

Integrale

Observație:

Multe din exemplele de mai jos se rezolvă folosind substituțiile lui Euler.

Exercițiul 1

Să se calculeze:

a) $\int \frac{2x-1}{x^2-3x+2} dx, \quad x \in]2, +\infty[;$

b) $\int \frac{4}{(x-1)(x+1)^2} dx, \quad x > 1;$

c) $\int \frac{1}{x^3-x^4} dx, \quad x > 1;$

d) $\int \frac{2x+5}{x^2+5x+10}, \quad x \in \mathbb{R};$

e) $\int \frac{1}{x^2+x+1}, \quad x \in \mathbb{R}.$

Exercițiul 2:

Să se calculeze:

a) $I = \int \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} dx, \quad x \in]0, +\infty[;$

b) $I = \int \frac{1}{x + \sqrt{x-1}} dx, \quad x \in]1, +\infty[.$

Exercițiul 3:

Să se calculeze:

a) $I = \int \frac{1}{1 + \sqrt{x^2+2x-2}} dx, \quad x \in]\sqrt{3}-1, +\infty[;$

b) $I = \int \frac{1}{(x+1)\sqrt{-4x^2-x+1}} dx, \quad x \in]\frac{-1-\sqrt{17}}{8}, \frac{\sqrt{17}-1}{8}[.$

Exercițiul 4

Să se calculeze:

a) $\int_1^2 \frac{1}{x^3+x^2+x+1} dx;$ b) $\int_1^3 \frac{1}{x(x^2+9)} dx;$

c) $\int_{-1}^1 \frac{x^2+1}{x^4+1} dx;$ d) $\int_{-1}^1 \frac{x}{x^2+x+1} dx.$

Exercițiul 5:

Să se calculeze:

$$\begin{array}{ll} a) \int_{-3}^{-2} \frac{x}{(x+1)(x^2+3)} dx; & b) \int_0^1 \frac{x+1}{(x^2+4x+5)^2} dx; \\ c) \int_1^2 \frac{1}{x^3+x} dx; & d) \int_0^2 \frac{x^3+2x^2+x+4}{(x+1)^2} dx. e) \int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x^2+4)} dx; \\ f) \int_2^3 \frac{2x^3+x^2+2x-1}{x^4-1} dx; & g) \int_0^1 \frac{x^3+2}{(x+1)^3} dx. \end{array}$$

Exercițiul 6:

Să se calculeze:

$$\begin{array}{ll} a) \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx; & b) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}} dx; \\ c) \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{4x^2+x+1}} dx; & d) \int_2^3 \frac{x^2}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}} dx. \end{array}$$

Exercițiul 7:

Să se calculeze:

$$\begin{array}{ll} a) \int_2^3 \sqrt{x^2+2x-7} dx; & b) \int_0^1 \sqrt{6+4x-2x^2} dx; \\ c) \int_0^{3/4} \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+1}} dx; & d) \int_2^3 \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx. \end{array}$$

Exercițiul 8:

Să se arate că:

$$\begin{array}{l} a) 2\sqrt{2} < \int_{-1}^1 \sqrt{x^2+4x+5} dx < 2\sqrt{10}; \\ b) e^2(e-1) < \int_e^{e^2} \frac{x}{\ln x} dx < \frac{e^3}{2}(e-1). \end{array}$$