Probleme de geometrie afină

Martie 2018

Problema 1. Fie un spaţiu vectorial de dimensiune n. Dacă o varietate liniară nevidă a sa, notată A, nu are nici un punct comun cu hiperplanul H, atunci A este paralel cu H.

Problema 2. Dacă dreapta L intersectează hiperplanul H într-un punct, atunci o paralelă L' la L intersectează H într-un punct.

Problema 3. În fiecare dintre următoarele cazuri studiaţi poziţiile relative ale planelor afine din spaţiile indicate, date prin intermediul ecuaţiilor lor.

a) Spaţiul C^5, planele:

$$\pi_4 : -2x^1 + 2x^2 - 4x^3 + 2x^5 = 2;$$

$$\pi_3 : \begin{cases} -3x^1 - x^3 - x^4 = 2, \\ -3x^1 - 6x^2 + 9x^3 - 3x^4 - 6x^5 = 0. \end{cases}$$

b) Spaţiul C^5; planele:

$$\pi_3 : \begin{cases} x^1 - 2x^2 + x^3 - 5x^4 - 3x^5 + 3 = 3, \\ 3x^1 + 4x^2 - 2x^3 - x^4 - x^5 - 15 = 0; \end{cases}$$

$$\pi_2 : \begin{cases} x^1 = -t + u + 2, \\ x^2 = 3t - u + 2, \\ x^3 = u - 1, \\ x^4 = -t + 2u + 3, \\ x^5 = -3u - 4. \end{cases}$$

c) Spaţiul C^4; planele:

$$\pi_2 : \begin{cases} x^1 - 3x^2 - 2x^3 = -3, \\ 3x^2 + 2x^3 - x^4 = 4; \end{cases} \qquad \theta_2 : \begin{cases} x^1 + x^2 - 3x^3 + x^4 = 0, \\ 2x^1 + x^2 - 3x^3 = 1. \end{cases}$$

d) Spaţiul C^5; planele:

$$\pi_2 : \begin{cases} x^1 = 1 + 2u - 3v, \\ x^2 = 1 + u - v, \\ x^3 = 2 - u + 2v, \\ x^4 = -1 + u + 2v, \\ x^5 = 3u - v; \end{cases} \qquad \theta_2 : \begin{cases} x^1 = 2 - u + v, \\ x^2 = 4 + 2u - v, \\ x^3 = 3u + v, \\ x^4 = 2 + u + 2v, \\ x^5 = 1 + u + v. \end{cases}$$

e) Spaţiul C^4; planele:

$$\pi_1:\begin{cases}x^1=-2t-1,\\x^2=t-2,\\x^3=-t+1,\\x^4=-t-3;\end{cases}\qquad \pi_2:\begin{cases}x^1+2x^2+3x^3-3x^4+8=0,\\3x^1+4x^2-x^3-x^4+6=0.\end{cases}$$

f) Spaţiul C^4; planele:

$$\pi_1:\begin{cases}x^1-2x^2+x^3+4x^4=0,\\3x^1+x^2-2x^4-2=0,\\2x^3+x^4=3;\end{cases}\qquad \pi_2:\begin{cases}2x^1+3x^2-x^3-6x^4=-2,\\3x^1+x^2-4x^3-4x^4=-8.\end{cases}$$

g) Spaţiul C^4; planele:

$$\pi_3:x^1+x^2+x^3+x^4=0;\quad \pi_1:\begin{cases}x^1+x^2+x^3=0,\\x^3-x^4=0,\\x^1-x^3=1.\end{cases}$$

h) Spaţiul C^4; planele:

$$\pi_3:x^1+x^2+x^3+x^4=0;\quad \pi_2:\begin{cases}x^1+x^2=5,\\x^2-x^4=0.\end{cases}$$

i) Spaţiul C^5; planele:

$$\pi_3:\begin{cases}x^1=1+t^1-t^2,\\x^2=t^2+t^3,\\x^3=3-t^1-t^2-t^3,\\x^4=5+t^1+2t^2+t^3,\\x^5=1+t^3;\end{cases}\qquad \pi_4:x^1-x^2-x^3-x^4+5x^5=0.$$

Problema 4. În spaţiul C^5 stabiliţi poziţia relativă a dreptei l_1, definită de punctul $M(0,4,0,1)$ şi vectorul $\vec{p}(1,0,0,3)$, şi a planului π_2, definit de punctul $N(1,1,2,2)$ şi de vectorii $\vec{q}_1(0,0,1,2)$ şi $\vec{q}_2(1,0,-1,2)$.

Problema 5. În spaţiul C^4 se dau dreptele AB şi CD. Stabiliţi poziţia lor relativă în fiecare dintre următoarele cazuri:

a) $A(2,1,-1,2), B(-1,0,3,1), C(6,2,8,-2), D(3,1,12,-3)$;

b) $A(4,0,-1,2), B(0,3,2,1), C(1,-1,-1,0), D(2,-1,-4,-5)$.

Problema 6. Demonstrati că dacă $k+r \geq n$, atunci planele π_k şi π_r din spaţiul afin C^n nu pot fi strâmbe.

Indicaţii: Varietatea liniară aflată la intersecţia a două varietăţii afine date de două sisteme liniare de ecuaţii S_1 şi S_2 este dată de sistemul de ecuaţii alcătuit din ecuaţiile S_1 şi S_2. Dacă rangul matricii sistemului intersecţiei este r, atunci dimensiunea intersecţiei este $n-r$, unde n este dimensiunea spaţiului vectorial iniţial (4 sau 5 în problemele de mai sus).

La problemele în care este cunoscută forma parametrică a varietăţii liniare se determină soluţia sistemului, apoi subspaţiul director şi se stabileşte dacă au elemente comune. Adică determinăm $D(A) \bigcap D(B)$. Dacă $D(A) \subset D(B)$ sau invers, cele două varietăţi afine sunt paralele.