Serii de numere reale

Curs 4

Lect. dr. Anca GRAD
Facultatea de Matematică și Informatică
Universitatea Babeș-Bolyai

Noțiuni generale

Definiția 1. **Se numește serie de numere reale orice perechea ordonată de șiruri** $((u_n),(s_n))_{n\in\mathbb{N}}$, **unde**

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **este un șir de numere reale, iar**
- $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **este șirul sumelor parțiale ale șirului** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, **cu** $s_1 = u_1$ **și**

$$s_n = u_1 + ... + u_n, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

Notație

$$((u_n),(s_n))_{n\in\mathbb{N}^*} \overset{not}{=} \sum_{n\geq 1} u_n \overset{not}{=} \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \overset{not}{=} \sum u_n$$

Terminologie:

- **nr. real** u_n $(n \in \mathbb{N})$ **s.n. termenul general al seriei** $\sum u_n$;
- **șirul** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **s.n. șirul termenilor seriei** $\sum u_n$;
- **nr. real** s_n $(n \in \mathbb{N})$ **s.n. suma parțială de rang** n **a seriei;**
- **șirul** $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **s.n. șirul sumelor parțiale al seriei** $\sum u_n$.

Noțiuni generale

Definiția 1. **Se numește serie de numere reale orice perechea ordonată de șiruri $((u_n),(s_n))_{n\in\mathbb{N}}$, unde**

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **este un șir de numere reale, iar**
- $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **este șirul sumelor parțiale ale șirului** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, **cu** $s_1 = u_1$ **și**

$$s_n = u_1 + \ldots + u_n, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

Notație

$$((u_n),(s_n))_{n\in\mathbb{N}^*} \stackrel{not}{=} \sum_{n\geq 1} u_n \stackrel{not}{=} \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \stackrel{not}{=} \sum u_n$$

Terminologie:

- **nr. real** u_n $(n\in\mathbb{N})$ **s.n. termenul general al seriei** $\sum u_n$;
- **șirul** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **s.n. șirul termenilor seriei** $\sum u_n$;
- **nr. real** s_n $(n\in\mathbb{N})$ **s.n. suma parțială de rang** n **a seriei;**
- **șirul** $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **s.n. șirul sumelor parțiale al seriei** $\sum u_n$.

Noțiuni generale

Definiția 1. **Se numește** serie de numere reale **orice perechea ordonată de șiruri** $((u_n),(s_n))_{n\in\mathbb{N}}$**, unde**

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **este un șir de numere reale, iar**
- $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **este șirul sumelor parțiale ale șirului** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$**, cu** $s_1 = u_1$ **și**

$$s_n = u_1 + ... + u_n, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

Notație

$$((u_n),(s_n))_{n\in\mathbb{N}^*} \overset{not}{=} \sum_{n\geq 1} u_n \overset{not}{=} \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \overset{not}{=} \sum u_n$$

Terminologie:

- **nr. real** u_n $(n \in \mathbb{N})$ **s.n.** termenul general **al seriei** $\sum u_n$;
- **șirul** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **s.n.** șirul termenilor **seriei** $\sum u_n$;
- **nr. real** s_n $(n \in \mathbb{N})$ **s.n.** suma parțială de rang n **a seriei;**
- **șirul** $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **s.n.** șirul sumelor parțiale **al seriei** $\sum u_n$.

Noțiuni generale

Definiția 1. Se numește serie de numere reale orice perechea ordonată de șiruri $((u_n),(s_n))_{n\in\mathbb{N}}$, unde

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **este un șir de numere reale, iar**
- $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **este șirul sumelor parțiale ale șirului $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, cu $s_1 = u_1$ și**

$$s_n = u_1 + ... + u_n, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

Notație

$$((u_n),(s_n))_{n\in\mathbb{N}^*} \stackrel{not}{=} \sum_{n\geq 1} u_n \stackrel{not}{=} \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \stackrel{not}{=} \sum u_n$$

Terminologie:

- **nr. real u_n $(n \in \mathbb{N})$ s.n. termenul general al seriei $\sum u_n$;**
- **șirul $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s.n. șirul termenilor seriei $\sum u_n$;**
- **nr. real s_n $(n \in \mathbb{N})$ s.n. suma parțială de rang n a seriei;**
- **șirul $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s.n. șirul sumelor parțiale al seriei $\sum u_n$.**

Noțiuni generale

Definiția 1. **Se numește serie de numere reale orice perechea ordonată de șiruri $((u_n),(s_n))_{n\in\mathbb{N}}$, unde**

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **este un șir de numere reale, iar**
- $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **este șirul sumelor parțiale ale șirului** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$**, cu** $s_1 = u_1$ **și**

$$s_n = u_1 + \ldots + u_n, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

Notație

$$((u_n),(s_n))_{n\in\mathbb{N}^*} \stackrel{not}{=} \sum_{n\geq 1} u_n \stackrel{not}{=} \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \stackrel{not}{=} \sum u_n$$

Terminologie:

- **nr. real** u_n $(n \in \mathbb{N})$ **s.n. termenul general al seriei** $\sum u_n$;
- **șirul** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **s.n. șirul termenilor seriei** $\sum u_n$;
- **nr. real** s_n $(n \in \mathbb{N})$ **s.n. suma parțială de rang** n **a seriei;**
- **șirul** $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **s.n. șirul sumelor parțiale al seriei** $\sum u_n$.

Noțiuni generale

Definiția 1. **Se numește serie de numere reale orice perechea ordonată de șiruri $((u_n), (s_n))_{n\in\mathbb{N}}$, unde**

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **este un șir de numere reale, iar**
- $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **este șirul sumelor parțiale ale șirului $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, cu $s_1 = u_1$ și**

$$s_n = u_1 + ... + u_n, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

Notație

$$((u_n), (s_n))_{n\in\mathbb{N}^*} \overset{not}{=} \sum_{n\geq 1} u_n \overset{not}{=} \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \overset{not}{=} \sum u_n$$

Terminologie:

- **nr. real u_n $(n \in \mathbb{N})$ s.n. termenul general al seriei $\sum u_n$;**
- **șirul $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s.n. șirul termenilor seriei $\sum u_n$;**
- **nr. real s_n $(n \in \mathbb{N})$ s.n. suma parțială de rang n a seriei;**
- **șirul $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s.n. șirul sumelor parțiale al seriei $\sum u_n$.**

Noțiuni generale

Definiția 1. **Se numește serie de numere reale orice perechea ordonată de șiruri $((u_n),(s_n))_{n\in\mathbb{N}}$, unde**

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **este un șir de numere reale, iar**
- $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **este șirul sumelor parțiale ale șirului $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, cu $s_1 = u_1$ și**

$$s_n = u_1 + ... + u_n, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

Notație

$$((u_n),(s_n))_{n\in\mathbb{N}^*} \overset{not}{=} \sum_{n\geq 1} u_n \overset{not}{=} \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \overset{not}{=} \sum u_n$$

Terminologie:

- **nr. real u_n $(n \in \mathbb{N})$ s.n. termenul general al seriei $\sum u_n$;**
- **șirul $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s.n. șirul termenilor seriei $\sum u_n$;**
- **nr. real s_n $(n \in \mathbb{N})$ s.n. suma parțială de rang n a seriei;**
- **șirul $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s.n. șirul sumelor parțiale al seriei $\sum u_n$.**

Noțiuni generale

Definiția 1. **Se numește serie de numere reale orice perechea ordonată de șiruri $((u_n),(s_n))_{n\in\mathbb{N}}$, unde**

- **$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un șir de numere reale, iar**
- **$(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este șirul sumelor parțiale ale șirului $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, cu $s_1 = u_1$ și**

$$s_n = u_1 + ... + u_n, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

Notație

$$((u_n),(s_n))_{n\in\mathbb{N}^*} \overset{not}{=} \sum_{n\geq 1} u_n \overset{not}{=} \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \overset{not}{=} \sum u_n$$

Terminologie:

- **nr. real u_n $(n \in \mathbb{N})$ s.n. termenul general al seriei $\sum u_n$;**
- **șirul $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s.n. șirul termenilor seriei $\sum u_n$;**
- **nr. real s_n $(n \in \mathbb{N})$ s.n. suma parțială de rang n a seriei;**
- **șirul $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s.n. șirul sumelor parțiale al seriei $\sum u_n$.**

Definiția 2.

a) **Dacă** $\exists \lim\limits_{n\to\infty} s_n \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ **atunci spunem că este suma seriei.**

b) **Dacă** $\exists \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ **și** $\exists \lim\limits_{n\to\infty} s_n \in \mathbb{R}$, **atunci seria** $\sum u_n$ **s.n. convergentă. Orice serie care nu este convergentă s.n. divergetă.**

Notație: Pentru suma seriei $\sum u_n$, **vom folosi notația**

$$\lim_{n\to\infty} s_n \overset{not}{=} \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Observație: O serie de numere reale $\sum u_n$ **este divergentă dacă**

$$\exists \lim_{n\to\infty} s_n \in \{\infty, -\infty\} \textbf{ sau } \nexists \lim_{n\to\infty} s_n.$$

Definiția 2.

a) **Dacă** $\exists \lim\limits_{n\to\infty} s_n \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ **atunci spunem că este suma seriei.**

b) **Dacă** $\exists \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ **și** $\exists \lim\limits_{n\to\infty} s_n \in \mathbb{R}$**, atunci seria** $\sum u_n$ **s.n. convergentă. Orice serie care nu este convergentă s.n. divergetă.**

Notație: Pentru suma seriei $\sum u_n$**, vom folosi notația**

$$\lim_{n\to\infty} s_n \overset{not}{=} \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Observație: O serie de numere reale $\sum u_n$ **este divergentă dacă**

$$\exists \lim_{n\to\infty} s_n \in \{\infty, -\infty\} \text{ **sau** } \nexists \lim_{n\to\infty} s_n.$$

Definiția 2.

a) **Dacă** $\exists \lim\limits_{n\to\infty} s_n \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ **atunci spunem că este** **suma seriei**.

b) **Dacă** $\exists \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ **și** $\exists \lim\limits_{n\to\infty} s_n \in \mathbb{R}$, **atunci seria** $\sum u_n$ **s.n.** **convergentă**. **Orice serie care nu este convergentă s.n.** **divergetă**.

Notație: **Pentru suma seriei** $\sum u_n$, **vom folosi notația**

$$\lim_{n\to\infty} s_n \overset{not}{=} \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Observație: **O serie de numere reale** $\sum u_n$ **este divergentă dacă**

$$\exists \lim_{n\to\infty} s_n \in \{\infty, -\infty\} \text{ sau } \nexists \lim_{n\to\infty} s_n.$$

Definiția 2.

a) **Dacă $\exists \lim_{n\to\infty} s_n \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ atunci spunem că este suma seriei.**

b) **Dacă $\exists \lim_{n\to\infty} s_n$ și $\exists \lim_{n\to\infty} s_n \in \mathbb{R}$, atunci seria $\sum u_n$ s.n. convergentă. Orice serie care nu este convergentă s.n. divergetă.**

Notație: **Pentru suma seriei $\sum u_n$, vom folosi notația**

$$\lim_{n\to\infty} s_n \overset{not}{=} \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Observație: **O serie de numere reale $\sum u_n$ este divergentă dacă**

$$\exists \lim_{n\to\infty} s_n \in \{\infty, -\infty\} \text{ sau } \nexists \lim_{n\to\infty} s_n.$$

Definiția 2.

a) **Dacă $\exists \lim_{n\to\infty} s_n \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ atunci spunem că este suma seriei.**

b) **Dacă $\exists \lim_{n\to\infty} s_n$ și $\exists \lim_{n\to\infty} s_n \in \mathbb{R}$, atunci seria $\sum u_n$ s.n. convergentă. Orice serie care nu este convergentă s.n. divergetă.**

Notație: **Pentru suma seriei $\sum u_n$, vom folosi notația**

$$\lim_{n\to\infty} s_n \overset{not}{=} \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Observație: **O serie de numere reale $\sum u_n$ este divergentă dacă**

$$\exists \lim_{n\to\infty} s_n \in \{\infty, -\infty\} \textbf{ sau } \nexists \lim_{n\to\infty} s_n.$$

Exemplul 1: Studiați natura seriei

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}.$$

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)}, (n \in N^*)$$

este termenul general al seriei.

$$s_n = u_1 + \ldots + u_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{n\cdot n-1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1},$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

pentru $(n \in N, n \geq 2)$ **este suma parțială de rang** n **a seriei. Deoarece**

$$\lim_{n\to\infty} s_n = 1 \in \mathbb{R},$$

seria este convergentă, iar suma ei este $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$

Exemplul 1: Studiați natura seriei

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}.$$

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)}, (n \in N^*)$$

este termenul general al seriei.

$$s_n = u_1 + \ldots + u_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{n\cdot n-1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1},$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

pentru $(n \in N, n \geq 2)$ **este suma parțială de rang** n **a seriei. Deoarece**

$$\lim_{n\to\infty} s_n = 1 \in \mathbb{R},$$

seria este convergentă, iar suma ei este $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$

Exemplul 1: Studiați natura seriei

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}.$$

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)}, (n \in N^*)$$

este termenul general al seriei.

$$s_n = u_1+...+u_n = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{n\cdot n-1} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}-\frac{1}{n-1},$$
$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

pentru $(n \in N, n \geq 2)$ **este suma parțială de rang** n **a seriei.**

Deoarece

$$\lim_{n\to\infty} s_n = 1 \in \mathbb{R},$$

seria este convergentă, iar suma ei este $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$

Exemplul 1: Studiați natura seriei

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}.$$

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)}, (n \in N^*)$$

este termenul general al seriei.

$$s_n = u_1 + \ldots + u_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{n\cdot n-1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1},$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

pentru $(n \in N, n \geq 2)$ **este suma parțială de rang** n **a seriei.**
Deoarece

$$\lim_{n\to\infty} s_n = 1 \in \mathbb{R},$$

seria este convergentă, iar suma ei este $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$

Exemplul 2.: **Se numește serie geometrică de rație q orice serie de forma**

$$\sum_{n\geq 1} q^{n-1}.$$

- $u_n = q^{n-1}$ $(n \in N^*)$ **este termenul general al seriei;**
- $s_n = u_1 + ... + u_n = q^0 + ... + q^{n-1} = \begin{cases} \frac{1-q^n}{1-q} & : \quad q \neq 1 \\ n & : \quad q = 1 \end{cases},$

  $(n \in N^*, n \geq 2)$ **este suma parțială de rang n a seriei ;**

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} \infty & : \quad q > 1 \\ 1 & : \quad q = 1 \\ 0 & : \quad |q| < 1 \\ \nexists & : \quad q \leq -1 \end{cases} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} s_n = \begin{cases} \infty & : \quad q > 1 \\ \infty & : \quad q = 1 \\ \frac{1}{1-q} & : \quad |q| < 1 \\ \nexists & : \quad q \leq -1 \end{cases}$$

În concluzie, seria geometrică este convergentă $\Longleftrightarrow |q| < 1$ **iar suma ei este**

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = \frac{1}{1-q}.$$

Exemplul 2.: **Se numește serie geometrică de rație q orice serie de forma**

$$\sum_{n\geq 1} q^{n-1}.$$

- $u_n = q^{n-1}$ $(n \in N^*)$ **este termenul general al seriei;**
- $s_n = u_1 + ... + u_n = q^0 + ... + q^{n-1} = \begin{cases} \frac{1-q^n}{1-q} & : \quad q \neq 1 \\ n & : \quad q = 1 \end{cases}$,

  $(n \in N^*, n \geq 2)$ **este suma parțială de rang n a seriei ;**

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} \infty & : \quad q > 1 \\ 1 & : \quad q = 1 \\ 0 & : \quad |q| < 1 \\ \nexists & : \quad q \leq -1 \end{cases} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} s_n = \begin{cases} \infty & : \quad q > 1 \\ \infty & : \quad q = 1 \\ \frac{1}{1-q} & : \quad |q| < 1 \\ \nexists & : \quad q \leq -1 \end{cases}$$

În concluzie, seria geometrică este convergentă $\Longleftrightarrow |q| < 1$ **iar suma ei este**

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = \frac{1}{1-q}.$$

Exemplul 2.: Se numește serie geometrică de rație q orice serie de forma

$$\sum_{n\geq 1} q^{n-1}.$$

- $u_n = q^{n-1}$ $(n \in N^*)$ **este termenul general al seriei;**
- $s_n = u_1 + ... + u_n = q^0 + ... + q^{n-1} = \begin{cases} \frac{1-q^n}{1-q} & : \quad q \neq 1 \\ n & : \quad q = 1 \end{cases}$,

  $(n \in N^*, n \geq 2)$ **este suma parțială de rang n a seriei ;**

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} \infty & : \quad q > 1 \\ 1 & : \quad q = 1 \\ 0 & : \quad |q| < 1 \\ \nexists & : \quad q \leq -1 \end{cases} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} s_n = \begin{cases} \infty & : \quad q > 1 \\ \infty & : \quad q = 1 \\ \frac{1}{1-q} & : \quad |q| < 1 \\ \nexists & : \quad q \leq -1 \end{cases}$$

În concluzie, seria geometrică este convergentă $\Longleftrightarrow |q| < 1$ iar suma ei este

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = \frac{1}{1-q}.$$

Exemplul 2.: Se numește serie geometrică de rație q orice serie de forma

$$\sum_{n\geq 1} q^{n-1}.$$

- $u_n = q^{n-1}$ $(n \in N^*)$ **este termenul general al seriei;**
- $s_n = u_1 + ... + u_n = q^0 + ... + q^{n-1} = \begin{cases} \frac{1-q^n}{1-q} & : \quad q \neq 1 \\ n & : \quad q = 1 \end{cases}$**,**

  $(n \in N^*, n \geq 2)$ **este suma parțială de rang n a seriei ;**

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} \infty & : \quad q > 1 \\ 1 & : \quad q = 1 \\ 0 & : \quad |q| < 1 \\ \nexists & : \quad q \leq -1 \end{cases} \implies \lim_{n\to\infty} s_n = \begin{cases} \infty & : \quad q > 1 \\ \infty & : \quad q = 1 \\ \frac{1}{1-q} & : \quad |q| < 1 \\ \nexists & : \quad q \leq -1 \end{cases}$$

În concluzie, seria geometrică este convergentă $\iff |q| < 1$ iar suma ei este

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = \frac{1}{1-q}.$$

Exemplul 2.: Se numește serie geometrică de rație q orice serie de forma

$$\sum_{n\geq 1} q^{n-1}.$$

- $u_n = q^{n-1}$ $(n \in N^*)$ **este termenul general al seriei;**
- $s_n = u_1 + ... + u_n = q^0 + ... + q^{n-1} = \begin{cases} \frac{1-q^n}{1-q} & : \quad q \neq 1 \\ n & : \quad q = 1 \end{cases}$, $(n \in N^*, n \geq 2)$ **este suma parțială de rang n a seriei ;**

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} \infty & : \quad q > 1 \\ 1 & : \quad q = 1 \\ 0 & : \quad |q| < 1 \\ \nexists & : \quad q \leq -1 \end{cases} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} s_n = \begin{cases} \infty & : \quad q > 1 \\ \infty & : \quad q = 1 \\ \frac{1}{1-q} & : \quad |q| < 1 \\ \nexists & : \quad q \leq -1 \end{cases}$$

În concluzie, seria geometrică este convergentă $\Longleftrightarrow |q| < 1$ **iar suma ei este**

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = \frac{1}{1-q}.$$

Observație: Studierea unei serii comportă două probleme:

- natura seriei (convergentă sau divergentă) stabilită prin diverse criterii;
- suma seriei (doar pentru câteva serii particulare).

Teorema 1.[criteriul general de convergență (al lui Cauchy)]

Seria $\sum_{n\geq 1}$ *este convergentă dacă și numai dacă*

$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ *a.î.* $\forall\, n, p \in \mathbb{N}^*,\ n \geq n_\varepsilon$ *are loc* $|u_{n+1} + \ldots + u_{n+p}| < \varepsilon.$

Demonstrație.

$$\sum u_n \text{ convergentă} \iff (s_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ șir convergent } \iff (s_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ șir fundamental}$$

$$\iff \forall\, \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^* \text{ a.î. } \forall\, n, p \in \mathbb{N}^*,\ n \geq n_\varepsilon \text{ are loc } |s_{n+p} - s_n| < \varepsilon.$$

Folosing definiția șirului sumelor parțiale concluzionăm că

$$s_{n+p} - s_n = u_1 + \ldots + u_{n+p} - (u_1 + \ldots + u_n) = u_{n+1} + \ldots + u_{n+p}\ \forall\, n, p \in \mathbb{N}^*.$$

Observație: Studierea unei serii comportă două probleme:

- natura seriei (convergentă sau divergentă) stabilită prin diverse criterii;
- suma seriei (doar pentru câteva serii particulare).

Teorema 1.[criteriul general de convergență (al lui Cauchy)]

Seria $\sum_{n\geq 1}$ *este convergentă dacă și numai dacă*

$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ *a.î.* $\forall\, n, p \in \mathbb{N}^*,\ n \geq n_\varepsilon$ *are loc* $|u_{n+1} + ... + u_{n+p}| < \varepsilon$.

Demonstrație.

$\sum u_n$ convergentă $\Longleftrightarrow (s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ șir convergent $\Longleftrightarrow (s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ șir fundamental

$\Longleftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ a.î. $\forall\, n, p \in \mathbb{N}^*,\ n \geq n_\varepsilon$ are loc $|s_{n+p} - s_n| < \varepsilon$.

Folosing definiția șirului sumelor parțiale concluzionăm că

$$s_{n+p} - s_n = u_1 + ... + u_{n+p} - (u_1 + ... + u_n) = u_{n+1} + ... + u_{n+p}\ \forall\, n, p \in \mathbb{N}^*.$$

Observație: Studierea unei serii comportă două probleme:

- natura seriei (convergentă sau divergentă) stabilită prin diverse criterii;
- suma seriei (doar pentru câteva serii particulare).

Teorema 1.[criteriul general de convergență (al lui Cauchy)]

Seria $\sum_{n\geq 1}$ *este convergentă dacă și numai dacă*

$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ *a.î.* $\forall\, n, p \in \mathbb{N}^*,\ n \geq n_\varepsilon$ *are loc* $|u_{n+1} + \ldots + u_{n+p}| < \varepsilon$.

Demonstrație.

$\sum u_n$ convergentă $\Longleftrightarrow (s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ șir convergent $\Longleftrightarrow (s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ șir fundamental

$\Longleftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ a.î. $\forall\, n, p \in \mathbb{N}^*,\ n \geq n_\varepsilon$ are loc $|s_{n+p} - s_n| < \varepsilon$.

Folosing definiția șirului sumelor parțiale concluzionăm că

$$s_{n+p} - s_n = u_1 + \ldots + u_{n+p} - (u_1 + \ldots + u_n) = u_{n+1} + \ldots + u_{n+p}\ \forall\, n, p \in \mathbb{N}^*.$$

Observație: Studierea unei serii comportă două probleme:

- natura seriei (convergentă sau divergentă) stabilită prin diverse criterii;
- suma seriei (doar pentru câteva serii particulare).

Teorema 1.[criteriul general de convergență (al lui Cauchy)]

Seria $\sum_{n\geq 1}$ este convergentă dacă și numai dacă

$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ *a.î.* $\forall\, n, p \in \mathbb{N}^*,\ n \geq n_\varepsilon$ *are loc* $|u_{n+1} + \ldots + u_{n+p}| < \varepsilon$.

Demonstrație.

$\sum u_n$ convergentă $\Longleftrightarrow (s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ șir convergent $\Longleftrightarrow (s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ șir fundamental

$\Longleftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ a.î. $\forall\, n, p \in \mathbb{N}^*,\ n \geq n_\varepsilon$ are loc $|s_{n+p} - s_n| < \varepsilon$.

Folosing definiția șirului sumelor parțiale concluzionăm că

$$s_{n+p} - s_n = u_1 + \ldots + u_{n+p} - (u_1 + \ldots + u_n) = u_{n+1} + \ldots + u_{n+p}\ \forall\, n, p \in \mathbb{N}^*.$$

Exemplul 3.: Seria

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n},$$

numită **seria armonică** este divergentă și are suma $+\infty$.

Demonstrație. Presupunem că seria este convergentă, și aplicăm Teorema 1, deci

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*\ \text{ a.î. }\ \forall\, n, p \in \mathbb{N}^*,\ n \geq n_\varepsilon \text{ are loc } \left|\frac{1}{n+1} + \ldots \frac{1}{n+p}\right| < \varepsilon.$$

Particularizând

$$\varepsilon = \frac{1}{2},\ n = n_{\frac{1}{2}},\ p = n_{\frac{1}{2}}$$

obținem contradicția.

Exemplul 3.: Seria

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n},$$

numită **seria armonică** este divergentă și are suma $+\infty$.

Demonstrație. Presupunem că seria este convergentă, și aplicăm Teorema 1, deci

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^* \ \text{ a.î. } \ \forall\, n, p \in \mathbb{N}^*,\ n \geq n_\varepsilon \text{ are loc } |\frac{1}{n+1}+\ldots\frac{1}{n+p}| < \varepsilon.$$

Particularizând

$$\varepsilon = \frac{1}{2},\ n = n_{\frac{1}{2}},\ p = n_{\frac{1}{2}}$$

obținem contradicția.