Integrale improprii - criterii de comparaţie

Exerciţiul 1: Studiaţi integrabilitatea improprie (cu ajutorul criteriului de comparaţie) pentru următoarele funcţii. (În caz de convergenţă nu se poate determinaţi imediat valoarea integralei improprii, criteriul doar ne asigură ipotezele de convergenţă).

Pentru toate exemplele de aici, vorm urma următorii paşi:

Pasul 1: Determinăm capetele problemă ale domeniului de definiţie.

Pasul 2: Calculăm

$$\lim_{x \uparrow b}(b-x)^p f(x)$$

şi setăm p astfel încât valoarea limitei sa fie $\in (0, \infty)$, pentru $f : [a, b) \to [0, \infty)$. Dacă domeniul este deschis în a, atunci calculăm

$$L = \lim_{x \downarrow a}(x-a)^p f(x)$$

iar dacă domeniul este nemărginit superios (deci $[a, \infty)$)

$$L = \lim_{x \to \infty} x^p f(x).$$

Pasul 3: În primele două cazuri dacă $p < 1$ avem integrabilia improprie convergentă, iar în al treilea, dacă $p > 1$.

Exemple: a)

$$f : [1, \infty) \to \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{1}{s\sqrt{1+x^2}}$$

Constatăm că $f(x) \geq 0$ pe întreg domeniul de definiţie.

Calculăm

$$L = \lim_{x \to \infty} x^2 f(x) = 1 < \infty$$

luând $p = 2 > 1$, deci integrala improprie a lui f pe $[1, \infty)$ este convergentă.

b)

$$f : [0, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{1}{\cos x}$$

Constatăm că$f > 0$ pe $[0, \frac{\pi}{2})$. Folosind teorema lui L'Hospital calculăm

$$L = \lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) f(x) = \lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \frac{\frac{\pi}{2} - x}{\cos x} = \lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \frac{1}{\sin x} = 1.$$

Deoarece $p = 1 \leq 1$, concluzionăm că integrala improprie a lui f pe $[0, \frac{\pi}{2})$ este divergentă.

c)

$$f : (0, \infty) \to \mathbb{R} \quad f(x) = \left(\frac{arctgx}{x}\right)^2$$

Constatăm că $f(x) > 0$ pe domeniul de definiţie. Deoarece

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^0 f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)^2 = 1,$$

rezultă că integrala improprie a lui f pe $(0, 1]$ este convergentă. Limita

$$L = \lim_{x \to \infty} x^2 f(x) = \lim_{x \to \infty} x^2 \left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)^2 = \frac{\pi^2}{4} < \infty$$

şi faptul că $p = 2 > 1$ ne conduc la concluzia că integrala improprie a lui f pe $[1, \infty)$ există şi este convergentă. Astfel, există integrala improprie a lui f pe $(0, \infty)$ şi are loc egalitatea:

$$\int_{0+}^{\infty} f(x)dx = \int_{0+}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{\infty} f(x)dx \in \mathbb{R}\,.$$

d)

$$f : (1, \infty) \to \mathbb{R} \quad f(x) = \left(\frac{\ln x}{x\sqrt{x^2 - 1}}\right)^2$$

Funcţia este pozitivă. Calculăm

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \sqrt{x - 1} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{\sqrt{x - 1} \ln x}{x\sqrt{x^2 - 1}} = 0$$

pentru $p = \frac{1}{2} < 1$ deci f este impropriu integrabil pe $(1, 2]$. Deoarece

$$L = \lim_{x \to \infty} x^{\frac{3}{2}} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x\sqrt{x^2 - 1}} \cdot \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$$

şi $p = \frac{3}{2} > 1$, rezultă că f este impropriu integrabilă pe$[2, \infty)$, şi astel este impropiu integrabil pe $(1, \infty)$.

e)

$$f : [0, 1) \to \mathbb{R} \quad f(x) = \left(\frac{\ln x}{x\sqrt{x^2 - 1}}\right)^2$$

Observăm că pentru $-1 < a < 1$ rezultă că $1 - a^2x^2 > 0$, $\forall x \in [0, 1]$. De asemenea, $f(x) > 0, \forall x \in [0, 1)$. Din

$$L = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \sqrt{1-x} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{(1-x^2)(1-a^2x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{2}(1-a^2)} < \infty$$

constatând că $p = \frac{1}{2} < 1$, rezultă că f ese impopiu integragilă pe=$[0, 1)$.