]|_{t=\tau} = -\psi^N, \quad \xi_t^N[\psi]|_{t=\tau} = 0, \quad k = \overline{1, N}, \quad (t, \tau) \in \Gamma.$$

Рассуждая затем подобно тому, как это делалось при выводе оценки (6.3.16), заключаем, что

$$\|\mathfrak{y}^N[\psi](\cdot, \tau)\|_{\mathfrak{D}([0, T]; V, H)} \leq C\|\psi\|_H, \quad \|\xi^N[\psi](\cdot, \tau)\|_{\mathfrak{D}([0, T]; V, H)} \leq C\|\psi\|_H,$$

где постоянная  $C > 0$  определяется лишь числами  $T, c_1, c_2, c_3 > 0$  и  $\|\mathfrak{C}\|_{V \rightarrow Y}, \|\mathfrak{G}\|_{V \rightarrow Z}$ .

Следовательно, при всех  $\tau_1, \tau_2 \in [0, T]$

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{y}^N[\psi](\cdot, \tau_1) - \mathfrak{y}^N[\psi](\cdot, \tau_2)\|_{\mathfrak{D}([0, T]; V, H)} &= \left\| \sum_{m=1}^N h_m^N(\cdot, \tau_1)e_m - \sum_{m=1}^N h_m^N(\cdot, \tau_2)e_m \right\|_{\mathfrak{D}([0, T]; V, H)} = \\ &= \left\| \sum_{m=1}^N [h_m^N(\cdot, \tau_1) - h_m^N(\cdot, \tau_2)]e_m \right\|_{\mathfrak{D}([0, T]; V, H)} = \left\| \sum_{m=1}^N \int_{\tau_2}^{\tau_1} h_{m\tau}^N(\cdot, \tau)e_m d\tau \right\|_{\mathfrak{D}([0, T]; V, H)} = \\ &= \left\| \int_{\tau_2}^{\tau_1} \sum_{m=1}^N h_{m\tau}^N(\cdot, \tau)e_m d\tau \right\|_{\mathfrak{D}([0, T]; V, H)} = \left\| \int_{\tau_2}^{\tau_1} \xi^N[\psi](\cdot, \tau) d\tau \right\|_{\mathfrak{D}([0, T]; V, H)} \leq \\ &\leq \left| \int_{\tau_2}^{\tau_1} \|\xi^N[\psi](\cdot, \tau)\|_{\mathfrak{D}([0, T]; V, H)} d\tau \right| \leq C|\tau_1 - \tau_2|\|\psi\|_H. \end{aligned}$$

Таким образом, при всех  $\tau, \tau_1, \tau_2 \in [0, T]$ ,

$$\|\mathfrak{y}^N[\psi](\cdot, \tau)\|_{\mathfrak{D}([0, T]; V, H)} \leq C\|\psi\|_H, \quad (6.3.37)$$

$$\|\mathfrak{y}^N[\psi](\cdot, \tau_1) - \mathfrak{y}^N[\psi](\cdot, \tau_2)\|_{\mathfrak{D}([0, T]; V, H)} \leq C|\tau_1 - \tau_2|\|\psi\|_H. \quad (6.3.38)$$

Рассуждая как при получении тождества (6.3.23), заключаем, что

$$\begin{aligned} \int_0^\tau [-\langle \mathfrak{y}_t^N[\psi](t, \tau), \eta^N(t) \rangle + \langle \mathfrak{A}(t)\mathfrak{y}^N[\psi](t, \tau), \eta^N(t) \rangle + \langle \mathfrak{B}(t)\mathfrak{y}^N[\psi](t, \tau), \eta^N(t) \rangle + \\ + \langle \mathfrak{F}(t)\mathfrak{G}\mathfrak{y}^N[\psi](t, \tau), \mathfrak{G}\eta^N(t) \rangle_Z] dt = -\langle \psi^N, \eta^N(\tau) \rangle, \quad \forall \eta^N \in \mathfrak{R}_0^N[0, \tau]; \quad \mathfrak{y}^N[\psi]|_{t=\tau} = 0; \end{aligned} \quad (6.3.39)$$

$$\begin{aligned} \int_\tau^T [-\langle \mathfrak{y}_t^N[\psi](t, \tau), \eta^N(t) \rangle + \langle \mathfrak{A}(t)\mathfrak{y}^N[\psi](t, \tau), \eta^N(t) \rangle + \langle \mathfrak{B}(t)\mathfrak{y}^N[\psi](t, \tau), \eta^N(t) \rangle + \\ + \langle \mathfrak{F}(t)\mathfrak{G}\mathfrak{y}^N[\psi](t, \tau), \mathfrak{G}\eta^N(t) \rangle_Z] dt = \langle \psi^N, \eta^N(\tau) \rangle, \quad \forall \eta^N \in \mathfrak{R}_T^N[\tau, T]; \quad \mathfrak{y}^N[\psi]|_{t=\tau} = 0. \end{aligned} \quad (6.3.40)$$

Произвольно выберем и зафиксируем  $\tau_1, \tau_2 \in [0, T]$ . Ввиду неравенства (6.3.37) и теоремы 2.4.9 заключаем, что найдутся подпоследовательность  $N_m, m = 1, 2, \dots$ , последовательности  $N = 1, 2, \dots$ , и функции  $\mathfrak{y}^-(\cdot, \tau_i) \in \mathfrak{D}([0, \tau_i]; V, H)$ ,  $\mathfrak{y}^+(\cdot, \tau_i) \in \mathfrak{D}([\tau_i, T]; V, H)$ ,  $\mathfrak{y}^*(\cdot, \tau_i) \in \mathfrak{D}([0, T]; V, H)$ ,  $i = 1, 2$ , такие, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \max_{t \in [0, \tau_i]} \|\mathfrak{y}^{N_m}[\psi](t, \tau_i) - \mathfrak{y}^-(t, \tau_i)\|_H = 0, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \max_{t \in [\tau_i, T]} \|\mathfrak{y}^{N_m}[\psi](t, \tau_i) - \mathfrak{y}^+(t, \tau_i)\|_H = 0, \quad (6.3.41)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{y}^{N_m}[\psi](\cdot, \tau_i) &\rightarrow \mathfrak{y}^-(\cdot, \tau_i), \quad m \rightarrow \infty, \quad \text{слабо в } \mathcal{W}_2^1([0, \tau_i]; V, H), \\ \mathfrak{y}^{N_m}[\psi](\cdot, \tau_i) &\rightarrow \mathfrak{y}^+(\cdot, \tau_i), \quad m \rightarrow \infty, \quad \text{слабо в } \mathcal{W}_2^1([\tau_i, T]; V, H), \\ \mathfrak{y}^{N_m}[\psi](\cdot, \tau_i) &\rightarrow \mathfrak{y}^-(\cdot, \tau_i), \quad m \rightarrow \infty, \quad \text{*слабо в } L_\infty([0, \tau_i], V), \\ \mathfrak{y}^{N_m}[\psi](\cdot, \tau_i) &\rightarrow \mathfrak{y}^+(\cdot, \tau_i), \quad m \rightarrow \infty, \quad \text{*слабо в } L_\infty([\tau_i, T], V), \\ \mathfrak{y}_t^{N_m}[\psi](\cdot, \tau_i) &\rightarrow \mathfrak{y}_t^-(\cdot, \tau_i), \quad m \rightarrow \infty, \quad \text{*слабо в } L_\infty([0, \tau_i], H), \\ \mathfrak{y}_t^{N_m}[\psi](\cdot, \tau_i) &\rightarrow \mathfrak{y}_t^+(\cdot, \tau_i), \quad m \rightarrow \infty, \quad \text{*слабо в } L_\infty([\tau_i, T], H), \\ \mathfrak{y}^{N_m}[\psi](\cdot, \tau_i) &\rightarrow \mathfrak{y}^*(\cdot, \tau_i), \quad m \rightarrow \infty, \quad \text{слабо в } \mathcal{W}_2^1([0, T]; V, H), \end{aligned}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \max_{t \in [0, \tau_i]} \|\mathfrak{G}[\mathfrak{y}^{N_m}[\psi](\cdot, \tau_i)] - \mathfrak{G}[\mathfrak{y}^-(t, \tau_i)]\|_Z = 0, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \max_{t \in [\tau_i, T]} \|\mathfrak{G}[\mathfrak{y}^{N_m}[\psi](\cdot, \tau_i)] - \mathfrak{G}[\mathfrak{y}^+(t, \tau_i)]\|_Z = 0, \quad i = 1, 2.$$

Переходя к пределу при  $m \rightarrow \infty$  в (6.3.39) и (6.3.40) с  $N = N_m$ ,  $\tau = \tau_i$ ,  $i = 1, 2$ , получим, что  $\eta^*(\cdot, \tau_i) \equiv \eta[\psi](\cdot, \tau_i)$ ,  $\eta^-(\cdot, \tau_i) \equiv \eta[\psi](\cdot, \tau_i)|_{[0, \tau_i]}$ ,  $\eta^+(\cdot, \tau_i) \equiv \eta[\psi](\cdot, \tau_i)|_{[\tau_i, T]}$ ,  $i = 1, 2$ .

Используя предельные соотношения (6.3.41), теорему 2.4.9, и неравенство (6.3.38), заключаем, что

$$\|\eta[\psi](\cdot, \tau_1) - \eta[\psi](\cdot, \tau_2)\|_{\mathfrak{D}([0, T]; V, H)} \leq C|\tau_1 - \tau_2|\|\psi\|_H \quad \forall \tau_1, \tau_2 \in [0, T]. \quad (6.3.42)$$

Таким образом, включение  $\eta[\psi] \in C([0, T], \mathfrak{D}([0, T]; V, H))$  доказано.

3) Докажем включение  $\eta[\psi] \in C([0, T], \mathfrak{E}([0, T]; V, H))$ . В самом деле, на основании теоремы 6.3.3, при всех  $\tau \in [0, T]$  справедливо включение  $\eta[\psi](\cdot, \tau) \in \mathfrak{E}([0, T]; V, H)$ . Кроме того, из доказанного во второй части данного доказательства включения  $\eta[\psi] \in C([0, T], \mathfrak{D}([0, T]; V, H))$  следует, что для всех  $\tau$  и  $\tau' \in [0, T]$

$$\begin{aligned} \|\eta[\psi](\cdot, \tau') - \eta[\psi](\cdot, \tau)\|_{\mathfrak{E}([0, T]; V, H)} &= \sup_{t \in [0, T]} \left[ \|\eta[\psi](t, \tau') - \eta[\psi](t, \tau)\|_V^2 + \|\eta_t[\psi](t, \tau') - \eta_t[\psi](t, \tau)\|_H^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \|\eta[\psi](\cdot, \tau') - \eta[\psi](\cdot, \tau)\|_{\mathfrak{D}([0, T]; V, H)}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\|\eta[\psi](\cdot, \tau') - \eta[\psi](\cdot, \tau)\|_{\mathfrak{E}([0, T]; V, H)} \leq \|\eta[\psi](\cdot, \tau') - \eta[\psi](\cdot, \tau)\|_{\mathfrak{D}([0, T]; V, H)}. \quad (6.3.43)$$

Из данного неравенства и ранее доказанного включения  $\eta[\psi] \in C([0, T], \mathfrak{D}([0, T]; V, H))$  и следует включение  $\eta[\psi] \in C([0, T], \mathfrak{E}([0, T]; V, H))$ .

4) Априорная оценка (6.3.30) является следствием неравенств (6.3.31) и (6.3.43). Теорема полностью доказана. ■

**Теорема 6.3.5.** *Найдётся функция  $\Psi \in \mathfrak{S}(\Gamma; V, H)$ , такая, что*

$$\eta[h](t, \tau) = \Psi(t, \tau)h \quad \forall (t, \tau) \in \Gamma, \quad h \in H.$$

**Доказательство.** В самом деле, на основании теоремы 6.3.4, отображение

$$H \ni h \mapsto \eta[h] \in C([0, T], \mathfrak{E}([0, T]; V, H))$$

представляет собой линейный непрерывный оператор. Поэтому, согласно теореме 3.2.5, найдётся функция  $\Psi \in \mathfrak{S}(\Gamma; V, H)$ , такая, что

$$\eta[h](t, \tau) = \Psi(t, \tau)h \quad \forall (t, \tau) \in \Gamma, \quad h \in H.$$

Теорема доказана. ■

### 6.3.3. Представление решения линейного уравнения

В данном разделе мы получим представление решения задачи Коши (6.3.4), (6.3.5).

Прежде всего определим гильбертово пространство  $\mathfrak{V}$  как множество пар  $\mathfrak{v} \equiv (v, h) \in V \times H$ , наделённое скалярным произведением

$$\langle (v_1, h_1), (v_2, h_2) \rangle_{\mathfrak{V}} \equiv \langle v_1, v_2 \rangle_V + \langle h_1, h_2 \rangle_H.$$

Далее, введём банахово пространство  $\mathfrak{W}$  как множество четвёрок  $\mathfrak{w} \equiv (v, h, f, g) \in V \times H \times L_1([0, T], H) \times W_1^1([0, T], Y^*)$ , наделённое нормой

$$\|\mathfrak{w}\|_{\mathfrak{W}} \equiv \|(v, h)\|_{\mathfrak{V}} + \|f\|_{1, [0, T], H} + \|g\|_{1, [0, T], Y^*}^{(1)}.$$

Наконец, через  $\Lambda$  обозначим оператор, ставящий в соответствие каждой четвёрке  $\mathfrak{w} \equiv (v, h, f, g) \in \mathfrak{W}$  решение задачи Коши (6.3.4), (6.3.5) с  $\varphi = v$ ,  $\psi = h$ ,  $f = f$ ,  $g = g$ .

Из теоремы 6.3.3 следует, что этот оператор принимает значения в пространстве  $\mathfrak{E}([0, T]; V, H)$ . Кроме того, нетрудно видеть, что этот оператор линеен. Из теоремы 6.3.3 также следует, что оператор  $\Lambda$  — ограничен.

Таким образом, решение задачи Коши (6.3.4), (6.3.5) можно записать в виде

$$\mathfrak{z}(t) = \Lambda[\varphi, \psi, f, g](t), \quad t \in [0, T].$$

**Теорема 6.3.6.** *Найдутся оператор  $\Theta \in \mathcal{L}(W_1^1([0, T], Y^*), \mathfrak{E}([0, T]; V, H))$  и функции  $\Phi \in \mathfrak{R}([0, T]; V, H)$ ,  $\Psi \in \mathfrak{S}(\Gamma; V, H)$ , такие, что при всех  $v \in V$ ,  $h \in H$*

$$\Lambda[\varphi, \psi, f, g](t) = \Phi(t)\varphi + \Psi(t, 0)\psi + \int_0^t \Psi(t, \xi)f(\xi)d\xi + \Theta[g](t) \quad \forall t \in [0, T]. \quad (6.3.44)$$



**Доказательство.** Введём операторы  $\Lambda_1 : V \rightarrow \mathfrak{E}([0, T]; V, H)$ ,  $\Lambda_2 : H \rightarrow \mathfrak{E}([0, T]; V, H)$ ,  $\Lambda_3 : L_1([0, T], H) \rightarrow \mathfrak{E}([0, T]; V, H)$ ,  $\Lambda_4 : W_1^1([0, T], Y^*) \rightarrow \mathfrak{E}([0, T]; V, H)$  по формулам

$$\begin{aligned}\Lambda_1[v] &\equiv \Lambda[v, 0, 0, 0], \quad \Lambda_2[h] \equiv \Lambda[0, h, 0, 0] \quad \forall (v, h) \in V \times H; \\ \Lambda_3[f] &\equiv \Lambda[0, 0, f, 0], \quad \Lambda_4[g] \equiv \Lambda[0, 0, 0, g] \quad \forall f \in L_1([0, T], H) \quad \forall g \in W_1^1([0, T], Y^*).\end{aligned}$$

Тогда решение задачи Коши (6.3.4), (6.3.5) можно записать в виде

$$\mathfrak{z}(t) = \Lambda_1[\varphi](t) + \Lambda_2[\psi](t) + \Lambda_3[f](t) + \Lambda_4[\mathfrak{g}](t), \quad t \in [0, T].$$

Положив  $\Theta \equiv \Lambda_4$ , получим, что

$$\mathfrak{z}(t) = \Lambda_1[\varphi](t) + \Lambda_2[\psi](t) + \Lambda_3[f](t) + \Theta[\mathfrak{g}](t), \quad t \in [0, T].$$

Далее, на основании теоремы 3.2.3, найдётся функция  $\Phi \in \mathfrak{R}([0, T]; V, H)$ , такая, что

$$\Lambda_1[\varphi](t) \equiv \Phi(t)\varphi, \quad t \in [0, T].$$

Как следствие,

$$\mathfrak{z}(t) = \Phi(t)\varphi + \Lambda_2[\psi](t) + \Lambda_3[f](t) + \Theta[\mathfrak{g}](t), \quad t \in [0, T]. \quad (6.3.45)$$

Нетрудно видеть, что

$$\Lambda_2[\psi](t) \equiv \mathfrak{y}[\psi](t, 0). \quad t \in [0, T]. \quad (6.3.46)$$

Покажем, что

$$\Lambda_3[f](t) = \int_0^t \mathfrak{e}[f](t, \tau) d\tau, \quad t \in [0, T], \quad (6.3.47)$$

где  $\mathfrak{e}[f]$  — при  $t \in [0, \tau]$  решение задачи Коши

$$\mathfrak{e}_{tt} + \mathfrak{A}(t)\mathfrak{e} + \mathfrak{B}(t)\mathfrak{e} + \mathfrak{G}^*\mathfrak{F}(t)\mathfrak{G}\mathfrak{e} = 0, \quad t \in [0, \tau], \quad (6.3.48)$$

$$\mathfrak{e}|_{t=\tau} = 0, \quad \mathfrak{e}_t|_{t=\tau} = f(\tau), \quad (6.3.49)$$

а при  $t \in [\tau, T]$  — решение задачи Коши

$$\mathfrak{e}_{tt} + \mathfrak{A}(t)\mathfrak{e} + \mathfrak{B}(t)\mathfrak{e} + \mathfrak{G}^*\mathfrak{F}(t)\mathfrak{G}\mathfrak{e} = 0, \quad t \in [\tau, T], \quad (6.3.50)$$

$$\mathfrak{e}|_{t=\tau} = 0, \quad \mathfrak{e}_t|_{t=\tau} = f(\tau). \quad (6.3.51)$$

В самом деле, введём функцию  $\mathfrak{w} : [0, T] \rightarrow V$  равенством

$$\mathfrak{w}(t) = \int_0^t \mathfrak{e}[f](t, \tau) d\tau, \quad t \in [0, T].$$

Дифференцируя эту функцию дважды, получим, что

$$\dot{\mathfrak{w}}(t) = \mathfrak{e}[f](t, t) + \int_0^t \mathfrak{e}_t[f](t, \tau) d\tau, \quad \ddot{\mathfrak{w}}(t) = \mathfrak{e}_t[f](t, t) + \int_0^t \mathfrak{e}_{tt}[f](t, \tau) d\tau, \quad t \in [0, T].$$

Пользуясь затем определением функции  $\mathfrak{e}[f]$ , выводим, что

$$\dot{\mathfrak{w}}(t) = \int_0^t \mathfrak{e}_t[f](t, \tau) d\tau, \quad t \in [0, T]; \quad \ddot{\mathfrak{w}}(t) = f(t) + \int_0^t \mathfrak{e}_{tt}[f](t, \tau) d\tau, \quad t \in [0, T]. \quad (6.3.52)$$

Из (6.3.52) вытекает, что

$$\mathfrak{w}(0) = 0, \quad \dot{\mathfrak{w}}(0) = 0. \quad (6.3.53)$$

Далее, в силу (6.3.52), (6.3.48), (6.3.50),

$$\begin{aligned} & \ddot{\mathfrak{w}}(t) + \mathfrak{A}(t)\mathfrak{w}(t) + \mathfrak{B}(t)\mathfrak{w}(t) + \mathfrak{G}^*\mathfrak{F}(t)\mathfrak{G}\mathfrak{w}(t) = \\ & = f(t) + \int_0^t [\mathfrak{e}_{tt}[f](t, \tau) + \mathfrak{A}(t)\mathfrak{e}[f](t, \tau) + \mathfrak{B}(t)\mathfrak{e}[f](t, \tau) + \mathfrak{G}^*\mathfrak{F}(t)\mathfrak{G}\mathfrak{e}[f](t, \tau)]d\tau = f(t). \end{aligned}$$

Иными словами,

$$\ddot{\mathfrak{w}}(t) + \mathfrak{A}(t)\mathfrak{w}(t) + \mathfrak{B}(t)\mathfrak{w}(t) + \mathfrak{G}^*\mathfrak{F}(t)\mathfrak{G}\mathfrak{w}(t) = f(t), \quad t \in [0, T]. \quad (6.3.54)$$

Из соотношений (6.3.53) и (6.3.54) и следует равенство (6.3.47).

Из теоремы 6.3.5 и равенств (6.3.46), (6.3.47) вытекает, что найдётся функция  $\Psi \in \mathfrak{S}(\Gamma; V, H)$ , такая, что

$$\Lambda_2[\psi](t) = \Psi(t, 0)\psi, \quad \Lambda_3[f](t) = \int_0^t \Psi(t, \tau)f(\tau)d\tau, \quad t \in [0, T].$$

Подставляя эти формулы в соотношение (6.3.45), получим формулу (6.3.44). Теорема полностью доказана.  $\blacksquare$

### 6.3.4. Нелинейное уравнение

Пусть  $\varphi \in V$ ,  $\psi \in H$ ,  $f \in L_1([0, T], H)$ ,  $\mathfrak{g} \in W_1^1([0, T], Y^*)$  — фиксированы.

Рассмотрим задачу Коши

$$\ddot{\mathfrak{z}}(t) + \mathfrak{A}(t)\mathfrak{z}(t) + \mathfrak{B}(t)\mathfrak{z}(t) + \mathfrak{G}^*\mathfrak{F}(t)\mathfrak{G}\mathfrak{z}(t) = \mathfrak{b}(t, \mathfrak{z}(t), \dot{\mathfrak{z}}(t)) + \mathfrak{C}^*\mathfrak{g}(t), \quad t \in [0, T], \quad (6.3.55)$$

$$\mathfrak{z}(0) = \varphi, \quad \dot{\mathfrak{z}}(0) = \psi, \quad (6.3.56)$$

где функция  $\mathfrak{b} : [0, T] \times V \times H \rightarrow H$  такова, что

- 1) функция  $[0, T] \ni t \mapsto \mathfrak{b}(t, v, h)$  — сильно измерима при всех  $v \in V$ ,  $h \in H$ ;
- 2) найдётся функция  $\mathbf{K}_0 \in L_1[0, T]$ , такая, что

$$\|\mathfrak{b}(t, v_1, h_1) - \mathfrak{b}(t, v_2, h_2)\|_H \leq \mathbf{K}_0(t) \sqrt{\|v_1 - v_2\|_V^2 + \|h_1 - h_2\|_H^2} \quad \forall (t, v_i, h_i) \in [0, T] \times V \times H, \quad i = 1, 2;$$

- 3) найдётся функция  $\mathbf{K}_1 \in L_1([0, T], H)$ , такая, что

$$\|\mathfrak{b}(t, 0, 0)\|_H \leq \|\mathbf{K}_1(t)\|_H \quad \forall t \in [0, T].$$

Дадим следующее

**Определение 6.3.3.** Функцию  $\mathfrak{z} \in \mathfrak{D}([0, T]; V, H)$  назовём решением задачи Коши (6.3.55), (6.3.56), если

$$\begin{aligned} & \int_0^T [-\langle \dot{\mathfrak{z}}(t), \dot{\eta}(t) \rangle_H + \langle \mathfrak{A}(t)\mathfrak{z}(t), \eta(t) \rangle + \langle \mathfrak{B}(t)\mathfrak{z}(t), \eta(t) \rangle + \langle \mathfrak{F}(t)\mathfrak{G}\mathfrak{z}(t), \mathfrak{G}\eta(t) \rangle_Z] dt = \\ & = \langle \psi, \eta(0) \rangle + \int_0^T \langle \mathfrak{b}(t, \mathfrak{z}(t), \dot{\mathfrak{z}}(t)), \eta(t) \rangle_H dt + \int_0^T \langle \mathfrak{g}(t), \mathfrak{C}\eta(t) \rangle dt \quad \forall \eta \in \hat{\mathfrak{D}}([0, T]; V, H); \\ & \mathfrak{z}(0) = \varphi. \end{aligned} \quad (6.3.57)$$

Дадим ещё одно определение решения задачи Коши (6.3.55), (6.3.56).

**Определение 6.3.4.** Функцию  $\mathfrak{z} \in \mathfrak{D}_2([0, T]; V, H)$  назовём решением задачи Коши (6.3.55), (6.3.56), если

$$\begin{aligned} & \langle \ddot{\mathfrak{z}}(t), v \rangle + \langle \mathfrak{A}(t)\mathfrak{z}(t) + \mathfrak{B}(t)\mathfrak{z}(t) + \mathfrak{G}^*\mathfrak{F}(t)\mathfrak{G}\mathfrak{z}(t), v \rangle = \\ & = \langle \mathfrak{b}(t, \mathfrak{z}(t), \dot{\mathfrak{z}}(t)), v \rangle_H + \langle \mathfrak{g}(t), \mathfrak{C}\eta(t) \rangle \quad \text{при н.в. } t \in [0, T] \quad \forall v \in V, \\ & \mathfrak{z}(0) = \varphi, \quad \dot{\mathfrak{z}}(0) = \psi. \end{aligned} \quad (6.3.58)$$

Эквивалентность этих двух определений доказывается аналогично тому, как доказывалась эквивалентность определений 6.3.1 и 6.3.2.

**Теорема 6.3.7.** *Задача Коши (6.3.55), (6.3.56) имеет единственное решение  $\mathbf{z}$  в классе  $\mathfrak{E}([0, T]; V, H)$ , это решение является элементом пространства  $\mathfrak{E}([0, T]; V, H)$ , и найдётся постоянная  $\varkappa_4 > 0$ , зависящая лишь от чисел  $T, c_1, c_2, c_3 > 0$ , от  $\|\mathfrak{C}\|_{V \rightarrow Y}, \|\mathfrak{G}\|_{V \rightarrow Z}$ , и функции  $\mathbf{K}_0 \in L_1[0, T]$ , такая, что*

$$\|\mathbf{z}\|_{\mathfrak{E}([0, T]; V, H)} \leq \varkappa_2 [\sqrt{\|\varphi\|_V^2 + \|\psi\|_H^2} + \|\mathbf{b}(t, 0, 0)\|_{1, [0, T], H} + \|\mathbf{g}\|_{1, [0, T], Y^*}^{(1)}]. \quad (6.3.59)$$

**Доказательство.** Положив  $F(t) \equiv \mathbf{b}(t, \mathbf{z}(t), \dot{\mathbf{z}}(t))$ ,  $t \in [0, T]$ , получим, что решение  $\mathbf{z}$  задачи Коши (6.3.55), (6.3.56) является решением задачи Коши

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{z}}(t) + \mathfrak{A}(t)\dot{\mathbf{z}}(t) + \mathfrak{B}(t)\mathbf{z}(t) + \mathfrak{G}^*\mathfrak{F}(t)\mathfrak{G}\mathbf{z}(t) &= F(t) + \mathfrak{C}^*\mathbf{g}(t), \quad t \in [0, T], \\ \mathbf{z}(0) &= \varphi, \quad \dot{\mathbf{z}}(0) = \psi, \end{aligned}$$

причём, в силу условий на функцию  $\mathbf{b}$ , справедливо включение  $F \in L_1([0, T], H)$ .

Поэтому, на основании теоремы 6.3.6, найдутся оператор  $\Theta \in \mathcal{L}(W_1^1([0, T], Y^*), \mathfrak{E}([0, T]; V, H))$  и функции  $\Phi \in \mathfrak{R}([0, T]; V, H)$ ,  $\Psi \in \mathfrak{S}(\Gamma; V, H)$ , такие, что при всех  $v \in V$ ,  $h \in H$

$$\mathbf{z}(t) = \Phi(t)\varphi + \Psi(t, 0)\psi + \int_0^t \Psi(t, \xi)F(\xi)d\xi + \Theta[\mathbf{g}](t) \quad \forall t \in [0, T]. \quad (6.3.60)$$

Следовательно, ввиду определения функции  $F$ ,

$$\mathbf{z}(t) = \Phi(t)\varphi + \Psi(t, 0)\psi + \Theta[\mathbf{g}](t) + \int_0^t \Psi(t, \xi)\mathbf{b}(\xi, \mathbf{z}(\xi), \dot{\mathbf{z}}(\xi))d\xi \quad \forall t \in [0, T]. \quad (6.3.61)$$

Положив здесь  $\omega(t) \equiv \Phi(t)\varphi + \Psi(t, 0)\psi + \Theta[\mathbf{g}](t)$ ,  $t \in [0, T]$ , получим, что

$$\mathbf{z}(t) = \omega(t) + \int_0^t \Psi(t, \xi)\mathbf{b}(\xi, \mathbf{z}(\xi), \dot{\mathbf{z}}(\xi))d\xi \quad \forall t \in [0, T]. \quad (6.3.62)$$

Иными словами, отыскание решения задачи Коши (6.3.55), (6.3.56) в классе  $\mathfrak{E}([0, T]; V, H)$  эквивалентно отысканию решения интегро-дифференциального уравнения (6.3.62) в классе  $\mathfrak{E}([0, T]; V, H)$ . Применяя затем теорему 3.3.1, заключаем, что уравнение 6.3.62 имеет единственное решение в классе  $\mathfrak{E}([0, T]; V, H)$ , причём найдётся постоянная  $\varkappa^* > 0$ , такая, что

$$\|\mathbf{z}\|_{\mathfrak{E}([0, T]; V, H)} \leq \varkappa^* [\|\omega\|_{\mathfrak{E}([0, T]; V, H)} + \|\mathbf{b}(\cdot, 0, 0)\|_{1, [0, T], H}].$$

Ввиду определения функции  $\omega$ , найдутся постоянные  $\varkappa_1^*, \varkappa_2^*, \varkappa_3^* > 0$ , такие, что

$$\begin{aligned} \|\omega\|_{\mathfrak{E}([0, T]; V, H)} &\leq \varkappa_1^* \|\varphi\|_V + \varkappa_2^* \|\psi\|_H + \varkappa_3^* \|\mathbf{g}\|_{1, [0, T], Y^*}^{(1)} \leq \sqrt{(\varkappa_1^*)^2 + (\varkappa_2^*)^2} \sqrt{\|\varphi\|_V^2 + \|\psi\|_H^2} + \varkappa_3^* \|\mathbf{g}\|_{1, [0, T], Y^*}^{(1)} \\ &\leq \varkappa_4^* [\sqrt{\|\varphi\|_V^2 + \|\psi\|_H^2} + \|\mathbf{g}\|_{1, [0, T], Y^*}^{(1)}], \end{aligned}$$

где  $\varkappa_4^* \equiv \max\{\sqrt{(\varkappa_1^*)^2 + (\varkappa_2^*)^2}, \varkappa_3^*\}$ . Таким образом,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{z}\|_{\mathfrak{E}([0, T]; V, H)} &\leq \varkappa^* [\varkappa_4^* [\sqrt{\|\varphi\|_V^2 + \|\psi\|_H^2} + \|\mathbf{g}\|_{1, [0, T], Y^*}^{(1)}] + \|\mathbf{b}(\cdot, 0, 0)\|_{1, [0, T], H}] \\ &\leq \varkappa_5^* [\sqrt{\|\varphi\|_V^2 + \|\psi\|_H^2} + \|\mathbf{g}\|_{1, [0, T], Y^*}^{(1)} + \|\mathbf{b}(\cdot, 0, 0)\|_{1, [0, T], H}], \end{aligned}$$

где  $\varkappa_5^* \equiv \max\{\varkappa_4^*, 1\}$ .

Итак, интегро-дифференциальное уравнение 6.3.62 имеет единственное решение  $\mathbf{z} \in \mathfrak{E}([0, T]; V, H)$ , причём найдётся постоянная  $\varkappa_5^* > 0$ , такая, что

$$\|\mathbf{z}\|_{\mathfrak{E}([0, T]; V, H)} \leq \varkappa_5^* [\sqrt{\|\varphi\|_V^2 + \|\psi\|_H^2} + \|\mathbf{g}\|_{1, [0, T], Y^*}^{(1)} + \|\mathbf{b}(\cdot, 0, 0)\|_{1, [0, T], H}],$$

Ввиду упомянутой выше эквивалентности интегро-дифференциального уравнения 6.3.62 и задачи Коши (6.3.55), (6.3.56), это означает, что задача Коши (6.3.55), (6.3.56) имеет единственное решение в смысле определения 6.3.57, и справедлива оценка (6.3.59) с  $\varkappa_3 \equiv \varkappa_5^*$ . Теорема полностью доказана. ■

### 6.3.5. Линейное уравнение с мерой Радона в правой части

Пусть  $\varphi \in V$ ,  $\psi \in H$ ,  $f \in L_1([0, T], H)$ ,  $\mathfrak{g} \in W_1^1([0, T], Y^*)$ ,  $\mu \in \mathbf{M}([0, T], H)$  — фиксированы.  
Пусть, кроме того, функции  $\mathfrak{P} : [0, T] \rightarrow \mathcal{L}(H, H)$  и  $\mathfrak{Q} : [0, T] \rightarrow \mathcal{L}(V, H)$  таковы, что

1) при каждом  $h \in H$  отображение

$$[0, T] \ni t \mapsto \mathfrak{P}(t)h \in H$$

измеримо в смысле слабой топологии пространства  $H$ ;

2) при каждом  $v \in V$  отображение

$$[0, T] \ni t \mapsto \mathfrak{Q}(t)v \in H$$

измеримо в смысле слабой топологии пространства  $H$ ;

3) конечны величины

$$c_4 \equiv \int_0^T \|\mathfrak{P}(t)\|_{H \rightarrow H} dt, \quad c_5 \equiv \int_0^T \|\mathfrak{Q}(t)\|_{V \rightarrow H} dt.$$

Рассмотрим задачу Коши

$$\ddot{\mathfrak{x}}(t) + \mathfrak{A}(t)\mathfrak{x}(t) + \mathfrak{B}(t)\mathfrak{x}(t) + \mathfrak{P}(t)\dot{\mathfrak{x}}(t) + \mathfrak{Q}(t)\mathfrak{x}(t) + \mathfrak{G}^*\mathfrak{F}(t)\mathfrak{G}\mathfrak{x}(t) = f(t) + \mathfrak{C}^*\mathfrak{g}(t) + \mu(dt), \quad t \in [0, T], \quad (6.3.63)$$

$$\mathfrak{x}(T) = \varphi, \quad \dot{\mathfrak{x}}(T) = \psi, \quad (6.3.64)$$

и дадим следующее

**Определение 6.3.5.** Функцию  $\mathfrak{z} \in \mathfrak{D}([0, T]; V, H)$  назовём решением задачи Коши (6.3.63), (6.3.64), если

$$\begin{aligned} & \int_0^T [-\langle \dot{\mathfrak{x}}(t), \dot{\eta}(t) \rangle_H + \langle \mathfrak{A}(t)\mathfrak{x}(t), \eta(t) \rangle + \langle \mathfrak{P}(t)\dot{\mathfrak{x}}(t), \eta(t) \rangle_H + \langle \mathfrak{B}(t)\mathfrak{x}(t), \eta(t) \rangle + \langle \mathfrak{Q}(t)\mathfrak{x}(t), \eta(t) \rangle_H + \\ & + \langle \mathfrak{F}(t)\mathfrak{G}\mathfrak{x}(t), \mathfrak{G}\eta(t) \rangle_Z] dt + \langle \psi, \eta(T) \rangle_H = \int_0^T \langle f(t), \eta(t) \rangle_H dt + \int_0^T \langle \mathfrak{g}(t), \mathfrak{C}\eta(t) \rangle dt + \\ & + \int_{[0, T]} \langle \eta(t), \mu(dt) \rangle_H \quad \forall \eta \in \hat{\mathfrak{D}}([0, T]; V, H); \quad \mathfrak{x}(T) = \varphi. \end{aligned} \quad (6.3.65)$$

**Теорема 6.3.8.** Задача Коши (6.3.63), (6.3.64) имеет единственное решение  $\mathfrak{x}$  в смысле определения 6.3.5, причём найдётся постоянная  $\varkappa_4 > 0$ , зависящая лишь от  $T$ ,  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$ ,  $c_4$ ,  $c_5 > 0$  и от  $\|\mathfrak{C}\|_{V \rightarrow Y}$ ,  $\|\mathfrak{G}\|_{V \rightarrow Z}$ , такая, что

$$\|\mathfrak{x}\|_{\mathfrak{D}([0, T]; V, H)} \leq \varkappa_4 [\sqrt{\|\varphi\|_V^2 + \|\psi\|_H^2} + \|f\|_{1, [0, T], H} + \|\mathfrak{g}\|_{1, [0, T], Y^*}^{(1)} + \|\mu\|_{\mathbf{M}([0, T], H)}]. \quad (6.3.66)$$

**Доказательство.** Доказательство теоремы разобьём на четыре части.

1) Докажем единственность решения задачи Коши (6.3.63), (6.3.64). В самом деле, пусть  $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2 \in \mathfrak{D}([0, T]; V, H)$  — решения задачи Коши (6.3.63), (6.3.64). Тогда их разность  $\mathfrak{v} \equiv \mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2$  является решением задачи Коши

$$\ddot{\mathfrak{v}}(t) + \mathfrak{A}(t)\mathfrak{v}(t) + \mathfrak{B}(t)\mathfrak{v}(t) + \mathfrak{P}(t)\dot{\mathfrak{v}}(t) + \mathfrak{Q}(t)\mathfrak{v}(t) + \mathfrak{G}^*\mathfrak{F}(t)\mathfrak{G}\mathfrak{v}(t) = 0, \quad t \in [0, T], \quad (6.3.67)$$

$$\mathfrak{v}(T) = 0, \quad \dot{\mathfrak{v}}(T) = 0, \quad (6.3.68)$$

согласно теореме 6.3.7 имеющей лишь тривиальное решение. Следовательно, задача Коши (6.3.63), (6.3.64) может иметь не более одного решения в классе  $\mathfrak{D}([0, T]; V, H)$ .

2) Докажем существование решения задачи Коши (6.3.63), (6.3.64). Тогда, на основании леммы 1.4.10, найдётся последовательность функций  $\omega^k \in C([0, T], H)$ , такая, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{[0, T]} \langle \zeta(t), \mu^k(dt) \rangle_H = \int_{[0, T]} \langle \zeta(t), \mu(dt) \rangle, \quad \forall \zeta \in C([a, b], H) \quad (6.3.69)$$

где  $\mu^k(E) \equiv \int_E \omega^k(t) dt$ ,  $E \subseteq [0, T]$  — борелевское подмножество отрезка  $[0, T]$ ,  $k = 1, 2, \dots$

Рассмотрим задачу Коши

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathfrak{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathfrak{B}(t)\mathbf{x}(t) + \mathfrak{P}(t)\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathfrak{Q}(t)\mathbf{x}(t) + \mathfrak{G}^*\mathfrak{F}(t)\mathfrak{G}\mathbf{x}(t) = f(t) + \mathfrak{C}^*\mathfrak{g}(t) + \mu^k(dt), \quad t \in [0, T], \quad (6.3.70)$$

$$\mathbf{x}(T) = \varphi, \quad \dot{\mathbf{x}}(T) = \psi, \quad (6.3.71)$$

и обозначим её решение через  $\mathbf{x}^k$ . Ясно, что (6.3.70) можно переписать в эквивалентном виде

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathfrak{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathfrak{B}(t)\mathbf{x}(t) + \mathfrak{P}(t)\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathfrak{Q}(t)\mathbf{x}(t) + \mathfrak{G}^*\mathfrak{F}(t)\mathfrak{G}\mathbf{x}(t) = f(t) + \mathfrak{C}^*\mathfrak{g}(t) + \omega^k(t), \quad t \in [0, T], \quad (6.3.72)$$

$$\mathbf{x}(T) = \varphi, \quad \dot{\mathbf{x}}(T) = \psi. \quad (6.3.73)$$

В силу теоремы 6.3.7 и эквивалентности задач Коши (6.3.70), (6.3.71) и (6.3.72), (6.3.73), заключаем, что задача Коши (6.3.70), (6.3.71) имеет единственное решение  $\mathbf{x}^k \in \mathfrak{D}([0, T]; V, H)$ , причём

$$\|\mathbf{x}^k\|_{\mathfrak{D}([0, T]; V, H)} \leq \kappa_3 [\sqrt{\|\varphi\|_V^2 + \|\psi\|_H^2} + \|f\|_{1, [0, T], H} + \|\mathfrak{g}\|_{1, [0, T], Y^*}^{(1)} + \|\omega^k\|_{1, [0, T], H}].$$

Пользуясь здесь определением мер  $\mu^k$ , получим, что

$$\|\mathbf{x}^k\|_{\mathfrak{D}([0, T]; V, H)} \leq \kappa_3 [\sqrt{\|\varphi\|_V^2 + \|\psi\|_H^2} + \|f\|_{1, [0, T], H} + \|\mathfrak{g}\|_{1, [0, T], Y^*}^{(1)} + \|\mu^k\|_{\mathbf{M}([0, T], H)}]. \quad (6.3.74)$$

Ввиду (6.3.69), найдётся константа  $K > 0$ , такая, что  $\|\mu^k\|_{\mathbf{M}([0, T], H)} \leq K$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , что, в силу (6.3.74), влечёт неравенство

$$\|\mathbf{x}^k\|_{\mathfrak{D}([0, T]; V, H)} \leq \tilde{K},$$

где  $\tilde{K} \equiv \kappa_3 [\sqrt{\|\varphi\|_V^2 + \|\psi\|_H^2} + \|f\|_{1, [0, T], H} + \|\mathfrak{g}\|_{1, [0, T], Y^*}^{(1)} + K]$ . Поэтому, ввиду теоремы 2.4.9, найдутся подпоследовательность  $\mathbf{x}^{k_m}$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , последовательности  $\mathbf{x}^N$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , и функция  $\mathbf{x} \in \mathfrak{D}([0, T]; V, H)$ , такие, что

$$\mathbf{x}^{k_m} \rightarrow \mathbf{x}, \quad m \rightarrow \infty, \quad \text{слабо в } \mathcal{W}_2^1([0, T]; V, H), \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \max_{t \in [0, T]} \|\mathbf{x}^{k_m}(t) - \mathbf{x}(t)\|_H = 0; \quad (6.3.75)$$

$$\mathbf{x}^{k_m} \rightarrow \mathbf{x}, \quad m \rightarrow \infty, \quad * \text{-слабо в } L_\infty([0, T], V); \quad \dot{\mathbf{x}}^{k_m} \rightarrow \dot{\mathbf{x}}, \quad m \rightarrow \infty, \quad * \text{-слабо в } L_\infty([0, T], H);$$

$$\mathbf{z}^{k_m} \rightarrow \mathbf{x}, \quad m \rightarrow \infty, \quad \text{в } V^* \text{-топологии пространства } C_s([0, T], V);$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \max_{t \in [0, T]} \|\mathfrak{G}[\mathbf{x}^{k_m}(t)] - \mathfrak{G}[\mathbf{x}(t)]\|_Z = 0, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \max_{t \in [0, T]} \|\mathfrak{C}[\mathbf{x}^{k_m}(t)] - \mathfrak{C}[\mathbf{x}(t)]\|_Y = 0.$$

Из определения решения задачи Коши (6.3.70), (6.3.71) с  $k = k_m$  выводим, что

$$\begin{aligned} & \int_0^T [-\langle \dot{\mathbf{x}}^{k_m}(t), \dot{\eta}(t) \rangle_H + \langle \mathfrak{A}(t)\mathbf{x}^{k_m}(t), \eta(t) \rangle + \langle \mathfrak{P}(t)\dot{\mathbf{x}}^{k_m}(t), \eta(t) \rangle_H + \langle \mathfrak{B}(t)\mathbf{x}^{k_m}(t), \eta(t) \rangle + \langle \mathfrak{Q}(t)\mathbf{x}^{k_m}(t), \eta(t) \rangle_H + \\ & + \langle \mathfrak{F}(t)\mathfrak{G}\mathbf{x}^{k_m}(t), \mathfrak{G}\eta(t) \rangle_Z] dt + \langle \psi, \eta(T) \rangle_H = \int_0^T \langle f(t), \eta(t) \rangle_H dt + \int_0^T \langle \mathfrak{g}(t), \mathfrak{C}\eta(t) \rangle dt + \\ & + \int_{[0, T]} \langle \eta(t), \mu^{k_m}(dt) \rangle_H \quad \forall \eta \in \hat{\mathfrak{D}}([0, T]; V, H); \quad \mathbf{x}(T) = \varphi. \end{aligned}$$

Переходя в последних соотношениях к пределу при  $m \rightarrow \infty$  с учётом (6.3.69) и (6.3.75), получим, что  $\mathbf{x}$  удовлетворяет тождеству (6.3.65), и, следовательно, является решением задачи Коши (6.3.63), (6.3.64). Итак, задача Коши (6.3.63), (6.3.64) имеет решение  $\mathbf{x} \in \mathfrak{D}([0, T]; V, H)$ .

3) Выведем представление для решения задачи Коши (6.3.63), (6.3.64). Прежде всего заметим, что задачу Коши (6.3.70), (6.3.71) можно переписать в виде

$$\ddot{\mathbf{x}}^k(t) + \mathfrak{A}(t)\mathbf{x}^k(t) + \mathfrak{B}(t)\mathbf{x}^k(t) + \mathfrak{G}^*\mathfrak{F}(t)\mathfrak{G}\mathbf{x}^k(t) = F^k(t) + \mathfrak{C}^*\mathfrak{g}(t) + \omega^k(t), \quad t \in [0, T], \quad (6.3.76)$$

$$\mathbf{x}^k(T) = \varphi, \quad \dot{\mathbf{x}}^k(T) = \psi, \quad (6.3.77)$$

где  $F^k(t) \equiv f(t) - \mathfrak{P}(t)\dot{\mathbf{x}}^k(t) - \mathfrak{Q}(t)\mathbf{x}^k(t)$ ,  $t \in [0, T]$ .

Поэтому, на основании теоремы 6.3.6, справедливо представление

$$\mathfrak{x}^k(t) = \mathfrak{h}^k(t) + \int_0^t \Psi(t, \xi) \mu^k(d\xi), \quad t \in [0, T],$$

где введено обозначение

$$\mathfrak{h}^k(t) = \Phi(t)\varphi + \Psi(t, 0)\psi + \int_0^t \Psi(t, \xi) f(\xi) d\xi + \Theta[\mathfrak{g}](t) - \int_0^t \Psi(t, \xi) [\mathfrak{P}(\xi) \dot{\mathfrak{x}}^k(\xi) + \mathfrak{Q}(\xi) \mathfrak{x}^k(\xi)] d\xi, \quad t \in [0, T].$$

Нетрудно видеть, что имеет место представление

$$\dot{\mathfrak{x}}^k(t) = \dot{\mathfrak{h}}^k(t) + \int_0^t \Psi_t(t, \xi) \mu^k(d\xi), \quad t \in [0, T],$$

и выполнены предельные соотношения

$$\mathfrak{h}^{k_m} \rightarrow \mathfrak{h}, \quad m \rightarrow \infty, \quad * \text{-слабо в } L_\infty([0, T], V); \quad \dot{\mathfrak{h}}^{k_m} \rightarrow \dot{\mathfrak{h}}, \quad m \rightarrow \infty, \quad * \text{-слабо в } L_\infty([0, T], H); \quad (6.3.78)$$

$$\int_0^t \Psi(t, \xi) \mu^{k_m}(d\xi) \rightarrow \int_0^t \Psi(t, \xi) \mu(d\xi), \quad m \rightarrow \infty, \quad \text{слабо в } V \quad \forall t \in [0, T]; \quad (6.3.79)$$

$$\int_0^t \Psi_t(t, \xi) \mu^{k_m}(d\xi) \rightarrow \int_0^t \Psi_t(t, \xi) \mu(d\xi), \quad m \rightarrow \infty, \quad \text{слабо в } H \quad \forall t \in [0, T]. \quad (6.3.80)$$

Здесь введено обозначение

$$\mathfrak{h}(t) = \Phi(t)\varphi + \Psi(t, 0)\psi + \int_0^t \Psi(t, \xi) f(\xi) d\xi + \Theta[\mathfrak{g}](t) - \int_0^t \Psi(t, \xi) [\mathfrak{P}(\xi) \dot{\mathfrak{x}}(\xi) + \mathfrak{Q}(\xi) \mathfrak{x}(\xi)] d\xi, \quad t \in [0, T].$$

Далее, поскольку  $\mathfrak{x}^{k_m} \in \mathfrak{D}([0, T]; V, H)$ , то для всех  $\zeta \in \mathfrak{D}(0, T)$

$$\left\langle \int_0^T \left[ \int_0^t \Psi(t, \xi) \mu^{k_m}(d\xi) \right] \zeta'(t) dt + \int_0^T \left[ \int_0^t \Psi_t(t, \xi) \mu^{k_m}(d\xi) \right] \zeta(t) dt, h \right\rangle = 0 \quad \forall h \in H.$$

Переходя здесь к пределу при  $m \rightarrow \infty$ , получим, что при всех  $\zeta \in \mathfrak{D}(0, T)$

$$\left\langle \int_0^T \left[ \int_0^t \Psi(t, \xi) \mu(d\xi) \right] \zeta'(t) dt + \int_0^T \left[ \int_0^t \Psi_t(t, \xi) \mu(d\xi) \right] \zeta(t) dt, h \right\rangle = 0 \quad \forall h \in H.$$

Иными словами, мы доказали, что для решения  $\mathfrak{x} \in \mathfrak{D}([0, T]; V, H)$  задачи Коши (6.3.63), (6.3.64) справедливо представление

$$\begin{aligned} \mathfrak{x}(t) = & \Phi(t)\varphi + \Psi(t, 0)\psi + \int_0^t \Psi(t, \xi) f(\xi) d\xi + \Theta[\mathfrak{g}](t) + \int_0^t \Psi(t, \xi) \mu(d\xi) - \\ & - \int_0^t \Psi(t, \xi) [\mathfrak{P}(\xi) \dot{\mathfrak{x}}(\xi) + \mathfrak{Q}(\xi) \mathfrak{x}(\xi)] d\xi, \quad t \in [0, T], \end{aligned} \quad (6.3.81)$$

причём

$$\begin{aligned} \dot{\mathfrak{x}}(t) = & \Phi'(t)\varphi + \Psi_t(t, 0)\psi + \int_0^t \Psi_t(t, \xi) f(\xi) d\xi + \frac{d\Theta[\mathfrak{g}](t)}{dt} + \int_0^t \Psi_t(t, \xi) \mu(d\xi) - \\ & - \int_0^t \Psi_t(t, \xi) [\mathfrak{P}(\xi) \dot{\mathfrak{x}}(\xi) + \mathfrak{Q}(\xi) \mathfrak{x}(\xi)] d\xi, \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (6.3.82)$$

4) Докажем априорную оценку (6.3.66). Прежде всего введём банахово пространство  $\mathfrak{T}$  как множество пятёрок  $\pi \equiv (v, h, f, \mathfrak{g}, \mu) \in V \times H \times L_1([0, T], H) \times W_1^1([0, T], Y^*) \times \mathbf{M}([0, T], H)$ , наделённое нормой

$$\|\pi\|_{\mathfrak{T}} \equiv \sqrt{\|v\|_V^2 + \|h\|_H^2} + \|f\|_{1,[0,T],H} + \|\mathfrak{g}\|_{1,[0,T],Y^*}^{(1)} + \|\mu\|_{\mathbf{M}([0,T],H)}.$$

Далее, для каждой пятёрки  $\pi \equiv (v, h, f, \mathfrak{g}, \mu) \in \mathfrak{T}$  через  $\mathfrak{x}[\pi]$  обозначим решение задачи Коши (6.3.63), (6.3.64) с  $\varphi \equiv v$ ,  $\psi \equiv h$ . Нетрудно видеть, что отображение

$$\mathfrak{T} \ni \pi \mapsto \mathfrak{x}[\pi] \in \mathfrak{D}([0, T]; V, H) \quad (6.3.83)$$

линейно. Докажем, что это отображение — непрерывно. Для этого достаточно доказать, что оно непрерывно в нуле.

В самом деле, пусть последовательность пятёрок  $\pi^n \equiv (v^n, h^n, f^n, \mathfrak{g}^n, \mu^n) \in \mathfrak{T}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , такова, что

$$\|\pi^n\|_{\mathfrak{T}} \equiv \sqrt{\|v^n\|_V^2 + \|h^n\|_H^2} + \|f^n\|_{1,[0,T],H} + \|\mathfrak{g}^n\|_{1,[0,T],Y^*}^{(1)} + \|\mu^n\|_{\mathbf{M}([0,T],H)} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (6.3.84)$$

Для краткости введём обозначение  $\mathfrak{x}^n \equiv \mathfrak{x}[\pi^n]$ . Тогда, на основании представлений (6.3.81) и (6.3.82),

$$\begin{aligned} \mathfrak{x}^n(t) &= \Phi(t)v^n + \Psi(t, 0)h^n + \int_0^t \Psi(t, \xi)f^n(\xi)d\xi + \Theta[\mathfrak{g}^n](t) + \int_0^t \Psi(t, \xi)\mu^n(d\xi) - \\ &\quad - \int_0^t \Psi(t, \xi)[\mathfrak{P}(\xi)\dot{\mathfrak{x}}^n(\xi) + \mathfrak{Q}(\xi)\mathfrak{x}^n(\xi)]d\xi, \quad t \in [0, T]; \\ \dot{\mathfrak{x}}^n(t) &= \Phi'(t)v^n + \Psi_t(t, 0)h^n + \int_0^t \Psi_t(t, \xi)f^n(\xi)d\xi + \frac{d\Theta[\mathfrak{g}^n](t)}{dt} + \int_0^t \Psi_t(t, \xi)\mu^n(d\xi) - \\ &\quad - \int_0^t \Psi_t(t, \xi)[\mathfrak{P}(\xi)\dot{\mathfrak{x}}^n(\xi) + \mathfrak{Q}(\xi)\mathfrak{x}^n(\xi)]d\xi, \quad t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{x}^n(t)\|_V &\leq [\sup_{\tau \in [0, T]} \|\Phi(\tau)\|_{V \rightarrow V}] \|v^n\|_V + [\sup_{(\tau, \xi) \in \Gamma} \|\Psi(\tau, \xi)\|_{H \rightarrow V}] \|h^n\|_H + [\sup_{(\tau, \xi) \in \Gamma} \|\Psi(\tau, \xi)\|_{H \rightarrow V}] \|f^n\|_{1,[0,T],H} + \\ &\quad + \|\Theta\|_{W_1^1([0, T], Y^*) \rightarrow \mathfrak{C}([0, T], V, H)} \|\mathfrak{g}^n\|_{1,[0,T],Y^*}^{(1)} + [\sup_{(\tau, \xi) \in \Gamma} \|\Psi(\tau, \xi)\|_{H \rightarrow V}] \|\mu^n\|_{\mathbf{M}([0,T],H)} + \\ &\quad + [\sup_{(\tau, \xi) \in \Gamma} \|\Psi(\tau, \xi)\|_{H \rightarrow V}] \int_0^t [\|\mathfrak{P}(\xi)\|_{H \rightarrow H} \|\dot{\mathfrak{x}}^n(\xi)\|_H + \|\mathfrak{Q}(\xi)\|_{V \rightarrow H} \|\mathfrak{x}^n(\xi)\|_V] d\xi \leq \\ &\leq \sqrt{[\sup_{\tau \in [0, T]} \|\Phi(\tau)\|_{V \rightarrow V}]^2 + [\sup_{(\tau, \xi) \in \Gamma} \|\Psi(\tau, \xi)\|_{H \rightarrow V}]^2} \sqrt{\|v^n\|_V^2 + \|h^n\|_H^2} + \\ &\quad + [\sup_{(\tau, \xi) \in \Gamma} \|\Psi(\tau, \xi)\|_{H \rightarrow V}] [\|f^n\|_{1,[0,T],H} + \|\mu^n\|_{\mathbf{M}([0,T],H)}] + \|\Theta\|_{W_1^1([0, T], Y^*) \rightarrow \mathfrak{C}([0, T], V, H)} \|\mathfrak{g}^n\|_{1,[0,T],Y^*}^{(1)} + \\ &\quad + [\sup_{(\tau, \xi) \in \Gamma} \|\Psi(\tau, \xi)\|_{H \rightarrow V}] \int_0^t [\|\mathfrak{P}(\xi)\|_{H \rightarrow H} \|\dot{\mathfrak{x}}^n(\xi)\|_H + \|\mathfrak{Q}(\xi)\|_{V \rightarrow H} \|\mathfrak{x}^n(\xi)\|_V] d\xi \leq \\ &\leq C_1 \|\pi^n\|_{\mathfrak{T}} + C_1 \int_0^t [\|\mathfrak{P}(\xi)\|_{H \rightarrow H} \|\dot{\mathfrak{x}}^n(\xi)\|_H + \|\mathfrak{Q}(\xi)\|_{V \rightarrow H} \|\mathfrak{x}^n(\xi)\|_V] d\xi, \end{aligned}$$

где

$$C_1 \equiv \max \left\{ \sqrt{[\sup_{\tau \in [0, T]} \|\Phi(\tau)\|_{V \rightarrow V}]^2 + [\sup_{(\tau, \xi) \in \Gamma} \|\Psi(\tau, \xi)\|_{H \rightarrow V}]^2}, \|\Theta\|_{W_1^1([0, T], Y^*) \rightarrow \mathfrak{C}([0, T], V, H)} \right\}.$$

Таким образом,

$$\|\mathfrak{x}^n(t)\|_V \leq C_1 \|\pi^n\|_{\mathfrak{T}} + C_1 \int_0^t [\|\mathfrak{P}(\xi)\|_{H \rightarrow H} \|\dot{\mathfrak{x}}^n(\xi)\|_H + \|\mathfrak{Q}(\xi)\|_{V \rightarrow H} \|\mathfrak{x}^n(\xi)\|_V] d\xi, \quad t \in [0, T]. \quad (6.3.85)$$

Далее,

$$\begin{aligned}
\|\dot{\mathbf{x}}^n(t)\|_H &\leq [\sup_{\tau \in [0, T]} \|\Phi'(\tau)\|_{V \rightarrow H}] \|v^n\|_V + [\sup_{(\tau, \xi) \in \Gamma} \|\Psi_t(\tau, \xi)\|_{H \rightarrow H}] \|h^n\|_H + [\sup_{(\tau, \xi) \in \Gamma} \|\Psi_t(\tau, \xi)\|_{H \rightarrow H}] \|f^n\|_{1, [0, T], H} + \\
&+ \|\Theta\|_{W_1^1([0, T], Y^*) \rightarrow \mathcal{E}([0, T]; V, H)} \|\mathbf{g}^n\|_{1, [0, T], Y^*}^{(1)} + [\sup_{(\tau, \xi) \in \Gamma} \|\Psi_t(\tau, \xi)\|_{H \rightarrow H}] \|\mu^n\|_{\mathbf{M}([0, T], H)} + \\
&+ [\sup_{(\tau, \xi) \in \Gamma} \|\Psi_t(\tau, \xi)\|_{H \rightarrow H}] \int_0^t [\|\mathfrak{P}(\xi)\|_{H \rightarrow H} \|\dot{\mathbf{x}}^n(\xi)\|_H + \|\mathfrak{Q}(\xi)\|_{V \rightarrow H} \|\mathbf{x}^n(\xi)\|_V] d\xi \leq \\
&\leq \sqrt{[\sup_{\tau \in [0, T]} \|\Phi'(\tau)\|_{V \rightarrow H}]^2 + [\sup_{(\tau, \xi) \in \Gamma} \|\Psi_t(\tau, \xi)\|_{H \rightarrow H}]^2} \sqrt{\|v^n\|_V^2 + \|h^n\|_H^2} + \\
&+ [\sup_{(\tau, \xi) \in \Gamma} \|\Psi_t(\tau, \xi)\|_{H \rightarrow V}] [\|f^n\|_{1, [0, T], H} + \|\mu^n\|_{\mathbf{M}([0, T], H)}] + \|\Theta\|_{W_1^1([0, T], Y^*) \rightarrow \mathcal{E}([0, T]; V, H)} \|\mathbf{g}^n\|_{1, [0, T], Y^*}^{(1)} + \\
&+ [\sup_{(\tau, \xi) \in \Gamma} \|\Psi_t(\tau, \xi)\|_{H \rightarrow H}] \int_0^t [\|\mathfrak{P}(\xi)\|_{H \rightarrow H} \|\dot{\mathbf{x}}^n(\xi)\|_H + \|\mathfrak{Q}(\xi)\|_{V \rightarrow H} \|\mathbf{x}^n(\xi)\|_V] d\xi \leq \\
&\leq C_2 \|\pi^n\|_{\mathfrak{T}} + C_2 \int_0^t [\|\mathfrak{P}(\xi)\|_{H \rightarrow H} \|\dot{\mathbf{x}}^n(\xi)\|_H + \|\mathfrak{Q}(\xi)\|_{V \rightarrow H} \|\mathbf{x}^n(\xi)\|_V] d\xi,
\end{aligned}$$

где

$$C_2 \equiv \max \left\{ \sqrt{[\sup_{\tau \in [0, T]} \|\Phi'(\tau)\|_{V \rightarrow H}]^2 + [\sup_{(\tau, \xi) \in \Gamma} \|\Psi_t(\tau, \xi)\|_{H \rightarrow H}]^2}, \|\Theta\|_{W_1^1([0, T], Y^*) \rightarrow \mathcal{E}([0, T]; V, H)} \right\}.$$

Как следствие,

$$\|\dot{\mathbf{x}}^n(t)\|_H \leq C_2 \|\pi^n\|_{\mathfrak{T}} + C_2 \int_0^t [\|\mathfrak{P}(\xi)\|_{H \rightarrow H} \|\dot{\mathbf{x}}^n(\xi)\|_H + \|\mathfrak{Q}(\xi)\|_{V \rightarrow H} \|\mathbf{x}^n(\xi)\|_V] d\xi, \quad t \in [0, T]. \quad (6.3.86)$$

Сложив неравенства (6.3.85) и (6.3.86), будем иметь, что

$$\|\mathbf{x}^n(t)\|_V + \|\dot{\mathbf{x}}^n(t)\|_H \leq C_3 \|\pi^n\|_{\mathfrak{T}} + C_3 \int_0^t [\|\mathfrak{P}(\xi)\|_{H \rightarrow H} \|\dot{\mathbf{x}}^n(\xi)\|_H + \|\mathfrak{Q}(\xi)\|_{V \rightarrow H} \|\mathbf{x}^n(\xi)\|_V] d\xi, \quad t \in [0, T],$$

где  $C_3 \equiv C_1 + C_2$ .

Положив затем  $\mathbf{q}(\xi) \equiv \max\{\|\mathfrak{P}(\xi)\|_{H \rightarrow H}, \|\mathfrak{Q}(\xi)\|_{V \rightarrow H}\}$ ,  $\xi \in [0, T]$ , и применяя затем лемму 5.1.1, получим, что

$$\|\mathbf{x}^n(t)\|_V + \|\dot{\mathbf{x}}^n(t)\|_H \leq C_3 \|\pi^n\|_{\mathfrak{T}} \exp [C_3 \|\mathbf{q}\|_{1, [0, T]}], \quad t \in [0, T].$$

Поэтому

$$\|\mathbf{x}^n\|_{\mathcal{E}([0, T]; V, H)} \leq 2C_3 \|\pi^n\|_{\mathfrak{T}} \exp [C_3 \|\mathbf{q}\|_{1, [0, T]}].$$

Из данного неравенства и предельного соотношения (6.3.84) вытекает, что

$$\|\mathbf{x}^n\|_{\mathcal{E}([0, T]; V, H)} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

А это и означает, что отображение (6.3.83) непрерывно в нуле. Следовательно, отображение (6.3.83) является линейным непрерывным оператором, действующим из  $\mathfrak{T}$  в  $\mathcal{E}([0, T]; V, H)$ . Поэтому и справедлива априорная оценка (6.3.66).

Теорема полностью доказана. ■

**Следствие 6.3.1.** Если в задаче Коши (6.3.63), (6.3.64) мера  $\mu \in \mathbf{M}([0, T], H)$  имеет вид

$$\mu(E) = \int_E \mathbf{g}(t) \nu(dt), \quad E \subseteq [0, T] \text{ — борелевское подмножество отрезка } [0, T],$$

где  $\nu \in \mathbf{M}[0, T]$ ,  $\mathbf{g} \in C([0, T], H)$ , то априорную оценку (6.3.66) можно переписать в виде

$$\|\mathbf{x}\|_{\mathcal{E}([0, T]; V, H)} \leq \varkappa_4 [\sqrt{\|\varphi\|_V^2 + \|\psi\|_H^2} + \|f\|_{1, [0, T], H} + \|\mathbf{g}\|_{1, [0, T], Y^*}^{(1)} + \|\mathbf{g}\|_{[0, T], H}^{(0)} \|\nu\|]. \quad (6.3.87)$$



### 6.3.6. Параметрическая задача Коши с ненулевой правой частью

Определим функцию  $\theta[\psi, f](t, \tau)$ ,  $t \in [0, T]$ ,  $\tau \in [0, T]$ , при  $t \in [0, \tau]$  как решение задачи Коши

$$\theta_{tt} + \mathfrak{A}(t)\theta + \mathfrak{B}(t)\theta + \mathfrak{P}(t)\dot{\theta}_t + \mathfrak{Q}(t)\theta + \mathfrak{G}^*\mathfrak{F}(t)\mathfrak{G}\theta = f(t, \tau), \quad t \in [0, \tau], \quad (6.3.88)$$

$$\theta|_{t=\tau} = 0, \quad \theta_t|_{t=\tau} = \psi(\tau), \quad (6.3.89)$$

а при  $t \in [\tau, T]$  — как решение задачи Коши

$$\theta_{tt} + \mathfrak{A}(t)\theta + \mathfrak{B}(t)\theta + \mathfrak{P}(t)\theta_t + \mathfrak{Q}(t)\theta + \mathfrak{G}^*\mathfrak{F}(t)\mathfrak{G}\theta = f(t, \tau), \quad t \in [\tau, T], \quad (6.3.90)$$

$$\theta|_{t=\tau} = 0, \quad \theta_t|_{t=\tau} = \psi(\tau). \quad (6.3.91)$$

Введём функцию  $\varpi[\psi, \mu](t)$ ,  $t \in [0, T]$ , как решение задачи Коши

$$\ddot{\varpi}(t) + \mathfrak{A}(t)\varpi(t) + \mathfrak{B}(t)\varpi(t) + \mathfrak{P}(t)\dot{\varpi}(t) + \mathfrak{Q}(t)\varpi(t) + \mathfrak{G}^*\mathfrak{F}(t)\mathfrak{G}\varpi(t) = \psi(t)\mu(dt), \quad t \in [0, T], \quad (6.3.92)$$

$$\varpi(T) = 0, \quad \dot{\varpi}(T) = 0, \quad (6.3.93)$$

Наконец через  $\zeta[\psi](t, \tau)$ ,  $(t, \tau) \in \Gamma$ , обозначим решение задачи Коши

$$\zeta_{tt} + \mathfrak{A}(t)\zeta + \mathfrak{B}(t)\zeta + \mathfrak{P}(t)\dot{\zeta}_t + \mathfrak{Q}(t)\zeta + \mathfrak{G}^*\mathfrak{F}(t)\mathfrak{G}\zeta = \psi(t)\delta_\tau(dt), \quad t \in [0, T], \quad (6.3.94)$$

$$\zeta|_{t=T} = 0, \quad \zeta_t|_{t=T} = 0. \quad (6.3.95)$$

При этом считаем, что выполнены следующие условия:

1) функции  $\mathfrak{P} : [0, T] \rightarrow \mathcal{L}(H, H)$  и  $\mathfrak{Q} : [0, T] \rightarrow \mathcal{L}(V, H)$  таковы, что

а) при каждом  $h \in H$  отображение

$$[0, T] \ni t \mapsto \mathfrak{P}(t)h \in H$$

измеримо в смысле слабой топологии пространства  $H$ ;

б) при каждом  $v \in V$  отображение

$$[0, T] \ni t \mapsto \mathfrak{Q}(t)v \in H$$

измеримо в смысле слабой топологии пространства  $H$ ;

в) конечны величины

$$c_4 \equiv \text{vraisup}_{t \in [0, T]} \|\mathfrak{P}(t)\|_{H \rightarrow H} dt, \quad c_5 \equiv \int_0^T \|\mathfrak{Q}(t)\|_{V \rightarrow H} dt.$$

2)  $\psi \in C([0, T], H)$ ,  $f \in C([0, T], L_1([0, T], H))$ ,  $\mu \in \mathbf{M}[0, T]$ .

**Теорема 6.3.9.** *Справедливо включение  $\theta[\psi, f] \in C([0, T], \mathcal{E}([0, T]; V, H))$ , понимаемое в том смысле, что функция*

$$[0, T] \ni \tau \mapsto \theta[\psi, f](\cdot, \tau) \in \mathcal{E}([0, T]; V, H)$$

*непрерывна на отрезке  $[0, T]$  в смысле нормы пространства  $\mathcal{E}([0, T]; V, H)$ . При этом найдётся постоянная  $\varkappa_5 > 0$ , зависящая лишь от  $T$ ,  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$ ,  $c_4$ ,  $c_5 > 0$  и от  $\|\mathfrak{G}\|_{V \rightarrow Z}$ , такая, что*

$$\max_{\tau \in [0, T]} \|\theta[\psi, f](\cdot, \tau)\|_{\mathcal{E}([0, T]; V, H)} \leq \varkappa_5 \|\psi\|_{[0, T], H}^{(0)} + \max_{\tau \in [0, T]} \|f(\cdot, \tau)\|_{1, [0, T], H}. \quad (6.3.96)$$

**Доказательство.** 1) Прежде всего отметим, что, в силу теоремы 6.3.7, функция  $\theta[\psi, f](\cdot, \tau)$  однозначно определяется на  $[0, T]$ , при всех  $\tau \in [0, T]$  справедливо включение  $\theta[\psi, f](\cdot, \tau) \in \mathcal{E}([0, T]; V, H)$ , и найдётся константа  $\varkappa_4 > 0$ , зависящая лишь от  $T$ ,  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$ ,  $c_4$ ,  $c_5 > 0$  и от  $\|\mathfrak{G}\|_{V \rightarrow Z}$ , такая, что

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, \tau]} \|\theta[\psi, f](t, \tau)\|_V + \text{vraisup}_{t \in [0, \tau]} \|\theta_t[\psi, f](t, \tau)\|_H &\leq \varkappa_4 [\|\psi(\tau)\|_H + \|f(\cdot, \tau)\|_{1, [0, T], H}] \leq \\ &\leq \varkappa_4 \left[ \sup_{\xi \in [0, T]} \|\psi(\xi)\|_H + \sup_{\xi \in [0, T]} \|f(\cdot, \xi)\|_{1, [0, T], H} \right] \\ \sup_{t \in [\tau, T]} \|\theta[\psi, f](t, \tau)\|_V + \text{vraisup}_{t \in [\tau, T]} \|\theta_t[\psi, f](t, \tau)\|_H &\leq \varkappa_4 [\|\psi(\tau)\|_H + \|f(\cdot, \tau)\|_{1, [0, T], H}] \leq \\ &\leq \varkappa_4 \left[ \sup_{\xi \in [0, T]} \|\psi(\xi)\|_H + \sup_{\xi \in [0, T]} \|f(\cdot, \xi)\|_{1, [0, T], H} \right]. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\sup_{\tau \in [0, T]} \|\theta[\psi, f](\cdot, \tau)\|_{\mathfrak{D}([0, T]; V, H)} \leq 2\kappa_4 \|\psi\|_{[0, T], H}^{(0)} + \max_{\tau \in [0, T]} \|f(\cdot, \tau)\|_{1, [0, T], H}. \quad (6.3.97)$$

Заметим также, что  $\theta[\psi, f]$  линейно зависит от  $\psi \in C([0, T], H)$ ,  $f \in C([0, T], L_1([0, T], H))$ .

2) Докажем теперь включение  $\theta[\psi, f] \in C([0, T], \mathfrak{D}([0, T]; V, H))$ . Для этого воспользуемся методом Галёркина. Предположим сначала, что  $\psi \in C^1([0, T], V)$ ,  $f \in C^1(\Gamma, V)$ . Пусть

$$\begin{aligned} \psi^N(\tau) &\equiv \sum_{m=1}^N \psi_m(\tau) e_m, \quad f^N(t, \tau) \equiv \sum_{m=1}^N f_m(t, \tau) e_m, \quad \psi_j(\tau) \equiv \langle \psi(\tau), e_j \rangle_H, \quad f_j(t, \tau) \equiv \langle f(t, \tau), e_j \rangle_H, \\ j, N &= 1, 2, \dots, \quad (t, \tau) \in \Gamma. \end{aligned}$$

Тогда, в силу леммы 1.5.3,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|\psi^N - \psi\|_{[0, T], V}^{(1)} = 0, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \|f^N - f\|_{\Gamma, V}^{(1)} = 0. \quad (6.3.98)$$

Будем искать приближение  $\theta^N[\psi, f]$  к функции  $\theta[\psi, f]$  в виде

$$\theta^N[\psi, f](t, \tau) \equiv \sum_{k=1}^N h_k^N(t, \tau) e_k,$$

где набор функций  $h_k^N$ ,  $k = \overline{1, N}$ , является решением задачи Коши

$$\begin{aligned} h_{kt}^N(t, \tau) + \sum_{m=1}^N [\mathfrak{p}_{km}(t) h_{mt}^N(t, \tau) + \mathfrak{q}_{km}(t) h_m^N(t, \tau)] &= f_k(t, \tau), \\ h_k^N(t, \tau)|_{t=\tau} &= 0, \quad h_{kt}^N(t, \tau)|_{t=\tau} = \psi_k(\tau), \quad k = \overline{1, N}, \end{aligned} \quad (6.3.99)$$

в которой

$$\mathfrak{p}_{km}(t) \equiv \langle \mathfrak{P}(t) e_m, e_k \rangle_H, \quad \mathfrak{q}_{km}(t) \equiv \langle \mathfrak{A}(t) e_m + \mathfrak{B}(t) e_m, e_k \rangle + \langle \mathfrak{Q}(t) e_m, e_k \rangle_H + \langle \mathfrak{F}(t) \mathfrak{G} e_m, \mathfrak{G} e_k \rangle_Z.$$

Согласно лемме 5.3.1, существует единственный набор функций  $h_k^N$ ,  $k = \overline{1, N}$ , непрерывных на  $\Gamma$  и имеющих на  $\Gamma$  непрерывные производные  $h_{kt}^N$ ,  $h_{k\tau}^N$ ,  $h_{ktt}^N$ ,  $h_{k\tau\tau}^N$ ,  $h_{k\tau t}^N$ ,  $k = \overline{1, N}$ , являющийся решением задачи Коши (6.3.99). Кроме того, производные  $h_{k\tau t}^N$ ,  $k = \overline{1, N}$ , также существуют и непрерывны на  $\Gamma$ , а набор функций  $h_{k\tau}^N$ ,  $k = \overline{1, N}$ , является решением задачи Коши

$$\begin{aligned} h_{k\tau t}^N(t, \tau) + \sum_{m=1}^N [p_{km}(t) h_{m\tau t}^N(t, \tau) + q_{km}(t) h_{m\tau}^N(t, \tau)] &= f_{k\tau}(t, \tau), \\ h_{k\tau}^N(t, \tau)|_{t=\tau} &= -\psi_k(\tau), \quad h_{k\tau t}^N(t, \tau)|_{t=\tau} = \psi_k'(\tau) + \sum_{m=1}^N p_{km}(\tau) \psi_m(\tau) + f_k(\tau, \tau), \quad k = \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (6.3.100)$$

Как следствие, для функций  $\theta^N[\psi, f]$  и  $\xi^N[\psi, f] \equiv \theta_\tau^N[\psi, f]$  справедливы тождества

$$\begin{aligned} &\langle \theta_{tt}^N[\psi, f](t, \tau), e_k \rangle + \langle \mathfrak{A}(t) \theta^N[\psi, f](t, \tau) + \mathfrak{B}(t) \theta^N[\psi, f](t, \tau), e_k \rangle + \\ &+ \langle \mathfrak{P}(t) \theta_t^N[\psi, f](t, \tau) + \mathfrak{Q}(t) \theta^N[\psi, f](t, \tau), e_k \rangle_H + \langle \mathfrak{F}(t) \mathfrak{G} \theta^N[\psi, f](t, \tau), \mathfrak{G} e_k \rangle_Z = \langle f(t, \tau), e_k \rangle_H, \end{aligned} \quad (6.3.101)$$

$$\begin{aligned} &\theta^N[\psi, f]|_{t=\tau} = 0, \quad \theta_t^N[\psi, f]|_{t=\tau} = \psi^N(\tau), \quad k = \overline{1, N}, \quad (t, \tau) \in \Gamma; \\ &\langle \xi_{tt}^N[\psi, f](t, \tau), e_k \rangle + \langle \mathfrak{A}(t) \xi^N[\psi, f](t, \tau) + \mathfrak{B}(t) \xi^N[\psi, f](t, \tau), e_k \rangle + \\ &+ \langle \mathfrak{P}(t) \xi_t^N[\psi, f](t, \tau) + \mathfrak{Q}(t) \xi^N[\psi, f](t, \tau), e_k \rangle_H + \langle \mathfrak{F}(t) \mathfrak{G} \xi^N[\psi, f](t, \tau), \mathfrak{G} e_k \rangle_Z = \langle f_\tau(t, \tau), e_k \rangle_H, \\ &\xi^N[\psi, f]|_{t=\tau} = -\psi^N(\tau), \quad \xi_t^N[\psi, f]|_{t=\tau} = \dot{\psi}^N(\tau) + \mathfrak{P}(\tau) \psi^N(\tau) + f^N(\tau, \tau), \quad k = \overline{1, N}, \quad (t, \tau) \in \Gamma. \end{aligned} \quad (6.3.102)$$

Рассуждая затем подобно тому, как это делалось при выводе оценки (6.3.16), заключаем, что

$$\begin{aligned} &\|\theta^N[\psi, f](\cdot, \tau)\|_{\mathfrak{D}([0, T]; V, H)} \leq C[\|\psi^N(\tau)\|_H + \|f(\cdot, \tau)\|_{1, [0, T], H}], \\ &\|\xi^N[\psi, f](\cdot, \tau)\|_{\mathfrak{D}([0, T]; V, H)} \leq C[\|\psi^N(\tau)\|_V + \|\dot{\psi}^N(\tau) + \mathfrak{P}(\tau) \psi^N(\tau) + f^N(\tau, \tau)\|_H + \|f_\tau(\cdot, \tau)\|_{1, [0, T], H}], \end{aligned}$$

где постоянная  $C > 0$  определяется лишь числами  $T, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 > 0$  и  $\|\mathfrak{G}\|_{V \rightarrow Z}$ .

Пользуясь условиями на исходные данные, выводим, что

$$\begin{aligned} \|\xi^N[\psi, f](\cdot, \tau)\|_{\mathfrak{D}([0, T]; V, H)} &\leq C[\|\psi^N(\tau)\|_V + \|\dot{\psi}^N(\tau) + \mathfrak{P}(\tau)\psi^N(\tau) + f^N(\tau, \tau)\|_H + \|f_\tau(\cdot, \tau)\|_{1, [0, T], H}] \leq \\ &\leq C[\|\psi^N(\tau)\|_V + \|\dot{\psi}^N(\tau)\|_H + c_4\|\psi^N(\tau)\|_H + \|f^N(\tau, \tau)\|_H + T|f_\tau|_{\Gamma, H}^{(0)}] \leq C'[\|\psi^N\|_{[0, T], V}^{(1)} + |f|_{\Gamma, H}^{(1)}]. \end{aligned}$$

Итак,

$$\begin{aligned} \|\theta^N[\psi, f](\cdot, \tau)\|_{\mathfrak{D}([0, T]; V, H)} &\leq C_1[\|\psi^N\|_{[0, T], H}^{(0)} + |f|_{[0, T], L_1([0, T], H)}^{(0)}], \\ \|\xi^N[\psi, f](\cdot, \tau)\|_{\mathfrak{D}([0, T]; V, H)} &\leq C_1[\|\psi^N\|_{[0, T], V}^{(1)} + |f|_{\Gamma, H}^{(1)}], \end{aligned}$$

где  $C_1 > 0$  — некоторая не зависящая от  $N$  положительная постоянная. Следовательно, при всех  $\tau_1, \tau_2 \in [0, T]$

$$\begin{aligned} \|\theta^N[\psi, f](\cdot, \tau_1) - \theta^N[\psi, f](\cdot, \tau_2)\|_{\mathfrak{D}([0, T]; V, H)} &= \left\| \sum_{m=1}^N h_m^N(\cdot, \tau_1)e_m - \sum_{m=1}^N h_m^N(\cdot, \tau_2)e_m \right\|_{\mathfrak{D}([0, T]; V, H)} = \\ &= \left\| \sum_{m=1}^N [h_m^N(\cdot, \tau_1) - h_m^N(\cdot, \tau_2)]e_m \right\|_{\mathfrak{D}([0, T]; V, H)} = \left\| \sum_{m=1}^N \int_{\tau_2}^{\tau_1} h_{m\tau}^N(\cdot, \tau)e_m d\tau \right\|_{\mathfrak{D}([0, T]; V, H)} = \\ &= \left\| \int_{\tau_2}^{\tau_1} \sum_{m=1}^N h_{m\tau}^N(\cdot, \tau)e_m d\tau \right\|_{\mathfrak{D}([0, T]; V, H)} = \left\| \int_{\tau_2}^{\tau_1} \xi^N[\psi, f](\cdot, \tau) d\tau \right\|_{\mathfrak{D}([0, T]; V, H)} \leq \\ &\leq \left| \int_{\tau_2}^{\tau_1} \|\xi^N[\psi](\cdot, \tau)\|_{\mathfrak{D}([0, T]; V, H)} d\tau \right| \leq C_1|\tau_1 - \tau_2|[\|\psi^N\|_{[0, T], V}^{(1)} + |f|_{\Gamma, H}^{(1)}]. \end{aligned}$$

Таким образом, при всех  $\tau, \tau_1, \tau_2 \in [0, T]$ ,

$$\|\theta^N[\psi, f](\cdot, \tau)\|_{\mathfrak{D}([0, T]; V, H)} \leq C_1[\|\psi\|_{[0, T], H}^{(0)} + |f|_{[0, T], L_1([0, T], H)}^{(0)}], \quad (6.3.103)$$

$$\|\theta^N[\psi, f](\cdot, \tau_1) - \theta^N[\psi, f](\cdot, \tau_2)\|_{\mathfrak{D}([0, T]; V, H)} \leq C_1|\tau_1 - \tau_2|[\|\psi\|_{[0, T], V}^{(1)} + |f|_{\Gamma, H}^{(1)}]. \quad (6.3.104)$$

Рассуждая как при получении тождества (6.3.23), заключаем, что

$$\int_0^\tau [-\langle \theta_t^N[\psi, f](t, \tau), \eta^N(t) \rangle + \langle \mathfrak{A}(t)\theta^N[\psi, f](t, \tau), \eta^N(t) \rangle + \langle \mathfrak{B}(t)\theta^N[\psi, f](t, \tau), \eta^N(t) \rangle + \quad (6.3.105)$$

$$\begin{aligned} &+ \langle \mathfrak{P}(t)\theta_t^N[\psi, f](t, \tau) + \mathfrak{Q}(t)\theta^N[\psi, f](t, \tau), \eta^N(t) \rangle_H + \langle \mathfrak{F}(t)\mathfrak{G}\theta^N[\psi, f](t, \tau), \mathfrak{G}\eta^N(t) \rangle_Z] dt = \\ &= \int_0^\tau \langle f(t, \tau), \eta^N(t) \rangle_H dt - \langle \psi^N(\tau), \eta^N(\tau) \rangle_H, \quad \forall \eta^N \in \mathfrak{K}_0^N[0, \tau]; \quad \theta^N[\psi, f]|_{t=\tau} = 0; \end{aligned}$$

$$\int_\tau^T [-\langle \theta_t^N[\psi, f](t, \tau), \eta^N(t) \rangle + \langle \mathfrak{A}(t)\theta^N[\psi, f](t, \tau), \eta^N(t) \rangle + \langle \mathfrak{B}(t)\theta^N[\psi, f](t, \tau), \eta^N(t) \rangle + \quad (6.3.106)$$

$$\begin{aligned} &+ \langle \mathfrak{P}(t)\theta_t^N[\psi, f](t, \tau) + \mathfrak{Q}(t)\theta^N[\psi, f](t, \tau), \eta^N(t) \rangle_H + \langle \mathfrak{F}(t)\mathfrak{G}\theta^N[\psi, f](t, \tau), \mathfrak{G}\eta^N(t) \rangle_Z] dt = \\ &= \int_\tau^T \langle f(t, \tau), \eta^N(t) \rangle_H dt + \langle \psi^N(\tau), \eta^N(\tau) \rangle_H, \quad \forall \eta^N \in \mathfrak{K}_T^N[\tau, T]; \quad \theta^N[\psi, f]|_{t=\tau} = 0. \end{aligned}$$

Произвольно выберем и зафиксируем  $\tau_1, \tau_2 \in [0, T]$ . Ввиду неравенства (6.3.103) и теоремы 2.4.9 заключаем, что найдутся подпоследовательность  $N_m, m = 1, 2, \dots$ , последовательности  $N = 1, 2, \dots$ , и функции  $\theta^-(\cdot, \tau_i) \in \mathfrak{D}([0, \tau_i]; V, H)$ ,  $\theta^+(\cdot, \tau_i) \in \mathfrak{D}([\tau_i, T]; V, H)$ ,  $\theta^*(\cdot, \tau_i) \in \mathfrak{D}([0, T]; V, H)$ ,  $i = 1, 2$ , такие, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \max_{t \in [0, \tau_i]} \|\theta^{N_m}[\psi, f](t, \tau_i) - \theta^-(t, \tau_i)\|_H = 0, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \max_{t \in [\tau_i, T]} \|\theta^{N_m}[\psi](t, \tau_i) - \theta^+(t, \tau_i)\|_H = 0, \quad (6.3.107)$$

$$\theta^{N_m}[\psi, f](\cdot, \tau_i) \rightarrow \theta^-(\cdot, \tau_i), \quad m \rightarrow \infty, \quad \text{слабо в } \mathcal{W}_2^1([0, \tau_i]; V, H),$$

$$\begin{aligned}
\theta^{N_m}[\psi, f](\cdot, \tau_i) &\rightarrow \theta^+(\cdot, \tau_i), \quad m \rightarrow \infty, \quad \text{слабо в } \mathcal{W}_2^1([\tau_i, T]; V, H), \\
\theta^{N_m}[\psi, f](\cdot, \tau_i) &\rightarrow \theta^-(\cdot, \tau_i), \quad m \rightarrow \infty, \quad \text{*слабо в } L_\infty([0, \tau_i], V), \\
\theta^{N_m}[\psi, f](\cdot, \tau_i) &\rightarrow \theta^+(\cdot, \tau_i), \quad m \rightarrow \infty, \quad \text{*слабо в } L_\infty([\tau_i, T], V), \\
\theta_t^{N_m}[\psi, f](\cdot, \tau_i) &\rightarrow \theta_t^-(\cdot, \tau_i), \quad m \rightarrow \infty, \quad \text{*слабо в } L_\infty([0, \tau_i], H), \\
\theta_t^{N_m}[\psi, f](\cdot, \tau_i) &\rightarrow \theta_t^+(\cdot, \tau_i), \quad m \rightarrow \infty, \quad \text{*слабо в } L_\infty([\tau_i, T], H), \\
\theta^{N_m}[\psi, f](\cdot, \tau_i) &\rightarrow \theta^*(\cdot, \tau_i), \quad m \rightarrow \infty, \quad \text{слабо в } \mathcal{W}_2^1([0, T]; V, H), \\
\lim_{m \rightarrow \infty} \max_{t \in [0, \tau_i]} \|\mathfrak{G}[\theta^{N_m}[\psi, f](\cdot, \tau_i)] - \mathfrak{G}[\theta^-(t, \tau_i)]\|_Z &= 0, \\
\lim_{m \rightarrow \infty} \max_{t \in [\tau_i, T]} \|\mathfrak{G}[\theta^{N_m}[\psi, f](\cdot, \tau_i)] - \mathfrak{G}[\theta^+(t, \tau_i)]\|_Z &= 0, \quad i = 1, 2.
\end{aligned}$$

Переходя к пределу при  $m \rightarrow \infty$  в (6.3.105) и (6.3.106) с  $N = N_m$ ,  $\tau = \tau_i$ ,  $i = 1, 2$ , получим, что  $\theta^*(\cdot, \tau_i) \equiv \theta[\psi, f](\cdot, \tau_i)$ ,  $\theta^-(\cdot, \tau_i) \equiv \theta[\psi, f](\cdot, \tau_i)|_{[0, \tau_i]}$ ,  $\theta^+(\cdot, \tau_i) \equiv \theta[\psi, f](\cdot, \tau_i)|_{[\tau_i, T]}$ ,  $i = 1, 2$ .

Используя предельные соотношения (6.3.107), теорему 2.4.9, и неравенство (6.3.104), заключаем, что

$$\|\theta[\psi, f](\cdot, \tau_1) - \theta[\psi, f](\cdot, \tau_2)\|_{\mathfrak{E}([0, T]; V, H)} \leq C_1 |\tau_1 - \tau_2| \|\psi\|_{[0, T], V}^{(1)} + \|f\|_{\Gamma, H}^{(1)} \quad \forall \tau_1, \tau_2 \in [0, T]. \quad (6.3.108)$$

Итак, для случая  $\psi \in C^1([0, T], V)$ ,  $f \in C^1(\Gamma, V)$  включение  $\theta[\psi, f] \in C([0, T], \mathfrak{E}([0, T]; V, H))$  доказано.

Пусть теперь  $\psi \in C([0, T], H)$ ,  $f \in C([0, T], L_1([0, T], H))$ . Тогда, на основании леммы 1.5.3, найдутся последовательности  $\psi_m \in C^1([0, T], V)$ ,  $f_m \in C^1(\Gamma, V)$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , такие, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|\psi_m - \psi\|_{[0, T], H}^{(0)} = 0, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \|f_m - f\|_{[0, T], L_1([0, T], H)}^{(0)} = 0. \quad (6.3.109)$$

Из неравенства (6.3.97) и упомянутой выше линейной зависимости  $\theta[\psi, f]$  от  $\psi$  и  $f$  выводим, что

$$\begin{aligned}
\max_{\tau \in [0, T]} \|\theta[\psi_m, f_m](\cdot, \tau) - \theta[\psi_k, f_k](\cdot, \tau)\|_{\mathfrak{E}([0, T]; V, H)} &\leq 2\mathfrak{K}_4 [\|\psi_m - \psi_k\|_{[0, T], H}^{(0)} + \|f_m - f_k\|_{[0, T], L_1([0, T], H)}^{(0)}], \\
m, k &= 1, 2, \dots
\end{aligned}$$

В силу (6.3.109) это означает, что последовательность  $\theta[\psi_m, f_m]$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , фундаментальна в банаховом пространстве  $C([0, T], \mathfrak{E}([0, T]; V, H))$ . Поэтому найдётся функция  $\bar{\theta}[\psi, f] \in C([0, T], \mathfrak{E}([0, T]; V, H))$ , для которой  $\lim_{m \rightarrow \infty} \|\theta[\psi_m, f_m] - \bar{\theta}[\psi, f]\|_{[0, T], \mathfrak{E}([0, T]; V, H)}^{(0)} = 0$ . Пользуясь последним равенством и определением функции  $\theta[\psi, f]$ , заключаем, что  $\bar{\theta}[\psi, f] \equiv \theta[\psi, f]$ , и, следовательно,  $\theta[\psi, f]$  непрерывна по  $\tau \in [0, T]$  в метрике пространства  $\mathfrak{E}([0, T]; V, H)$  также и для  $\psi \in C([0, T], H)$ ,  $f \in C([0, T], L_1([0, T], H))$ . Итак, доказано, что для всех  $\psi \in C([0, T], H)$ ,  $f \in C([0, T], L_1([0, T], H))$  имеет место включение  $\theta[\psi, f] \in C([0, T], \mathfrak{E}([0, T]; V, H))$ .

3) Докажем включение  $\eta[\psi] \in C([0, T], \mathfrak{E}([0, T]; V, H))$ . В самом деле, на основании теоремы 6.3.7, при всех  $\tau \in [0, T]$  справедливо включение  $\theta[\psi, f](\cdot, \tau) \in \mathfrak{E}([0, T]; V, H)$ . Кроме того, из доказанного во второй части данного доказательства включения  $\theta[\psi, f] \in C([0, T], \mathfrak{E}([0, T]; V, H))$  следует, что для всех  $\tau$  и  $\tau' \in [0, T]$

$$\begin{aligned}
&\|\theta[\psi, f](\cdot, \tau') - \theta[\psi, f](\cdot, \tau)\|_{\mathfrak{E}([0, T]; V, H)} = \\
&= \sup_{t \in [0, T]} \left[ \|\theta[\psi, f](t, \tau') - \theta[\psi, f](t, \tau)\|_V^2 + \|\theta_t[\psi, f](t, \tau') - \theta_t[\psi, f](t, \tau)\|_H^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq \\
&\leq \|\theta[\psi, f](\cdot, \tau') - \theta[\psi, f](\cdot, \tau)\|_{\mathfrak{E}([0, T]; V, H)}.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\|\theta[\psi, f](\cdot, \tau') - \theta[\psi, f](\cdot, \tau)\|_{\mathfrak{E}([0, T]; V, H)} \leq \|\theta[\psi, f](\cdot, \tau') - \theta[\psi, f](\cdot, \tau)\|_{\mathfrak{E}([0, T]; V, H)}. \quad (6.3.110)$$

Из данного неравенства и ранее доказанного включения  $\theta[\psi, f] \in C([0, T], \mathfrak{E}([0, T]; V, H))$  и следует включение  $\theta[\psi, f] \in C([0, T], \mathfrak{E}([0, T]; V, H))$ .

4) Априорная оценка (6.3.96) является следствием неравенств (6.3.97) и (6.3.110). Теорема полностью доказана. ■

Для всех  $t_1, t_2 \in [0, T]$ ,  $t_1 < t_2$ , через  $\mathfrak{K}^N[t_1, t_2]$  обозначим множество функций вида

$$(x, t) \ni Q_{[t_1, t_2]} \mapsto \sum_{m=1}^N w_m(t) g_m(x),$$

где  $w_m \in C^\infty[t_1, t_2]$ ,  $m = \overline{1, N}$ . Положим  $\mathfrak{K}_{t_1}^N[t_1, t_2] \equiv \{\eta \in \mathfrak{K}^N[t_1, t_2] : \eta(x, t_1) = 0 \text{ при п.в. } x \in \Omega\}$ ,  $\mathfrak{K}_{t_2}^N[t_1, t_2] \equiv \{\eta \in \mathfrak{K}^N[t_1, t_2] : \eta(x, t_2) = 0 \text{ при п.в. } x \in \Omega\}$ ,  $\mathfrak{K}^N \equiv \mathfrak{K}^N[0, T]$ ,  $\mathfrak{K}_0^N \equiv \mathfrak{K}_0^N[0, T]$ ,  $\mathfrak{K}_T^N \equiv \mathfrak{K}_T^N[0, T]$ .

**Лемма 6.3.2.** Пусть  $\eta_1, \eta_2 \in W_2^1(Q_{[t_1, t_2]})$ , причём  $\eta_1(\cdot, t_1) = \eta_2(\cdot, t_2) = 0$ . Тогда существуют последовательности  $\eta_1^N \in \mathfrak{K}_{t_1}^N[t_1, t_2]$ ,  $\eta_2^N \in \mathfrak{K}_{t_2}^N[t_1, t_2]$ ,  $N = 1, 2, \dots$ , такие, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|\eta_1^N - \eta_1\|_{2, Q_{[t_1, t_2]}}^{(1)} = 0, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \|\eta_2^N - \eta_2\|_{2, Q_{[t_1, t_2]}}^{(1)} = 0.$$

**Доказательство.** Поскольку  $C^\infty(Q_{[t_1, t_2]})$  всюду плотно в  $W_2^1(Q_{[t_1, t_2]})$ , то

$$\forall \delta > 0 \exists \eta_{1\delta}, \eta_{2\delta} \in C^\infty(Q_T), \eta_{1\delta}(x, t_1) = \eta_{2\delta}(x, t_2) = 0, \quad x \in \Omega :$$

$$\max\{\|\eta_{1\delta} - \eta_1\|_{2, Q_{[t_1, t_2]}}^{(1)}, \|\eta_{2\delta} - \eta_2\|_{2, Q_{[t_1, t_2]}}^{(1)}\} \leq \frac{\delta}{2}.$$

На основании леммы ??

$$\exists N_0(\delta) \forall N \geq N_0(\delta) : \max\left\{\left\|\eta_{1\delta} - \sum_{m=1}^N \eta_{1\delta, m}(t) g_m\right\|_{2, Q_{[t_1, t_2]}}^{(1)}, \left\|\eta_{2\delta} - \sum_{m=1}^N \eta_{2\delta, m}(t) g_m\right\|_{2, Q_{[t_1, t_2]}}^{(1)}\right\} \leq \frac{\delta}{2},$$

где  $\eta_{i\delta, m}(t) \equiv \int_\Omega [\eta_{i\delta}(y, t) g_m(y) + \langle \nabla_x \eta_{i\delta}(y, t), \nabla g_m(y) \rangle] dy$ ,  $i = 1, 2$ .

Пусть  $\delta_j > 0$ ,  $\delta_j > \delta_{j+1}$ ,  $j = 1, 2, \dots$ ,  $\delta_j \rightarrow 0$ ,  $j \rightarrow \infty$ , — некоторая последовательность чисел. Положим  $N_j \equiv N(\delta_j)$ ,

$$\eta_1^{N_j}(x, t) \equiv \sum_{m=1}^{N_j} \eta_{1\delta_j, m}(t) g_m(x), \quad \eta_2^{N_j}(x, t) \equiv \sum_{m=1}^{N_j} \eta_{2\delta_j, m}(t) g_m(x).$$

Тогда получим, что  $\max\{\|\eta_1 - \eta_1^{N_j}\|_{2, Q_{[t_1, t_2]}}^{(1)}, \|\eta_2 - \eta_2^{N_j}\|_{2, Q_{[t_1, t_2]}}^{(1)}\} \leq \delta_j$ ,  $j = 1, 2, \dots$ . Без ограничения общности считаем, что  $N_j \leq N_{j+1}$ ,  $j = 1, 2, \dots$ . Заполним теперь возможные „пропуски“ в последовательностях  $\eta_1^{N_j}$ ,  $\eta_2^{N_j}$ ,  $j = 1, 2, \dots$ . Если  $N_1 > 1$ , то возьмём  $\eta_1^N \equiv \sum_{m=1}^N \eta_{1\delta_1, m} g_m$ ,  $\eta_2^N \equiv \sum_{m=1}^N \eta_{2\delta_1, m} g_m$ ,  $N = \overline{1, N_1 - 1}$ . Далее, для всех  $N_j$ ,  $N_{j+1}$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , таких, что  $N_j < N_{j+1} - 1$ , положим  $\eta_1^N \equiv \eta_1^{N_j}$ ,  $\eta_2^N \equiv \eta_2^{N_j}$ ,  $N = \overline{N_j + 1, N_{j+1} - 1}$ . Тогда  $\max\{\|\eta_1^N - \eta_1\|_{2, Q_{[t_1, t_2]}}^{(1)}, \|\eta_2^N - \eta_2\|_{2, Q_{[t_1, t_2]}}^{(1)}\} \leq \delta_j$  для всех  $N = \overline{N_j, N_{j+1} - 1}$ . Пусть  $\varepsilon > 0$  — произвольно. Так как  $\delta_j \rightarrow 0$ ,  $j \rightarrow \infty$ , то  $\exists j_0(\varepsilon) \geq \forall j \geq j_0(\varepsilon) : 0 < \delta_j < \varepsilon$ . Из способа построения последовательностей  $\eta_1^{N_j}$ ,  $\eta_2^{N_j}$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , вытекает, что

$$\forall N \geq N_{j_0(\varepsilon)} : \max\{\|\eta_1^N - \eta_1\|_{2, Q_{[t_1, t_2]}}^{(1)}, \|\eta_2^N - \eta_2\|_{2, Q_{[t_1, t_2]}}^{(1)}\} \leq \varepsilon.$$

Итак,  $\forall \varepsilon > 0 \exists N^* = N^*(\varepsilon) \equiv N_{j_0(\varepsilon)} \forall N \geq N^*(\varepsilon) : \max\{\|\eta_1^N - \eta_1\|_{2, Q_{[t_1, t_2]}}^{(1)}, \|\eta_2^N - \eta_2\|_{2, Q_{[t_1, t_2]}}^{(1)}\} \leq \varepsilon$ . А это и означает, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|\eta_1^N - \eta_1\|_{2, Q_{[t_1, t_2]}}^{(1)} = 0, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \|\eta_2^N - \eta_2\|_{2, Q_{[t_1, t_2]}}^{(1)} = 0.$$

Лемма доказана. ■

## Часть II

# Гиперболические уравнения дивергентного вида

## Глава 7. Уравнения с главной частью второго порядка ( $n = 1$ )

## Глава 8. Уравнения с главной частью второго порядка ( $n > 1$ )



## Глава 9. Уравнения с главной частью четвёртого порядка ( $n = 1$ )

## Глава 10. Уравнения с главной частью четвёртого порядка ( $n > 1$ )

# Литература

- [1] Bales L., Lasiecka I. Negative norm estimates for fully discrete finite element approximations to the wave equation with nonhomogeneous  $L_2$  Dirichlet boundary data // Mathematics of computation. 1995. V.64. No.209. P.89–115.
- [2] Ekeland I. On the variational principle // J. Math. Anal. Appl. 1974. V.47. №2. P.324–353.
- [3] Karachalios N., Stavrakakis N. Asymptotic behavior of solutions of some nonlinearly damped equations on  $\mathbb{R}^N$  // Topological Methods in Nonlinear Analysis. 2001. V.18. P.73–87.
- [4] Lasiecka I., Lions J.-L., Triggiani R. Nonhomogeneous boundary value problems for second-order hyperbolic operators // J. Mat. Pures Appl. 1986. V.65. No.2. P.149–192.
- [5] Lasiecka I., Sokolowski J. Regularity and strong convergence of a variational approximation to a nonhomogeneous Dirichlet hyperbolic boundary problem // SIAM J. Math. Anal. 1988. V.19. P.528–540.
- [6] Lasiecka I., Triggiani R. Sharp regularity theory for second order hyperbolic equations of Neumann type, I:  $L_2$  nonhomogeneous data // Ann. Mat. Pura Appl. 1990. V.157. P.285–367.
- [7] Lasiecka I., Triggiani R. Regularity theory of hyperbolic equations with non-homogeneous Neumann boundary conditions, II: General boundary data // J. Diff. Eq. 1991. V.94. P.112–164.
- [8] Mordukhovich B.S. Variational Analysis and Generalized Differentiation, I: Basic Theory. Springer: Berlin, 2006.
- [9] Mordukhovich B.S., Shao Y. Nonsmooth sequential analysis in asplund spaces // Trans. Amer. Math. Soc. 1996. V.346. No.4. P.1235–1280.
- [10] Ward A.L. Differentiability of vector monotone functions // Proc. London Math. Soc. 1935. V.32. No.2. P.339–362.
- [11] Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. — М.: Наука, 1979.
- [12] Богачёв В.И. Основы теории меры. Том I. — Москва–Ижевск: НИЦ „Регулярная и хаотическая динамика“, 2003.
- [13] Букесова Н.Н., Железовский С.Е. О скорости сходимости метода Галеркина для одного класса квазилинейных операторных дифференциальных уравнений // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1999. Т.39. №9. С.1519–1531.
- [14] Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. — М.: Наука, 1977.
- [15] Ворович И.И. О некоторых прямых методах в нелинейной теории колебаний пологих оболочек // Изв. АН СССР. Сер. Математическая. 1957. Т.21. С.747–784.
- [16] Гаврилов В.С., Сумин М.И. Параметрическая оптимизация нелинейных систем Гурса–Дарбу с фазовыми ограничениями // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2004. Т.44. №6. С.1002–1022.
- [17] Гаврилов В.С., Сумин М.И. Параметрическая задача субоптимального управления системой Гурса–Дарбу с поточечным фазовым ограничением // Известия вузов. Математика. 2005. №6. С.40–52.
- [18] Гаевский Х., Грегёр К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1978.

- [19] Дель Санто Д., Митидиери Э. Разрушение решений гиперболической системы: критический случай // Дифф. уравнения. 1998. Т.34. №9. С.1155–1161.
- [20] Железовский С.Е. Метод Бубнова–Галеркина для абстрактной квазилинейной задачи о стационарном действии // Дифф. уравнения. 1995. Т.31. №7. С.1222–1231.
- [21] Железовский С.Е. Оценки скорости сходимости метода Галёркина для абстрактного гиперболического уравнения // Матем. заметки. 2001. Т.69. Вып.2. С.223–234.
- [22] Железовский С.Е. Оценки скорости сходимости проекционно–разностного метода для гиперболических уравнений // Изв. вузов. Математика. 2002. №1. С.21–30.
- [23] Железовский С.Е. К оценкам погрешности метода Галёркина для гиперболических уравнений // Сибирский матем. журн. 2005. Т.46. №2. С.374–389.
- [24] Железовский С.Е. К обоснованию метода Галеркина для гиперболических уравнений // Дифф. уравнения. 2007. Т.43. №3. С.402–410.
- [25] Железовский С.Е. К исследованию сходимости проекционно–разностного метода для гиперболических уравнений // Сибирский матем. журн. 2007. Т.48. №1. С.93–102.
- [26] Железовский С.Е., Букусова Н.Н. Оценки погрешности проекционного метода для абстрактного квазилинейного гиперболического уравнения // Изв. вузов. Математика. 1999. №5. С.94–96.
- [27] Железовский С.Е., Ляшко А.Д. Оценки погрешности метода Галеркина для квазилинейных гиперболических уравнений // Дифф. уравнения. 2001. Т.37. №7. С.941–949.
- [28] Зорич В.А. Математический анализ. Часть I. — изд.2-е. — М.: ФАЗИС, 1997.
- [29] Ильин В.А., Кулешов А.А. О некоторых свойствах обобщённых решений волнового уравнения из классов  $L_p$  и  $W_p^1$  при  $p \geq 1$  // Дифф. уравнения. 2012. Т.48. №11. С.1493–1500.
- [30] Ильин В.А., Кулешов А.А. Необходимое и достаточное условие принадлежности классу  $L_p$  при  $p \geq 1$  обобщенного решения смешанной задачи для волнового уравнения // Дифф. уравнения. 2012. Т.48. №12. С.1607–1611.
- [31] Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. В 2 ч. Часть II. — М.: Наука, Физматлит, 2000.
- [32] Ишмухаметов А.З. Об аппроксимации гиперболических дифференциально–операторных уравнений второго порядка // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1987. Т.27. №8. С.1154–1165.
- [33] Иосида К. Функциональный анализ. — М.: Мир, 1967.
- [34] Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988.
- [35] Кожанов А.И., Ларькин Н.А. О разрешимости краевых задач для волнового уравнения с нелинейной диссипацией в неоднородных областях // Сибирский матем. журн. 2001. Т.42. №6. С.1275–1299.
- [36] Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Многочастотный параметрический резонанс в нелинейном волновом уравнении // Изв. РАН. Сер. математическая. 2002. Т.66. №6. С.49–64.
- [37] Колмогоров А.Ф., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. — изд. 6-е. — М.: Наука, 1988.
- [38] Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т1. — М.: Наука, 2003.
- [39] Ладыженская О.А. Смешанная задача для гиперболических уравнений. — М.: Гостехиздат, 1953.
- [40] Ладыженская О.А. О разрешимости основных краевых задач для уравнений параболического и гиперболического типов // ДАН СССР. 1954. Т.97. №3. С.395–398.
- [41] Ладыженская О.А. О решении нестационарных операторных уравнений // Матем. сб. 1956. Т.39. №4. С.491–524.
- [42] Ладыженская О.А. О нестационарных операторных уравнениях и их приложениях к линейным задачам математической физики // Матем. сб. 1958. Т.45. №2. С.123–158.

- [43] Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. — М.: Наука, 1973.
- [44] Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — М.: Наука, 1967.
- [45] Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. — М.: Мир, 1972.
- [46] Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. — М.: Мир, 1971.
- [47] Ломовцев Ф.Е. Гиперболические дифференциальные уравнения второго порядка с разрывными операторными коэффициентами // Дифф. уравнения. 1997. Т.33. №10. С.1394–1403.
- [48] Никитин А.А. О смешанной задаче для волнового уравнения с третьим и первым краевым условиями // Дифф. уравнения. 2007. Т.43. №12. С.1692–1699.
- [49] Обэн Ж.-П. Нелинейный анализ и его экономические приложения. — М.: Мир, 1988.
- [50] Осипов Ю.С., Васильев Ф.П., Потапов М.М. Основы метода динамической регуляризации. — М.: Изд-во МГУ, 1999. — 237с.
- [51] Митидиери Э., Похожаев С.И. Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных. // Тр. Математического института им. В.А. Стеклова. 2001. Т.234.
- [52] Рамм А.Г. О поведении решения краевой задачи для гиперболического уравнения при  $t \rightarrow \infty$  // Изв. вузов. Математика. 1966. №1. С.124–138.
- [53] Смирнов В.И. Курс высшей математики. Том V. М.: ГИФМЛ, 1959.
- [54] Стейн М. И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.
- [55] Сумин М.И. Дисс. ... канд. физ.-мат. наук, Горький: Горьковский гос. ун-т, 1983.
- [56] Сумин М.И. О первой вариации в теории оптимального управления системами с распределенными параметрами // Дифференц. уравнения. 1991. Т.27. №12. С.2179–2181.
- [57] Сумин М.И. Субоптимальное управление системами с распределенными параметрами: минимизирующие последовательности, функция значений // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1997. Т.37. №1. С.23–41.
- [58] Сумин М.И. Субоптимальное управление полулинейными эллиптическими уравнениями с фазовыми ограничениями, I: принцип максимума для минимизирующих последовательностей, нормальность. // Изв. вузов. Математика. 2000. №6. С.33–44.
- [59] Сумин М.И. Субоптимальное управление полулинейными эллиптическими уравнениями с фазовыми ограничениями, II: чувствительность, типичность регулярного принципа максимума. // Изв.вузов. Математика. 2000. №8. С.52–63.
- [60] Сумин М.И. Дисс. ... докт. физ.-мат. наук. Н. Новгород: Нижегородский гос. ун-т, 2000.
- [61] Сумин М.И. Элементы математической теории оптимального управления. Часть I. Принцип максимума Л.С.Понтрягина в задаче с нефиксированным временем и функциональными ограничениями. Методическая разработка. Нижний Новгород: Изд-во ННГУ. 2001. 48с.
- [62] Сумин М.И. Первая вариация и принцип максимума Понтрягина в оптимальном управлении для уравнений в частных производных // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2009. Т.49. №6. С.998–1020.
- [63] Треногин В.А. Функциональный анализ. — М.: Наука, 1980.
- [64] Эдвардс Р. Функциональный анализ. — М.: Мир, 1969.
- [65] Якубов С.Я. Равномерно корректная задача Коши для абстрактных гиперболических уравнений // Изв. вузов. Математика. 1970. №12. С.108–113.
- [66] Гаврилов В.С., Сумин М.И. Принцип максимума Понтрягина в параметрической задаче субоптимального управления для дивергентного гиперболического уравнения с фазовым ограничением // В кн. «Международная конференция „Дифференциальные уравнения и топология“, посвященная 100-летию Л.С. Понтрягина. Тезисы докладов. Москва, 17–22 июня 2008 г.». М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова; МАКС Пресс, 2008. С.329–330.

- [67] Гаврилов В.С., Сумин М.И. Параметрическая оптимизация для гиперболического уравнения дивергентного вида с поточечным фазовым ограничением. I // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47. №4. С.550–562.
- [68] Гаврилов В.С., Сумин М.И. Параметрическая оптимизация для гиперболического уравнения дивергентного вида с поточечным фазовым ограничением. II // Дифференциальные уравнения. 2011. Т.47. №5. С.724–735.
- [69] Mordukhovich B.S., Raymond J.-P. Dirichlet boundary control of hyperbolic equations in the presence of state constraints // Appl. Math. Optim. 2004. V.49. P.145-157.
- [70] Mordukhovich B.S., Raymond J.-P. Neumann boundary control of hyperbolic equations with pointwise state constraints // SIAM J. Control Optim. V.43. No.4. 2005. P. 135-137.