**Analiză pe $\mathbb{R}$** Lect. dr. ANCA GRAD
**Tema nr. 3** **2018**

# Şiruri de numere reale

**Exerciţiul 1:** Studiaţi monotonia, mărginirea şi convergenţa şirului de numere reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, cu termenul general:

$$a)\quad x_n = \frac{2^n + 3^n}{5^n}, \quad b)\quad x_n = \frac{(-1)^n}{n}, \quad c)\quad x_n = \frac{2^n}{n!}, \quad d)\quad x_n = \frac{n}{n^2+1}.$$

**Exerciţiul 2:** Folosing teorema de caracterizare cu $\varepsilon$ demonstraţi că

$$a)\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} = 0 \qquad b)\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{-2n+4} = -\infty.$$

**Exerciţiul 3:** Calculaţi limitele următoareleor şirui de numere reale având următorii termeni generali:

$$a)\quad \frac{5^n+1}{7^n+1}, \qquad b)\quad \frac{4^n + (-2)^n}{4^{n-1}+2}, \qquad c)\quad \left(\sin\frac{\pi}{10}\right)^n, \qquad d)\sqrt{9n^2+2n+1} - 3n,$$

$$e)\quad \left(5 + \frac{1-2n^3}{3n^4+2}\right)^2, \qquad f)\quad \sqrt[3]{n^3+n+3} - \sqrt[3]{n^3+1}, \qquad g)\quad \left(\frac{n^3+5n+1}{n^2-1}\right)^{\frac{1-5n^4}{6n^4+1}},$$

$$h)\quad \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\dots\left(1-\frac{1}{n}\right).$$

**Exerciţiul 4:** Fie $t \in \mathbb{R}$.

a) Demonstraţi că există un şir strict crescător de numere raţionale care are ca limită $t$.

b) Demonstraţi că există un şir strict descrescător de numere raţionale care are ca limită $t$.

**Exercițiul 5:** Fie $a > 0$ şi $x_0 \in \mathbb{R}$ fie a.î. $0 < x_0 < \frac{1}{a}$. Consideraţi şirul de numere reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definit recursiv prin:

$$x_{n+1} = 2x_n - ax_n^2, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Studiaţi convergenţa şirului urmând etapele:

a) Demonstraţi prin inducţie că $x_n < \frac{1}{a}, \forall n \in \mathbb{N}$.

b) Demonstraţi prin inducţie că $0 < x_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

c) Folosind a) şi b) demonstraţi că $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este strict crescător.

d) Calculaţi valoarea limitei.