Serii de funcţii - noţiuni introductive

Fie $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$. Notăm prin

$$\mathcal{F}(D) = \{f| \quad f : D \to \mathbb{R}\}$$

mulţimea tuturor funcţiilor reale definite pe mulţimea D.

Fie şirul de funcţii $(f_n)_{n\geq 0} \subseteq \mathcal{F}(D)$. Se numeşte **serie de funcţii** orice pereche ordonată $(f_n, s_n)_{n\geq 0}$ de două şiruri de funcţii, în care cel de-al doilea şir de funcţii este format din sumele parţiale ale primului şir. (Pentru a simplifica notaţiile considerăm ca şirurile se indexează începând de la 1, dar aceeaşi teorie este valabilă şi dacpornim doar de la un $n \geq k$, unde $k \in \mathbb{N}$ fixat, > 1.) Astfel pentru orice $n \in \mathbb{N}$, şirul funcţiilor sumelor parţiale are termenul general

$$S_n : D \to \mathbb{R}, \quad S_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x), \quad \forall x \in D.$$

Notaţiile uzuale pentru seria de funcţii este

$$\sum_{n\geq 0} f_n = \sum f_n.$$

Un punct $x_0 \in D$ se numeşte **punct de convergenţă** (punctuală) dacă seria de numere reale rezulatat prin aplicarea tuturor funcţiilor unui şir de funcţii, este convergent. Adică

$$\exists \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x_0) \in \mathbb{R}.$$

Mulţimea tuturor punctelor de convergenţă formează **mulţimea de convergenţă a seriei de funcţii**, notată cu

$$\mathcal{C} = \left\{ x \in D : \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \in \mathbb{R} \right\}.$$

Atunci când, mulţimea de convergenţă asociată unui serii de funcţii este nevidă, ei i se asociază în mod natural o funcţie, numită **funcţia sumă**,

$$S : \mathcal{C} \to \mathbb{R},$$

definită prin

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x), \quad \forall x \in \mathcal{C}.$$

Notaţia pentru această **convergenţă punctuală** este:

$$\sum f_n \xrightarrow{p} S \quad sau \quad S_n \to S.$$

Folosind noţiunile corespunzătoare ale şirurilor de funcţii, se poate defini convergenţa uniformă a unei serii de funcţii, atunci când

$$S_n \rightrightarrows S.$$

Serii de puteri- proprietăţi ale sumei
Seria binomială

Ţinând cont de teoria dezvoltată mai sus, constatăm că seriile de puteri, care sunt de forma

$$\sum_{n\geq 0} a_n x^n,$$

unde $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$ este un şir de numere reale, sunt de fapt nişte serii de funcţii, având

$$\forall n \in \mathbb{N}, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = a_n x^n, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

şi

$$f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_0(x) = a_0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Asociată unei serii de puteri, putem defini o alta numită **seria derivatelor**, definită ca

$$\sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$$

şi **seria rezultată prin integrare**, definită prin

$$\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

Conform obervaţiilor făcute la serii de puteri, $0 \in \mathcal{C}$, de aceea, asociată unei serii de puteri putem defini întotdeauna funcţia sumă

$$S : \mathcal{C} \to \mathbb{R}, \quad S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad \forall x \in \mathcal{C}.$$

Observaţii:

- Funcţia sumă moşteneşte proprietăţi ale funţiilor care generează seria de funţii.
- În cazul seriilor de puteri, toate funcţiile f_n sunt de fapt polinoame, deci sunt continue, derivabile şi integrabile indefinit pe $\mathbb{R}$.
- Raza de convergenţă R a unei serii de puteri se moşteneşte atât prin derivare, cât şi prin integrare, deci seriile de puteri derivată şi cea rezultată prin integrare au aceeaşi rază de convergenţă R, a serirei iniţiale
- Reamintim teorema de structură a mulţimii de convergenţă care ne asigură că

$$(-R, R) \subseteq \mathcal{C} \subseteq [-R, R].$$

- Prin moştenire Astfel, funcţia sumă S este o funcţie continuă (şi astfel şi local integrabilă Riemann pe $(-R, R)$.

- Funcţia sumă S este indefinit derivabilă pe $(-R, R)$, iar

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad \forall x \in (-R, R)$$

şi pentru oricare $k \in \mathbb{N}$

$$S^k(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)...(n-k+1)a_{n-k+1}x^{n-k}, \quad \forall x \in (-R, R).$$

- Funcţia sumă S este local integrabilă Riemann pe $(-R, R)$ iar

$$\int_0^x S(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, \quad \forall x \in (-R, R).$$

Exemplul 1: Fie seria de puteri

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n.$$

Determinaţi-i suma şi calculaţi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Rezolvare: Aşa cum am rezolvat în exerciţiul 3 de la serii de puteri exemple (vezi pe site)

$$\mathcal{C} = (-1, 1].$$

Acum definim funcţia sumă

$$S : (-1, 1] \to \mathbb{R}, \quad S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n, \quad \forall x \in (-1, 1].$$

Deoarece ea este derivabilă,

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot n \cdot x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-x)^{n-1}.$$

Observăm că am obţinut chiar seria geometrică de raţie $-x$. Iar $x \in (-1, 1)$ implică că această raţie este în modul mai mică decât 1. Astfel, obţime convergenţă şi cunoaştem şi valoarea sumei:

$$S'(x) = \frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x}.$$

Integrând ajungem la concluzia că

$$S(x) = \ln(1+x) + c \quad cu \quad c \in \mathbb{R}.$$

Dar

$$S(0) = a_0 = 0.$$

De aceea $S(0) = \ln(1+0) + c$ implică $c = 0$. Astfel

$$S(x) = \ln(1+x), \quad \forall x \in (-1, 1).$$

Trebuie să precizăm şi valoarea lui S în 1, deoarece funcţia sumăeste definită şi în acest punct. Ne folosim de faptul că funţia sumă este continuă, de aceea valoarea ei într-un punct (din teorema de caracterizare a continuităţii cu ajutorul limitelor), este egală cu limita lui S înspre acel punct. Constatăm că din cauza domeniului, vom avea în 1 doar limită la stânga. Astfel:

$$S(1) = \lim_{x \to 1, x < 1} S(x) = \lim_{x \to 1, x < 1} \ln(1+x) = \ln 2.$$

În concluzie

$$S(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2.$$

Seria binomială

generalizare a binomului lui Newton

Seria de puteri formulată ca

$$1 + \frac{k!}{1!}x + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{k(k-1) \cdot \ldots \cdot (k-n+1)}{n!}x^n + \ldots,$$

pentru o constantă $k \in \mathbb{R}$ fixată se numeşte **seria binomială**. Ea este de fapt o serie de puteri generată de şirul de numere reale $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$ având termenul general

$$a_n = \frac{k(k-1) \cdot \ldots \cdot (k-n+1)}{n!}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad si \quad a_0 = 1.$$

Se observă că atunci când $k \in \mathbb{N}$ toţi termenii şirului (a_n), de indice $n \geq k+1$ sunt 0, pentru că în fromularea lor apare $(k-n) = 0$. în acest caz seria binomială este chiar binomul lui Newton de grad k.

În continuare vom considera că $k \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$.

Determinăm

$$\lambda = \lim_{n \to \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \to \infty} \frac{|k-n|}{n+1} = 1$$

Deci

$$R = \frac{1}{\lambda} = 1.$$

Comportamentul seriei de puteri în -1, respectiv 1 se poate studia mai uşor atunci când se cunoaşte exact valoarea lui k. Pe noi la acest moment ne interesează doar că

$$(-1, 1) \subseteq \mathcal{C}.$$

Putem defini astfel funţia sumă a seriei de puteri, care sigur ese definită pe intervalul de convergenţă $(-1, 1)$ şi este derivabilă pe acesta. Astfel:

$$S'(x) = \frac{k}{1!} + \frac{k(k-1)}{2!}x + \ldots + \frac{k(k-1)(k-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1} + \ldots, \forall x \in (-1, 1).$$

Efectuând calculele aferente, ajungem la concluzia că

$$(1+x)S'(x) = kS(x), \quad x \in (-1, 1).$$

Înmulţind ambii termeni ai egalităţii cu constanta pozitivă $(1+x)^{k-1}$ obţinem

$$(1+x)^k S'(x) - k(1+x)^{k-1}S(x) = 0$$

care implică

$$\left(\frac{S(x)}{(1+x)^k}\right)' = 0$$

Deci

$$\left(\frac{S(x)}{(1+x)^k}\right) = c.$$

Deoarece $S(0) = 1 \Longrightarrow c = 1$, aşadar

$$S(x) = (1+x)^k \quad x \in (-1,1).$$

În concluzie

$$(1+x)^k = 1 + \frac{k!}{1!}x + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{k(k-1)\cdot ... \cdot (k-n+1)}{n!}x^n + ...$$

pentru orice $x \in (-1,1)$, şi pentru $k \in \mathbb{R}$, formulă care generalizează binomul lui Newton.

Paricularizând k obţinem cunoscute dezvoltări în serii Taylor.

Caz 1: $k = -1$ Atunci:

$$(1+x) = 1 - x + x^2 + ... + (-1)^n x^n + ..., \quad x \in (-1,1).$$

Pentru $x = -x$,

$$(1-x) = 1 + x + x^2 + ... + x^n + ..., \quad x \in (-1,1).$$

Pentru $x = x^2$

$$(1+x^2) = 1 - x^2 + x^4 + ... + (-1)^n x^2 n + ..., \quad x \in (-1,1).$$

Caz 2: $k = \frac{1}{2}$ Atunci:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 + ... + \frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{(2n)!!}x^n + ..., \quad x \in (-1,1).$$

Caz 2: $k = -\frac{1}{2}$ Atunci:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 + ... + \frac{(-1)^{n-1}(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n + ..., \quad x \in (-1,1).$$

Dacă luăm $x = -x^2$, atunci

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \frac{1}{1\cdot 2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}x^4 + ... + \frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!}x^{2n} + ..., \quad x \in (-1,1).$$

Exemplul 2: Nu neapărat pt. examen, doar pentru aprofundare Fie seria de puteri
$$\sum_{n\geq 1} \frac{n}{n+1} x^n.$$
Determinaţi suma acestei serii.

Rezolvare:

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} = 1.$$
Deci raza de convergenţă este
$$R = \frac{1}{\lambda} = 1.$$
Studiem seria de numere reale generată de $x = -1$:
$$\sum_{n\geq 1} \frac{n}{n+1} (-1)^n.$$
Deoarece
$$\nexists \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} (-1)^n,$$
seria este divergentă. Astfel $-1 \notin \mathcal{C}$.

Studiem seria de numere reale generată de $x = 1$:
$$\sum_{n\geq 1} \frac{n}{n+1}.$$
Deoarece
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0,$$
seria este divergentă, astfel $1 \notin \mathcal{C}$.

În concluzie
$$\mathcal{C} = (-1, 1).$$
Pentru calculul sumei, constatăm că pentru oricare $x \in (-1, 1)$
$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) x^n = \sum_{n=1}^{\infty} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$$
$$= x \cdot \frac{1}{1-x} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}.$$

Deaoarece
$$\sum_{n=1}^{\infty} y^{n-1} = \frac{1}{1-y},$$
prin integrare
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n} = -\ln(1-y) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Este uşor de observat că $c = 0$. Dacă facem o schimbare de indexare, din n în $m + 1$ obţinem

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{m+1}}{m+1} = -\ln(1-x).$$

Noi avem nevoie de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{x} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} - x \right) = \frac{1}{x} \left(-\ln(1-x) - x \right).$$

De aceea

$$S(x) = x \cdot \frac{1}{1-x} - \frac{1}{x} \left(-\ln(1-x) - x \right) = \frac{1}{1-x} + \frac{\ln(1-x)}{x}.$$