Analiză matematică 2 (Calcul diferențial în $\mathbb{R}^n$)

Examen scris la grupele 315 și 316 (18.6.2016)

1. a) Studiați convergența integralei improprii

$$I(\alpha) = \int_{0+0}^{\infty} \frac{e^{-\alpha x}}{\sqrt{x}}\, dx, \qquad \alpha \in (0, \infty).$$

b) Determinați $I(2)$.

2. a) Demonstrați că dacă A este o submulțime compactă nevidă a lui $\mathbb{R}^n$, iar $f : A \to \mathbb{R}^m$ este o funcție continuă pe A, atunci mulțimea $f(A)$ este compactă.

b) Dați exemplu de funcție continuă neconstantă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ și de mulțime compactă $B \subseteq \mathbb{R}$ pentru care mulțimea

$$f^{-1}(B) := \{ x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in B \}$$

nu este compactă.

3. Determinați punctele critice ale funcției $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definite prin

$$f(x, y) = x^3 + 3xy + y^3,$$

și precizați natura acestora.

4. a) Fie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ o funcție de două ori diferențiabilă pe $\mathbb{R}^n$ și fie $a \in \mathbb{R}^n$ un punct de maxim local pentru f. Să se demonstreze că $d^2 f(a)$ este o formă pătratică negativ semidefinită.

b) Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o funcție de două ori diferențiabilă pe $\mathbb{R}^2$, cu proprietatea că

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) > 0 \quad \text{oricare ar fi } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Să se demonstreze că f nu posedă niciun punct de maxim local.