Tiberiu Trif

Analiză matematică 2

Calcul diferențial și integral în $\mathbb{R}^n$

Cuprins

Notații

- $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ – mulțimile numerice clasice: a numerelor naturale (fără 0), a numerelor raționale și respectiv a numerelor reale;
- $\overline{\mathbb{R}}$ – mulțimea extinsă a numerelor reale;
- $\mathbb{R}^n$ – spațiul euclidian n-dimensional;
- 0_n – originea lui $\mathbb{R}^n$;
- $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – elementele bazei canonice din $\mathbb{R}^n$;
- $\langle x, y \rangle$ – produsul scalar al vectorilor $x, y \in \mathbb{R}^n$;
- $\|x\|$ – norma vectorului $x \in \mathbb{R}^n$;
- $d(x, y)$ – distanța euclidiană dintre $x, y \in \mathbb{R}^n$;
- $B(a, r)$ – bila deschisă de centru a și rază r;
- $\bar{B}(a, r)$ – bila închisă de centru a și rază r;
- $\mathcal{V}(x)$ – familia tuturor vecinătăților punctului $x \in \mathbb{R}^n$;
- $\operatorname{int} A$ – mulțimea tuturor punctelor interioare ale lui A;
- $\operatorname{ext} A$ – mulțimea tuturor punctelor exterioare lui A;
- $\operatorname{cl} A$ – mulțimea tuturor punctelor aderente lui A;
- $\operatorname{bd} A$ – mulțimea tuturor punctelor frontieră pentru A;
- A' – mulțimea tuturor punctelor de acumulare pentru A;
- $[\varphi]$ – matricea aplicației liniare φ;
- $\|\varphi\|$ – norma aplicației liniare φ;

- $f'(x)$ – derivata funcției de variabilă reală f în punctul x;
- $f'(x; v)$ – derivata funcției f în punctul x după direcția v;
- $df(x)$ – diferențiala funcției f în punctul x;
- $J(f)(x)$ – matricea Jacobi a funcției f în punctul x;
- $\nabla f(x)$ – gradientul funcției f în punctul x;
- $f'_{x_j}(x) = \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x)$ – derivata parțială în raport cu variabila x_j a funcției f în punctul x;
- $f''_{x_i x_j}(x) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x)$ – derivata parțială de ordinul doi în raport cu variabilele (x_i, x_j) a funcției f în punctul x;
- $d^2 f(x)$ – diferențiala a doua a funcției f în punctul x;
- $H(f)(x)$ – matricea hessiană a funcției f în punctul x;
- $f^{(k)}_{x_{i_1} \cdots x_{i_k}}(x) = \dfrac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \cdots \partial x_{i_1}}(x)$ – derivata parțială de ordinul k în raport cu variabilele $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$ a funcției f în punctul x;
- $d^k f(x)$ – diferențiala de ordinul k a funcției f în punctul x.
- $\operatorname{Part}(T)$ – familia tuturor partițiilor lui T;
- $\|\pi\|$ – norma partiției π;
- $P(\pi)$ – familia tuturor sistemelor de puncte intermediare asociate partiției π;
- $\sigma(f, \pi, \xi)$ – suma Riemann asociată funcției f, partiției π și sistemului de puncte intermediare ξ;
- $R(T)$ – mulțimea tuturor funcțiilor $f : T \to \mathbb{R}$, care sunt integrabile Riemann pe T;
- $\int_T f$, $\int_T f(x)dx$, $\int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_n$ – integrala Riemann a funcției f pe intervalul compact T;
- $s(f, \pi)$ – suma Darboux inferioară asociată funcției f și partiției π;

- $S(f,\pi)$ – suma Darboux superioară asociată funcției f și partiției π;
- $\underline{\int}_T f dx$ – integrala Darboux inferioară a funcției f pe T;
- $\overline{\int}_T f dx$ – integrala Darboux superioară a funcției f pe T;
- $\int_A f$, $\int_A f(x)dx$, $\int \cdots \int_A f(x_1,\ldots,x_n)\, dx_1 \cdots dx_n$ – integrala Riemann a funcției f pe mulțimea mărginită A;
- $V(f,\Delta)$ – variația funcției f relativă la diviziunea Δ;
- $\bigvee_a^b(f)$ – variația totală a funcției f;
- $BV([a,b],\mathbb{R}^n)$ – mulțimea tuturor funcțiilor definite pe $[a,b]$ cu valori în $\mathbb{R}^n$, care sunt cu variație mărginită;
- $BV[a,b]$ – mulțimea tuturor funcțiilor definite pe $[a,b]$ cu valori în $\mathbb{R}$, care sunt cu variație mărginită;
- $I(\gamma)$ – imaginea drumului γ;
- $\ell(\gamma)$ – lungimea drumului γ;
- $I(\Gamma)$ – imaginea curbei Γ;
- $\ell(\Gamma)$ – lungimea curbei Γ;
- $\int_\gamma f ds$, $\int_\gamma f(x)ds$, $\int_\gamma f(x_1,\ldots,x_n)ds$ – integrala în raport cu lungimea a funcției f de-a lungul drumului γ;
- $\int_\gamma f$, $\int_\gamma f_1 dx_1 + \cdots + f_n dx_n$ – integrala formei diferențiale f pe drumul γ;
- ∂D – frontiera orientată pozitiv a mulțimii D;
- $\oint_{\partial D} f$ – integrala formei diferențiale f pe frontiera orientată pozitiv a lui D;
- $I(\sigma)$ – imaginea pânzei σ;
- $\partial\sigma$ – bordul pânzei σ;

- $I(\Sigma)$ – imaginea suprafeței Σ;
- $\int_\sigma f dS$, $\int_\sigma f(x,y,z)dS$ – integrala în raport cu aria a funcției f pe pânza de suprafață σ;
- $\int_\sigma f$, $\int_\sigma f_1\, dy \wedge dz + f_2\, dz \wedge dx + f_3\, dx \wedge dy$ – integrala formei diferențiale f pe pânza de suprafață σ;
- $\int_\lambda f$ – integrala formei diferențiale f pe lanțul λ.

Capitolul 1

Topologie în $\mathbb{R}^n$

1.1 Spaţiul euclidian $\mathbb{R}^n$

1.1.1 Definiţie (spaţiul liniar $\mathbb{R}^n$)**.** Fiind dat $n \in \mathbb{N}$, considerăm mulţimea

$$\mathbb{R}^n := \{ (x_1, \ldots, x_n) \mid \forall\, j \in \{1, \ldots, n\} \ : \ x_j \in \mathbb{R} \},$$

precum şi operaţiile

$$\begin{aligned} + : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \qquad & \forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto x + y \in \mathbb{R}^n \\ \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \qquad & \forall\, (\alpha, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mapsto \alpha \cdot x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

numite *adunare* şi respectiv *înmulţire cu scalari*, definite în felul următor: dacă $x := (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y := (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ şi $\alpha \in \mathbb{R}$, atunci punem

$$x + y := (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \tag{1}$$

şi respectiv

$$\alpha \cdot x := (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n). \tag{2}$$

Se verifică imediat că aceste operaţii se bucură de următoarele proprietăţi:

1° $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}^n \ : \ x + (y + z) = (x + y) + z$;

2° $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n \ : \ x + y = y + x$;

3° Există un element $0_n \in \mathbb{R}^n$ (numit *originea lui* $\mathbb{R}^n$) aşa încât $x + 0_n = x$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}^n$;

4° Pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$ există un element $-x \in \mathbb{R}^n$ (numit *simetricul* sau *opusul lui* x) așa încât $x + (-x) = 0_n$;

5° $\forall\, x \in \mathbb{R}^n \;:\; 1 \cdot x = x$;

6° $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\; \forall\, x \in \mathbb{R}^n \;:\; \alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x$;

7° $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\; \forall\, x \in \mathbb{R}^n \;:\; (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$;

8° $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}\; \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n \;:\; \alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$.

Originea lui $\mathbb{R}^n$ este unică și $0_n = (0, \ldots, 0)$. De asemenea, simetricul oricărui element $x \in \mathbb{R}^n$ este unic. Dacă $x = (x_1, \ldots, x_n)$, atunci $-x = (-x_1, \ldots, -x_n)$.

O mulțime nevidă X, înzestrată cu două operaţii

$$\begin{array}{rl} + : X \times X \to X & \qquad \forall\, (x, y) \in X \times X \mapsto x + y \in X \\ \cdot : \mathbb{R} \times X \to X & \qquad \forall\, (\alpha, x) \in \mathbb{R} \times X \mapsto \alpha \cdot x \in X, \end{array}$$

se numește *spațiu liniar peste corpul* $\mathbb{R}$ al numerelor reale (sau *spațiu liniar real*) dacă sunt îndeplinite următoarele condiții:

(SL1) $\forall\, x, y, z \in X \;:\; x + (y + z) = (x + y) + z$;

(SL2) $\forall\, x, y \in X \;:\; x + y = y + x$;

(SL3) Există un element $0_X \in X$ (numit *originea lui* X) astfel încât $x + 0_X = x$ oricare ar fi $x \in X$;

(SL4) Pentru orice $x \in X$ există un element $-x \in X$ (numit *simetricul* sau *opusul lui* x) așa încât $x + (-x) = 0_X$;

(SL5) $\forall\, x \in X \;:\; 1 \cdot x = x$;

(SL6) $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\; \forall\, x \in X \;:\; \alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x$;

(SL7) $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\; \forall\, x \in X \;:\; (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$;

(SL8) $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}\; \forall\, x, y \in X \;:\; \alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$.

Din proprietățile 1° – 8° rezultă că mulțimea $\mathbb{R}^n$, înzestrată cu adunarea și înmulţirea cu scalari definite prin (1) și (2), este un spațiu liniar real.

In continuare, elementele lui $\mathbb{R}^n$ vor fi numite *vectori* sau *puncte*, iar elementele lui $\mathbb{R}$ vor fi numite *scalari*. Produsul $\alpha \cdot x$, dintre scalarul $\alpha \in \mathbb{R}$ și vectorul $x \in \mathbb{R}^n$, se va nota simplu cu αx (adică punctul va fi omis).

1.1.2 Definiție (baza canonică a lui $\mathbb{R}^n$)**.** Considerăm vectorii

$$\begin{aligned} e_1 &:= (1,0,0,\dots,0) \in \mathbb{R}^n, \\ e_2 &:= (0,1,0,\dots,0) \in \mathbb{R}^n, \\ &\vdots \\ e_n &:= (0,0,0,\dots,1) \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Mulțimea $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ este o bază algebrică a spațiului liniar real $\mathbb{R}^n$, numită *baza canonică* sau *baza standard* a lui $\mathbb{R}^n$. Orice vector $x = (x_1, \dots, x_n)$ din $\mathbb{R}^n$ se reprezintă cu ajutorul vectorilor din baza canonică sub forma

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n.$$

1.1.3 Definiție (produsul scalar în $\mathbb{R}^n$)**.** Fie $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ doi vectori din $\mathbb{R}^n$. *Produsul scalar* dintre x și y este numărul real definit prin

$$\langle x, y \rangle := x_1 y_1 + \dots + x_n y_n. \tag{3}$$

Se constată imediat că produsul scalar are următoarele proprietăți:

1° $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}^n \ : \ \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$;

2° $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n \ : \ \langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$;

3° $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n \ : \ \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$;

4° $\forall\, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\} \ : \ \langle x, x \rangle > 0$.

Din (3) rezultă că $\langle x, 0_n \rangle = \langle 0_n, x \rangle = 0$ și că $\langle x, x \rangle \geq 0$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}^n$.

Fiind dat un spațiu liniar real X, o funcție $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ se numește *produs scalar* pe X, dacă îndeplinește următoarele condiții:

(PS1) $\forall\, x, y, z \in X \ : \ \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$;

(PS2) $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}\ \forall\, x, y \in X \ : \ \langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$;

(PS3) $\forall\, x, y \in X \ : \ \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$;

(PS4) $\forall\, x \in X \setminus \{0_X\} \ : \ \langle x, x \rangle > 0$.

Perechea ordonată $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ se numește *spațiu cu produs scalar* sau *spațiu prehilbertian* real.

Din proprietățile 1° – 4° rezultă că $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, unde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ este produsul scalar definit prin egalitatea (3), este un spațiu prehilbertian real, numit *spațiul euclidian* $\mathbb{R}^n$.

1.1.4 Teoremă (inegalitatea lui Cauchy–Buniakovski–Schwarz)**.** *Pentru orice vectori* $x, y \in \mathbb{R}^n$ *are loc inegalitatea*

$$|\langle x, y\rangle| \le \sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle}.$$

Demonstrație. Se va face la seminar. □

1.1.5 Definiție (norma euclidiană în $\mathbb{R}^n$)**.** Funcția $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$, definită prin

$$(4) \quad \|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \quad \text{oricare ar fi } x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

se numește *norma euclidiană* în $\mathbb{R}^n$. Este uşor de verificat că norma euclidiană are următoarele proprietăți:

1° $\|x\| = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0_n$;

2° $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n \ :\ \|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$;

3° $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n \ :\ \|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$.

Inegalitatea de la 3° se numește *inegalitatea triunghiului* și ea este o consecință a inegalităţii lui Cauchy–Buniakovski–Schwarz.

Fiind dat un spațiu liniar real X, o funcție $\|\cdot\| : X \to [0, \infty)$ se numește *normă* pe X, dacă îndeplinește următoarele condiții:

(N1) $\|x\| = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0_X$;

(N2) $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}\ \forall\, x \in X \ :\ \|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$;

(N3) $\forall\, x, y \in X \ :\ \|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$.

Perechea ordonată $(X, \|\cdot\|)$ se numește *spațiu normat real*.

Din proprietățile 1° – 3° rezultă că $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, unde $\|\cdot\|$ este norma euclidiană definită prin (4), este un spațiu normat real.

1.1.6 Definiţie (distanța euclidiană în $\mathbb{R}^n$)**.** Funcția $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$, definită pentru orice puncte $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ și $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ prin

$$(5) \qquad d(x, y) := \|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2},$$

se numește *distanța* sau *metrica euclidiană* în $\mathbb{R}^n$. Proprietățile normei euclidiene garantează că

1° $d(x,y) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = y$;

2° $\forall\, x,y \in \mathbb{R}^n \;:\; d(x,y) = d(y,x)$;

3° $\forall\, x,y,z \in \mathbb{R}^n \;:\; d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$.

Fiind dată o mulțime nevidă X, o funcție $d : X \times X \to [0,\infty)$ se numește *metrică* sau *distanță* pe X, dacă îndeplinește următoarele condiții:

(M1) $d(x,y) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = y$;

(M2) $\forall\, x,y \in X \;:\; d(x,y) = d(y,x)$;

(M3) $\forall\, x,y,z \in X \;:\; d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$.

Perechea ordonată (X,d) se numește *spațiu metric*.

Din proprietățile 1° – 3° rezultă că $(\mathbb{R}^n, d)$, unde d este distanța euclidiană definită prin (5), este un spațiu metric.

1.2 Structura topologică a spațiului $\mathbb{R}^n$

1.2.1 Definiție (bile)**.** Fiind date $a \in \mathbb{R}^n$ și $r > 0$, notăm

$$\begin{aligned} B(a,r) &:= \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x,a) < r\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x-a\| < r\},\\ \bar{B}(a,r) &:= \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x,a) \le r\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x-a\| \le r\}. \end{aligned}$$

Aceste mulțimi se numesc *bila deschisă* și respectiv *bila închisă* cu centrul în a și de rază r. Evident, avem $a \in B(a,r) \subseteq \bar{B}(a,r)$.

1.2.2 Definiție (vecinătăți)**.** Fie x un punct arbitrar din $\mathbb{R}^n$. O mulțime $V \subseteq \mathbb{R}^n$ se numește *vecinătate* a lui x dacă există $r > 0$ astfel ca $B(x,r) \subseteq V$. Familia tuturor vecinătăților lui x va fi notată cu $\mathcal{V}(x)$.

1.2.3 Definiție. Fie A o submulțime a lui $\mathbb{R}^n$ și fie $x \in \mathbb{R}^n$. Se spune că x este

- *punct interior* al lui A dacă $A \in \mathcal{V}(x)$, adică dacă există $r > 0$ astfel ca $B(x,r) \subseteq A$;
- *punct exterior* lui A dacă $\mathbb{R}^n \setminus A \in \mathcal{V}(x)$, adică dacă există $r > 0$ astfel ca $B(x,r) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus A$;
- *punct aderent* lui A dacă $V \cap A \neq \emptyset$ oricare ar fi $V \in \mathcal{V}(x)$;

- *punct frontieră* pentru A dacă $V \cap A \neq \emptyset$ și $V \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \emptyset$ oricare ar fi $V \in \mathcal{V}(x)$;
- *punct de acumulare* pentru A dacă $(V \cap A) \setminus \{x\} \neq \emptyset$ oricare ar fi $V \in \mathcal{V}(x)$;
- *punct izolat* al lui A dacă există $V \in \mathcal{V}(x)$ astfel ca $V \cap A = \{x\}$.

Mulțimea tuturor punctelor interioare ale lui A se numește *interiorul* lui A și va fi notată cu $\operatorname{int} A$.

Mulțimea tuturor punctelor exterioare lui A se numește *exteriorul* lui A și va fi notată cu $\operatorname{ext} A$.

Mulțimea tuturor punctelor aderente lui A se numește *închiderea* sau *aderența* lui A și va fi notată cu $\operatorname{cl} A$.

Mulțimea tuturor punctelor frontieră pentru A se numește *frontiera* lui A și va fi notată cu $\operatorname{bd} A$.

Mulțimea tuturor punctelor de acumulare pentru A se numește *derivata* mulțimii A și va fi notată cu A'.

1.2.4 Teoremă. *Pentru orice mulțime $A \subseteq \mathbb{R}^n$ au loc următoarele relații:*

1° $\operatorname{int} A \subseteq A \subseteq \operatorname{cl} A$;

2° $\operatorname{ext} A = \operatorname{int}(\mathbb{R}^n \setminus A)$;

3° $\operatorname{cl} A = \mathbb{R}^n \setminus \operatorname{int}(\mathbb{R}^n \setminus A)$;

4° $\operatorname{bd} A = (\operatorname{cl} A) \cap \operatorname{cl}(\mathbb{R}^n \setminus A)$;

5° $(\operatorname{int} A) \cup (\operatorname{bd} A) = \operatorname{cl} A$;

6° $(\operatorname{int} A) \cup (\operatorname{bd} A) \cup (\operatorname{ext} A) = \mathbb{R}^n$;

7° $(\operatorname{int} A) \cap (\operatorname{bd} A) = \emptyset$;

8° $(\operatorname{int} A) \cap (\operatorname{ext} A) = \emptyset$;

9° $(\operatorname{ext} A) \cap (\operatorname{bd} A) = \emptyset$;

10° $\operatorname{cl} A = A \cup A'$.

Demonstrație. Demonstrăm doar relația 10°. Arătăm mai întâi că

$$\operatorname{cl} A \subseteq A \cup A'. \tag{1}$$

Fie în acest scop $x \in \operatorname{cl} A$ arbitrar. Dacă $x \in A$, atunci $x \in A \cup A'$. Dacă $x \notin A$, să dovedim că $x \in A'$. Fie V o vecinătate oarecare a lui x. Cum $x \in \operatorname{cl} A$, avem $V \cap A \neq \emptyset$. Intrucât $x \notin A$, deducem că $(V \cap A) \setminus \{x\} \neq \emptyset$. Drept urmare avem $x \in A'$, deci $x \in A \cup A'$. Așadar, incluziunea (1) are loc. ținând seama de relația 1°, precum și de incluziunea evidentă $A' \subseteq \operatorname{cl} A$, deducem că

$$A \cup A' \subseteq \operatorname{cl} A. \tag{2}$$

Din (1) și (2) rezultă că relația 10° are loc. □

1.2.5 Definiție (mulțimi deschise și mulțimi închise)**.** O mulțime $A \subseteq \mathbb{R}^n$ se numește:

- *deschisă* dacă $A \in \mathcal{V}(x)$ oricare ar fi $x \in A$, adică dacă pentru orice $x \in A$ există un $r > 0$ așa încât $B(x, r) \subseteq A$;
- *închisă* dacă mulțimea $\mathbb{R}^n \setminus A$ este deschisă.

1.2.6 Exemplu. Dacă $a \in \mathbb{R}^n$ și $r > 0$, atunci bila deschisă $B(a, r)$ este o mulțime deschisă, iar bila închisă $\bar{B}(a, r)$ este o mulțime închisă. In adevăr, pentru orice $x \in B(a, r)$ avem $\|x - a\| < r$. Notând $r' := r - \|x - a\| > 0$, se arată ușor că $B(x, r') \subseteq B(a, r)$, deci $B(a, r)$ este mulțime deschisă. De asemenea, pentru orice punct $x \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{B}(a, r)$ avem $\|x - a\| > r$. Notând $r' := \|x - a\| - r > 0$, se arată ușor că $B(x, r') \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \bar{B}(a, r)$. Prin urmare, mulțimea $\mathbb{R}^n \setminus \bar{B}(a, r)$ este deschisă, deci $\bar{B}(a, r)$ este o mulțime închisă.

1.2.7 Propoziție. *Dacă A este o submulțime a lui $\mathbb{R}^n$, atunci $\operatorname{int} A$ este o mulțime deschisă, iar $\operatorname{cl} A$ este o mulțime închisă.*

Demonstrație. Fie $x \in \operatorname{int} A$. Atunci există un $r > 0$ astfel încât $B(x, r) \subseteq A$. Dovedim că $B(x, r) \subseteq \operatorname{int} A$. Fie în acest scop $y \in B(x, r)$. Atunci avem $\|y - x\| < r$. Notând $r' := r - \|y - x\| > 0$, are loc incluziunea

$$B(y, r') \subseteq B(x, r) \subseteq A,$$

deci $y \in \operatorname{int} A$. Prin urmare, există pentru fiecare $x \in \operatorname{int} A$ un $r > 0$ astfel ca $B(x, r) \subseteq \operatorname{int} A$. Aceasta înseamnă că $\operatorname{int} A$ este mulțime deschisă.

Conform relației 3° din teorema 1.2.4 și a celor stabilite mai sus, mulțimea $\mathbb{R}^n \setminus \operatorname{cl} A = \operatorname{int}\big(\mathbb{R}^n \setminus A\big)$ este deschisă, deci mulţimea $\operatorname{cl} A$ este închisă. □

1.2.8 Teoremă (caracterizarea mulțimilor deschise)**.** *Fiind dată o mulțime $A \subseteq \mathbb{R}^n$, următoarele afirmații sunt echivalente:*

1° *A este deschisă.*

2° *Are loc egalitatea* $\operatorname{int} A = A$.

3° *Are loc egalitatea* $A \cap \operatorname{bd} A = \emptyset$.

Demonstrație. 1° $\Rightarrow$ 2° Conform teoremei 1.2.4, avem $\operatorname{int} A \subseteq A$. Pe de altă parte, deoarece A este deschisă, pentru fiecare $x \in A$ există un $r > 0$ astfel încât $B(x,r) \subseteq A$. Deci fiecare punct $x \in A$ este interior lui A. In consecință, avem $\operatorname{int} A = A$.

2° $\Rightarrow$ 3° Dacă $\operatorname{int} A = A$, atunci în baza relației 7° din teorema 1.2.4 avem

$$A \cap \operatorname{bd} A = (\operatorname{int} A) \cap (\operatorname{bd} A) = \emptyset.$$

3° $\Rightarrow$ 1° Presupunem că $A \cap \operatorname{bd} A = \emptyset$, dar A nu este deschisă. Există atunci un punct $x_0 \in A$ cu proprietatea că $B(x_0,r) \nsubseteq A$ oricare ar fi $r > 0$. Rezultă de aici că $B(x_0,r) \cap \big(\mathbb{R}^n \setminus A\big) \neq \emptyset$ oricare ar fi $r > 0$. Pe de altă parte, mai avem și $x_0 \in B(x_0,r) \cap A$ oricare ar fi $r > 0$. In consecință, trebuie să avem $x_0 \in \operatorname{bd} A$, deci $x_0 \in A \cap \operatorname{bd} A$, ceea ce contrazice presupunerea făcută. Contradicția obținută arată că A este deschisă. □

1.2.9 Teoremă (caracterizarea mulțimilor închise)**.** *Fiind dată o mulțime* $A \subseteq \mathbb{R}^n$, *următoarele afirmații sunt echivalente:*

1° *A este închisă.*

2° *Are loc egalitatea* $\operatorname{cl} A = A$.

3° *Are loc incluziunea* $\operatorname{bd} A \subseteq A$.

4° *Are loc incluziunea* $A' \subseteq A$.

Demonstrație. 1° $\Rightarrow$ 2° Dacă A este închisă, atunci $\mathbb{R}^n \setminus A$ este deschisă, deci $\operatorname{int}\big(\mathbb{R}^n \setminus A\big) = \mathbb{R}^n \setminus A$, conform teoremei 1.2.8. Folosind acum afirmația 3° din teorema 1.2.4 deducem că

$$\operatorname{cl} A = \mathbb{R}^n \setminus \operatorname{int}\big(\mathbb{R}^n \setminus A\big) = \mathbb{R}^n \setminus \big(\mathbb{R}^n \setminus A\big) = A.$$

2° $\Rightarrow$ 1° Dacă $A = \operatorname{cl} A$, atunci mulțimea A este închisă, conform propoziției 1.2.7.

2° $\Rightarrow$ 3° Din 2° și afirmația 5° a teoremei 1.2.4 rezultă că

$$A = \operatorname{cl} A = (\operatorname{int} A) \cup (\operatorname{bd} A),$$

deci $\operatorname{bd} A \subseteq A$.

$3^\circ \Rightarrow 2^\circ$ Din 3° și afirmațiile 1° și 5° ale teoremei 1.2.4 rezultă că

$$\operatorname{cl} A = (\operatorname{int} A) \cup (\operatorname{bd} A) \subseteq A \subseteq \operatorname{cl} A,$$

deci $\operatorname{cl} A = A$.

$2^\circ \Rightarrow 4^\circ$ Din 2° și afirmația 10° a teoremei 1.2.4 rezultă că $A = \operatorname{cl} A = A \cup A'$, deci $A' \subseteq A$.

$4^\circ \Rightarrow 2^\circ$ Din 4° și afirmațiile 1° și 10° ale teoremei 1.2.4 rezultă că

$$\operatorname{cl} A = A \cup A' \subseteq A \subseteq \operatorname{cl} A,$$

deci $\operatorname{cl} A = A$. □

1.2.10 Teoremă. *Familia $\mathcal{T}$, a tuturor submulțimilor deschise ale lui $\mathbb{R}^n$, se bucură de următoarele proprietăți:*

1° $\emptyset \in \mathcal{T}$ *și* $\mathbb{R}^n \in \mathcal{T}$.

2° *Oricare ar fi familia* $(G_i)_{i\in I}$, *de mulțimi din* $\mathcal{T}$, *avem* $\cup_{i\in I} G_i \in \mathcal{T}$.

3° *Pentru orice mulțimi* $G_1, G_2 \in \mathcal{T}$, *avem* $G_1 \cap G_2 \in \mathcal{T}$.

Demonstrație. Imediată. □

1.2.11 Observații. a) Fiind dată o mulțime arbitrară X, se numește *topologie* pe X orice familie $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$, de submulțimi ale lui X, care îndeplinește următoarele condiții:

(T1) $\emptyset \in \mathcal{T}$ și $X \in \mathcal{T}$;

(T2) Oricare ar fi familia $(G_i)_{i\in I}$, de mulțimi din $\mathcal{T}$, avem $\cup_{i\in I} G_i \in \mathcal{T}$;

(T3) Pentru orice mulțimi $G_1, G_2 \in \mathcal{T}$, avem $G_1 \cap G_2 \in \mathcal{T}$.

Perechea ordonată $(X, \mathcal{T})$ se numește *spațiu topologic*.

Din teorema 1.2.10 rezultă că familia $\mathcal{T}$, a tuturor submulțimilor deschise ale lui $\mathbb{R}^n$, este o topologie pe $\mathbb{R}^n$, numită *topologia euclidiană*.

b) Familia $\mathcal{T}^*$, a tuturor submulțimilor închise ale lui $\mathbb{R}^n$, se bucură de următoarele proprietăți:

1° $\emptyset \in \mathcal{T}^*$ și $\mathbb{R}^n \in \mathcal{T}^*$;

2° Oricare ar fi familia $(F_i)_{i\in I}$, de mulțimi din $\mathcal{T}^*$, avem $\cap_{i\in I} F_i \in \mathcal{T}^*$;

3° Pentru orice mulțimi $F_1, F_2 \in \mathcal{T}^*$, avem $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{T}^*$.

c) Intersecția unei familii oarecare de mulțimi din $\mathcal{T}$ nu aparține, în general, lui $\mathcal{T}$. De exemplu, mulţimea $G_k := \left(-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right)$ este deschisă în $\mathbb{R}$ pentru fiecare $k \in \mathbb{N}$, dar $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} G_k = \{0\}$ este închisă în $\mathbb{R}$.

De asemenea, reuniunea unei familii oarecare de mulțimi din $\mathcal{T}^*$ nu aparține, în general, lui $\mathcal{T}^*$. De exemplu, mulțimea $F_k := \left[-1 + \frac{1}{2k}, 1 - \frac{1}{2k}\right]$ este închisă în $\mathbb{R}$ pentru fiecare $k \in \mathbb{N}$, dar $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F_k = (-1, 1)$ este deschisă în $\mathbb{R}$.

1.3 Șiruri de puncte în $\mathbb{R}^n$

1.3.1 Definiţie (șiruri convergente în $\mathbb{R}^n$)**.** Orice funcție $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ se numește *șir de puncte din* $\mathbb{R}^n$. Dacă $f(k) = x_k \in \mathbb{R}^n$ pentru $k \in \mathbb{N}$, atunci șirul va fi notat $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sau, simplu, (x_k). Fiecare termen x_k al șirului fiind un punct din $\mathbb{R}^n$, este de forma $x_k = (x_{k1}, x_{k2}, \ldots, x_{kn})$.

Fie (x_k) un șir de puncte din $\mathbb{R}^n$ și fie $x \in \mathbb{R}^n$. Se spune că (x_k) *converge către* x (sau că x este o *limită* a șirului (x_k)) dacă

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, k_0 \in \mathbb{N} \text{ a.î. } \forall\, k \geq k_0\ :\ \|x_k - x_0\| < \varepsilon.$$

Se constată imediat că un șir de puncte din $\mathbb{R}^n$ are cel mult o limită. In cazul în care aceasta există, șirul se numește *convergent*. Faptul că șirul (x_k) converge către x va fi notat prin $(x_k) \to x$ sau $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$.

1.3.2 Teoremă. *Fie* (x_k) *un șir de puncte din* $\mathbb{R}^n$ *și fie* $x \in \mathbb{R}^n$. *Atunci*

$$(x_k) \to x \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{k\to\infty} \|x_k - x\| = 0.$$

Demonstrație. Evidentă. □

1.3.3 Teoremă. *Fie* (x_k) *și* (y_k) *șiruri convergente de puncte din* $\mathbb{R}^n$, *fie* $x := \lim_{k\to\infty} x_k$, $y := \lim_{k\to\infty} y_k$, *fie* (α_k) *un șir convergent de numere reale și fie* $\alpha := \lim_{k\to\infty} \alpha_k$. *Atunci*

$$\lim_{k\to\infty} (x_k + y_k) = x + y \quad \text{și} \quad \lim_{k\to\infty} (\alpha_k x_k) = \alpha x.$$

Demonstrație. Imediată. □

1.3.4 Teoremă. *Fie (x_k) un șir de puncte din $\mathbb{R}^n$, $x_k = (x_{k1}, \ldots, x_{kn})$ $(k \in \mathbb{N})$ și fie $\bar{x} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) \in \mathbb{R}^n$. Atunci*

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \bar{x} \quad \Leftrightarrow \quad \forall\ j \in \{1, \ldots, n\}\ :\ \lim_{k\to\infty} x_{kj} = \bar{x}_j.$$

Demonstrație. Necesitatea. Presupunem că $\lim_{k\to\infty} x_k = \bar{x}$. Conform teoremei 1.3.2 avem atunci $\lim_{k\to\infty} \|x_k - \bar{x}\| = 0$. Deoarece

$$\|x_k - \bar{x}\| = \sqrt{(x_{k1} - \bar{x}_1)^2 + (x_{k2} - \bar{x}_2)^2 + \cdots + (x_{kn} - \bar{x}_n)^2} \geq |x_{kj} - \bar{x}_j|$$

pentru fiecare $j \in \{1, \ldots, n\}$, rezultă că $\lim_{k\to\infty} |x_{kj} - \bar{x}_j| = 0$, adică

$$\lim_{k\to\infty} x_{kj} = \bar{x}_j \quad \text{pentru orice } j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Suficiența. Admitem acum că $\lim_{k\to\infty} x_{kj} = \bar{x}_j$, adică

$$\lim_{k\to\infty} |x_{kj} - \bar{x}_j| = 0 \quad \text{pentru orice } j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Deoarece

$$\|x_k - \bar{x}\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_{kj} - \bar{x}_j)^2} \leq \sum_{j=1}^{n} |x_{kj} - \bar{x}_j|,$$

deducem că $\lim_{k\to\infty} \|x_k - \bar{x}\| = 0$, deci $\lim_{k\to\infty} x_k = \bar{x}$, conform teoremei 1.3.2. □

1.3.5 Definiție (șiruri fundamentale în $\mathbb{R}^n$)**.** Un șir (x_k), de puncte din $\mathbb{R}^n$ se numește *fundamental* (sau *şir Cauchy*) dacă

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ k_0 \in \mathbb{N} \text{ a.î. } \forall\ k, \ell \geq k_0\ :\ \|x_k - x_\ell\| < \varepsilon.$$

1.3.6 Teoremă. *Fie (x_k) un șir din $\mathbb{R}^n$, $x_k = (x_{k1}, \ldots, x_{kn})$ $(k \in \mathbb{N})$. Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:*

1° *Șirul (x_k) este fundamental.*

2° *Pentru fiecare $j \in \{1, \ldots, n\}$, șirul de numere reale (x_{kj}) este fundamental.*

Demonstrație. 1° $\Rightarrow$ 2° Presupunem că (x_k) este fundamental. Fie $j \in \{1, \ldots, n\}$ fixat. Pentru a dovedi că șirul (x_{kj}) este fundamental, fie $\varepsilon > 0$. Există atunci un $k_0 \in \mathbb{N}$ așa încât pentru orice $k, \ell \geq k_0$ să avem $\|x_k - x_\ell\| < \varepsilon$. Deoarece

$$\|x_k - x_\ell\| = \sqrt{(x_{k1} - x_{\ell 1})^2 + \cdots + (x_{kn} - x_{\ell n})^2} \geq |x_{kj} - x_{\ell j}|,$$

deducem că $|x_{kj} - x_{\ell j}| < \varepsilon$ pentru orice $k, \ell \geq k_0$. Drept urmare, șirul de numere reale (x_{kj}) este fundamental.

$2^\circ \Rightarrow 1^\circ$ Fie $\varepsilon > 0$ oarecare. Pentru fiecare $j \in \{1, \dots, n\}$ există un $k_j \in \mathbb{N}$ astfel ca

$$|x_{kj} - x_{\ell j}| < \frac{\varepsilon}{n} \quad \text{pentru orice } k, \ell \geq k_j.$$

Notând $k_0 := \max\{k_1, \dots, k_n\}$, avem

$$\|x_k - x_\ell\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_{kj} - x_{\ell j})^2} \leq \sum_{j=1}^{n} |x_{kj} - x_{\ell j}| < \varepsilon,$$

oricare ar fi $k, \ell \geq k_0$. In consecință, șirul (x_k) este fundamental. □

1.3.7 Teoremă (A. L. Cauchy). *Un șir de puncte din $\mathbb{R}^n$ este convergent dacă și numai dacă el este fundamental.*

Demonstrație. Fie (x_k) un șir din $\mathbb{R}^n$, $x_k = (x_{k1}, \dots, x_{kn})$ $(k \in \mathbb{N})$. Avem

$$\begin{aligned} (x_k) \text{ convergent } &\Leftrightarrow \ \forall\, j \in \{1, \dots, n\} \text{ șirul } (x_{kj}) \text{ este convergent} \\ &\Leftrightarrow \ \forall\, j \in \{1, \dots, n\} \text{ șirul } (x_{kj}) \text{ este fundamental} \\ &\Leftrightarrow \ (x_k) \text{ fundamental,} \end{aligned}$$

cele trei echivalențe fiind justificate de teorema 1.3.4, teorema lui Cauchy pentru șiruri de numere reale și respectiv teorema 1.3.6. □

1.3.8 Teoremă (caracterizarea secvențială a punctelor aderente). *Fie A o submulțime a lui $\mathbb{R}^n$. Un punct $x \in \mathbb{R}^n$ este aderent lui A dacă și numai dacă există un șir (x_k), de puncte din A, care converge către x.*

Demonstrație. Necesitatea. Dacă $x \in \operatorname{cl} A$, atunci pentru orice $k \in \mathbb{N}$ avem $B\left(x, \frac{1}{k}\right) \cap A \neq \emptyset$. Pentru fiecare $k \in \mathbb{N}$ alegem $x_k \in B\left(x, \frac{1}{k}\right) \cap A$. Atunci (x_k) este un șir de puncte din A cu proprietatea $\|x_k - x\| < \frac{1}{k}$ oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$. In baza teoremei 1.3.2 rezultă că $(x_k) \to x$.

Suficiența. Admitem că există un șir (x_k), de puncte din A, care converge către x. Fie V o vecinătate arbitrară a lui x. Există atunci $r > 0$ în așa fel încât $B(x, r) \subseteq V$. Cum $(x_k) \to x$, există un $k_0 \in \mathbb{N}$ astfel ca $\|x_k - x\| < r$ oricare ar fi $k \geq k_0$. Atunci pentru orice $k \geq k_0$ avem $x_k \in B(x, r) \subseteq V$ și $x_k \in A$, deci $V \cap A \neq \emptyset$. Intrucât V a fost arbitrară, deducem că $x \in \operatorname{cl} A$. □

1.3.9 Consecință (caracterizarea secvențială a punctelor de acumulare)**.** *Fie A o submulțime a lui $\mathbb{R}^n$. Un punct $x \in \mathbb{R}^n$ este punct de acumulare al lui A dacă și numai dacă există un șir (x_k), de puncte din $A \setminus \{x\}$, care converge către x.*

Demonstrație. Rezultă din teorema 1.3.8, ținând seama că $x \in A'$ dacă și numai dacă $x \in \operatorname{cl}\big(A \setminus \{x\}\big)$. $\square$

1.3.10 Consecință (caracterizarea secvențială a mulțimilor închise)**.** *O mulțime $A \subseteq \mathbb{R}^n$ este închisă dacă și numai dacă pentru orice șir convergent de puncte din A, limita sa aparţine lui A.*

Demonstrație. Se aplică teorema 1.3.8 și teorema 1.2.9. $\square$

1.4 Mulțimi compacte în $\mathbb{R}^n$

1.4.1 Definiție (mulțimi compacte)**.** Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Se numește *acoperire* a mulțimii A orice familie $(A_i)_{i\in I}$, de submulțimi ale lui $\mathbb{R}^n$, pentru care $A \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$. Acoperirea $(A_i)_{i\in I}$ se numește *deschisă* dacă toate mulțimile A_i $(i \in I)$ sunt deschise.

O mulțime $A \subseteq \mathbb{R}^n$ se numește *compactă* dacă din orice acoperire deschisă a sa se poate extrage o subacoperire finită, adică dacă pentru orice acoperire deschisă $(A_i)_{i\in I}$ a lui A există o submulțime finită J a lui I cu proprietatea că $A \subseteq \bigcup_{i\in J} A_i$.

Evident, orice mulțime finită $A \subseteq \mathbb{R}^n$ este compactă.

1.4.2 Exemplu. O mulțime $A \subseteq \mathbb{R}^n$ se numește *hipercub închis* dacă este de forma $A = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, unde $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n \in \mathbb{R}$, $a_1 < b_1$, $a_2 < b_2$, …, $a_n < b_n$ și $b_1 - a_1 = b_2 - a_2 = \cdots = b_n - a_n$.

Vom dovedi în cele ce urmează că orice hipercub închis din $\mathbb{R}^n$ este o mulțime compactă. Facem demonstrația doar în cazul particular $n = 2$ (demonstrația pentru n arbitrar este, în esență, aceeași, fiind însă puțin mai dificil de redactat). Fie așadar $A = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ și fie $\ell = b_1 - a_1 = b_2 - a_2$.

Presupunem prin absurd că mulțimea A nu este compactă, adică există o acoperire deschisă $(G_i)_{i\in I}$ a lui A, din care nu se poate extrage nici o subacoperire finită. Cu ajutorul centrului său, împărțim pătratul A în 2^2 pătrate:

$$\Big[a_1, \tfrac{a_1+b_1}{2}\Big] \times \Big[a_2, \tfrac{a_2+b_2}{2}\Big], \qquad \Big[\tfrac{a_1+b_1}{2}, b_1\Big] \times \Big[a_2, \tfrac{a_2+b_2}{2}\Big],$$

$$\Big[a_1, \tfrac{a_1+b_1}{2}\Big] \times \Big[\tfrac{a_2+b_2}{2}, b_2\Big], \qquad \Big[\tfrac{a_1+b_1}{2}, b_1\Big] \times \Big[\tfrac{a_2+b_2}{2}, b_2\Big].$$

Cel puțin unul dintre aceste 2^2 pătrate nu poate fi acoperit cu un număr finit de mulțimi din familia $(G_i)_{i\in I}$. Fie $A_1 = [a_{11}, b_{11}] \times [a_{21}, b_{21}]$ un asemenea pătrat, unde

$$a_1 \le a_{11} < b_{11} \le b_1, \quad a_2 \le a_{21} < b_{21} \le b_2, \quad b_{11} - a_{11} = b_{21} - a_{21} = \frac{\ell}{2}\,.$$

Cu pătratul A_1 se procedează ca și cu A. Se descompune A_1 cu ajutorul centrului său în 2^2 pătrate. Cel puțin unul dintre aceste pătrate nu poate fi acoperit cu un număr finit de mulțimi din familia $(G_i)_{i\in I}$. Fie $A_2 = [a_{12}, b_{12}] \times [a_{22}, b_{22}]$ un asemenea pătrat, unde

$$a_{11} \le a_{12} < b_{12} \le b_{11}, \quad a_{21} \le a_{21} < b_{21} \le b_{22}, \quad b_{12} - a_{12} = b_{22} - a_{22} = \frac{\ell}{2^2}\,.$$

Continuând raționamentul, obținem inductiv un șir $A_k = [a_{1k}, b_{1k}] \times [a_{2k}, b_{2k}]$ de pătrate cu următoarele proprietăți:

a) $A_k \subseteq A$ oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$;

b) niciunul dintre pătratele A_k ($k \in \mathbb{N}$) nu poate fi acoperit cu un număr finit de mulțimi din familia $(G_i)_{i\in I}$;

c) șirurile (a_{1k}) și (a_{2k}) sunt crescătoare, șirurile (b_{1k}) și (b_{2k}) sunt descrescătoare și

$$b_{1k} - a_{1k} = b_{2k} - a_{2k} = \frac{\ell}{2^k} \quad \text{oricare ar fi } k \in \mathbb{N}.$$

Există așadar $x_1^*, x_2^* \in \mathbb{R}$ cu proprietatea

$$\{x_1^*\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} [a_{1k}, b_{1k}] \quad \text{și} \quad \{x_2^*\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} [a_{2k}, b_{2k}].$$

Notând $x^* := (x_1^*, x_2^*)$, avem atunci $x^* \in \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \subseteq A$. Cum $(G_i)_{i\in I}$ este o acoperire a lui A, există un $i_0 \in I$ astfel ca $x^* \in G_{i_0}$. Deoarece G_{i_0} este deschisă, există $r > 0$ așa încât $B(x^*, r) \subseteq G_{i_0}$. Alegem un $k \in \mathbb{N}$ în aşa fel încât $\sqrt{2}\ell/2^k < r$. Pentru orice punct $x = (x_1, x_2) \in A_k$ avem

$$|x_1 - x_1^*| \le b_{1k} - a_{1k} = \frac{\ell}{2^k} \quad \text{şi} \quad |x_2 - x_2^*| \le b_{2k} - a_{2k} = \frac{\ell}{2^k}\,.$$

Urmează de aici că

$$\|x - x^*\| = \sqrt{(x_1 - x_1^*)^2 + (x_2 - x_2^*)^2} \le \frac{\sqrt{2}\ell}{2^k} < r,$$

deci $A_k \subseteq B(x^*, r) \subseteq G_{i_0}$. Prin urmare, pătratul A_k poate fi acoperit cu o mulțime din familia $(G_i)_{i\in I}$, în contradicție cu construcția şirului de pătrate (A_k). Contradicția obținută arată că mulțimea A este compactă.

1.4.3 Definiţie (mulțimi mărginite)**.** O mulțime $A \subseteq \mathbb{R}^n$ se numește *mărginită* dacă există $a \in \mathbb{R}^n$ și $r > 0$ astfel ca $A \subseteq \bar{B}(a, r)$. Evident, toate bilele închise și toate bilele deschise din $\mathbb{R}^n$ sunt mulțimi mărginite. De asemenea, orice submulţime a unei mulțimi mărginite din $\mathbb{R}^n$ este mărginită.

1.4.4 Teoremă (caracterizarea mulțimilor compacte)**.** *Fiind dată o mulțime $A \subseteq \mathbb{R}^n$, următoarele afirmații sunt echivalente:*

1° *A este compactă.*

2° *Orice submulțime infinită a lui A are cel puţin un punct de acumulare care aparține lui A.*

3° *A este secvențial compactă, adică orice șir de puncte din A are un subșir convergent către un punct din A.*

4° *A este mărginită și închisă.*

Demonstrație. 1° $\Rightarrow$ 2° Admitem că A este compactă. Presupunem prin absurd că există o mulțime infinită $A_0 \subseteq A$ care nu are niciun punct de acumulare aparținând lui A. Aceasta înseamnă că pentru fiecare $x \in A$ există un $r_x > 0$ încât $B(x, r_x) \cap A_0 \setminus \{x\} = \emptyset$, deci

$$B(x, r_x) \cap A_0 \subseteq \{x\} \quad \text{oricare ar fi } x \in A.$$

Familia $\big(B(x, r_x)\big)_{x\in A}$ este o acoperire deschisă a lui A. Intrucât A este compactă, există $x_1, \ldots, x_m \in A$ în așa fel încât $A \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} B(x_j, r_{x_j})$. Atunci avem

$$A_0 = A \cap A_0 \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} \Big(B(x_j, r_{x_j}) \cap A_0\Big) \subseteq \{x_1, \ldots, x_m\},$$

ceea ce este absurd, căci A_0 este infinită.

2° $\Rightarrow$ 3° Fie (x_k) un șir arbitrar de puncte din A și fie A_0 mulțimea termenilor șirului, $A_0 := \{x_k \mid k = 1, 2, \ldots\}$. Dacă mulțimea A_0 este finită, atunci cel puțin unul dintre termenii şirului se repetă de o infinitate de ori. Prin urmare, în acest caz șirul (x_k) posedă un subșir convergent către un punct din A și anume un subșir constant. Presupunem în continuare că A_0 este infinită. Conform ipotezei 2°, mulțimea A_0 posedă cel puţin un punct de acumulare $x \in A$. Atunci orice vecinătate a lui x conține o infinitate de termeni ai șirului (x_k). Construim un subșir (x_{k_j}) al șirului (x_k) în felul următor:

- alegem $k_1 \in \mathbb{N}$ astfel ca $x_{k_1} \in B(x, 1)$;
- de îndată ce $k_j \in \mathbb{N}$ a fost construit deja, alegem $k_{j+1} > k_j$ în așa fel încât $x_{k_{j+1}} \in B\left(x, \frac{1}{j+1}\right)$.

Cum $\|x_{k_j} - x\| < 1/j$ oricare ar fi $j \in \mathbb{N}$, rezultă în baza teoremei 1.3.2 că $(x_{k_j}) \to x$.

$3° \Rightarrow 4°$ Presupunând că A nu este mărginită, avem $A \not\subseteq \bar{B}(0_n, k)$ oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$. Prin urmare, pentru fiecare $k \in \mathbb{N}$ există un punct $x_k \in A$ cu $\|x_k\| > k$. Conform ipotezei 3°, şirul (x_k) are un subșir (x_{k_j}), convergent către un punct $x \in A$. Avem atunci $\lim_{j\to\infty} \|x_{k_j} - x\| = 0$, conform teoremei 1.3.2. Pe de altă parte, avem

$$\|x_{k_j} - x\| \geq \|x_{k_j}\| - \|x\| > k_j - \|x\| \quad \text{pentru orice } j \in \mathbb{N}.$$

Cum $\lim_{j\to\infty} k_j = \infty$, deducem că $\lim_{j\to\infty} \|x_{k_j} - x\| = \infty$, ceea ce este absurd. Contradicția obţinută arată că A este mărginită.

Pentru a dovedi că A este închisă, folosim consecința 1.3.10. Fie (x_k) un șir convergent arbitrar de puncte din A și fie $x \in \mathbb{R}^n$ limita sa. Conform ipotezei 3°, șirul (x_k) are un subșir convergent către un punct din A. Limita acestui subșir fiind x, rezultă că $x \in A$. Prin urmare, A este închisă.

$4° \Rightarrow 1°$ Admitem că A este mărginită și închisă. Există atunci un $r > 0$ în așa fel încât $A \subseteq [-r, r]^n$. Pentru a dovedi că A este compactă, fie $(G_i)_{i\in I}$ o acoperire deschisă a lui A. Atunci $(G_i)_{i\in I} \cup \{\mathbb{R}^n \setminus A\}$ va fi o acoperire deschisă a hipercubului închis $[-r, r]^n$. Acesta fiind o mulțime compactă (a se vedea exemplul 1.4.2), există o mulțime finită $J \subseteq I$ astfel ca

$$[-r, r]^n \subseteq \big(\mathbb{R}^n \setminus A\big) \cup \left(\bigcup_{i\in J} G_i\right).$$

Intrucât $A \subseteq [-r, r]^n$, rezultă că $A \subseteq \bigcup_{i\in J} G_i$, adică $(G_i)_{i\in J}$ este o subacoperire finită a acoperirii $(G_i)_{i\in I}$. In consecință, mulțimea A este compactă. $\square$

1.4.5 Observaţii. a) Echivalența $1° \Leftrightarrow 3°$ din teorema 1.4.4 este cunoscută în literatura de specialitate sub numele de „teorema de compactitate metrică a lui Hausdorff". Ea este valabilă nu doar în $\mathbb{R}^n$ ci în orice spațiu metric.

b) Echivalența $1° \Leftrightarrow 4°$ din teorema 1.4.4 este cunoscută în literatura matematică sub numele de „teorema lui Borel–Lebesgue". Ea este valabilă în $\mathbb{R}^n$ precum şi în orice spațiu normat finit dimensional, dar nu și într-un spațiu metric arbitrar.

1.5 Probleme

1. Fie $a = (3,\ -2,\ -4) \in \mathbb{R}^3$ și $b = (8,\ 6,\ 3) \in \mathbb{R}^3$. Să se determine $a+b$, $a-b$, $-3a+b$, $\langle a,\ b\rangle$, $\|a\|$, $\|b\|$, $d(a,b)$.

2. Să se demonstreze inegalitatea lui Cauchy-Buneakovski-Schwarz:

$$\forall\ \ x, y \in \mathbb{R}^n\ \ : \qquad |\langle x,\ y\rangle| \leq \sqrt{\langle x,\ x\rangle}\sqrt{\langle y,\ y\rangle}.$$

3. Să se demonstreze identitatea paralelogramului:

$$\forall\ \ x, y \in \mathbb{R}^n\ \ : \qquad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

4. Fie $m \in \mathbb{N}$ și fie $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}^n$ astfel ca

$$\|x_i\| = 1 \quad \text{oricare ar fi } i \in \{1, \ldots, m\}$$

și

$$\|x_i - x_j\| = 1 \quad \text{oricare ar fi } i, j \in \{1, \ldots, m\},\ i \neq j.$$

Să se demonstreze că mulțimea $\{x_1, \ldots, x_m\}$ este liniar independentă.

Concursul Traian Lalescu, UBB, etapa locală, 2013

5. Fie $\{i, j, k\}$ baza canonică a spațiului $\mathbb{R}^3$.

a) Să se demonstreze că dacă $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ satisfac inegalitatea

$$\|a\|^2 + \|b\|^2 + \|c\|^2 < 1,$$

atunci $\{i+a,\ j+b,\ k+c\}$ este bază în $\mathbb{R}^3$.

b) Să se demonstreze că dacă $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ satisfac inegalitatea

$$\cos(a,i) + \cos(b,j) + \cos(c,k) > \frac{5}{2}\,,$$

atunci $\{a, b, c\}$ este bază în $\mathbb{R}^3$.

Concursul Traian Lalescu, UPB, etapa locală, 2010

6. Fie H o matrice de tipul $n \times n$ cu elemente din mulțimea $\{-1, 1\}$, ale cărei linii sunt ortogonale două câte două. Presupunem că există în H o submatrice de tipul $a \times b$ cu toate elementele 1. Să se demonstreze că $ab \leq n$.

Concursul William Lowell Putnam 2005

7. Fiind date numerele reale $p, q > 1$, cu proprietatea $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, să se demonstreze că:

1° Are loc inegalitatea lui Young

$$\forall \ \ a, b \in [0, \infty[\ : \quad ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

2° Are loc inegalitatea lui Hölder

$$\forall \ \ a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in [0, \infty[\ : \quad \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

8. Fiind dat numărul real $p \geq 1$, să se demonstreze că are loc inegalitatea lui Minkowski

$$\left[\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p \right]^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

oricare ar fi $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in [0, \infty)$.

9. Fiind dat numărul real $p \geq 1$, să se arate că funcția $\| \cdot \|_p : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$, definită prin

$$\|x\|_p := \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{oricare ar fi } x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

este o normă, numită *p-norma* pe $\mathbb{R}^n$.

10. Fie X un spațiu liniar real și $\| \cdot \| : X \to [0, \infty)$ o normă pe X. Se spune că norma $\| \cdot \|$ provine dintr-un produs scalar dacă există un produs scalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ pe X, cu proprietatea $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ pentru orice $x \in X$. Să se demonstreze că p-norma $\| \cdot \|_p$ pe $\mathbb{R}^n$, unde $p \geq 1$ și $n \geq 2$, provine dintr-un produs scalar dacă și numai dacă $p = 2$.

11. Să se demonstreze că funcția $\| \cdot \|_\infty : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$, definită prin

$$\|x\|_\infty := \max \{ \, |x_1|, \ldots, |x_n| \, \} \quad \text{oricare ar fi } x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

este o normă, numită *norma Cebîșev* pe $\mathbb{R}^n$. Să se arate că norma Cebîșev nu provine dintr-un produs scalar.

12. Să se demonstreze că pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$ are loc egalitatea

$$\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty.$$

13. Fie $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ și fie $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ aplicația liniară având matricea A în baza canonică a lui $\mathbb{R}^n$. Să se demonstreze că dacă

$$\|\varphi(x)\|_\infty = \|x\|_\infty \quad \text{oricare ar fi } x \in \mathbb{R}^n,$$

atunci există un număr natural m astfel ca $A^m = I_n$.

SEEMOUS 2007

14. Să se demonstreze că pentru orice $a \in \mathbb{R}^n$ și orice $r > 0$ are loc egalitatea $\operatorname{cl} B(a,r) = \bar{B}(a,r)$.

15. Să se demonstreze că pentru orice mulțime $A \subseteq \mathbb{R}^n$ sunt adevărate următoarele relații:

1° $\operatorname{int} A \subseteq A \subseteq \operatorname{cl} A$;
2° $\operatorname{ext} A = \operatorname{int}(\mathbb{R}^n \setminus A)$;
3° $\operatorname{cl} A = \mathbb{R}^n \setminus \operatorname{int}(\mathbb{R}^n \setminus A)$;
4° $\operatorname{bd} A = (\operatorname{cl} A) \cap \operatorname{cl}(\mathbb{R}^n \setminus A)$;
5° $(\operatorname{int} A) \cup (\operatorname{bd} A) = \operatorname{cl} A$;
6° $(\operatorname{int} A) \cup (\operatorname{bd} A) \cup (\operatorname{ext} A) = \mathbb{R}^n$;
7° $(\operatorname{int} A) \cap (\operatorname{bd} A) = \emptyset$;
8° $(\operatorname{int} A) \cap (\operatorname{ext} A) = \emptyset$;
9° $(\operatorname{ext} A) \cap (\operatorname{bd} A) = \emptyset$;
10° $\operatorname{cl} A = A \cup A'$.

16. Să se demonstreze că pentru orice mulțimi $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ au loc următoarele incluziuni:

$$\operatorname{int}(A \setminus B) \subseteq (\operatorname{int} A) \setminus (\operatorname{int} B) \qquad \text{și} \qquad (\operatorname{cl} A) \setminus (\operatorname{cl} B) \subseteq \operatorname{cl}(A \setminus B).$$

Să se dea exemple de mulțimi $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ pentru care incluziunile de mai sus sunt stricte.

17. Fiind date mulțimile $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$, să se demonstreze că:

a) Dacă $A \cup B = \mathbb{R}^n$, atunci $\big(\operatorname{cl} A\big) \cup \big(\operatorname{int} B\big) = \mathbb{R}^n$.

b) Dacă $A \cap B = \emptyset$, atunci $\big(\operatorname{cl} A\big) \cap \big(\operatorname{int} B\big) = \emptyset$.

18. Să se demonstreze că pentru orice mulțimi $A_1, A_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ are loc egalitatea

$$\operatorname{cl}(A_1 \cup A_2) = (\operatorname{cl} A_1) \cup (\operatorname{cl} A_2).$$

Este adevărat că pentru orice familie $(A_i)_{i\in I}$ de submulțimi ale lui $\mathbb{R}^n$ are loc egalitatea

$$\operatorname{cl}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} \operatorname{cl} A_i \ ?$$

19. Să se demonstreze că pentru orice mulțimi $A_1, A_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ are loc egalitatea

$$(A_1 \cup A_2)' = A_1' \cup A_2'.$$

Este adevărat că pentru orice familie $(A_i)_{i\in I}$ de submulțimi ale lui $\mathbb{R}^n$ are loc egalitatea

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)' = \bigcup_{i\in I} \mathrm{A}_i' \ ?$$

20. Fie (x_k) și (y_k) șiruri convergente de puncte din $\mathbb{R}^n$ și fie $x := \lim\limits_{k\to\infty} x_k$, $y := \lim\limits_{k\to\infty} y_k$.

a) Să se demonstreze că $\lim\limits_{k\to\infty} d(x_k, y_k) = d(x, y)$.

b) Să se deducă apoi că $\lim\limits_{k\to\infty} \|x_k\| = \|x\|$.

21. Să se determine

$$\lim_{k\to\infty}\left(\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}_{k \text{ radicali}},\ \sum_{j=1}^{k}\frac{b(j)}{j(j+1)}\right),$$

unde $b(j)$ este numărul cifrelor 1 din reprezentarea binară a lui j (de exemplu, $b(6) = b(110_2) = 2$, $b(8) = b(1000_2) = 1$).

22. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție aditivă, adică o funcție cu proprietatea

$$\forall \;\; x, y \in \mathbb{R} \;\; : \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

și fie

$$\mathrm{gr}(f) := \{ \; (x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R} \, \}$$

graficul lui f. Să se demonstreze că:

a) Dacă f este continuă în cel puțin un punct, atunci f este continuă pe $\mathbb{R}$.

b) Dacă f este continuă în cel puțin un punct (deci pe $\mathbb{R}$), atunci $f(x) = cx$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, unde $c = f(1)$.

c) Dacă f este discontinuă pe $\mathbb{R}$, atunci $\mathrm{cl}\, \mathrm{gr}(f) = \mathbb{R}^2$, adică $\mathrm{gr}(f)$ este o submulțime densă a lui $\mathbb{R}^2$.

23. Fie (x_k) un șir convergent de puncte din $\mathbb{R}^n$ și $x := \lim\limits_{k\to\infty} x_k$. Să se demonstreze că mulțimea $A := \{x\} \cup \{ \, x_k \mid k = 1, 2, \dots \}$ este compactă.

24. Să se demonstreze că mulțimea

$$A := \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \;\middle|\; n, m \in \mathbb{N},\, n \geq m \right\}$$

este compactă în $\mathbb{R}$.

25. Să se demonstreze că dacă A este o submulțime compactă a lui $\mathbb{R}^n$, iar B este o submulțime compactă a lui $\mathbb{R}^m$, atunci mulțimea $A \times B$ este compactă în $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+m}$.

26. Fiind date mulțimile $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$, notăm

$$A + B := \{ \, x \in \mathbb{R}^n \mid \exists \, a \in A \text{ și } \exists \, b \in B \;:\; x = a + b \, \}.$$

a) Să se demonstreze că dacă una dintre mulțimile A și B este închisă, iar cealaltă este compactă, atunci mulțimea $A + B$ este închisă.

b) Dați exemplu de mulțimi închise A și B pentru care mulțimea $A + B$ nu este închisă.

27. Fie A și B submulțimi nevide ale lui $\mathbb{R}^n$ și fie

$$d(A, B) := \inf \{ \, d(x, y) \mid x \in A, \; y \in B \, \}.$$

a) Să se demonstreze că dacă $A = \{a\}$ și B este închisă, atunci există un $b \in B$ așa încât $d(A, B) = d(a, b)$.

b) Să se demonstreze că dacă A este compactă și B este închisă, atunci există $a \in A$ și există $b \in B$ așa încât $d(A, B) = d(a, b)$.

c) Arătați printr-un contraexemplu că afirmația de la b) nu rămâne adevărată în cazul când A și B sunt ambele închise dar niciuna compactă.

Berkeley 1978

28. Fiind dată mulțimea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ și numărul real $r > 0$, notăm

$$B := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \exists\, a \in A \ :\ \|x - a\| = r \}.$$

a) Să se reprezinte grafic mulțimea B în cazul în care $r = 1$, iar $A \subseteq \mathbb{R}^2$ este cercul cu centrul în $(0, 0)$ și de rază 2, respectiv segmentul care unește punctele $(0, 0)$ și $(1, 1)$.

b) Să se demonstreze că dacă A este închisă, atunci și B este închisă.

Berkeley 1989

29. (lema numărului Lebesgue) Fiind dată o mulțime mărginită $A \subseteq \mathbb{R}^n$, numărul real, definit prin

$$\sup \{ d(x, y) \mid x, y \in A \},$$

se numește diametrul mulțimii A. Să se demonstreze că dacă A este compactă, iar $(G_i)_{i \in I}$ este o acoperire deschisă a lui A, atunci există un număr real $\delta > 0$ cu următoarea proprietate: pentru orice submulțime B a lui A, având diametrul cel mult δ, există un $i \in I$ astfel ca $B \subseteq G_i$. (Orice număr δ cu această proprietate se numește *număr Lebesgue* al acoperirii $(G_i)_{i \in I}$.)

Berkeley 1986, 1994, 1996

1.6 Limite ale funcțiilor vectoriale de variabilă vectorială

1.6.1 Definiție. O funcție $f : A \to \mathbb{R}^m$, unde A este o submulțime nevidă a lui $\mathbb{R}$, se numește *funcție vectorială de variabilă reală*.

O funcție $f : A \to \mathbb{R}$, unde A este o submulțime nevidă a lui $\mathbb{R}^n$, se numește *funcție reală de variabilă vectorială*.

O funcție $f : A \to \mathbb{R}^m$, unde A este o submulțime nevidă a lui $\mathbb{R}^n$, se numește *funcție vectorială de variabilă vectorială*.

Fie A o submulțime nevidă a lui $\mathbb{R}^n$ și $f : A \to \mathbb{R}^m$ o funcție vectorială. Fie apoi $f_1, \ldots, f_m : A \to \mathbb{R}$ funcțiile reale definite în felul următor: dacă $x \in A$ și $f(x) = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m$, atunci $f_i(x) := y_i$ oricare ar fi $i \in \{1, \ldots, m\}$. Funcțiile $f_1, \ldots, f_m$ se numesc *componentele scalare* ale lui f. Se vede ușor că

$$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x)) \quad \text{pentru orice } x \in A.$$

In continuare vom folosi notația $f = (f_1, \ldots, f_m) : A \to \mathbb{R}^m$ atunci când dorim să punem în evidență componentele scalare ale lui f.

1.6.2 Definiţie (limita unei funcţii într-un punct)**.** Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in A'$, $f : A \to \mathbb{R}^m$ o funcție și $b \in \mathbb{R}^m$. Se spune că b este o *limită* a lui f în punctul a (sau că f *are limita* b *în punctul* a) dacă

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 \;\text{ a.î. } \forall\, x \in A \setminus \{a\} \text{ cu } \|x - a\| < \delta \;:\; \|f(x) - b\| < \varepsilon.$$

Se vede imediat că f are cel mult o limită în a. Faptul că b este limita lui f în punctul a se va nota prin $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

1.6.3 Teoremă (caracterizarea secvențială a limitei)**.** *Fie A o submulțime a lui $\mathbb{R}^n$, $a \in A'$, $f : A \to \mathbb{R}^m$ o funcție și $b \in \mathbb{R}^m$. Atunci $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ dacă și numai dacă pentru orice șir (x_k) de puncte din $A \setminus \{a\}$, care converge către a, avem $\lim\limits_{k \to \infty} f(x_k) = b$.*

Demonstrație. Necesitatea. Presupunem că $\lim_{x \to a} f(x) = b$. Fie (x_k) un șir oarecare de puncte din $A \setminus \{a\}$, astfel ca $(x_k) \to a$. Pentru a dovedi că $(f(x_k)) \to b$, fie $\varepsilon > 0$ arbitrar ales. Există atunci un $\delta > 0$ în așa fel încât pentru orice $x \in A \setminus \{a\}$, cu $\|x - a\| < \delta$, să avem $\|f(x) - b\| < \varepsilon$. Cum $(x_k) \to a$, există un $k_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $k \geq k_0$ să avem $\|x_k - a\| < \delta$. Drept urmare, avem $\|f(x_k) - b\| < \varepsilon$ oricare ar fi $k \geq k_0$. Deci $(f(x_k)) \to b$.

Suficiența. Presupunând că b nu este limita lui f în punctul a, rezultă că există un $\varepsilon > 0$ cu proprietatea că pentru orice $\delta > 0$ există cel puțin un punct $x \in A \setminus \{a\}$ astfel ca $\|x - a\| < \delta$ și $\|f(x) - b\| \geq \varepsilon$. In particular, pentru $\delta = 1/k$, rezultă că pentru fiecare $k \in \mathbb{N}$ există un punct $x_k \in A \setminus \{a\}$ în așa fel încât $\|x_k - a\| < 1/k$ și $\|f(x_k) - b\| \geq \varepsilon$. Atunci (x_k) este un șir de puncte din $A \setminus \{a\}$ și cum $\lim_{k \to \infty} \|x_k - a\| = 0$, avem $(x_k) \to a$. Conform ipotezei noastre, trebuie să avem $\lim_{k \to \infty} f(x_k) = b$, deci $\lim_{k \to \infty} \|f(x_k) - b\| = 0$. Dar această egalitate este în contradicție cu faptul că $\|f(x_k) - b\| \geq \varepsilon$ pentru orice $k \in \mathbb{N}$. Contradicția obținută arată că $\lim_{x \to a} f(x) = b$. $\square$

1.6.4 Teoremă. *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in A'$, $b, c \in \mathbb{R}^m$, $\alpha \in \mathbb{R}$ și fie $f, g : A \to \mathbb{R}^m$ funcții cu proprietatea $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$. Atunci*

$$\lim_{x\to a} \big(f(x) + g(x)\big) = b + c \quad \text{și} \quad \lim_{x\to a} \alpha f(x) = \alpha b.$$

Demonstrație. Rezultă din teoremele 1.3.3 și 1.6.3. □

1.6.5 Teoremă. *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in A'$, fie $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}^m$ şi fie funcțiile $f : A \to \mathbb{R}$, $g : A \to \mathbb{R}^m$ cu proprietatea $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ și $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$. Atunci $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = bc$.*

Demonstrație. Rezultă din teoremele 1.3.3 și 1.6.3. □

1.6.6 Observaţie. In general,

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a} g(x) = b \\[2ex] \lim\limits_{y\to b} f(y) = c \end{array}\right\} \quad \not\Rightarrow \quad \lim_{x\to a} (f \circ g)(x) = c.$$

Contraexemplu: fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcțiile definite prin

$$g(x) := \begin{cases} 1 & \text{dacă } x \neq 0 \\ 2 & \text{dacă } x = 0 \end{cases} \qquad \text{și} \quad f(y) := \begin{cases} 2 & \text{dacă } y \neq 1 \\ 3 & \text{dacă } y = 1. \end{cases}$$

Atunci

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \begin{cases} 3 & \text{dacă } x \neq 0 \\ 2 & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$

Avem $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1$, $\lim\limits_{y\to 1} f(y) = 2$, dar $\lim\limits_{x\to 0} (f \circ g)(x) = 3 \neq 2$.

1.6.7 Teoremă. *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq \mathbb{R}^m$, $a \in A'$, $b \in B'$, $c \in \mathbb{R}^p$ și fie $g : A \to B$ și $f : B \to \mathbb{R}^p$ funcții care îndeplinesc următoarele condiții:*

(i) *$\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$ și $\lim\limits_{y\to b} f(y) = c$;*

(ii) *există $r > 0$ astfel încât pentru orice $x \in A \setminus \{a\}$ cu $\|x - a\| < r$ să avem $g(x) \neq b$.*

Atunci $\lim\limits_{x\to a} (f \circ g)(x) = c$.

Demonstrație. Fie (x_k) un șir arbitrar de puncte din $A \setminus \{a\}$, cu proprietatea că $(x_k) \to a$. Notăm $y_k := g(x_k)$ $(k \in \mathbb{N})$. Atunci teorema 1.6.3 garantează că $(y_k) \to b$. Cum (x_k) converge către a, există un $k_0 \in \mathbb{N}$ astfel ca $\|x_k - a\| < r$ oricare ar fi $k \geq k_0$. Prin urmare, avem $y_k = g(x_k) \neq b$ oricare ar fi $k \geq k_0$.

Așadar, $(y_k)_{k\geq k_0}$ este un șir din $B \setminus \{b\}$, care converge către b. Aplicând din nou teorema 1.6.3, deducem că $\lim\limits_{k\to\infty} f(y_k) = c$, adică $\lim\limits_{k\to\infty} (f \circ g)(x_k) = c$. Intrucât șirul (x_k) a fost arbitrar, din partea de suficiență a teoremei 1.6.3 rezultă că $\lim\limits_{x\to a}(f \circ g)(x) = c$. □

1.6.8 Teoremă. *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in A'$, $f : A \to \mathbb{R}^m$ o funcție și $b \in \mathbb{R}^m$. Atunci $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ dacă și numai dacă $\lim\limits_{x\to a} \|f(x) - b\| = 0$.*

Demonstrație. Imediată (se aplică definiția 1.6.2 funcțiilor f și $g : A \to \mathbb{R}$, $g(x) := \|f(x) - b\|$). □

1.6.9 Teoremă. *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in A'$, $f = (f_1, \dots, f_m) : A \to \mathbb{R}^m$ o funcție și fie $b := (b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^m$. Atunci*

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \quad \Leftrightarrow \quad \forall\ i \in \{1, \dots, m\}\ :\ \lim_{x\to a} f_i(x) = b_i.$$

Demonstrație. Se aplică teoremele 1.6.3 și 1.3.4. □

1.7 Continuitatea funcțiilor vectoriale de variabilă vectorială

1.7.1 Definiţie. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ și fie $a \in A$. O funcție $f : A \to \mathbb{R}^m$ se numește *continuă* în punctul a dacă

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ \delta > 0\ \ \text{a.î.}\ \forall\ x \in A \text{ cu } \|x - a\| < \delta\ :\ \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon.$$

1.7.2 Observaţie. O funcție $f : A \to \mathbb{R}^m$ este continuă în toate punctele izolate ale lui A. In adevăr, fie a un punct izolat al lui A și fie $\varepsilon > 0$. Există o vecinătate V a lui a astfel ca $V \cap A = \{a\}$. Alegem $\delta > 0$ în așa fel încât $B(a, \delta) \subseteq V$. Atunci $B(a, \delta) \cap A = \{a\}$, deci singurul punct $x \in A$ care satisface $\|x - a\| < \delta$ este $x = a$. Evident, pentru $x = a$ inegalitatea $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$ are loc. In consecință, f este continuă în a.

1.7.3 Teoremă (caracterizarea secvențială a continuităţii). *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ și fie $a \in A$. O funcție $f : A \to \mathbb{R}^m$ este continuă în punctul a dacă și numai dacă pentru orice șir (x_k) de puncte din A, care converge către a, avem $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = f(a)$.*

Demonstrație. Este asemănătoare cu demonstrația teoremei 1.6.3. □

1.7.4 Teoremă (continuitate vs. limită)**.** *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ și fie $a \in A \cap A'$. O funcție $f : A \to \mathbb{R}^m$ este continuă în a dacă și numai dacă $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.*

Demonstrație. Necesitatea. Rezultă din teoremele 1.6.3 și 1.7.3.

Suficiența. Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar. Cum $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$, există un $\delta > 0$ astfel încât pentru orice $x \in A \setminus \{a\}$ cu $\|x - a\| < \delta$ să avem $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$. Dar această inegalitate este evident adevărată și pentru $x = a$. In consecință, pentru orice $x \in A$ cu $\|x - a\| < \delta$ avem $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$. Aceasta înseamnă că f este continuă în a. □

1.7.5 Teoremă. *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in A$, $f, g : A \to \mathbb{R}^m$ funcții continue în a și fie $\alpha \in \mathbb{R}$. Atunci funcțiile αf și $f + g$ sunt continue în a.*

Demonstrație. Se aplică teoremele 1.7.3 și 1.3.3. □

1.7.6 Teoremă. *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in A$, și fie $f : A \to \mathbb{R}$, $g : A \to \mathbb{R}^m$ funcții continue în a. Atunci și funcţia fg este continuă în a.*

Demonstrație. Se aplică teoremele 1.7.3 și 1.3.3. □

1.7.7 Teoremă. *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in A$, $B \subseteq \mathbb{R}^m$, $g : A \to B$ o funcţie continuă în a și $f : B \to \mathbb{R}^p$ o funcție continuă în punctul $g(a)$. Atunci funcția $f \circ g$ este continuă în a.*

Demonstrație. Fie (x_k) un șir oarecare de puncte din A, care converge către a. Cum g este continuă în a, în baza teoremei 1.7.3 avem $(g(x_k)) \to g(a) =: b$. Deoarece f este continuă în b, tot în baza teoremei 1.7.3 deducem că

$$\lim_{k\to\infty} f(g(x_k)) = f(b) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{k\to\infty} (f \circ g)(x_k)) = (f \circ g)(a).$$

Intrucât șirul (x_k) a fost arbitrar, partea de suficienţă a teoremei 1.7.3 asigură că $f \circ g$ este continuă în a. □

1.7.8 Teoremă. *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in A$ și $f = (f_1, \dots, f_m) : A \to \mathbb{R}^m$ o funcție. Atunci f este continuă în punctul a dacă și numai dacă f_i este continuă în a pentru fiecare $i \in \{1, \dots, m\}$.*

Demonstrație. Se aplică teoremele 1.7.3 și 1.3.4. □

1.7.9 Teoremă. *Dacă $A \subseteq \mathbb{R}^n$ este o mulțime compactă, iar $f : A \to \mathbb{R}^m$ este o funcție continuă, atunci mulțimea $f(A)$ este compactă.*

Demonstrație. Fie (y_k) un șir arbitrar de puncte din $f(A)$. Pentru fiecare $k \in \mathbb{N}$ există un $x_k \in A$ astfel ca $y_k = f(x_k)$. Intrucât A este compactă, conform implicației $1° \Rightarrow 3°$ din teorema 1.4.4, șirul (x_k) posedă un subşir (x_{k_j}) convergent către un punct $x \in A$. Continuitatea lui f în a și teorema 1.7.3 implică $\lim\limits_{j\to\infty} f(x_{k_j}) = f(x)$, adică $\lim\limits_{j\to\infty} y_{k_j} = f(x)$. Așadar, şirul (y_k) posedă subșirul (y_{k_j}), convergent către $f(x) \in f(A)$. In baza implicaţiei $3° \Rightarrow 1°$ din teorema 1.4.4, deducem că mulțimea $f(A)$ este compactă. □

1.7.10 Teoremă (K. Weierstrass)**.** *Dacă $A \subseteq \mathbb{R}^n$ este o mulțime compactă nevidă, iar $f : A \to \mathbb{R}$ este o funcție continuă pe A, atunci f este mărginită și își atinge marginile.*

Demonstrație. Conform teoremei 1.7.9, $f(A)$ este o submulţime compactă a lui $\mathbb{R}$. In baza implicației $1° \Rightarrow 4°$ din teorema 1.4.4, rezultă că:
- $f(A)$ este mărginită, deci f este mărginită;
- $f(A)$ este închisă, deci $f(A)$ își conţine atât marginea inferioară cât și marginea superioară. Cu alte cuvinte, f își atinge marginile. □

1.8 Probleme

1. Dați exemplu de funcții f, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, care îndeplinesc următoarele condiții:

(i) $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1$;

(ii) $\lim\limits_{y\to 1} f(y) = 2$;

(iii) $\lim\limits_{x\to 0} (f \circ g)(x) \neq 2$.

2. Să se calculeze următoarele limite:

1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(x^2 + y^2\right) \sin \dfrac{1}{xy}$;

2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} \dfrac{\sin(xy)}{x}$;

3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$;

4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$;

5) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3 + y^3}{xy}$;

6) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos\left(x^3+y^3\right)}{x^2+y^2}$;

7) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}-1}$;

8) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{1+x^2y^2}-1}{x^2+y^2}$;

9) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos\left(x^2+y^2\right)}{x^2y^2(x^2+y^2)}$;

10) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{x^4+y^4}$;

11) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(1+x^2y^2\right)^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$;

12) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\sin y-y\sin x}{x^2+y^2}$;

13) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos x\cos y}{x^2+y^2}$;

14) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy-\sin x\sin y}{xy(x^2+y^2)}$;

15) $\displaystyle\lim_{(x_1,\ldots,x_n)\to 0_n} \frac{x_1\cdots x_n}{x_1^2+\cdots+x_n^2}, \qquad n\in\mathbb{N}$;

16) $\displaystyle\lim_{(x_1,\ldots,x_n)\to 0_n} \frac{x_1^p+\cdots+x_n^p}{x_1\cdots x_n}, \qquad n,p\in\mathbb{N}$;

17) $\displaystyle\lim_{(x_1,\ldots,x_n)\to 0_n} \frac{1-\cos x_1\cdots\cos x_n}{x_1^2+\cdots+x_n^2}$;

18) $\displaystyle\lim_{(x_1,\ldots,x_n)\to 0_n} \frac{x_1\cdots x_n-\sin x_1\cdots\sin x_n}{x_1\cdots x_n(x_1^2+\cdots+x_n^2)}$.

3. Fie A o submulțime compactă a lui $\mathbb{R}^n$, fără puncte izolate, iar $f : A\to\mathbb{R}$ o funcție având limită finită în fiecare punct al lui A. Să se demonstreze că f este mărginită.

4. Fie $A=[0,1)\times[0,1)$ și $f : A\to\mathbb{R}$ funcția definită prin

$$f(x,y)=\sum_{\frac{1}{2}\le\frac{m}{n}\le 2} x^m y^n,$$

unde sumarea se face pentru toate perechile de numere naturale (m, n) care satisfac inegalitățile indicate. Să se determine

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} (1 - xy^2)(1 - x^2y) f(x, y).$$

Concursul William Lowell Putnam 1999

5. Să se demonstreze că pentru orice număr natural $n \geq 2$ există o funcție $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că toate cele $n!$ limite iterate

$$\lim_{x_{\sigma(1)}\to 0} \lim_{x_{\sigma(2)}\to 0} \cdots \lim_{x_{\sigma(n)}\to 0} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad \sigma \in S_n$$

există și sunt distincte două câte două.

Olimpiadă studențească, U.R.S.S.

6. Fie B o submulțime închisă a lui $\mathbb{R}^n$ și $f_1, \ldots, f_p, g_1, \ldots, g_q : B \to \mathbb{R}$ funcții continue pe B. Să se demonstreze că mulțimea

$$A = \{\, x \in B \mid f_i(x) = 0,\ i = 1, \ldots, p,\ g_j(x) \leq 0,\ j = 1, \ldots, q \,\}$$

este închisă.

7. Fie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ o funcţie continuă pe $\mathbb{R}^n$ şi fie B o submulţime deschisă a lui $\mathbb{R}^m$. Să se demonstreze că mulţimea

$$f^{-1}(B) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \in B\}$$

este deschisă în $\mathbb{R}^n$.

8. Fie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ o funcţie continuă pe $\mathbb{R}^n$ şi fie B o submulţime închisă a lui $\mathbb{R}^m$. Să se demonstreze că mulţimea

$$f^{-1}(B) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \in B\}$$

este închisă în $\mathbb{R}^n$.

9. Să se demonstreze că norma euclidiană este o funcție continuă de la $\mathbb{R}^n$ în $[0, \infty)$.

10. Conform teoremei lui Weierstrass, dacă $A \subseteq \mathbb{R}^n$ este o mulțime compactă, atunci orice funcție continuă $f : A \to \mathbb{R}$ este mărginită (și chiar își atinge marginile). Demonstrați reciproca: dacă A este o submulțime a lui $\mathbb{R}^n$ cu proprietatea că orice funcție continuă $f : A \to \mathbb{R}$ este mărginită, atunci A este compactă.

Berkeley 1987

11. Să se demonstreze că dacă $A \subseteq \mathbb{R}^n$ este o mulțime convexă, compactă, nevidă, iar $f : A \to \mathbb{R}$ este o funcție continuă pe A, atunci $f(A)$ este un interval compact.

12. Să se determine toate funcțiile continue $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, cu proprietatea că

$$f(x_1, x_2) = f(x_1 + x_2, x_1 - x_2) \quad \text{oricare ar fi } (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

13. Fie A o submulțime compactă nevidă a lui $\mathbb{R}^n$ și $f : A \to A$ o funcție cu proprietatea

$$\forall \;\; x, y \in A \text{ cu } x \neq y \;\; : \qquad \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|.$$

Să se demonstreze că f are un unic punct fix în A.

14. Fie $f : B(0_n, 1) \to B(0_n, 1)$ o funcție continuă cu proprietatea

$$\forall \;\; x \in B(0_n, 1) \setminus \{0_n\} \;\; : \qquad \|f(x)\| < \|x\|.$$

Fiind dat un punct oarecare $x_0 \in B(0_n, 1)$, se construiește recursiv șirul (x_k) punând $x_k := f(x_{k-1})$. Să se demonstreze că $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = 0_n$.

Berkeley 1991

Capitolul 2

Calcul diferențial în $\mathbb{R}^n$

2.1 Spațiul normat al aplicațiilor liniare

2.1.1 Definiție (aplicații liniare)**.** O aplicație $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ se numește *liniară* dacă

$$\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \forall\ x, y \in \mathbb{R}^n \ : \quad \varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y).$$

Notăm

$$L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) := \{\, \varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \mid \varphi \text{ este aplicație liniară} \,\}.$$

Se constată imediat că, dacă $\varphi \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, atunci $\varphi(0_n) = 0_m$ și

$$\forall\ x \in \mathbb{R}^n \ : \quad \varphi(-x) = -\varphi(x).$$

De asemenea, se arată ușor (prin inducție) că pentru orice $k \in \mathbb{N}$, orice scalari $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ și orice puncte $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^n$ are loc egalitatea

$$\varphi(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k) = \alpha_1\varphi(x_1) + \cdots + \alpha_k\varphi(x_k).$$

2.1.2 Teoremă (forma generală a aplicațiilor liniare de la $\mathbb{R}^n$ în $\mathbb{R}^m$)**.** *O aplicație $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este liniară dacă și numai dacă există n puncte $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^m$ în așa fel încât*

$$\varphi(x) = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n \quad \textit{oricare ar fi } x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Demonstrație. Necesitatea. Notăm $v_1 := \varphi(e_1)$, …, $v_n := \varphi(e_n)$, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ fiind baza canonică a spațiului $\mathbb{R}^n$. Atunci $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^m$ şi pentru orice $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ avem

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \varphi(x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n) = x_1\varphi(e_1) + \cdots + x_n\varphi(e_n) \\
&= x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n.
\end{aligned}$$

Suficiența. Fie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ și $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ puncte din $\mathbb{R}^n$. Atunci $\alpha x + \beta y = (\alpha x_1 + \beta y_1, \ldots, \alpha x_n + \beta y_n)$, deci

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha x + \beta y) &= (\alpha x_1 + \beta y_1)v_1 + \cdots + (\alpha x_n + \beta y_n)v_n \\ &= \alpha(x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n) + \beta(y_1 v_1 + \cdots + y_n v_n) \\ &= \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y).\end{aligned}$$

Prin urmare, φ este liniară. □

2.1.3 Consecință (forma generală a aplicațiilor liniare de la $\mathbb{R}^n$ în $\mathbb{R}$)**.** *O aplicație $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ este liniară dacă și numai dacă există un punct $v \in \mathbb{R}^n$ așa încât*

$$\varphi(x) = \langle x, v\rangle \quad \textit{oricare ar fi } x \in \mathbb{R}^n.$$

Demonstrație. Necesitatea. Adnițând că φ este liniară, în baza părții de necesitate a teoremei 2.1.2 rezultă că există $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\varphi(x) = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n \quad \text{oricare ar fi } x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Notând $v := (v_1, \ldots, v_n)$, avem $v \in \mathbb{R}^n$ și $\varphi(x) = \langle x, v\rangle$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}^n$.

Suficiența. Este evidentă. □

2.1.4 Definiție (matricea unei aplicații liniare)**.** Fie $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Atunci $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)$ sunt puncte ale lui $\mathbb{R}^m$. Fie

$$\begin{aligned}&\varphi(e_1) := (v_{11}, v_{12}, \ldots, v_{1m}), \quad v_{1i} = \varphi_i(e_1), \quad i = 1, \ldots, m,\\ &\varphi(e_2) := (v_{21}, v_{22}, \ldots, v_{2m}), \quad v_{2i} = \varphi_i(e_2), \quad i = 1, \ldots, m,\\ &\vdots\\ &\varphi(e_n) := (v_{n1}, v_{n2}, \ldots, v_{nm}), \quad v_{ni} = \varphi_i(e_n), \quad i = 1, \ldots, m.\end{aligned}$$

Construim matricea

$$[\varphi] := (\varphi_i(e_j))_{i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}} = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} & \ldots & v_{n1} \\ v_{12} & v_{22} & \ldots & v_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{1m} & v_{2m} & \ldots & v_{nm}\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}.$$

Ea se numește *matricea aplicației liniare* φ. Se observă că pe prima coloană în $[\varphi]$ se află vectorul $\varphi(e_1)$, pe coloana a doua se află vectorul $\varphi(e_2)$, …, pe coloana n se află vectorul $\varphi(e_n)$. Pentru orice punct $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ are loc egalitatea

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \vdots \\ \varphi_m(x) \end{pmatrix} = [\varphi] \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \tag{1}$$

2.1.5 Observație. Atunci când intervine în egalități matriciale, un punct $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ va fi identificat cu matricea coloană $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$. Astfel, putem scrie

$$\langle x, y\rangle = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x^T y.$$

In particular, $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle = x^T x$. De asemenea, cu convenția de mai sus, egalitatea (1) poate fi rescrisă matricial sub forma

$$\varphi(x) = [\varphi] \cdot x.$$

2.1.6 Teoremă. *Dacă $a, b \in \mathbb{R}$, iar $\varphi, \psi \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, atunci $a\varphi + b\psi \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ și are loc egalitatea $[a\varphi + b\psi] = a[\varphi] + b[\psi]$.*

Demonstrație. Imediată. □

Din teorema 2.1.6 rezultă că mulțimea $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, înzestrată cu operațiile de adunare a funcțiilor și respectiv de înmulțire a unei funcții cu un scalar real, este un spațiu liniar real. In acest spațiu liniar, originea este funcția $\forall\ x \in \mathbb{R}^n \ \mapsto\ 0_m \in \mathbb{R}^m$, iar opusa unei aplicații $\varphi \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ este aplicația $\forall\ x \in \mathbb{R}^n \ \mapsto\ -\varphi(x) \in \mathbb{R}^m$. De asemenea, funcția

$$\forall\ \varphi \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \ \longmapsto\ [\varphi] \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

este un izomorfism între spațiile liniare reale $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ și $\mathbb{R}^{m\times n}$.

2.1.7 Teoremă. *Dacă $\varphi \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ și $\psi \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$ atunci $\psi \circ \varphi \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ și are loc egalitatea $[\psi \circ \varphi] = [\psi] \cdot [\varphi]$.*

Demonstrație. Imediată. □

2.1.8 Teoremă. *Aplicația* $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *este liniară dacă și numai dacă toate aplicațiile* $\varphi_1, \ldots, \varphi_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *sunt liniare.*

Demonstrație. Imediată. $\square$

2.1.9 Teoremă. *Orice aplicație liniară* $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *este o funcţie Lipschitz.*

Demonstrație. Fie $x = (x_1, \ldots, x_n)$ un punct arbitrar din $\mathbb{R}^n$. Avem

$$\varphi(x) = \varphi(x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n) = x_1 \varphi(e_1) + \cdots + x_n \varphi(e_n),$$

deci

$$\begin{aligned} \|\varphi(x)\| &\leq |x_1| \, \|\varphi(e_1)\| + \cdots + |x_n| \, \|\varphi(e_n)\| \\ &\leq \|x\| \, \|\varphi(e_1)\| + \cdots + \|x\| \, \|\varphi(e_n)\|. \end{aligned}$$

Notând $\alpha := \|\varphi(e_1)\| + \cdots + \|\varphi(e_n)\|$, deducem că $\|\varphi(x)\| \leq \alpha \|x\|$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}^n$. Pentru orice $x, x' \in \mathbb{R}^n$ avem atunci

$$\|\varphi(x) - \varphi(x')\| = \|\varphi(x - x')\| \leq \alpha \|x - x'\|,$$

deci φ este o funcție Lipschitz. $\square$

2.1.10 Definiţie (norma unei aplicații liniare)**.** Din teorema 2.1.9 rezultă că orice aplicaţie $\varphi \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ este continuă pe $\mathbb{R}^n$. Notăm

$$S^{n-1} := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\},$$

sfera cu centrul în origine și de rază 1 din $\mathbb{R}^n$. Fiind mărginită și închisă, S^{n-1} este o submulțime compactă a lui $\mathbb{R}^n$, conform teoremei 1.4.4. Deoarece funcția $\forall\ x \in \mathbb{R}^n \ \mapsto\ \|\varphi(x)\| \in [0, \infty)$ este continuă, în baza teoremei lui Weierstrass putem introduce numărul real

$$\|\varphi\| := \max_{x \in S^{n-1}} \|\varphi(x)\|.$$

Acesta se numește *norma aplicației liniare* φ.

2.1.11 Teoremă. *Dacă* $\varphi \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ *și* $\psi \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$ *atunci următoarele afirmații sunt adevărate:*

1° $\|\varphi(x)\| \leq \|\varphi\| \cdot \|x\|$ *oricare ar fi* $x \in \mathbb{R}^n$.

2° $\|\psi \circ \varphi\| \leq \|\psi\| \cdot \|\varphi\|$.

Demonstrație. 1° Fie $x \in \mathbb{R}^n$. Dacă $x = 0_n$, atunci inegalitatea din enunț are loc cu egalitate. Presupunând $x \neq 0_n$, notăm $y := \frac{1}{\|x\|}\, x$. Atunci $y \in S^{n-1}$, deci

$$\|\varphi\| \geq \|\varphi(y)\| = \left\| \varphi\left(\frac{1}{\|x\|}\, x\right) \right\| = \frac{1}{\|x\|}\, \|\varphi(x)\|.$$

In consecință, avem $\|\varphi(x)\| \leq \|\varphi\| \cdot \|x\|$.

2° Conform teoremei 2.1.7, avem $\psi \circ \varphi \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$. Fie $x_0 \in S^{n-1}$ un punct cu proprietatea $\|(\psi \circ \varphi)(x_0)\| = \|\psi \circ \varphi\|$. Folosind inegalitatea de la 1° pentru ψ în locul lui φ și $\varphi(x_0)$ în locul lui x, avem

$$\|\psi \circ \varphi\| = \|\psi(\varphi(x_0))\| \leq \|\psi\| \cdot \|\varphi(x_0)\| \leq \|\psi\| \cdot \|\varphi\|.$$

□

2.1.12 Teoremă. *Funcția* $\|\cdot\| : L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \to [0, \infty)$ *este o normă pe spațiul liniar real* $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

Demonstrație. Trebuie să arătăm că funcția $\|\cdot\|$ îndeplinește următoarele condiții:

(N1) $\|\varphi\| = 0 \;\Leftrightarrow\; \varphi = 0$;

(N2) $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}\ \forall\, \varphi \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)\ :\ \|\alpha\varphi\| = |\alpha|\|\varphi\|$;

(N3) $\forall\, \varphi, \psi \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)\ :\ \|\varphi + \psi\| \leq \|\varphi\| + \|\psi\|$.

(N1) Conform teoremei 2.1.11 avem

$$\|\varphi\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n\ :\ \varphi(x) = 0_m \quad \Leftrightarrow \quad \varphi = 0.$$

(N2) Fie $x_0 \in S^{n-1}$ așa încât $\|\varphi\| = \|\varphi(x_0)\|$ Avem

- $\forall\, x \in S^{n-1}\ :\ \ \|(\alpha\varphi)(x)\| = \|\alpha\varphi(x)\| = |\alpha|\|\varphi(x)\| \leq |\alpha|\|\varphi\|$,
- $\|(\alpha\varphi)(x_0)\| = |\alpha|\|\varphi(x_0)\| = |\alpha|\|\varphi\|$,

deci $|\alpha|\|\varphi\| = \max\limits_{x \in S^{n-1}} \|(\alpha\varphi)(x)\| = \|\alpha\varphi\|$.

(N3) Fie $x_0 \in S^{n-1}$ astfel ca $\|(\varphi + \psi)(x_0)\| = \|\varphi + \psi\|$. Avem atunci

$$\|\varphi + \psi\| = \|\varphi(x_0) + \psi(x_0)\| \leq \|\varphi(x_0)\| + \|\psi(x_0)\| \leq \|\varphi\| + \|\psi\|.$$

□

2.1.13 Teoremă. *Dacă $\varphi \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, atunci următoarele afirmații sunt echivalente:*

1° *φ este bijectivă.*
2° *φ este injectivă.*
3° *φ este surjectivă.*
4° $\det[\varphi] \neq 0$.

Demonstrație. Se știe de la cursul de Algebră liniară. □

2.1.14 Teoremă. *Dacă $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ este o aplicație liniară bijectivă, atunci $\varphi^{-1} \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ și are loc egalitatea $[\varphi^{-1}] = [\varphi]^{-1}$.*

Demonstrație. Imediată. □

2.2 Probleme

1. Fie $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ aplicația liniară având matricea $[\varphi] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.
Să se determine $\|\varphi\|$.

2. Fie $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ și $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ aplicația liniară definită prin

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) := a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n.$$

Să se demonstreze că $\|\varphi\| = \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}$.

3. Fie $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ și $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ aplicația liniară având matricea

$$[\varphi] = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}.$$

Să se determine $\|\varphi\|$.

4. Fie $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ o aplicație liniară având matricea $[\varphi] = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$.
Să se demonstreze că are loc inegalitatea

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2}{n}} \leq \|\varphi\| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2}.$$

5. Fie $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ o aplicaţie liniară având matricea $[\varphi] \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Să se demonstreze că $\|\varphi\| = \sqrt{\lambda^*}$, unde λ^* este cea mai mare valoare proprie a matricei simetrice $[\varphi]^T \cdot [\varphi]$.

6. Să se demonstreze că pentru orice $a, b, c \in \mathbb{R}^n$ are loc inegalitatea

$$\Big(\|a\|\langle b,c\rangle\Big)^2 + \Big(\|b\|\langle a,c\rangle\Big)^2 \le \|a\|\,\|b\|\,\|c\|^2\Big(\|a\|\,\|b\| + |\langle a,b\rangle|\Big).$$

SEEMOUS 2011

2.3 Derivata unei funcții vectoriale de variabilă reală

2.3.1 Definiție. Fie $A \subseteq \mathbb{R}$, $a \in A \cap A'$ și $f : A \to \mathbb{R}^m$ o funcție. Dacă există un element $\ell \in \mathbb{R}^m$ așa încât

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{x-a}\big[f(x) - f(a)\big] = \ell,$$

atunci se spune că f *este derivabilă în punctul* a, iar ℓ se numește *derivata funcției* f în a și se notează cu $f'(a)$ sau cu $\dfrac{df}{dx}(a)$.

2.3.2 Teoremă. *Fie $A \subseteq \mathbb{R}$, $a \in A \cap A'$ și $f = (f_1, \ldots, f_m) : A \to \mathbb{R}^m$ o funcție. Atunci următoarele afirmații sunt adevărate:*

1° *Dacă f este derivabilă în punctul a, atunci $f_1, \ldots, f_m$ sunt derivabile în a și are loc egalitatea*

$$f'(a) = (f_1'(a), \ldots, f_m'(a)). \tag{1}$$

2° *Dacă $f_1, \ldots, f_m$ sunt derivabile în punctul a, atunci f este derivabilă în a și are loc egalitatea* (1).

Demonstrație. Avem $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$ pentru orice $x \in A$, deci

$$\frac{1}{x-a}\big[f(x) - f(a)\big] = \left(\frac{f_1(x) - f_1(a)}{x-a}, \ldots, \frac{f_m(x) - f_m(a)}{x-a}\right)$$

pentru orice $x \in A\backslash\{a\}$. Ținând seama de această egalitate, cele două afirmații sunt consecințe imediate ale teoremei 1.6.9. $\square$

Proprietățile privind operații cu funcții reale de variabilă reală derivabile se transpun imediat la cadrul funcțiilor vectoriale de variabilă reală derivabile. Teorema de medie nu rămâne însă adevărată sub forma unei egalități în cazul funcțiilor vectoriale de variabilă reală.

Contraexemplu: fie $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $f(x) := (\cos x, \sin x)$. Se constată imediat că nu există niciun $c \in (0, 2\pi)$ astfel ca $f(2\pi) - f(0) = 2\pi f'(c)$.

2.3.3 Teoremă (teorema de medie pentru funcții vectoriale de variabilă reală)**.** *Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ o funcție continuă pe $[a,b]$ și derivabilă pe (a,b). Atunci există un punct $c \in (a,b)$ aşa încât*

$$\|f(b) - f(a)\| \leq (b-a)\|f'(c)\|.$$

Demonstrație. Dacă $f(a) = f(b)$, atunci c poate fi ales arbitrar în (a,b). Presupunem în continuare că $f(a) \neq f(b)$. Considerăm vectorul

$$v := \frac{1}{\|f(b) - f(a)\|}\big[f(b) - f(a)\big] \in \mathbb{R}^m$$

și cu ajutorul său definim funcția $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ prin $g(x) := \langle v, f(x)\rangle$. Dacă $v_1, \ldots, v_m$ sunt coordonatele lui v, iar $f_1, \ldots, f_m$ sunt componentele scalare ale lui f, atunci

$$g(x) = v_1 f_1(x) + \cdots + v_m f_m(x) \quad \text{oricare ar fi } x \in [a,b].$$

Deoarece f este continuă pe $[a,b]$, toate funcțiile $f_1, \ldots, f_m$ sunt continue pe $[a,b]$ conform teoremei 1.7.8, deci g este continuă pe $[a,b]$. Pe de altă parte, deoarece f este derivabilă pe (a,b), toate funcțiile $f_1, \ldots, f_m$ sunt derivabile pe (a,b) conform teoremei 2.3.2, deci g este derivabilă pe (a,b). In plus, pentru orice $x \in (a,b)$ avem

$$g'(x) = v_1 f_1'(x) + \cdots + v_m f_m'(x) = \langle v, f'(x)\rangle.$$

Aplicând lui g teorema de medie pentru funcții reale de variabilă reală (teorema lui Lagrange), deducem existența unui punct $c \in (a,b)$ astfel încât

$$g(b) - g(a) = (b-a)g'(c),$$

adică

$$\langle v, f(b) - f(a)\rangle = (b-a)\langle v, f'(c)\rangle.$$

Conform inegalității lui Cauchy–Buniakovski–Schwarz, avem

$$\langle v, f(b) - f(a)\rangle \leq (b-a)\|v\| \cdot \|f'(c)\|.$$

Dar $\|v\| = 1$, iar $\langle v, f(b) - f(a)\rangle = \|f(b) - f(a)\|$. In concluzie, punctul c satisface inegalitatea $\|f(b) - f(a)\| \leq (b-a)\|f'(c)\|$. $\square$

2.4 Diferențiabilitatea unei funcții vectoriale de variabilă vectorială

2.4.1 Lemă. *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in \operatorname{int} A$ și fie $f : A \to \mathbb{R}^m$ o funcție. Dacă $\varphi_1, \varphi_2 \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ sunt aplicații liniare cu proprietatea*

$$(1) \qquad \lim_{x \to a} \frac{1}{\|x-a\|} \big[f(x) - f(a) - \varphi_i(x-a)\big] = 0_m, \quad i = 1, 2,$$

atunci $\varphi_1 = \varphi_2$.

Demonstrație. Fixăm un punct oarecare $v \in \mathbb{R}^n$ și dovedim că $\varphi_1(v) = \varphi_2(v)$. Această egalitate fiind evident adevărată pentru $v = 0_n$, presupunem în continuare că $v \neq 0_n$. Fie $r > 0$ astfel ca $B(a, r) \subseteq A$. Intrucât $\|a+tv-a\| = |t| \cdot \|v\|$, notând $\delta := r/\|v\|$, avem $a + tv \in B(a, r)$ pentru orice $t \in (-\delta, \delta)$. Definind $h : (-\delta, \delta) \to B(a, r)$ prin $h(t) := a + tv$, avem

$$(2) \qquad \lim_{t \to 0} h(t) = a \quad \text{și} \quad h(t) \neq a \text{ oricare ar fi } t \in (-\delta, \delta) \setminus \{0\}.$$

Pe de altă parte, pentru orice $x \in A \setminus \{a\}$ avem

$$(3) \qquad \begin{aligned} &\frac{1}{\|x-a\|} \big[\varphi_1(x-a) - \varphi_2(x-a)\big] \\ &\quad = \frac{1}{\|x-a\|} \big[f(x) - f(a) - \varphi_2(x-a)\big] \\ &\qquad - \frac{1}{\|x-a\|} \big[f(x) - f(a) - \varphi_1(x-a)\big]. \end{aligned}$$

Definind $g : A \setminus \{a\} \to \mathbb{R}^m$ prin $g(x) := \dfrac{1}{\|x-a\|} \big[\varphi_1(x-a) - \varphi_2(x-a)\big]$, din (1) și (3) rezultă că

$$(4) \qquad \lim_{x \to a} g(x) = 0_m.$$

Din (2) și (4), în baza teoremei 1.6.7, deducem că $\lim\limits_{t \to 0} (g \circ h)(t) = 0_m$, deci

$$(5) \qquad \lim_{t \searrow 0} (g \circ h)(t) = 0_m.$$

Dar, pentru orice $t \in (0, \delta)$ avem

$$(6) \qquad \begin{aligned} (g \circ h)(t) &= \frac{1}{\|a+tv-a\|} \big[\varphi_1(a+tv-a) - \varphi_2(a+tv-a)\big] \\ &= \frac{1}{t\|v\|} \cdot t\big[\varphi_1(v) - \varphi_2(v)\big] = \frac{1}{\|v\|} \big[\varphi_1(v) - \varphi_2(v)\big]. \end{aligned}$$

Din (5) și (6) rezultă acum că $\varphi_1(v) = \varphi_2(v)$. $\square$

2.4.2 Definiție (diferențiala unei funcții vectoriale de variabilă vectorială)**.** Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in \operatorname{int} A$ și $f : A \to \mathbb{R}^m$ o funcție. Dacă există o aplicație liniară $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ în așa fel încât

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{\|x-a\|} \big[f(x) - f(a) - \varphi(x-a)\big] = 0_m, \tag{7}$$

atunci se spune că funcția f este *diferențiabilă (în sens Fréchet)* în punctul a. Dacă f este diferențiabilă în punctul a, atunci lema 2.4.1 arată că există o singură aplicație liniară $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ care satisface (7). Această unică aplicație liniară φ se numeşte *diferențiala (Fréchet)* a lui f în punctul a și va fi notată cu $df(a)$.

Așadar, dacă f este diferențiabilă în a, atunci

$$df(a) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \quad \text{și} \quad \forall \;\; x \in \mathbb{R}^n \;\; : \quad df(a)(x) \in \mathbb{R}^m.$$

De asemenea, avem

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{\|x-a\|} \big[f(x) - f(a) - df(a)(x-a)\big] = 0_m. \tag{8}$$

2.4.3 Propoziție. *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in \operatorname{int} A$ și $f : A \to \mathbb{R}^m$ o funcţie. Atunci următoarele afirmații sunt adevărate:*

1° *Dacă f este diferențiabilă în a, atunci există o funcție $\omega : A \to \mathbb{R}^m$, cu următoarele proprietăți:*

$$\lim_{x \to a} \omega(x) = 0_m \tag{9}$$

și

$$f(x) = f(a) + df(a)(x-a) + \|x-a\|\omega(x) \quad \textit{oricare ar fi } x \in A. \tag{10}$$

2° *Dacă există o aplicație liniară $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ și o funcție $\omega : A \to \mathbb{R}^m$ așa încât să aibă loc* (9) *și*

$$f(x) = f(a) + \varphi(x-a) + \|x-a\|\omega(x) \quad \textit{oricare ar fi } x \in A, \tag{11}$$

atunci f este diferențiabilă în a și $df(a) = \varphi$.

Demonstrație. 1° Dacă f este diferențiabilă în punctul a, atunci are loc (8). Fie $\omega : A \to \mathbb{R}^m$ funcția definită prin

$$\begin{aligned} \omega(x) &:= \frac{1}{\|x-a\|} \big[f(x) - f(a) - df(a)(x-a)\big] \quad \text{dacă } x \neq a, \\ \omega(a) &:= 0_m. \end{aligned}$$

Evident, ω satisface (9) și (10).

2° Din (11) rezultă că

$$\omega(x) = \frac{1}{\|x-a\|}\big[f(x) - f(a) - \varphi(x-a)\big]$$

pentru orice $x \in A \setminus \{a\}$. Ținând seama de (9), deducem că (7) are loc. Drept urmare, f este diferențiabilă în punctul a şi $df(a) = \varphi$. □

2.4.4 Teoremă (continuitatea funcțiilor diferenţiabile)**.** *Dacă $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in \operatorname{int} A$ și $f : A \to \mathbb{R}^m$ este o funcție diferenţiabilă în punctul a, atunci f este continuă în a.*

Demonstrație. Conform primei afirmații din propoziția 2.4.3, există o funcție $\omega : A \to \mathbb{R}^m$ care satisface (9) și (10). Din (10) rezultă că pentru orice $x \in A$ avem

$$\|f(x) - f(a)\| \leq \|df(a)\| \cdot \|x-a\| + \|x-a\| \cdot \|\omega(x)\|.$$

In consecință, avem $\lim\limits_{x\to a} \|f(x) - f(a)\| = 0$, deci $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$, conform teoremei 1.6.8. Cum $\operatorname{int} A \subseteq A \cap A'$, în baza teoremei 1.7.4 deducem că f este continuă în a. □

2.4.5 Teoremă (legătura dintre derivată și diferenţială în cazul funcțiilor vectoriale de variabilă reală)**.** *Fie $A \subseteq \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int} A$ și $f : A \to \mathbb{R}^m$ o funcție. Atunci următoarele afirmații sunt adevărate:*

1° *Dacă f este derivabilă în punctul a, atunci f este diferențiabilă în a și are loc egalitatea*

$$df(a)(x) = xf'(a) \quad \textit{oricare ar fi } x \in \mathbb{R}. \tag{12}$$

2° *Dacă f este diferențiabilă în punctul a, atunci f este derivabilă în a și are loc egalitatea* (12)*.*

Demonstrație. 1° Presupunem că f este derivabilă în a. Fie $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ funcția definită prin $\varphi(x) := xf'(a)$ $(x \in \mathbb{R})$. Evident, avem $\varphi \in L(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$. Deoarece

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to a}\left\|\frac{1}{|x-a|}\big[f(x) - f(a) - \varphi(x-a)\big]\right\| \\
&\quad= \lim_{x\to a}\left\|\frac{1}{|x-a|}\big[f(x) - f(a) - (x-a)f'(a)\big]\right\| \\
&\quad= \lim_{x\to a}\left\|\frac{x-a}{|x-a|}\left[\frac{1}{x-a}\Big(f(x) - f(a)\Big) - f'(a)\right]\right\| \\
&\quad= \lim_{x\to a}\left\|\frac{1}{x-a}\Big(f(x) - f(a)\Big) - f'(a)\right\| = 0,
\end{aligned}$$

conform teoremei 1.6.8 rezultă că

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{|x-a|} \big[f(x) - f(a) - \varphi(x-a)\big] = 0_m,$$

deci f este diferențiabilă în a și $df(a) = \varphi$. Cu alte cuvinte, (12) are loc.

2° Admitem acum că f este diferențiabilă în a. Cum $df(a) \in L(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$, în baza teoremei 2.1.2 există un $v \in \mathbb{R}^m$ astfel ca $df(a)(x) = xv$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$. Avem

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{|x-a|} \big[f(x) - f(a) - df(a)(x-a)\big] = 0_m,$$

deci

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{|x-a|} \big\|f(x) - f(a) - (x-a)v\big\| = 0,$$

adică

$$\lim_{x\to a} \left\| \frac{1}{x-a} \Big(f(x) - f(a)\Big) - v \right\| = 0.$$

Aplicând teorema 1.6.8 rezultă că

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{x-a} \Big(f(x) - f(a)\Big) = v.$$

Prin urmare, f este derivabilă în a și $f'(a) = v$. Această egalitate probează validitatea lui (12). □

Teorema precedentă arată că diferențiabilitatea Fréchet generalizează noțiunea de derivabilitate, introdusă pentru funcții vectoriale de variabilă reală.

2.4.6 Teoremă. *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in \operatorname{int} A$ și $f = (f_1, \dots, f_m) : A \to \mathbb{R}^m$ o funcție. Atunci următoarele afirmații sunt adevărate:*

1° *Dacă f este diferențiabilă în punctul a, atunci $f_1, \dots, f_m$ sunt diferențiabile în a și are loc egalitatea*

$$df(a) = (df_1(a), \dots, df_m(a)). \tag{13}$$

2° *Dacă $f_1, \dots, f_m$ sunt diferențiabile în punctul a, atunci f este diferențiabilă în punctul a, și are loc egalitatea (13).*

Demonstrație. 1° Fie $\varphi := df(a) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ și fie $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ componentele scalare ale lui φ. Pentru orice $x \in A \setminus \{a\}$ avem

$$\text{(14)} \quad \frac{1}{\|x-a\|}\big[f(x) - f(a) - \varphi(x-a)\big] = \left(\frac{f_1(x) - f_1(a) - \varphi_1(x-a)}{\|x-a\|}, \dots, \frac{f_m(x) - f_m(a) - \varphi_m(x-a)}{\|x-a\|}\right)$$

Intrucât are loc (7), din (14) deducem în baza teoremei 1.6.9 că

$$\text{(15)} \qquad \lim_{x\to a} \frac{f_i(x) - f_i(a) - \varphi_i(x-a)}{\|x-a\|} = 0 \quad \text{oricare ar fi } i \in \{1, \dots, m\}.$$

Drept urmare, toate funcțiile $f_1, \dots, f_m$ sunt diferenţiabile în a și $df_i(a) = \varphi_i$ pentru fiecare $i \in \{1, \dots, m\}$. Deci egalitatea (13) are loc.

2° Notând $\varphi_i := df_i(a)$, are loc (15). Notând apoi $\varphi := (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$, avem $\varphi \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Pe de lată parte, din (14) și (15), în baza teoremei 1.6.9 rezultă că (7) are loc, deci f este diferențiabilăîn a și $df(a) = \varphi$. Această egalitate garantează validitatea lui (13). □

2.5 Derivata după o direcție a unei funcții vectoriale de variabilă vectorială

2.5.1 Definiţie. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in \operatorname{int} A$, $f : A \to \mathbb{R}^m$ o funcție şi $v \in \mathbb{R}^n$. Dacă există un element $\ell \in \mathbb{R}^m$ așa încât

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big[f(a+tv) - f(a)\big] = \ell,$$

atunci se spune că f este *derivabilă în punctul a după direcția v*, iar ℓ se numește *derivata funcţiei f în punctul a după direcția v* și va fi notată cu $f'(a; v)$.

2.5.2 Teoremă. *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in \operatorname{int} A$, $f = (f_1, \dots, f_m) : A \to \mathbb{R}^m$ o funcție și $v \in \mathbb{R}^n$. Atunci următoarele afirmații sunt adevărate:*

1° *Dacă f este derivabilă în punctul a după direcția v, atunci $f_1, \dots, f_m$ sunt derivabile în a după direcția v și are loc egalitatea*

$$\text{(1)} \qquad f'(a; v) = \big(f_1'(a; v), \dots, f_m'(a; v)\big).$$

2° *Dacă $f_1, \dots, f_m$ sunt derivabile în punctul a după direcția v, atunci f este derivabilă în a după direcția v și are loc egalitatea (1).*

Demonstrație. Deoarece $a \in \operatorname{int} A$, există un $\delta > 0$ astfel încât pentru orice $t \in [-\delta, \delta]$ să avem $a + tv \in A$. Oricare ar fi $t \in [-\delta, \delta] \setminus \{0\}$ avem

$$\frac{1}{t}\big[f(a+tv) - f(a)\big] = \left(\frac{1}{t}\big[f_1(a+tv) - f_1(a)\big], \ldots, \frac{1}{t}\big[f_m(a+tv) - f_m(a)\big]\right).$$

Ținând seama de această egalitate, cele două afirmaţii sunt consecințe imediate ale teoremei 1.6.9. □

2.5.3 Teoremă. *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in \operatorname{int} A$, iar $f : A \to \mathbb{R}^m$ o funcţie diferențiabilă în punctul a. Atunci f este derivabilă în a după orice direcție $v \in \mathbb{R}^n$ și are loc egalitatea*

$$\forall \;\; v \in \mathbb{R}^n \;\; : \quad f'(a; v) = df(a)(v).$$

Demonstrație. Fie $v \in \mathbb{R}^n$ arbitrar. Vom dovedi că

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\big[f(a+tv) - f(a)\big] = df(a)(v). \tag{2}$$

Conform afirmației 1° din propoziția 2.4.3, există o funcție $\omega : A \to \mathbb{R}^m$ astfel ca

$$\lim_{x \to a} \omega(x) = 0_m$$

și

$$f(x) = f(a) + df(a)(x-a) + \|x-a\|\omega(x) \quad \text{oricare ar fi } x \in A. \tag{3}$$

Fără a restrânge generalitatea, putem presupune că $\omega(a) = 0_m$, adică ω este continuă în a.

Deoarece $a \in \operatorname{int} A$, există un $\delta > 0$ astfel ca $a + tv \in A$ oricare ar fi $t \in [-\delta, \delta]$. Ținând seama de (3), deducem că pentru orice $t \in [-\delta, \delta]$ avem

$$f(a+tv) = f(a) + t df(a)(v) + |t| \cdot \|v\|\omega(a+tv).$$

Rezultă de aici că pentru orice $t \in [-\delta, \delta] \setminus \{0\}$ avem

$$\frac{1}{t}\big[f(a+tv) - f(a)\big] - df(a)(v) = \frac{|t|}{t}\,\|v\|\omega(a+tv),$$

deci

$$\left\|\frac{1}{t}\big[f(a+tv) - f(a)\big] - df(a)(v)\right\| = \|v\| \cdot \|\omega(a+tv)\| \longrightarrow 0$$

când $t \to 0$. Conform teoremei 1.6.8, rezultă că (2) are loc, deci f este derivabilă în punctul a după direcția v și $f'(a; v) = df(a)(v)$. □

2.6 Derivate parțiale ale unei funcții vectoriale de variabilă vectorială

2.6.1 Definiție. Fie $\{e_1, \ldots, e_n\}$ baza canonică a spațiului $\mathbb{R}^n$. Fie apoi $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in \operatorname{int} A$, $f : A \to \mathbb{R}^m$ o funcţie și $j \in \{1, \ldots, n\}$. Dacă f este derivabilă în punctul a după direcția e_j, atunci se spune că f este *derivabilă parțial* în raport cu variabila x_j în a, iar elementul $f'(a; e_j) \in \mathbb{R}^m$ se numește *derivata parțială* a funcției f în raport cu variabila x_j în a și se notează cu $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ sau cu $f'_{x_j}(a)$ sau cu $D_j f(a)$. Avem

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) &= f'(a; e_j) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left[f(a + te_j) - f(a) \right] \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \big[f(a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j + t, a_{j+1}, \ldots, a_n) \\
&\qquad\qquad - f(a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j, a_{j+1}, \ldots, a_n) \big] \\
&= \lim_{x_j \to a_j} \frac{1}{x_j - a_j} \big[f(a_1, \ldots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \ldots, a_n) \\
&\qquad\qquad - f(a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j, a_{j+1}, \ldots, a_n) \big].
\end{aligned}$$

Dacă f este derivabilă parțial în punctul a în raport cu fiecare dintre variabilele $x_1, \ldots, x_n$, atunci vom spune simplu că f este *derivabilă parțial în punctul* a.

2.6.2 Teoremă. *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in \operatorname{int} A$, $f = (f_1, \ldots, f_m) : A \to \mathbb{R}^m$ o funcție și $j \in \{1, \ldots, n\}$. Atunci următoarele afirmații sunt adevărate:*

1° *Dacă f este derivabilă parțial în raport cu variabila x_j în punctul a, atunci $f_1, \ldots, f_m$ sunt derivabile parțial în raport cu x_j în a și are loc egalitatea*

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(a), \ldots, \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(a) \right). \tag{1}$$

2° *Dacă $f_1, \ldots, f_m$ sunt derivabile parțial în raport cu variabila x_j în punctul a, atunci și f este derivabilă parțial în raport cu x_j în punctul a și are loc egalitatea* (1).

Demonstrație. Rezultă din Teorema 2.5.2 pentru $v = e_j$. □

2.6.3 Definiție (matricea Jacobi)**.** Fie A o submulțime a lui $\mathbb{R}^n$, fie $a \in \operatorname{int} A$ și fie $f = (f_1, \ldots, f_m) : A \to \mathbb{R}^m$ o funcție derivabilă parţial în punctul a.

Atunci putem forma matricea

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}.$$

Aceasta se numește *matricea Jacobi* a lui f în punctul a și se notează cu $J(f)(a)$.

In cazul particular $m = 1$, matricea Jacobi a unei funcții $f : A \to \mathbb{R}$ în a este $J(f)(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \ \cdots \ \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right) \in \mathbb{R}^{1\times n}$. Punctul

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right) \in \mathbb{R}^n$$

se numește *gradientul* lui f în punctul a și se notează cu $\nabla f(a)$. Cu convenția din observația 2.1.5 (punctele lui $\mathbb{R}^n$ sunt identificate cu matrice coloană de tipul $n \times 1$), putem scrie $J(f)(a) = \nabla f(a)^T$.

2.6.4 Teoremă (legătura dintre diferențială și derivatele parțiale)**.** *Fie A o submulţime a lui $\mathbb{R}^n$, $a \in \operatorname{int} A$ și $f : A \to \mathbb{R}^m$ o funcție diferențiabilă în punctul a. Atunci următoarele afirmații sunt adevărate:*

1° *f este derivabilă parțial în a și $[df(a)] = J(f)(a)$.*

2° *Pentru orice $h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ are loc egalitatea*

$$df(a)(h) = h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + \cdots + h_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(a),$$

sau, scris sub formă matriceală, $df(a)(h) = J(f)(a) \cdot h$.

Demonstrație. 1° Din teorema 2.5.3 rezultă că f este derivabilă în a după fiecare dintre direcţiile $e_1, \ldots, e_n$ și

$$f'(a; e_j) = df(a)(e_j) \quad \text{oricare ar fi } j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Cu alte cuvinte, f este derivabilă parțial în a şi avem

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = df(a)(e_j) \quad \text{oricare ar fi } j \in \{1, \ldots, n\}. \tag{2}$$

Dar $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ este, conform teoremei 2.6.2, tocmai coloana j în matricea $J(f)(a)$, în timp ce $df(a)(e_j)$ reprezintă coloana j în matricea $[df(a)]$. Ţinând cont de (2), deducem că $[df(a)] = J(f)(a)$.

2° Dacă $h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$, atunci $h = h_1 e_1 + \cdots + h_n e_n$, deci

$$\begin{aligned} df(a)(h) &= df(a)(h_1 e_1 + \cdots + h_n e_n) = h_1 df(a)(e_1) + \cdots + h_n df(a)(e_n) \\ &= h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + \cdots + h_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(a). \end{aligned}$$

□

2.6.5 Consecință. *Dacă $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in \operatorname{int} A$, iar $f : A \to \mathbf{R}$ este o funcție diferențiabilă în punctul a, atunci*

$$df(a)(h) = \langle h, \nabla f(a) \rangle \quad \textit{oricare ar fi } h \in \mathbb{R}^n,$$

sau, scris sub formă matriceală, $df(a)(h) = h^T \cdot \nabla f(a)$.

2.6.6 Propoziție. *Fie $n \geq 2$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in \operatorname{int} A$ și $f : A \to \mathbb{R}$ o funcție care se bucură de următoarele proprietăți:*

(i) *există $r > 0$ astfel încât $B(a, r) \subseteq A$ și f este derivabilă parțial în fiecare punct din $B(a, r)$;*

(ii) *pentru fiecare $j \in \{1, \ldots, n\}$, funcția*

$$\forall\, x \in B(a, r) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \in \mathbb{R}$$

este continuă în a.

Atunci f este diferențiabilă în punctul a.

Demonstrație. Fie $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funcția definită prin

$$\varphi(h) := \sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \quad \text{pentru orice } h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Evident, $\varphi \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Arătăm că f este diferențiabilă în a și că $df(a) = \varphi$, adică

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{\|x - a\|} \big[f(x) - f(a) - \varphi(x - a) \big] = 0.$$

Se constată imediat că a demonstra egalitatea de mai sus este echivalent cu a dovedi validitatea următoarei afirmații: oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există un $\delta > 0$ astfel încât pentru orice $x \in A$ cu $\|x - a\| < \delta$ să avem

(3) $$|f(x) - f(a) - \varphi(x - a)| \leq \varepsilon \|x - a\|.$$

Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar. Din condiția (ii) rezultă că pentru fiecare $j \in \{1, \ldots, n\}$ există un $\delta_j > 0$ aşa încât pentru orice $x \in A$ cu $\|x - a\| < \delta_j$ să avem

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \right| < \varepsilon' := \frac{\varepsilon}{n}.$$

Notăm $\delta := \min\{r, \delta_1, \ldots, \delta_n\} > 0$. Atunci $B(a, \delta) \subseteq A$ și demonstrația va fi încheiată de îndată ce vom arăta că (3) are loc pentru orice $x \in B(a, \delta)$.

Fie așadar $x := (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ cu proprietatea că $\|x - a\| < \delta$. Avem

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n) \\ &= f(x_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n) - f(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n) \\ &\quad + f(x_1, x_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n) - f(x_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n) \\ &\quad + \cdots + \\ &\quad + f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n) - f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, a_n), \end{aligned}$$

deci

$$\begin{aligned} & f(x) - f(a) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \big[f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \ldots, a_n) - f(x_1, \ldots, x_{j-1}, a_j, a_{j+1}, \ldots, a_n) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \big[F_j(x_j) - F_j(a_j) \big], \end{aligned}$$

unde $F_j(t) := f(x_1, \ldots, x_{j-1}, t, a_{j+1}, \ldots, a_n)$. Aplicând teorema de medie a lui Lagrange funcției reale de variabilă reală F_j, rezultă existența unui punct c_j, situat între a_j și x_j, astfel ca

$$F_j(x_j) - F_j(a_j) = (x_j - a_j) F_j'(c_j).$$

Dar

$$F_j'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \ldots, x_{j-1}, t, a_{j+1}, \ldots, a_n).$$

Notând $b_j := (x_1, \ldots, x_{j-1}, c_j, a_{j+1}, \ldots, a_n)$, avem

$$F_j(x_j) - F_j(a_j) = (x_j - a_j) \frac{\partial f}{\partial x_j}(b_j),$$

deci

$$f(x) - f(a) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - a_j) \frac{\partial f}{\partial x_j}(b_j).$$

Drept urmare, avem

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a) - \varphi(x-a)| &= \left| \sum_{j=1}^{n} (x_j - a_j) \frac{\partial f}{\partial x_j}(b_j) - \sum_{j=1}^{n} (x_j - a_j) \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} |x_j - a_j| \cdot \left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(b_j) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \right|. \end{aligned}$$

Dar $b_j - a = (x_1 - a_1, \ldots, x_{j-1} - a_{j-1}, c_j - a_j, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-j})$, deci

$$\|b_j - a\| \leq \|x - a\| < \delta \leq \delta_j.$$

Deducem de aici că

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(b_j) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \right| < \varepsilon' \quad \text{oricare ar fi } j \in \{1, \ldots, n\}.$$

In consecință, avem

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a) - \varphi(x-a)| &\leq \varepsilon' \sum_{j=1}^{n} |x_j - a_j| \leq n\varepsilon' \|x - a\| \\ &= \varepsilon \|x - a\|, \end{aligned}$$

deci (3) are într-adevăr loc. $\square$

2.6.7 Teoremă. *Fie $n \geq 2$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in \operatorname{int} A$ și $f : A \to \mathbb{R}^m$ o funcție care se bucură de următoarele proprietăți:*

(i) *există $r > 0$ astfel încât $B(a, r) \subseteq A$ și f este derivabilă parțial în fiecare punct din $B(a, r)$;*

(ii) *pentru fiecare $j \in \{1, \ldots, n\}$, funcția*

$$\forall\, x \in B(a, r) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \in \mathbb{R}^m$$

este continuă în a.

Atunci f este diferențiabilă în punctul a.

Demonstrație. Fie $f_1, \ldots, f_m$ componentele scalare ale lui f. Fixăm i arbitrar în mulțimea $\{1, \ldots, m\}$. Din teorema 2.6.2 rezultă că f_i este derivabilă parţial în fiecare punct din $B(a,r)$. Din (ii), teorema 2.6.2 și teorema 1.7.8 rezultă că pentru fiecare $j \in \{1, \ldots, n\}$ funcția

$$\forall\, x \in B(a,r) \;\longmapsto\; \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \in \mathbb{R}$$

este continuă în a. Conform propoziției 2.6.6, deducem că f_i este diferențiabilă în punctul a.

Intrucât toate funcțiile $f_1, \ldots, f_m$ sunt diferenţiabile în a, teorema 2.4.6 garantează că și f este diferențiabilă în a. □

2.7 Probleme

1. Cu ajutorul funcției $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $f(x) := (\sin x,\ \cos x)$, să se demonstreze că teorema de medie a lui Lagrange nu rămâne adevărată sub forma unei egalități în cazul funcțiilor vectoriale de o variabilă reală.

2. Fie $f : (0, \infty)^2 \to \mathbb{R}^3$ funcția definită prin

$$f(x,y) = \left(\operatorname{arctg}\frac{x}{y},\ \frac{1}{xy},\ x^y + y^x\right).$$

Să se determine derivatele parțiale de ordinul întâi ale lui f și $df(1,1)$.

3. Fie $A = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy + z > 0 \,\}$ și $f : A \to \mathbb{R}^2$ funcția definită prin

$$f(x,y,z) = \left(\ln(xy+z), \sin\left(\frac{\pi}{4}(xy+yz+zx)\right)\right).$$

Să se determine derivatele parțiale de ordinul întâi ale lui f și $df(1,2,1)$.

4. Să se demonstreze că funcția $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x \sin y - y \sin x}{x^2+y^2} & \text{dacă} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dacă} \quad (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

este de clasă C^1.

5. Să se demonstreze că funcția $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x,y) = \sqrt{|x|}\,\ln\left(1 + x^2 \sin^2 y\right),$$

este de clasă C^1.

6. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție continuă. Să se arate că funcția $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definită prin $F(x,y) = \displaystyle\int_0^y (x-t)f(t)\,dt$, este de clasă C^1.

7. Fie $A = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^3 + y^3 + z^3 > 3xyz \,\}$ și $f : A \to \mathbb{R}$ funcția definită prin $f(x,y,z) = \ln(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$. Să se demonstreze că pentru orice $(x,y,z) \in A$ are loc egalitatea

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \frac{3}{x+y+z}.$$

8. Să se determine $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția $f : \mathbb{R} \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x,y) = y^\alpha e^{-x^2/(4y)}$, să satisfacă

$$\forall \ \ (x,y) \in \mathbb{R} \times (0,\infty) \ : \quad x^2 \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \right).$$

9. Fie $r > 0$, $A = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < r^2 \,\}$ și $f : A \to \mathbb{R}$ funcția definită prin

$$f(x,y) = 2 \ln \frac{r\sqrt{8}}{r^2 - x^2 - y^2}.$$

Să se demonstreze că pentru orice $(x,y) \in A$ are loc egalitatea

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = e^{f(x,y)}.$$

10. Fie $n \geq 2$ un număr natural, $\alpha > 0$ și $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funcția definită prin

$$f(x) = [\alpha(\alpha + n - 2)]^{-\alpha/2} \|x\|^\alpha,$$

norma considerată pe $\mathbb{R}^n$ fiind cea euclidiană. Să se demonstreze că pentru orice $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$ are loc egalitatea

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x) = [f(x)]^{\frac{\alpha-2}{\alpha}}.$$

11. Fie $n \geq 3$, $A = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1 \,\}$ și $f : A \to \mathbb{R}$ funcția definită prin

$$f(x) = \left(\frac{\sqrt{n(n-2)}}{1 - \|x\|^2} \right)^{\frac{n-2}{2}},$$

norma considerată pe $\mathbb{R}^n$ fiind cea euclidiană. Să se demonstreze că pentru orice $x \in A$ are loc egalitatea

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x) = [f(x)]^{\frac{n+2}{n-2}}.$$

12. Fie $f : (0, \infty)^2 \to \mathbb{R}^3$ funcția definită în problema 2. Să se determine derivata lui f în punctul $(1, 1)$, după direcția versorului care face cu semiaxa Ox un unghi de $60°$.

13. Să se determine derivata funcției f din problema 3, în punctul $(1, 2, 1)$, după direcția $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$.

14. Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o funcție diferențiabilă. Știind că derivatele lui f în punctul $(1, 2)$ după direcțiile $(2, 2)$ și $(2, 1)$ sunt egale cu 2 și respectiv -2, să se determine gradientul lui f în punctul $(1, 2)$. Să se determine derivata lui f în acest punct după direcția $(4, 6)$.

15. Fie $a, b > 0$. Să se determine derivata funcției $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2},$$

în punctul $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$, după direcția versorului normalei interioare în acest punct la elipsa de ecuație $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

16. (Exemplu de funcție discontinuă, derivabilă după orice direcție) Să se demonstreze că funcția $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^6 + y^2} & \text{dacă} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dacă} \quad (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

este discontinuă în punctul $(0, 0)$, dar este derivabilă după orice direcție în acest punct.

17. Să se demonstreze că dacă $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este o aplicație liniară, atunci f este diferențiabilă pe $\mathbb{R}^n$ și $df(a) = f$ oricare ar fi $a \in \mathbb{R}^n$.

18. Fie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ o funcție cu proprietatea

$$\forall \ t > 0, \ \forall \ x \in \mathbb{R}^n \ : \quad f(tx) = tf(x).$$

Să se demonstreze că dacă f este diferențiabilă în 0_n, atunci ea este liniară.

19. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ deschisă nevidă și $f : A \to \mathbb{R}^m$ o funcție diferențiabilă cu proprietatea că există $M > 0$ în așa fel încât

$$\forall\, x, y \in A \ : \quad \|f(x) - f(y)\| \le M\|x - y\|.$$

Să se demonstreze că $\|df(x)\| \le M$ oricare ar fi $x \in A$.

20. Fie $f = (f_1, \ldots, f_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ o funcție diferențiabilă în originea 0_n a lui $\mathbb{R}^n$. Să se demonstreze că dacă $f(0_n) = 0_n$ și

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0_n) \right)^2 < 1,$$

atunci există o bilă $B \subseteq \mathbb{R}^n$, cu centrul în 0_n, astfel ca $f(B) \subseteq B$.

Berkeley 2000

21. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \operatorname{int} A$ și $f : A \to \mathbb{R}^m$ o funcție derivabilă parțial în raport cu fiecare dintre variabilele $x_1, \ldots, x_n$ în punctul a. Să se demonstreze că f este diferențiabilă în a dacă și numai dacă

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{\|x - a\|} \left[f(x) - f(a) - \sum_{j=1}^{n} (x_j - a_j) \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \right] = 0_m.$$

Problema precedentă furnizează următorul algoritm pentru studiul diferențiabilității unei funcții reale $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ într-un punct $a \in \operatorname{int} A$:

I. Se studiază dacă f este derivabilă parțial în punctul a.

• dacă f nu este derivabilă parțial în a, atunci f nu este diferențiabilă în punctul a;

• dacă f este derivabilă parțial în a, atunci se calculează $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ pentru $j = 1, \ldots, n$ și se trece la etapa următoare.

II. Se studiază limita

$$\begin{aligned}
\ell &= \lim_{x \to a} \frac{1}{\|x - a\|} \left[f(x) - f(a) - \sum_{j=1}^{n} (x_j - a_j) \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \right] \\
&= \lim_{(h_1, \ldots, h_n) \to 0_n} \frac{f(a_1 + h_1, \ldots, a_n + h_n) - f(a) - \sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)}{\sqrt{h_1^2 + \cdots + h_n^2}}.
\end{aligned}$$

- dacă $\ell = 0$, atunci f este diferențiabilă în a și

$$\forall\ h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n \ :\quad df(a)(h) = \sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a);$$

- în caz contrar, f nu este diferențiabilă în a.

Pentru o funcție vectorială $f = (f_1, \ldots, f_m) : A \to \mathbb{R}^m$ se studiază, pe baza algoritmului de mai sus, diferențiabilitatea în a a fiecărei funcții $f_i : A \to \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, m)$.

- dacă toate funcțiile $f_1, \ldots, f_m$ sunt diferențiabile în a, atunci f este diferențiabilă în a și

$$df(a) = (df_1(a), \ldots, df_m(a)).$$

- în caz contrar, f nu este diferențiabilă în a.

22. (Exemplu de funcție continuă, derivabilă după orice direcție, dar care nu este diferențiabilă) Să se demonstreze că funcția $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^4+y^2} & \text{dacă} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dacă} \quad (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

este continuă și derivabilă după orice direcție în punctul $(0,0)$, dar nu este diferențiabilă în acest punct.

23. Să se studieze diferențiabilitatea în $(0,0)$ a funcției $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definite prin

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} & \text{dacă} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dacă} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

24. Să se studieze diferențiabilitatea în $(0,0)$ a funcției $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definite prin

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x\cos y}{x^2+y^2} & \text{dacă} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 1/2 & \text{dacă} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

25. Să se studieze diferențiabilitatea funcției $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definite prin $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$.

26. Să se studieze diferențiabilitatea în $(0,0)$ a funcției $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definite prin

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{dacă} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dacă} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

27. Să se studieze diferențiabilitatea funcției $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definite prin

$$f(x,y) = \begin{cases} x^{4/3}\sin\frac{y}{x} & \text{dacă} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{dacă} \quad x = 0. \end{cases}$$

Berkeley 1986

28. Să se studieze diferențiabilitatea funcției $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definite prin

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2\sin\frac{x}{y} & \text{dacă} \quad y \neq 0 \\ 0 & \text{dacă} \quad y = 0. \end{cases}$$

29. Să se studieze diferențiabilitatea funcției $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definite prin

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{dacă} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dacă} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

30. Să se studieze diferențiabilitatea funcției $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definite prin

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x^4-y^2)^2}{x^2+y^2} & \text{dacă} \quad x^4 > y^2 \\ 0 & \text{dacă} \quad x^4 \leq y^2. \end{cases}$$

31. Fie $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funcția definită în felul următor:

$$\begin{array}{ll} f(x,y) = y - x^2 & \text{dacă} \quad y \geq x^2 \\ f(x,y) = \frac{y^2}{x^2} - y & \text{dacă} \quad 0 \leq y < x^2 \\ f(x,y) = -f(x,-y) & \text{dacă} \quad y < 0. \end{array}$$

Să se demonstreze că f este diferențiabilă pe $\mathbb{R}^2$, dar nu este de clasă C^1 pe $\mathbb{R}^2$.

32. Să se studieze diferențiabilitatea funcției $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definite prin

$$f(x,y) = \begin{cases} \min\{x,y\} + \frac{(x^2-y^2)^2}{x^2+y^2} & \text{dacă} \quad x \neq y \\ x & \text{dacă} \quad x = y. \end{cases}$$

33. Fie $p, q \in \mathbb{N}$, iar $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funcția definită prin

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^p y^q}{x^2 - xy + y^2} & \text{dacă} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dacă} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Să se determine pentru ce valori ale numerelor p și q funcția f este:

a) continuă pe $\mathbb{R}^2$;

b) diferențiabilă pe $\mathbb{R}^2$;

c) de clasă C^1;

d) derivabilă în $(0,0)$ după orice direcție $v \in \mathbb{R}^2$.

34. Să se studieze diferențiabilitatea funcției $f = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definite prin

$$f_1(x,y) = (x-1)e^y,$$
$$f_2(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{|x|+|y|} & \text{dacă} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dacă} \quad (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

în punctul $(0,0)$.

35. Să se studieze diferențiabilitatea funcției $f = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, definite prin

$$f_1(x_1,x_2,x_3) = \begin{cases} \sqrt{|x_1 x_2 x_3|} \cos \frac{1}{x_1} & \text{dacă} \quad x_1 \neq 0 \\ 0 & \text{dacă} \quad x_1 = 0, \end{cases}$$
$$f_2(x_1,x_2,x_3) = (x_1 + x_2 + x_3)e^{-x_1 - 2x_2 - 3x_3},$$

în punctul $(0,0,0)$.

36. Să se studieze diferențiabilitatea funcției $f = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definite prin

$$f_1(x,y) = e^{-x^2-y}, \quad f_2(x,y) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2} + y^2 & \text{dacă} \quad x \neq 0 \\ y^2 & \text{dacă} \quad x = 0, \end{cases}$$

în punctul $(0,0)$.

37. Să se studieze diferențiabilitatea funcției $f = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definite prin

$$f_1(x,y) = |xy|, \qquad f_2(x,y) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{\pi}{2y} & \text{dacă} \quad y \neq 0 \\ 0 & \text{dacă} \quad y = 0, \end{cases}$$

în punctul $(0,0)$.

38. Să se studieze diferenţiabilitatea funcţiei $f = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definite prin

$$f_1(x,y) = \frac{xy}{1+|xy|},$$
$$f_2(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2(x+y)}{|x|+|y|} & \text{dacă} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dacă} \quad (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

în punctul $(0,0)$.

39. Să se studieze diferenţiabilitatea funcţiei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definite prin

$$f(x_1,\dots,x_n) = \begin{cases} \frac{x_1\cdots x_n}{x_1^2+\cdots+x_n^2} & \text{dacă} \quad (x_1,\dots,x_n) \neq 0_n \\ 0 & \text{dacă} \quad (x_1,\dots,x_n) = 0_n. \end{cases}$$

40. Fie $\mathbb{R}^{n\times n}$ spaţiul liniar al matricelor reale de tipul $n \times n$, identificat în modul uzual cu spaţiu euclidian $\mathbb{R}^{n^2}$. (Norma unei matrice oarecare $X = (x_{ij})_{1\le i,j\le n}$ din $\mathbb{R}^{n\times n}$ este dată de $\|X\|^2 = \sum\limits_{i,j=1}^{n} x_{ij}^2$.) Fie apoi $f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ funcţia definită prin $f(X) = X^2$. Să se determine diferenţiala df a funcţiei f.

Berkeley 1978, 1999

41. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^2$ deschisă nevidă, iar $f : A \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă parţial pe A. Să se demonstreze că dacă derivatele parţiale ale lui f sunt mărginite pe un dreptunghi $[a,b] \times [c,d] \subseteq A$, atunci f este uniform continuă pe $[a,b] \times [c,d]$.

42. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^2$ deschisă nevidă, $a < b$ şi $c < d$ numere reale astfel ca $[a,b] \times [c,d] \subseteq A$, iar $f : A \to \mathbb{R}$ o funcţie care îndeplineşte următoarele condiţii:

(i) pentru orice $y \in [c,d]$, funcţia $f(\cdot, y)$ este continuă pe $[a,b]$;

(ii) f este derivabilă parţial în raport cu variabila y pe A;

(iii) funcţia $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ este mărginită pe $[a,b] \times [c,d]$.

Să se demonstreze că f este continuă pe $[a,b] \times [c,d]$.

43. Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă parțial pe $\mathbb{R}^2$ și cu proprietatea că cel puțin una dintre derivatele sale parțiale este continuă. Să se demonstreze că:

a) funcția $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin $g(t) = f(t,t)$, este derivabilă și

$$\forall\ t \in \mathbb{R}\ :\quad g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t,t) + \frac{\partial f}{\partial y}(t,t).$$

b) dacă $f(0,0) = 0$ și

$$\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \le 2|x-y| \quad \text{și} \quad \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \le 2|x-y|,$$

atunci $|f(5,4)| \le 1$.

Olimpiadă studențească, U.R.S.S.

44. Fie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ o funcție care satisface următoarele condiții:

(i) f este derivabilă în 0_n după orice direcție $v \in \mathbb{R}^n$;

(ii) funcția $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, definită prin $\varphi(v) = f'(0_n; v)$ este liniară;

(iii) există $\alpha \ge 0$ așa încât

$$\forall\ \ x, x' \in \mathbb{R}^n\ :\quad \|f(x) - f(x')\| \le \alpha\|x - x'\|.$$

Să se demonstreze că f este diferențiabilă în 0_n.

Olimpiadă studențească, U.R.S.S.

45. Fie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă parțial pe $\mathbb{R}^n$.

a) Pentru $n = 2$, să se demonstreze că dacă cel puțin una dintre derivatele parțiale ale lui f este continuă pe $\mathbb{R}^2$, atunci f este diferențiabilă pe $\mathbb{R}^2$.

b) Să se generalizeze afirmația de la a) pentru $n \ge 2$ arbitrar.

Concursul studențesc Traian Lalescu, etapa locală 2001

46. Să se demonstreze că dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcție de clasă C^2, atunci funcția $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definită prin

$$F(x,y) = \begin{cases} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} & \text{dacă} \quad x \ne y \\ f'(x) & \text{dacă} \quad x = y, \end{cases}$$

este de clasă C^1.

2.8 Operații cu funcții diferențiabile

2.8.1 Teoremă. *Fie A o submulțime a lui $\mathbb{R}^n$, $a \in \operatorname{int} A$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, iar $f, g : A \to \mathbb{R}^m$ funcții diferențiabile în punctul a. Atunci funcția $\alpha f + \beta g$ este diferențiabilă în a și au loc egalitățile*

$$\begin{aligned} &d(\alpha f + \beta g)(a) = \alpha df(a) + \beta dg(a), \\ &J(\alpha f + \beta g)(a) = \alpha J(f)(a) + \beta J(g)(a). \end{aligned}$$

Demonstrație. Notăm $F := \alpha f + \beta g$ și $\varphi := \alpha df(a) + \beta dg(a)$. Vom arăta că F este diferențiabilă în a și că $dF(a) = \varphi$. Deoarece f și g sunt diferențiabile în a, avem

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{\|x - a\|} \big[f(x) - f(a) - df(a)(x - a)\big] = 0_m$$

și

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{\|x - a\|} \big[g(x) - g(a) - dg(a)(x - a)\big] = 0_m.$$

Intrucât pentru orice $x \in A \setminus \{a\}$ avem

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\|x - a\|} \big[F(x) - F(a) - \varphi(a)(x - a)\big] \\ &\qquad = \alpha \frac{1}{\|x - a\|} \big[f(x) - f(a) - df(a)(x - a)\big] \\ &\qquad\quad + \beta \frac{1}{\|x - a\|} \big[g(x) - g(a) - dg(a)(x - a)\big], \end{aligned}$$

deducem că

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{\|x - a\|} \big[F(x) - F(a) - \varphi(a)(x - a)\big] = 0_m.$$

Prin urmare, F este diferențiabilă în a și $dF(a) = \varphi$, deci prima egalitate din enunț are loc. Pe de altă parte, în baza teoremelor 2.6.4 și 2.1.6 avem

$$\begin{aligned} J(F)(a) &= \big[dF(a)\big] = \big[\alpha df(a) + \beta dg(a)\big] = \alpha[df(a)] + \beta[dg(a)] \\ &= \alpha J(f)(a) + \beta J(g)(a). \end{aligned}$$

□

2.8.2 Teoremă. *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in \operatorname{int} A$, $B \subseteq \mathbb{R}^m$, $g : A \to B$ o funcție diferențiabilă în punctul a, cu proprietatea $g(a) \in \operatorname{int} B$, iar $f : B \to \mathbb{R}^p$ o* *funcție diferențiabilă în punctul $g(a)$. Atunci funcția $f \circ g$ este diferențiabilă în a și au loc egalitățile*

$$\begin{aligned} d(f \circ g)(a) &= df(g(a)) \circ dg(a), \\ J(f \circ g)(a) &= J(f)(g(a)) \cdot J(g)(a). \end{aligned}$$

Demonstrație. Notăm $F := f \circ g$, $b := g(a)$, $\varphi := dg(a)$ și $\psi := df(b)$. Aplicând propoziția 2.4.3, rezultă existența funcțiilor $\rho : A \to \mathbb{R}^m$ și $\sigma : B \to \mathbb{R}^p$, cu următoarele proprietăți:

$$\begin{aligned}
&(1) \qquad \lim_{x \to a} \rho(x) = 0_m, \\
&(2) \qquad g(x) = g(a) + \varphi(x-a) + \|x-a\|\,\rho(x) \quad \text{oricare ar fi } x \in A, \\
&(3) \qquad \lim_{u \to b} \sigma(u) = 0_p, \\
&(4) \qquad f(u) = f(b) + \psi(u-b) + \|u-b\|\,\sigma(u) \quad \text{oricare ar fi } u \in B.
\end{aligned}$$

Fără a restrânge generalitatea, putem presupune că $\rho(a) = 0_m$ și $\sigma(b) = 0_p$, adică ρ și σ sunt continue în a și respectiv b. Conform relației (4), pentru orice $x \in A$ avem

$$\begin{aligned} F(x) &= f(g(x)) = f(b) + \psi(g(x)-b) + \|g(x)-b\|\,\sigma(g(x)) \\ &= f(g(a)) + \psi(g(x)-g(a)) + \|g(x)-g(a)\|\,\sigma(g(x)). \end{aligned}$$

Ținând seama de (2), obținem

$$\begin{aligned} F(x) &= F(a) + \psi\big(\varphi(x-a) + \|x-a\|\,\rho(x)\big) + \|g(x)-g(a)\|\,\sigma(g(x)) \\ &= F(a) + \big(\psi \circ \varphi\big)(x-a) + \|x-a\|\psi(\rho(x)) + \|g(x)-g(a)\|\,\sigma(g(x)). \end{aligned}$$

Fie $\omega : A \to \mathbb{R}^p$ funcția definită prin

$$\begin{aligned} &\omega(x) := \psi(\rho(x)) + \frac{\|g(x)-g(a)\|}{\|x-a\|}\,\sigma(g(x)) \quad \text{dacă } x \in A \setminus \{a\} \\ &\omega(a) := 0_p. \end{aligned}$$

Avem atunci

$$(5) \qquad F(x) = F(a) + \big(\psi \circ \varphi\big)(x-a) + \|x-a\|\,\omega(x) \quad \text{oricare ar fi } x \in A.$$

Vom mai dovedi că

$$(6) \qquad \lim_{x \to a} \omega(x) = 0_p.$$

Intr-adevăr, pentru orice $x \in A \setminus \{a\}$ avem

$$\begin{aligned}
\|\omega(x)\| &\leq \|\psi(\rho(x))\| + \frac{\|g(x)-g(a)\|}{\|x-a\|}\,\|\sigma(g(x))\| \\
&= \|\psi(\rho(x))\| + \frac{\big\|\varphi(x-a)+\|x-a\|\,\rho(x)\big\|}{\|x-a\|}\,\|\sigma(g(x))\| \\
&\leq \|\psi\|\,\|\rho(x)\| + \frac{\|\varphi\|\,\|x-a\|+\|x-a\|\,\|\rho(x)\|}{\|x-a\|}\,\|\sigma(g(x))\|,
\end{aligned}$$

deci

(7) $\quad \|\omega(x)\| \leq \|\psi\|\,\|\rho(x)\| + \big(\|\varphi\|+\|\rho(x)\|\big)\|\sigma(g(x))\| \quad$ oricare ar fi $x \in A$.

Deoarece g este diferențiabilă în punctul a, ea este continuă în a. Cum σ este continuă în $b := g(a)$, rezultă că $\sigma \circ g$ este continuă în a, deci

$$\lim_{x\to a} \sigma(g(x)) = \sigma(g(a)) = \sigma(b) = 0_p.$$

Această egalitate, împreună cu (1), implică

$$\lim_{x\to a} \Big(\|\psi\|\,\|\rho(x)\| + \big(\|\varphi\|+\|\rho(x)\|\big)\|\sigma(g(x))\|\Big) = 0.$$

Ținând seama de (7), deducem că $\lim_{x\to a}\|\omega(x)\| = 0$, deci (6) are loc. In baza propoziției 2.4.3, din (5) și (6) urmează că F este diferențiabilă în a și

$$dF(a) = \psi \circ \varphi = df(g(a)) \circ dg(a).$$

In plus, în baza teoremelor 2.6.4 și 2.1.7 avem

$$\begin{aligned}
J(F)(a) &= \big[dF(a)\big] = \big[df(g(a)) \circ dg(a)\big] = [df(g(a))]\cdot[dg(a)] \\
&= J(f)(g(a)) \cdot J(g)(a).
\end{aligned}$$

□

2.8.3 Observație. Fie A o submulțime a lui $\mathbb{R}^n$, $a \in \operatorname{int} A$, B o submulțime a lui $\mathbb{R}^m$, $g = g(x_1,\ldots,x_n) : A \to B$ o funcţie diferențiabilă în punctul a, cu proprietatea $g(a) \in \operatorname{int} B$, iar $f = f(u_1,\ldots,u_m) : B \to \mathbb{R}$ o funcție diferențiabilă în $g(a)$. Atunci avem $J(f\circ g)(a) = J(f)(g(a)) \cdot J(g)(a)$, adică

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial(f\circ g)}{\partial x_1}(a)\ \cdots\ \frac{\partial(f\circ g)}{\partial x_n}(a)\right) \\
&\qquad = \left(\frac{\partial f}{\partial u_1}(g(a))\ \cdots\ \frac{\partial f}{\partial u_m}(g(a))\right)\cdot\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Această egalitate implică

$$\begin{aligned}\frac{\partial(f\circ g)}{\partial x_j}(a) &= \frac{\partial f}{\partial u_1}(g(a))\cdot\frac{\partial g_1}{\partial x_j}(a)+\frac{\partial f}{\partial u_2}(g(a))\cdot\frac{\partial g_2}{\partial x_j}(a)\\ &\qquad +\cdots+\frac{\partial f}{\partial u_m}(g(a))\cdot\frac{\partial g_m}{\partial x_j}(a)\end{aligned}$$

pentru fiecare $j\in\{1,\ldots,n\}$. Scris scurt

$$\frac{\partial(f\circ g)}{\partial x_j}=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial u_i}\cdot\frac{\partial g_i}{\partial x_j},\qquad j=1,\ldots,n.$$

Această scriere nu este riguroasă deoarece derivatele parţiale $\dfrac{\partial(f\circ g)}{\partial x_j}$ și $\dfrac{\partial g_i}{\partial x_j}$ se evaluează în punctul a, pe când derivatele parțiale $\dfrac{\partial f}{\partial u_i}$ se evaluează în punctul $g(a)$.

2.9 Probleme

1. Să se demonstreze că funcția $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, definită prin

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2+y^2+\exp\left(\frac{1}{x^2+y^2-1}\right) & \text{dacă}\quad x^2+y^2<1\\ 1+\ln\left(x^2+y^2\right) & \text{dacă}\quad x^2+y^2\geq 1,\end{cases}$$

este diferențiabilă și să se determine diferenţiala sa.

2. Fie $\alpha>0$ și $F:\mathbb{R}\times(0,\infty)\to\mathbb{R}$ funcția definită prin

$$F(x,y)=\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{\alpha y}}} e^{-t^2}dt.$$

Să se arate că

$$\forall\ \ (x,y)\in\mathbb{R}\times(0,\infty)\ :\quad \alpha\,\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y)=\frac{\partial F}{\partial y}(x,y).$$

3. Fie $A\subseteq\mathbb{R}^n$, $a\in\operatorname{int}A$, iar $f:A\to\mathbb{R}$ și $g:A\to\mathbb{R}^m$ funcții diferențiabile în punctul a. Să se demonstreze că funcția $F:A\to\mathbb{R}^m$, definită prin $F(x)=f(x)g(x)$, este diferențiabilă în a și, pentru orice $h\in\mathbb{R}^n$, are loc egalitatea

$$dF(a)(h)=df(a)(h)\cdot g(a)+f(a)\cdot dg(a)(h).$$

4. Fie $A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$. Să se determine diferențiala funcției $F : A \to \mathbb{R}^n$, definite prin

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \|x\|^2}} \cdot x,$$

într-un punct oarecare $x \in A$.

5. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in \operatorname{int} A$ și $f, g : A \to \mathbb{R}^m$ funcții diferențiabile în a. Să se demonstreze că funcția $F : A \to \mathbb{R}$, definită prin $F(x) = \langle f(x), g(x) \rangle$, este diferențiabilă în punctul a și, pentru orice $h \in \mathbb{R}^n$, are loc egalitatea

$$dF(a)(h) = \langle df(a)(h), g(a) \rangle + \langle f(a), dg(a)(h) \rangle.$$

6. Fie $f = f(u, v) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o funcție diferențiabilă pe $\mathbb{R}^2$, iar $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ funcția definită prin

$$F(x, y, z) = f(e^x \operatorname{ch}(y + z),\ e^x \operatorname{sh}(y + z)).$$

Să se determine, în funcție de derivatele parțiale ale lui f, derivatele parțiale de ordinul întâi ale lui F.

7. Fie $f = f(u, v, w) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ o funcție diferențiabilă pe $\mathbb{R}^3$, iar $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funcția definită prin

$$F(x, y) = f(-3x + 2y,\ x^2 + y^2,\ 2x^3 - y^3).$$

Să se determine, în funcție de derivatele parțiale ale lui f, derivatele parțiale de ordinul întâi ale lui F.

8. Fie $f = f(u, v) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o funcție diferențiabilă pe $\mathbb{R}^2$, iar $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funcția definită prin $F(x, y) = \sin(y + f(y^2, x))$. Să se determine, în funcție de derivatele parțiale ale lui f, derivatele parțiale de ordinul întâi ale lui F.

9. Fie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ o funcție diferențiabilă pe $\mathbb{R}^3$, iar $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ funcția definită prin $F(x, y) = f(\cos x + \sin y,\ \sin x + \cos y,\ e^{x-y})$.

a) Să se demonstreze că dacă f este de clasă C^1 pe $\mathbb{R}^3$, atunci F este de clasă C^1 pe $\mathbb{R}^2$.

b) Știind că

$$J(f)(1, 1, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix},$$

să se determine $dF\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

10. Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ o funcție diferențiabilă pe $\mathbb{R}^2$, iar $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ funcția definită prin

$$F(x, y, z) = f(\sin x - 2\sin y + 3\sin z,\ \cos x - 2\cos y + 3\cos z).$$

a) Să se demonstreze că dacă f este de clasă C^1 pe $\mathbb{R}^2$, atunci F este de clasă C^1 pe $\mathbb{R}^3$.

b) Să se determine $J(F)\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ și $dF\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)(-1, 0, 1)$, dacă

$$J(f)(2, 0) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

11. Fie $f = f(u, v) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o funcție diferențiabilă pe $\mathbb{R}^2$, cu proprietatea

$$\forall\ (u, v) \in \mathbb{R}^2\ :\quad \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial v}(u, v),$$

iar $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funcția definită prin $F(x, y) = f\left(\dfrac{x+y}{2}, \dfrac{x-y}{2}\right)$. Să se demonstreze că

$$\forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\ :\quad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 0.$$

12. Fie $f = f(u, v) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o funcție diferențiabilă pe $\mathbb{R}^2$, cu proprietatea

$$\forall\ (u, v) \in \mathbb{R}^2\ :\quad v\,\frac{\partial f}{\partial u}(u, v) = u\,\frac{\partial f}{\partial v}(u, v),$$

fie mulțimea $A = \{\,(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 < y\,\}$ și $F : A \to \mathbb{R}$ funcția definită prin $F(x, y) = f(x, \sqrt{y - x^2})$. Să se demonstreze că

$$\forall\ (x, y) \in A\ :\quad \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 0.$$

13. Fie $f = f(u, v) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o funcție diferențiabilă pe $\mathbb{R}^2$, cu proprietatea

$$\forall\ (u, v) \in \mathbb{R}^2\ :\quad (u+v)\,\frac{\partial f}{\partial u}(u, v) = (u-v)\,\frac{\partial f}{\partial v}(u, v),$$

iar $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funcția definită prin $F(x, y) = f(e^x \cos y, e^x \sin y)$. Să se demonstreze că

$$\forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\ :\quad \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial F}{\partial y}(x, y).$$

14. Fie $f = f(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ și $F = F(u, v) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funcții diferențiabile pe $\mathbb{R}^2$, cu proprietatea $F\left(x, \dfrac{y}{x}\right) = f(x, y)$ pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ cu $x \neq 0$. Să se demonstreze că dacă

$$\forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\ :\quad x\,\frac{\partial f}{\partial x}\,(x, y) + y\,\frac{\partial f}{\partial y}\,(x, y) = f(x, y),$$

atunci

$$x\,\frac{\partial F}{\partial u}\left(x, \frac{y}{x}\right) = F\left(x, \frac{y}{x}\right)$$

pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ cu $x \neq 0$.

15. Fie $f = f(x, y) : \mathbb{R}^2 \to (0, \infty)$ și $F = F(u, v) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funcții diferențiabile pe $\mathbb{R}^2$, cu proprietatea

$$F\left(x^2 + y^2, \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = \ln f(x, y) - (x + y)$$

pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ cu $x \neq 0$ și $y \neq 0$. Să se demonstreze că dacă

$$\forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\ :\quad y\,\frac{\partial f}{\partial x}\,(x, y) - x\,\frac{\partial f}{\partial y}\,(x, y) = (y - x) f(x, y),$$

atunci

$$\frac{\partial F}{\partial v}\left(x^2 + y^2, \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 0$$

pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ cu $x \neq 0$, $y \neq 0$ și $x \neq y$.

16. Fie $a > 0$, $A = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2 + y^2 < a^2 \,\}$ și $f = f(x, y) : A \to \mathbb{R}$ o funcție diferențiabilă.

a) Să se determine, în funcție de derivatele parțiale ale lui f, derivatele parțiale de ordinul întâi ale funcției $F : (0, a) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definite prin $F(\rho, \theta) = f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$.

b) Folosind eventual rezultatul de la a), să se demonstreze că nu există nici o funcție diferențiabilă $f : A \to \mathbb{R}$, care satisface

$$\forall\ (x, y) \in A\ :\quad y\,\frac{\partial f}{\partial x}\,(x, y) - x\,\frac{\partial f}{\partial y}\,(x, y) = 1.$$

17. Să se demonstreze că nu există nici o funcție $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, continuă pe $\mathbb{R}^2$, diferențiabilă pe $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ și care să satisfacă

$$\forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}\ :\quad y\,\frac{\partial f}{\partial x}\,(x, y) + x\,\frac{\partial f}{\partial y}\,(x, y) = 1.$$

18. Folosind eventual coordonatele polare, să se determine funcțiile diferențiabile $f : (0,\infty)^2 \to \mathbb{R}$, care satisfac

$$\forall \ (x,y) \in (0,\infty)^2 \ : \quad x\,\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\,\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Fie p un număr real. O funcție $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se numește *p-omogenă* dacă

$$\forall\ t > 0,\ \forall\ (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \quad f(tx_1,\ldots,tx_n) = t^p f(x_1,\ldots,x_n).$$

19. (L. Euler) Să se demonstreze că dacă $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ este o funcție diferențiabilă, atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

1° f este p-omogenă.

2° Pentru orice $(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ are loc egalitatea

$$x_1\,\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,\ldots,x_n) + \cdots + x_n\,\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1,\ldots,x_n) = p\,f(x_1,\ldots,x_n).$$

20. Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o funcție de clasă C^1 cu proprietatea $f(0,0) = 0$. Să se demonstreze că pentru orice $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ are loc egalitatea

$$f(x,y) = x\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty)dt + y\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty)dt.$$

Olimpiadă studențească, U.R.S.S.

21. (Exemplu de funcții derivabile parțial, a căror compusă nu este derivabilă parțial) Fie $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ funcția definită prin $g(x,y) = (x^2+y^2, x^2+y^2)$, iar $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbb{R}$ funcţia definită prin

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{dacă} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dacă} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Să se demonstreze că g este derivabilă parțial în $a = (0,0)$, f este derivabilă parțial în $b = g(a) = (0,0)$, dar $f \circ g$ nu este derivabilă parțial în punctul a.

2.10 Diferențiabilitatea funcției inverse

2.10.1 Observație. Fie A și B submulțimi ale lui $\mathbb{R}^n$ și $f : A \to B$ o funcție bijectivă. Dacă $a \in \operatorname{int} A$ este un punct în care f este diferențiabilă, iar $f(a) \in \operatorname{int} B$, atunci nu rezultă, în general, că f^{-1} este diferențiabilă în $f(a)$.

De exemplu, funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^3$ este bijectivă și derivabilă (deci diferențiabilă) pe $\mathbb{R}$, dar inversa ei $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(y) := \sqrt[3]{y}$ nu este derivabilă (deci nici diferenţiabilă) în punctul $0 = f(0)$.

2.10.2 Teoremă. *Fie A și B submulțimi ale lui $\mathbb{R}^n$, $a \in \operatorname{int} A$, $b \in \operatorname{int} B$, iar $f : A \to B$ o funcție bijectivă care îndeplinește următoarele condiții:*

(i) *f este diferențiabilă în punctul a;*

(ii) *$f(a) = b$;*

(iii) *f^{-1} este diferențiabilă în punctul b.*

Atunci aplicația $df(a)$ este bijectivă, matricea $J(f)(a)$ este inversabilă și au loc următoarele egalități:

$$
\begin{aligned}
&df(a)^{-1} = df^{-1}(b),\\
&J(f)(a)^{-1} = J(f^{-1})(b).
\end{aligned}
$$

Demonstrație. Avem $f \circ f^{-1} = \mathbf{1}_B$ și $f^{-1} \circ f = \mathbf{1}_A$. Aplicând teorema 2.8.2, rezultă că

$$d\mathbf{1}_B(b) = df(a) \circ df^{-1}(b) \quad \text{și} \quad d\mathbf{1}_A(a) = df^{-1}(b) \circ df(a).$$

Intrucât $d\mathbf{1}_A(a) = d\mathbf{1}_B(b) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}^n}$, deducem că $df(a)$ este bijectivă și inversa ei este $df(a)^{-1} = df^{-1}(b)$. Pe de altă parte, din egalitatea $df(a) \circ df^{-1}(b) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}^n}$, rezultă $\big[df(a) \circ df^{-1}(b)\big] = I_n$. In baza teoremei 2.1.7, avem

$$\big[df(a)\big] \cdot \big[df^{-1}(b)\big] = I_n,$$

adică $J(f)(a) \cdot J(f^{-1})(b) = I_n$. Drept urmare, matricea $J(f)(a)$ este inversabilă și inversa ei este matricea $J(f^{-1})(b)$. $\square$

2.10.3 Observație. Din teorema 2.10.2 rezultă că o condiție necesară ca o funcție bijectivă $f : A \to B$, diferenţiabilă în punctul a, să aibă inversa diferenţiabilă în punctul $b := f(a)$, este ca diferențiala lui f în a să fie bijectivă. Această condiție, împreună cu continuitatea lui f^{-1} în b este și suficientă, după cum arată teorema următoare.

2.10.4 Teoremă. *Fie A și B submulțimi ale lui $\mathbb{R}^n$, $a \in \operatorname{int} A$, $b \in \operatorname{int} B$, iar $f : A \to B$ o funcție bijectivă, diferențiabilă în a și cu proprietatea $f(a) = b$. Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:*

1° *f^{-1} este diferențiabilă în b.*

2° *$df(a)$ este bijectivă și f^{-1} este continuă în b.*

Demonstrație. 1° $\Rightarrow$ 2° Rezultă din teorema 2.10.2 și teorema 2.4.4.

2° $\Rightarrow$ 1° Notăm $\varphi := df(a)$. Conform propoziției 2.4.3, există o funcție $\omega : A \to \mathbb{R}^n$ care îndeplinește următoarele condiţii:

$$\text{(1)} \qquad \begin{aligned} & f(x) = f(a) + \varphi(x-a) + \|x-a\|\,\omega(x) \quad \text{oricare ar fi } x \in A, \\ & \lim_{x \to a} \omega(x) = 0_n. \end{aligned}$$

Fără a restrânge generalitatea, putem presupune că $\omega(a) = 0_n$, adică ω este continuă în a. Punând $x := f^{-1}(y)$ în (1), deducem că pentru orice $y \in B$ avem

$$f(f^{-1}(y)) = b + \varphi\big(f^{-1}(y) - f^{-1}(b)\big) + \|f^{-1}(y) - f^{-1}(b)\|\,\omega(f^{-1}(y)),$$

de unde

$$\varphi\big(f^{-1}(y) - f^{-1}(b)\big) = y - b - \|f^{-1}(y) - f^{-1}(b)\|\,\omega(f^{-1}(y)).$$

Aplicând funcția φ^{-1} ambilor membri, rezultă că

$$\text{(2)} \quad f^{-1}(y) = f^{-1}(b) + \varphi^{-1}(y-b) - \|f^{-1}(y) - f^{-1}(b)\|\,\varphi^{-1}\Big(\omega\big(f^{-1}(y)\big)\Big)$$

oricare ar fi $y \in B$. Fie $\rho : B \to \mathbb{R}^n$ funcția definită prin

$$\begin{aligned} & \rho(y) := -\frac{\|f^{-1}(y) - f^{-1}(b)\|}{\|y-b\|}\,\varphi^{-1}\Big(\omega\big(f^{-1}(y)\big)\Big) \quad \text{dacă } y \in B \setminus \{b\} \\ & \rho(b) := 0_n. \end{aligned}$$

Avem atunci

$$\text{(3)} \quad f^{-1}(y) = f^{-1}(b) + \varphi^{-1}(y-b) + \|y-b\|\,\rho(y) \quad \text{oricare ar fi } y \in B.$$

Vom mai dovedi că

$$\text{(4)} \qquad \lim_{y \to b} \rho(y) = 0_n.$$

Deoarece ω este continuă în punctul $a = f^{-1}(b)$ şi f^{-1} este continuă în b, rezultă că $\omega \circ f^{-1}$ este continuă în punctul b. Cum

$$\big(\omega \circ f^{-1}\big)(b) = \omega(a) = 0_n,$$

există un $r > 0$ așa încât $B(b, r) \subseteq B$ și

$$\big\|\omega\big(f^{-1}(y)\big)\big\| < \frac{1}{2\|\varphi^{-1}\|} \quad \text{oricare ar fi } y \in B(b, r).$$

Ținând seama de (3), deducem că pentru orice $y \in B(b, r)$ avem

$$\begin{aligned}\|f^{-1}(y) - f^{-1}(b)\| &= \Big\|\varphi^{-1}(y-b) - \|f^{-1}(y) - f^{-1}(b)\|\,\varphi^{-1}\Big(\omega\big(f^{-1}(y)\big)\Big)\Big\| \\ &\le \|\varphi^{-1}(y-b)\| + \|f^{-1}(y) - f^{-1}(b)\|\,\Big\|\varphi^{-1}\Big(\omega\big(f^{-1}(y)\big)\Big)\Big\| \\ &\le \|\varphi^{-1}\|\,\|y-b\| + \|f^{-1}(y) - f^{-1}(b)\|\,\|\varphi^{-1}\|\,\big\|\omega\big(f^{-1}(y)\big)\big\| \\ &\le \|\varphi^{-1}\|\,\|y-b\| + \frac{1}{2}\,\|f^{-1}(y) - f^{-1}(b)\|,\end{aligned}$$

deci

$$\frac{1}{2}\,\|f^{-1}(y) - f^{-1}(b)\| \le \|\varphi^{-1}\|\,\|y-b\| \quad \text{oricare ar fi } y \in B(b, r).$$

Prin urmare, oricare ar fi $y \in B(b, r) \setminus \{b\}$ avem

$$\begin{aligned}\|\rho(y)\| &= \frac{\|f^{-1}(y) - f^{-1}(b)\|}{\|y-b\|}\,\Big\|\varphi^{-1}\Big(\omega\big(f^{-1}(y)\big)\Big)\Big\| \\ &\le 2\|\varphi^{-1}\|\,\|\varphi^{-1}\|\,\big\|\omega\big(f^{-1}(y)\big)\big\|,\end{aligned}$$

adică

$$\|\rho(y)\| \le 2\,\big\|\varphi^{-1}\big\|^2\,\big\|\omega\big(f^{-1}(y)\big)\big\| \quad \text{pentru orice } y \in B(b, r).$$

Deoarece $\lim\limits_{y\to b} \omega\big(f^{-1}(y)\big) = \omega\big(f^{-1}(b)\big) = \omega(a) = 0_n$, rezultă că egalitatea (4) are loc. Din (3) și (4) urmează că f^{-1} este diferențiabilă în punctul b și că $df^{-1}(b) = \varphi^{-1} = df(a)^{-1}$. $\square$

2.10.5 Observaţie. Teorema precedentă are aplicabilitate practică redusă. Intr-adevăr, a demonstra diferențiabilitatea funcției f^{-1} în punctul b pe baza implicației $2° \Rightarrow 1°$ din teorema 2.10.4 presupune a dovedi că f^{-1} este continuă în b. In general însă, funcția f^{-1} nu este cunoscută.

2.11 Teoreme de medie pentru funcții de variabilă vectorială

2.11.1 Definiție (extreme)**.** Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulțime nevidă și $f : A \to \mathbb{R}$ o funcție. Un punct $a \in A$ se numește *punct de minim local* (respectiv *punct de maxim local*) al lui f dacă există $V \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât pentru orice $x \in V \cap A$ să avem

$$(1) \qquad f(a) \leq f(x) \quad \text{(respectiv } f(a) \geq f(x)\text{)}.$$

Dacă inegalitatea (1) are loc pentru orice $x \in A$, atunci a se numește *punct de minim global* (respectiv *punct de maxim global*).

Punctele de minim local și punctele de maxim local se numesc *puncte de extrem local* ale lui f. Punctele de minim global și punctele de maxim global se numesc *puncte de extrem global* ale lui f.

2.11.2 Teoremă (P. Fermat)**.** *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulțime nevidă, $f : A \to \mathbb{R}$ o funcție și a un punct care îndeplinește următoarele condiții:*

(i) $a \in \operatorname{int} A$*;*

(ii) *a este punct de extrem local al lui f;*

(iii) *f este derivabilă parțial în punctul a.*

Atunci $\nabla f(a) = 0_n$, adică $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a) = 0$ oricare ar fi $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Demonstrație. Fie $a := (a_1, \ldots, a_n)$. Deoarece $a \in \operatorname{int} A$, există un $\delta > 0$ astfel ca $[a_1 - \delta, a_1 + \delta] \times \cdots \times [a_n - \delta, a_n + \delta] \subseteq A$. Fixăm un $j \in \{1, \ldots, n\}$ și considerăm funcția $g : [a_j - \delta, a_j + \delta] \to \mathbb{R}$, definită prin

$$g(t) := f(a_1, \ldots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \ldots, a_n).$$

Deoarece a este punct de extrem local al lui f, urmează că a_j este punct de extrem local al lui g (având aceeași natură ca și a). Evident, g este derivabilă în a_j și $g'(a_j) = \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$. Conform teoremei lui Fermat pentru funcții reale de variabilă reală, avem $g'(a_j) = 0$, deci $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a) = 0$. □

2.11.3 Observații. 1° Dacă ipoteza (iii) din teorema 2.11.2 se înlocuiește cu

(iii') *f este diferențiabilă în punctul a,* atunci concluzia teoremei devine $df(a) = 0$.

2° Dacă f este diferențiabilă în punctul a, iar $df(a) = 0$, atunci a se numește *punct critic* (sau *punct staționar*) al lui f. Din teorema lui Fermat rezultă că punctele de extrem local din $\operatorname{int} A$ ale unei funcții diferențiabile $f : A \to \mathbb{R}$ se află printre punctele sale critice. In general însă, nu orice punct critic este punct de extrem local. Cu alte cuvinte, condiția $\nabla f(a) = 0_n$ este necesară dar nu și suficientă ca a să fie punct de extrem local al lui f.

Fie, spre exemplu, funcția $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x, y) = x^2 - y^2$. Avem $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$, deci $a := (0, 0)$ este punct critic pentru f. Se vede imediat însă că a nu este punct de extrem local al lui f. Suprafața de ecuație $z = f(x, y) = x^2 - y^2$ are drept imagine un paraboloid hiperbolic, care în vecinătatea originii „arată ca o șa" (a se vedea figura 2.11.1). Din acest motiv, punctele critice ale unei funcții care nu sunt puncte de extrem local sunt numite *puncte șa*.

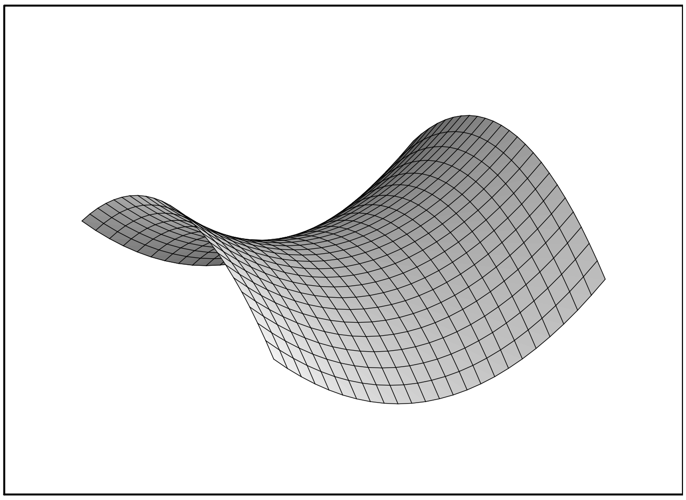
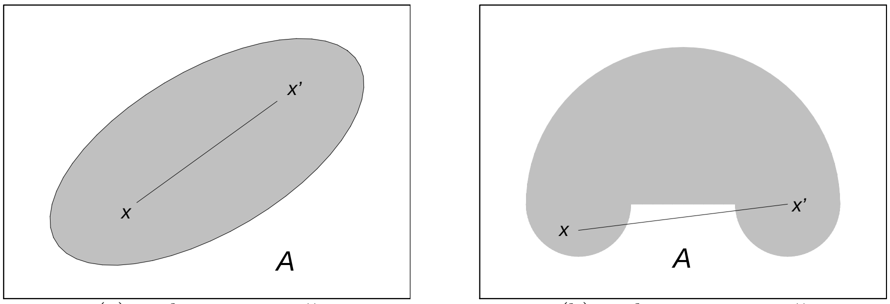


Figura 2.11.1: Graficul suprafeței de ecuație $z = x^2 - y^2$.

3° Fie A o submulțime compactă cu interiorul nevid a spațiului $\mathbb{R}^n$, iar $f : A \to \mathbb{R}$ o funcție continuă pe A și diferențiabilă pe $\operatorname{int} A$. Atunci, conform teoremei lui Weierstrass, f este mărginită și își atinge marginile, deci putem considera numerele reale $m := \min f(A)$ și $M := \max f(A)$. Intrucât și mulțimea $\operatorname{bd} A$ este compactă, tot în baza teoremei lui Weierstrass, putem considera și numerele reale $m_1 := \min f(\operatorname{bd} A)$ și $M_1 := \max f(\operatorname{bd} A)$. Fie apoi C mulțimea punctelor critice ale lui f din $\operatorname{int} A$. Presupunând că C este finită, notăm $m_2 := \min f(C)$ și $M_2 := \max f(C)$. Teorema 2.11.2 garantează atunci că

$$m = \min\{m_1, m_2\} \quad \text{și} \quad M = \max\{M_1, M_2\}.$$

2.11.4 Definiţie (mulțimi convexe)**.** O mulțime $A \subseteq \mathbb{R}^n$ se numește *convexă* dacă pentru orice puncte $x, x' \in A$ și orice $t \in [0,1]$ avem $(1-t)x + tx' \in A$ (a se vedea figura 2.11.2).



(a) mulțime convexă (b) mulțime neconvexă

Figura 2.11.2: Exemplu de mulțime convexă și respectiv neconvexă

2.11.5 Lemă. *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulțime convexă, deschisă, nevidă, $f : A \to \mathbb{R}^m$ o funcție diferențiabilă pe A, fie a și b puncte din A și fie $F : [0,1] \to \mathbb{R}^m$ funcția definită prin $F(t) := f((1-t)a+tb)$. Atunci F este derivabilă pe $[0,1]$ și*

$$F'(t) = df((1-t)a + tb)(b-a) \quad \text{oricare ar fi } t \in [0,1]. \tag{2}$$

Demonstrație. Fie $t_0 \in [0,1]$ fixat arbitrar și fie $\bar{a} := (1-t_0)a + t_0 b$, $v := b - a$. Deoarece A este convexă şi deschisă, $\bar{a}$ este punct interior lui A. Avem

$$\begin{aligned}\lim_{t\to t_0} \frac{1}{t-t_0}\big[F(t) - F(t_0)\big] &= \lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\big[F(t_0+s) - F(t_0)\big] \\ &= \lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\big[f((1-t_0-s)a + (t_0+s)b) - f((1-t_0)a + t_0 b)\big] \\ &= \lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\big[f(\bar{a} + sv) - f(\bar{a})\big] \\ &= f'(\bar{a}; v) = df(\bar{a})(v).\end{aligned}$$

Prin urmare, F este derivabilă în t_0 și $F'(t_0) = df((1-t_0)a + t_0 b)(b-a)$. $\square$

2.11.6 Teoremă (teorema de medie pentru funcţii reale de variabilă vectorială)**.** *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulţime deschisă, convexă, nevidă şi $f : A \to \mathbb{R}$ o funcţie diferenţiabilă pe A. Atunci oricare ar fi punctele $a, b \in A$, există un $\xi \in (0, 1)$ aşa încât notând $c := (1 - \xi)a + \xi b$ să avem*

$$f(b) - f(a) = df(c)(b - a).$$

Demonstraţie. Fie $a, b \in A$ fixate şi fie $F : [0, 1] \to \mathbb{R}$ funcţia definită prin $F(t) := f((1 - t)a + tb)$. Conform lemei 2.11.5, funcţia F este derivabilă pe $[0, 1]$. Aplicând lui F teorema de medie (a lui Lagrange) pentru funcţii reale de variabilă reală, rezultă existenţa unui punct $\xi \in (0, 1)$ astfel încât $F(1) - F(0) = F'(\xi)$. Notând $c := (1 - \xi)a + \xi b$, din relaţia (2) rezultă că $f(b) - f(a) = df(c)(b - a)$. □

2.11.7 Teoremă (teorema de medie pentru funcţii vectoriale de variabilă vectorială)**.** *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ deschisă convexă nevidă şi $f : A \to \mathbb{R}^m$ o funcţie diferenţiabilă pe A. Atunci oricare ar fi punctele $a, b \in A$, există un $\xi \in (0, 1)$ aşa încât notând $c := (1 - \xi)a + \xi b$ să avem*

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \|df(c)\| \, \|b - a\|.$$

Demonstraţie. Fie $a, b \in A$ fixate şi fie $F : [0, 1] \to \mathbb{R}^m$ funcţia definită prin $F(t) := f((1 - t)a + tb)$. Conform lemei 2.11.5, funcţia F este derivabilă pe $[0, 1]$. Aplicând lui F teorema de medie pentru funcţii vectoriale de variabilă reală (teorema 2.3.3), rezultă existenţa unui punct $\xi \in (0, 1)$ astfel încât să avem $\|F(1) - F(0)\| \leq \|F'(\xi)\|$. Notând $c := (1 - \xi)a + \xi b$, din relaţia (2) rezultă că

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \|df(c)(b - a)\| \leq \|df(c)\| \, \|b - a\|.$$

□

2.12 Probleme

1. (Teorema lui Rolle pentru funcţii reale de variabilă vectorială) Fie A o submulţime compactă cu interiorul nevid a spaţiului $\mathbb{R}^n$ şi $f : A \to \mathbb{R}$ o funcţie care îndeplineşte următoarele condiţii:

(i) f este continuă pe A;

(ii) f este diferenţiabilă pe $\operatorname{int} A$;

(iii) f este constantă pe $\operatorname{bd} A$.

Să se demonstreze că există un punct $c \in \operatorname{int} A$ astfel ca $df(c) = 0$.

2. Cu ajutorul funcției $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = (\sin x, \sin 2x)$, să se demonstreze că teorema lui Rolle nu rămâne adevărată pentru funcții vectoriale.

3. Fie mulțimea $A = [-1, 1]^2$ și fie $f : A \to \mathbb{R}$ funcția definită prin

$$f(x, y) = x^3 + xy + y^3.$$

Să se determine $\min f(A)$, $\max f(A)$ și $f(A)$.

4. Fie mulțimea $A = \{(x, y) \mid |x| \leq y \leq 2\}$ și fie $f : A \to \mathbb{R}$ funcția definită prin

$$f(x, y) = 5 + 4x + 3y - 2x^2 - y^2.$$

Să se determine $\min f(A)$ și $\max f(A)$.

5. Fie mulțimea $A = \{(x, y) \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 1\}$ și fie $f : A \to \mathbb{R}$ funcția definită prin

$$f(x, y) = xy^2(1 - x - y)^3.$$

Să se determine $\min f(A)$ și $\max f(A)$.

6. Fie mulțimea $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2\}$ și fie $f : A \to \mathbb{R}$ funcția definită prin

$$f(x, y) = (x + y)e^{-x^2 - y^2}.$$

Să se determine $\min f(A)$, $\max f(A)$ și $f(A)$. Să se demonstreze că

$$-\frac{1}{\sqrt{e}} \leq f(x, y) \leq \frac{1}{\sqrt{e}} \quad \text{oricare ar fi } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

7. Fie $x, y, z \in [0, \infty)$ așa încât $x + y + z = 1$. Să se demonstreze că

$$0 \leq xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{7}{27}.$$

OIM, Praga 1984

8. Fie $x, y, z \in [0, \infty)$ așa încât $x + y + z = 1$. Să se demonstreze că

$$4(xy + yz + zx) \leq 9xyz + 1.$$

9. Fie $x, y, z \in [0, \infty)$ așa încât $x + y + z = 1$. Să se demonstreze că

$$\frac{1}{4} \leq x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz \leq 1.$$

Olimpiadă studențească, U.R.S.S.

10. Fie $A = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \}$ și $f : A \to \mathbb{R}$ funcția definită prin $f(x, y, z) = (1 - x)(1 - y)(1 - z)$. Să se determine $\max f(A)$.

11. Să se demonstreze că pentru orice $x, y \geq 0$ are loc inegalitatea

$$\frac{x^2 + y^2}{4} \leq e^{x+y-2}.$$

Berkeley 1993

12. Să se demonstreze că funcția $f : (0, \infty)^2 \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x, y) = \frac{xy}{(x + 1)(y + 1)(x + y)},$$

posedă un maxim global și să se determine acest maxim.

13. Fie ABC și $A_1B_1C_1$ două triunghiuri având unghiurile de măsuri α, β, γ și respectiv $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$. Să se demonstreze că are loc inegalitatea

$$\frac{\cos \alpha_1}{\sin \alpha} + \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta} + \frac{\cos \gamma_1}{\sin \gamma} \leq \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma.$$

Kvant, Nr. 1–1987

14. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^2$ o mulțime deschisă cu proprietatea că $[0, 1] \times [0, 1] \subseteq A$ și fie $f : A \to \mathbb{R}$ o funcție diferențiabilă pe A, care îndeplinește următoarele condiții:

(i) $f(0, 0) + f(1, 0) + f(1, 1) + f(0, 1) = 0$;

(ii) $\forall\ (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]\ :\ \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \leq 1.$

Să se demonstreze că $\forall\ (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]\ :\ |f(x, y)| \leq \frac{3}{4}.$

Olimpiadă studențească, U.R.S.S.

15. Fie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ o funcție diferențiabilă care îndeplinește următoarele condiții:

(i) $\forall\, x \in \mathbb{R}^n \;:\; \operatorname{rang} J(f)(x) = n$;

(ii) pentru orice mulțime compactă $A \subseteq \mathbb{R}^n$, mulţimea $f^{-1}(A)$ este compactă.

Să se demonstreze că $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$.

Berkeley 1992

16. Fie $n \geq 2$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulțime deschisă, $a \in A$, iar $f : A \to \mathbb{R}$ o funcție continuă pe A și diferențiabilă în a, cu $df(a) \neq 0$. Să se demonstreze că pentru orice vecinătate V a lui a există un $x \in V \setminus \{\, a \,\}$ în așa fel încât $f(x) = f(a)$.

Concursul studențesc Traian Lalescu, etapa finală 1997

17. Fie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ o funcție, $\alpha \geq 0$ și $p > 1$. Să se demonstreze că dacă

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n \;:\quad \|f(x) - f(y)\| \leq \alpha \|x - y\|^p,$$

atunci f este constantă.

18. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulțime conexă deschisă nevidă și $f : A \to \mathbb{R}^m$ o funcție diferențiabilă care se bucură de următoarele proprietăți:

(i) există un punct $a \in A$ așa încât $f(a) = 0_m$;

(ii) există un $\alpha \geq 0$ astfel ca $\quad \forall\, x \in A \;:\quad \|df(x)\| \leq \alpha \|f(x)\|$.

Să se demonstreze că $f = 0_m$.

19. Fie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ o funcție diferențiabilă, iar ℓ un număr real cu proprietatea

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 \;\text{ așa încât } \forall\, x \in \mathbb{R}^n \;\text{ cu } \|x\| > \delta \;:\quad |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Să se demonstreze că există un punct $c \in \mathbb{R}^n$ astfel ca $df(c) = 0$.

20. Fie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ o funcție diferențiabilă proprie (adică pentru orice mulțime compactă $A \subset \mathbb{R}$, mulțimea $f^{-1}(A)$ este compactă în $\mathbb{R}^n$). Să se demonstreze că dacă f are un singur punct critic care este punct de extrem local, atunci acesta este punct de extrem global.

21. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ convexă deschisă nevidă și $f_k : A \to \mathbb{R}^m$ $(k \in \mathbb{N})$ un șir de funcții diferenţiabile care converge punctual pe A către funcția $f : A \to \mathbb{R}^m$. Să se arate că dacă

$$\sup \{ \|df_k(x)\| \mid k \in \mathbb{N},\ x \in A \} < \infty,$$

atunci f este continuă pe A.

2.13 Funcții de clasă C^1

2.13.1 Definiţie. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulțime deschisă nevidă, iar $f : A \to \mathbb{R}^m$ o funcție care este diferențiabilă în fiecare punct al lui A. Considerăm funcția $df : A \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, care asociază fiecărui punct $x \in A$, diferenţiala $df(x) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, a lui f în punctul x. Se spune că funcția df este *continuă într-un punct* $a \in A$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un $\delta > 0$ astfel ca pentru orice $x \in A$ cu $\|x - a\| < \delta$ să avem $\|df(x) - df(a)\| < \varepsilon$.

2.13.2 Teoremă. *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulțime deschisă, $a \in A$ și $f : A \to \mathbb{R}^m$ o funcție diferențiabilă pe A. Atunci funcția $df : A \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ este continuă în punctul a dacă și numai dacă pentru orice $j \in \{1, \ldots, n\}$ funcția $\dfrac{\partial f}{\partial x_j} : A \to \mathbb{R}^m$ este continuă în a.*

Demonstrație. Necesitatea. Fixăm un $j \in \{1, \ldots, n\}$. Pentru a dovedi că funcția $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ este continuă în a, fie $\varepsilon > 0$ oarecare. Deoarece funcția df este continuă în a, există $\delta > 0$ astfel ca pentru orice $x \in A$ cu $\|x - a\| < \delta$ să avem $\|df(x) - df(a)\| < \varepsilon$. Rezultă de aici că pentru orice $x \in A$ cu $\|x - a\| < \delta$ și orice $h \in \mathbb{R}^n$ cu $\|h\| = 1$ avem

$$\|df(x)(h) - df(a)(h)\| = \big\|\big(df(x) - df(a)\big)(h)\big\| \le \|df(x) - df(a)\| < \varepsilon.$$

Alegând $h = e_j$, deducem că

$$\|df(x)(e_j) - df(a)(e_j)\| = \left\| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \right\| < \varepsilon$$

oricare ar fi $x \in A$ cu $\|x - a\| < \delta$, deci funcția $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ este continuă în a.

Suficiența. Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar. Deoarece toate funcțiile $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ $(j = 1, \ldots, n)$ sunt continue în punctul a, pentru fiecare $j \in \{1, \ldots, n\}$ există un $\delta_j > 0$ așa încât oricare ar fi $x \in A$ cu $\|x - a\| < \delta_j$ să avem

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \right\| < \varepsilon' := \frac{\varepsilon}{2n}\,.$$

Notăm $\delta := \min\{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$. Atunci $\delta > 0$ și

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \right\| < \varepsilon'$$

pentru orice $x \in A$ cu $\|x - a\| < \delta$ și orice $j \in \{1, \ldots, n\}$. Vom dovedi că

(1) $\qquad \|df(x) - df(a)\| < \varepsilon \quad$ oricare ar fi $x \in A$ cu $\|x - a\| < \delta$.

Fie $x \in A$ un punct arbitrar cu proprietatea $\|x - a\| < \delta$ şi fie $h := (h_1, \ldots, h_n)$ un punct arbitrar din $\mathbb{R}^n$ cu proprietatea $\|h\| = 1$. Avem

$$\begin{aligned} \big\|\big(df(x) - df(a)\big)(h)\big\| &= \left\| \sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) - \sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \right\| \\ &\le \sum_{j=1}^{n} |h_j| \left\| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \right\| \\ &\le \varepsilon' \sum_{j=1}^{n} |h_j| \le n\varepsilon' \|h\| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Intrucât $h \in S^{n-1}$ a fost arbitrar, rezultă că (1) are loc, deci funcția *df* este continuă în punctul a. □

2.13.3 Definiție (funcții de clasă C^1)**.** Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulțime deschisă nevidă și $f : A \to \mathbb{R}^m$ o funcție. Dacă f este diferențiabilă în fiecare punct al lui A și funcția $df : A \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ este continuă pe A, atunci se spune că f este *de clasă C^1 pe A*.

2.13.4 Teoremă (caracterizarea funcțiilor de clasă C^1)**.** *Fie A o submulțime deschisă nevidă a lui $\mathbb{R}^n$. O funcție $f : A \to \mathbb{R}^m$ este de clasă C^1 pe A dacă și numai dacă ea este derivabilă parțial pe A și pentru fiecare $j \in \{1, \ldots, n\}$ funcția $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ este continuă pe A.*

Demonstrație. Partea de necesitate rezultă din teoremele 2.6.4 și 2.13.2, iar partea de suficiență din teoremele 2.6.7 și 2.13.2. □

2.14 Teorema difeomorfismului local

2.14.1 Definiție (difeomorfisme)**.** Fie A și B submulțimi deschise nevide ale spațiului $\mathbb{R}^n$. O funcție $f : A \to B$ se numește *difeomorfism* dacă ea este bijectivă, diferențiabilă pe A și cu inversa diferențiabilă pe B. Funcția f se numește *difeomorfism de clasă* C^1 dacă ea este bijectivă, de clasă C^1 pe A și cu inversa de clasă C^1 pe B.

2.14.2 Teoremă (teorema difeomorfismului local, teorema de inversabilitate locală)**.** *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulțime deschisă, $a \in A$ și $f : A \to \mathbb{R}^n$ o funcție diferențiabilă pe A, cu diferențiala df continuă în a și cu proprietatea că $df(a)$ este bijectivă. Atunci există o vecinătate deschisă $U \in \mathcal{V}(a)$ cu următoarele proprietăți:*

(i) *$U \subseteq A$ și mulțimea $f(U)$ este deschisă;*

(ii) *funcția $\tilde{f} : U \to f(U)$, definită prin $\tilde{f}(x) := f(x)$, este un difeomorfism.*

Demonstrație. Facem demonstrația în cazul particular când $df(a) = I$, unde I este aplicația identică a lui $\mathbb{R}^n$, $I(x) := x$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}^n$. Aceasta nu constituie o restrângere a generalității deoarece, altfel, lucrăm în locul funcției f cu funcția $F : A \to \mathbb{R}^n$, definită prin $F := \varphi^{-1} \circ f$, unde $\varphi := df(a)$. Aceasta satisface

$$dF(a) = d\varphi^{-1}(f(a)) \circ df(a) = \varphi^{-1} \circ \varphi = I.$$

Presupunem așadar că $df(a) = I$. Pentru fiecare punct $y \in \mathbb{R}^n$ considerăm funcția $g_y : A \to \mathbb{R}^n$, definită prin $g_y(x) := y + x - f(x)$. Evident, g_y este diferențiabilă pe A și

$$dg_y(x) = I - df(x) \quad \text{oricare ar fi } x \in A.$$

Impărțim demonstrația în trei etape.

Etapa I. Localizarea unei mulțimi deschise U în așa fel încât $a \in U \subseteq A$ și $f\big|_U$ este injectivă.

Deoarece funcția df este continuă în punctul a și $df(a) = I$, există un $r_0 > 0$ așa încât notând $U := B(a, r_0)$ să avem $U \subseteq A$ și

$$\|df(x) - I\| < \frac{1}{2} \quad \text{oricare ar fi } x \in U. \tag{1}$$

Vom dovedi în continuare că

$$\|g_y(x) - g_y(x')\| \le \frac{1}{2}\|x - x'\| \quad \text{pentru orice } y \in \mathbb{R}^n \text{ și orice } x, x' \in U. \tag{2}$$

Fie, în acest scop, $y \in \mathbb{R}^n$ și $x, x' \in U$ arbitrar alese. Având în vedere că U este o mulțime convexă, în baza teoremei 2.11.7 rezultă existenţa unui $\xi \in (0,1)$ astfel încât notând $c := (1-\xi)x + \xi x'$ să avem

$$\|g_y(x) - g_y(x')\| \leq \|dg_y(c)\| \, \|x - x'\|.$$

Cum $c \in U$, din (1) deducem că

$$\|g_y(x) - g_y(x')\| \leq \|I - df(c)\| \, \|x - x'\| \leq \frac{1}{2} \, \|x - x'\|,$$

deci (2) are loc.

Mai arătăm că $f\Big|_U$ este injectivă. Presupunând contrarul, ar exista punctele $x, x' \in U$, $x \neq x'$, astfel ca $f(x) = f(x') =: y$. Atunci

$$g_y(x) = y + x - f(x) = x \quad \text{și} \quad g_y(x') = y + x' - f(x') = x'.$$

Ținând seama de (2), rezultă că

$$\|x - x'\| = \|g_y(x) - g_y(x')\| \leq \frac{1}{2} \, \|x - x'\|,$$

deci $\|x - x'\| = 0$, ceea ce este absurd. Contradicția obţinută arată că $f\Big|_U$ este injectivă.

Etapa a II-a. Mulțimea $V := f(U)$ este deschisă.

Fie $y_0 \in V$ arbitrar. Există atunci un unic $x_0 \in U$ astfel ca $y_0 = f(x_0)$. Cum U este deschisă, există un $\delta_0 > 0$ în așa fel încât notând $B_0 := \bar{B}(x_0, \delta_0)$ să avem $B_0 \subseteq U$. Notăm $\delta := \delta_0/2$ și demonstrăm că $B(y_0, \delta) \subseteq V$.

Fie, în acest scop, y un punct oarecare din $B(y_0, \delta)$. Observăm că pentru fiecare $x \in B_0$ avem

$$\begin{aligned} \|g_y(x) - x_0\| &\leq \|g_y(x) - g_y(x_0)\| + \|g_y(x_0) - x_0\| \\ &\leq \frac{1}{2} \, \|x - x_0\| + \|y + x_0 - f(x_0) - x_0\| \qquad \text{(conform lui (2))} \\ &\leq \frac{1}{2} \, \delta_0 + \|y - y_0\| \leq \frac{1}{2} \, \delta_0 + \delta = \frac{\delta_0}{2} + \frac{\delta_0}{2} = \delta_0. \end{aligned}$$

Așadar, $g_y(x) \in \bar{B}(x_0, \delta_0) = B_0$ pentru orice $x \in B_0$.

Intrucât $B_0 \subseteq U$, din (2) urmează că $g_y : B_0 \to B_0$ este o $\frac{1}{2}$-contracție. Mulţimea B_0 fiind închisă, în baza teoremei de punct fix a lui Banach deducem existența unui unic punct $\bar{x} \in B_0$ astfel încât $g_y(\bar{x}) = \bar{x}$, adică

$$y + \bar{x} - f(\bar{x}) = \bar{x},$$

de unde $y = f(\bar{x}) \in f(B_0) \subseteq f(U) = V$. Cum y a fost un punct oarecare din $B(y_0, \delta)$, rezultă că $B(y_0, \delta) \subseteq V$, deci V este mulțime deschisă.

Evident, funcția $\tilde{f} : U \to V = f(U)$, definită prin $\tilde{f}(x) := f(x)$, este bijectivă și diferențiabilă pe U.

Etapa a III-a. Funcția $\tilde{f}^{-1} : V \to U$ *este diferențiabilă pe* V.

Arătăm mai întâi că pentru fiecare $x \in U$, aplicația liniară $d\tilde{f}(x) = df(x) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ este bijectivă. Presupunând contrarul, ar rezulta existența unui punct $x \in U$ astfel ca $df(x)$ să nu fie injectivă, deci ar exista un $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$ cu proprietatea că $df(x)(h) = 0_n$. Avem

$$\|h\| = \|I(h) - df(x)(h)\| \leq \|I - df(x)\| \, \|h\| < \frac{1}{2} \, \|h\|,$$

ceea ce este absurd. Contradicția obținută arată că $d\tilde{f}(x)$ este bijectivă oricare ar fi $x \in U$.

Arătaăm acum că

$$\|\tilde{f}^{-1}(y) - \tilde{f}^{-1}(y')\| \leq 2\|y - y'\| \quad \text{oricare ar fi } y, y' \in V. \tag{3}$$

Fie $y, y' \in V$ și fie $x := \tilde{f}^{-1}(y)$, $x' := \tilde{f}^{-1}(y')$. Atunci avem $x, x' \in U$ și $f(x) = y$, $f(x') = y'$. Alegem un $y \in \mathbb{R}^n$ arbitrar. Avem

$$\begin{aligned}
\|\tilde{f}^{-1}(y) - \tilde{f}^{-1}(y')\| &= \|x - x'\| \geq 2\|g_y(x) - g_y(x')\| \\
&= 2\|y + x - f(x) - y - x' + f(x') \\
&= 2\big\|x - x' - \big(f(x) - f(x')\big)\big\| \\
&= 2\|\tilde{f}^{-1}(y) - \tilde{f}^{-1}(y') - (y - y')\| \\
&\geq 2\|\tilde{f}^{-1}(y) - \tilde{f}^{-1}(y')\| - 2\|y - y'\|,
\end{aligned}$$

de unde rezultă validitatea lui (3). Relația (3) asigură că $\tilde{f}^{-1}$ este continuă pe V.

In concluzie, funcția $\tilde{f} : U \to V$ se bucură de următoarele proprietăți:

- $\tilde{f}$ este bijectivă și diferențiabilă pe U;
- $d\tilde{f}(x)$ este bijectivă pentru fiecare $x \in U$;
- $\tilde{f}^{-1}$ este continuă pe V.

Aplicând teorema 2.10.4, deducem că $\tilde{f}^{-1}$ este diferențiabilă pe V. □

2.14.3 Teoremă. *Fie A și B submulțimi deschise nevide ale spațiului $\mathbb{R}^n$ și $f : A \to B$ o funcție bijectivă, de clasă C^1 pe A, având inversa diferențiabilă pe B. Atunci f^{-1} este de clasă C^1 pe B.*

Demonstrație. Fără demonstrație. $\smile$

2.14.4 Teoremă. *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulțime deschisă nevidă, $f : A \to \mathbb{R}^n$ o funcție de clasă C^1 pe A și $a \in A$ un punct cu proprietatea că $df(a)$ este bijectivă. Atunci există o vecinătate deschisă $U \in \mathcal{V}(a)$ cu următoarele proprietăți:*

(i) *$U \subseteq A$ și mulțimea $f(U)$ este deschisă;*

(ii) *funcția $\tilde{f} : U \to f(U)$, definită prin $\tilde{f}(x) := f(x)$, este un difeomorfism de clasă C^1.*

Demonstrație. Se aplică teoremele 2.14.2 și 2.14.3. $\square$

2.14.5 Consecință. *Fie A o submulțime deschisă nevidă a spațiului $\mathbb{R}^n$, iar $f : A \to \mathbb{R}^n$ o funcție de clasă C^1 cu proprietatea că $df(x)$ este bijectivă pentru fiecare $x \in A$. Atunci următoarele afirmații sunt adevărate:*

1° *Mulțimea $f(A)$ este deschisă.*

2° *Dacă, în plus, f este injectivă, atunci funcţia $\tilde{f} : A \to f(A)$, definită prin $\tilde{f}(x) := f(x)$, este un difeomorfism de clasă C^1.*

2.14.6 Consecință. *Fie A și B submulțimi deschise nevide ale spațiului $\mathbb{R}^n$, iar $f : A \to B$ o funcție bijectivă, de clasă C^1 pe A și cu proprietatea că $df(x)$ este bijectivă oricare ar fi $x \in A$. Atunci f este un difeomorfism de clasă C^1.*

2.15 Funcții implicite

2.15.1 Definiţie. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ și $B \subseteq \mathbb{R}^m$ mulțimi nevide, iar $F : A \times B \to \mathbb{R}^m$ o funcție. Notăm

$$S := \{ (x, y) \in A \times B \mid F(x, y) = 0_m \}$$
$$S_1 := \{ x \in A \mid \exists\, y \in B \ : \ F(x, y) = 0_m \}.$$

Fie apoi $(a, b) \in S$. Atunci $a \in A$, $b \in B$ și $F(a, b) = 0_m$. Se spune că *ecuația $F(x, y) = 0_m$ defineşte implicit pe y ca funcție de x* în jurul punctului (a, b) dacă există $U \in \mathcal{V}(a)$ și $V \in \mathcal{V}(b)$ așa încât pentru orice punct $x \in U \cap S_1$, mulțimea

$$\{ y \in V \cap B \mid F(x, y) = 0_m \} \tag{1}$$

conține exact un element. In acest caz putem defini funcția $f : U \cap S_1 \to V$, punând $f(x) :=$ unicul element al mulțimii (1). Avem atunci

$$F(x, f(x)) = 0_m \quad \text{pentru orice } x \in U \cap S_1.$$

Se mai spune că f *este o funcție implicită definită în jurul punctului* (a,b) *de ecuația* $F(x,y) = 0_m$.

2.15.2 Exemplu. Fie $A = B = \mathbb{R}$ și fie $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcția definită prin $F(x,y) := x^2 + y^2 - 1$. Atunci

$$S = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \,\} \quad \text{și} \quad S_1 = [-1,1].$$

Fie $(a,b) \in S$, adică $a^2 + b^2 = 1$. Dacă $a \neq \pm 1$, atunci ecuația

$$F(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

definește implicit pe y ca funcție de x în jurul punctului (a,b). Mai precis, $y(x) = \sqrt{1-x^2}$ dacă $b > 0$ şi respectiv $y(x) = -\sqrt{1-x^2}$ dacă $b < 0$.

Dacă însă $a = \pm 1$, atunci $b = 0$. In acest caz, ecuaţia $F(x,y) = 0$ nu definește implicit pe y ca funcție de x în jurul punctului $(\pm 1, 0)$. Intr-adevăr, pentru orice vecinătate $U \in \mathcal{V}(\pm 1)$ și orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(0)$ există puncte $x \in U \cap S_1 = U \cap [-1,1]$ pentru care mulțimea $\{y \in V \mid x^2 + y^2 = 1\}$ conține exact două elemente.

In continuare, vom identifica pe $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ cu $\mathbb{R}^{n+m}$. In acest fel, dacă $A \subseteq \mathbb{R}^n$ și $B \subseteq \mathbb{R}^m$, atunci $A \times B$ poate fi privită ca submulţime a lui $\mathbb{R}^{n+m}$. Putem vorbi așadar despre diferențiabilitatea unei funcții $F : A \times B \to \mathbb{R}^m$.

Fie A o submulțime a lui $\mathbb{R}^n$, B o submulțime a lui $\mathbb{R}^m$, $a \in \operatorname{int} A$, $b \in \operatorname{int} B$ și $F = (F_1, \ldots, F_m) : A \times B \to \mathbb{R}^m$ o funcție diferenţiabilă în punctul (a,b):

$$\begin{aligned} F(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) \;&=\; \big(F_1(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m), \ldots, \\ &\qquad F_m(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)\big) \end{aligned}$$

pentru orice $x = (x_1, \ldots, x_n) \in A$ și orice $y = (y_1, \ldots, y_m) \in B$. Notăm

$$J_y(F)(a,b) := \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(a,b) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(a,b) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(a,b) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(a,b) \end{pmatrix}.$$

2.15.3 Teoremă (teorema funcției implicite)**.** *Fie* $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *și* $B \subseteq \mathbb{R}^m$ *mulțimi deschise nevide,* $F : A \times B \to \mathbb{R}^m$ *o funcție de clasă* C^1 *pe* $A \times B$*, iar* $a \in A$ *și* $b \in B$ *puncte cu proprietatea* $F(a,b) = 0_m$ *şi* $\det J_y(F)(a,b) \neq 0$. *Atunci există o vecinătate deschisă* $U \in \mathcal{V}(a)$ *cu* $U \subseteq A$*, o vecinătate deschisă* $V \in \mathcal{V}(b)$ *cu* $V \subseteq B$ *și o funcție* $f : U \to V$ *care se bucură de următoarele proprietăți:*

(i) *f este de clasă C^1 pe U;*

(ii) *$f(a) = b$;*

(iii) *$\forall\, x \in U \;:\quad F(x, f(x)) = 0_m$.*

Mai mult, vecinătățile U și V pot fi alese în așa fel încât să existe o singură funcție $f : U \to V$ care să satisfacă (iii).

Demonstrație. Deoarece A și B sunt deschise, rezultă că $A\times B$ este o submulțime deschisă a lui $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+m}$. Considerăm funcția $G : A\times B \to \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$, definită prin

$$G(x, y) := (x, F(x, y)) \quad \text{oricare ar fi } (x, y) \in A \times B.$$

Deoarece F este de clasă C^1, rezultă că și G este de clasă C^1 pe $A \times B$. Fie $G_1, \ldots, G_n, G_{n+1}, \ldots, G_{n+m}$ componentele scalare ale lui G. Cum

$$G_i(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = x_i \quad \text{dacă } 1 \le i \le n$$

și respectiv

$$G_{n+i}(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = F_i(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) \quad \text{dacă } 1 \le i \le m,$$

rezultă că

$$J(G)(a, b) = \begin{pmatrix} I_n & O_{n\times m} \\ M_{m\times n} & J_y(F)(a, b) \end{pmatrix}.$$

Conform regulii lui Laplace, avem $\det J(G)(a, b) = \det J_y(F)(a, b) \neq 0$. În baza teoremelor 2.6.4 și 2.1.13, deducem că $dG(a, b)$ este bijectivă. Aplicând funcției G teorema difeomorfismului local, rezultă existența unei vecinătăți deschise $U_0 \times V$ a punctului (a, b), cu următoarele proprietăți:

- $U_0 \times V \subseteq A \times B$ și mulțimea $W := G(U_0 \times V)$ este deschisă;
- funcția $\widetilde{G} : U_0 \times V \to W$, definită prin $\widetilde{G}(x, y) := G(x, y)$, este un difeomorfism de clasă C^1.

Fie $H : W \to U_0 \times V$ inversa funcției $\widetilde{G}$. Atunci și H este de clasă C^1. Fie apoi $H_1 : W \to U_0$ și $H_2 : W \to V$ funcțiile care satisfac egalitatea

$$H(x, y) = (H_1(x, y), H_2(x, y)) \quad \text{oricare ar fi } (x, y) \in W.$$

Observăm că pentru orice $(x, y) \in W$ avem

$$\begin{aligned}(\widetilde{G} \circ H)(x, y) &= \widetilde{G}(H(x, y)) = \widetilde{G}(H_1(x, y), H_2(x, y)) \\ &= (H_1(x, y),\, F(H_1(x, y), H_2(x, y))).\end{aligned}$$

Cum, pe de altă parte, $(\widetilde{G} \circ H)(x, y) = (x, y)$, prin compararea celor două egalități deducem că

$$(2) \qquad H_1(x, y) = x \quad \text{și} \quad F(x, H_2(x, y)) = y \quad \text{oricare ar fi } (x, y) \in W.$$

Mai observăm că $(a, 0_m) = (a, F(a, b)) = G(a, b) \in W$. Întrucât W este deschisă, rezultă de aici existența unei vecinătăți deschise $U \in \mathcal{V}(a)$ în așa fel încât $U \subseteq U_0$ și $(x, 0_m) \in W$ oricare ar fi $x \in U$.

Fie $f : U \to V$ funcția definită prin $f(x) := H_2(x, 0_m)$. Vom dovedi că U, V și f îndeplinesc condițiile (i), (ii) și (iii) din enunț. În adevăr, H fiind de clasă C^1, rezultă că și H_2 este de clasă C^1, deci f este de clasă C^1. Prin urmare, (i) are loc. Din $\widetilde{G}(a, b) = (a, F(a, b)) = (a, 0_m)$ rezultă că $H(a, 0_m) = (a, b)$. Dar $H(a, 0_m) = (H_1(a, 0_m), H_2(a, 0_m))$, deci $H_2(a, 0_m) = b$, adică $f(a) = b$. Această egalitate arată că și (ii) are loc. Din (2) rezultă că pentru orice $x \in U$ avem $F(x, H_2(x, 0_m)) = 0_m$, adică $F(x, f(x)) = 0_m$. Deci și (iii) are loc.

Rămâne să mai dovedim că f este singura funcție de la U în V care satisface (iii). Fie, în acest scop, $g : U \to V$ o altă funcție cu proprietatea

$$F(x, g(x)) = 0_m \quad \text{oricare ar fi } x \in U.$$

Pentru fiecare $x \in U$ avem atunci

$$\begin{aligned} \widetilde{G}(x, f(x)) &= G(x, f(x)) = (x, F(x, f(x))) = (x, 0_m) \\ &= (x, F(x, g(x))) = G(x, g(x)) = \widetilde{G}(x, g(x)). \end{aligned}$$

Întrucât funcția $\widetilde{G}$ este injectivă, deducem că $f(x) = g(x)$, deci $f = g$. □

2.15.4 Observație. Notând cu $f_1, \ldots, f_m$ componentele lui f, (iii) se scrie

$$\forall\, x \in U \;:\quad F(x_1, \ldots, x_n, f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)) = 0_m,$$

relație echivalentă cu sistemul

$$\forall\, x \in U \;:\quad F_i(x_1, \ldots, x_n, f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)) = 0,$$

oricare ar fi $i \in \{\, 1, \ldots, m \,\}$. Fixăm un indice $j \in \{1, \ldots, n\}$. Aplicând regula de derivare a funcțiilor compuse, deducem că

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x, f(x)) + \frac{\partial F_i}{\partial y_1}(x, f(x)) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(x) + \frac{\partial F_i}{\partial y_2}(x, f(x)) \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_j}(x) \\ + \cdots + \frac{\partial F_i}{\partial y_m}(x, f(x)) \cdot \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(x) = 0$$

pentru orice $x \in U$ și orice $i \in \{1, \ldots, m\}$. Punând $x = a$, rezultă

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}(a,b) \cdot \dfrac{\partial f_1}{\partial x_j}(a) + \cdots + \dfrac{\partial F_1}{\partial y_m}(a,b) \cdot \dfrac{\partial f_m}{\partial x_j}(a) = -\dfrac{\partial F_1}{\partial x_j}(a,b) \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial y_1}(a,b) \cdot \dfrac{\partial f_1}{\partial x_j}(a) + \cdots + \dfrac{\partial F_2}{\partial y_m}(a,b) \cdot \dfrac{\partial f_m}{\partial x_j}(a) = -\dfrac{\partial F_2}{\partial x_j}(a,b) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial y_1}(a,b) \cdot \dfrac{\partial f_1}{\partial x_j}(a) + \cdots + \dfrac{\partial F_m}{\partial y_m}(a,b) \cdot \dfrac{\partial f_m}{\partial x_j}(a) = -\dfrac{\partial F_m}{\partial x_j}(a,b). \end{cases}$$

Acesta este un sistem liniar de m ecuații cu necunoscutele

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(a),\ \frac{\partial f_2}{\partial x_j}(a),\ \ldots,\ \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(a).$$

Determinantul sistemului este $\det J_y(F)(a,b) \neq 0$, deci sistemul este compatibil determinat și poate fi rezolvat cu regula lui Cramer. Dând lui j succesiv valorile $1, \ldots, n$, se determină în acest mod toate derivatele parțiale $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(a),\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}$.

2.16 Probleme

1. Fie mulțimile definite prin $A = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y > 0\,\}$ și respectiv $B = \{\,(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u + v > 0,\ u - v > 0\,\}$. Să se demonstreze că funcția $f : A \to B$, definită prin $f(x,y) = (x^2 + y^2,\ x^2 - y^2)$, este un difeomorfism de clasă C^1.

2. Să se demonstreze că funcția $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definită prin

$$f(x,y) = (x^3 + x,\ y - x^2),$$

este un difeomorfism de clasă C^1.

3. Să se demonstreze că funcția $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definită prin

$$f(x,y) = (x^3 + 3xe^y,\ y - x^2),$$

este un difeomorfism de clasă C^1.

4. Se caută funcțiile $f : A \to \mathbb{R}$, de clasă C^1 și care satisfac

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) + 3(x-y)f(x,y) = 0 \tag{1}$$

oricare ar fi $(x,y) \in A$, unde $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > y\}$.

a) Să se demonstreze că pentru orice $(x,y) \in A$ avem $(xy,\, x+y) \in B$, unde $B = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid v^2 > 4u\}$.

b) Funcția $g : A \to B$, definită prin $g(x,y) = (xy,\, x+y)$, este un difeomorfism de clasă C^1.

c) Dacă funcția $f : A \to \mathbb{R}$ este de clasă C^1, atunci și funcția $F : B \to \mathbb{R}$, definită prin $F = f \circ g^{-1}$, este de clasă C^1. Mai mult, (1) are loc oricare ar fi $(x,y) \in A$ dacă și numai dacă avem

$$\forall \ (u,v) \in B \ : \qquad \frac{\partial F}{\partial u}(u,v) - 3F(u,v) = 0.$$

d) Să se determine funcțiile $f : A \to \mathbb{R}$, de clasă C^1 și care satisfac (1) pentru orice $(x,y) \in A$.

5. Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ funcția definită prin

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(x,\, \frac{1}{x}\operatorname{arctg}(xy)\right) & \text{dacă} \quad x \neq 0 \\ (0,y) & \text{dacă} \quad x = 0. \end{cases}$$

a) Să se arate că f este o funcție injectivă de clasă C^1.

b) Să se demonstreze că mulțimea $B = f\left(\mathbb{R}^2\right)$ este deschisă și că funcţia $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \to B$, definită prin $\tilde{f}(x,y) = f(x,y)$, este un difeomorfism de clasă C^1.

6. Fie $A = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\pi < y < \pi \,\}$ și $f : A \to \mathbb{R}^2$ funcția definită prin $f(x,y) = (e^x \cos y,\ e^x \sin y)$.

a) Să se arate că f este o funcție injectivă de clasă C^1.

b) Să se arate că mulțimea $f(A)$ este deschisă, iar funcția $\tilde{f} : A \to f(A)$, definită prin $\tilde{f}(x,y) = f(x,y)$, este un difeomorfism de clasă C^1. Să se determine $J\left(\tilde{f}^{-1}\right)\left(-\frac{e}{\sqrt{2}}, \frac{e}{\sqrt{2}}\right)$.

7. Fie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ funcția definită prin

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1,\ x_1x_2,\ x_1x_2x_3)$$

și mulțimea $A = \{\, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 > 0,\ x_2 > 0 \,\}$.

a) Să se arate că mulțimea $f(A)$ este deschisă.

b) Să se studieze dacă funcția $\tilde{f} : A \to f(A)$, definită prin $\tilde{f}(x) = f(x)$, este un difeomorfism de clasă C^1.

8. Fie $A = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1 \,\}$. Să se arate că funcția $f : A \to \mathbb{R}^n$, definită prin

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \|x\|^2}} \cdot x,$$

este un difeomorfism de clasă C^1.

9. Fie funcția $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definită prin

$$f(x, y) = \left(2x + 2\cos\left(\frac{\pi}{2}y\right), 2y + 2\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right).$$

Să se demonstreze că există o vecinătate deschisă U a punctului $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, în așa fel încât mulțimea $f(U)$ să fie deschisă și funcția $\tilde{f} : U \to f(U)$, definită prin $\tilde{f}(x, y) = f(x, y)$, să fie un difeomorfism de clasă C^1. Să se determine $J\left(\tilde{f}^{-1}\right)(\sqrt{2} + 1, \sqrt{2} - 1)$.

10. Fie $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ funcția definită prin

$$g(x, y) = (y\cos x,\ (x + y)\sin y),$$

iar $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ funcția definită prin

$$f(x, y) = (x^2 - y,\ 3x - 2y,\ 2xy + y^2).$$

a) Să se arate că există o vecinătate deschisă U a punctului $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ astfel ca mulțimea $g(U)$ să fie deschisă, iar funcția $\tilde{g} : U \to g(U)$, definită prin $\tilde{g}(x, y) = g(x, y)$, să fie un difeomorfism de clasă C^1.

b) Să se determine $J\left(f \circ \tilde{g}^{-1}\right)\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

11. Fie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție de clasă C^1, iar $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ funcția definită prin $f(x, y) = (x + g(y), y + g(x))$. Să se demonstreze că dacă există un $\alpha \in (0, 1)$ așa încât $|g'(t)| \le \alpha$ pentru orice $t \in \mathbb{R}$, atunci f este un difeomorfism de clasă C^1.

12. (generalizarea problemei precedente) Fie $n \geq 2$, $g : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ o funcție de clasă C^1, iar $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ funcția definită prin

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (x_1 + g(x_2, x_3, \ldots, x_n),\ x_2 + g(x_1, x_3, \ldots, x_n),\\ \ldots,\ x_n + g(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})).$$

Să se demonstreze că dacă există un număr pozitiv $\alpha < \dfrac{1}{n-1}$ așa încât

$$\forall\ j \in \{1, \ldots, n-1\},\quad \forall\ x \in \mathbb{R}^{n-1}\ :\quad \left|\frac{\partial g}{\partial x_j}(x)\right| \leq \alpha,$$

atunci f este un difeomorfism de clasă C^1.

13. Fie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție de clasă C^1, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ funcția definită prin $f(x, y) = (g(x), -y + xg(x))$ și (x_0, y_0) un punct al lui $\mathbb{R}^2$ cu proprietatea $g'(x_0) \neq 0$. Să se demonstreze că există o vecinătate deschisă W a lui (x_0, y_0) şi o funcție $h : \mathbf{R} \to \mathbb{R}$, de clasă C^1, aşa încât să fie îndeplinite următoarele condiţii:

(i) mulțimea $f(W)$ este deschisă;

(ii) funcția $\tilde{f} : W \to f(W)$, definită prin $\tilde{f}(x, y) = f(x, y)$, este un difeomorfism de clasă C^1;

(iii) $\forall\ (u, v) \in f(W)\ :\quad \tilde{f}^{-1}(u, v) = (h(u), -v + uh(u))$.

Berkeley 1984

14. Fie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ o funcție de clasă C^1 cu proprietatea că există $\alpha > 0$ astfel ca

$$\forall\ x, y \in \mathbb{R}^n\ :\quad \|f(x) - f(y)\| \geq \alpha \|x - y\|.$$

a) Să se arate că $\quad \forall\ x, h \in \mathbb{R}^n\ :\quad \|df(x)(h)\| \geq \alpha \|h\|.$

b) Folosind eventual faptul că $\mathbb{R}^n$ este singura submulțime nevidă simultan deschisă și închisă a lui $\mathbb{R}^n$, să se arate că f este un difeomorfism de clasă C^1.

15. Să se studieze dacă există o vecinătate deschisă U a punctului $(1, 1)$ și o funcție $f : U \to \mathbb{R}$, de clasă C^1 și care îndeplineşte următoarele condiții:

(i) $f(1, 1) = 1$;

(ii) pentru orice $(x_1, x_2) \in U$ are loc egalitatea

$$e^{x_1 + x_2} \ln(x_1 + x_2 + f(x_1, x_2) - 2) - 2x_1 + x_2 + f(x_1, x_2) = 0.$$

In caz afirmativ, să se determine $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(1,1)$ și $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(1,1)$.

16. Fie $F:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funcția definită prin

$$F(x,y) := (1-x^2)\cos y - e^x \sin y \ln(1+x^2+y^2).$$

Să se demonstreze că există o vecinătate deschisă $U \subseteq \mathbb{R}$ a lui 1 și o funcție $f:U\to\mathbb{R}$, de clasă C^1 pe U, în așa fel încât

$$f(1)=0 \quad \text{și} \quad F(x,f(x))=0 \quad \text{pentru orice } x\in U.$$

Să se determine $f'(1)$.

17. Să se arate că ecuația $x^2+xy+2y^2+3z^4-z=9$ definește implicit într-o vecinătate a punctului $(1,-2)$ o funcție $z=f(x,y)$, de clasă C^1 și cu proprietatea $f(1,-2)=1$. Să se determine derivatele parțiale de ordinul întâi și diferențiala lui f în punctul $(1,-2)$.

18. Să se studieze posibilitatea aplicării teoremei funcției implicite pentru funcția $F:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, definită prin

$$F(x,y) = (x_1^2 - x_2^2 - y_1^3 + y_2^2 + 4,\ 2x_1x_2 + x_2^2 - 2y_1^2 + 3y_2^4 + 8)$$

și punctul $(a,b)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2$, unde $a=(2,-1)$, $b=(2,1)$. In caz afirmativ, să se determine derivatele parțiale de ordinul întâi în punctul a ale funcției definite implicit de ecuația $F(x,y)=0_2$.

19. Să se arate că sistemul

$$\begin{cases} x^2-y^2-z^3-t^8=-9 \\ 2xy+y^2+2z^2+3t^4=14 \end{cases}$$

definește într-o vecinătate a punctului $(-1,-1)$ o funcţie

$$f=(f_1(x,y),\ f_2(x,y)),$$

de clasă C^1 și cu proprietatea $f(-1,-1)=(2,-1)$. Să se determine $df(-1,-1)$.

20. Să se demonstreze că sistemul

$$\begin{cases} x^2 - y\cos(uv) + z^2 = 0 \\ x^2+y^2-\sin(uv)+2z^2 = 2 \\ xy - \cos u\cos v + z = 1 \end{cases}$$

definește implicit într-o vecinătate a punctului $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ o funcție

$$f = (f_1(u, v),\ f_2(u, v),\ f_3(u, v)),$$

de clasă C^1 și cu proprietatea $f\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = (1, 1, 0)$. Să se determine $df\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

21. Să se demonstreze că sistemul

$$\begin{cases} x^2 + uy + e^v = 0 \\ 2x + u^2 - uv = 5 \end{cases}$$

definește implicit într-o vecinătate a punctului $(2, 5)$ o funcție

$$f = (f_1(x, y),\ f_2(x, y)),$$

de clasă C^1 și cu proprietatea $f(2, 5) = (-1, 0)$. Să se determine $df(2, 5)$.

2.17 Extreme condiționate

Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulțime nevidă, $m \in \mathbb{N}$ cu $m < n$, iar $f : A \to \mathbb{R}$ și $F : A \to \mathbb{R}^m$ funcții date. Notăm

$$C := \{x \in A \mid F(x) = 0_m\}.$$

Un punct $c \in C$ se numește *punct de extrem local al lui f relativ la mulțimea C* (sau *punct de extrem local condiționat*, sau *punct de extrem local cu legături*) dacă c este punct de extrem local pentru $f\Big|_C$.

2.17.1 Teoremă (regula multiplicatorilor lui Lagrange)**.** *Fie m și n numere naturale astfel încât $m < n$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulțime deschisă nevidă, iar $f : A \to \mathbb{R}$ și $F = (F_1, \ldots, F_m) : A \to \mathbb{R}^m$ funcții de clasă C^1. Dacă $c \in C$ este un punct de extrem local al lui f relativ la mulţimea C, iar* $\operatorname{rang} J(F)(c) = m$, *atunci există un punct $\lambda_0 \in \mathbb{R}^m$ așa încât $(c, \lambda_0) \in A \times \mathbb{R}^m$ să fie punct critic al funcției $L : A \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, definite prin*

$$L(x, \lambda) := f(x) + \lambda_1 F_1(x) + \cdots + \lambda_m F_m(x).$$

Demonstrație. Întrucât matricea $J(F)(c) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ are rangul m, aceasta posedă un minor de ordinul m nenul. Fără a restrânge generalitatea, putem presupune că

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_{n-m+1}}(c) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(c) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_{n-m+1}}(c) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(c) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Privim fiecare punct $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ca o pereche ordonată (u, v), unde $u := (x_1, \ldots, x_{n-m}) \in \mathbb{R}^{n-m}$, iar $v := (x_{n-m+1}, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^m$. Convenim de asemenea să facem identificarea de variabile $x_i \leftrightarrow u_i$ pentru $i = 1, \ldots, n-m$ și respectiv $x_{n-m+i} \leftrightarrow v_i$ pentru $i = 1, \ldots, m$. În particular, $c = (a, b)$, unde $a := (c_1, \ldots, c_{n-m})$, iar $b := (c_{n-m+1}, \ldots, c_n)$.

Deoarece mulțimea A este deschisă, iar $c = (a, b) \in A$, există mulțimi deschise $A_1 \subseteq \mathbb{R}^{n-m}$ și respectiv $B_1 \subseteq \mathbb{R}^m$ așa încât $a \in A_1$, $b \in B_1$ și $A_1 \times B_1 \subseteq A$. În continuare vom lucra numai cu restricțiile funcțiilor f și F la $A_1 \times B_1$. Condiția (1) poate fi rescrisă sub forma

$$\det J_v(F)(a, b) \neq 0. \tag{2}$$

Considerăm sistemul liniar

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial F_i}{\partial v_j}(a, b) = -\frac{\partial f}{\partial v_j}(a, b) \qquad j = 1, \ldots, m. \tag{3}$$

Acesta este un sistem de m ecuații cu necunoscutele $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Determinantul sistemului fiind $\det J_v(F)(a, b) \neq 0$ (conform lui (2)), sistemul are soluția unică $(\lambda_{01}, \ldots, \lambda_{0m})$. Notând $\lambda_0 := (\lambda_{01}, \ldots, \lambda_{0m}) \in \mathbb{R}^m$, vom dovedi în continuare că $(c, \lambda_0) = (a, b, \lambda_0)$ este punct critic al funcției L.

Deoarece $(\lambda_{01}, \ldots, \lambda_{0m})$ este soluția sistemului (3), avem

$$\frac{\partial f}{\partial v_j}(a, b) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_{0i} \frac{\partial F_i}{\partial v_j}(a, b) = 0 \quad \text{oricare ar fi } j \in \{1, \ldots, m\}. \tag{4}$$

Prin urmare, pentru orice $j \in \{1, \ldots, m\}$ avem $\frac{\partial L}{\partial v_j}(a, b, \lambda_0) = 0$. Cu alte cuvinte,

$$\frac{\partial L}{\partial x_j}(c, \lambda_0) = 0 \quad \text{oricare ar fi } j \in \{n-m+1, \ldots, n\}. \tag{5}$$

Mai observăm că pentru orice $j \in \{1, \ldots, m\}$ avem $\frac{\partial L}{\partial \lambda_j}(x, \lambda) = F_j(x)$, deci

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_j}(c, \lambda_0) = F_j(c) = 0 \quad \text{oricare ar fi } j \in \{1, \ldots, m\}. \tag{6}$$

Rămâne să mai dovedim că

$$\frac{\partial L}{\partial x_j}(c, \lambda_0) = 0 \quad \text{oricare ar fi } j \in \{1, \ldots, n-m\}. \tag{7}$$

Ținând seama de (2), deducem în baza teoremei 2.15.3 (a funcției implicite) că există o vecinătate deschisă $U \in \mathcal{V}(a)$ cu $U \subseteq A_1$, o vecinătate deschisă $V \in \mathcal{V}(b)$ cu $V \subseteq B_1$, precum și o funcție $g : U \to V$, de clasă C^1 și care îndeplinește următoarele condiții:

$$g(a) = b, \tag{8}$$

$$F(u, g(u)) = 0_m \quad \text{oricare ar fi } u \in U. \tag{9}$$

Din (9) rezultă că $(u, g(u)) \in C$ oricare ar fi $u \in U$.

Considerăm funcția $h : U \to \mathbb{R}$, definită prin $h(u) := f(u, g(u))$. Deoarece f și g sunt funcții de clasă C^1, rezultă că și h este de clasă C^1. Să arătăm că a este punct de extrem local al lui h. Presupunem, pentru fixarea ideilor, că $c = (a, b)$ este punct de minim local al lui f relativ la C. Există atunci vecinătăți $U_0 \in \mathcal{V}(a)$ și $V_0 \in \mathcal{V}(b)$ așa încât

$$f(a, b) \le f(u, v) \quad \text{oricare ar fi } (u, v) \in (U_0 \times V_0) \cap C. \tag{10}$$

Deoarece g este continuă în a și $g(a) = b$, există $U_1 \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât

$$g(u) \in V_0 \quad \text{pentru orice } u \in U_1 \cap U.$$

Atunci pentru orice $u \in U_0 \cap U_1 \cap U$ avem $(u, g(u)) \in (U_0 \times V_0) \cap C$. Ținând seama de (10) și (8), deducem că

$$h(u) = f(u, g(u)) \ge f(a, b) = f(a, g(a)) = h(a).$$

Așadar $h(a) \le h(u)$ oricare ar fi $u \in U_0 \cap U_1 \cap U$ și prin urmare a este punct de minim local al lui h.

Aplicând teorema 2.11.2 (a lui Fermat), rezultă că

$$\frac{\partial h}{\partial u_j}(a) = 0 \quad \text{oricare ar fi } j \in \{1, \ldots, n - m\}. \tag{11}$$

Dar, în baza regulii de derivare a funcțiilor compuse, avem

$$\frac{\partial h}{\partial u_j}(u) = \frac{\partial f}{\partial u_j}(u, g(u)) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial v_i}(u, g(u)) \frac{\partial g_i}{\partial u_j}(u).$$

Punând în această egalitate $u = a$ și ținând seama de (8) și (11), deducem că

$$\frac{\partial f}{\partial u_j}(a, b) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial v_i}(a, b) \frac{\partial g_i}{\partial u_j}(a) = 0 \quad \text{oricare ar fi } j \in \{1, \ldots, n - m\}. \tag{12}$$

Pe de altă parte, din (9) rezultă că pentru orice $j \in \{1, \ldots, n - m\}$, orice $k \in \{1, \ldots, m\}$ și orice $u \in U$ avem

$$\frac{\partial F_k}{\partial u_j}(u, g(u)) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F_k}{\partial v_i}(u, g(u)) \frac{\partial g_i}{\partial u_j}(u) = 0.$$

Punând $u = a$, rezultă că

$$\frac{\partial F_k}{\partial u_j}(a, b) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F_k}{\partial v_i}(a, b) \frac{\partial g_i}{\partial u_j}(a) = 0 \tag{13}$$

pentru orice $j \in \{1, \ldots, n - m\}$ și orice $k \in \{1, \ldots, m\}$.

Fie acum $j \in \{1, \ldots, n - m\}$ fixat arbitrar. În baza lui (13), avem

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial u_j}(a, b, \lambda_0) &= \frac{\partial f}{\partial u_j}(a, b) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_{0k} \frac{\partial F_k}{\partial u_j}(a, b) \\ &= \frac{\partial f}{\partial u_j}(a, b) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_{0k} \left(-\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F_k}{\partial v_i}(a, b) \frac{\partial g_i}{\partial u_j}(a) \right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial u_j}(a, b) - \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial u_j}(a) \left(\sum_{k=1}^{m} \lambda_{0k} \frac{\partial F_k}{\partial v_i}(a, b) \right). \end{aligned}$$

Ținând seama de (4) și (12), obținem

$$\frac{\partial L}{\partial u_j}(a, b, \lambda_0) = \frac{\partial f}{\partial u_j}(a, b) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial u_j}(a) \frac{\partial f}{\partial v_i}(a, b) = 0,$$

deci (7) are loc. Din relațiile (5), (6) și (7) rezultă că (c, λ_0) este punct critic al lui L. □

2.17.2 Observaţie. Teorema precedentă dă o condiție necesară ca c să fie punct de extrem local condiționat. Numerele $\lambda_{01}, \ldots, \lambda_{0m}$, a căror existență este garantată de teorema 2.17.1, se numesc *multiplicatori Lagrange*, iar funcția L se numește *funcția lui Lagrange asociată funcţiilor f și F*.

2.18 Derivate parţiale de ordinul doi

2.18.1 Definiţie. Fie A o submulțime a lui $\mathbb{R}^n$, $a \in \operatorname{int} A$, $f : A \to \mathbb{R}$ o funcție și fie $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Presupunem că există o vecinătate deschisă $V \in \mathcal{V}(a)$, așa încât $V \subseteq A$, care îndeplinește următoarele condiții:

(i) f este derivabilă parțial în raport cu variabila x_i pe V;

(ii) funcția

$$\forall\, x \in V \quad \longmapsto \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \in \mathbb{R} \tag{1}$$

este derivabilă parțial în raport cu variabila x_j în punctul a.

Atunci se spune că f *este de două ori derivabilă parțial în raport cu variabilele* (x_i, x_j) *în punctul* a. Derivata parțială a funcției (1) în raport cu x_j în punctul a se numește *derivata parțială de ordinul doi a funcției f în raport cu variabilele* (x_i, x_j) *în punctul* a şi se notează cu $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$ sau cu $f''_{x_i x_j}(a)$. Dacă $i = j$, atunci se folosește notația $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a)$ sau $f''_{x_i^2}(a)$.

2.18.2 Definiție (matricea hessiană)**.** Funcția f poate avea n^2 derivate parțiale de ordinul doi în punctul a. Dacă există toate aceste derivate parțiale, atunci se poate forma matricea

$$H(f)(a) := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix}.$$

Aceasta se numește *matricea hessiană* a lui f în punctul a.

In general, dacă $i \neq j$, atunci se poate ca

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a).$$

2.18.3 Teoremă (criteriul lui Schwarz)**.** *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulţime deschisă, $a \in A$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ cu $i < j$, iar $f : A \to \mathbb{R}$ o funcție de două ori derivabilă parţial pe A, atât în raport cu variabilele (x_i, x_j) cât și în raport cu variabilele (x_j, x_i). Dacă funcțiile $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} : A \to \mathbb{R}$ sunt continue în punctul a, atunci are loc egalitatea*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a).$$

Demonstrație. Etapa I. Considerăm mai întâi $n = 2$, $i = 1$, $j = 2$.

Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar. Deoarece A este deschisă, $a := (a_1, a_2) \in A$, iar funcțiile $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$ și $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$ sunt continue în a, există un $r > 0$ așa încât $B(a, r) \subseteq A$ și

$$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a)\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

pentru orice $x \in B(a, r)$.

Alegem un punct $x := (x_1, x_2) \in B(a, r)$ cu $x_1 > a_1$, $x_2 > a_2$ şi notăm

$$\alpha := f(x_1, x_2) - f(a_1, x_2) - f(x_1, a_2) + f(a_1, a_2).$$

Aplicând teorema de medie a lui Lagrange funcției $g : [a_1, x_1] \to \mathbb{R}$, definite prin $g(t) := f(t, x_2) - f(t, a_2)$, deducem existența unui punct $c_1 \in (a_1, x_1)$ astfel ca

$$g(x_1) - g(a_1) = (x_1 - a_1) g'(c_1).$$

Dar $g(x_1) - g(a_1) = \alpha$ și

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(t, x_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(t, a_2).$$

Avem așadar

$$\alpha = (x_1 - a_1)\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(c_1, x_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(c_1, a_2)\right). \tag{2}$$

Aplicând acum teorema de medie a lui Lagrange funcției $g_1 : [a_2, x_2] \to \mathbb{R}$, definite prin $g_1(t) := \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(c_1, t)$, deducem existența unui punct $c_2 \in (a_2, x_2)$ astfel ca

$$g_1(x_2) - g_1(a_2) = (x_2 - a_2) g_1'(c_2),$$

adică

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(c_1, x_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(c_1, a_2) = (x_2 - a_2)\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(c_1, c_2),$$

deoarece

$$g'(c_2) = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)(c_1, c_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(c_1, c_2).$$

Ținând seama de relația (2), obţinem

$$\alpha = (x_1 - a_1)(x_2 - a_2)\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(c_1, c_2). \tag{3}$$

Mai avem

$$(c_1 - a_1)^2 + (c_2 - a_2)^2 < (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 < r^2,$$

deci $c := (c_1, c_2) \in B(a, r)$.

Analog, aplicând teorema lui Lagrange funcțiilor $h : [a_2, x_2] \to \mathbb{R}$, $h(t) := f(x_1, t) - f(a_1, t)$ și respectiv $h_1 : [a_1, x_1] \to \mathbb{R}$, $h_1(t) := \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(t, d_2)$, se deduce existența unui punct $d := (d_1, d_2) \in B(a, r)$ astfel ca

$$\alpha = (x_1 - a_1)(x_2 - a_2)\, \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(d_1, d_2). \tag{4}$$

Din (3) și (4) rezultă $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(c) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(d)$, deci

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) \right| \\
&\quad = \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(c) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(d) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) \right| \\
&\quad \le \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(c) \right| + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(d) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) \right| \\
&\quad < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Cum $\varepsilon > 0$ a fost arbitrar, rezultă că $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a)$.

Etapa a II-a. Considerăm acum $n > 2$ arbitrar.

Fie $a := (a_1, \ldots, a_n)$. Deoarece $a \in \operatorname{int} A$, există un $\delta > 0$ așa încât notând $A_0 := (a_i - \delta, a_i + \delta) \times (a_j - \delta, a_j + \delta)$, să avem

$$(a_1, \ldots, a_{i-1}, y_1, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, y_2, a_{j+1}, \ldots, a_n) \in A$$

pentru orice $(y_1, y_2) \in A_0$. Considerăm funcția $f_0 : A_0 \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f_0(y_1, y_2) := f(a_1, \ldots, a_{i-1}, y_1, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, y_2, a_{j+1}, \ldots, a_n).$$

In baza celor demonstrate la etapa precedentă, avem

$$\frac{\partial^2 f_0}{\partial y_2 \partial y_1}(a_i, a_j) = \frac{\partial^2 f_0}{\partial y_1 \partial y_2}(a_i, a_j).$$

Dar

$$\frac{\partial^2 f_0}{\partial y_2 \partial y_1}(a_i, a_j) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) \quad \text{și} \quad \frac{\partial^2 f_0}{\partial y_1 \partial y_2}(a_i, a_j) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a).$$

Drept urmare și în acest caz egalitatea din enunț are loc. □

2.18.4 Teoremă (criteriul lui Young)**.** *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulțime deschisă, fie $a \in A$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ cu $i < j$, iar $f : A \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă parțial pe A atât în raport cu variabila x_i cât și în raport cu variabila x_j. Dacă funcțiile $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}, \dfrac{\partial f}{\partial x_j} : A \to \mathbb{R}$ sunt diferențiabile în punctul a, atunci are loc egalitatea*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a).$$

Demonstrație. Fie $a := (a_1, \ldots, a_n)$. Notăm cu φ diferențiala funcției $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ în punctul a și cu ψ diferențiala funcției $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ în punctul a. În baza teoremei 2.6.4, pentru orice $h := (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ avem

$$\varphi(h) = \sum_{k=1}^{n} h_k \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(a) = \sum_{k=1}^{n} h_k \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}(a)$$

și analog

$$\psi(h) = \sum_{k=1}^{n} h_k \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(a).$$

Aplicând propoziția 2.4.3, rezultă existența funcțiilor $\omega_1, \omega_2 : A \to \mathbb{R}$ în așa fel încât să avem

$$\lim_{x \to a} \omega_1(x) = \lim_{x \to a} \omega_2(x) = 0, \tag{5}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) &= \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \varphi(x-a) + \|x-a\|\,\omega_1(x) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \sum_{k=1}^{n}(x_k - a_k)\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}(a) + \|x-a\|\,\omega_1(x), \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) &= \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) + \psi(x-a) + \|x-a\|\,\omega_2(x) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) + \sum_{k=1}^{n}(x_k - a_k)\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(a) + \|x-a\|\,\omega_2(x) \end{aligned} \tag{7}$$

pentru orice $x := (x_1, \dots, x_n) \in A$. Fără a restrânge generalitatea, putem presupune că $\omega_1(a) = \omega_2(a) = 0$, adică funcțiile ω_1 și ω_2 sunt continue în punctul a.

Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar. Continuitatea în a a funcțiilor ω_1 și ω_2, împreună cu relația (5), asigură existența unui $r > 0$ astfel ca $B(a,r) \subseteq A$ și

$$|\omega_1(x)| < \varepsilon, \quad |\omega_2(x)| < \varepsilon \quad \text{pentru orice } x \in B(a,r). \tag{8}$$

Alegem apoi un $\delta > 0$ așa încât punctul $a + \delta e_i + \delta e_j$ să aparțină bilei $B(a,r)$. Notăm

$$\alpha := f(a + \delta e_i + \delta e_j) - f(a + \delta e_i) - f(a + \delta e_j) + f(a).$$

Observăm că $\alpha = g_1(\delta) - g_1(0)$, unde $g_1 : [0,\delta] \to \mathbb{R}$ este funcția definită prin $g_1(t) := f(a+te_i+\delta e_j) - f(a+te_i)$. Aplicând teorema de medie a lui Lagrange funcției g_1, deducem existența unui $\theta \in (0,\delta)$ în așa fel încât $\alpha = \delta g_1'(\theta)$. Cum

$$g_1'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + te_i + \delta e_j) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + te_i),$$

obținem în final că

$$\alpha = \delta \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(u) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(v) \right),$$

unde $u := a+\theta e_i+\delta e_j$, iar $v := a+\theta e_i$. Analog, avem și $\alpha = g_2(\delta) - g_2(0)$, unde $g_2 : [0,\delta] \to \mathbb{R}$ este funcția definită prin $g_2(t) := f(a + \delta e_i + te_j) - f(a + te_j)$. Aplicând teorema de medie a lui Lagrange funcției g_2, rezultă ca mai sus existența unui $\tau \in (0,\delta)$ în așa fel încât

$$\alpha = \delta \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(y) \right),$$

unde $x := a + \delta e_i + \tau e_j$, iar $y := a + \tau e_j$.

Deoarece

$$\alpha = \delta \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(u) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \right) - \delta \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(v) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \right),$$

în baza relației (6) obținem

$$\begin{aligned} \alpha \;=\; & \delta \left(\sum_{k=1}^{n} (u_k - a_k) \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}(a) + \|u - a\|\, \omega_1(u) \right) \\ & \quad -\delta \left(\sum_{k=1}^{n} (v_k - a_k) \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}(a) + \|v - a\|\, \omega_1(v) \right). \end{aligned}$$

Dar $\|u-a\| = \sqrt{\theta^2+\delta^2}$, $\|v-a\| = \theta$, iar

$$u_k - a_k = \begin{cases} \theta & \text{dacă } k = i \\ \delta & \text{dacă } k = j \\ 0 & \text{dacă } k \notin \{i,j\}, \end{cases} \qquad v_k - a_k = \begin{cases} \theta & \text{dacă } k = i \\ 0 & \text{dacă } k \neq i. \end{cases}$$

Drept urmare, avem

$$\alpha = \delta\left(\theta \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) + \delta \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) + \sqrt{\theta^2+\delta^2}\,\omega_1(u)\right) - \delta\left(\theta \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) + \theta\omega_1(v)\right),$$

de unde

$$\frac{\alpha}{\delta^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) + \sqrt{1+\frac{\theta^2}{\delta^2}}\,\omega_1(u) - \frac{\theta}{\delta}\,\omega_1(v).$$

Având în vedere că $u, v \in B(a,r)$, deducem de aici și din (8) că

$$\begin{aligned} \left|\frac{\alpha}{\delta^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)\right| &\leq \sqrt{1+\frac{\theta^2}{\delta^2}}\,|\omega_1(u)| + \frac{\theta}{\delta}\,|\omega_1(v)| \\ &< \sqrt{2}\varepsilon + \varepsilon < 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Analog, dar pornind de la

$$\alpha = \delta\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\right) - \delta\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(y) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\right),$$

în baza relațiilor (7) și (8) se obține și inegalitatea

$$\left|\frac{\alpha}{\delta^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right| < 3\varepsilon.$$

În consecință, avem

$$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right| \leq \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) - \frac{\alpha}{\delta^2}\right| + \left|\frac{\alpha}{\delta^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right| < 6\varepsilon.$$

Cum $\varepsilon > 0$ a fost arbitrar, rezultă că $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$. □

2.19 Diferențiala a doua

2.19.1 Definiție. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in \operatorname{int} A$ și $f : A \to \mathbb{R}$ o funcție. Dacă există o vecinătate deschisă $V \in \mathcal{V}(a)$ cu $V \subseteq A$ astfel încât

(i) f este diferențiabilă pe V;

(ii) pentru orice $i \in \{1, \ldots, n\}$, funcția $\forall\, x \in V \;\longmapsto\; \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x) \in \mathbb{R}$ este diferențiabilă în a,

atunci se spune că f *este de două ori diferenţiabilă în punctul* a.

2.19.2 Teoremă. *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in \operatorname{int} A$ și $f : A \to \mathbb{R}$ o funcție de două ori diferențiabilă în punctul a. Atunci următoarele afirmații sunt adevărate:*

1° *Pentru orice $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, f este de două ori derivabilă parțial în raport cu variabilele (x_i, x_j) în punctul a.*

2° $\forall\, i, j \in \{1, \ldots, n\} \;:\; \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a).$

Demonstrație. Afirmația 1° rezultă din teorema 2.6.4 (o funcție diferențiabilă într-un punct este derivabilă parțial în acel punct), iar afirmația 2° rezultă din teorema 2.18.4 (criteriul lui Young). $\square$

Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in \operatorname{int} A$, iar $f : A \to \mathbb{R}$ o funcție de două ori diferențiabilă în a. Funcția $d^2 f(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definită prin

$$d^2 f(a)(h) := \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) \quad \text{oricare ar fi } h := (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n,$$

se numește *diferențiala a doua* (sau *diferențiala de ordinul doi*) a lui f în punctul a.

Fiind dată o matrice $C := (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, putem defini funcția $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ prin

$$\Phi(h) := \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} h_i h_j \quad \text{oricare ar fi } h := (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Funcția Φ se numește *forma pătratică asociată matricei* C.

Diferențiala a doua $d^2 f(a)$ este tocmai forma pătratică asociată matricei hessiene $H(f)(a)$.

2.19.3 Teoremă. *Fie A o submulțime a lui $\mathbb{R}^n$, fie $a \in \operatorname{int} A$ și $f : A \to \mathbb{R}$ o funcție de două ori diferenţiabilă în a. Atunci are loc egalitatea*

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{\|x-a\|^2} \left[f(x) - f(a) - df(a)(x-a) - \frac{1}{2}\, d^2 f(a)(x-a)\right] = 0.$$

Demonstrație. Deoarece f este de două ori diferențiabilă în a, există o vecinătate deschisă $V \in \mathcal{V}(a)$, astfel încât $V \subseteq A$ și care îndeplinește condițiile (i) și (ii) de la începutul acestui paragraf. Pentru fiecare $i \in \{1, \ldots, n\}$, considerăm funcţia $F_i : V \to \mathbb{R}$, definită prin $F_i(x) := \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)$. Din (ii) rezultă că F_i este diferențiabilă în a, deci

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{\|x-a\|} \big[F_i(x) - F_i(a) - dF_i(a)(x-a)\big] = 0,$$

oricare ar fi $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar. Atunci pentru fiecare $i \in \{1, \ldots, n\}$ există un $r_i > 0$ în așa fel încât $B(a, r_i) \subseteq V$ și

$$\left|\frac{1}{\|x-a\|} \big[F_i(x) - F_i(a) - dF_i(a)(x-a)\big] - 0\right| < \varepsilon' := \frac{\varepsilon}{2n}$$

pentru orice $x \in B(a, r_i) \setminus \{a\}$. Notând $r := \min\{r_1, \ldots, r_n\}$, avem $r > 0$, $B(a, r) \subseteq V$ și

$$\big|F_i(x) - F_i(a) - dF_i(a)(x-a)\big| \le \varepsilon' \|x-a\| \tag{1}$$

pentru orice $i \in \{1, \ldots, n\}$ și orice $x \in B(a, r)$.

Considerăm funcția $g : B(a, r) \to \mathbb{R}$, definită prin

$$\begin{aligned} g(x) \;&:=\; f(x) - f(a) - df(a)(x-a) - \frac{1}{2}\, d^2 f(a)(x-a) \\ &=\; f(x) - f(a) - \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \\ &\qquad - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (x_i - a_i)(x_j - a_j) \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a). \end{aligned}$$

Deoarece f este diferențiabilă pe V, urmează că g este diferențiabilă pe $B(a, r)$.

Fie $k \in \{1, \ldots, n\}$. Observăm că pentru orice $x \in B(a, r)$ avem

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial x_k}(x) &= \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) - \sum_{j=1}^{n}(x_j - a_j)\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(a) \\
&= F_k(x) - F_k(a) - \sum_{j=1}^{n}(x_j - a_j)\frac{\partial F_k}{\partial x_j}(a) \\
&= F_k(x) - F_k(a) - dF_k(a)(x - a).
\end{aligned}$$

Ținând seama de relația (1), deducem că

$$(2) \quad \left|\frac{\partial g}{\partial x_k}(x)\right| \leq \varepsilon' \|x - a\| \quad \text{pentru orice } k \in \{1, \ldots, n\} \text{ și orice } x \in B(a, r).$$

Fie acum $x \in B(a, r) \setminus \{a\}$ arbitrar ales. Aplicând teorema 2.11.6 funcției g, rezultă că există un $\xi \in (0, 1)$ așa încât notând $c := (1 - \xi)a + \xi x$, să avem

$$g(x) - g(a) = dg(c)(x - a) = \sum_{k=1}^{n}(x_k - a_k)\frac{\partial g}{\partial x_k}(c).$$

Cum $g(a) = 0$, $c \in B(a, r)$ și $\|c - a\| \leq \|x - a\|$, în baza lui (2) avem

$$|g(x)| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k - a_k| \left|\frac{\partial g}{\partial x_k}(c)\right| \leq n\varepsilon' \|x - a\|^2 = \frac{\varepsilon}{2}\|x - a\|^2.$$

Drept urmare, pentru orice $x \in B(a, r) \setminus \{a\}$ avem

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\|x - a\|^2}|g(x)| &= \frac{1}{\|x - a\|^2}\left|f(x) - f(a) - df(a)(x - a) - \frac{1}{2}d^2 f(a)(x - a)\right| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,
\end{aligned}$$

ceea ce arată că egalitatea din enunț are loc. $\square$

2.20 Probleme

1. Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funcția definită prin

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{dacă } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dacă } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Să se demonstreze că f este de clasă C^1 și că

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0).$$

Să se verifice că f nu satisface condițiile din teoremele lui Schwarz și Young.

2. Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funcția definită prin

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dacă } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Să se demonstreze că f este de clasă C^1 și că

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0).$$

3. Să se demonstreze că funcția $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - y^2 \operatorname{arctg} \frac{x}{y} & \text{dacă } x \neq 0 \text{ și } y \neq 0 \\ 0 & \text{dacă } x = 0 \text{ sau } y = 0 \end{cases}$$

este de clasă C^1. Să se determine $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ şi $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$.

4. Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funcția definită prin

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \ln\left(x^2 + y^2\right) & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dacă } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Să se demonstreze că f este derivabilă parțial pe $\mathbb{R}^2$.

b) Să se demonstreze că f este de două ori derivabilă parțial pe $\mathbb{R}^2$ atât în raport cu variabilele (x,y) cât și în raport cu variabilele (y,x) și că $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$ oricare ar fi $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

c) Să se verifice că funcțiile $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ și $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ nu sunt diferențiabile în $(0,0)$, iar funcțiile $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ și $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ nu sunt continue în $(0,0)$.

5. Fie $A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1 \}$, iar $f : A \to \mathbb{R}$ funcția definită prin

$$f(x, y) = \begin{cases} xy\sqrt{-\ln(x^2 + y^2)} & \text{dacă } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dacă } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Să se demonstreze că:

a) f este de două ori derivabilă parțial atât în raport cu variabilele (x, x) cât și în raport cu variabilele (y, y) pe A.

b) Derivatele parțiale $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ și $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ sunt continue pe A.

c) f nu este de două ori derivabilă parțial nici în raport cu variabilele (x, y) nici în raport cu variabilele (y, x) în punctul $(0, 0)$.

6. Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o funcție de două ori derivabilă parțial în raport cu variabilele (x, y) pe $\mathbb{R}^2$ și cu proprietatea $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) \geq 0$ pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Să se demonstreze că pentru orice numere reale $a < b$ și $c < d$ are loc inegalitatea

$$f(b, d) - f(b, c) - f(a, d) + f(a, c) \geq 0.$$

7. Fie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ funcția definită prin $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Să se demonstreze că $d^2 f(x, y, z)$ este o formă pătratică pozitiv semidefinită pentru orice $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$.

8. Să se determine numerele reale a și b așa încât pentru orice funcție de două ori diferenţiabilă $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, cu proprietatea $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$, funcţia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definită prin $F(x, y) = e^{ax+by} f(x, y)$, să satisfacă

$$\forall \ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y) - \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) + F(x, y) = 0.$$

9. Fie $f = f(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o funcție de două ori diferențiabilă pe $\mathbb{R}^2$, cu proprietatea

$$\forall \ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0,$$

iar $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funcția definită prin $F(\rho, \theta) = f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$. Să se demonstreze că

$$\forall \ (\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 \ : \quad \rho^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2}(\rho, \theta) + \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}(\rho, \theta) + \rho \frac{\partial F}{\partial \rho}(\rho, \theta) = 0.$$

10. Fie $f = f(u,v) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o funcție de două ori diferențiabilă pe $\mathbb{R}^2$, cu proprietatea

$$\forall\ (u,v) \in \mathbb{R}^2\ :\quad \frac{\partial f}{\partial v}(u,v) = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u,v),$$

iar $F : \mathbb{R} \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ funcția definită prin

$$F(x,y) = \frac{1}{\sqrt{y}}\, e^{-\frac{x^2}{4y}} f\left(\frac{x}{y}, -\frac{1}{y}\right).$$

Să se demonstreze că

$$\forall\ (x,y) \in \mathbb{R} \times (0,\infty)\ :\quad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y).$$

11. Fie $f = f(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ și $F = F(u,v) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funcții de două ori diferențiabile pe $\mathbb{R}^2$, cu proprietatea $f(x,y) = F\left(xy, \dfrac{x}{y}\right)$ pentru orice $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ cu $y \neq 0$. Să se demonstreze că dacă

$$\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\quad x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0,$$

atunci

$$2xy \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}\left(xy, \frac{x}{y}\right) - \frac{\partial F}{\partial v}\left(xy, \frac{x}{y}\right) = 0$$

pentru orice $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ cu $x \neq 0$ și $y \neq 0$.

12. Fie $f = f(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ și $F = F(u,v) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funcții de două ori diferențiabile pe $\mathbb{R}^2$, cu proprietatea

$$f(x,y) = xF\left(x+y, \frac{y}{x}\right)$$

pentru orice $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ cu $x \neq 0$. Să se demonstreze că dacă

$$\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0,$$

atunci

$$\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\left(x+y, \frac{y}{x}\right) = 0$$

pentru orice $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ cu $x \neq 0$ și $x + y \neq 0$.

13. Fie $f = f(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ și $F = F(u,v) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funcții de două ori diferențiabile pe $\mathbb{R}^2$, cu proprietatea $F(x^2,y^2) = xy + f(x,y)$ pentru orice $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Să se arate că dacă

$$\frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{1}{y^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{1}{x^3}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{1}{y^3}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) + \frac{y}{x^3} + \frac{x}{y^3}$$

pentru orice $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ cu $x \neq 0$ și $y \neq 0$, atunci

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}(x^2,y^2) + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}(x^2,y^2) = 0$$

pentru orice $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ cu $x \neq 0$ și $y \neq 0$.

14. Fie $A = [0,1]^n$ și $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ o funcție de două ori diferențiabilă care îndeplinește următoarele condiții:

(i) $\forall\ x \in \operatorname{bd} A \ :\quad f(x) = 0$;

(ii) $\min f(A) = -1$.

Să se demonstreze că

$$\forall\ \ j \in \{1,\ldots,n\}\ \ :\quad \sup\left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(x)\ \middle|\ x \in A \right\} \geq 8$$

și că, în inegalitatea de mai sus, 8 nu se poate înlocui, în general, cu o constantă mai mare.

15. Fie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ o funcție de două ori diferențiabilă care se bucură de următoarele proprietăți:

(i) există și este finită limita $\lim\limits_{\|x\|\to\infty} f(x)$;

(ii) toate derivatele parțiale de ordinul al doilea ale lui f sunt mărginite pe $\mathbb{R}^n$.

Să se demonstreze că $\lim\limits_{\|x\|\to\infty} \|\nabla f(x)\| = 0$.

2.21 Condiții necesare și suficiente de extrem

2.21.1 Definiție. Fie $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ o formă pătratică. Se spune că Φ este:

a) *indefinită* dacă $\exists\ a,b \in \mathbb{R}^n\ :\ \Phi(a) < 0 < \Phi(b)$;

b) *pozitiv semidefinită* dacă $\forall\ h \in \mathbb{R}^n\ :\ \Phi(h) \geq 0$;

c) *pozitiv definită* dacă $\forall\ h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}\ :\ \Phi(h) > 0$;

d) *negativ semidefinită* dacă $\forall\ h \in \mathbb{R}^n\ :\ \Phi(h) \leq 0$;

e) *negativ definită* dacă $\forall\ h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}\ :\ \Phi(h) < 0$.

2.21.2 Teoremă (caracterizarea formelor pătratice pozitiv definite)**.** *O formă pătratică $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ este pozitiv definită dacă și numai dacă există un $\alpha > 0$ astfel ca $\Phi(h) \geq \alpha\|h\|^2$ oricare ar fi $h \in \mathbb{R}^n$.*

Demonstrație. Necesitatea. Presupunem că Φ este o formă pătratică pozitiv definită, adică $\Phi(x) > 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$. Fie

$$S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$$

sfera cu centrul în origine și de rază 1 din $\mathbb{R}^n$. Deoarece S^{n-1} este o mulțime compactă și funcţia Φ este continuă, conform teoremei lui Weierstrass există un $a \in S^{n-1}$ astfel ca $\Phi(a) = \min\limits_{x \in S^{n-1}} \Phi(x)$. Notăm $\alpha := \Phi(a)$. Cum $a \neq 0_n$, avem $\alpha > 0$.

Dacă $h = 0_n$, atunci inegalitatea din enunț are loc cu egalitate, deoarece $\Phi(0_n) = 0$. Dacă $h \neq 0_n$, atunci $\dfrac{1}{\|h\|}\, h \in S^{n-1}$, deci

$$\alpha \leq \Phi\left(\frac{1}{\|h\|}\, h\right) = \frac{1}{\|h\|^2}\, \Phi(h),$$

de unde $\Phi(h) \geq \alpha\|h\|^2$.

Suficiența. Este evidentă. □

2.21.3 Teoremă. *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in \operatorname{int} A$, iar $f : A \to \mathbb{R}$ o funcție de două ori diferențiabilă în punctul a. Atunci următoarele afirmații sunt adevărate:*

$1°$ *Dacă a este punct de minim local (respectiv de maxim local) al lui f, atunci $\nabla f(a) = 0_n$ și $d^2 f(a)$ este pozitiv semidefinită (respectiv negativ semidefinită).*

$2°$ *Dacă $\nabla f(a) = 0_n$ și $d^2 f(a)$ este pozitiv definită (respectiv negativ definită), atunci a este punct de minim local (respectiv de maxim local) al lui f.*

Demonstrație. $1°$ Presupunem, pentru fixarea ideilor, că a este punct de minim local al lui f. Aplicând teorema 2.11.2 (a lui Fermat), rezultă că $\nabla f(a) = 0_n$.

Rămâne să mai dovedim că $d^2f(a)$ este pozitiv semidefinită. Fie în acest scop h un punct oarecare al lui $\mathbb{R}^n$ și fie $\varepsilon > 0$ arbitrar. Conform teoremei 2.19.3, avem

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to a}\frac{1}{\|x-a\|^2}\left[f(x)-f(a)-df(a)(x-a)-\frac{1}{2}\,d^2f(a)(x-a)\right]\\&\quad=\lim_{x\to a}\frac{1}{\|x-a\|^2}\left[f(x)-f(a)-\frac{1}{2}\,d^2f(a)(x-a)\right]=0.\end{aligned}$$

Există așadar o vecinătate $V\in\mathcal{V}(a)$ astfel încât pentru orice $x\in V\cap A\setminus\{a\}$ să avem

$$\frac{\left|f(x)-f(a)-\frac{1}{2}\,d^2f(a)(x-a)\right|}{\|x-a\|^2}<\varepsilon.$$

Deducem de aici că

$$f(x)-f(a)\le\frac{1}{2}\,d^2f(a)(x-a)+\varepsilon\|x-a\|^2\quad\text{pentru orice } x\in V\cap A.$$

Dar a fiind punct de minim local al lui f, există o vecinătate $W\in\mathcal{V}(a)$ astfel ca $f(a)\le f(x)$ oricare ar fi $x\in W\cap A$. Drept urmare, avem

$$0\le\frac{1}{2}\,d^2f(a)(x-a)+\varepsilon\|x-a\|^2\quad\text{pentru orice } x\in V\cap W\cap A.$$

Alegem un $t>0$ suficient de mic, încât $a+th\in V\cap W\cap A$. Inlocuindu-l în inegalitatea precedentă pe x cu $a+th$, obținem

$$0\le\frac{1}{2}\,d^2f(a)(th)+\varepsilon\|th\|^2=\frac{t^2}{2}\,d^2f(a)(h)+\varepsilon t^2\|h\|^2,$$

de unde

$$0\le\frac{1}{2}\,d^2f(a)(h)+\varepsilon\|h\|^2.$$

Făcând $\varepsilon\searrow 0$, deducem că $d^2f(a)(h)\ge 0$. Cum $h\in\mathbb{R}^n$ a fost arbitrar, conchidem că $d^2f(a)$ este o formă pătratică pozitiv semidefinită.

2° Presupunând că $\nabla f(a)=0_n$ și $d^2f(a)$ este pozitiv definită, să arătăm că a este punct de minim local al lui f. Aplicând teorema 2.21.2, deducem că există un $\alpha>0$ astfel ca

$$d^2f(a)(h)\ge\alpha\|h\|^2\quad\text{pentru orice } h\in\mathbb{R}^n.$$

Pe de altă parte, teorema 2.19.3 garantează că

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{\|x-a\|^2}\left[f(x)-f(a)-\frac{1}{2}\,d^2f(a)(x-a)\right]=0.$$

Există deci $V \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât pentru orice $x \in V \cap A \setminus \{a\}$ să avem

$$\frac{\left|f(x) - f(a) - \frac{1}{2}\, d^2 f(a)(x-a)\right|}{\|x-a\|^2} < \frac{\alpha}{4}\,.$$

Deducem de aici că

$$f(x) - f(a) - \frac{1}{2}\, d^2 f(a)(x-a) \geq -\frac{\alpha}{4}\, \|x-a\|^2 \quad \text{pentru orice } x \in V \cap A.$$

Drept urmare avem

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &\geq \frac{1}{2}\, d^2 f(a)(x-a) - \frac{\alpha}{4}\, \|x-a\|^2 \\ &\geq \frac{1}{2}\, \alpha \|x-a\|^2 - \frac{\alpha}{4}\, \|x-a\|^2 \geq 0, \end{aligned}$$

adică $f(x) \geq f(a)$ pentru orice $x \in V \cap A$. Aceasta arată că a este punct de minim local al lui f. □

2.21.4 Observații. 1° Dacă $\nabla f(a) = 0_n$ și $d^2 f(a)$ este o formă pătratică indefinită, atunci a nu este punct de extrem local al lui f.

2° (Criteriul lui Sylvester). Fie $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ o matrice pătrată simetrică și $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\Phi(h) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} h_i h_j$, forma pătratică asociată matricei C. Pentru fiecare $k \in \{1, \ldots, n\}$ notăm $\Delta_k := \det\,(c_{ij})_{1\leq i,j\leq k}$. Atunci următoarele afirmații sunt adevărate:

1° Φ este pozitiv definită dacă și numai dacă inegalitatea $\Delta_k > 0$ are loc pentru orice $k \in \{1, \ldots, n\}$.

2° Φ este negativ definită dacă și numai dacă inegalitatea $(-1)^k \Delta_k > 0$ are loc pentru orice $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Fie $m, n \in \mathbb{N}$ cu $m < n$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulțime deschisă nevidă, iar $f : A \to \mathbb{R}$ și $F = (F_1, \ldots, F_m) : A \to \mathbb{R}^m$ funcții cu următoarele proprietăți:

(i) f este de două ori diferențiabilă pe A;

(ii) $F_1, \ldots, F_m$ sunt de două ori diferențiabile pe A.

Notăm $C := \{\, x \in A \mid F(x) = 0_m \,\}$. Fie apoi $L : A \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ funcția lui Lagrange asociată funcțiilor f și F:

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda_1 F_1(x) + \cdots + \lambda_m F_m(x).$$

2.21.5 Teoremă. *Fie $c \in C$ un punct cu proprietatea* $\operatorname{rang} J(F)(c) = m$. *Atunci următoarele afirmații sunt adevărate:*

1° *Dacă c este punct de minim local (respectiv de maxim local) al lui f relativ la C, atunci există $\lambda_0 \in \mathbb{R}^m$ astfel ca*

$$\begin{aligned} &dL(c, \lambda_0) = 0 \\ &d^2 L_0(c)(h) \geq 0 \qquad\qquad (\textit{respectiv} \quad d^2 L_0(c)(h) \leq 0) \end{aligned}$$

pentru orice $h \in \mathbb{R}^n$ cu proprietatea $dF(c)(h) = 0_m$, unde $L_0 : A \to \mathbb{R}$ este funcția definită prin

$$L_0(x) = f(x) + \lambda_{01} F_1(x) + \cdots + \lambda_{0m} F_m(x). \tag{1}$$

2° *Dacă există $\lambda_0 \in \mathbb{R}^m$ așa încât*

$$\begin{aligned} &dL(c, \lambda_0) = 0 \\ &d^2 L_0(c)(h) > 0 \qquad\qquad (\textit{respectiv} \quad d^2 L_0(c)(h) < 0) \end{aligned}$$

pentru orice $h \in \mathbb{R}^n \backslash \{0_n\}$ cu proprietatea $dF(c)(h) = 0_m$, unde L_0 este funcția definită prin (1), *atunci c este punct de minim local (respectiv de maxim local) al lui f relativ la mulțimea C.*

Demonstrație. Fără demonstrație. $\smile$

2.22 Probleme

1. Să se determine punctele critice ale următoarelor funcții și să se precizeze natura acestora:

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) = x^4 + y^4 - 4(x - y)^2$;

b) $f : (0, \infty)^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$;

c) $f : (0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x, y) = x(y^2 + \ln^2 x)$;

d) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) = x^3 + 3xy + y^3$;

e) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) = 3x - 3y - 2x^3 - xy^2 + 2x^2 y + y^3$;

f) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) = xe^y + ye^x$;

g) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x, y, z) = \dfrac{1}{2} x^2 + xyz - y + z$;

h) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$;

i) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^2 + 2xyz$;

j) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x, y, z) = 2x^2 - xy + 2xz - y + y^3 + z^2;$

k) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x, y, z) = x^3 - 3x + y^2 + z^2;$

l) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x, y, z) = \dfrac{xye^y}{1 + x^2} + z^2 + 2z;$

m) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x, y, z) = \dfrac{3x^4 - 6x^2 + 1}{1 + z^2} - y^2;$

n) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x, y, z) = z^2(1 + xy) + xy;$

o) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x, y, z) = (x + y)e^{x+y-z^2};$

p) $f : (0, \infty)^3 \to \mathbb{R},\ f(x, y, z) = xyz(\ln x)(\ln y)(\ln z);$

q) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x, y, z) = xye^z + yze^x + zxe^y;$

r) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x, y, z) = xe^y + ye^z + ze^x.$

2. Să se demonstreze că funcția $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x, y) = (1 + e^x) \cos y - xe^x,$$

are o infinitate de maxime locale și nici un minim local.

3. Să se demonstreze că funcția $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x, y) = x^2 + y^2(1 - x)^3,$$

este diferențiabilă, are un singur punct critic care este punct de minim local, dar $\inf f(\mathbb{R}^2) = -\infty$. Există funcții $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu aceleași proprietăți?

4. Fie $a_1, \ldots, a_n$ numere reale strict pozitive și $f : (0, \infty)^n \to \mathbb{R}$ funcția definită prin

$$f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \ln \frac{a_1}{x_1} + \cdots + x_n \ln \frac{a_n}{x_n}.$$

Să se determine punctele de extrem local ale lui f și să se precizeze natura acestora.

5. Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o funcție de două ori diferențiabilă pe $\mathbb{R}^2$, cu proprietatea

$$\forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ :\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) > 0.$$

Să se demonstreze că f nu are nici un maxim local.

Berkeley 1988

6. Fie $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 1 \}$ și $f : A \to \mathbb{R}$ o funcție care îndeplinește următoarele condiții:

(i) f este continuă pe A;

(ii) f admite toate derivatele parțiale de ordinul doi pe $\operatorname{int} A$ și acestea sunt continue pe $\operatorname{int} A$;

(iii) f se anulează pe $\operatorname{bd} A$;

(iv) f se anulează în cel puțin un punct interior lui A.

Să se demonstreze că există un punct $c \in \operatorname{int} A$ astfel ca

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(c) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(c) = 0.$$

Rămâne adevărată concluzia dacă se renunță la ipoteza (iv)?

G. Pólya

7. Fie funcția $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x,y,z) = x + y + z$ și mulțimea $C = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ 2x + y + 2z = 1 \}$. Să se determine $\min f(C)$ și $\max f(C)$.

8. Fie funcția $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$ și mulțimea $C = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 9,\ x + y + z = 5 \}$. Să se determine $\min f(C)$ și $\max f(C)$.

9. Fie funcția $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 8y + 24z$$

și mulțimea $C = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \le 1 \}$. Să se determine $\min f(C)$ și $\max f(C)$.

10. Fie funcția $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x,y,z) = (1 - x)(1 - y)(1 - z)$$

și mulțimea $C = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \le 1 \}$. Să se determine $\max f(C)$.

11. Fie $a, b, c > 0$, $C = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \right\}$ și fie funcția $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x,y,z) = xy^2z^6$. Să se determine $\min f(C)$ și $\max f(C)$.

12. Să se determine punctele de extrem local ale funcției $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definite prin $f(x, y, z) = xy + yz + zx$, relative la mulțimea

$$C = \{\,(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xyz = 1\,\}$$

și să se precizeze natura acestora.

13. Să se determine punctele de extrem local ale funcției $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definite prin $f(x, y, z) = xyz$, relative la mulțimea

$$C = \{\,(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy + yz + zx = 3\,\}$$

și să se precizeze natura acestora. Să se determine inf $f(C)$ și sup $f(C)$.

14. Să se determine punctele de extrem local ale funcției $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definite prin $f(x, y, z) = xyz$, relative la mulțimea

$$C = \{\,(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 5,\; xy + yz + zx = 8\,\}$$

și să se precizeze natura acestora.

15. Fie $a > 0$ și $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funcția definită prin

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - \frac{a}{2}\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right).$$

a) Să se demonstreze că g este de clasă C^1 pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

b) Fie $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) = 0\}$. Să se determine punctele $(x, y) \in C \setminus \{(0, 0)\}$, în care coordonata x posedă un extrem local.

16. Cu ajutorul regulii multiplicatorilor lui Lagrange, să se determine norma aplicației liniare $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, știind că

$$[\varphi] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

17. Fie P_2 mulțimea tuturor funcțiilor polinomiale cu coeficienți reali, de grad cel mult 2, $J : P_2 \to \mathbb{R}$ funcția definită prin

$$J(f) = \int_0^1 f^2(x)dx,$$

iar $Q = \{\, f \in P_2 \mid f(1) = 1\,\}$. Să se demonstreze că J are o valoare minimă pe Q și să se determine elementele lui Q în care se atinge această valoare minimă.

Berkeley 1980

18. Fie $a_1, \ldots, a_n$ numere reale strict pozitive, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funcția definită prin $f(x_1, \ldots, x_n) = a_1 x_1^2 + \cdots + a_n x_n^2$, iar

$$C = \{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \cdots + x_n = 1 \}.$$

Să se demonstreze că

$$\min f(C) = \frac{1}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}}.$$

19. Să se determine maximul produsului $(1 - x_1) \cdots (1 - x_n)$ dacă variabilele $x_1, \ldots, x_n \in [0, \infty)$ satisfac $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1$.

Hassan Ali Shah Ali, Amer. Math. Monthly [1998, 176]

20. Fie $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ o aplicație liniară având matricea $[\varphi] \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Cu ajutorul regulii multiplicatorilor lui Lagrange, să se demonstreze că $\|\varphi\| = \sqrt{\lambda^*}$, unde λ^* este cea mai mare valoare proprie a matricei simetrice $[\varphi]^T \cdot [\varphi]$.

21. Fie $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ o aplicație liniară cu proprietatea

$$\forall\ x, y \in \mathbb{R}^n \ : \quad \langle \varphi(x), y \rangle = \langle x, \varphi(y) \rangle.$$

(Aceasta este echivalent cu a spune că matricea aplicației φ este simetrică.) Fie apoi $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funcția definită prin $f(x) = \langle \varphi(x), x \rangle$. Să se demonstreze că dacă $x \in S^{n-1}$ este un punct de extrem local al lui f relativ la mulțimea S^{n-1}, atunci x este un vector propriu al lui φ.

2.23 Derivate parțiale și diferențiale de ordin superior

2.23.1 Definiţie (derivate parțiale de ordin superior)**.** Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in \operatorname{int} A$ și $f : A \to \mathbb{R}$ o funcție. Inductiv, se poate defini pentru f derivabilitatea parțială de orice ordin $k \in \mathbb{N}$. Fie $k \geq 1$ un număr natural pentru care au fost definite derivatele parțiale de ordinul k ale lui f. Fie apoi $i_1, \ldots, i_k, i_{k+1} \in \{1, \ldots, n\}$. Presupunem că există o vecinătate deschisă $V \in \mathcal{V}(a)$, așa încât $V \subseteq A$, care îndeplinește următoarele condiţii:

(i) funcția f este de k ori derivabilă parțial pe V în raport cu variabilele $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$;

(ii) funcția

$$(1) \qquad \forall\, x \in V \quad \longmapsto \quad \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \cdots \partial x_{i_1}}(x) \in \mathbb{R}$$

este derivabilă parțial în raport cu variabila $x_{i_{k+1}}$ în punctul a.

Atunci se spune că f *este de* $k+1$ *ori derivabilă parţial în raport cu variabilele* $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}, x_{i_{k+1}})$ *în punctul* a. Derivata parțială a funcției (1) în raport cu variabila $x_{i_{k+1}}$ în punctul a se numește *derivata parţială de ordinul* $k+1$ *a funcției* f *în raport cu variabilele* $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}, x_{i_{k+1}})$ *în* a și se notează cu $\dfrac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{i_{k+1}} \partial x_{i_k} \cdots \partial x_{i_1}}(a)$ sau cu $f^{(k+1)}_{x_{i_1} \cdots x_{i_k} x_{i_{k+1}}}(a)$.

2.23.2 Definiţie (diferențiabilitate de ordin superior)**.** Tot inductiv, se poate defini conceptul de diferențiabilitate de orice ordin $k \in \mathbb{N}$ pentru f. Fie $k \geq 1$ un număr natural pentru care a fost deja definită diferenţiabilitatea de ordinul k. Mai presupunem că s-a demonstrat următoarea afirmație: dacă funcția $f : A \to \mathbb{R}$ este de k ori diferențiabilă într-un punct $a \in \operatorname{int} A$ atunci pentru orice indici $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$, f este de k ori derivabilă parțial în raport cu variabilele $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$ în punctul a.

Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in \operatorname{int} A$ și $f : A \to \mathbb{R}$ o funcție. Dacă există o vecinătate deschisă $V \in \mathcal{V}(a)$ cu $V \subseteq A$ așa înât

(i) funcția f este de k ori diferențiabilă pe V;

(ii) pentru orice indici $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$, funcția (1) este diferențiabilă în a,

atunci se spune că f *este de* $k+1$ *ori diferențiabilă în punctul* a. Teorema 2.6.4 împreună cu (ii) garantează că pentru orice $i_1, \ldots, i_k, i_{k+1} \in \{1, \ldots, n\}$, f este de $k+1$ ori derivabilă parțial în raport cu variabilele $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}, x_{i_{k+1}})$ în punctul a.

2.23.3 Teoremă. *Fie* A *o submulțime a spațiului* $\mathbb{R}^n$*,* $a \in \operatorname{int} A$*,* $k \in \mathbb{N}$ *și* $f : A \to \mathbb{R}$ *o funcție de* k *ori diferențiabilă în punctul* a*. Atunci pentru orice* $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$ *și pentru orice permutare* σ *a mulțimii* $\{1, \ldots, k\}$*, are loc egalitatea*

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \cdots \partial x_{i_1}}(a) = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_{\sigma(k)}} \cdots \partial x_{i_{\sigma(1)}}}(a).$$

Demonstrație. Fără demonstrație. $\smile$

2.23.4 Definiție (diferențiala de ordinul k)**.** Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in \operatorname{int} A$, $k \in \mathbb{N}$ și $f : A \to \mathbb{R}$ o funcție de k ori diferențiabilă în a. Funcția $d^k f(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definită prin

$$d^k f(a)(h) := \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_k=1}^{n} h_{i_1} \cdots h_{i_k} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(a)$$

oricare ar fi $h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$, se numește *diferențiala de ordinul k* a funcției f în punctul a. Se observă că $d^k f(a)$ este un polinom omogen de gradul k în variabilele $h_1, \ldots, h_n$.

2.23.5 Teoremă. *Fie A o submulțime deschisă convexă nevidă a lui $\mathbb{R}^n$, fie $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ și fie $f : A \to \mathbb{R}$ o funcție de $k+1$ ori diferențiabilă pe A. Atunci pentru orice $a, b \in A$ există un $\xi \in (0, 1)$ așa încât punctul $c := (1 - \xi)a + \xi b$ să satisfacă egalitatea*

$$f(b) = f(a) + \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j!} d^j f(a)(b - a) + \frac{1}{(k+1)!} d^{k+1} f(c)(b - a).$$

Demonstrație. Fie $F : [0, 1] \to \mathbb{R}$ funcția definită prin $F(t) := f((1-t)a + tb)$. Arătăm că F este de $k + 1$ ori derivabilă pe intervalul $[0, 1]$ și că pentru orice $j \in \{1, \ldots, k + 1\}$ avem

(2) $$F^{(j)}(t) = d^j f((1 - t)a + tb)(b - a) \quad \text{oricare ar fi } t \in [0, 1].$$

Conform lemei 2.11.5, F este derivabilă pe $[0, 1]$ și

(3) $$F'(t) = df((1 - t)a + tb)(b - a) \quad \text{oricare ar fi } t \in [0, 1].$$

Deci (2) are loc pentru $j = 1$. Totodată, (3) implică

$$F'(t) = \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) \frac{\partial f}{\partial x_i} ((1 - t)a + tb)(b - a) \quad \text{oricare ar fi } t \in [0, 1].$$

Pentru fiecare $i \in \{1, \ldots, n\}$, fie $F_i : [0, 1] \to \mathbb{R}$ funcția definită prin

$$F_i(t) := \frac{\partial f}{\partial x_i} ((1 - t)a + tb).$$

Avem atunci

(4) $$F' = \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) F_i.$$

Deoarece toate funcțiile $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ sunt diferențiabile pe A, din lema 2.11.5 urmează că toate funcțiile F_i sunt derivabile pe $[0,1]$ și că

$$F_i'(t) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)((1-t)a+tb)(b-a) = \sum_{j=1}^{n}(b_j-a_j)\,\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\,((1-t)a+tb)$$

pentru orice $i \in \{1,\ldots,n\}$ și orice $t \in [0,1]$. Ținând seama de (4), deducem că F este de două ori derivabilă pe $[0,1]$ și

$$\begin{aligned} F''(t) &= \sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)F_i'(t) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(b_i-a_i)(b_j-a_j)\,\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\,((1-t)a+tb) \\ &= d^2 f((1-t)a+tb)(b-a). \end{aligned}$$

Prin urmare, (2) are loc și pentru $j=2$.

Analog, se arată succesiv că (2) are loc și pentru $j = 3,\ldots,k+1$. Aplicând funcției F formula lui Maclaurin, rezultă existența unui $\xi \in (0,1)$ astfel ca

$$F(1) = F(0) + \sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j!}\,F^{(j)}(0) + \frac{1}{(k+1)!}\,F^{(k+1)}(\xi). \tag{5}$$

Notăm $c := (1-\xi)a + \xi b$. Întrucât $F(1) = f(b)$, $F(0) = f(a)$, iar în baza relației (2) avem $F^{(j)}(0) = d^j f(a)(b-a)$ pentru orice $j \in \{1,\ldots,k\}$ precum și $F^{(k+1)}(\xi) = d^{k+1}f(c)(b-a)$, din (5) rezultă validitatea egalității din enunț. □

2.23.6 Observație. Egalitatea din teorema 2.23.5 se numeşte formula lui Taylor cu restul lui Lagrange.

2.23.7 Teoremă. *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in \operatorname{int} A$, $k \in \mathbb{N}$, iar $f : A \to \mathbb{R}$ o funcție de k ori diferențiabilă în a. Atunci are loc egalitatea*

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{\|x-a\|^k}\left[f(x) - f(a) - \sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j!}\,d^j f(a)(x-a)\right] = 0.$$

Demonstrație. Fără demonstrație. ◡

2.24 Probleme

1. Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funcția definită prin $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{x+y}$. Să se determine $\dfrac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n}$.

2. Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funcția definită prin $f(x, y) = e^{xy}$. Să se determine $\dfrac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n}$.

3. Fie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ o funcție de două ori diferențiabilă pe $\mathbb{R}^n$, care îndeplinește următoarele condiții:

(i) $\forall\ x \in \mathbb{R}^n \ :\quad f(x) \geq 0$;

(ii) $\forall\ x \in \mathbb{R}^n,\ \forall\ h \in \mathbb{R}^n \ :\quad d^2 f(x)(h) \leq 0$.

Să se demonstreze că f este constantă.

4. (Generalizarea problemei precedente) Fie $k \in \mathbb{N}$ și $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ o funcție de $2k$ ori diferenţiabilă pe $\mathbb{R}^n$, care îndeplinește următoarele condiţii:

(i) $\forall\ x \in \mathbb{R}^n \ :\quad f(x) \geq 0$;

(ii) $\forall\ x \in \mathbb{R}^n,\ \forall\ h \in \mathbb{R}^n \ :\quad d^{2k} f(x)(h) \leq 0$.

Să se demonstreze că f este o funcție polinomială de n variabile având gradul cel mult $2k - 2$.

5. Fie $r > 0$, $A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < r\}$ și $f : A \to [0, \infty)$ o funcție de două ori diferențiabilă pe A, care îndeplinește următoarele condiții:

(i) există un $a \in A$ așa încât $f(a) = 0$;

(ii) $\forall\ x\ \in A \ :\quad \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right)^2 \leq 1.$

Să se demonstreze că $f(x) < 2r^2$ oricare ar fi $x \in A$.

6. a) Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ convexă deschisă nevidă și $f : A \to \mathbb{R}$ o funcție de două ori diferenţiabilă pe A. Să se demonstreze că dacă $d^2 f(x)$ este o formă pătratică pozitiv semidefinită pentru orice $x \in A$, atunci fiecare punct critic al lui f este punct de minim global.

b) Fie $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 > 0\}$ și $f : A \to \mathbb{R}$ funcția definită prin

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{x_2} + x_2 \ln x_2 - x_1 - x_2.$$

Folosind eventual afirmația a), să se determine $\inf f(A)$.

Capitolul 3

Integrale multiple

3.1 Integrala Riemann pe un interval compact în $\mathbb{R}^n$

3.1.1 Definiție (intervale compacte în $\mathbb{R}^n$)**.** O mulțime $T \subseteq \mathbb{R}^n$ se numește *interval compact (nedegenerat)* în $\mathbb{R}^n$ dacă ea este de forma

$$T = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n],$$

unde $a_1 < b_1,\ a_2 < b_2,\ \ldots,\ a_n < b_n$ sunt numere reale. Numărul real pozitiv, definit prin

$$m(T) := (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n),$$

se numește *volumul* sau *măsura* lui T.

3.1.2 Definiție (partiții ale intervalelor compacte în $\mathbb{R}^n$)**.** Fie $[a, b]$ un interval compact în $\mathbb{R}$. In cele ce urmează, o diviziune $\Delta := (x_0, x_1, \ldots, x_k) \in \operatorname{Div}[a, b]$ va fi identificată cu mulțimea

$$\Delta := \{\, [x_0, x_1],\ [x_1, x_2],\ \ldots,\ [x_{k-1}, x_k] \,\}.$$

Notând $X_j := [x_{j-1}, x_j]$ pentru $j := 1, \ldots, k$, putem scrie

$$\Delta = \{\, X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_k \,\}.$$

Fie $T := [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ un interval compact în $\mathbb{R}^n$, și fie $\Delta_1 := \{\, X_1^1,\ X_2^1,\ \ldots,\ X_{k_1}^1 \,\} \in \operatorname{Div}[a_1, b_1],\ \ldots,\ \Delta_n := \{\, X_1^n,\ X_2^n,\ \ldots,\ X_{k_n}^n \,\} \in \operatorname{Div}[a_n, b_n]$. Atunci mulțimea definită prin

$$\Delta_1 \times \cdots \times \Delta_n := \{\, X_{j_1}^1 \times \cdots \times X_{j_n}^n \mid 1 \le j_1 \le k_1,\ \ldots,\ 1 \le j_n \le k_n \,\}$$

se numește *produsul diviziunilor* $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$. Se numește *partiție a intervalului compact* T orice mulțime π, de forma $\pi = \Delta_1 \times \cdots \times \Delta_n$, unde Δ_1 este o diviziune a intervalului $[a_1, b_1]$, ..., Δ_n este o diviziune a intervalului $[a_n, b_n]$. Numărul real pozitiv, definit prin

$$\|\pi\| := \max\{\, \|\Delta_1\|, \,\ldots,\, \|\Delta_n\| \,\},$$

se numește *norma partiției* π. Familia tuturor partițiilor lui T va fi notată cu Part (T).

Uneori este mai convenabil ca o partiție $\pi \in \operatorname{Part}(T)$ să fie reprezentată prin enumerarea elementelor sale $X^1_{j_1} \times \cdots \times X^n_{j_n}$. Numerotând aceste intervale compacte și notându-le cu $T_1, \ldots, T_p$, unde $p := k_1 \cdots k_n$, vom scrie

$$\pi = \{T_1, \ldots, T_p\}.$$

Evident, avem

$$T = \bigcup_{j=1}^{p} T_j \qquad \text{și} \qquad m(T) = \sum_{j=1}^{p} m(T_j).$$

3.1.3 Exemplu. Fie $n = 2$, fie $T := [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ și fie diviziunile (a se vedea figura 3.1.1)

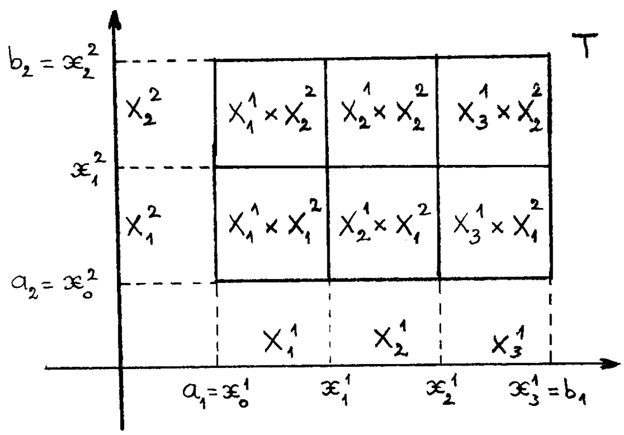


Figura 3.1.1: Exemplu de partiție a unui dreptunghi.

$$\Delta_1 := (a_1 = x^1_0,\, x^1_1,\, x^1_2,\, x^1_3 = b_1) = \{X^1_1,\, X^1_2\; X^1_3\} \in \operatorname{Div}[a_1, b_1],$$

respectiv

$$\Delta_2 := (a_2 = x_0^2,\, x_1^2,\, x_2^2 = b_2) = \{X_1^2,\, X_2^2\} \in \operatorname{Div}[a_2, b_2].$$

Atunci

$$\pi := \Delta_1 \times \Delta_2 = \Big\{X_1^1 \times X_1^2,\, X_2^1 \times X_1^2,\, X_3^1 \times X_1^2,\, X_1^1 \times X_2^2,\, X_2^1 \times X_2^2,\, X_3^1 \times X_2^2\Big\}$$

este o partiție a dreptunghiului T. Această partiție va mai fi notată și

$$\pi = \big\{T_1,\, T_2,\, T_3,\, T_4,\, T_5,\, T_6\big\}.$$

3.1.4 Definiție (sisteme de puncte intermediare)**.** Fie T un interval compact în $\mathbb{R}^n$ și fie $\pi := \{T_1, \dots, T_p\} \in \operatorname{Part}(T)$. O mulțime finită $\xi := \{c_1, \dots, c_p\}$, de puncte din $\mathbb{R}^n$, cu proprietatea $c_1 \in T_1, \dots, c_p \in T_p$ se numește *sistem de puncte intermediare asociat partiției* π. Notăm cu $P(\pi)$ familia tuturor sistemelor de puncte intermediare asociate partiției π.

3.1.5 Definiție (sume Riemann)**.** Fie T un interval compact în $\mathbb{R}^n$, fie funcția $f : T \to \mathbb{R}$, fie $\pi := \{T_1, \dots, T_p\} \in \operatorname{Part}(T)$ și fie $\xi := \{c_1, \dots, c_p\} \in P(\pi)$. Numărul real, definit prin

$$\sigma(f, \pi, \xi) := \sum_{j=1}^{p} f(c_j)\, m(T_j),$$

se numește *suma Riemann* asociată funcției f, partiției π și sistemului de puncte intermediare ξ.

3.1.6 Definiție (integrala Riemann pe un interval compact din $\mathbb{R}^n$)**.** O funcție $f : T \to \mathbb{R}$ se numește *integrabilă Riemann* pe intervalul compact $T \subseteq \mathbb{R}^n$ dacă există un număr real I cu următoarea proprietate:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 \text{ a.î. } \forall\, \pi \in \operatorname{Part}(T) \text{ cu } \|\pi\| < \delta \text{ și } \forall\, \xi \in P(\pi)\ :$$
$$|\sigma(f, \pi, \xi) - I| < \varepsilon.$$

Notăm cu $R(T)$ mulțimea tuturor funcțiilor $f : T \to \mathbb{R}$, care sunt integrabile Riemann pe T. Dacă $f \in R(T)$, atunci se constată imediat că numărul real I din definiția de mai sus este unic. El se numește *integrala Riemann* a lui f pe T și se notează cu

$$\int_T f dx \quad \text{sau cu} \quad \int_T f(x) dx \quad \text{sau cu} \quad \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_n.$$

Așa cum se observă imediat, în cazul particular $n = 1$, definiția de mai sus coincide cu definiția din cazul unidimensional.

3.1.7 Teoremă (mărginirea funcțiilor integrabile Riemann)**.** *Dacă T este un interval compact în $\mathbb{R}^n$, iar $f \in R(T)$, atunci f este mărginită.*

Demonstrație. Notăm $I := \int_T f dx$. Pentru $\varepsilon = 1$, din definiția 3.1.6 rezultă existența unui $\delta > 0$ astfel încât pentru orice $\pi \in \operatorname{Part}(T)$ cu $\|\pi\| < \delta$ și orice $\xi \in P(\pi)$ să avem $|\sigma(f, \pi, \xi) - I| < 1$. Fixăm o partiție $\pi := \{T_1, \ldots, T_p\}$ a lui T, în așa fel încât $\|\pi\| < \delta$. Atunci avem

$$(1) \qquad |\sigma(f, \pi, \xi) - I| < 1 \quad \text{oricare ar fi } \xi \in P(\pi).$$

Pentru a dovedi mărginirea lui f pe T, este suficient să arătăm că f este mărginită pe toate intervalele compacte T_i, $i \in \{1, \ldots, p\}$. Fixăm așadar un $i \in \{1, \ldots, p\}$. Pentru fiecare $j \in \{1, \ldots, p\} \setminus \{i\}$ alegem un punct $c_j \in T_j$. Atunci pentru orice punct $x \in T_i$ mulțimea

$$\xi_x := \{c_1, \ldots, c_{i-1}, x, c_{i+1}, \ldots, c_p\}$$

este un sistem de puncte intermediare asociat partiției π și

$$\sigma(f, \pi, \xi_x) = f(x)\, m(T_i) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{p} f(c_j)\, m(T_j).$$

Notând $\alpha := \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{p} f(c_j)\, m(T_j)$, avem

$$f(x)\, m(T_i) = \sigma(f, \pi, \xi_x) - \alpha.$$

Ținând seama de (1), rezultă că pentru fiecare $x \in T_i$ avem

$$\begin{aligned} |f(x)\, m(T_i)| &= |\sigma(f, \pi, \xi_x) - I + I - \alpha| \\ &\leq |\sigma(f, \pi, \xi_x) - I| + |I| + |\alpha| \\ &< 1 + |I| + |\alpha|. \end{aligned}$$

Deducem de aici că

$$|f(x)| < \frac{1 + |I| + |\alpha|}{m(T_i)} \quad \text{oricare ar fi } x \in T_i.$$

Prin urmare, f este mărginită pe T_i, întrucât membrul drept al inegalității de mai sus nu depinde de x. $\square$

3.2 Criterii de integrabilitate Riemann pe un interval compact în $\mathbb{R}^n$

3.2.1 Teoremă (criteriul lui H. E. Heine). *Fiind date un interval compact T în $\mathbb{R}^n$, o funcție $f : T \to \mathbb{R}$ și un număr real I, următoarele afirmații sunt echivalente:*

1° *$f \in R(T)$ și $\int_T f dx = I$.*

2° *Pentru orice șir (π_k) de partiții ale lui T, cu $\lim_{k\to\infty} \|\pi_k\| = 0$ și pentru orice șir (ξ_k), de sisteme de puncte intermediare cu proprietatea că $\xi_k \in P(\pi_k)$ oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$, are loc egalitatea $\lim_{k\to\infty} \sigma(f, \pi_k, \xi_k) = I$.*

Demonstrație. Este asemănătoare cu demonstrația criteriului lui Heine pentru integrala Riemann. □

3.2.2 Teoremă (criteriul lui A. L. Cauchy). *Fiind date un interval compact T în $\mathbb{R}^n$ și o funcție $f : T \to \mathbb{R}$, următoarele afirmații sunt echivalente:*

1° *$f \in R(T)$.*

2° *Oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există un $\delta > 0$ așa încât pentru orice partiții $\pi', \pi'' \in \mathrm{Part}\,(T)$ cu $\|\pi'\| < \delta$, $\|\pi''\| < \delta$ și orice sisteme de puncte intermediare $\xi' \in P(\pi')$, $\xi'' \in P(\pi'')$ să avem $|\sigma(f, \pi', \xi') - \sigma(f, \pi'', \xi'')| < \varepsilon$.*

Demonstrație. Este asemănătoare cu demonstrația criteriului lui Cauchy pentru integrala Riemann. □

In continuare, până la sfârșitul acestei secțiuni, $T := [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ va fi un interval compact în $\mathbb{R}^n$, iar $f : T \to \mathbb{R}$ va fi o funcție mărginită. Notăm

$$\alpha := \inf_{x\in T} f(x) \quad \text{și} \quad \beta := \sup_{x\in T} f(x).$$

3.2.3 Definiție (sume Darboux). Fiind dată o partiție $\pi := \{T_1, \ldots, T_p\}$ a lui T, notăm

$$\alpha_j := \inf_{x\in T_j} f(x) \quad \text{și} \quad \beta_j := \sup_{x\in T_j} f(x), \quad j = 1, \ldots, p.$$

Numerele reale, definite prin

$$s(f, \pi) := \sum_{j=1}^{p} \alpha_j\, m(T_j), \qquad S(f, \pi) := \sum_{j=1}^{p} \beta_j\, m(T_j),$$

se numesc *suma Darboux inferioară*, respectiv *suma Darboux superioară* asociate funcției f și partiției π.

3.2.4 Definiţie (integralele Darboux inferioară şi superioară)**.** Pentru orice $\pi := \{T_1, \ldots, T_p\} \in \mathrm{Part}\,(T)$ şi orice $\xi := \{c_1, \ldots, c_p\} \in P(\pi)$ avem

$$\alpha \leq \alpha_j \leq f(c_j) \leq \beta_j \leq \beta \quad \text{oricare ar fi } j \in \{1, \ldots, p\}.$$

Inmulţind acest lanţ de inegalităţi cu $m(T_j)$, iar apoi sumând inegalităţile obţinute pentru $j = 1, \ldots, p$, găsim

$$\alpha\, m(T) \leq s(f, \pi) \leq \sigma(f, \pi, \xi) \leq S(f, \pi) \leq \beta\, m(T). \tag{1}$$

Din (1) rezultă că mulţimea

$$\{\, s(f, \pi) \mid \pi \in \mathrm{Part}\,(T)\,\}$$

este majorată de $\beta\, m(T)$, iar mulţimea

$$\{\, S(f, \pi) \mid \pi \in \mathrm{Part}\,(T)\,\}$$

este minorată de $\alpha\, m(T)$. Drept urmare, putem introduce numerele reale, definite prin

$$\underline{\int}_T f dx := \sup_{\pi \in \mathrm{Part}\,(T)} s(f, \pi), \qquad \overline{\int}_T f dg := \inf_{\pi \in \mathrm{Part}\,(T)} S(f, \pi).$$

Ele se numesc *integrala Darboux inferioară*, respectiv *integrala Darboux superioară*, ale funcţiei f pe T.

3.2.5 Propoziţie. *Fie $\Delta_1', \Delta_1'' \in \mathrm{Div}\,[a_1, b_1]$, …, $\Delta_n', \Delta_n'' \in \mathrm{Div}\,[a_n, b_n]$ şi fie $\pi' := \Delta_1' \times \cdots \times \Delta_n' \in \mathrm{Part}\,(T)$, $\pi'' := \Delta_1'' \times \cdots \times \Delta_n'' \in \mathrm{Part}\,(T)$. Fie apoi Δ_1 o diviziune a lui $[a_1, b_1]$ care este mai fină şi decât Δ_1' şi decât Δ_1'', …, Δ_n o diviziune a lui $[a_n, b_n]$ care este mai fină şi decât Δ_n' şi decât Δ_n'' şi fie $\pi := \Delta_1 \times \cdots \times \Delta_n$. Atunci au loc următoarele inegalităţi:*

$$s(f, \pi') \leq s(f, \pi) \leq S(f, \pi) \leq S(f, \pi'),$$

$$s(f, \pi'') \leq s(f, \pi) \leq S(f, \pi) \leq S(f, \pi'').$$

Demonstraţie. Fie $\pi' = \{T_1', \ldots, T_p'\}$ şi $\pi = \{T_1, \ldots, T_q\}$. Pentru fiecare indice $j \in \{1, \ldots, p\}$ notăm

$$I_j := \big\{ i \in \{1, \ldots, q\} \mid T_i \subseteq T_j' \big\}.$$

Intrucât fiecare diviziune Δ_k este mai fină decât diviziunea corespunzătoare Δ_k', deducem că:

(i) $(I_j)_{1\le j\le p}$ este o familie de mulțimi disjuncte, cu proprietatea

$$\bigcup_{j=1}^{p} I_j = \{1,\ldots,q\};$$

(ii) pentru fiecare $j\in\{1,\ldots,p\}$, mulțimea $\{T_i \mid i\in I_j\}$ este o partiție a intervalului compact T'_j.

Notăm

$$\alpha'_j := \inf_{x\in T'_j} f(x), \qquad \beta'_j := \sup_{x\in T'_j} f(x), \qquad j=1,\ldots,p,$$

și respectiv

$$\alpha_i := \inf_{x\in T_i} f(x), \qquad \beta_i := \sup_{x\in T_i} f(x), \qquad i=1,\ldots,q.$$

Ținând seama de (i), avem

$$s(f,\pi)=\sum_{i=1}^{q}\alpha_i\, m(T_i)=\sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{i\in I_j}\alpha_i\, m(T_i)\right).$$

Pentru fiecare $i\in I_j$ avem $\alpha_i\ge\alpha'_j$, deoarece $T_i\subseteq T'_j$. Ținând acum seama și de (ii) deducem că

$$\begin{aligned} s(f,\pi) &\ge \sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{i\in I_j}\alpha'_j\, m(T_i)\right)=\sum_{j=1}^{p}\left(\alpha'_j\sum_{i\in I_j} m(T_i)\right)\\ &= \sum_{j=1}^{p}\alpha'_j\, m(T_j). = s(f,\pi') \end{aligned}$$

Inegalitatea $S(f,\pi)\le S(f,\pi')$, precum și inegalitățile referitoare la partiția π'' se demonstrează analog. $\square$

3.2.6 Observație. Conform propoziției 3.2.5, pentru orice partiții π' și π'' ale lui T are loc inegalitatea

$$s(f,\pi')\le S(f,\pi'').$$

Luând supremumul membrului stâng când $\pi'\in \mathrm{Part}\,(T)$, obținem

$$\underline{\int_T} f dx \le S(f,\pi'') \quad \text{oricare ar fi } \pi''\in\mathrm{Part}\,(T).$$

Luând acum infimumul membrului drept când $\pi'' \in \mathrm{Part}\,(T)$, obținem

$$\underline{\int}_T f dx \leq \overline{\int}_T f dx.$$

In consecință, pentru orice $\pi \in \mathrm{Part}\,(T)$ avem

$$s(f,\pi) \leq \underline{\int}_T f dx \leq \overline{\int}_T f dx \leq S(f,\pi).$$

3.2.7 Propoziție (sumele Darboux vs. sumele Riemann)**.** *Pentru orice partiție $\pi \in \mathrm{Part}\,(T)$ au loc următoarele egalități:*

$$s(f,\pi) = \inf_{\xi \in P(\pi)} \sigma(f,\pi,\xi), \quad S(f,\pi) = \sup_{\xi \in P(\pi)} \sigma(f,\pi,\xi).$$

Demonstrație. Este asemănătoare cu demonstrația egalităților corespunzătoare din cazul unidimensional. □

3.2.8 Teoremă (integrala Riemann vs. integralele Darboux)**.** *Fiind dată o funcție $f \in R(T)$, au loc egalitățile $\int_T f dx = \underline{\int}_T f dx = \overline{\int}_T f dx$.*

Demonstrație. Este asemănătoare cu demonstrația teoremei corespunzătoare din cazul unidimensional. □

3.2.9 Teoremă (criteriul lui G. Darboux)**.** *Fiind dată o funcție $f : T \to \mathbb{R}$, următoarele afirmații sunt echivalente:*

1° *$f \in R(T)$.*

2° *f este mărginită și oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există un $\delta > 0$ astfel încât pentru orice partiție $\pi \in \mathrm{Part}\,(T)$, cu $\|\pi\| < \delta$ să avem $S(f,\pi) - s(f,\pi) < \varepsilon$.*

Demonstrație. Este asemănătoare cu demonstrația criteriului lui Darboux în cazul unidimensional. □

3.3 Criteriul lui Lebesgue de integrabilitate Riemann pe un interval compact în $\mathbb{R}^n$

3.3.1 Definiție (mulțimi neglijabile Lebesgue)**.** Fie A o submulțime a lui $\mathbb{R}^n$ (nu neapărat mărginită). Mulțimea A se numește *neglijabilă Lebesgue* dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un șir (T_k) de intervale compacte în $\mathbb{R}^n$ astfel ca

$$A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} T_k \quad \text{și} \quad \sum_{k=1}^{\infty} m(T_k) < \varepsilon.$$

3.3.2 Observaţie. Evident, dacă A este o submulţime neglijabilă Lebesgue a lui $\mathbb{R}^n$, iar $A_0 \subseteq A$, atunci şi A_0 este neglijabilă Lebesgue.

De asemenea, dacă (A_k) este un şir de submulţimi neglijabile Lebesgue ale lui $\mathbb{R}^n$, atunci şi mulţimea $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ este neglijabilă Lebesgue.

Fiid dată o funcţie f, notăm cu $\operatorname{disc}(f)$ mulţimea tuturor punctelor de discontinuitate ale lui f.

3.3.3 Teoremă (criteriul lui H. Lebesgue)**.** *Fie T un interval compact în $\mathbb{R}^n$ şi fie $f : T \to \mathbb{R}$ o funcţie. Atunci*

$$f \in R(T) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \bullet\ f \text{ este mărginită;} \\ \bullet \text{ mulţimea } \operatorname{disc}(f) \text{ este neglijabilă Lebesgue.} \end{cases}$$

Demonstraţie. Fără demonstraţie. □

3.3.4 Consecinţă. *Dacă T este un interval compact în $\mathbb{R}^n$ şi $f : T \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă, atunci f este integrabilă Riemann pe T.*

3.4 Calculul integralelor Riemann pe intervale compacte prin reducere la integrale iterate

3.4.1 Definiţie (secţiunile unei funcţii definite pe un produs cartezian)**.** Fie S un interval compact în $\mathbb{R}^m$ şi T un interval compact în $\mathbb{R}^n$. Identificând, ca de obicei, pe $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ cu $\mathbb{R}^{m+n}$, mulţimea $S \times T$ este un interval compact în $\mathbb{R}^{m+n}$. Fie apoi $f : S \times T \to \mathbb{R}$ o funcţie dată. Pentru fiecare $x \in S$, considerăm funcţia $f_x : T \to \mathbb{R}$, definită prin $f_x(y) := f(x, y)$. Ea se numeşte *secţiunea prin x a funcţiei f*. Analog, pentru fiecare $y \in T$, considerăm funcţia $f_y : S \to \mathbb{R}$, definită prin $f_y(x) := f(x, y)$. Ea se numeşte *secţiunea prin y a funcţiei f*. Scris scurt, $f_x = f(x, \cdot)$ şi $f_y = f(\cdot, y)$.

3.4.2 Definiţie (integrale iterate)**.** Fie S un interval compact în $\mathbb{R}^m$ şi T un interval compact în $\mathbb{R}^n$. O funcţie $f : S \times T \to \mathbb{R}$ se numeşte *integrabilă parţial pe $S \times T$* dacă pentru orice $x \in S$ secţiunea f_x este integrabilă Riemann pe T şi pentru orice $y \in T$ secţiunea f_y este integrabilă Riemann pe S. In acest caz, putem defini funcţiile

$$F_1 : S \to \mathbb{R}, \qquad F_1(x) := \int_T f_x(y)dy = \int_T f(x, y)dy$$

şi respectiv

$$F_2 : T \to \mathbb{R}, \qquad F_2(y) := \int_S f_y(x)dx = \int_S f(x, y)dx.$$

Ne punem problema integrabilității funcțiilor F_1 și F_2 pe S și respectiv T, precum și a legăturii cu integrabilitatea lui f. Dacă F_1 este integrabilă Riemann pe S, atunci integrala sa

$$\int_S F_1(x)dx = \int_S \left(\int_T f(x,y)dy \right) dx$$

se numește *integrala iterată în ordinea y, x a funcției f pe $S \times T$.* Analog, dacă F_2 este integrabilă Riemann pe T, atunci integrala sa

$$\int_T F_2(y)dy = \int_T \left(\int_S f(x,y)dx \right) dy$$

se numește *integrala iterată în ordinea x, y a funcției f pe $S \times T$.*

3.4.3 Teoremă (G. Fubini)**.** *Dacă S este un interval compact în $\mathbb{R}^m$, T este un interval compact în $\mathbb{R}^n$, iar $f : S \times T \to \mathbb{R}$ este o funcție integrabilă Riemann și integrabilă parțial pe $S \times T$, atunci F_1 este integrabilă Riemann pe S, F_2 este integrabilă Riemann pe T și are loc relația*

$$\int_{S\times T} f(x,y)dxdy = \int_S F_1(x)dx = \int_T F_2(y)dy.$$

Demonstrație. Notăm $I := \int_{S\times T} f(x,y)dxdy$. Vom dovedi că $F_1 \in R(S)$ și că $\int_S F_1(x)dx = I$. Faptul că $F_2 \in R(T)$ și că $\int_T F_2(y)dy = I$ se demonstrează analog.

Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar. Există atunci un $\delta > 0$ astfel încât pentru orice partiție $\pi \in \operatorname{Part}(S \times T)$ cu $\|\pi\| < \delta$ și orice $\xi \in P(\pi)$ să avem

$$|\sigma(f,\pi,\xi) - I| < \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{1}$$

Fie $\pi_1 := \{S_1, \dots, S_p\} \in \operatorname{Part}(S)$ o partiție oarecare a lui S cu $\|\pi_1\| < \delta$ și fie $\eta := \{a_1, \dots, a_p\} \in P(\pi_1)$ un sistem arbitrar de puncte intermediare. Intrucât toate secțiunile f_{a_i} sunt integrabile Riemann pe T și $\int_T f_{a_i}(y)dy = F_1(a_i)$, rezultă că pentru fiecare $i \in \{1, \dots, p\}$ există un $\delta_i > 0$ în așa fel încât pentru orice $\pi_2 \in \operatorname{Part}(T)$ cu $\|\pi_2\| < \delta_i$ și orice $\zeta \in P(\pi_2)$ să avem

$$|\sigma(f_{a_i}, \pi_2, \zeta) - F_1(a_i)| < \varepsilon_i := \frac{\varepsilon}{2p\, m(S_i)}\,. \tag{2}$$

Alegem acum o partiție $\pi_2 := \{T_1, \dots, T_q\} \in \operatorname{Part}(T)$ cu proprietatea că $\|\pi_2\| < \min\{\delta, \delta_1, \dots, \delta_p\}$ și un sistem de puncte intermediare $\zeta := \{b_1, \dots, b_q\}$ asociat lui π_2. Notăm

$$\pi := \left\{ S_i \times T_j \mid i = 1, \dots, p,\ j = 1, \dots, q \right\}$$

și respectiv

$$\xi := \{(a_i, b_j) \mid i = 1, \ldots, p,\ j = 1, \ldots, q\}.$$

Atunci avem $\pi \in \operatorname{Part}(S \times T)$, $\xi \in P(\pi)$ și $\|\pi\| = \max\{\|\pi_1\|, \|\pi_2\|\} < \delta$. Ținând seama de (1) avem

$$\begin{aligned} |\sigma(F_1, \pi_1, \eta) - I| &\le |\sigma(F_1, \pi_1, \eta) - \sigma(f, \pi, \xi)| + |\sigma(f, \pi, \xi) - I| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \left| \sum_{i=1}^{p} F_1(a_i)\, m(S_i) - \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} f(a_i, b_j)\, m(S_i \times T_j) \right|. \end{aligned}$$

Intrucât $f(a_i, b_j) = f_{a_i}(b_j)$ și $m(S_i \times T_j) = m(S_i)\, m(T_j)$, obținem

$$\begin{aligned} |\sigma(F_1, \pi_1, \eta) - I| &< \frac{\varepsilon}{2} + \left| \sum_{i=1}^{p} \left[\left(F_1(a_i) - \sum_{j=1}^{q} f_{a_i}(b_j)\, m(T_j) \right) m(S_i) \right] \right| \\ &\le \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=1}^{p} \left| F_1(a_i) - \sum_{j=1}^{q} f_{a_i}(b_j)\, m(T_j) \right| m(S_i). \end{aligned}$$

Ținând acum seama de (2) și de faptul că $\sum_{j=1}^{q} f_{a_i}(b_j)\, m(T_j) = \sigma(f_{a_i}, \pi_2, \zeta)$, deducem că

$$\begin{aligned} |\sigma(F_1, \pi_1, \eta) - I| &< \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=1}^{p} \left| F_1(a_i) - \sigma(f_{a_i}, \pi_2, \zeta) \right| m(S_i) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=1}^{p} \varepsilon_i\, m(S_i) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Intrucât π_1 și η au fost arbitrare, conchidem că F_1 este integrabilă Riemann pe S și că $\int_S F_1(x)dx = I$. □

3.4.4 Observații. 1° Lanțul de egalități din concluzia teoremei lui Fubini poate fi scris detaliat sub forma

$$\underbrace{\int_{S \times T} f(x, y)dxdy}_{\text{în } \mathbb{R}^{m+n}} = \underbrace{\int_S \Bigg(\underbrace{\int_T f(x, y)dy}_{\text{în } \mathbb{R}^n} \Bigg) dx}_{\text{în } \mathbb{R}^m} = \underbrace{\int_T \Bigg(\underbrace{\int_S f(x, y)dx}_{\text{în } \mathbb{R}^m} \Bigg) dy}_{\text{în } \mathbb{R}^n}.$$

2° Dacă $f : S \times T \to \mathbb{R}$ este integrabilă parțial pe $S \times T$, iar integralele iterate ale sale sunt diferite, atunci f nu este integrabilă pe $S \times T$.

3.4.5 Consecință. *Dacă S este un interval compact în $\mathbb{R}^m$, T este un interval compact în $\mathbb{R}^n$, iar $f : S \times T \to \mathbb{R}$ este o funcție continuă, atunci F_1 este integrabilă Riemann pe S, F_2 este integrabilă Riemann pe T și are loc egalitatea*

$$\int_{S\times T} f(x,y)dxdy = \int_S F_1(x)dx = \int_T F_2(y)dy.$$

3.5 Integrala Riemann pe mulțimi mărginite în $\mathbb{R}^n$

Fie A o submulțime mărginită nevidă a lui $\mathbb{R}^n$. Fiind dată o funcție oarecare $f : A \to \mathbb{R}$, considerăm funcția $\bar{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definită prin

$$\bar{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{dacă } x \in A \\ 0 & \text{dacă } x \in \mathbb{R}^n \setminus A. \end{cases}$$

Funcția $\bar{f}$ se numește *extensia nulă a lui f*.

3.5.1 Definiție (integrala Riemann pe o mulțime mărginită în $\mathbb{R}^n$)**.** Fie A o submulțime mărginită nevidă a lui $\mathbb{R}^n$ și fie $f : A \to \mathbb{R}$ o funcție. Se arată ușor că dacă există un interval compact T în $\mathbb{R}^n$, cu proprietatea că $A \subseteq T$ și funcția $\bar{f}\big|_T$ este integrabilă Riemann pe T, atunci pentru orice alt interval compact S din $\mathbb{R}^n$, cu proprietatea $A \subseteq S$, funcția $\bar{f}\big|_S$ este integrabilă Riemann pe S și are loc egalitatea $\int_S \bar{f}(x)dx = \int_T \bar{f}(x)dx$.

Observația precedentă ne permite să dăm următoarea definiție: dacă există un interval compact T în $\mathbb{R}^n$, cu proprietatea că $A \subseteq T$ și funcția $\bar{f}\big|_T$ este integrabilă Riemann pe T, atunci se spune că funcția f este *integrabilă Riemann pe A*. Numărul real $\int_T \bar{f}(x)dx$ se numește *integrala Riemann* a lui f pe A și se notează cu

$$\int_A f dx \quad \text{sau cu} \quad \int_A f(x)dx \quad \text{sau cu} \quad \int \cdots \int_A f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_n.$$

Evident, dacă mulțimea A este ea însăși un interval compact în $\mathbb{R}^n$, atunci definiția 3.5.1 coincide cu definiția 3.1.6.

3.5.2 Observație. Conform consecinței 3.3.4, orice funcție continuă pe un interval compact din $\mathbb{R}^n$ este integrabilă Riemann pe acel interval. Dacă însă A este o submulțime mărginită nevidă a lui $\mathbb{R}^n$, iar $f : A \to \mathbb{R}$ este o funcție continuă, atunci se poate întâmpla ca f să nu fie integrabilă Riemann pe A, după cum arată următorul contraexemplu: pentru $n = 1$, fie $A := [0,1] \cap \mathbb{Q}$ și fie $f : A \to \mathbb{R}$ funcția constantă $f(x) := 1$ oricare ar fi $x \in A$. Evident, f este continuă pe A. Presupunând că f este integrabilă Riemann pe A, ar rezulta existența unui interval $[a, b]$ în așa fel încât $A \subseteq [a, b]$ și $\bar{f} \in R[a, b]$. Aplicând criteriul lui Darboux pentru $\varepsilon := 1/2$, ar rezulta mai departe existența unui $\delta > 0$ cu proprietatea că $S(\bar{f}, \pi) - s(\bar{f}, \pi) < 1/2$ oricare ar fi $\pi \in \operatorname{Part}[a, b]$ cu $\|\pi\| < \delta$. Dar, alegând o partiție $\pi := (x_0, x_1, \dots, x_k)$ astfel ca $\|\pi\| < \delta$ și $x_i = 0$, $x_\ell = 1$ pentru doi indici $0 \le i < \ell \le k$, avem

$$S(\bar{f}, \pi) - s(\bar{f}, \pi) = 1.$$

Am obținut astfel o contradicție, care arată că $\bar{f}$ nu este integrabilă Riemann pe $[a, b]$, deci f nu este integrabilă Riemann pe A.

3.5.3 Definiție (mulțimi măsurabile Jordan)**.** Fiind dată o mulțime $A \subseteq \mathbb{R}^n$, funcția $\chi_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definită prin

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{dacă } x \in A \\ 0 & \text{dacă } x \in \mathbb{R}^n \setminus A, \end{cases}$$

se numește *funcția caracteristică a lui A*. Se observă că χ_A este extensia nulă a funcției constante, egală cu 1 pe A.

Mulțimea A se numește *măsurabilă Jordan* dacă funcția constantă, egală cu 1 pe A, este integrabilă Riemann pe A. Cu alte cuvinte, A este o mulțime măsurabilă Jordan dacă există un interval compact T în $\mathbb{R}^n$, care să conțină pe A și cu proprietatea că $\chi_A\big|_T \in R(T)$.

Dacă A este o submulțime mărginită măsurabilă Jordan a lui $\mathbb{R}^n$, atunci numărul real, definit prin

$$m(A) := \int \cdots \int_A dx_1 \cdots dx_n,$$

se numește *măsura Jordan a lui A*. Se constată imediat că, dacă A este un interval compact, atunci mulțimea A este măsurabilă Jordan, iar măsura sa Jordan coincide cu volumul lui A (conform definiției 3.1.1).

3.5.4 Teoremă (caracterizarea mulțimilor măsurabile Jordan)**.** *O submulțime mărginită nevidă A a lui $\mathbb{R}^n$ este măsurabilă Jordan dacă și numai dacă mulțimea* $\operatorname{bd} A$ *este neglijabilă Lebesgue.*

Demonstrație. Alegem un interval compact T în $\mathbb{R}^n$ așa încât $\operatorname{cl} A \subseteq \operatorname{int} T$ (a se vedea figura 3.5.1). Ținând seama de criteriul lui Lebesgue de integrabilitate Riemann (teorema 3.3.3), avem

$$\begin{aligned} A \text{ este măsurabilă Jordan} \quad &\Leftrightarrow \quad \chi_A\big|_T \text{ este integrabilă Riemann pe } T \\ &\Leftrightarrow \quad \operatorname{disc}\big(\chi_A\big|_T\big) \text{ este neglijabilă Lebesgue.} \end{aligned}$$

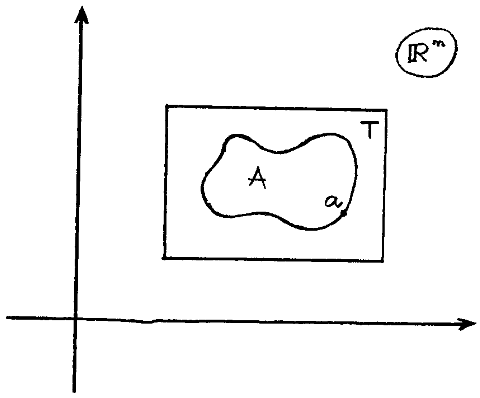


Figura 3.5.1: Caracterizarea mulțimilor măsurabile Jordan.

Fie a un punct arbitrar al lui T. Atunci

• dacă $a \in \operatorname{int} A$, atunci există $r > 0$ astfel ca $B(a, r) \subseteq A$, deci $\chi_A(x) = 1$ oricare ar fi $x \in B(a, r)$. Prin urmare, $\chi_A\big|_T$ este continuă în a.

• dacă $a \in \operatorname{ext} A$, atunci există $r > 0$ astfel ca $B(a, r) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus A$, deci $\chi_A(x) = 0$ oricare ar fi $x \in B(a, r) \cap T$. Prin urmare, $\chi_A\big|_T$ este continuă în a.

• dacă $a \in \operatorname{bd} A$, întrucât $a \in \operatorname{int} T$, rezultă că există două șiruri (x_k) din A și (y_k) din $T \setminus A$, ambele convergente către a. Deoarece $\chi_A(x_k) = 1$ și $\chi_A(y_k) = 0$ oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$, deducem că $\chi_A\big|_T$ este discontinuă în a.

Am dovedit astfel că $\operatorname{disc}\big(\chi_A\big|_T\big) = \operatorname{bd} A$. Drept urmare, A este măsurabilă Jordan dacă și numai dacă $\operatorname{bd} A$ este neglijabilă Lebesgue. □

3.5.5 Teoremă (criteriul lui H. Lebesgue de integrabilitate Riemann pe o mulțime măsurabilă Jordan)**.** *Fie A o submulțime mărginită măsurabilă Jordan a lui $\mathbb{R}^n$ și fie $f : A \to \mathbb{R}$ o funcție. Atunci*

$$f \text{ este integrabilă Riemann pe } A \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \bullet\ f \text{ este mărginită;} \\ \bullet\ \text{mulțimea } \operatorname{disc}(f) \text{ este} \\ \quad \text{neglijabilă Lebesgue.} \end{cases}$$

Demonstrație. Fie T un interval compact în $\mathbb{R}^n$, care conține pe A și fie $\bar{f}$ extensia nulă a lui f. Se constată imediat că

$$(1) \qquad \operatorname{disc}(f) \subseteq \operatorname{disc}(\bar{f}) \subseteq \operatorname{disc}(f) \cup \operatorname{bd} A.$$

Necesitatea. Presupunând că f este integrabilă Riemann pe A, rezultă că $\bar{f}\big|_T$ este integrabilă Riemann pe T. Aplicând partea de necesitate a teoremei 3.3.3 (criteriul lui Lebesgue), rezultă că $\bar{f}$ este mărginită și disc $(\bar{f})$ este neglijabilă Lebesgue. Ținând seama de (1), deducem că f este mărginită și disc (f) este neglijabilă Lebesgue.

Suficiența. Presupunem acum că f este mărginită și disc (f) este neglijabilă Lebesgue. Atunci și $\bar{f}$ este mărginită, iar, în baza lui (1), a observației 3.3.2 și a teoremei 3.5.4, mulțimea disc $(\bar{f})$ este neglijabilă Lebesgue. Aplicând partea de suficiență a teoremei 3.3.3 (criteriul lui Lebesgue), rezultă că $\bar{f}\big|_T$ este integrabilă Riemann pe T, deci f este integrabilă Riemann pe A. $\square$

3.5.6 Consecință. *Dacă A este o submulțime mărginită măsurabilă Jordan a lui $\mathbb{R}^n$, iar $f : A \to \mathbb{R}$ este o funcție continuă mărginită, atunci f este integrabilă Riemann pe A.*

3.6 Calculul integralelor Riemann pe mulțimi mărginite prin reducere la integrale iterate

3.6.1 Definiție (secțiunile și proiecțiile unei mulțimi)**.** Fie o mulțime mărginită nevidă $A \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n =: \mathbb{R}^{m+n}$. Pentru fiecare punct $x \in \mathbb{R}^m$, mulțimea

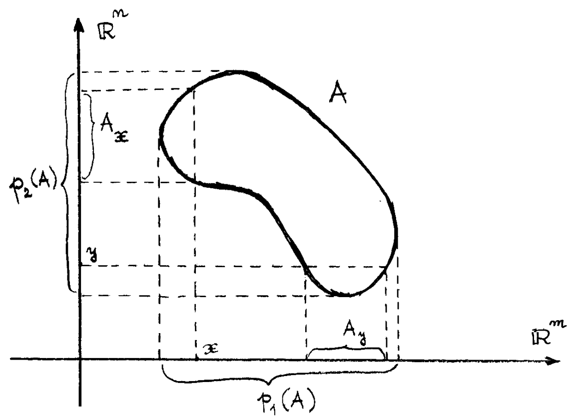


Figura 3.6.1: Secțiunile și proiecțiile unei mulțimi mărginite.

A_x, definită prin

$$A_x := \{y \in \mathbb{R}^n \mid (x, y) \in A\},$$

se numește *secțiunea prin* x *a lui* A (a se vedea figura 3.6.1). Mulțimea definită prin

$$p_1(A) := \{x \in \mathbb{R}^m \mid A_x \neq \emptyset\}$$

se numește *proiecția lui* A *pe* $\mathbb{R}^m$. Analog, pentru fiecare punct $y \in \mathbb{R}^n$, mulțimea A_y, definită prin

$$A_y := \{x \in \mathbb{R}^m \mid (x, y) \in A\},$$

se numește *secțiunea prin* y *a lui* A. Mulțimea definită prin

$$p_2(A) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid A_y \neq \emptyset\}$$

se numește *proiecția lui* A *pe* $\mathbb{R}^n$.

3.6.2 Definiție (integrale iterate)**.** O funcție $f : A \to \mathbb{R}$ se numește *integrabilă parțial pe* A dacă pentru orice $x \in p_1(A)$ secțiunea $f_x : A_x \to \mathbb{R}$, $f_x := f(x, \cdot)$ este integrabilă Riemann pe mulțimea A_x și pentru orice $y \in p_2(A)$ secțiunea $f_y : A_y \to \mathbb{R}$, $f_y := f(\cdot, y)$ este integrabilă Riemann pe mulțimea A_y. In acest caz, putem defini funcțiile

$$F_1 : p_1(A) \to \mathbb{R}, \qquad F_1(x) := \int_{A_x} f_x(y)dy = \int_{A_x} f(x, y)dy$$

și respectiv

$$F_2 : p_2(A) \to \mathbb{R}, \qquad F_2(y) := \int_{A_y} f_y(x)dx = \int_{A_y} f(x, y)dx.$$

Dacă F_1 este integrabilă Riemann pe mulțimea mărginită $p_1(A)$, atunci integrala sa

$$\int_{p_1(A)} F_1(x)dx = \int_{p_1(A)} \left(\int_{A_x} f(x, y)dy \right) dx$$

se numește *integrala iterată în ordinea* y, x *a funcției* f *pe* A. Analog, dacă F_2 este integrabilă Riemann pe $p_2(A)$, atunci integrala sa

$$\int_{p_2(A)} F_2(y)dy = \int_{p_2(A)} \left(\int_{A_y} f(x, y)dx \right) dy$$

se numește *integrala iterată în ordinea* x, y *a funcției* f *pe* A.

3.6.3 Observație. Trebuie remarcat faptul că în cazul particular $A = S \times T$, cu S interval compact în $\mathbb{R}^m$ și T interval compact în $\mathbb{R}^n$, definiția 3.6.2 este în deplină concordanță cu definiția 3.4.2. In adevăr, în acest caz avem $p_1(A) = S$, $p_2(A) = T$, $A_x = T$ oricare ar fi $x \in S$ și $A_y = S$ oricare ar fi $y \in T$.

3.6.4 Teoremă (G. Fubini)**.** *Dacă $A \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ este o mulțime mărginită, iar $f : A \to \mathbb{R}$ este o funcție integrabilă Riemann și integrabilă parțial pe A, atunci F_1 este integrabilă Riemann pe $p_1(A)$, F_2 este integrabilă Riemann pe $p_2(A)$ și are loc relația*

$$\int_A f(x,y)dxdy = \int_{p_1(A)} F_1(x)dx = \int_{p_2(A)} F_2(y)dy.$$

Demonstrație. Notăm $I := \int_A f(x,y)dxdy$. Alegem două intervale compacte $S \subseteq \mathbb{R}^m$ și $T \subseteq \mathbb{R}^n$, în așa fel încât $p_1(A) \subseteq S$ și $p_2(A) \subseteq T$. Avem atunci $A \subseteq S \times T$. Fie apoi $\bar{f} : S \times T \to \mathbb{R}$ extensia nulă a lui f la $S \times T$. Intrucât f este integrabilă Riemann pe A, avem

$$(1) \qquad \bar{f} \in R(S \times T) \quad \text{și} \quad \int_{S\times T} \bar{f}(x,y)dxdy = I.$$

Dovedim în continuare că $\bar{f}$ este integrabilă parțial pe intervalul compact $S \times T$. In acest scop, fie x un punct arbitrar al lui S. Sunt posibile două situații:

• dacă $x \notin p_1(A)$, atunci $\bar{f}_x(y) = \bar{f}(x,y) = 0$ oricare ar fi $y \in T$, deci $\bar{f}_x \in R(T)$;

• dacă $x \in p_1(A)$, atunci avem

$$\bar{f}_x(y) = \bar{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{dacă } y \in A_x \\ 0 & \text{dacă } y \notin A_x \end{cases} = \begin{cases} f_x(y) & \text{dacă } y \in A_x \\ 0 & \text{dacă } y \in T \setminus A_x. \end{cases}$$

Prin urmare, $\bar{f}_x$ este extensia nulă la T a secțiunii $f_x : A_x \to \mathbb{R}$. Cum f este integrabilă parțial pe A, rezultă că f_x este integrabilă Riemann pe A_x, deci $\bar{f}_x$ este integrabilă Riemann pe T. Am demonstrat astfel că $\bar{f}_x \in R(T)$ oricare ar fi $x \in S$. Analog se arată că $\bar{f}_y \in R(S)$ oricare ar fi $y \in T$. In consecință, $\bar{f}$ este integrabilă parțial pe $S \times T$.

Aplicând teorema 3.4.3 funcției $\bar{f}$, deducem că $\bar{F}_1 \in R(S)$, $\bar{F}_2 \in R(T)$ și că are loc egalitatea

$$(2) \qquad \int_{S\times T} \bar{f}(x,y)dxdy = \int_S \bar{F}_1(x)dx = \int_T \bar{F}_2(y)dy,$$

unde $\bar{F}_1 : S \to \mathbb{R}$ și $\bar{F}_2 : T \to \mathbb{R}$ sunt funcțiile definite prin

$$\bar{F}_1(x) := \int_T \bar{f}(x,y)dy \quad \text{și respectiv} \quad \bar{F}_2(y) := \int_S \bar{f}(x,y)dx.$$

Dar
$$\bar{F}_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x \in S \setminus p_1(A) \\ \int_{A_x} f(x,y)dy & \text{dacă } x \in p_1(A), \end{cases}$$
deci $\bar{F}_1$ este extensia nulă la S a funcției F_1. Analog, $\bar{F}_2$ este extensia nulă la T a lui F_2. Intrucât $\bar{F}_1$ și $\bar{F}_2$ sunt integrabile Riemann pe S și respectiv T, rezultă că F_1 și F_2 sunt integrabile Riemann pe $p_1(A)$ și respectiv $p_2(A)$. In plus, avem

(3) $$\int_S \bar{F}_1(x)dx = \int_{p_1(A)} F_1(x)dx \quad \text{și} \quad \int_T \bar{F}_2(y)dy = \int_{p_2(A)} F_2(y)dy.$$

Din (1), (2) și (3) deducem că relația din concluzia teoremei are loc. □

3.6.5 Observație. Lanțul de egalități din concluzia teoremei lui Fubini poate fi scris detaliat sub forma
$$\underbrace{\int_A f(x,y)dxdy}_{\text{în } \mathbb{R}^{m+n}} = \underbrace{\int_{p_1(A)} \Big(\underbrace{\int_{A_x} f(x,y)dy}_{\text{în } \mathbb{R}^n} \Big) dx}_{\text{în } \mathbb{R}^m} = \underbrace{\int_{p_2(A)} \Big(\underbrace{\int_{A_y} f(x,y)dx}_{\text{în } \mathbb{R}^m} \Big) dy}_{\text{în } \mathbb{R}^n}.$$

3.6.6 Definiție (mulțimi simple în raport cu o axă în $\mathbb{R}^2$)**.** O mulțime $A \subseteq \mathbb{R}^2$ se numește *simplă în raport cu axa Oy* dacă există două numere reale $a < b$, precum și două funcții continue $\varphi, \psi : [a,b] \to \mathbb{R}$, cu $\varphi \le \psi$, astfel ca
$$A = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b,\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\big\}.$$
O mulțime $A \subseteq \mathbb{R}^2$ se numește *simplă în raport cu axa Ox* dacă există două numere reale $c < d$, precum și două funcții continue $\varphi, \psi : [c,d] \to \mathbb{R}$, cu $\varphi \le \psi$, astfel ca
$$A = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \le y \le d,\ \varphi(y) \le x \le \psi(y)\big\}.$$
Se poate demonstra că dacă A este o submulțime a lui $\mathbb{R}^2$, simplă în raport cu una dintre axele de coordonate, atunci A este măsurabilă Jordan și compactă.

3.6.7 Consecință. *Fie A o submulțime a lui $\mathbb{R}^2$, simplă în raport cu una dintre axele de coordonate și fie $f : A \to \mathbb{R}$ o funcție continuă. Atunci f este integrabilă Riemann pe A și are loc egalitatea*

(4) $$\iint_A f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy \right) dx,$$

în cazul când A este simplă în raport cu Oy, respectiv

$$\iint_A f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)dx \right) dy, \tag{5}$$

în cazul când A este simplă în raport cu Ox.

Demonstrație. Presupunem, pentru fixarea ideilor, că A este simplă în raport cu axa Oy. Deoarece f este continuă, iar A este compactă, rezultă că f este mărginită. In baza consecinței 3.5.6, deducem că f este integrabilă Riemann pe A. Ținând seama că $p_1(A) = [a,b]$, că $A_x = [\varphi(x), \psi(x)]$ și că secțiunea $f_x : A_x \to \mathbb{R}$ este continuă pentru orice $x \in [a,b]$, teorema 3.6.4 garantează validitatea lui (4). □

3.6.8 Definiție (mulțimi simple în raport cu o axă în $\mathbb{R}^3$)**.** O mulțime $A \subseteq \mathbb{R}^3$ se numește *simplă în raport cu axa Oz* dacă există o submulțime măsurabilă Jordan A_0 a lui $\mathbb{R}^2$, precum și două funcții continue mărginite $\varphi, \psi : A_0 \to \mathbb{R}$, cu $\varphi \leq \psi$, astfel ca

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in A_0,\ \varphi(x,y) \leq z \leq \psi(x,y)\}.$$

Analog se poate defini noțiunea de mulțime simplă în $\mathbb{R}^3$ în raport cu axa Ox sau în raport cu axa Oy. Se poate demonstra că dacă $A \subseteq \mathbb{R}^3$ este simplă în raport cu una dintre axele de coordonate, atunci A este măsurabilă Jordan.

3.6.9 Consecință. *Dacă A este o submulțime a lui $\mathbb{R}^3$, simplă în raport cu axa Oz, iar $f : A \to \mathbb{R}$ este o funcție continuă mărginită, atunci f este integrabilă Riemann pe A și are loc egalitatea*

$$\iiint_A f(x,y,z)dxdydz = \iint_{A_0} \left(\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dxdy. \tag{6}$$

Demonstrație. Intrucât $p_1(A) = A_0$, $A_{(x,y)} = [\varphi(x,y), \psi(x,y)]$ și secțiunea $f_{(x,y)} : A_{(x,y)} \to \mathbb{R}$ este continuă și mărginită oricare ar fi $(x,y) \in A_0 = p_1(A)$, în baza teoremei 3.6.4 deducem că (6) are loc. □

3.6.10 Observație (măsura Jordan a mulțimilor simple în raport cu o axă în $\mathbb{R}^2$ sau $\mathbb{R}^3$)**.** In cazul particular când $f = 1$, din relațiile (4), (5) și (6) obținem formule pentru măsurile Jordan ale mulțimilor simple în raport cu o axă în $\mathbb{R}^2$ sau $\mathbb{R}^3$:

$$m(A) = \int_a^b \big(\psi(x) - \varphi(x)\big)dx,$$

$$m(A) = \int_c^d \big(\psi(y) - \varphi(y)\big)dy,$$

respectiv

$$m(A) = \iint_{A_0} \big(\psi(x,y) - \varphi(x,y)\big)dxdy.$$

3.7 Schimbarea variabilelor în integralele multiple

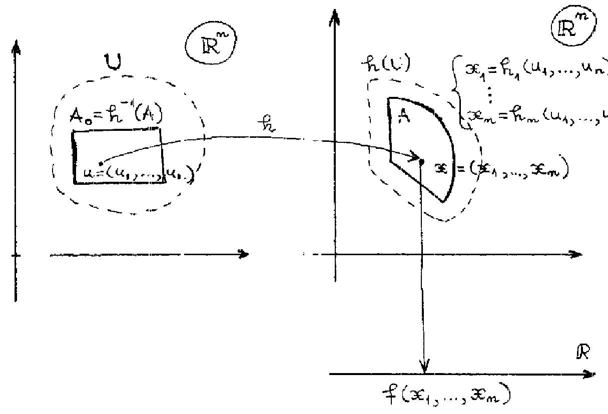


Figura 3.7.1: Schimbarea variabilelor în integralele multiple.

3.7.1 Teoremă. *Fie U o submulțime deschisă a lui $\mathbb{R}^n$, fie $h : U \to \mathbb{R}^n$ o funcție injectivă de clasă C^1 pe U, cu proprietatea că $\det J(h)(u) \neq 0$ oricare ar fi $u \in U$ și fie A o submulțime măsurabilă Jordan a lui $\mathbb{R}^n$ în așa fel încât $\operatorname{cl} A \subseteq h(U)$. Atunci următoarele sfirmații sunt adevărate:*

1° *Mulțimea $A_0 := h^{-1}(A)$ este măsurabilă Jordan.*

2° *Pentru orice funcție $f : A \to \mathbb{R}$, care este integrabilă Riemann pe A, funcția $(f \circ h)\,|\det J(h)| : A_0 \to \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann pe A_0 și are loc egalitatea*

$$\int_A f(x)dx = \int_{A_0} (f \circ h)(u)\,|\det J(h)(u)|du.$$

Demonstrație. Fără demonstrație. □

3.7.2 Observație. Egalitatea din concluzia teoremei precedente poate fi rescrisă explicit sub forma

$$\begin{aligned}\int\cdots\int_A f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\cdots dx_n \\ =\int\cdots\int_{A_0} f\big(h_1(u_1,\ldots,u_n),\ldots,h_n(u_1,\ldots,u_n)\big) \\ \times\big|\det J(h)(u_1,\ldots,u_n)\big|du_1\cdots du_n.\end{aligned}$$

3.8 Probleme – Calculul integralelor duble

1. Să se calculeze $\displaystyle\int_3^4\int_1^2 \frac{1}{(x+y)^2}\,dxdy.$

2. Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}\,dxdy.$

3. Să se calculeze $\displaystyle\int_0^\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\sin x}{(1+\cos^2 x)(1+\cos^2 y)}\,dxdy.$

4. Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4-x^2y^2}}\,dxdy.$

5. Să se calculeze $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos y}{1+\sin x\sin y}\,dxdy.$

6. Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1\int_0^1 \min\{x,y\}\,dxdy.$

7. Să se calculeze $\displaystyle\int_{1/a}^a\int_0^1 \frac{1}{x^2+y^2}\,dxdy,\quad a>1.$

8. Să se calculeze $\displaystyle\int_0^a\int_1^a \frac{e^{ax/y}}{y^3}\,dxdy,\quad a>1.$

9. Fie $a\in(0,1]$ și $f:[0,1]\times[0,1]\to\mathbb{R}$ funcția definită prin

$$f(x,y)=\begin{cases}\min\left\{1,\frac{a}{x},\frac{a}{y}\right\} & \text{dacă}\quad xy\neq 0\\ 1 & \text{dacă}\quad x=0 \text{ sau } y=0.\end{cases}$$

Să se demonstreze că f este continuă și să se calculeze

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)dxdy.$$

K. B. Stolarsky

10. Fie $a, b \in (0, \infty) \setminus \{1\}$ cu $a \neq b$. Să se calculeze $\displaystyle\iint_A a^x b^y \, dxdy$, dacă

$$A = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 1 \,\}.$$

11. Fie $A = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y \leq 1 \,\}$. Să se calculeze

$$\iint_A \ln(x^2 + y + 1)dxdy.$$

12. Să se calculeze $\displaystyle\iint_A \frac{x}{\sqrt{4 - y^2}} \, dxdy$, dacă A este mulțimea din plan, cuprinsă între parabolele de ecuații $y = x^2$ și $y^2 = x$.

13. Să se calculeze $\displaystyle\iint_A \frac{x}{y^2 + 1} \, dxdy$, dacă A este mulțimea din plan, cuprinsă între dreptele de ecuații $x = \sqrt{3}$, $y = x$ și hiperbola de ecuație $xy = 1$.

14. Să se calculeze $\displaystyle\iint_A \frac{1}{(x^2 + 4x + 1)(y^2 + 1)} \, dxdy$, dacă A este mulțimea din plan, cuprinsă între dreptele de ecuații $x = \dfrac{1}{2}$, $x = 2$, $y = 0$ și $y = x$.

15. Fie $a > 0$ și $A = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq a^2 \,\}$. Să se calculeze

$$\iint_A y^2 \sqrt{a^2 - x^2} \, dxdy.$$

16. Fie $a, b > 0$ și $A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} \leq 1,\ -b \leq y \leq b \right\}$. Să se calculeze $\displaystyle\iint_A \frac{x^2}{y^2 + b^2} \, dxdy$.

17. Să se calculeze $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_0^2 \sqrt{|y - x^2|} \, dxdy$.

18. Să se calculeze $\displaystyle\iint_A \operatorname{sgn}(x^2 - y^2 + 2)\, dxdy$, dacă

$$A = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4 \,\}.$$

19. Să se calculeze $\displaystyle\iint_A \operatorname{sgn}\big(|3y - 4| - x^2\big)\, dxdy$, dacă

$$A = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 14 \,\}.$$

20. Fie $a, b > 0$. Să se calculeze $\displaystyle\int_0^a \int_0^b e^{\max\{\, b^2x^2, a^2y^2 \,\}} dxdy.$

Concursul William Lowell Putnam 1989

21. Să se calculeze $\displaystyle\iint_A e^{(|x|+|y|)^2} dxdy$, dacă

$$A = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1 \,\}.$$

Concursul studențesc Traian Lalescu, etapa locală 2000

22. Să se calculeze $\displaystyle\iint_A y\, dxdy$, dacă A este mulțimea din plan cuprinsă între axa Ox și prima buclă a cicloidei $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$, $a > 0$.

23. Să se calculeze $\displaystyle\iint_A xy\, dxdy$, dacă A este mulțimea din plan cuprinsă între cele două axe de coordonate și arcul din primul cadran al astroidei $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $t \in [0, \pi/2]$, $a > 0$.

24. Să se calculeze $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{8}} \int_0^{\frac{\pi}{8}} \ln\big(1 + \operatorname{tg}(x + y)\big)\, dxdy.$

25. Fie $a > 0$ și $A = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq a^2 \,\}$. Să se calculeze

$$\iint_A |xy|\, dxdy.$$

26. Să se calculeze $\displaystyle\iint_A \sin\big(\ln\big(x^2 + y^2\big)\big)\, dxdy$, dacă

$$A = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq e \,\}.$$

27. Fie $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \}$ și $f : A \to \mathbb{R}$ funcția definită prin $f(x,y) =$ măsura unghiului format de tangentele duse din punctul $P(x,y)$ la cercul cu centrul în origine și de rază 1. Să se calculeze $\displaystyle\iint_A f(x,y)\,dxdy$.

28. Să se calculeze $\displaystyle\iint_A x\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$, dacă

$$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{3}x - 3y \geq 0,\ 1 \leq 4(x^2+y^2) \leq 4 \}.$$

29. Să se calculeze $\displaystyle\iint_A |xy|\,dxdy$, dacă

$$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2+y^2 \leq 9,\ |x| \leq |y| \}.$$

30. Să se calculeze $\displaystyle\iint_A \frac{|x|}{x^2+y^2}\,dxdy$, dacă

$$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0,\ |x| + y \leq 2 \leq x^2+y^2 \}.$$

31. Fie $a > 0$ și $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 2ax \}$. Să se calculeze

$$\iint_A (x^2+y^2)\,dxdy.$$

32. Fie $a > 0$ și $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 2ax,\ x^2+y^2 \leq 2ay \}$. Să se calculeze

$$\iint_A (x^2+y^2)\,dxdy.$$

33. Fie $a > 0$ și $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a|x| \leq x^2+y^2 \leq a^2 \}$. Să se calculeze

$$\iint_A \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy.$$

34. Să se calculeze $\displaystyle\iint_A \frac{1}{(x^2+y^2+1)^2}\,dxdy$, dacă

$$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq x^2+y^2 \leq 1 \}.$$

35. Să se calculeze $\displaystyle\iint_A |x^2+y^2-x|\,dxdy$, dacă

$$A = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 1\,\}.$$

36. Să se calculeze $\displaystyle\iint_A x(y+1)\,dxdy$, dacă

$$A = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \ge 1,\ x^2+y^2 \ge 2,\ x-2 \le y \le 2-x\,\}.$$

37. Să se calculeze $\displaystyle\iint_A \arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy$, dacă

$$A = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad x \ge 1/\sqrt{2},\ x^2+y^2 \ge 1,\ x+y \le \sqrt{2},\ x-y \le \sqrt{2}\,\}.$$

38. Să se calculeze $\displaystyle\iint_A \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy$, dacă

$$A = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le x^2+y^2 \le 4,\ x \le 1\,\}.$$

39. Să se calculeze $\displaystyle\iint_A (x^3+y^3)\,dxdy$, dacă

$$A = \left\{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \middle|\ \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y) \le x^2+y^2 \le 1\ \right\}.$$

40. Să se calculeze $\displaystyle\iint_A \frac{xy}{1+x^2+y^2}\,dxdy$, dacă

$$A = \{\,(x,y) \in [0,1]\times[0,1] \mid x^2+y^2 \ge 1\,\}.$$

41. Fie $a,b>0$ și $A = \left\{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \middle|\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} \le 1\ \right\}$. Să se calculeze

$$\iint_A \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dxdy.$$

42. Fie $a,b>0$ și $A = \left\{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \middle|\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} \le 1\ \right\} \setminus \{(0,0)\}$. Să se calculeze

$$\iint_A \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy.$$

43. Să se calculeze $\displaystyle\iint_A \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy$, dacă A este mulțimea din plan situată deasupra axei Ox, cuprinsă între cercul de ecuație $x^2+y^2=1$ și elipsa de ecuație $4x^2+y^2=4$.

44. Fie S aria mulțimii din primul cadran, mărginite de dreapta $y=\frac{1}{2}x$, de axa Ox și de elipsa $\frac{1}{9}x^2+y^2=1$. Să se determine numărul real $m>0$ astfel încât aria mulțimii din primul cadran, mărginite de dreapta $y=mx$, de axa Oy și de elipsa $\frac{1}{9}x^2+y^2=1$, să fie egală cu S.

Concursul William Lowell Putnam 1994

45. Să se calculeze $\displaystyle\iint_A e^{x^2+xy+y^2}\,dxdy$, dacă

$$A=\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+xy+y^2\le 1\,\}.$$

46. Fie $a>0$ și

$$A=\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x+y\le 4a,\ y\ge x\ge 0,\ xy\ge a^2\,\}.$$

Să se calculeze $\displaystyle\iint_A (x^2-y^2)\cos xy\,dxdy$.

47. Să se determine masa unei plăci pătrate, știind că densitatea în fiecare punct este proporțională cu distanța până la centrul plăcii.

48. Să se determine aria mulțimii plane A, mărginite de parabolele de ecuații $x^2=ay$, $x^2=by$, $y^2=px$, $y^2=qx$, unde $0<a<b$, $0<p<q$.

49. Să se determine aria mulțimii plane A, mărginite de parabolele de ecuații $y^2=ax$, $y^2=bx$ $(0<a<b)$ și de hiperbolele de ecuații $xy=p$, $xy=q$ $(0<p<q)$.

50. Să se calculeze $\displaystyle\iint_A \arcsin\sqrt{x+y}\,dxdy$, dacă A este mulțimea din plan mărginită de dreptele de ecuații $x+y=0$, $x+y=1$, $y=-1$ și $y=1$.

51. Să se calculeze $\displaystyle\iint_A \frac{1}{y^2(x+1)^2}\,e^{\frac{1}{xy}}\,dxdy$, dacă A este mulțimea din plan mărginită de dreptele $x=1$ şi $x=3$ și de hiperbolele $xy=\frac{1}{2}$ și $xy=2$.

52. Fie $a>0$ și $A=\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\ge 0,\ y\ge 0,\ x^{2/3}+y^{2/3}\le a^{2/3}\,\}$. Să se calculeze $\displaystyle\iint_A xy\,dxdy$.

53. Să se calculeze $\displaystyle\iint_A \left(\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}\right)^3 dxdy$, dacă A este mulțimea din plan mărginită de axele de coordonate și de curba de ecuație $\sqrt{\dfrac{x}{a}}+\sqrt{\dfrac{y}{b}}=1$ $(a,b>0)$.

54. Să se calculeze $\displaystyle\iint_A (x+y)\,dxdy$, dacă

$$A=\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geq 0,\ y\geq 0,\ x^2+y^2\leq 1\leq \sqrt{x}+\sqrt{y}\,\}.$$

55. Fie $A=\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geq 0,\ y\geq 0,\ 0<x+y\leq 1\,\}$. Să se demonstreze că

$$\iint_A \cos\frac{x-y}{x+y}\,dxdy=\frac{1}{2}\sin 1.$$

56. Fie $A=\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geq 0,\ y\geq 0,\ 0<x+y\leq 1\,\}$. Să se demonstreze că

$$\iint_A e^{\frac{y}{x+y}}dxdy=\frac{e-1}{2}.$$

57. Fie $a>0$ și $A=\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geq 0,\ y\geq 0,\ x+y\leq a\,\}$. Să se calculeze

$$\iint_A \frac{3y}{\sqrt{1+(x+y)^3}}\,dxdy.$$

58. Fie $A=\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geq 0,\ y\geq 0,\ x+y\leq 1\,\}$. Să se calculeze

$$\iint_A (x+y)^2e^{x^2-y^2}dxdy.$$

3.9 Probleme – Calculul integralelor triple

1. Să se calculeze $\displaystyle\int_0^a\int_0^b\int_0^c (x+y+z)\,dxdydz, \quad a,b,c>0.$

2. Să se calculeze $\displaystyle\int_1^2\int_1^2\int_1^2 \frac{1}{(x+y+z)^3}\,dxdydz.$

3. Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \min\{x,y,z\}\,dxdydz.$

4. Să se calculeze $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 [x + y + z] \, dxdydz$.

5. Să se calculeze $\iiint_A \frac{1}{(x + y + z + 1)^3} \, dxdydz$, dacă A este mulțimea din spațiu cuprinsă între planele de ecuații $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ și $x + y + z = 1$.

6. Să se calculeze $\iiint_A x^2 y \sqrt{z} \, dxdydz$, dacă

$$A = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, \ 0 \leq y \leq 4, \ 0 \leq z \leq 9 - x^2 \}.$$

7. Să se calculeze $\iiint_A (x^2 + y^2) \, dxdydz$, dacă

$$A = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq z \leq 4 \}.$$

8. Să se calculeze $\iiint_A x^2 \sin y \, dxdydz$, dacă

$$A = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq y \leq \pi, \ 0 \leq z \leq 2\pi, \ 0 \leq x \leq 1 + \cos y \}.$$

9. Să se calculeze $\iiint_A \sqrt{1 + (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \, dxdydz$, dacă

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \}.$$

10. Să se calculeze $\iiint_A \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - 2)^2}} \, dxdydz$, dacă

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \}.$$

11. Fie $a > 0$ și $A = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, \ z \geq 0 \}$. Să se calculeze $\iiint_A z e^{-(x^2+y^2+z^2)} \, dxdydz$.

12. Fie $a > 0$ și $A = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 2ax \}$. Să se calculeze $\iiint_A \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dxdydz$.

13. Fie $a > 0$ și

$$A = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2,\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 2az \,\}.$$

Să se calculeze $\displaystyle\iiint_A z^2\, dxdydz$.

14. Să se calculeze $\displaystyle\iiint_A \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dxdydz$, dacă

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y \geq 0,\ z \geq 0,\ 2x \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4x \,\}.$$

15. Fie $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ o funcție continuă, iar $F : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ funcția definită prin $F(t) = \displaystyle\iiint_{A(t)} f(x^2 + y^2 + z^2)\, dxdydz$, unde

$$A(t) = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq t^2 \,\}.$$

Să se demonstreze că F este derivabilă și să se determine F'.

16. Fie $a, b, c > 0$ și $A = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}$. Să se determine volumul mulțimii A.

17. Fie $a, b, c > 0$ și

$$A = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1,\ z \geq 0 \right\}.$$

Să se calculeze $\displaystyle\iiint_A z\, dxdydz$.

18. Fie $a, b, c > 0$ și $A = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}$. Să se calculeze

$$\iiint_A \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}}\, dxdydz.$$

19. Fie $a > 0$ și $A = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \dfrac{x^2}{9a^2} + \dfrac{y^2}{4a^2} + \dfrac{z^2}{a^2} \leq 1 \right\}$. Să se calculeze

$$\iiint_A (2x + 3y + 6z)^2\, dxdydz.$$

20. Să se calculeze $\displaystyle\iiint_A \frac{1}{x^2+y^2+2z^2+a^2}\,dxdydz$, dacă

$$A = \{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+2z^2 \le a^2\,\}, \quad a>0.$$

21. Să se calculeze $\displaystyle\iiint_A \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-3)^2}}\,dxdydz$, dacă

$$A = \{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \le 1,\ 0\le z\le 2\,\}.$$

22. Să se calculeze $\displaystyle\iiint_A xyze^{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$, dacă

$$A = \{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x,y\ge 0,\ x^2+y^2\le 2,\ 0\le z\le \sqrt{\ln 3}\,\}.$$

23. Să se calculeze $\displaystyle\iiint_A x^2y^2z^2\,dxdydz$, dacă A este mulțimea din spațiu cuprinsă între planele de ecuații $z=0$ și $z=4$, situată în interiorul conului $x^2+y^2=z^2$ și al cilindrului $x^2+y^2=1$.

24. Fie $a,h>0$ și

$$A = \{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid a^2z^2 \ge h^2(x^2+y^2),\ 0\le z\le h\,\}.$$

Să se calculeze $\displaystyle\iiint_A z\,dxdydz$.

25. Să se determine volumul mulțimii A, situate deasupra planului Oxy și mărginite de sferele $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2+z^2=b^2$ $(0<a<b)$ și de conul $x^2+y^2=z^2$.

26. Să se calculeze $\displaystyle\iiint_A |xyz|\,dxdydz$, dacă

$$A = \{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2\le 1,\ x^2+y^2\le z^2\,\}.$$

27. Fie $a,b>0$ și

$$A = \{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2-ay\le 0,\ b^2(x^2+y^2)+a^2z^2\le a^2b^2\,\}.$$

Să se determine volumul mulțimii A.

28. Să se determine volumul mulțimii A, situate între suprafețele de ecuații $x^2+y^2=2pz$ și $x^2+y^2=a^2z^2$ $(a,p>0)$.

29. Fie $a, c > 0$ și $0 \leq \alpha < \beta < \dfrac{\pi}{2}$. Să se determine volumul mulțimii A, situate în primul octant, între suprafețele de ecuații

$$z = 0, \quad z = c\cos\frac{\pi\sqrt{x^2+y^2}}{2a}, \quad y = x\,\mathrm{tg}\,\alpha \quad \text{și} \quad y = x\,\mathrm{tg}\,\beta.$$

Olimpiadă studențească, U.R.S.S.

30. Fie $a > 0$ și

$$A = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq 0,\ (x^2 + y^2 + z^2)^2 \leq a^2 xy \,\} \setminus \{(0, 0, 0)\}.$$

Să se calculeze $\displaystyle\iiint_A \frac{xyz}{x^2+y^2}\, dxdydz.$

31. Fie $a, b, c > 0$ și

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\} \setminus \{(0, 0, 0)\}.$$

Să se calculeze $\displaystyle\iiint_A \frac{|xyz|}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\, dxdydz.$

3.10 Probleme – Calculul integralelor multiple

1. Fie $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a < b$, $A = [a, b]^n$,

$$B = \{\, (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n \leq b \,\},$$

iar $F : A \to \mathbb{R}$ o funcție care se bucură de următoarele proprietăți:

(i) $F \in R(A)$;

(ii) $F(x_1, \ldots, x_n) = F(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$ pentru orice $(x_1, \ldots, x_n) \in A$ și orice permutare $\sigma \in S_n$;

(iii) pentru orice $(x_1, \ldots, x_n) \in A$ și orice $i \in \{1, \ldots, n\}$, funcția

$$F(x_1, \ldots, x_{i-1}, \cdot, x_{i+1}, \ldots, x_n) : [a, b] \to \mathbb{R}$$

este integrabilă Riemann.

Să se demonstreze că

$$\int_A F(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_n = n! \int_B F(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_n.$$

2. Fie $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a < b$,

$$B = \{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a \le x_1 \le \cdots \le x_n \le b \},$$

iar $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcție integrabilă Riemann. Să se demonstreze că

$$\int_B f(x_1) \cdots f(x_n)\, dx_1 \cdots dx_n = \frac{1}{n!} \left[\int_a^b f(t)\, dt \right]^n.$$

3. Să se demonstreze că dacă $r, n \in \mathbb{N}$ și $1 \le r \le n$, atunci

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 M_r(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_n = \frac{r}{n+1},$$

unde $M_r(x_1, \ldots, x_n)$ este al r-lea dintre numerele $x_1, \ldots, x_n$, așezate în ordine crescătoare.

4. Dacă $n \ge 2$ este un număr natural și $a \in (0, 1]$, să se demonstreze că

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 \min \left\{ 1, \frac{a}{x_1}, \ldots, \frac{a}{x_n} \right\} dx_1 \cdots dx_n = \frac{na - a^n}{n-1}.$$

5. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n \in (0, \infty)$ și $a := a_1 a_2 \cdots a_n$. Să se demonstreze că

$$\int_0^{a_1} \cdots \int_0^{a_n} e^{\max \{ a_2^2 a_3^2 \cdots a_n^2 x_1^2,\ \ldots,\ a_1^2 a_2^2 \cdots a_{n-1}^2 x_n^2 \}}\, dx_1 \cdots dx_n = \frac{n}{a^{n-1}} \int_0^a t^{n-1} e^{t^2} dt.$$

Ce se obține în cazul particular $n = 2$?

6. Fie $n \in \mathbb{N}$, $A = \{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid |x_1| + \cdots + |x_n| \le 1 \}$, iar $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ o funcție integrabilă Riemann. Să se demonstreze că

$$\int_A f(|x_1| + \cdots + |x_n|)\, dx_1 \cdots dx_n = \frac{2^n}{(n-1)!} \int_0^1 t^{n-1} f(t)\, dt.$$

Ce se obține în cazul particular $n = 2$?

7. Fie $p_1, \ldots, p_n, p_{n+1} \in [1, \infty)$, $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ o funcție integrabilă Riemann, iar

$$A_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0, x_1 + \cdots + x_n \le 1\}.$$

Să se demonstreze că:

a) $$\int_{A_n} x_1^{p_1-1}\cdots x_n^{p_n-1}\varphi(x_1+\cdots+x_n)\,dx_1\cdots dx_n$$
$$= \frac{\Gamma(p_1)\cdots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+\cdots+p_n)}\int_0^1 t^{p_1+\cdots+p_n-1}\varphi(t)\,dt.$$

b) $$\int_{A_n} x_1^{p_1-1}\cdots x_n^{p_n-1}(1-x_1-\cdots-x_n)^{p_{n+1}-1}\,dx_1\cdots dx_n$$
$$= \frac{\Gamma(p_1)\cdots\Gamma(p_n)\Gamma(p_{n+1})}{\Gamma(p_1+\cdots+p_n+p_{n+1})}.$$

J. Liouville

8. Fie A mulțimea tuturor tripletelor (x, y, z), de numere reale nenegative, astfel ca $x + y + z \le 1$, iar $w = 1 - x - y - z$. Să se exprime valoarea integralei triple $\displaystyle\iiint_A x^4y^9z^8w^4\,dxdydz$ sub forma $a!b!c!d!/n!$, unde a, b, c, d, n sunt numere naturale.

Concursul William Lowell Putnam 1984

9. Fie $a_1, \ldots, a_n \in (0, \infty)$ și

$$A = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \frac{x_1^2}{a_1^2} + \cdots + \frac{x_n^2}{a_n^2} \le 1 \right\}.$$

Să se calculeze $$\int_A \left[\frac{x_1+\cdots+x_n}{\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}}\right] dx_1\cdots dx_n.$$

Mircea Ivan

10. Fiind dat numărul natural n, pentru fiecare $r > 0$ notăm

$$A_n(r) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in [0, \infty[^n \mid x_1 + \cdots + x_n \le r\}.$$

Să se demonstreze că dacă $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ este o funcție diferențiabilă în originea 0_n a lui $\mathbb{R}^n$, atunci

$$\lim_{r\searrow 0}\frac{1}{r^{n+1}}\int_{A_n(r)}\big[f(x_1,\ldots,x_n)-f(0_n)\big]dx_1\cdots dx_n$$
$$= \frac{1}{(n+1)!}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(0_n).$$

Dumitru Popa – Concursul studențesc Traian Lalescu, etapa finală 2002

11. Fie $n \in \mathbb{N}$, $C \in S_{++}^{2n}$ și $A = \{\, x \in \mathbb{R}^{2n} \mid x^T C x \leq 1 \,\}$. Să se demonstreze că

$$\int_A e^{x^T C x}\, dx = \frac{(-\pi)^n}{\sqrt{\det C}} \left[1 - e \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \right) \right].$$

Olimpiadă studențească, U.R.S.S.

12. Să se demonstreze că dacă $C \in S_{++}^{n}$, atunci are loc egalitatea

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^T C x}\, dx_1 \cdots dx_n = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det C}}.$$

3.11 Probleme diverse

1. Fie A un interval compact nedegenerat din $\mathbb{R}^n$ și $f : A \to (0, \infty)$ o funcție integrabilă Riemann. Să se demonstreze că $\displaystyle\int_A f > 0$. (Incercați o rezolvare care să nu utilizeze criteriul lui Lebesgue.)

2. Fie $f : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \to \mathbb{R}$ o funcție integrabilă Riemann cu proprietatea $\displaystyle\int_{a_1}^{c_1} \int_{a_2}^{c_2} f(x, y)\, dxdy = 0$ pentru orice $c_1 \in [a_1, b_1]$ și orice $c_2 \in [a_2, b_2]$. Să se demonstreze că $\displaystyle\int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} |f(x, y)|\, dxdy = 0$.

3. Fie $A = [0, 1] \times [0, 1]$, iar $f : A \to \mathbb{R}$ o funcție continuă. Pentru fiecare punct (a, b), interior lui A, notăm cu $A(a, b)$ cel mai mare pătrat conținut în A, având centrul în (a, b) și laturile paralele cu cele ale lui A. Să se demonstreze că dacă $\displaystyle\iint_{A(a,b)} f(x, y)\, dxdy = 0$ pentru orice $(a, b) \in \operatorname{int} A$, atunci $f = 0$.

Concursul William Lowell Putnam 1978

4. Fie $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă cu proprietatea

$$\int_a^b \int_c^d x^m y^n f(x, y)\, dxdy = 0$$

pentru orice $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Să se demonstreze că $f = 0$.

5. Fie $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă cu proprietatea

$$\forall \;\; x, y \in [0,1] \;\; : \quad \int_x^1 \int_y^1 f(u,v)\, dudv \geq (1-x^2)(1-y^2).$$

Să se demonstreze că $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 f^2(x,y)\, dxdy \geq \frac{16}{9}.$

6. Fie $M \geq 0$, $A = [0,1] \times [0,1]$, iar $f : A \to \mathbb{R}$ o funcție de clasă C^4, care se anulează pe frontiera lui A și cu proprietatea

$$\forall \;\; (x,y) \in \operatorname{int} A \;\; : \quad \left| \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}(x,y) \right| \leq M.$$

Să se demonstreze că

$$\left| \iint_A f(x,y)\, dxdy \right| \leq \frac{M}{144}.$$

Anon, Amer. Math. Monthly [1969, 1138]

7. Arătați că există cel mult o funcție continuă $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ cu proprietatea

$$\forall \; (x,y) \in [0,1] \times [0,1] \;\; : \quad f(x,y) = 1 + \int_0^x \int_0^y f(u,v) dudv.$$

Concursul William Lowell Putnam 1958

8. a) Să se demonstreze că dacă $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ este o funcție integrabilă, continuă în $t = 1$, atunci are loc egalitatea

$$\lim_{n\to\infty} n \int_0^1 t^n g(t) dt = g(1).$$

b) Fiind dată funcția continuă $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$, să se determine $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n \int_0^1 \int_0^1 (1-x)^n f(x,y) dxdy.$

9. Fie $a > 0$, $A = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\; y \geq 0,\; x + y \leq a \,\}$, iar $f : A \to \mathbb{R}$ o funcție continuă. Să se demonstreze că există un punct $\theta \in [0,a]$ astfel ca

$$\iint_A f(x,y)\, dxdy = a \int_0^\theta f(t, \theta - t)\, dt.$$

Olimpiadă studențească, Ucraina

10. Fie funcțiile continue $f, g : [0,1] \to (0,\infty)$ și $K : [0,1]\times[0,1] \to (0,\infty)$, astfel încât pentru orice $x \in [0,1]$ să avem

$$f(x) = \int_0^1 K(x,y)g(y)\,dy \quad \text{și} \quad g(x) = \int_0^1 K(x,y)f(y)\,dy.$$

Să se demonstreze că $f(x) = g(x)$ oricare ar fi $x \in [0,1]$.

Concursul William Lowell Putnam 1993

11. Fie $f : [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă. Să se demonstreze că are loc egalitatea

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \big[f(x,y)+f(u,v)\big]^2\,dxdydudv$$
$$= \int_0^1\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \big[f(x,y)+f(u,v)\big]\big[f(x,v)+f(u,y)\big]\,dxdydudv$$

dacă și numai dacă există funcții continue $g, h : [0,1] \to \mathbb{R}$, astfel ca $f(x,y) = g(x) + h(y)$ oricare ar fi $x, y \in [0,1]$.

J. G. Wendel, Amer. Math. Monthly [1952, 105]

12. Fie $f : [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă astfel încât

$$\left(\int_0^1 \left[\int_0^1 f(x,y)\,dx\right]^2 dy\right)^{1/2} = \int_0^1 \left(\int_0^1 f^2(x,y)\,dy\right)^{1/2} dx.$$

Să se demonstreze că există funcții continue $u, r : [0,1] \to \mathbb{R}$, cu $r(x) \geq 0$ pentru orice $x \in [0,1]$ și $\displaystyle\int_0^1 u^2(y)dy = 1$, astfel ca $f(x,y) = r(x)u(y)$ pentru orice $x, y \in [0,1]$.

D. Goffinet, Amer. Math. Monthly [1991, 63]

13. Fie $p \geq 1$ și $f : [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}$ o funcție integrabilă Riemann. Să se demonstreze că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \left| f\left(\frac{i}{n},\frac{j}{n}\right) - f\left(\frac{i-1}{n},\frac{j-1}{n}\right)\right|^p = 0.$$

S. Rădulescu

14. Fie $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă, iar $F : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ funcția definită prin $F(x,y) = \int_a^x \int_c^y f(u,v)\,dudv$. Să se demonstreze că

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x,y) = f(x,y) \quad \text{oricare ar fi } (x,y) \in [a,b] \times [c,d].$$

15. Fie $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o funcție de două ori derivabilă parțial în raport cu variabilele (x,y) pe $\mathbb{R}^2$ și $f = \dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$. Să se demonstreze că dacă $a < b$ și $c < d$ sunt numere reale astfel încât f este integrabilă Riemann pe $[a,b] \times [c,d]$, atunci are loc egalitatea

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dxdy = F(b,d) - F(b,c) - F(a,d) + F(a,c).$$

16. Dacă $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ este o funcție de clasă C^2, să se demonstreze că următoarele afirmații sunt echivalente:

1° $f(A) + f(C) = f(B) + f(D)$ pentru orice dreptunghi $ABCD$ din spațiul euclidian $\mathbb{R}^2$.

2° Există numerele reale a, b, c, d astfel ca

$$f(x,y) = a(x^2 + y^2) + bx + cy + d.$$

Olimpiadă studențească, U.R.S.S.

17. Dacă $a > 0$, $A = [0,a] \times [0,a]$ și

$$B = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq a\sqrt{2}\,\},$$

să se demonstreze că

$$\iint_A e^{-(x^2+y^2)/2} dxdy = \iint_B e^{-(x^2+y^2)/2} dxdy.$$

O. P. Aggarwal și I. Guttman, Amer. Math. Monthly [1961, 299]

18. Fie A un interval compact din $\mathbb{R}^n$, $\alpha \geq 0$, $p > 0$, iar $f, g : A \to \mathbb{R}$ funcții cu proprietatea

$$|f(x) - f(y)| \leq \alpha |g(x) - g(y)|^p \quad \text{oricare ar fi } x, y \in A.$$

Să se demonstreze că dacă $g \in R(A)$, atunci și $f \in R(A)$.

S. Rădulescu

19. Fie A o submulțime compactă nevidă și fără puncte izolate a spațiului $\mathbb{R}^n$ și $f : A \to \mathbb{R}$ o funcție care are limită finită în fiecare punct al lui A. Să se demonstreze că f este mărginită.

20. Fie A un interval compact din $\mathbb{R}^n$ și $f : A \to \mathbb{R}$ o funcție care are limită finită în fiecare punct al lui A. Să se demonstreze că $f \in R(A)$.

21. Fie $f : [a, b]^n \to \mathbb{R}$ o funcție integrabilă Riemann și $\varphi : [a, b] \to [a, b]$ o funcție care îndeplinește următoarele condiții:

(i) φ este bijectivă;

(ii) φ^{-1} este continuă pe $[a, b]$ și derivabilă pe $]a, b[$;

(iii) $\left(\varphi^{-1}\right)'$ este continuă pe $]a, b[$.

Să se demonstreze că funcția $g : [a, b]^n \to \mathbb{R}$, definită prin

$$g(x_1, \ldots, x_n) = f(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n)),$$

este integrabilă Riemann.

22. Să se determine funcțiile continue $f : [0, 1]^n \to \mathbb{R}$, cu proprietatea

$$\begin{aligned}\int_0^1 \cdots \int_0^1 f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_n \\ = \frac{2^{2n-2}}{3^n} + \int_0^1 \cdots \int_0^1 f^2\left(x_1^2, \ldots, x_n^2\right)\, dx_1 \cdots dx_n.\end{aligned}$$

T. Andreescu

23. Fie $f : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ funcția definită prin

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{y^2} & \text{dacă} \quad 0 < x < y < 1 \\ -\frac{1}{x^2} & \text{dacă} \quad 0 < y < x < 1 \\ 0 & \text{în caz contrar.} \end{cases}$$

Să se demonstreze că există integralele iterate

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y)\, dy \right) dx \qquad \text{și} \qquad \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y)\, dx \right) dy,$$

dar acestea nu sunt egale. Contrazice acest rezultat teorema lui Fubini?

24. Fie $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ funcția definită prin

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{1}{q_x} + \frac{1}{q_y} \qquad \text{dacă } (x,y) \in \mathbb{Q}^* \times \mathbb{Q}^*,\ x = \frac{p_x}{q_x}, \\ &\qquad\qquad\qquad y = \frac{p_y}{q_y},\ p_x,\ q_x,\ p_y,\ q_y \in \mathbb{N}, \\ &\qquad\qquad\qquad (p_x, q_x) = (p_y, q_y) = 1 \\ f(x,y) &= 0 \qquad \text{în caz contrar.} \end{aligned}$$

Să se demonstreze că f este integrabilă Riemann, dar nu există nici una dintre integralele iterate

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\, dy \right) dx \qquad \text{și} \qquad \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\, dx \right) dy.$$

25. Fie $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ funcția definită prin

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 1 \qquad \text{dacă } (x,y) \in \mathbb{Q}^* \times \mathbb{Q}^*,\ x = \frac{p_x}{q_x},\ y = \frac{p_y}{q_y}, \\ &\qquad\quad p_x,\ q_x,\ p_y,\ q_y \in \mathbb{N},\ (p_x, q_x) = (p_y, q_y) = 1, \\ &\qquad\quad q_x = q_y \\ f(x,y) &= 0 \qquad \text{în caz contrar.} \end{aligned}$$

Să se demonstreze că există ambele integrale iterate

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\, dy \right) dx \qquad \text{și} \qquad \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\, dx \right) dy,$$

acestea sunt egale, dar funcția f nu este integrabilă Riemann.

26. Pentru fiecare număr natural k definim mulțimea

$$A_k = \left\{ \left(\frac{m}{2^k}, \frac{n}{2^k} \right) \,\middle|\, 1 \le m,\ n < 2^k,\quad m,\ n \ \text{întregi impare} \right\}.$$

Fie $A = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, iar $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ funcția caracteristică a mulțimii A. Să se demonstreze că există ambele integrale iterate

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\, dy \right) dx \qquad \text{și} \qquad \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\, dx \right) dy,$$

acestea sunt egale, dar funcția f nu este integrabilă Riemann.

C. Debieve, Amer. Math. Monthly [1993, 281]

Capitolul 4

Funcţii cu variaţie mărginită

4.1 Definiţii şi notaţii

4.1.1 Definiţie (funcţii cu variaţie mărginită)**.** Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ şi fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ o funcţie. Dacă $\Delta := (x_0, x_1, \ldots, x_k)$ este o diviziune a intervalului $[a, b]$, atunci numărul real definit prin

$$V(f, \Delta) := \sum_{j=1}^{k} \|f(x_j) - f(x_{j-1})\|$$

se numeşte *variaţia funcţiei f relativă la diviziunea* Δ. Notăm

$$\bigvee_a^b (f) := \sup \{V(f, \Delta) \mid \Delta \in \operatorname{Div}[a, b]\}.$$

$\bigvee_a^b (f)$ se numeşte *variaţia totală a funcţiei f*. Evident avem $\bigvee_a^b (f) \in [0, \infty]$. Dacă $\bigvee_a^b (f) < \infty$, atunci se spune că *funcţia f este cu variaţie mărginită*. Notăm

$$BV([a, b], \mathbb{R}^n) := \left\{ f : [a, b] \to \mathbb{R}^n \mid \bigvee_a^b (f) < \infty \right\}.$$

In cazul particular când $n = 1$ se foloseşte de obicei notaţia simplificată $BV[a, b] := BV([a, b], \mathbb{R})$.

4.1.2 Exemple. a) Orice funcție monotonă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este cu variație mărginită și $\bigvee_a^b(f) = |f(b) - f(a)$. Intr-adevăr, pentru orice $\Delta \in \operatorname{Div}[a, b]$ avem $V(f, \Delta) = |f(b) - f(a)|$, de unde afirmația precedentă.

b) Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ o funcție Lipschitz și fie $\alpha \geq 0$ cu proprietatea că

$$\|f(x) - f(x')\| \leq \alpha |x - x'| \quad \text{oricare ar fi } x, x' \in [a, b].$$

Atunci pentru orice diviziune $\Delta := (x_0, x_1, \ldots, x_k) \in \operatorname{Div}[a, b]$ avem

$$V(f, \Delta) = \sum_{j=1}^{k} \|f(x_j) - f(x_{j-1})\| \leq \sum_{j=1}^{k} \alpha(x_j - x_{j-1}) = \alpha(b - a).$$

Drept urmare, avem $f \in BV([a, b], \mathbb{R}^n)$ și $\bigvee_a^b(f) \leq \alpha(b - a)$.

4.1.3 Teoremă (mărginirea funcțiilor cu variație mărginită)**.** *Orice funcție cu variație mărginită $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ este mărginită.*

Demonstrație. Vom dovedi că

$$\|f(x)\| \leq \|f(a)\| + \bigvee_a^b(f) \quad \text{oricare ar fi } x \in [a, b]. \tag{1}$$

Dacă $x = a$, atunci (1) este evident adevărată. Presupunem în continuare că $x > a$. Notăm

$$\Delta_x := \begin{cases} (a, x, b) & \text{dacă } x < b \\ (a, b) & \text{dacă } x = b. \end{cases}$$

Avem

$$\|f(x)\| \leq \|f(a)\| + \|f(x) - f(a)\| \leq \|f(a)\| + V(f, \Delta_x) \leq \|f(a)\| + \bigvee_a^b(f).$$

Deoarece $\bigvee_a^b(f) < \infty$, din (1) rezultă că f este mărginită. $\square$

4.1.4 Observație. Fiind dată o funcție $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, notăm

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in [a,b]} \|f(x)\|.$$

$\|f\|_\infty$ se numește *norma uniformă a funcției* f. Avem $\|f\|_\infty \in [0,\infty]$. De asemenea, f este mărginită dacă și numai dacă $\|f\|_\infty < \infty$. Inegalitatea (1) arată că

$$\|f\|_\infty \le \|f(a)\| + \bigvee_a^b (f).$$

4.2 Proprietăți ale variației totale

4.2.1 Propoziție (monotonia variației în raport cu diviziunea)**.** *Fie funcția* $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *și fie diviziunile* $\Delta, \Delta' \in \operatorname{Div}[a,b]$ *astfel ca* $\Delta \subseteq \Delta'$. *Atunci are loc inegalitatea* $V(f,\Delta) \le V(f,\Delta')$.

Demonstrație. Fie $\Delta := (x_0, x_1, \ldots, x_k)$. Evident, este suficient să considerăm doar situația când Δ' se obține din Δ prin adăugarea unui singur punct, adică există un $i \in \{1,\ldots,k\}$ și există un punct $x' \in (x_{i-1}, x_i)$ astfel ca

$$\Delta' = (x_0, \ldots, x_{i-1}, x', x_i, \ldots, x_k).$$

Avem

$$\begin{aligned} V(f,\Delta') &= \sum_{j=1}^{i-1} \|f(x_j) - f(x_{j-1}\| + \|f(x') - f(x_{i-1})\| \\ &\quad + \|f(x_i) - f(x')\| + \sum_{j=i+1}^{k} \|f(x_j) - f(x_{j-1})\| \\ &\ge \sum_{j=1}^{i-1} \|f(x_j) - f(x_{j-1}\| + \|f(x_i) - f(x_{i-1})\| \\ &\quad + \sum_{j=i+1}^{k} \|f(x_j) - f(x_{j-1})\| \\ &= V(f,\Delta). \end{aligned}$$

□

4.2.2 Teoremă. *Dacă* $f, g \in BV([a,b],\mathbb{R}^n)$*, iar* α *și* β *sunt constante reale oarecare, atunci* $\alpha f + \beta g \in BV([a,b],\mathbb{R}^n)$ *și are loc inegalitatea*

$$(1) \qquad \bigvee_a^b (\alpha f + \beta g) \le |\alpha| \bigvee_a^b (f) + |\beta| \bigvee_a^b (g).$$

Demonstrație. Pentru orice diviziune $\Delta := (x_0, x_1, \ldots, x_k) \in \operatorname{Div}[a,b]$ avem

$$\begin{aligned}
V(\alpha f + \beta g, \Delta) &= \sum_{j=1}^{k} \|\alpha f(x_j) + \beta g(x_j) - \alpha f(x_{j-1}) - \beta g(x_{j-1})\| \\
&\leq |\alpha| \sum_{j=1}^{k} \|f(x_j) - f(x_{j-1})\| + |\beta| \sum_{j=1}^{k} \|g(x_j) - g(x_{j-1})\| \\
&= |\alpha|\, V(f, \Delta) + |\beta|\, V(g, \Delta) \\
&\leq |\alpha| \bigvee_a^b (f) + |\beta| \bigvee_a^b (g).
\end{aligned}$$

Acest lanț de inegalități arată că $\alpha f + \beta g \in BV([a,b], \mathbb{R}^n)$ și că (1) are loc. □

4.2.3 Teoremă. *Dacă $f, g \in BV[a,b]$, atunci $fg \in BV[a,b]$ și are loc inegalitatea*

$$\bigvee_a^b (fg) \leq \|f\|_\infty \bigvee_a^b (g) + \|g\|_\infty \bigvee_a^b (f). \tag{2}$$

Demonstrație. Pentru orice diviziune $\Delta := (x_0, x_1, \ldots, x_k) \in \operatorname{Div}[a,b]$ avem

$$\begin{aligned}
V(fg, \Delta) &= \sum_{j=1}^{k} |f(x_j)g(x_j) - f(x_{j-1})g(x_{j-1})| \\
&\leq \sum_{j=1}^{k} |f(x_j)|\, |g(x_j) - g(x_{j-1})| + \sum_{j=1}^{k} |g(x_{j-1})|\, |f(x_j) - f(x_{j-1})| \\
&\leq \|f\|_\infty V(g, \Delta) + \|g\|_\infty V(f, \Delta) \\
&\leq \|f\|_\infty \bigvee_a^b (g) + \|g\|_\infty \bigvee_a^b (f).
\end{aligned}$$

Acest lanț de inegalități arată că $fg \in BV[a,b]$ și că (2) are loc. □

4.2.4 Teoremă (aditivitatea față de interval a variației totale)**.** *Fiind dată o funcție $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, pentru orice punct $c \in (a,b)$ are loc egalitatea*

$$\bigvee_a^b (f) = \bigvee_a^c (f) + \bigvee_c^b (f). \tag{3}$$

Demonstrație. Pentru orice diviziuni $\Delta_1 \in \mathrm{Div}\,[a,c]$ și $\Delta_2 \in \mathrm{Div}\,[c,b]$ avem

$$V(f,\Delta_1) + V(f,\Delta_2) = V(f,\Delta_1 \vee \Delta_2) \le \bigvee_a^b (f).$$

Luând în această inegalitate supremumul membrului stâng când Δ_1 parcurge mulțimea $\mathrm{Div}\,[a,c]$ obținem

$$\bigvee_a^c (f) + V(f,\Delta_2) \le \bigvee_a^b (f) \quad \text{oricare ar fi } \Delta_2 \in \mathrm{Div}\,[c,b].$$

Luând în inegalitatea precedentă supremumul membrului stâng când Δ_2 parcurge mulțimea $\mathrm{Div}\,[c,b]$ deducem că

$$\bigvee_a^c (f) + \bigvee_c^b (f) \le \bigvee_a^b (f). \tag{4}$$

Fie acum Δ o diviziune oarecare a lui $[a,b]$ și fie $\bar{\Delta} := \Delta \cup (a,c,b)$. Atunci există $\Delta_1 \in \mathrm{Div}\,[a,c]$ și $\Delta_2 \in \mathrm{Div}\,[c,b]$ în așa fel încât $\bar{\Delta} = \Delta_1 \vee \Delta_2$. Intrucât $\Delta \subseteq \bar{\Delta}$, în baza propoziției 4.2.1 avem

$$V(f,\Delta) \le V(f,\bar{\Delta}) = V(f,\Delta_1) + V(f,\Delta_2) \le \bigvee_a^c (f) + \bigvee_c^b (f).$$

Luând în această inegalitate supremumul membrului stâng când Δ parcurge mulțimea $\mathrm{Div}\,[a,b]$ obținem

$$\bigvee_a^b (f) \le \bigvee_a^c (f) + \bigvee_c^b (f). \tag{5}$$

Din (4) și (5) rezultă că (3) are loc. □

4.2.5 Teoremă (teorema de descompunere a lui C. Jordan)**.** *O funcție reală $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ este cu variație mărginită dacă și numai dacă ea se poate reprezenta ca diferență a două funcții crescătoare.*

Demonstrație. Necesitatea. Admitem că $f \in BV[a,b]$. Conform teoremei 4.2.4, pentru orice punct $x \in (a,b)$ avem

$$\bigvee_a^x (f) + \bigvee_x^b (f) = \bigvee_a^b (f) < \infty,$$

deci $\bigvee_a^x(f) < \infty$. Fie $f_1 : [a,b] \to \mathbb{R}$ funcţia definită prin $f_1(x) := \bigvee_a^x(f)$. (cu convenţia $\bigvee_a^a(f) = 0$). Folosind teorema 4.2.4 se verifică imediat că f_1 este crescătoare. Fie apoi $f_2 := f_1 - f$. Observăm că dacă $a \leq x_1 < x_2 \leq b$, atunci

$$\begin{aligned} f_2(x_2) - f_2(x_1) &= \bigvee_a^{x_2}(f) - f(x_2) - \bigvee_a^{x_1}(f) + f(x_1) \\ &= \bigvee_{x_1}^{x_2}(f) - \big(f(x_2) - f(x_1)\big) \\ &\geq \bigvee_{x_1}^{x_2}(f) - |f(x_2) - f(x_1)| \geq 0, \end{aligned}$$

deci şi f_2 este crescătoare. Cum $f = f_1 - f_2$, rezultă că f se reprezintă ca diferenţă a două funcţii crescătoare.

Suficienţa. Admitem acum că $f = f_1 - f_2$, cu $f_1, f_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ funcţii crescătoare. Atunci avem $f_1, f_2 \in BV[a,b]$ (a se vedea exemplul 4.1.2 a), deci $f \in BV[a,b]$ conform teoremei 4.2.2. □

4.2.6 Observaţie. Se ştie că orice funcţie monotonă $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ are limite laterale finite în orice punct din $[a,b]$. Combinând acest rezultat cu teorema de descompunere a lui Jordan, deducem că orice funcţie $f \in BV[a,b]$ are limite laterale finite în orice punct din $[a,b]$.

4.2.7 Definiţie. Fie funcţia cu variaţie mărginită $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ şi fie funcţiile $v_f, \bar{v}_f : [a,b] \to \mathbb{R}$ definite respectiv prin

$$v_f(x) := \bigvee_a^x(f) \qquad \text{şi} \qquad \bar{v}_f(x) := \bigvee_x^b(f),$$

cu convenţia folosită deja $\bigvee_a^a(f) = \bigvee_b^b(f) = 0$. Funcţia v_f se numeşte *funcţia variaţiei lui f*. Teorema 4.2.4 garantează că v_f este crescătoare, iar $\bar{v}_f$ este descrescătoare. Deci v_f şi $\bar{v}_f$ au limite laterale finite în orice punct din $[a,b]$.

4.2.8 Teoremă. *Fiind dată o funcţie cu variaţie mărginită $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, următoarele afirmaţii sunt adevărate:*

1° *Pentru orice punct $c \in (a, b]$ au loc egalitățile*

$$\begin{aligned} v_f(c-0) &= v_f(c) - |f(c) - f(c-0)|, \\ \bar{v}_f(c-0) &= \bar{v}_f(c) + |f(c) - f(c-0)|. \end{aligned}$$

2° *Pentru orice punct $c \in [a, b)$ au loc egalitățile*

$$\begin{aligned} v_f(c+0) &= v_f(c) + |f(c+0) - f(c)|, \\ \bar{v}_f(c+0) &= \bar{v}_f(c) - |f(c+0) - f(c)|. \end{aligned}$$

Demonstrație. Stabilim doar prima egalitate de la 1° (celelalte egalități se dovedesc analog). Pentru orice $x \in (a, c)$ avem

$$v_f(c) = \bigvee_a^c (f) = \bigvee_a^x (f) + \bigvee_x^c (f) \geq \bigvee_a^x (f) + |f(c) - f(x)|,$$

deci

$$v_f(c) \geq v_f(x) + |f(c) - f(x)|.$$

Făcând $x \nearrow c$, obținem

$$v_f(c) - |f(c) - f(c-0)| \geq v_f(c-0). \tag{6}$$

Pentru a demonstra și inegalitatea contrară, fie $\varepsilon > 0$ arbitrar. Atunci:

- există un $\delta_1 > 0$ așa încât pentru orice $x \in [a, c)$ cu $c - x < \delta_1$ să avem
$$|f(x) - f(c-0)| < \varepsilon;$$
- există un $\delta_2 > 0$ așa încât pentru orice $x \in [a, c)$ cu $c - x < \delta_2$ să avem
$$|v_f(x) - v_f(c-0)| < \varepsilon;$$
- există o diviziune $\Delta_0 \in \operatorname{Div}[a, c]$ așa încât
$$v_f(c) = \bigvee_a^c (f) < V(f, \Delta_0) + \varepsilon.$$

Alegem o diviziune $\Delta := (x_0, x_1, \ldots, x_k)$ a intervalului $[a, c]$ cu proprietatea că $\Delta_0 \subseteq \Delta$ și $c - x_{k-1} < \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Avem

$$\begin{aligned} v_f(c) &< \varepsilon + V(f, \Delta_0) \leq \varepsilon + V(f, \Delta) \\ &= \varepsilon + \sum_{j=1}^{k-1} |f(x_j) - f(x_{j-1})| + |f(c) - f(x_{k-1})| \\ &\leq \varepsilon + \bigvee_a^{x_{k-1}} (f) + |f(c) - f(c-0)| + |f(c-0) - f(x_{k-1})| \\ &< 2\varepsilon + v_f(x_{k-1}) + |f(c) - f(c-0)|. \end{aligned}$$

Intrucât $v_f(x_{k-1}) < \varepsilon + v_f(c-0)$, deducem că

$$v_f(c) < 3\varepsilon + v_f(c-0) + |f(c) - f(c-0)|.$$

Făcând $\varepsilon \searrow 0$, obținem

$$v_f(c) - |f(c) - f(c-0)| \leq v_f(c-0). \tag{7}$$

Din (6) și (7) rezultă validitatea primei egalități de la 1°. $\square$

4.2.9 Consecință. *Fiind date o funcție $f \in BV[a,b]$ și un punct $c \in [a,b]$, următoarele afirmații sunt echivalente:*
1° *Funcția f este continuă în c.*
2° *Funcția v_f este continuă în c.*
3° *Funcția $\bar{v}_f$ este continuă în c.*

4.2.10 Teoremă (o formulă pentru variația totală)**.** *Dacă $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ este o funcție de clasă C^1, atunci următoarele afirmații sunt adevărate:*
1° *f este cu variație mărginită.*
2° *Funcția v_f este de clasă C^1 și are loc egalitatea*

$$v_f'(x) = \|f'(x)\| \quad \textit{oricare ar fi } x \in [a,b]. \tag{8}$$

3° *Are loc egalitatea*

$$\bigvee_a^b(f) = \int_a^b \|f'(x)\| dx.$$

Demonstrație. 1° Intrucât funcția $\forall\ x \in [a,b] \ \mapsto \ \|f'(x)\| \in \mathbb{R}$ este continuă, teorema lui Weierstrass asigură existența unui $\alpha \geq 0$ în așa fel încât să avem $\|f'(x)\| \leq \alpha$ pentru orice $x \in [a,b]$. Din teorema de medie pentru funcții vectoriale de variabilă reală rezultă apoi că

$$\|f(x) - f(x')\| \leq \alpha|x - x'| \quad \text{oricare ar fi } x, x' \in [a,b],$$

deci f este funcție Lipschitz. Exemplul 4.1.2 b garantează acum că f este cu variație mărginită.

2° Fixăm un punct $x_0 \in [a,b)$ și dovedim că v_f este derivabilă la dreapta în x_0. Pentru orice $x \in (x_0, b]$ există (conform teoremei lui Weierstrass) un punct $c_x \in [x_0, x]$ în așa fel încât

$$\|f'(c_x)\| = \max_{u \in [x_0,x]} \|f'(u)\|.$$

Fie apoi $\Delta := (x_0, x_1, \ldots, x_k) \in \operatorname{Div}[x_0, x]$. Aplicând teorema de medie pentru funcții vectoriale de variabilă reală, deducem că pentru fiecare $j \in \{1, \ldots, k\}$ există un punct $c_j \in (x_{j-1}, x_j)$ astfel ca

$$\|f(x_j) - f(x_{j-1})\| \leq (x_j - x_{j-1})\|f'(c_j)\|,$$

deci

$$\|f(x_j) - f(x_{j-1})\| \leq (x_j - x_{j-1})\|f'(c_x)\|.$$

Sumând aceste inegalități pentru $j = 1, \ldots, k$ conchidem că

$$V(f, \Delta) \leq (x - x_0)\|f'(c_x)\| \quad \text{oricare ar fi } \Delta \in \operatorname{Div}[x_0, x].$$

Drept urmare, avem

$$\bigvee_{x_0}^{x}(f) \leq (x - x_0)\|f'(c_x)\|. \tag{9}$$

Pe de altă parte, avem și

$$\|f(x) - f(x_0)\| \leq \bigvee_{x_0}^{x}(f). \tag{10}$$

Din (9) și (10), ținând seama că $\bigvee_{x_0}^{x}(f) = v_f(x) - v_f(x_0)$, deducem că

$$\left\| \frac{1}{x - x_0}\big[f(x) - f(x_0)\big] \right\| \leq \frac{v_f(x) - v_f(x_0)}{x - x_0} \leq \|f'(c_x)\|.$$

Făcând $x \searrow x_0$, în baza continuității lui f' obținem

$$\lim_{x \searrow x_0} \frac{v_f(x) - v_f(x_0)}{x - x_0} = \|f'(x_0)\|,$$

deci v_f este derivabilă la dreapta în x_0.

Analog se demonstrează că pentru orice $x_0 \in (a, b]$ există limita

$$\lim_{x \nearrow x_0} \frac{v_f(x) - v_f(x_0)}{x - x_0} = \|f'(x_0)\|,$$

deci v_f este derivabilă la stânga în x_0. In concluzie, pentru orice $x_0 \in [a, b]$ funcția v_f este derivabilă în x_0 și $v_f'(x_0) = \|f'(x_0)\|$.

3° Avem $\displaystyle\bigvee_{a}^{b}(f) = v_f(b) - v_f(a) = \int_a^b v_f'(x)dx = \int_a^b \|f'(x)\|dx.$ □

In cazul particular $n = 1$ se poate stabili un rezultat mai bun decât cel din teorema 4.2.10.

4.2.11 Teoremă. *Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este o funcție derivabilă pe $[a, b]$, iar $f' \in R[a, b]$, atunci $f \in BV[a, b]$ și*

$$\bigvee_a^b (f) = \int_a^b |f'(x)| dx.$$

Demonstrație. Deoarece $f' \in R[a, b]$, rezultă că f' este mărginită. Deci f este o funcție Lipschitz și prin urmare $f \in BV[a, b]$ (a se vedea exemplul 4.1.2 b). Notăm $V := \bigvee_a^b (f)$ și $I := \int_a^b |f'(x)| dx$. Pentru a dovedi că $V = I$, fie $\varepsilon > 0$ un număr real arbitrar. Atunci:

• există o diviziune $\Delta_0 \in \mathrm{Div}\,[a, b]$ astfel ca $V - \varepsilon < V(f, \Delta_0) \leq V$;

• există un $\delta > 0$ așa încât pentru orice $\Delta \in \mathrm{Div}\,[a, b]$ cu $\|\Delta\| < \delta$ și orice $\xi \in P(\Delta)$ să avem $\big|\sigma(|f'|, \Delta, \xi) - I\big| < \varepsilon$.

Alegem o diviziune $\Delta := (x_0, x_1, \ldots, x_k) \in \mathrm{Div}\,[a, b]$ în așa fel încât $\Delta_0 \subseteq \Delta$ și $\|\Delta\| < \delta$. Avem

$$V - \varepsilon < V(f, \Delta_0) \leq V(f, \Delta) \leq V < V + \varepsilon,$$

deci

$$|V - V(f, \Delta)| < \varepsilon.$$

Pe de altă parte, din teorema creșterilor finite rezultă că pentru fiecare indice $j \in \{1, \ldots, k\}$ există un punct $c_j \in (x_{j-1}, x_j)$ astfel ca

$$f(x_j) - f(x_{j-1}) = f'(c_j)(x_j - x_{j-1}).$$

Notând $\xi := (c_1, \ldots, c_k)$, avem $\xi \in P(\Delta)$ și

$$\begin{aligned} V(f, \Delta) &= \sum_{j=1}^k |f(x_j) - f(x_{j-1})| = \sum_{j=1}^k |f'(c_j)|(x_j - x_{j-1}) \\ &= \sigma(|f'|, \Delta, \xi). \end{aligned}$$

Ținând seama de această egalitate, avem

$$\begin{aligned} |V - I| &= \big|V - V(f, \Delta) + \sigma(|f'|, \Delta, \xi) - I\big| \\ &\leq \big|V - V(f, \Delta)\big| + \big|\sigma(|f'|, \Delta, \xi) - I\big| \\ &< 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Făcând $\varepsilon \searrow 0$, deducem că $V = I$. $\square$

4.3 Integrabilitatea Riemann-Stieltjes în raport cu o funcție cu variație mărginită

4.3.1 Teoremă. *Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este o funcție continuă, iar $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ este o funcție cu variație mărginită, atunci $f \in RS_g[a, b]$ și are loc inegalitatea*

$$\left| \int_a^b f dg \right| \leq \|f\|_\infty \bigvee_a^b (g).$$

Demonstrație. Conform teoremei de descompunere a lui Jordan, există două funcții crescătoare $g_1, g_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ astfel ca $g = g_1 - g_2$. Deoarece orice funcție continuă este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu una monotonă, avem $f \in RS_{g_1}[a, b]$ și $f \in RS_{g_2}[a, b]$. În baza liniarității integralei Riemann-Stieltjes în raport cu a doua funcție, deducem că f este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu $g = g_1 - g_2$ pe intervalul $[a, b]$.

Se constată ușor că

$$\left| \sigma(f, g, \Delta, \xi) \right| \leq \|f\|_\infty \bigvee_a^b (g) \quad \text{pentru orice } \Delta \in \operatorname{Div}[a, b] \text{ și orice } \xi \in P(\Delta).$$

Această inegalitate împreună cu criteriul lui Heine de integrabilitate Riemann-Stieltjes asigură validitatea inegalității din enunț. □

4.3.2 Observație. Fie $F[a, b]$ mulțimea tuturor funcțiilor de la $[a, b]$ în $\mathbb{R}$ și fie $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ submulțimi nevide ale lui $F[a, b]$. Se spune că *mulțimile $\mathcal{A}$ și $\mathcal{B}$ sunt adjuncte în raport cu integrala Riemann-Stieltjes* și se notează acest fapt prin $\mathcal{A} * \mathcal{B}$ $(R - S)$ dacă sunt îndeplinite următoarele condiții:

(i) pentru orice $f \in \mathcal{A}$ și orice $g \in \mathcal{B}$ avem $f \in RS_g[a, b]$;

(ii) dacă $f \in F[a, b]$ are proprietatea $f \in RS_g[a, b]$ oricare ar fi $g \in \mathcal{B}$, atunci $f \in \mathcal{A}$;

(iii) dacă $g \in F[a, b]$ are proprietatea $f \in RS_g[a, b]$ oricare ar fi $f \in \mathcal{A}$, atunci $g \in \mathcal{B}$.

Notând

$$C[a, b] := \{f : [a, b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ este continuă pe } [a, b]\},$$

se poate demonstra că

$$C[a, b] * BV[a, b] \ (R - S).$$

4.3.3 Lemă. *Fie funcțiile $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ și fie $c \in (a,b)$ astfel încât să fie îndeplinite următoarele condiții:*

(i) *f este continuă pe $[a,b]$;*

(ii) *există un $r > 0$ în așa fel încât $[c-r, c+r] \subseteq [a,b]$, iar restricția lui g la $[c-r, c+r]$ este cu variație mărginită.*

Atunci

$$\lim_{\delta \searrow 0} \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)dg(x) = f(c)\big[g(c+0) - g(c-0)\big].$$

Demonstrație. Fie $g_1, g_2 : [c-r, c+r] \to \mathbb{R}$ funcțiile definite prin

$$g_1(x) := \begin{cases} g(c-0) & \text{dacă } c-r \leq x < c \\ g(c) & \text{dacă } x = c \\ g(c+0) & \text{dacă } c < x \leq c+r \end{cases}$$

și respectiv

$$g_2(x) := g(x) - g_1(x) = \begin{cases} g(x) - g(c-0) & \text{dacă } c-r \leq x < c \\ g(x) - g(c) & \text{dacă } x = c \\ g(x) - g(c+0) & \text{dacă } c < x \leq c+r. \end{cases}$$

Evident, g_1 este cu variație mărginită pe $[c-r, c+r]$, deci și g_2 este cu variație mărginită pe acest interval. In plus, g_2 este continuă în c. Vom arăta în continuare că

$$\lim_{\delta \searrow 0} \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)dg_2(x) = 0. \tag{1}$$

Să observăm mai întâi că pentru orice $\delta \in (0, r]$, funcția f este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu g_2 pe $[c-\delta, c+\delta]$, deci limita (1) are sens. Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar. Intrucât g_2 este continuă în c, consecința 4.2.9 garantează că și funcția $v : [c-r, c+r] \to \mathbb{R}$, definită prin $v(t) := v_{g_2}(t) = \bigvee_{c-r}^{t} (g_2)$, este continuă în c. Drept urmare, există un $\delta_0 \in (0, r]$ așa încât

$$|v(c+\delta_0) - v(c-\delta_0)| = \bigvee_{c-\delta_0}^{c+\delta_0} (g_2) < \frac{\varepsilon}{M+1},$$

unde $M := \max_{x \in [c-r, c+r]} |f(x)|$. Atunci oricare ar fi $\delta \in (0, \delta_0]$ avem

(2) $\big|\sigma(f, g_2, \Delta, \xi)\big| < \varepsilon$ pentru orice $\Delta \in \operatorname{Div}[c-\delta, c+\delta]$ și orice $\xi \in P(\Delta)$.

In adevăr, dacă $\Delta := (x_0, x_1, \ldots, x_k)$ este o diviziune oarecare a lui $[c-\delta, c+\delta]$ și $\xi := (c_1, \ldots, c_k) \in P(\Delta)$, atunci avem

$$\begin{aligned} \left|\sigma(f, g_2, \Delta, \xi)\right| &\leq \sum_{j=1}^{k} |f(c_j)|\,|g_2(x_j) - g_2(x_{j-1})| \leq MV(g_2, \Delta) \\ &\leq M \bigvee_{c-\delta}^{c+\delta}(g_2) \leq M \bigvee_{c-\delta_0}^{c+\delta_0}(g_2) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Așadar (2) are loc. Din (2) rezultă că

$$\left|\int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)dg_2(x)\right| \leq \varepsilon \quad \text{oricare ar fi } \delta \in (0, \delta_0].$$

Cum $\varepsilon > 0$ a fost arbitrar, aceasta probează validitatea lui (1).

Pentru orice $\delta \in (0, r]$ funcția continuă f este integrabilă Riemann-Stieltjes pe $[c-\delta, c+\delta]$ în raport cu funcția etajată g_1 și

$$\int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)dg_1(x) = f(c)\big[g(c+0) - g(c-0)\big].$$

Ținând seama că $g = g_1 + g_2$, rezultă că pentru orice $\delta \in (0, r]$ avem

$$\begin{aligned} \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)dg(x) &= \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)dg_1(x) + \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)dg_2(x) \\ &= f(c)\big[g(c+0) - g(c-0)\big] + \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)dg_2(x). \end{aligned}$$

Din (1) deducem acum că egalitatea din enunț are loc. □

4.3.4 Lemă. *Fiind date două funcții $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, dintre care f este continuă, următoarele afirmații sunt adevărate:*

1° *Dacă există $r \in (0, b-a]$ așa încât restricția lui g la intervalul $[a, a+r]$ să fie cu variație mărginită, atunci*

$$\lim_{\delta \searrow 0} \int_{a}^{a+\delta} f(x)dg(x) = f(a)\big[g(a+0) - g(a)\big].$$

2° *Dacă există $r \in (0, b-a]$ așa încât restricția lui g la intervalul $[b-r, b]$ să fie cu variație mărginită, atunci*

$$\lim_{\delta \searrow 0} \int_{b-\delta}^{b} f(x)dg(x) = f(b)\big[g(b) - g(b-0)\big].$$

Demonstrație. Este asemănătoare cu demonstrația lemei precedente. □

4.3.5 Teoremă. *Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă și $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea că există o diviziune $\Delta = (x_0, x_1, \ldots, x_k)$ a lui $[a,b]$ astfel încât să fie îndeplinite următoarele condiții:*

(i) *există $r_0, r_k \in (0, b-a]$ așa încât restricțiile lui g la intervalele $[a, a+r_0]$ și $[b-r_k, b]$ să fie cu variație mărginită;*

(ii) *pentru fiecare $j \in \{1, \ldots, k-1\}$ există $r_j > 0$ în așa fel încât să avem $[x_j - r_j, x_j + r_j] \subseteq [a,b]$, iar restricția lui g la $[x_j - r_j, x_j + r_j]$ să fie cu variație mărginită;*

(iii) *pentru fiecare $j \in \{1, \ldots, k\}$ funcția g este derivabilă pe (x_{j-1}, x_j), derivata sa g' este local integrabilă Riemann pe (x_{j-1}, x_j), iar integrala improprie $I_j := \displaystyle\int_{x_{j-1}+0}^{x_j-0} f(x)g'(x)dx$ este convergentă.*

Atunci f este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu g pe $[a,b]$ și

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dg(x) &= \sum_{j=1}^{k} I_j + f(a)\big[g(a+0) - g(a)\big] \\ &\quad + \sum_{j=1}^{k-1} f(x_j)\big[g(x_j+0) - g(x_j-0)\big] \\ &\quad + f(b)\big[g(b) - g(b-0)\big].\end{aligned}$$

Demonstrație. Fie

$$\delta_0 := \min\left\{r_0, r_1, \ldots, r_k, \frac{x_1 - x_0}{2}, \ldots, \frac{x_k - x_{k-1}}{2}\right\}.$$

Atunci $\delta_0 > 0$ și pentru orice $\delta \in (0, \delta_0)$ funcția f este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu g pe fiecare dintre intervalele următoare:

$$(*) \quad \left\{\begin{array}{l}[x_0, x_0+\delta],\ [x_0+\delta, x_1-\delta],\ [x_1-\delta, x_1+\delta],\ [x_1+\delta, x_2-\delta],\ \ldots, \\ \\ [x_{k-1}+\delta, x_k-\delta],\ [x_k-\delta, x_k].\end{array}\right.$$

Din ipotezele (i), (ii) și (iii) rezultă că g este mărginită pe fiecare dintre intervalele $(*)$, deci este mărginită pe $[a,b]$. Cum f este continuă pe $[a,b]$, teorema referitoare la aditivitatea integralei Riemann-Stieltjes față de interval asigură integrabilitatea Riemann-Stieltjes a lui f în raport cu g pe $[a,b]$. In plus, avem

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dg(x) &= \sum_{j=1}^{k}\int_{x_{j-1}+\delta}^{x_j-\delta} f(x)dg(x) + \int_{x_0}^{x_0+\delta} f(x)dg(x)\\ &\quad + \sum_{j=1}^{k-1}\int_{x_j-\delta}^{x_j+\delta} f(x)dg(x) + \int_{x_k-\delta}^{x_k} f(x)dg(x)\\ &= \sum_{j=1}^{k}\int_{x_{j-1}+\delta}^{x_j-\delta} f(x)g'(x)dx + \int_{a}^{a+\delta} f(x)dg(x)\\ &\quad + \sum_{j=1}^{k-1}\int_{x_j-\delta}^{x_j+\delta} f(x)dg(x) + \int_{b-\delta}^{b} f(x)dg(x).\end{aligned}$$

Făcând $\delta \searrow 0$ și ținând seama de (iii) precum și de lemele 4.3.3 și 4.3.4, obținem egalitatea din enunț. □

4.3.6 Observație. Condițiile (i) și (ii) din teorema 4.3.5 sunt îndeplinite, de exemplu, dacă sunt îndeplinite următoarele condiții:

(i') există $r_0, r_k \in (0, b-a]$ așa încât g să fie monotonă atât pe $(a, a+r_0]$ cât și pe $[b-r_k, b)$;

(ii') pentru fiecare $j \in \{1,\ldots,k-1\}$ există $r_j > 0$ în așa fel încât să avem $[x_j - r_j, x_j + r_j] \subseteq [a,b]$, iar g să fie monotonă atât pe $[x_j - r_j, x_j)$ cât și pe $(x_j, x_j + r_j]$.

4.4 Probleme

1. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcția definită prin $f(x) = \arcsin \dfrac{2x}{1+x^2}$. Să se demonstreze că pentru orice $a > 0$ restricția lui f la $[-a,a]$ este cu variație mărginită și să se calculeze $\lim\limits_{a\to\infty} \bigvee\limits_{-a}^{a}(f)$.

2. Să se demonstreze că funcția $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = \begin{cases} x\cos\frac{\pi}{x} & \text{dacă } x \in (0,1]\\ 0 & \text{dacă } x = 0,\end{cases}$$

este continuă dar nu este cu variație mărginită.

3. Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ funcția definită prin

$$f(x) = \begin{cases} (-1)^{\left[\frac{1}{x}\right]} \cdot \frac{1}{\left[\frac{1}{x}\right]} & \text{dacă } x \in (0,1] \\ 0 & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$

a) Să se traseze graficul lui f.

b) Fiind dat $n \in \mathbb{N}$, să se determine $V(f, \Delta_n)$, unde

$$\Delta_n := \left(0, \frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}, \ldots, \frac{1}{2}, 1\right).$$

c) Este funcția f cu variație mărginită ?

4. Să se demonstreze că funcția lui Riemann $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = \frac{1}{q} \quad \text{dacă } x \in (0,1] \cap \mathbb{Q},\ x = \frac{p}{q},\ p, q \in \mathbb{N},\ (p,q) = 1,$$
$$f(x) = 0 \quad \text{în caz contrar},$$

nu este cu variație mărginită pe $[0,1]$.

5. Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ funcția definită prin

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{\pi}{x} & \text{dacă } x \in (0,1] \\ 0 & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$

a) Să se demonstreze că $f \in \mathrm{Lip}\,[0,1]$.

b) Să se calculezeze $\bigvee\limits_0^1 (f)$

6. Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcție mărginită, monotonă pe (a,b). Să se demonstreze că f este cu variație mărginită și că

$$\bigvee_a^b (f) = \big|f(a+0) - f(a)\big| + \big|f(b-0) - f(a+0)\big| + \big|f(b) - f(b-0)\big|.$$

7. Să se demonstreze că dacă $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ este o funcție Lipschitz, atunci și funcția variației lui f, $v_f : [a,b] \to \mathbb{R}$, definită prin

$$v_f(a) = 0, \quad v_f(x) = \bigvee_a^x (f) \quad \text{oricare ar fi } x \in (a,b],$$

este tot o funcție Lipschitz și $\mathrm{lip}\,(v_f) \le \mathrm{lip}\,(f)$.

8. Fie $a \in \mathbb{R}$ și $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ o funcție. Să se demonstreze că dacă există și este finită limita $\lim\limits_{b\to\infty} \bigvee\limits_a^b(f)$, atunci există și este finită și limita $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

9. Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcție integrabilă Riemann și $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ funcția definită prin $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$. Să se demonstreze că F este cu variație mărginită pe $[a, b]$ și că $\bigvee\limits_a^b(F) = \displaystyle\int_a^b |f(t)|dt$.

10. Să se demonstreze că dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este o funcție cu variație mărginită, atunci și funcția $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, definită prin

$$g(a) = f(a), \quad g(x) = \frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt \quad \text{oricare ar fi } x \in (a, b],$$

este cu variație mărginită.

11. a) Dați exemplu de funcție continuă $f : [0, 1) \to (0, 1)$ care să fie surjectivă.

b) Demonstrați că dacă $f : [0, 1) \to (0, 1)$ este o funcţie continuă surjectivă, atunci pentru orice $a \in [0, 1)$ are loc egalitatea $f((a, 1)) = (0, 1)$.

c) Demonstrați că dacă $f : [0, 1) \to (0, 1)$ este o funcţie continuă surjectivă, atunci pentru orice $b \in \mathbb{R}$, prelungirea lui f la $[0, 1]$, $f_b : [0, 1] \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f_b(x) = \begin{cases} f(x) & \text{dacă } x \in [0, 1) \\ b & \text{dacă } x = 1, \end{cases}$$

nu este cu variație mărginită.

E. Păltănea

Capitolul 5

Integrale curbilinii

5.1 Drumuri și curbe

5.1.1 Definiție (drumuri)**.** Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a < b$ și fie $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ o funcție. Se spune că γ este un *drum* în $\mathbb{R}^n$ dacă funcția γ este continuă pe $[a, b]$. Submulțimea lui $\mathbb{R}^n$, definită prin

$$I(\gamma) := \{\gamma(t) \mid t \in [a, b]\},$$

se numește *imaginea drumului* γ.

5.1.2 Exemple. 1° Fie $r > 0$ și $k \in \mathbb{N}$. Atunci $\gamma_k : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$,

$$\gamma_k(t) := (r \cos kt, r \sin kt), \qquad t \in [0, 2\pi],$$

este drum în $\mathbb{R}^2$. Avem $I(\gamma_k) = C$, unde C este cercul

$$C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = r^2\}.$$

Deci $I(\gamma_1) = I(\gamma_2)$, cu toate că $\gamma_1 \neq \gamma_2$ (în cazul drumului γ_2 cercul C este parcurs de două ori).

2° Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă. Atunci și funcția $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, definită prin $\gamma(t) := (t, f(t))$ este continuă, deci este un drum în $\mathbb{R}^2$. Se spune că *drumul* γ *este dat în formă explicită*, iar $y = f(x)$ se numește *ecuația explicită a drumului* γ. Avem $I(\gamma) = G_f$, unde s-a notat cu G_f graficul funcției f.

5.1.3 Definiție (lungimea unui drum)**.** Fie $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ un drum și fie $\Delta := (t_0, t_1, \ldots, t_k) \in \mathrm{Div}\,[a, b]$. Numărul real, definit prin

$$V(\gamma, \Delta) := \sum_{j=1}^{k} \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\|,$$

se numește *variația drumului* γ *relativă la diviziunea* Δ (a se vedea și definiția 4.1.1). Notăm

$$\ell(\gamma) := \bigvee_a^b(\gamma) = \sup\{V(\gamma, \Delta) \mid \Delta \in \mathrm{Div}\,[a, b]\}.$$

Atunci $\ell(\gamma) \in [0, \infty]$, iar $\ell(\gamma)$ se numește *variația totală a* (sau *lungimea*) *drumului* γ.

5.1.4 Definiție (clase speciale de drumuri)**.** Un drum $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ se numește:

a) *închis*, dacă $\gamma(a) = \gamma(b)$;

b) *simplu*, dacă restricția $\gamma\big|_{(a,b)}$ este injectivă;

c) *rectificabil*, dacă $\ell(\gamma) < \infty$;

d) *de clasă* C^1, dacă funcția γ este de clasă C^1 pe $[a, b]$;

e) *de clasă* C^1 *pe porțiuni*, dacă există o diviziune $\Delta := (a_0, a_1, \ldots, a_k)$ a intervalului $[a, b]$, așa încât restricția $\gamma\big|_{[a_{j-1}, a_j]}$ să fie de clasă C^1 oricare ar fi $j \in \{1, \ldots, k\}$;

f) *neted*, dacă γ este de clasă C^1 și $\|\gamma'(t)\| \neq 0$ oricare ar fi $t \in [a, b]$.

5.1.5 Definiție. Două drumuri $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ și $\rho : [c, d] \to \mathbb{R}^n$ se numesc:

a) *de extremități comune*, dacă $\gamma(a) = \rho(c)$ și $\gamma(b) = \rho(d)$;

b) *echivalente*, dacă există un difeomorfism $\varphi : [a, b] \to [c, d]$, de clasă C^1 și cu proprietatea că $\gamma = \rho \circ \varphi$. Fiind injectivă și continuă, funcția φ este strict monotonă pe $[a, b]$. In cazul când φ este strict crescătoare, drumurile γ și ρ se numesc *direct echivalente*, iar în cazul când φ este strict descrescătoare, drumurile γ și ρ se numesc *invers echivalente*. Vom scrie $\gamma \sim \rho$ dacă γ și ρ sunt echivalente și respectiv $\gamma \approx \rho$ dacă γ și ρ sunt direct echivalente;

c) *juxtapozabile*, dacă $\gamma(b) = \rho(c)$. In acest caz, putem considera funcția $\gamma \vee \rho : [a, b + d - c] \to \mathbb{R}^n$, definită prin

$$(\gamma \vee \rho)(t) := \begin{cases} \gamma(t) & \text{dacă } t \in [a, b] \\ \rho(t - b + c) & \text{dacă } t \in [b, b + d - c]. \end{cases}$$

Fiind continuă, ea este un drum în $\mathbb{R}^n$, numit *juxtapunerea* (sau *reuniunea*) *drumurilor* γ *și* ρ.

5.1.6 Exemplu (opusul unui drum)**.** Fie $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ un drum. Atunci funcția $\bar{\gamma} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, definită prin $\bar{\gamma}(t) := \gamma(a + b - t)$, este de asemenea un drum, numit *opusul drumului* γ (a se vedea figura 5.1.1). Evident, drumurile

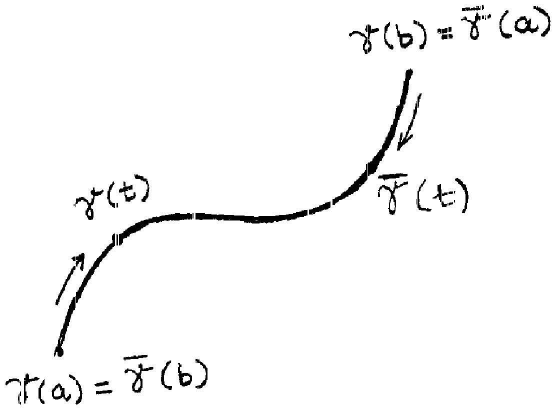


Figura 5.1.1: Opusul unui drum.

γ și $\bar{\gamma}$ sunt invers echivalente. Se observă de asemenea că $I(\gamma) = I(\bar{\gamma})$, că drumurile γ și $\bar{\gamma}$ sunt juxtapozabile și că $\gamma \vee \bar{\gamma}$ este un drum închis.

5.1.7 Definiţie (curbe și curbe orientate)**.** Notăm cu $\mathcal{D}^n$ mulțimea tuturor drumurilor din $\mathbb{R}^n$ și pe $\mathcal{D}^n$ considerăm relațiile binare $\sim$ (de echivalență) și respectiv $\approx$ (de direct echivalență). Se constată imediat că ambele relații sunt reflexive, simetrice și tranzitive, deci sunt relații de echivalență pe $\mathcal{D}^n$. O clasă de echivalență în $\mathcal{D}^n$ în raport cu relația $\sim$ se numește *curbă* (în sens Jordan) în $\mathbb{R}^n$. O clasă de echivalență în $\mathcal{D}^n$ în raport cu relația $\approx$ se numește *curbă orientată* (în sens Jordan) în $\mathbb{R}^n$. Dacă Γ este o curbă (orientată), iar $\gamma \in \Gamma$, atunci se spune că Γ este *curba (orientată) asociată drumului* γ, sau că γ este un *drum reprezentativ pentru curba (orientată)* Γ.

5.1.8 Propoziţie. *Fiind date două drumuri echivalente* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *și* $\rho : [c, d] \to \mathbb{R}^n$*, următoarele afirmații sunt adevărate:*

1° *Are loc egalitatea* $I(\gamma) = I(\rho)$.

2° *Dacă* γ *este închis, atunci și* ρ *este închis.*

3° *Dacă* γ *este simplu, atunci și* ρ *este simplu.*

4° *Dacă* γ *este de clasă* C^1 *(respectiv de clasă* C^1 *pe porțiuni), atunci și* ρ *este de clasă* C^1 *(respectiv de clasă* C^1 *pe porțiuni).*

5° *Dacă* γ *este neted, atunci și* ρ *este neted.*

6° *Dacă* γ *este rectificabil, atunci și* ρ *este rectificabil și are loc egalitatea* $\ell(\gamma) = \ell(\rho)$.

Demonstrație. Fie $\varphi : [a,b] \to [c,d]$ un difeomorfism de clasă C^1 cu proprietatea că $\gamma = \rho \circ \varphi$. Atunci $\psi := \varphi^{-1} : [c,d] \to [a,b]$ este de asemenea difeomorfism de clasă C^1 și $\rho = \gamma \circ \psi$.

1° Avem

$$I(\gamma) = \gamma\big([a,b]\big) = \gamma\big(\psi\big([c,d]\big)\big) = \big(\gamma \circ \psi\big)\big([c,d]\big) = \rho\big([c,d]\big) = I(\rho).$$

2° Avem $\rho(c) = \gamma\big(\varphi^{-1}(c)\big)$ și $\rho(d) = \gamma\big(\varphi^{-1}(d)\big)$. Pe de altă parte, avem $\varphi^{-1}(c) = a$ și $\varphi^{-1}(d) = b$ (în cazul când φ este strict crescătoare), respectiv $\varphi^{-1}(c) = b$ și $\varphi^{-1}(d) = a$ (în cazul când φ este strict descrescătoare). Cum $\gamma(a) = \gamma(b)$, deducem în ambele situații că $\rho(c) = \rho(d)$, deci ρ este drum închis.

3° Avem $\psi\big((c,d)\big) = (a,b)$ și $\rho\big|_{(c,d)} = \gamma \circ \psi\big|_{(c,d)}$. Cum $\gamma\big|_{(a,b)}$ este injectivă, rezultă de aici că funcția $\rho\big|_{(c,d)}$ este injectivă, fiind compusa a două funcții injective. Deci ρ este drum simplu.

4° Avem

$$\rho'(t) = \psi'(t)\,\gamma'(\psi(t)) \quad \text{oricare ar fi } t \in [c,d]. \tag{1}$$

Din această egalitate rezultă că dacă γ este de clasă C^1, atunci și ρ este de clasă C^1. Pe de altă parte, dacă γ este de clasă C^1 pe porțiuni, atunci există $\Delta := (a_0, a_1, \ldots, a_k) \in \operatorname{Div}[a,b]$ așa încât $\gamma\big|_{[a_{j-1},a_j]}$ este de clasă C^1 oricare ar fi $j \in \{1, \ldots, k\}$. Punctele $\varphi(a_0), \varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_k) \in [c,d]$ determină o diviziune $\Delta^* := (c_0, c_1, \ldots, c_k)$ a lui $[c,d]$. Din (1) rezultă imediat că $\rho\big|_{[c_{j-1},c_j]}$ este de clasă C^1 oricare ar fi $j \in \{1, \ldots, k\}$, deci ρ este de clasă C^1 pe porțiuni.

5° Rezultă pe baza lui 4°, ținând seama că $\psi'(t) \neq 0$ oricare ar fi $t \in [c,d]$.

6° Fie $\Delta := (t_0, t_1, \ldots, t_k)$ o diviziune arbitrară a lui $[a,b]$. Punctele $\varphi(t_0), \varphi(t_1), \ldots, \varphi(t_k) \in [c,d]$ determină o diviziune Δ^* a lui $[c,d]$. Avem

$$\begin{aligned} V(\gamma, \Delta) &= \sum_{j=1}^{k} \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\| = \sum_{j=1}^{k} \|\rho(\varphi(t_j)) - \rho(\varphi(t_{j-1}))\| \\ &= V(\rho, \Delta^*) \leq \bigvee_{c}^{d}(\rho). \end{aligned}$$

Așadar, are loc inegalitatea

$$V(\gamma, \Delta) \leq \bigvee_c^d(\rho) \quad \text{oricare ar fi } \Delta \in \text{Div}\,[a, b],$$

de unde $\bigvee\limits_a^b(\gamma) \leq \bigvee\limits_c^d(\rho)$. Analog se stabilește și inegalitatea contrară, deci $\bigvee\limits_a^b(\gamma) = \bigvee\limits_c^d(\rho)$, de unde rezultă afirmațiile de la 6°. □

5.1.9 Definiție. O curbă Γ se numește:

a) *închisă*, dacă există un drum închis $\gamma \in \Gamma$;

b) *simplă*, dacă există un drum simplu $\gamma \in \Gamma$;

c) *rectificabilă*, dacă există un drum rectificabil $\gamma \in \Gamma$. In acest caz $\ell(\gamma)$ se numește *lungimea curbei* Γ și se notează cu $\ell(\Gamma)$;

d) *de clasă* C^1 (respectiv *de clasă* C^1 *pe porțiuni*, respectiv *netedă*) dacă există un drum de clasă C^1 (respectiv de clasă C^1 pe porțiuni, respectiv neted) $\gamma \in \Gamma$.

Mulțimea $I(\Gamma) := I(\gamma)$, unde $\gamma \in \Gamma$, se numește *imaginea curbei* Γ.

5.1.10 Teoremă. *Orice drum de clasă C^1 pe porțiuni $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ este rectificabil și are loc egalitatea*

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

Demonstrație. Se aplică teoremele 4.2.4 și 4.2.10. □

5.2 Integrala de primul tip de-a lungul unui drum

5.2.1 Definiție (integrala de primul tip de-a lungul unui drum)**.** Considerăm un drum rectificabil $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$. Fie $s := v_\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}$ funcția variației lui γ, $s(t) := \bigvee\limits_a^t(\gamma)$. In acest context, s se numește *funcția lungime a drumului* γ. Fie apoi $f : I(\gamma) \to \mathbb{R}$ o funcție de n variabile. Dacă funcția $f \circ \gamma$ este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu s pe $[a, b]$, atunci se spune că f *este integrabilă în raport cu lungimea de-a lungul lui* γ. Numărul real $\int_a^b (f \circ \gamma) ds$

se numește *integrala de primul tip a lui f de-a lungul lui γ* sau *integrala în raport cu lungimea a lui f de-a lungul lui γ* și va fi notată cu

$$\int_\gamma f ds \quad \text{sau cu} \quad \int_\gamma f(x) ds \quad \text{sau cu} \quad \int_\gamma f(x_1, \ldots, x_n) ds.$$

5.2.2 Exemplu. Fie $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ un drum rectificabil și $f : I(\gamma) \to \mathbb{R}$ funcția constantă $f(x) \equiv 1$. Atunci $(f \circ \gamma)(t) = 1$ oricare ar fi $t \in [a, b]$, deci $f \circ \gamma$ este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu s pe $[a, b]$ și

$$\int_\gamma ds = \int_a^b (f \circ \gamma) ds = \int_a^b ds = s(b) - s(a) = \bigvee_a^b (\gamma) = \ell(\gamma).$$

Prin urmare, are loc egalitatea

$$\ell(\gamma) = \int_\gamma ds,$$

adică lungimea unui drum rectificabil se exprimă cu ajutorul unei integrale de primul tip de-a lungul acelui drum.

5.2.3 Teoremă. *Fie $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ un drum rectificabil, fie $f, g : I(\gamma) \to \mathbb{R}$ funcții integrabile de-a lungul lui γ în raport cu lungimea și fie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Atunci funcția $\alpha f + \beta g$ este integrabilă de-a lungul lui γ în raport cu lungimea și are loc egalitatea*

$$\int_\gamma (\alpha f + \beta g) ds = \alpha \int_\gamma f ds + \beta \int_\gamma g ds.$$

Demonstrație. Rezultă din teorema referitoare la liniaritatea în raport cu prima funcție a integralei Riemann-Stieltjes. □

5.2.4 Teoremă. *Fie $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ un drum rectificabil, fie $f : I(\gamma) \to \mathbb{R}$ o funcție continuă și fie $M := \max_{x \in I(\gamma)} |f(x)|$. Atunci f este integrabilă de-a lungul lui γ în raport cu lungimea și are loc inegalitatea*

$$\left| \int_\gamma f ds \right| \leq M \, \ell(\gamma).$$

Demonstrație. Rezultă din teorema 4.3.1. □

5.2.5 Teoremă (reducerea integralelor de primul tip de-a lungul unui drum la integrale Riemann). *Fie* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *un drum de clasă* C^1*, iar* $f : I(\gamma) \to \mathbb{R}$ *o funcție continuă. Atunci* f *este integrabilă în raport cu lungimea de-a lungul lui* γ *și are loc egalitatea*

$$\int_\gamma f ds = \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\,\|\gamma'(t)\|dt.$$

Demonstrație. Ținând seama că f și γ sunt funcții continue, rezultă că și funcția $f \circ \gamma : [a,b] \to \mathbb{R}$ este continuă. Pe de altă parte, conform teoremei 4.2.10, funcția s este de clasă C^1 și $s'(t) = \|\gamma'(t)\|$ oricare ar fi $t \in [a,b]$. Concluzia teoremei este acum o consecință imediată a teoremei de reducere a unei integrale Riemann-Stieltjes la o integrală Riemann. □

5.2.6 Teoremă (independența de parametrizare a integralelor de primul tip de-a lungul unui drum). *Fie* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *și* $\rho : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ *drumuri rectificabile echivalente. Dacă* $f : I(\gamma) \to \mathbb{R}$ *este o funcție integrabilă în raport cu lungimea de-a lungul lui* γ*, atunci* f *este integrabilă în raport cu lungimea și de-a lungul lui* ρ *și are loc egalitatea*

$$\int_\gamma f ds = \int_\rho f ds.$$

In particular, dacă $f : I(\gamma) \to \mathbb{R}$ *este integrabilă în raport cu lungimea de-a lungul lui* γ*, atunci* f *este integrabilă în raport cu lungimea și de-a lungul lui* $\bar{\gamma}$ *și are loc egalitatea*

$$\int_\gamma f ds = \int_{\bar{\gamma}} f ds.$$

Demonstrație. Fără demonstrație. □

5.2.7 Definiție (integrala de primul tip de-a lungul unei curbe). Teorema precedentă ne permite să definim integrala de primul tip a unei funcții de-a lungul unei curbe. Fie Γ o curbă rectificabilă în $\mathbb{R}^n$ și $f : I(\Gamma) \to \mathbb{R}$ o funcție. Dacă există un drum $\gamma \in \Gamma$ în așa fel încât f să fie integrabilă în raport cu lungimea de-a lungul lui γ, atunci se spune că f *este integrabilă în raport cu lungimea de-a lungul curbei* Γ. Numărul real $\displaystyle\int_\gamma f ds$ se numește *integrala de primul tip a lui* f *de-a lungul lui* Γ sau *integrala în raport cu lungimea a lui* f *de-a lungul lui* Γ și va fi notată cu $\displaystyle\int_\Gamma f ds$.

5.2.8 Observație (semnificația fizică a integralei de primul tip de-a lungul unui drum). Considerăm un fir material având forma mulțimii $I(\gamma)$, unde $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ este un drum rectificabil. Presupunem că firul nu este omogen, dar se cunoaște densitatea sa $f(x)$ în fiecare punct $x \in I(\gamma)$. Fie diviziunea $\Delta := (t_0, t_1, \ldots, t_k) \in \operatorname{Div}[a,b]$. Pentru fiecare indice $j \in \{1, \ldots, k\}$ alegem un $c_j \in [t_{j-1}, t_j]$ și considerăm că porțiunea de fir cuprinsă între punctele $\gamma(t_{j-1})$ și $\gamma(t_j)$ are densitatea egală cu $f(\gamma(c_j))$ (a se vedea figura 5.2.1). Cum

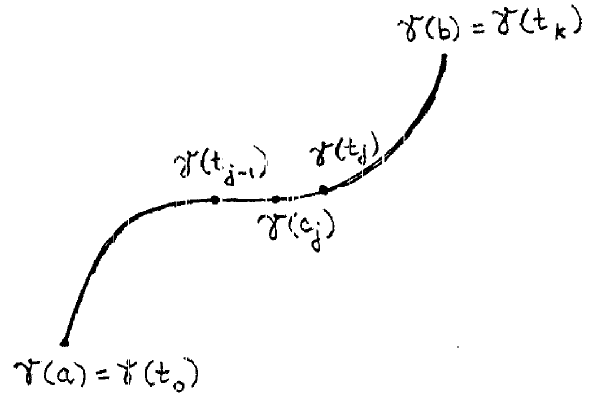


Figura 5.2.1: Semnificația fizică a integralei de primul tip de-a lungul unui drum.

lungimea acestei porțiuni de fir este $s(t_j) - s(t_{j-1})$, masa ei este aproximativ egală cu $f(\gamma(c_j))\big[s(t_j) - s(t_{j-1})\big]$. Drept urmare, masa întregului fir este aproximată de

$$m \approx \sum_{j=1}^{k} f(\gamma(c_j))\big[s(t_j) - s(t_{j-1})\big] = \sigma(f \circ \gamma, s, \Delta, \xi),$$

unde $\xi := (c_1, \ldots, c_k)$. Valoarea exactă a masei firului este

$$m = \int_a^b (f \circ \gamma) ds = \int_\gamma f ds.$$

5.3 Forme diferențiale de gradul întâi

5.3.1 Definiție (forme diferențiale de gradul întâi). Fie A o submulțime deschisă a lui $\mathbb{R}^n$. Se numește *formă diferențială de gradul întâi* în A orice funcție

continuă $f : A \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Considerăm funcțiile $f_1, \dots, f_n : A \to \mathbb{R}$, definite prin
$$f_i(x) := f(x)(e_i), \quad x \in A, \ i = 1, \dots, n.$$
Deoarece pentru orice $x, y \in A$ avem
$$|f_i(x) - f_i(y)| = \big|\big(f(x) - f(y)\big)(e_i)\big| \le \|f(x) - f(y)\|_{L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})}$$
și f este continuă, rezultă imediat că toate funcțiile f_i sunt continue pe A. Fie apoi $dx_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,
$$dx_i(h) := h_i \quad \text{pentru orice } h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n \text{ și orice } i = 1, \dots, n,$$
proiecțiile canonice ale lui $\mathbb{R}^n$ în $\mathbb{R}$. Pentru orice punct x din A și orice $h := (h_1, \dots, h_n)$ din $\mathbb{R}^n$ avem
$$\begin{aligned} f(x)(h) &= f(x)(h_1 e_1 + \cdots + h_n e_n) = h_1 f(x)(e_1) + \cdots + h_n f(x)(e_n) \\ &= f_1(x) dx_1(h) + \cdots + f_n(x) dx_n(h). \end{aligned}$$
Renunțând la a mai menționa argumentul h, putem scrie
$$(1) \qquad f(x) = f_1(x) dx_1 + \cdots + f_n(x) dx_n.$$
Așadar, orice formă diferențială de gradul întâi f în A este de forma (1), cu $f_1, \dots, f_n : A \to \mathbb{R}$ funcții continue, numite *coeficienții* formei f.

5.3.2 Exemplu. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulțime deschisă și fie $F : A \to \mathbb{R}$ o funcție de clasă C^1 pe A. Atunci funcția $dF : A \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ este o formă diferențială de gradul întâi în A. Cum
$$dF(x)(h) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(x)\, dx_i(h)$$
oricare ar fi $h := (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$, rezultă că forma diferențială dF are drept coeficienți funcțiile $f_i : A \to \mathbb{R}$, definite prin
$$(2) \qquad f_i(x) := \frac{\partial F}{\partial x_i}(x), \quad x \in A, \ i = 1, \dots, n.$$

5.3.3 Definiție (forme diferențiale exacte)**.** Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulțime deschisă și fie $f := f_1 dx_1 + \cdots + f_n dx_n$ o formă diferențială de gradul întâi în A. Se spune că f este o *formă diferențială exactă* (sau *primitivabilă*) dacă există o funcție $F : A \to \mathbb{R}$, de clasă C^1 pe A, cu proprietatea că $f = dF$. Funcția F se numește în acest caz *primitivă* pe A a formei diferențiale f și are loc (2).

O mulțime $A \subseteq \mathbb{R}^n$ se numește *conexă* dacă nu există mulțimi deschise $G, H \subseteq \mathbb{R}^n$ în așa fel încât să avem

$$A \subseteq G \cup H, \quad A \cap G \neq \emptyset, \quad A \cap H \neq \emptyset, \quad A \cap G \cap H = \emptyset.$$

O submulțime deschisă și conexă a lui $\mathbb{R}^n$ se numește *domeniu* în $\mathbb{R}^n$.

Se poate demonstra că dacă A este un domeniu în $\mathbb{R}^n$, f este o formă diferențială exactă de gradul întâi în A, iar F_1 și F_2 sunt primitive ale lui f, atunci funcția $F_1 - F_2$ este constantă pe A.

5.4 Integrala unei forme diferențiale de gradul întâi pe un drum (integrala de al doilea tip de-a lungul unui drum)

5.4.1 Definiție (integrala unei forme diferențiale de gradul întâi pe un drum)**.** Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulțime deschisă, fie $f := f_1 dx_1 + \cdots + f_n dx_n$ o formă diferențială de gradul întâi în A și fie $\gamma := (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) : [a, b] \to A$ un drum cu imaginea în A. Se spune că forma f este *integrabilă* pe drumul γ dacă pentru orice $i \in \{1, \ldots, n\}$ funcția $f_i \circ \gamma$ este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu γ_i pe $[a, b]$. In acest caz numărul real $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \int_a^b \big(f_i \circ \gamma\big)\, d\gamma_i$ se numește *integrala formei diferențiale f pe drumul γ* și va fi notată cu $\displaystyle\int_\gamma f$ sau cu

$$\int_\gamma f_1 dx_1 + \cdots + f_n dx_n \text{ sau cu } \int_\gamma f_1(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 + \cdots + f_n(x_1, \ldots, x_n)\, dx_n.$$

5.4.2 Teoremă. *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulțime deschisă, fie $\gamma : [a, b] \to A$ un drum, $f, g : A \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ forme diferențiale de gradul întâi în A, iar $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dacă formele f și g sunt integrabile pe γ, atunci și forma $\alpha f + \beta g$ este integrabilă pe γ și are loc egalitatea*

$$\int_\gamma (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_\gamma f + \beta \int_\gamma g.$$

Demonstrație. Se aplică teorema referitoare la liniaritatea în raport cu prima funcție a integralei Riemann-Stieltjes. □

5.4.3 Teoremă. *Dacă A este o submulțime deschisă a lui $\mathbb{R}^n$, $\gamma : [a, b] \to A$ este un drum rectificabil, iar $f := f_1 dx_1 + \cdots + f_n dx_n$ este o formă diferențială* *de gradul întâi în A, atunci f este integrabilă pe γ și are loc inegalitatea* $\left|\int_\gamma f\right| \le M\,\ell(\gamma)$, *unde* $M := \max_{x\in I(\gamma)} \big\|\big(f_1(x),\ldots,f_n(x)\big)\big\|$.

Demonstrație. Fie $\gamma := (\gamma_1,\ldots,\gamma_n)$ și fie $\widetilde{f} : A \to \mathbb{R}^n$ funcția definită prin

$$\widetilde{f}(x) := \big(f_1(x),\ldots,f_n(x)\big).$$

Deoarece $\widetilde{f}$ este continuă pe A, iar mulțimea $I(\gamma)$ este compactă, rezultă că M este bine definit. Mai mult, avem $\big\|\widetilde{f}(\gamma(t))\big\| \le M$ oricare ar fi $t \in [a,b]$. Pe de altă parte, pentru fiecare $i \in \{1,\ldots,n\}$ funcția $f_i \circ \gamma$ este continuă pe $[a,b]$, iar funcția γ_i este cu variație mărginită (întrucât γ este rectificabil). Drept urmare, avem $f_i \circ \gamma \in RS_{\gamma_i}[a,b]$ oricare ar fi $i \in \{1,\ldots,n\}$, adică forma diferențială f este integrabilă pe γ.

Fie acum $\Delta := (t_0,t_1,\ldots,t_k) \in \operatorname{Div}[a,b]$ și $\xi := (c_1,\ldots,c_k) \in P(\Delta)$ arbitrar alese. Avem

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=1}^n S\big(f_i\circ\gamma,\gamma_i,\Delta,\xi\big)\right| &= \left|\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^k f_i\big(\gamma(c_j)\big)\left[\gamma_i(t_j)-\gamma_i(t_{j-1})\right]\right|\\ &= \left|\sum_{j=1}^k \left\langle \widetilde{f}\big(\gamma(c_j)\big)\,\gamma(t_j)-\gamma(t_{j-1})\right\rangle\right|.\end{aligned}$$

In baza inegalității lui Cauchy-Buniakovski-Schwarz, deducem că

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=1}^n S\big(f_i\circ\gamma,\gamma_i,\Delta,\xi\big)\right| &\le \sum_{j=1}^k \big\|\widetilde{f}\big(\gamma(c_j)\big)\big\|\;\|\gamma(t_j)-\gamma(t_{j-1})\|\\ &\le M\,V(\gamma,\Delta) \le M\,\ell(\gamma).\end{aligned}$$

Am dovedit așadar că pentru orice $\Delta \in \operatorname{Div}[a,b]$ și orice $\xi \in P(\Delta)$ avem

$$\left|\sum_{i=1}^n S\big(f_i\circ\gamma,\gamma_i,\Delta,\xi\big)\right| \le M\,\ell(\gamma).$$

Această inegalitate împreună cu criteriul lui Heine implică inegalitatea din enunțul teoremei. □

5.4.4 Teoremă (reducerea integralei unei forme diferențiale pe un drum la o integrală Riemann)**.** *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulțime deschisă, $\gamma : [a,b] \to A$ un drum* *de clasă C^1, iar $f := f_1 dx_1 + \cdots + f_n dx_n$ o formă diferențială de gradul întâi în A. Atunci f este integrabilă pe γ și are loc egalitatea*

$$\int_\gamma f = \sum_{i=1}^n \int_a^b \big(f_i \circ \gamma\big)(t)\, \gamma_i'(t) dt.$$

Demonstrație. Se aplică teorema de reducere a integralei Riemann-Stieltjes la o integrală Riemann. □

5.4.5 Teoremă (aditivitatea față de drum a integralei unei forme diferențiale)**.** *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulțime deschisă, $\gamma : [a, b] \to A$ și $\rho : [c, d] \to A$ două drumuri juxtapozabile, iar $f := f_1 dx_1 + \cdots + f_n dx_n$ o formă diferențială de gradul întâi în A. Dacă f este integrabilă pe $\gamma \vee \rho$,atunci f este integrabilă atât pe γ cât și pe ρ și are loc egalitatea*

$$\int_{\gamma \vee \rho} f = \int_\gamma f + \int_\rho f.$$

Demonstrație. Fie $\sigma := \gamma \vee \rho$. Ținând seama de definiția drumului σ și de teorema referitoare la aditivitatea integralei Riemann-Stieltjes față de interval, avem

$$\begin{aligned}\int_\sigma f &= \sum_{i=1}^n \int_a^{b+d-c} f_i(\sigma(t))\, d\sigma_i(t) \\ &= \sum_{i=1}^n \int_a^b f_i(\gamma(t))\, d\gamma_i(t) + \sum_{i=1}^n \int_b^{b+d-c} f_i(\rho(t-b+c))\, d\rho_i(t-b+c).\end{aligned}$$

Deoarece funcția $\varphi : [b, b+d-c] \to [c, d]$, definită prin $\varphi(t) := t - b + c$ este strict crescătoare, în baza teoremei de schimbare de variabilă în integrala Riemann-Stieltjes deducem că

$$\begin{aligned}\int_b^{b+d-c} f_i(\rho(t-b+c))\, d\rho_i(t-b+c) &= \int_b^{b+d-c} \Big(\big(f_i \circ \rho\big) \circ \varphi\Big)\, d\big(\rho_i \circ \varphi\big) \\ &= \int_c^d \big(f_i \circ \rho\big)\, d\rho_i\end{aligned}$$

oricare ar fi $i \in \{1, \ldots, n\}$. Drept urmare, avem

$$\int_\sigma f = \sum_{i=1}^n \int_a^b \big(f_i \circ \gamma\big)\, d\gamma_i + \sum_{i=1}^n \int_c^d \big(f_i \circ \rho\big)\, d\rho_i = \int_\gamma f + \int_\rho f.$$

□

5.4.6 Teoremă. *Fie A o submulțime deschisă a lui $\mathbb{R}^n$, fie $\gamma : [a,b] \to A$ și $\rho : [c,d] \to A$ două drumuri echivalente și fie $f := f_1 dx_1 + \cdots + f_n dx_n$ o formă diferențială de gradul întâi în A, integrabilă pe γ. Atunci f este integrabilă și pe ρ și are loc egalitatea $\displaystyle\int_\rho f = \varepsilon_{\gamma,\rho} \int_\gamma f$, unde*

$$\varepsilon_{\gamma,\rho} := \begin{cases} 1 & \text{dacă } \gamma \text{ și } \rho \text{ sunt direct echivalente} \\ -1 & \text{dacă } \gamma \text{ și } \rho \text{ sunt invers echivalente.} \end{cases}$$

In particular, f este integrabilă pe $\bar{\gamma}$ și $\displaystyle\int_{\bar{\gamma}} f = -\int_\gamma f$.

Demonstrație. Fie $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ un difeomorfism de clasă C^1 astfel ca $\rho = \gamma \circ \varphi$. Cum f este integrabilă pe γ, rezultă că funcția $f_i \circ \gamma$ este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu γ_i pe $[a,b]$ oricare ar fi $i \in \{1, \ldots, n\}$. Aplicând teorema de schimbare de variabilă în integrala Riemann-Stieltjes, deducem că funcția $\big(f_i \circ \gamma\big) \circ \varphi = f_i \circ \rho$ este integrabilă Riemann-Stieltjes pe $[c,d]$ în raport cu $\gamma_i \circ \varphi = \rho_i$ oricare ar fi $i \in \{1, \ldots, n\}$. Altfel spus, f este integrabilă pe ρ. In baza teoremei de schimbare de variabilă în integrala Riemann-Stieltjes, avem

$$\begin{aligned} \int_\gamma f &= \sum_{i=1}^n \int_a^b \big(f_i \circ \gamma\big)\, d\gamma_i = \sum_{i=1}^n \varepsilon_{\gamma,\rho} \int_c^d \Big(\big(f_i \circ \gamma\big) \circ \varphi\Big)\, d\big(\gamma_i \circ \varphi\big) \\ &= \varepsilon_{\gamma,\rho} \sum_{i=1}^n \int_c^d \big(f_i \circ \rho\big)\, d\rho_i = \varepsilon_{\gamma,\rho} \int_\rho f. \end{aligned}$$

□

5.4.7 Definiție (integrala unei forme diferențiale de gradul întâi pe o curbă orientată)**.** Teorema precedentă ne permite să definim integrala unei forme diferențiale de gradul întâi pe o curbă orientată. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulțime deschisă, fie $f := f_1 dx_1 + \cdots + f_n dx_n$ o formă diferențială de gradul întâi în A și fie Γ o curbă orientată în $\mathbb{R}^n$ cu $I(\Gamma) \subseteq A$. Dacă există un drum $\gamma \in \Gamma$ în așa fel încât f să fie integrabilă pe γ, atunci se spune că f este *integrabilă pe curba* Γ. Numărul real $\int_\gamma f$ se numește *integrala formei diferențiale f pe curba* Γ și va fi notată cu $\displaystyle\int_\Gamma f$ sau cu $\int_\Gamma f_1 dx_1 + \cdots + f_n dx_n$ sau cu

$$\int_\Gamma f_1(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 + \cdots + f_n(x_1, \ldots, x_n)\, dx_n.$$

5.4.8 Observație (semnificația fizică a integralei unei forme diferențiale pe un drum). Considerăm un punct material care parcurge o traiectorie având forma mulțimii $I(\gamma)$, unde $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ este un drum, sub acțiunea unui câmp de forțe $F := (P,Q,R) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Identificăm câmpul de forțe F cu forma diferențială

$$F(x,y,z) := P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz.$$

Atunci lucrul mecanic L, efectuat de câmpul F la deplasarea punctului material, este tocmai valoarea integralei

$$L = \int_\gamma F = \int_\gamma Pdx + Qdy + Rdz.$$

5.5 Formula lui Green

5.5.1 Definiție (frontiera orientată pozitiv a unei mulțimi simple din plan). Fie $D \subseteq \mathbb{R}^2$ o mulțime simplă în raport cu axa Oy, de forma

$$(1) \qquad D = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b,\ \varphi(x) \le y \le \psi(x) \,\},$$

unde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, iar $\varphi, \psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ sunt funcții continue, cu $\varphi \le \psi$. Considerăm drumurile (a se vedea figura 5.5.1)

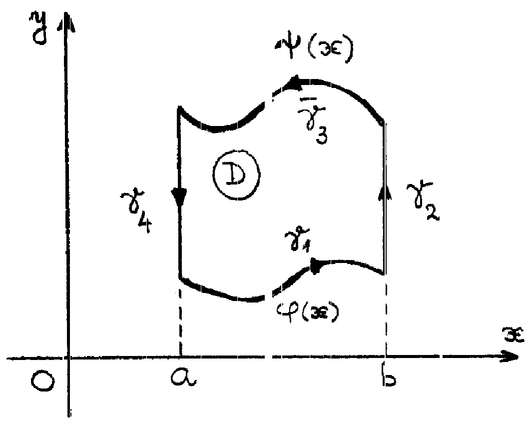


Figura 5.5.1: Frontiera orientată pozitiv a unei mulțimi simple.

$$\begin{array}{ll} \gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^2, & \gamma_1(t) := (t, \varphi(t)), \\ \gamma_2 : [0,1] \to \mathbb{R}^2, & \gamma_2(t) := (b, (1-t)\varphi(b) + t\psi(b)), \\ \gamma_3 : [a,b] \to \mathbb{R}^2, & \gamma_3(t) := (t, \psi(t)), \\ \gamma_4 : [0,1] \to \mathbb{R}^2, & \gamma_4(t) := (a, (1-t)\psi(a) + t\varphi(a)). \end{array}$$

Fie apoi $\gamma := \gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \bar{\gamma}_3 \vee \gamma_4$. Observăm că $I(\gamma) = \operatorname{bd} D$, sensul de parcurgere fiind invers acelor de ceasornic. Curba orientată din $\mathbb{R}^2$, asociată drumului γ se numește *frontiera orientată pozitiv* a lui D și va fi notată ∂D.

Analog se definește frontiera orientată pozitiv a unei mulțimi $D \subseteq \mathbb{R}^2$, simplă în raport cu axa Ox.

Vom nota $\displaystyle\oint_{\partial D} f := \int_\gamma f$ integrala pe curba ∂D a formei diferențiale f.

5.5.2 Lemă. *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^2$ o mulțime deschisă, fie $D \subseteq A$ o mulțime simplă în raport cu axa Oy, cu proprietatea că ∂D – frontiera orientată pozitiv a lui D – este o curbă rectificabilă și fie $f_1 : A \to \mathbb{R}$ o funcție de clasă C^1 pe A. Atunci forma diferențială $f := f_1 dx$ este integrabilă pe ∂D și are loc egalitatea*

$$\oint_{\partial D} f_1 dx = -\iint_D \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)\, dxdy. \tag{2}$$

Demonstrație. Presupunând că D este de forma (1), fie γ drumul construit în definiția 5.5.1. Intrucât curba orientată ∂D este rectificabilă, rezultă că drumul γ este rectificabil. Aplicând teorema 5.4.3, deducem că f este integrabilă pe γ, deci pe ∂D. Avem

$$\oint_{\partial D} f_1 dx = \int_\gamma f_1 dx = \int_{\gamma_1} f_1 dx + \int_{\gamma_2} f_1 dx - \int_{\gamma_3} f_1 dx + \int_{\gamma_4} f_1 dx.$$

Ținând seama că $\int_{\gamma_2} f_1 dx = \int_{\gamma_4} f_1 dx = 0$, obținem

$$\oint_{\partial D} f_1 dx = \int_a^b f_1(t, \varphi(t))\, dt - \int_a^b f_1(t, \psi(t))\, dt.$$

Pe de altă parte, în baza consecinței 3.6.7 și a formulei lui Leibniz-Newton, avem

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)\, dxdy &= \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)\, dy \right) dx \\ &= \int_a^b f_1(x,y) \Big|_{y=\varphi(x)}^{y=\psi(x)} dx = \int_a^b \big[f_1(x, \psi(x)) - f_1(x, \varphi(x)) \big]\, dx. \end{aligned}$$

Cele două egalități de mai sus garantează validitatea lui (2). $\square$

5.5.3 Lemă. *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^2$ o mulțime deschisă, fie $D \subseteq A$ o mulțime simplă în raport cu axa Ox, cu proprietatea că ∂D – frontiera orientată pozitiv a lui D – este o curbă rectificabilă și fie $f_2 : A \to \mathbb{R}$ o funcție de clasă C^1 pe A. Atunci forma diferențială $f := f_2 dy$ este integrabilă pe ∂D și are loc egalitatea*

$$\oint_{\partial D} f_2 dy = \iint_D \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y)\, dxdy.$$

Demonstrație. Este analoagă cu cea a lemei precedente. □

5.5.4 Teoremă (G. Green)**.** *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^2$ o mulțime deschisă, fie $D \subseteq A$ o mulțime simplă atât în raport cu axa Ox, cât și în raport cu axa Oy, cu proprietatea că ∂D este o curbă rectificabilă și fie $f_1, f_2 : A \to \mathbb{R}$ funcții de clasă C^1 pe A. Atunci forma diferențială $f := f_1 dx + f_2 dy$ este integrabilă pe ∂D și are loc egalitatea*

$$\oint_{\partial D} f_1 dx + f_2 dy = \iint_D \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dxdy.$$

Demonstrație. Se aplică lemele 5.5.2 și 5.5.3. □

5.5.5 Consecință. *Fie $D \subseteq \mathbb{R}^2$ o mulțime simplă atât în raport cu axa Ox, cât și în raport cu axa Oy, cu proprietatea că ∂D este o curbă rectificabilă. Atunci D este măsurabilă Jordan și are loc egalitatea*

$$m(D) = \frac{1}{2} \oint_{\partial D} xdy - ydx.$$

5.6 Integrarea formelor diferențiale exacte

5.6.1 Teoremă (G. W. Leibniz – I. Newton)**.** *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulțime deschisă, fie $\gamma : [a, b] \to A$ un drum de clasă C^1 și fie $f := f_1 dx_1 + \cdots + f_n dx_n$ o formă diferențială exactă în A. Atunci f este integrabilă pe γ și pentru orice primitivă $F : A \to \mathbb{R}$ a lui f are loc egalitatea*

$$\int_\gamma f = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) \overset{not}{=:} F \Big|_{\gamma(a)}^{\gamma(b)}.$$

Demonstrație. Conform teoremei 5.1.10, drumul γ este rectificabil. Aplicând apoi teorema 5.4.3, deducem că f este integrabilă pe γ. Dacă $F : A \to \mathbb{R}$ este o primitivă a lui f, atunci avem

$$(1) \qquad \frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = f_i(x) \quad \text{pentru orice } x \in A \text{ și orice } i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Ținând seama de teorema 5.4.4, în baza lui (1) obținem

$$\begin{aligned}\int_\gamma f &= \sum_{i=1}^n \int_a^b \big(f_i \circ \gamma\big)(t)\, \gamma_i'(t)dt = \int_a^b \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i}\,(\gamma(t))\, \gamma_i'(t)dt \\ &= \int_a^b \big(F\circ\gamma\big)'(t)dt = F\circ\gamma\Big|_a^b = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).\end{aligned}$$

□

5.6.2 Observație. Aditivitatea față de interval a integralei Riemann asigură validitatea teoremei 5.6.1 și în cazul când drumul γ este doar de clasă C^1 pe porțiuni.

5.6.3 Consecință. *Dacă $A \subseteq \mathbb{R}^n$ este o mulțime deschisă, $\gamma : [a,b] \to A$ este un drum închis de clasă C^1 pe porțiuni, iar $f : A \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ este o formă diferențială exactă în A, atunci $\int_\gamma f = 0$.*

5.6.4 Consecință. *Dacă $A \subseteq \mathbb{R}^n$ este o mulțime deschisă, $\gamma : [a,b] \to A$ și $\rho : [c,d] \to A$ sunt drumuri de clasă C^1 pe porțiuni având aceleași extremități (adică $\gamma(a) = \rho(c)$ și $\gamma(b) = \rho(d)$), iar f este o formă diferențială exactă în A, atunci $\int_\gamma f = \int_\rho f$.*

5.6.5 Definiție. Se spune că integrala $\int_\gamma f$ a formei diferențiale f *nu depinde de drumul* γ (ci doar de extremitățile acestuia) dacă pentru orice două drumuri de clasă C^1 având aceleași extremități $\gamma : [a,b] \to A$ și $\rho : [c,d] \to A$ are loc egalitatea $\int_\gamma f = \int_\rho f$. In acest caz se utilizează notația

$$\int_\gamma f \overset{\text{not}}{=:} \int_{\gamma(a)}^{\gamma(b)} f,$$

pentru a sublinia faptul că $\int_\gamma f$ nu depinde de drumul γ, ci doar de extremitățile acestuia. Consecința 5.6.4 arată că dacă f este o formă diferențială exactă, atunci $\int_\gamma f$ nu depinde de γ. Se pune problema în ce condiții este adevărată și reciproca acestei afirmații.

5.6.6 Definiție (mulțimi stelate)**.** Fie A o submulțime a lui $\mathbb{R}^n$ și fie $a \in A$. Se spune că A *este stelată în raport cu* a dacă pentru orice $x \in A$ avem $[a,x] \subseteq A$, unde cu $[a,x]$ s-a notat segmentul $[a,x] := \{(1-t)a + tx \mid t \in [0,1]\}$. Evident, orice mulțime convexă este stelată în raport cu orice punct al său.

5.6.7 Teoremă (H. Poincaré)**.** *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulțime deschisă, stelată în raport cu un punct $a \in A$ și fie $f := f_1 dx_1 + \cdots + f_n dx_n$ o formă diferențială de gradul întâi în A, cu proprietatea că toate funcțiile $f_i : A \to \mathbb{R}$ sunt de clasă C^1 pe A. Atunci urmă toarele afirmații sunt echivalente:*

1° *f este formă diferențială exactă.*

2° *Pentru orice $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$ are loc egalitatea*

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) \quad \textit{oricare ar fi } x \in A.$$

3° *$\int_\gamma f$ nu depinde de drumul γ.*

Demonstrație. 1° $\Rightarrow$ 2° Presupunem că f este o formă diferențială exactă. Există atunci o funcție $F : A \to \mathbb{R}$, de clasă C^1 pe A și cu proprietatea că

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = f_i(x) \quad \text{pentru orice } x \in A \text{ și orice } i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Deoarece toate funcțiile f_i sunt de clasă C^1 pe A, rezultă că pentru orice $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ funcția F este de două ori derivabilă parțial în raport cu variabilele (x_i, x_j) pe A. Mai mult, funcția $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i} = \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ este continuă pe A. Aplicând criteriul lui Schwarz de egalitate a derivatelor parțiale mixte de ordinul doi, deducem că $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}$, adică $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j} = \dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}$.

2° $\Rightarrow$ 1° Pentru fiecare punct $x \in A$ considerăm drumul $\gamma_x : [0,1] \to A$, definit prin $\gamma_x(t) := (1-t)a + tx$. Fie apoi $F : A \to \mathbb{R}$ funcția definită prin $F(x) := \int_{\gamma_x} f$. Vom dovedi că F este o primitivă a lui f.

Fie $a := (a_1, \ldots, a_n)$. In baza teoremei 5.4.4, de reducere a integralei unei forme diferențiale pe un drum la o integrală Riemann, pentru orice punct $x := (x_1, \ldots, x_n) \in A$ avem

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i) \int_0^1 f_i((1-t)a + tx)\, dt.$$

Aplicând formula de derivare a integralelor cu parametru, ipoteza 2° și formula lui Leibniz-Newton, găsim

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x_j}(x) &= \int_0^1 f_j(a+t(x-a))\,dt + \sum_{i=1}^n (x_i-a_i)\frac{\partial}{\partial x_j}\int_0^1 f_i(a+t(x-a))\,dt \\
&= \int_0^1 f_j(a+t(x-a))\,dt + \sum_{i=1}^n (x_i-a_i)\int_0^1 t\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a+t(x-a))\,dt \\
&= \int_0^1 \left[f_j(a+t(x-a)) + \sum_{i=1}^n t(x_i-a_i)\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a+t(x-a))\right] dt \\
&= \int_0^1 \Big(tf_j\big(a+t(x-a)\big)\Big)' dt \\
&= tf_j\big(a+t(x-a)\big)\Big|_0^1 = f_j(x),
\end{aligned}$$

oricare ar fi $x \in A$ și $j \in \{1,\ldots,n\}$. Drept urmare, F este o primitivă a lui f.

$1^\circ \Rightarrow 3^\circ$ Rezultă din consecința 5.6.4.

$3^\circ \Rightarrow 1^\circ$ Considerăm funcția $F : A \to \mathbb{R}$, definită prin $F(x) := \int_a^x f$ (definiția este justificată de independența de drum a integralei lui f). Fie apoi $x \in A$ arbitrar ales. Intrucât A este deschisă, există un $r > 0$ cu proprietatea că $\bar{B}(a,r) \subseteq A$. Pentru orice $t \in [-r,r]$ și orice $i \in \{1,\ldots,n\}$ avem $x+te_i \in A$ și, în baza aditivității de drum a integralei, avem

$$F(x+te_i) = \int_a^{x+te_i} f = \int_a^x f + \int_x^{x+te_i} f = F(x) + \int_\gamma f,$$

unde $\gamma : [0,1] \to A$ este drumul definit prin $\gamma(s) := x + ste_i$. Deducem de aici că

$$\begin{aligned}
F(x+te_i) &= F(x) + \sum_{j=1}^n \int_0^1 f_j(x+ste_i)\gamma_j'(s)ds \\
&= F(x) + \int_0^1 f_i(x+ste_i)\,tds \\
&= F(x) + \int_0^t f_i(x+\tau e_i)d\tau,
\end{aligned}$$

deci

$$\lim_{t\to 0}\frac{F(x+te_i)-F(x)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_0^t f_i(x+\tau e_i)d\tau = f_i(x).$$

Cu alte cuvinte, F este derivabilă parțial în raport cu variabila x_i în punctul x și $\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = f_i(x)$. Cum $x \in A$ și $i \in \{1, \dots, n\}$ au fost arbitrare, rezultă că F este o primitivă a lui f. $\square$

5.6.8 Exemplu (lucrul mecanic în câmpul gravitațional)**.** Ne propunem să determinăm lucrul mecanic efectuat la deplasarea unui punct material M de masă m în câmpul gravitațional al Pământului. Considerăm Pământul un punct material O de masă $M_P \approx 5,9742 \times 10^{24}$ kg. Alegem un sistem cartezian de coordonate cu originea în O. Asupra lui M va acționa forța gravitațională, dată de legea atracției universale (a se vedea figura 5.6.1)

$$\overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}) = -K \frac{m\,M_P}{\|\overrightarrow{r}\|^2} \cdot \frac{\overrightarrow{r}}{\|\overrightarrow{r}\|},$$

unde $K \approx 6,672 \times 10^{-11}$ $\mathrm{N\,m^2/\,kg^2}$ este constanta atracției universale, iar $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{OM}$. Dacă M are coordonatele (x, y, z), atunci notând $k := K\,m\,M_P$ avem

$$\overrightarrow{F}(x, y, z) = -k \left(\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right).$$

Identificăm câmpul gravitațional $\overrightarrow{F}$ cu forma diferențială de gradul întâi

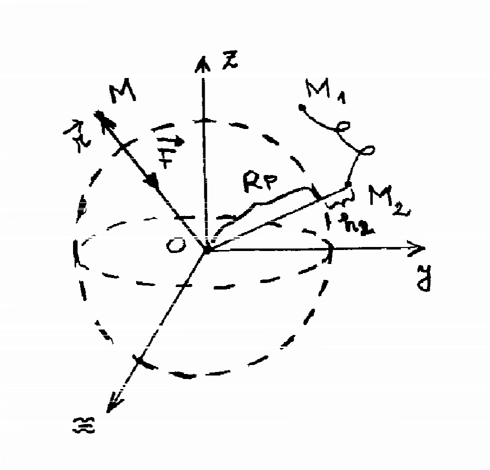


Figura 5.6.1: Câmpul gravitațional al Pământului.

$$F(x, y, z) = P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz,$$

unde

$$\begin{aligned}
P(x,y,z) &= \frac{-kx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,,\\
Q(x,y,z) &= \frac{-ky}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,,\\
R(x,y,z) &= \frac{-kz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,.
\end{aligned}$$

Se constată imediat că funcția $U : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}$, definită prin

$$U(x,y,z) := \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,,$$

este o primitivă a lui F.

Să presupunem acum că punctul material M se deplasează în câmpul gravitațional $\overrightarrow{F}$ pe o traiectorie având forma $I(\gamma)$, unde γ este un drum în $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ de capete $M_1(x_1,y_1,z_1)$ și $M_2(x_2,y_2,z_2)$. Fie L lucrul mecanic efectual de câmpul $\overrightarrow{F}$. Ținând seama de observația 5.4.8 și de teorema 5.6.1, avem

$$\begin{aligned}
L &= \int_\gamma P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz\\
&= U(x_2,y_2,z_2) - U(x_1,y_1,z_1)\\
&= k\,\frac{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}-\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}\\
&= k\,\frac{OM_1-OM_2}{OM_1\cdot OM_2}\,.
\end{aligned}$$

Cu ajutorul razei medii $R_P \approx 6\,368$ km a Pământului, lucrul mecanic L se poate exprima sub forma

$$L = K\,\frac{m\,M_P}{R_P^2}\cdot\frac{\big(OM_1-R_P\big)-\big(OM_2-R_P\big)}{\dfrac{OM_1}{R_P}\cdot\dfrac{OM_2}{R_P}}\,.$$

Notăm $h_1 := OM_1 - R_P$ și respectiv $h_2 := OM_2 - R_P$ înălțimile la care se află punctele M_1 și M_2 față de suprafața Pământului. Dacă h_1 și h_2 sunt mult mai mici decât R_P, atunci

$$\frac{OM_1}{R_P} = \frac{R_P+h_1}{R_P} = 1 + \frac{h_1}{R_P} \approx 1$$

și analog $\dfrac{OM_1}{R_P} \approx 1$. Ținând seama și că $\dfrac{K\,M_P}{R_P^2} = g \approx 9,81\ \mathrm{m}\,/\,\mathrm{s}^2$ reprezintă accelerația gravitațională la suprafața Pământului, obținem în final că

$$L \approx mg(h_1 - h_2).$$

Lucrul mecanic exterior L', necesar a fi efectuat pentru deplasarea punctului material M pe traiectoria $I(\gamma)$ este

$$L' = -L \approx mgh_2 - mgh_1 = E_p(M_2) - E_p(M_1).$$

Am regăsit astfel un rezultat cunoscut din Fizica de liceu, conform căruia L' nu depinde de forma traiectoriei $I(\gamma)$, ci doar de capetele M_1 și M_2 ale acesteia. De asemenea, L' poate fi aproximat cu diferența energiilor potențiale din punctele M_2 și respectiv M_1.

5.7 Probleme – Integrale curbilinii de primul tip

1. Să se determine lungimea drumului $\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$, definit prin

$$\gamma(t) = (5 \sin t - \sin 5t,\ 5 \cos t + \cos 5t).$$

2. Să se determine lungimea drumului din $\mathbb{R}^2$, de ecuații parametrice

$$\begin{cases} x(t) = \frac{2}{3} \sin^3 t \\ y(t) = \frac{4}{3} \cos \frac{3t}{2} \cos^3 \frac{t}{2}, \end{cases} \qquad t \in \left[0,\ \frac{\pi}{2}\right].$$

3. Cardioida este curba plană având ecuația carteziană implicită

$$x^2 + y^2 = \frac{a}{2}\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right), \quad a > 0.$$

Să se determine lungimea cardioidei (a se vedea figura 5.7.1).

4. Astroida este curba plană având ecuația carteziană implicită

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} = 1, \quad a, b > 0.$$

Să se determine lungimea astroidei (a se vedea figura 5.7.2).

5. Cicloida este curba plană de ecuații parametrice

$$\begin{cases} x(t) = a(t - \sin t) \\ y(t) = a(1 - \cos t), \end{cases} \qquad a > 0,\ t \in [0, 2\pi].$$

Să se determine lungimea cicloidei (a se vedea figura 5.7.3).

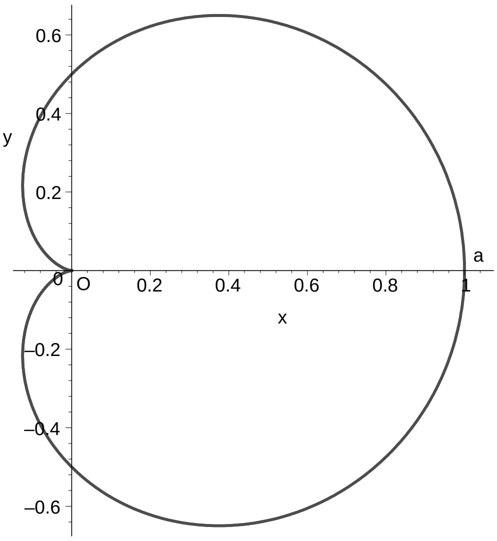


Figura 5.7.1: Graficul cardioidei pentru $a = 1$.

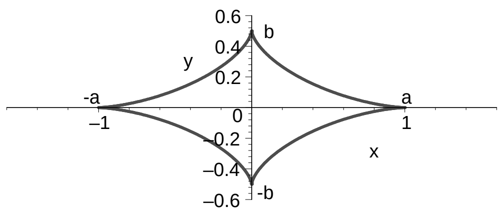


Figura 5.7.2: Graficul astroidei pentru $a = 1$ și $b = 1/2$.

6. Un proiectil este lansat de la nivelul solului cu viteza inițială v, sub unghiul de înclinare $\theta \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ față de orizontală. Pentru ce valoare a lui θ arcul de parabolă care reprezintă traiectoria proiectilului are lungime maximă ?

Z.-L. Dou și S. G. Staples, The College Math. J. [1999, pp. 44–45]

7. Fie $a > 0$ și $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ drumul definit prin $\gamma(t) = (a\cos^3 t,\, a\sin^3 t)$. Să se calculeze $\displaystyle\int_\gamma x^{2m} y^{2n} ds$, unde $m, n \in \mathbb{N}$.

8. Fie drumul $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, definit prin $\gamma(t) = (\ln(1 + t^2),\, 2\mathrm{arctg}\, t - t)$. Să se calculeze $\displaystyle\int_\gamma y e^{-x} ds$.

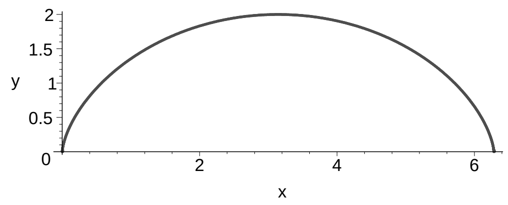


Figura 5.7.3: Graficul cicloidei pentru $a = 1$.

9. Fie $a > 0$ și $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ drumul definit prin

$$\gamma(t) = (a(t - \sin t),\, a(1 - \cos t)).$$

Să se calculeze $\displaystyle\int_\gamma y^2 ds$.

10. Fie $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ drumul de ecuație $y = g(x)$, unde $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ este o funcție de clasă C^1. Fiind dată o funcție continuă $f : I(\gamma) \to \mathbb{R}$, să se reprezinte integrala curbilinie de primul tip $I = \displaystyle\int_\gamma f(x, y)\, ds$ sub forma unei integrale Riemann.

11. Să se calculeze $\displaystyle\int_\gamma \frac{|x|(1 + y^3)}{y^5}\, ds$, dacă γ este drumul din $\mathbb{R}^2$, de ecuație $y = \dfrac{1}{1 + x^2}$, $x \in [-1, 1]$.

12. Fie $g : [\theta_1, \theta_2] \to \mathbb{R}$ o funcție de clasă C^1 și γ drumul din $\mathbb{R}^2$, având ecuația în coordonate polare $\rho = g(\theta)$, $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$. Fiind dată o funcție continuă $f : I(\gamma) \to \mathbb{R}$, să se reprezinte integrala curbilinie de primul tip $I = \displaystyle\int_\gamma f(x, y)\, ds$ sub forma unei integrale Riemann.

13. Să se calculeze $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\, ds$, dacă γ este drumul a cărui ecuație în coordonate polare este $\rho\theta = 1$, $\theta \in [\sqrt{3}, 2\sqrt{2}]$.

14. Să se calculeze $\displaystyle\int_\gamma \operatorname{arctg} \frac{y}{x}\, ds$, dacă γ este drumul având drept imagine arcul de pe spirala lui Arhimede $\rho = 2\theta$, situat în interiorul cercului cu centrul în origine și de rază 1.

15. O navă a pazei de coastă urmărește un traficant pe vreme cețoasă. La un moment dat ceața se ridică, permițând militarilor de pe navă să constate că traficantul se găsește la o distanță de 4 km, după care coboară brusc. Atunci traficantul pornește cu viteză constantă pe o traiectorie rectilinie necunoscută. Știind că viteza navei este de 3 ori mai mare, să se determine traiectoria acesteia în așa fel încât să-l intercepteze pe traficant.

Crux Mathematicorum [1996, 357]

16. Fie S segmentul care unește punctele $(1, 1)$ și $(3, 1)$. Pentru fiecare punct P al lui S notăm cu Q punctul situat pe segmentul care unește originea cu P și având proprietatea $PQ = \dfrac{1}{2}$. Atunci când P descrie segmentul S, Q descrie o curbă C (a se vedea figura 5.7.4). Notăm cu $\ell(S)$ și $\ell(C)$ lungimile lui S și respectiv C. Să se compare $\ell(S)$ cu $\ell(C)$.

Concursul William Lowell Putnam 1947

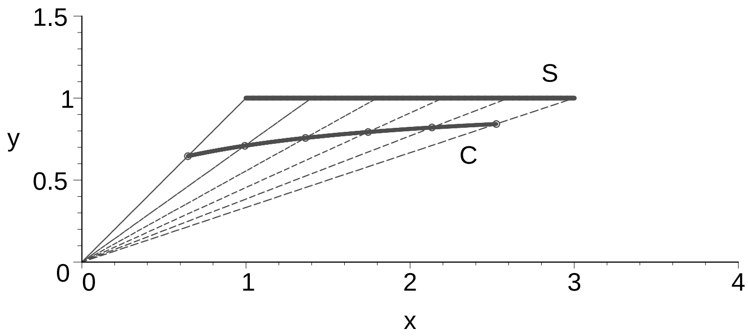


Figura 5.7.4: Graficele lui S și C.

17. Fiind dată o elipsă E, notăm cu $r_1(x, y)$ și $r_2(x, y)$ razele focale ale unui punct arbitrar $P(x, y) \in E$ și respectiv cu $\alpha(x, y)$ unghiul format de razele focale. Să se calculeze

$$\int_E \frac{1}{\sqrt{r_1(x,y) r_2(x,y)}}\, ds \quad \text{și} \quad \int_E \cos\frac{\alpha(x,y)}{2}\, ds.$$

V. Linis, Amer Math. Monthly [1956, 664]

18. Să se determine funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de clasă C^1, știind că $f'(0) = 0$, iar lungimea arcului de pe curba $y = f(x)$, cuprins între punctele $(0, f(0))$ și $(x, f(x))$, este egală cu $f'(x)$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

19. Să se determine lungimile următoarelor drumuri:

1) $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = \left(t\sin t + 2\cos t,\, t\cos t - 2\sin t,\, \dfrac{(t+1)^2}{2}\right)$;

2) $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = \left(\cos^3 t,\, \sin^3 t,\, \cos 2t\right)$;

3) $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = \left(t - \sin t,\, 1 - \cos t,\, 4\cos\dfrac{t}{2}\right)$.

20. Fie $\gamma = (x,y,z) : [0,\sqrt{3}] \to \mathbb{R}^3$ drumul de ecuații parametrice

$$x(t) = \begin{cases} t\sin(\ln t) & \text{dacă } 0 < t \le \sqrt{3} \\ 0 & \text{dacă } t = 0, \end{cases}$$

$$y(t) = \begin{cases} t\cos(\ln t) & \text{dacă } 0 < t \le \sqrt{3} \\ 0 & \text{dacă } t = 0, \end{cases}$$

$$z(t) = \frac{1}{2}\,t^2.$$

Să se demonstreze că γ este rectificabil și să se determine lungimea sa. Este γ de clasă C^1?

21. Un vapor pornește de pe Ecuator, de la meridianul 0 și navighează mereu în direcția nord-est (a se vedea figura 5.7.5). Care este lungimea drumului parcurs de vapor până în momentul în care atinge latitudinea de $30°$, $45°$, $60°$, $90°$? Care este lungimea drumului parcurs de vapor până în momentul în care atinge pentru prima oară longitudinea de $90°$, $180°$, $270°$, $360°$? Pământul este considerat o sferă cu raza $R = 6378$ km.

G. B. M. Zerr, Amer. Math. Monthly

22. Să se calculeze $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{x^2+z^2}\,ds$, dacă $\gamma : [1,10] \to \mathbb{R}^3$ este drumul definit prin

$$\gamma(t) = \left(t,\, \sqrt{2}\ln t,\, \frac{1}{t}\right).$$

23. Să se calculeze $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{x^2+y^2+z^2+1}\,ds$, dacă $\gamma : [0,\sqrt{2}] \to \mathbb{R}^3$ este drumul definit prin $\gamma(t) = (t\sin t,\, t\cos t,\, t)$.

24. Să se calculeze $\displaystyle\int_\gamma \left(x + \frac{y}{2} + \frac{z^2}{16}\right) ds$, dacă $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ este drumul definit prin $\gamma(t) = \left(t - \sin t,\, 1 - \cos t,\, 4\cos\dfrac{t}{2}\right)$.

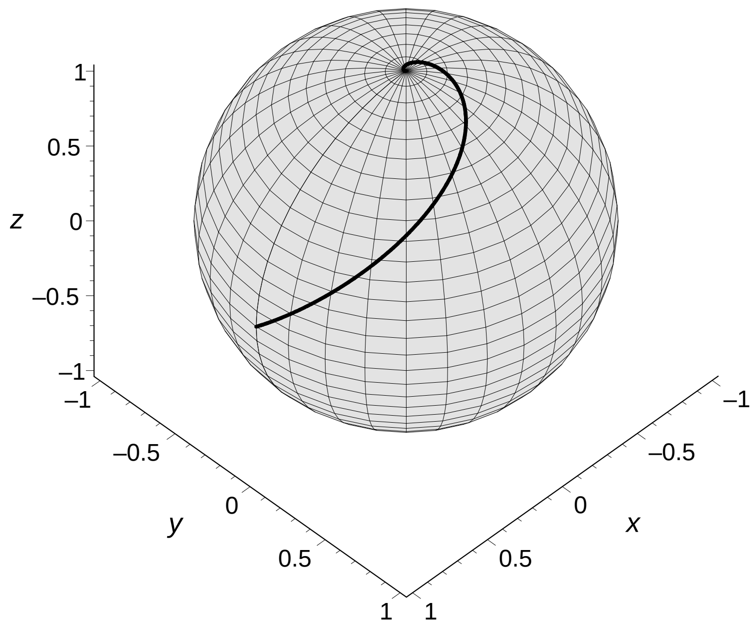


Figura 5.7.5: Traiectoria vaporului.

25. Să se calculeze $\int_\Gamma xyz\,ds$, dacă Γ este curba simplă având drept imagine arcul din primul octant al cercului $x^2+y^2+z^2=1$, $x=y$.

26. Fie $a>0$, $M=\{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z=\sqrt{x^2+y^2},\ x^2+y^2-ax=0\,\}$ și fie $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ funcția definită prin

$$f(x,y,z)=\begin{cases}\frac{x^3y^3}{z^6} & \text{dacă}\quad z\neq 0\\ 0 & \text{dacă}\quad z=0.\end{cases}$$

a) Să se studieze continuitatea lui f.

b) Să se demonstreze că restricția lui f la M este continuă pe M.

c) Să se calculeze $\int_\Gamma |f(x,y,z)|\,ds$ dacă Γ este curba simplă având drept imagine mulțimea M.

27. Pentru fiecare număr natural n considerăm drumul $\gamma_n:\left[0,\frac{1}{2}\right]\to\mathbb{R}^n$, definit prin $\gamma_n(t)=\left(t,\frac{t^2}{2},\frac{t^3}{3},\ldots,\frac{t^n}{n}\right)$. Dacă $\ell(\gamma_n)$ este lungimea lui

γ_n, să se determine $\lim_{n\to\infty} \ell(\gamma_n)$.

5.8 Probleme – Integrale curbilinii de al doilea tip

1. Fie $a > 0$ și $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ drumul definit prin

$$\gamma(t) = \big(a(t - \sin t),\, a(1 - \cos t)\big).$$

Să se calculeze $\displaystyle\int_\gamma (2a - y)dx + xdy$.

2. Să se calculeze $\displaystyle\int_\gamma \sqrt{1 - x^2}\, dx + xy^2 dy$, dacă $\gamma : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^2$ este drumul definit prin $\gamma(t) = (\cos t,\, 2\sin t)$.

3. Fiind dat drumul $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, definit prin $\gamma(t) = (\operatorname{arctg} t,\, \sqrt{1 + t^2})$, să se calculeze $\displaystyle\int_\gamma y(y^2 - 1)e^x dx + \frac{x\, \operatorname{tg}^3 x}{y}\, dy$.

4. Fie $a, b > 0$. Să se calculeze $\displaystyle\int_\Gamma y^2 dx + x^2 dy$, dacă Γ este curba simplă având drept imagine jumătatea superioară a elipsei $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, parcursă în sens orar.

5. Să se calculeze $\displaystyle\int_\Gamma \frac{1}{x + a}\, dy$, dacă Γ este curba simplă având drept imagine arcul de elipsă

$$I(\Gamma) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x, y \geq 0,\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\},$$

parcurs în sens trigonometric.

6. Fie $a > 0$ și punctele $A(-a, a)$, $B(a, a)$. Să se calculeze

$$\int_\Gamma \big[3a(x^2 + y^2) - y^3\big] dx + 3xy(2a - y)dy,$$

dacă Γ este curba simplă având drept imagine semicercul de diametru AB, care nu conține originea, parcurs în sens trigonometric.

7. Să se calculeze $\displaystyle\int_\gamma ydx - xdy + (x^2 + y^2 + z^2)dz$, dacă $\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{R}^3$ este drumul definit prin $\gamma(t) = (\sin t - t\cos t,\, \cos t + t\sin t,\, 1 + t)$.

8. Să se calculeze $\displaystyle\int_\gamma y^2dx + z^2dy + x^2dz$, dacă $\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{R}^3$ este drumul definit prin

$$\gamma(t) = \left(\frac{a}{2}(1 + \cos t),\, \frac{a}{2} \sin t,\, a \sin \frac{t}{2} \right), \quad a > 0.$$

9. Fie drumul $\gamma : \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right] \to \mathbb{R}^3$, definit prin $\gamma(t) = (e^{-t}, \cos 2t, t)$. Să se calculeze $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{x + y + z^2}\, dy + \frac{y + z^2 - 2 \ln x}{x + y + z^2}\, dz.$

10. Fie $a > 0$ și

$$M := \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ x^2 + y^2 = ax,\ z \geq 0 \}.$$

Curba simplă Γ, având imaginea $I(\Gamma) = M$, se numește *curba lui Viviani* (a se vedea figura 5.8.1). Să se calculeze $\displaystyle\int_\Gamma y^2dx + z^2dy + x^2dz$, dacă Γ este curba lui Viviani, parcursă în sens antiorar dacă se privește din origine.

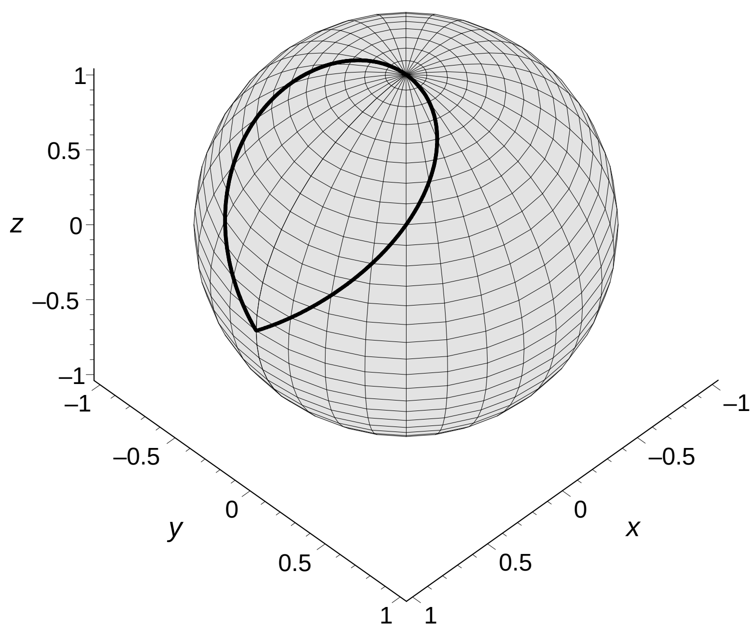


Figura 5.8.1: Curba lui Viviani.

11. Să se calculeze $\displaystyle\int_\Gamma (2x\cos xy - x^2y\sin xy)dx - x^3\sin xy\, dy$, dacă Γ este curba simplă având drept imagine arcul de pe cercul cu centrul în origine și de rază 1, cuprins între punctele $A(1,0)$ și $B(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, parcurs în sens trigonometric.

12. Să se calculeze

$$\int_{(2,0)}^{(1,1)} (y^3 + 6xy^2)dx + \left(3xy^2 + 6x^2y + \frac{1}{(y^2+1)\sqrt{y^2+2}}\right) dy.$$

13. Să se calculeze $\displaystyle\int_\gamma \left(x^4 - 6x^2y^2 + y^4\right)dx + 4xy(y^2 - x^2)dy$, dacă γ este drumul de ecuație $y = 2^x$, $x \in [1,2]$.

14. Să se demonstreze că mulțimea $A = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 16y^2 < 1\,\}$ este deschisă și stelată și că $f = Pdx + Qdy$, unde

$$P(x,y) = \frac{1}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2+16y^2}} + 3x^2y + 6xy^2,$$
$$Q(x,y) = x^3 + 6x^2y + \frac{16y}{\sqrt{1-x^2+16y^2}},$$

este o formă diferențială exactă în A. Să se calculeze

$$\int_\gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy,$$

dacă γ este un drum de clasă C^1 pe porțiuni având capetele $M\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ și $N\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{8}\right)$ și imaginea inclusă în A.

15. Se consideră mulțimea $A = \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z < \sqrt{x^2+y^2}\,\}$. Se cere:

a) Să se precizeze (justificând răspunsul) dacă A este deschisă, respectiv stelată, respectiv convexă.

b) Să se dea exemplu de drum γ, de clasă C^1, având capetele $M(0,-3,1)$ și $N(0,3,1)$ și imaginea inclusă în A.

c) Să se calculeze

$$\int_\gamma \left(\tfrac{x}{x^2+y^2+z^2} + \tfrac{1}{x^2+4x+5}\right) dx + \left(\tfrac{y}{x^2+y^2+z^2} + y^2(z^3+1)\right) dy$$
$$+ \left(\tfrac{z}{x^2+y^2+z^2} + z^2(y^3+1)\right) dz,$$

unde γ este un drum de clasă C^1, având capetele $M(0,-3,1)$ și $N(0,3,1)$ și imaginea inclusă în A.

16. Să se calculeze

$$\int_\gamma \left(x^2 - \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right) dx + \left(y^2 - \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right) dy + \left(z^2 - \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right) dz,$$

pe un drum γ, de clasă C^1, având capetele $M(2,2,-1)$, $N(-2,-2,-1)$ și a cărui imagine este inclusă în mulțimea

$$A = \mathbb{R}^3 \setminus \{\, (x,0,z) \mid x \in \mathbb{R},\ z \le 0 \,\}.$$

Dați un exemplu de astfel de drum. Este mulțimea A deschisă? Dar stelată? Dar convexă?

17. Să se calculeze

$$\int_\gamma \frac{yz(x^2+x+1)}{x^2+1}\, e^{\operatorname{arctg} x} dx + \left(xze^{\operatorname{arctg} x} + \frac{z^2}{y\sqrt{y^2-1}}\right) dy + \left(xye^{\operatorname{arctg} x} - 2z \arcsin\frac{1}{y} + \frac{1}{(z+1)^3}\, e^{\frac{z-1}{z+1}}\right) dz,$$

dacă γ este un drum de clasă C^1 pe porțiuni, având capetele $M(1,2,3)$, $N(\sqrt{3},\sqrt{2},1)$ și a cărui imagine este inclusă în mulțimea

$$\{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y > 1,\ z > -1 \,\}.$$

Capitolul 6

Integrale de suprafaţă

6.1 Pânze şi suprafeţe

6.1.1 Definiţie (k-pânze în $\mathbb{R}^n$). Fie $n, k \in \mathbb{N}$ astfel încât $k \leq n$, fie D un *domeniu* în $\mathbb{R}^k$ (adică o submulţime deschisă şi conexă a lui $\mathbb{R}^k$) şi fie funcţia continuă $F : D \to \mathbb{R}^n$. Dacă $a_1, b_1, \ldots, a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $a_1 < b_1, \ldots, a_k < b_k$ şi intervalul compact $T := [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_k, b_k]$ satisface $T \subset D$, atunci restricţia $\sigma := F\Big|_T$ se numeşte *k-pânză în $\mathbb{R}^n$*. Mulţimea

$$I(\sigma) := \{\sigma(u_1, \ldots, u_k) \mid u_1 \in [a_1, b_1], \ldots, u_k \in [a_k, b_k]\}$$

se numeşte *imaginea k-pânzei σ*.

Evident, orice 1-pânză este un drum. O 2-pânză va fi numită scurt *pânză*, iar o $(n-1)$-pânză, cu $n \geq 3$ se numeşte *pânză de hipersuprafaţă*. In fine, în cazul cel mai important $k = 2$, $n = 3$, orice 2-pânză în $\mathbb{R}^3$ va fi numită *pânză de suprafaţă*.

6.1.2 Observaţii. 1° Fie D un domeniu în $\mathbb{R}^2$, fie $F : D \to \mathbb{R}^3$ o funcţie continuă şi fie $\sigma := F\Big|_T$ o pânză de suprafaţă, unde $T := [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset D$. Atunci pentru orice $(u, v) \in T$, funcţiile

$$\sigma_u : [a_2, b_2] \to \mathbb{R}^3, \qquad \sigma_u(t) := \sigma(u, t)$$

şi respectiv

$$\sigma_v : [a_1, b_1] \to \mathbb{R}^3, \qquad \sigma_v(t) := \sigma(t, v)$$

sunt drumuri în $\mathbb{R}^3$.

2° Fie D un domeniu în $\mathbb{R}^2$ și fie $f : D \to \mathbb{R}$ o funcție continuă. Atunci și funcția $F : D \to \mathbb{R}^3$, definită prin

$$F(u,v) := (u, v, f(u,v)), \qquad (u,v) \in D,$$

este continuă. Fiind dat un dreptunghi $T \subset D$, restricția $\sigma := F\Big|_T$ este o pânză de suprafață. Intrucât

$$\sigma(u,v) := (u, v, f(u,v)), \qquad (u,v) \in T,$$

se mai spune că *pânza σ este dată în formă explicită*, iar $z = f(x,y)$ se numește *ecuația explicită a pânzei de suprafață σ.*

6.1.3 Definiție (clase speciale de pânze)**.** Fie $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un domeniu și fie $F : D \to \mathbb{R}^3$ o funcție continuă. O pânză de suprafață $\sigma := F\Big|_T$, unde T este un dreptunghi inclus în D, se numește:

a) *simplă*, dacă funcția σ este injectivă;

b) *închisă*, dacă pentru orice $(u,v) \in T$, drumurile σ_u și σ_v, definite în observația 6.1.2 (1°) sunt închise;

c) *de clasă* C^1, dacă funcția F este de clasă C^1 pe D;

d) *netedă* (sau *nesingulară*), dacă ea este de clasă C^1 și

$$\operatorname{rang} J(F)(u,v) = 2 \quad \text{oricare ar fi } (u,v) \in T.$$

6.1.4 Exemplu. Fie $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ funcția definită prin

$$F(u,v) := (r\cos u, r\sin u, v),$$

unde $r > 0$ și fie $\sigma := F\Big|_{[0,2\pi]\times[0,1]}$. Atunci σ este o pânză de suprafață a cărei imagine este cilindrul circular drept

$$I(\sigma) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = r^2,\ 0 \le z \le 1\}.$$

Cum

$$J(F)(u,v) = \begin{pmatrix} -r\sin u & 0 \\ r\cos u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

avem $\operatorname{rang} J(F)(u,v) = 2$ oricare ar fi $(u,v) \in [0,2\pi] \times [0,1]$, deci pânza de suprafață σ este netedă.

6.1.5 Definiție (bordul unei pânze de suprafață)**.** Fie $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un domeniu, fie $F : D \to \mathbb{R}^3$ o funcție continuă, fie $T := [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ un dreptunghi astfel ca $T \subset D$ și fie pânza de suprafață $\sigma := F\Big|_T$. Se constată imediat că drumurile σ_{a_2} și σ_{b_1}, respectiv $\bar{\sigma}_{b_2}$ și $\bar{\sigma}_{a_1}$, definite în observația 6.1.2 (1°), sunt juxtapozabile. De asemenea, drumurile $\sigma_{a_2} \vee \sigma_{b_1}$ și $\bar{\sigma}_{b_2} \vee \bar{\sigma}_{a_1}$ sunt juxtapozabile, iar

$$\partial\sigma := \big(\sigma_{a_2} \vee \sigma_{b_1}\big) \vee \big(\bar{\sigma}_{b_2} \vee \bar{\sigma}_{a_1}\big)$$

este un drum închis, numit *bordul pânzei de suprafață* σ. Se constată imediat că $\partial\sigma = \sigma \circ \gamma$, unde $\gamma \in \partial T$ este drumul reprezentativ din definiția 5.5.1, asociat frontierei orientate pozitiv a lui T (a se vedea figura 6.1.1).

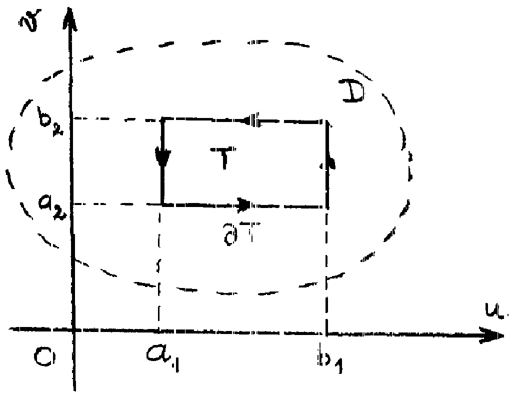


Figura 6.1.1:

6.1.6 Exemplu. Fie $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ funcția definită prin

$$F(\varphi, \theta) := (\sin\varphi\cos\theta,\ \sin\varphi\sin\theta,\ \cos\varphi),$$

fie $T := \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ și fie $\sigma := F\Big|_T$. Atunci σ este o pânză de suprafață a cărei imagine

$$I(\sigma) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z \geq 0,\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

este porțiunea sferei cu centrul în origine și de rază 1, situată în primul octant. Avem $\partial\sigma = (\gamma_1 \vee \gamma_2) \vee (\bar{\gamma}_3 \vee \bar{\gamma}_4)$, unde (a se vedea figura 6.1.2)

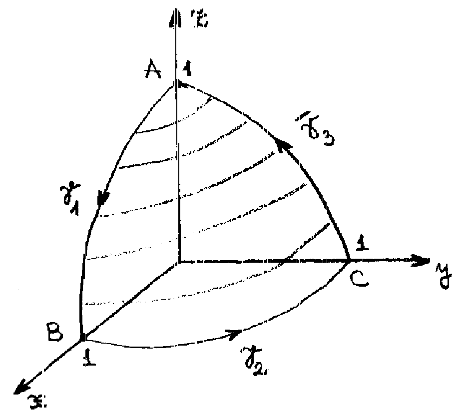


Figura 6.1.2:

$$\gamma_1(t) := \sigma(t,0) = (\sin t,\, 0,\, \cos t), \qquad t \in \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right],$$

$$\gamma_2(t) := \sigma\left(\tfrac{\pi}{2}, t\right) = (\cos t,\, \sin t,\, 0), \qquad t \in \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right],$$

$$\gamma_3(t) := \sigma\left(t, \tfrac{\pi}{2}\right) = (0,\, \sin t,\, \cos t), \qquad t \in \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right],$$

$$\gamma_4(t) := \sigma(0,t) = (0,0,1), \qquad t \in \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right].$$

Avem

$$I(\gamma_1) = \overset{\frown}{AB}, \quad I(\gamma_2) = \overset{\frown}{BC}, \quad I(\bar{\gamma}_3) = \overset{\frown}{CA}, \quad I(\gamma_4) = \{A\},$$

deci $I(\partial\sigma) = \overset{\frown}{AB} \cup \overset{\frown}{BC} \cup \overset{\frown}{CA}$.

6.1.7 Definiţie. Fie D și $\widetilde{D}$ domenii din $\mathbb{R}^2$, fie $F : D \to \mathbb{R}^3$ și $\widetilde{F} : \widetilde{D} \to \mathbb{R}^3$ două funcții continue, fie T și $\widetilde{T}$ două dreptunghiuri în așa fel încât $T \subset D$ și $\widetilde{T} \subset \widetilde{D}$ și fie pânzele de suprafață $\sigma := F\Big|_T$ și respectiv $\widetilde{\sigma} := \widetilde{F}\Big|_{\widetilde{T}}$. Se spune că σ și $\widetilde{\sigma}$ sunt *echivalente* și se notează acest fapt prin $\sigma \sim \widetilde{\sigma}$, dacă există un difeomorfism $\varphi : \widetilde{D} \to D$, de clasă C^1 și cu proprietatea că

$$\varphi(\widetilde{T}) = T \qquad \text{și} \qquad \widetilde{\sigma} = \sigma \circ \varphi\Big|_{\widetilde{T}}.$$

In acest caz, matricea Jacobi $J(\varphi)(\widetilde{u}, \widetilde{v})$ este inversabilă oricare ar fi $(\widetilde{u}, \widetilde{v}) \in \widetilde{D}$, deci avem fie

(1) $$\det J(\varphi)(\widetilde{u}, \widetilde{v}) > 0 \quad \text{pentru orice } (\widetilde{u}, \widetilde{v}) \in \widetilde{D},$$

fie

$$\det J(\varphi)(\widetilde{u},\widetilde{v}) < 0 \quad \text{pentru orice } (\widetilde{u},\widetilde{v}) \in \widetilde{D}. \tag{2}$$

Dacă are loc (1), atunci se spune că pânzele σ și $\widetilde{\sigma}$ sunt *direct echivalente* și se notează acest fapt prin $\sigma \approx \widetilde{\sigma}$. Dacă are loc (2), atunci se spune că σ și $\widetilde{\sigma}$ sunt *invers echivalente*.

Notăm cu $\mathcal{S} := \mathcal{S}^{2,3}$ mulțimea tuturor pânzelor de suprafață, adică mulțimea tuturor 2-pânzelor din $\mathbb{R}^3$. Se constată că relațiile binare $\sim$ și $\approx$, definite mai sus, sunt ambele relații de echivalanță pe $\mathcal{S}$. O clasă de echivalență în $\mathcal{S}$ în raport cu relația $\sim$ se numește *suprafață*, iar o clasă de echivalență în raport cu relația $\approx$ se numește *suprafață orientată* (în $\mathbb{R}^3$). Altfel spus, o suprafață este o clasă de pânze de suprafață echivalente, iar o suprafață orientată este o clasă de pânze de suprafață direct echivalente.

6.1.8 Propoziție. *Fie D și $\widetilde{D}$ domenii din $\mathbb{R}^2$, fie $F : D \to \mathbb{R}^3$ și $\widetilde{F} : \widetilde{D} \to \mathbb{R}^3$ două funcții continue, fie T și $\widetilde{T}$ două dreptunghiuri în așa fel încât $T \subset D$ și $\widetilde{T} \subset \widetilde{D}$ și fie pânzele de suprafață $\sigma := F\Big|_T$ și respectiv $\widetilde{\sigma} := \widetilde{F}\Big|_{\widetilde{T}}$. Dacă $\sigma \sim \widetilde{\sigma}$, atunci următoarele afirmații sunt adevărate:*

1° *Are loc egalitatea $I(\sigma) = I(\widetilde{\sigma})$.*

2° *Dacă σ este simplă, atunci și $\widetilde{\sigma}$ este simplă.*

3° *Dacă σ este de clasă C^1 (respectiv netedă), atunci și $\widetilde{\sigma}$ este de clasă C^1 (respectiv netedă).*

Demonstrație. Primele două afirmații sunt evidente. Pentru a justifica 3°, fie $\varphi : \widetilde{D} \to D$ un difeomorfism de clasă C^1 astfel ca $\varphi(\widetilde{T}) = T$ și $\widetilde{\sigma} = \sigma \circ \varphi\Big|_{\widetilde{T}}$. Avem

$$J(\widetilde{F})(\widetilde{u},\widetilde{v}) = J\big(F \circ \varphi\big)(\widetilde{u},\widetilde{v}) = J(F)(\varphi(\widetilde{u},\widetilde{v}))\, J(\varphi)(\widetilde{u},\widetilde{v})$$

oricare ar fi $(\widetilde{u},\widetilde{v}) \in \widetilde{T}$. Cum $\operatorname{rang} J(F)(\varphi(\widetilde{u},\widetilde{v})) = 2$ și $J(\varphi)(\widetilde{u},\widetilde{v})$ este inversabilă, rezultă că $\operatorname{rang} J(\widetilde{F})(\widetilde{u},\widetilde{v}) = 2$, deci $\widetilde{\sigma}$ este netedă. □

6.1.9 Definiție. O suprafață Σ se numește *simplă* (respectiv *de clasă C^1*, respectiv *netedă*) dacă există o pânză de suprafață $\sigma \in \Sigma$ astfel ca σ să fie simplă (respectiv de clasă C^1, respectiv netedă). Dacă $\sigma \in \Sigma$, atunci mulțimea $I(\sigma)$ se numește *imaginea suprafeței* Σ și se notează cu $I(\Sigma)$.

6.2 Integrala de primul tip pe o pânză de suprafață

6.2.1 Definiție (produsul vectorial în $\mathbb{R}^3$)**.** Fie $x := (x_1, x_2, x_3)$ și $y := (y_1, y_2, y_3)$ vectori din $\mathbb{R}^3$. Notăm

$$x \times y := \big(x_2 y_3 - x_3 y_2,\ x_3 y_1 - x_1 y_3,\ x_1 y_2 - x_2 y_1\big).$$

Vectorul $x \times y \in \mathbb{R}^3$ se numește *produsul vectorial al lui x cu y*. Avem

$$\begin{aligned} x \times y &= \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} e_1 + \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} e_3 \\ &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

ultimul „determinant” fiind unul formal, el dezvoltându-se după elementele primei linii ca și cum e_1, e_2, e_3 ar fi numere.

6.2.2 Definiție. Fie $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un domeniu și fie $F : D \to \mathbb{R}^3$ o funcție de clasă C^1 pe D,

$$\forall\ (u, v) \in D \ \longmapsto\ F(u, v) := \big(x(u, v),\, y(u, v),\, z(u, v)\big) \in \mathbb{R}^3.$$

Fie apoi $T := [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ un dreptunghi inclus în D și fie pânza de suprafață $\sigma := F\Big|_T$. Considerăm vectorul

$$N_\sigma := \frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \left(\frac{D(y, z)}{D(u, v)}, \frac{D(z, x)}{D(u, v)}, \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right),$$

unde s-a folosit notația

$$\frac{D(y, z)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix},$$

iar $\frac{D(z,x)}{D(u,v)}$ și $\frac{D(x,y)}{D(u,v)}$ se definesc analog.

Se va vedea la cursul de Geometrie diferențială că mulțimea

$$P := \left\{ \sigma(u, v) + s\, \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) + t\, \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) \ \middle|\ s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

este un plan, tangent în punctul $\sigma(u, v)$ la $I(\sigma)$. Un calcul simplu arată că vectorul N_σ este perpendicular pe planul P. Din acest motiv, vectorul N_σ se numește *normala pânzei de suprafață σ* (a se vedea figura 6.2.1).

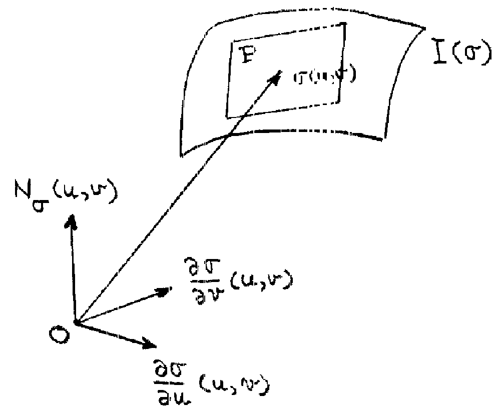


Figura 6.2.1:

6.2.3 Exemplu (masa unei coji neomogene)**.** Fie $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un domeniu, fie $F = (x, y, z) : D \to \mathbb{R}^3$ o funcție de clasă C^1 pe D, fie $T = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ un dreptunghi inclus în D și fie pânza de suprafață $\sigma = F\Big|_T$. Considerăm o coajă având forma mulțimii $I(\sigma)$. Presupunem coaja neomogenă, dar cunoscută densitatea superficială $f(x, y, z)$ a acesteia în fiecare punct $(x, y, z) \in I(\sigma)$. In ipoteza că funcția $f : I(\sigma) \to \mathbb{R}$ este continuă, ne propunem să determinăm masa m a cojii.

Fie $n \in \mathbb{N}$, fie $\Delta_1 := (u_0, u_1, \ldots, u_n)$ diviziunea echidistantă a lui $[a_1, b_1]$, fie $\Delta_2 := (v_0, v_1, \ldots, v_n)$ diviziunea echidistantă a lui $[a_2, b_2]$ și fie $h_1 := \frac{b_1 - a_1}{n}$, $h_2 := \frac{b_2 - a_2}{n}$. Pentru orice $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ notăm $T_{ij} := [u_{i-1}, u_i] \times [v_{j-1}, v_j]$. Dacă m_{ij} reprezintă masa porțiunii $\sigma(T_{ij})$ a cojii, atunci

$$m = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{ij}.$$

Aproximăm porțiunea $\sigma(T_{ij})$ a cojii cu una omogenă, având aceeași formă și densitatea egală cu $f(\sigma(u_{i-1}, v_{j-1}))$. Avem atunci $m_{ij} \approx f(\sigma(u_{i-1}, v_{j-1}))\, S_{ij}$, unde S_{ij} este aria porțiunii $\sigma(T_{ij})$ a cojii. Drept urmare, avem

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f(\sigma(u_{i-1}, v_{j-1}))\, S_{ij}. \tag{1}$$

In cele ce urmează, vom determina o aproximare a ariei S_{ij}. In acest scop, pentru simplificarea scrierii, notăm cele patru vârfuri ale dreptunghiului T_{ij} în felul următor:

$$P_0 := (u_{i-1}, v_{j-1}), \qquad P_1 := (u_{i-1} + h_1, v_{j-1}),$$
$$P_2 := (u_{i-1} + h_1, v_{j-1} + h_2), \qquad P_3 := (u_{i-1}, v_{j-1} + h_2).$$

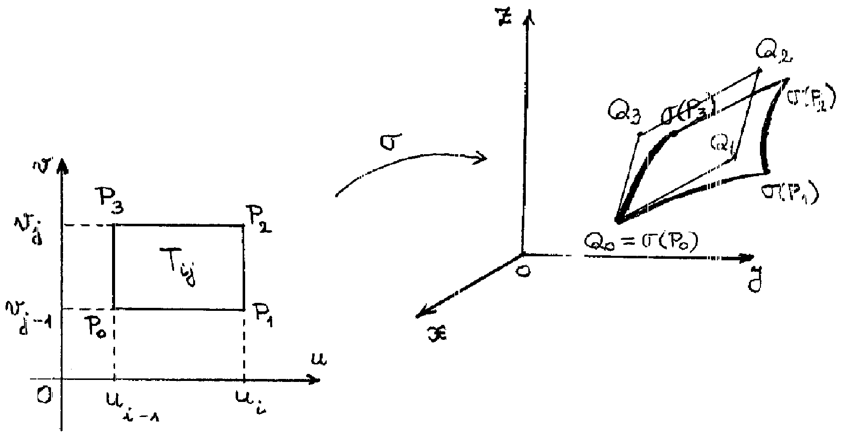


Figura 6.2.2:

Deoarece

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \Big(\sigma(u_{i-1} + h, v_{j-1}) - \sigma(u_{i-1}, v_{j-1}) \Big) = \frac{\partial \sigma}{\partial u} (u_{i-1}, v_{j-1}),$$

rezultă că pentru valori mari ale lui n avem aproximarea

$$\sigma(P_1) \approx \sigma(P_0) + h_1 \frac{\partial \sigma}{\partial u} (P_0) \overset{\text{not}}{=:} Q_1. \tag{2}$$

Analog, se constată că pentru valori mari ale lui n avem și aproximările

$$\sigma(P_3) \approx \sigma(P_0) + h_2 \frac{\partial \sigma}{\partial v} (P_0) \overset{\text{not}}{=:} Q_3, \tag{3}$$

$$\sigma(P_2) \approx \sigma(P_0) + h_1 \frac{\partial \sigma}{\partial u} (P_0) + h_2 \frac{\partial \sigma}{\partial v} (P_0) \overset{\text{not}}{=:} Q_2. \tag{4}$$

Notând și $Q_0 := \sigma(P_0)$, se constată imediat că

$$Q_0 + Q_2 = Q_1 + Q_3,$$

deci $Q_0Q_1Q_2Q_3$ sunt vârfurile unui paralelogram. Din (2), (3) și (4) rezultă că putem aproxima aria S_{ij} cu aria paralelogramului $Q_0Q_1Q_2Q_3$, adică

$$S_{ij} \approx \left\|(Q_1 - Q_0) \times (Q_3 - Q_0)\right\| = h_1 h_2 \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(P_0) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(P_0) \right\|.$$

Ținând seama că

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u}(P_0) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(P_0) = N_\sigma(P_0) = N_\sigma(u_{i-1}, v_{j-1})$$

și că $h_1 h_2 = m(T_{ij})$, deducem în final că

$$S_{ij} \approx \left\|N_\sigma(u_{i-1}, v_{j-1})\right\| m(T_{ij}). \tag{5}$$

Din (1) și (5) obținem aproximarea

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f(\sigma(u_{i-1}, v_{j-1})) \left\|N_\sigma(u_{i-1}, v_{j-1})\right\| m(T_{ij}). \tag{6}$$

Notăm $\pi := \Delta_1 \times \Delta_2$, $\xi := \left\{ (u_{i-1}, v_{j-1}) \mid i, j = 1, \ldots, n \right\}$ și considerăm funcția $f_\sigma : T \to \mathbb{R}$, definită prin $f_\sigma(u, v) := f(\sigma(u, v)) \left\|N_\sigma(u, v)\right\|$. Atunci $\pi \in \operatorname{Part}(T)$, $\xi \in P(\pi)$ și, în baza relației (6), avem

$$m \approx \sigma(f_\sigma, \pi, \xi).$$

Când n tinde la ∞, suma Riemann $\sigma(f_\sigma, \pi, \xi)$ tinde către valoarea integralei $\iint_T f_\sigma(u, v)\, dudv$. In consecință, valoarea exactă a masei cojii este

$$m = \iint_T f(\sigma(u, v)) \left\|N_\sigma(u, v)\right\| dudv. \tag{7}$$

In cazul particular al unei coji omogene, avem $f(x, y, z) = \rho$ oricare ar fi $(x, y, z) \in I(\sigma)$ și formula (7) devine

$$m = \rho \iint_T \left\|N_\sigma(u, v)\right\| dudv.$$

Pe de altă parte, avem și $m = \rho\, S(\sigma)$, unde $S(\sigma)$ este aria pânzei de suprafață σ. Comparând cele două egalități se deduce formula

$$S(\sigma) = \iint_T \left\|N_\sigma(u, v)\right\| dudv.$$

6.2.4 Definiție (integrala de primul tip pe o pânză de suprafață)**.** Luând ca punct de plecare formula (7), se poate defini integrala pe o pânză de suprafață a unei funcții reale arbitrare, fără ipoteza că aceasta are semnificația de densitate superficială. Fie $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un domeniu, fie $F = (x, y, z) : D \to \mathbb{R}^3$ o funcție de clasă C^1 pe D, fie T un dreptunghi inclus în D și fie pânza de suprafață $\sigma := F\Big|_T$. Fie apoi $f : I(\sigma) \to \mathbb{R}$ o funcție arbitrară. Asociem funcției f și pânzei σ funcția $f_\sigma : T \to \mathbb{R}$, definită pentru orice $(u, v) \in T$ prin

$$f_\sigma(u,v) := \big(f \circ \sigma\big)(u,v)\, \big\|N_\sigma(u,v)\big\| = f(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\, \big\|N_\sigma(u,v)\big\|.$$

Dacă funcția f_σ este integrabilă Riemann pe T, atunci se spune că funcția f este *integrabilă în raport cu aria pe pânza de suprafață* σ. Numărul real $\iint_T f_\sigma(u,v)\, dudv$ se numește *integrala de primul tip a lui* f *pe pânza de suprafață* σ și se notează cu

$$\int_\sigma f dS \qquad \text{sau cu} \qquad \int_\sigma f(x,y,z)\, dS.$$

Avem așadar formula de definiție

$$\int_\sigma f(x,y,z)\, dS = \iint_T f(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\, \big\|N_\sigma(u,v)\big\|\, dudv.$$

In cazul particular $f = 1$ obținem

$$\int_\sigma dS = \iint_T \big\|N_\sigma(u,v)\big\|\, dudv = S(\sigma),$$

adică *aria pânzei de suprafață* σ se exprimă cu ajutorul unei integrale de primul tip pe acea pânză de suprafață.

Notând

$$\begin{aligned} A_\sigma(u,v) &= A(u,v) = \frac{D(y,z)}{D(u,v)}\,(u,v),\\ B_\sigma(u,v) &= B(u,v) = \frac{D(z,x)}{D(u,v)}\,(u,v),\\ C_\sigma(u,v) &= C(u,v) = \frac{D(x,y)}{D(u,v)}\,(u,v), \end{aligned}$$

avem

$$\big\|N_\sigma(u,v)\big\| = \sqrt{A^2(u,v) + B^2(u,v) + C^2(u,v)}.$$

Pentru calculul normei $\|N_\sigma(u,v)\|$ se pot folosi și coeficienții lui Gauss ai pânzei de suprafață σ:

$$\begin{aligned}
E_\sigma(u,v) &= E(u,v) = \left\|\frac{\partial\sigma}{\partial u}(u,v)\right\|^2 \\
&= \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2(u,v) + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2(u,v) + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2(u,v), \\
G_\sigma(u,v) &= G(u,v) = \left\|\frac{\partial\sigma}{\partial v}(u,v)\right\|^2 \\
&= \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2(u,v) + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2(u,v) + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2(u,v), \\
F_\sigma(u,v) &= F(u,v) = \left\langle \frac{\partial\sigma}{\partial u}(u,v), \frac{\partial\sigma}{\partial v}(u,v)\right\rangle \\
&= \left(\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}\right)(u,v).
\end{aligned}$$

Cu ajutorul coeficienților lui Gauss, $\|N_\sigma(u,v)\|$ se exprimă sub forma

$$\|N_\sigma(u,v)\| = \sqrt{E(u,v)G(u,v) - F^2(u,v)}.$$

6.2.5 Teoremă (independența de parametrizare a integralelor de primul tip pe o pânză de suprafață)**.** *Fie D și $\widetilde{D}$ domenii din $\mathbb{R}^2$, fie $F : D \to \mathbb{R}^3$ și $\widetilde{F} : \widetilde{D} \to \mathbb{R}^3$ două funcții de clasă C^1, fie T și $\widetilde{T}$ două dreptunghiuri în așa fel încât $T \subset D$ și $\widetilde{T} \subset \widetilde{D}$ și fie pânzele de suprafață $\sigma := F\Big|_T$ și respectiv $\widetilde{\sigma} := \widetilde{F}\Big|_{\widetilde{T}}$. Dacă $\sigma \sim \widetilde{\sigma}$, atunci pentru orice funcție continuă $f : I(\sigma) \to \mathbb{R}$ are loc egalitatea $\int_\sigma f\,dS = \int_{\widetilde{\sigma}} f\,dS$. In particular, avem $S(\sigma) = S(\widetilde{\sigma})$.*

Demonstrație. Fără demonstrație. □

6.2.6 Definiție (integrala de primul tip pe o suprafață)**.** Teorema precedentă ne permite să definim integrala de primul tip a unei funcții pe o suprafață Σ, de clasă C^1. Fie $f : I(\Sigma) \to \mathbb{R}$ o funcție continuă și fie $\sigma \in \Sigma$. Numărul real $\int_\sigma f\,dS$ se numește *integrala de primul tip a lui f pe suprafața* Σ și se notează cu $\int_\Sigma f\,dS$.

6.3 Forme diferențiale de gradul doi

6.3.1 Definiţie (aplicații alternate)**.** Notăm cu $L_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ spațiul liniar al aplicațiilor biliniare $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Inzestrat cu norma definită prin

$$\|\phi\| := \max\{|\phi(x, y)| \mid x, y \in \mathbb{R}^n,\ \|x\| = \|y\| = 1\}, \quad \phi \in L_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}),$$

$L_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ devine un spațiu normat. Fie apoi $A_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ mulțimea tuturor aplicațiilor biliniare $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, care, în plus, au proprietatea

$$\phi(y, x) = -\phi(x, y) \quad \text{oricare ar fi } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Se constată imediat că $A_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ este un subspațiu liniar al lui $L_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Elementele lui $A_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ se numesc *aplicații alternate* pe $\mathbb{R}^n$. Evident, dacă $\phi \in A_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, atunci

$$\phi(x, x) = 0 \quad \text{oricare ar fi } x \in \mathbb{R}^n.$$

6.3.2 Exemplu. Fie $\varphi, \psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ două aplicații liniare. Se constată imediat că aplicația $\varphi \wedge \psi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definită prin

$$(\varphi \wedge \psi)(u, v) := \varphi(u)\psi(v) - \varphi(v)\psi(u) = \begin{vmatrix} \varphi(u) & \varphi(v) \\ \psi(u) & \psi(v) \end{vmatrix},$$

este alternată. In particular, proiecțiile canonice dx_i ale lui $\mathbb{R}^n$ în $\mathbb{R}$ sunt aplicații liniare, deci $dx_i \wedge dx_j \in A_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, unde

$$(dx_i \wedge dx_j)(u, v) := u_i v_j - v_i u_j = \begin{vmatrix} u_i & v_i \\ u_j & v_j \end{vmatrix}, \quad u, v \in \mathbb{R}^n.$$

Evident, avem $dx_i \wedge dx_i = 0$ și $dx_j \wedge dx_i = -(dx_i \wedge dx_j)$.

6.3.3 Definiţie (forme diferențiale de gradul doi)**.** Fie A o submulțime deschisă a lui $\mathbb{R}^n$. Se numește *formă diferențială de gradul doi* în A orice funcție continuă $f : A \to A_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Pentru orice $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ considerăm funcția $f_{ij} : A \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f_{ij}(x) := f(x)(e_i, e_j), \qquad x \in A.$$

Deoarece pentru orice $x, y \in A$ avem

$$|f_{ij}(x) - f_{ij}(y)| = \big|\big(f(x) - f(y)\big)(e_i, e_j)\big| \le \|f(x) - f(y)\|_{L_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})}$$

și f este continuă, rezultă imediat că toate funcțiile f_{ij} sunt continue pe A.

Fie $x \in A$ și fie $u := (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ și $v := (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ arbitrar alese. Avem

$$\begin{aligned} f(x)(u,v) &= f(x)\left(\sum_{i=1}^n u_i e_i, \sum_{j=1}^n v_j e_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_i v_j\, f(x)(e_i, e_j) \\ &= \sum_{1\le i<j\le n} (u_i v_j - u_j v_i)\, f_{ij}(x) = \sum_{1\le i<j\le n} f_{ij}(x)\big(dx_i \wedge dx_j\big)(u,v). \end{aligned}$$

Renunțând la a mai menționa argumentul (u, v), putem scrie

$$f(x) = \sum_{1\le i<j\le n} f_{ij}(x)\, dx_i \wedge dx_j. \tag{1}$$

Așadar, orice formă diferențială de gradul doi f în A este de forma (1), cu $f_{ij} : A \to \mathbb{R}$ funcții continue.

In cazul particular $n = 3$, o formă diferențială de gradul doi f într-o mulțime deschisă $A \subseteq \mathbb{R}^3$ este de forma

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= f_{12}(x,y,z)\, dx\wedge dy + f_{13}(x,y,z)\, dx\wedge dz + f_{23}(x,y,z)\, dy\wedge dz \\ &= f_1(x,y,z)\, dy\wedge dz + f_2(x,y,z)\, dz\wedge dx + f_3(x,y,z)\, dx\wedge dy, \end{aligned}$$

unde $f_1 = f_{23}$, $f_2 = -f_{13}$ și $f_3 = f_{12}$. Vom scrie scurt

$$f = f_1\, dy\wedge dz + f_2\, dz\wedge dx + f_3\, dx\wedge dy.$$

6.4 Integrala unei forme diferențiale de gradul doi pe o pânză de suprafață (integrala de al doilea tip pe o pânză de suprafață)

6.4.1 Definiție (integrala unei forme diferențiale de gradul doi pe o pânză de suprafață)**.** Fie A o submulțime deschisă a lui $\mathbb{R}^3$, fie $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un domeniu și fie $F : D \to A$ o funcție de clasă C^1 pe D,

$$\forall\ (u,v) \in D \ \longmapsto\ F(u,v) := \big(x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)\big) \in A.$$

Fie apoi $T := [a_1, b_1]\times[a_2, b_2]$ un dreptunghi inclus în D, fie pânza de suprafață $\sigma := F\Big|_T$ și fie $f := f_1\, dy\wedge dz + f_2\, dz\wedge dx + f_3\, dx\wedge dy$ o formă diferențială de gradul doi în A. Asociem formei f și pânzei σ funcția $f_\sigma : T \to \mathbb{R}$, definită pentru orice $(u,v) \in T$ prin

$$\begin{aligned} f_\sigma(u,v) \ &:= \ f_1(\sigma(u,v))\,\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\,(u,v) + f_2(\sigma(u,v))\,\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\,(u,v) \\ &\qquad + f_3(\sigma(u,v))\,\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\,(u,v). \end{aligned}$$

Atunci funcția f_σ este continuă, deci integrabilă Riemann pe T. Numărul real $\iint_T f_\sigma(u,v)\,dudv$ se numește *integrala formei diferențiale de gradul doi f pe pânza de suprafață σ* și se notează cu $\int_\sigma f$, sau cu

$$\int_\sigma f_1\,dy \wedge dz + f_2\,dz \wedge dx + f_3\,dx \wedge dy,$$

sau cu

$$\int_\sigma f_1(x,y,z)\,dy \wedge dz + f_2(x,y,z)\,dz \wedge dx + f_3(x,y,z)\,dx \wedge dy.$$

Identificând forma diferențială f cu funcția $f := (f_1, f_2, f_3) : A \to \mathbb{R}^3$, are loc egalitatea

$$f_\sigma(u,v) = \big\langle \big(f \circ \sigma\big)(u,v),\, N_\sigma(u,v) \big\rangle \quad \text{oricare ar fi } (u,v) \in T.$$

Avem așadar formula de definiție

$$\int_\sigma f = \iint_T \big\langle \big(f \circ \sigma\big)(u,v),\, N_\sigma(u,v) \big\rangle\,dudv.$$

Considerăm vectorul n_σ, definit prin

$$n_\sigma := \begin{cases} \frac{1}{\|N_\sigma\|}\,N_\sigma & \text{dacă } N_\sigma \neq 0 \\ 0 & \text{dacă } N_\sigma = 0. \end{cases}$$

Avem atunci

$$\int_\sigma f = \iint_T \big\langle \big(f \circ \sigma\big)(u,v),\, n_\sigma(u,v) \big\rangle\, \big\|N_\sigma(u,v)\big\|\,dudv.$$

Datorită acestei formule, prin analogie cu definiția integralei de primul tip pe o pânză de suprafață, pentru integrala $\int_\sigma f$ se folosește uneori notația

$$\int_\sigma f = \int_\sigma \langle f,\, n_\sigma \rangle\,dS.$$

Această notație nu este riguroasă deoarece funcția f este definită pe mulțimea $A \subseteq \mathbb{R}^3$, pe când n_σ este definită pe mulțimea $T \subset D \subseteq \mathbb{R}^2$.

6.4.2 Teoremă (independența de parametrizare a integralelor de al doilea tip pe o pânză de suprafață)**.** *Fie A o submulțime deschisă a lui $\mathbb{R}^3$ și f o formă diferențială de gradul doi în A. Fie apoi D și $\widetilde{D}$ două domenii din $\mathbb{R}^2$, fie $F : D \to A$ și $\widetilde{F} : \widetilde{D} \to A$ două funcții de clasă C^1, fie T și $\widetilde{T}$ două dreptunghiuri în așa fel încât $T \subset D$ și $\widetilde{T} \subset \widetilde{D}$ și fie pânzele de suprafață $\sigma := F\Big|_T$ și respectiv $\widetilde{\sigma} := \widetilde{F}\Big|_{\widetilde{T}}$. Dacă $\sigma \approx \widetilde{\sigma}$, atunci are loc egalitatea $\int_\sigma f = \int_{\widetilde{\sigma}} f$.*

Demonstrație. Fie $\varphi : \widetilde{D} \to D$ un difeomorfism de clasă C^1 astfel ca $\varphi(\widetilde{T}) = T$, $\widetilde{\sigma} = \sigma \circ \varphi\Big|_{\widetilde{T}}$ și $\det J(\varphi)(\widetilde{u}, \widetilde{v}) > 0$ pentru orice $(\widetilde{u}, \widetilde{v}) \in \widetilde{D}$. Aplicând teorema de schimbare a variabilelor în integrala dublă (teorema 3.7.1), avem

$$\begin{aligned} \int_{\widetilde{\sigma}} f &= \iint_{\widetilde{T}} f_{\widetilde{\sigma}}(\widetilde{u}, \widetilde{v})\, d\widetilde{u} d\widetilde{v} = \iint_{\widetilde{T}} \big(f_\sigma \circ \varphi\big)(\widetilde{u}, \widetilde{v})\, \det J(\varphi)(\widetilde{u}, \widetilde{v})\, d\widetilde{u} d\widetilde{v} \\ &= \iint_{\varphi(\widetilde{T})} f_\sigma(u, v)\, du dv = \iint_T f_\sigma(u, v)\, du dv = \int_\sigma f. \end{aligned}$$

□

6.4.3 Definiție (integrala de al doilea tip pe o suprafață)**.** Teorema precedentă ne permite să definim integrala unei forme diferențiale de gradul doi pe o suprafață orientată de clasă C^1. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^3$ o mulțime deschisă, fie f o formă diferențială de gradul doi în A și fie Σ o suprafață orientată de clasă C^1 cu $I(\Sigma) \subseteq A$. Dacă σ este o pânză de suprafață în așa fel încât $\sigma \in \Sigma$, atunci numărul real $\int_\sigma f$ se numește *integrala formei diferențiale f pe suprafața* Σ și se notează cu $\int_\Sigma f$.

6.5 Formula lui Stokes

Scopul acestei secțiuni este stabilirea unei formule care leagă o integrală curbilinie de o integrală de suprafață. Fie A o submulțime deschisă a lui $\mathbb{R}^3$ și fie $f_1, f_2, f_3 : A \to \mathbb{R}$ funcții de clasă C^1 pe A. Fie apoi D un domeniu din $\mathbb{R}^2$ și fie $F := (x, y, z) : D \to A$ o funcție cu proprietatea că funcțiile x, y și z sunt de două ori derivabile parțial pe D și toate derivatele lor parțiale de ordinul doi sunt continue pe D. Fie $T := [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ un dreptunghi inclus în D și fie pânza de suprafață $\sigma := F\Big|_T$.

6.5.1 Teoremă (G. G. Stokes)**.** *In condițiile de mai sus are loc egalitatea*

$$
\begin{aligned}
(1)\qquad & \int_{\partial\sigma} f_1\,dx + f_2\,dy + f_3\,dz \\
&= \int_\sigma \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\right) dy\wedge dz + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}\right) dz\wedge dx \\
&\qquad + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right) dx\wedge dy
\end{aligned}
$$

Demonstrație. Este suficient să dovedim că

$$
(2)\qquad \int_{\partial\sigma} f_1\,dx = \int_\sigma \frac{\partial f_1}{\partial z}\,dz\wedge dx - \frac{\partial f_1}{\partial y}\,dx\wedge dy,
$$

deoarece (2), împreună cu celelalte două egalități similare, implică (1). Ținând seama că $\partial\sigma := \big(\sigma_{a_2}\vee\sigma_{b_1}\big)\vee\big(\bar\sigma_{b_2}\vee\bar\sigma_{a_1}\big)$ (a se vedea definiția 6.1.5 a bordului unei pânze de suprafață), avem

$$
\int_{\partial\sigma} f_1\,dx = I_1 + I_2,
$$

unde

$$
I_1 := \int_{\sigma_{b_1}} f_1\,dx - \int_{\sigma_{a_1}} f_1\,dx, \qquad I_2 := \int_{\sigma_{a_2}} f_1\,dx - \int_{\sigma_{b_2}} f_1\,dx.
$$

In baza observației 6.1.2 (1°), drumurile $\sigma_{a_1}, \sigma_{b_1} : [a_2, b_2] \to A$ sunt date de

$$
\sigma_{a_1}(t) = \sigma(a_1, t) = \big(x(a_1,t),\ y(a_1,t),\ z(a_1,t)\big)
$$

și respectiv

$$
\sigma_{b_1}(t) = \sigma(b_1, t) = \big(x(b_1,t),\ y(b_1,t),\ z(b_1,t)\big).
$$

Drept urmare, avem

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_{a_2}^{b_2} f_1(\sigma(b_1,t))\,\frac{\partial x}{\partial v}(b_1,t)\,dt - \int_{a_2}^{b_2} f_1(\sigma(a_1,t))\,\frac{\partial x}{\partial v}(a_1,t)\,dt \\
&= \int_{a_2}^{b_2}\left(\int_{a_1}^{b_1} \frac{\partial}{\partial u}\left(f_1(\sigma(u,t))\,\frac{\partial x}{\partial v}(u,t)\right) du\right) dt.
\end{aligned}
$$

Aplicând teorema lui Fubini, obținem

$$
I_1 = \iint_T \frac{\partial}{\partial u}\left(f_1(\sigma(u,v))\,\frac{\partial x}{\partial v}(u,v)\right) dudv.
$$

Analog se arată că

$$I_2 = -\iint_T \frac{\partial}{\partial v}\left(f_1(\sigma(u,v))\,\frac{\partial x}{\partial u}\,(u,v)\right) dudv,$$

deci

$$\int_{\partial\sigma} f_1\, dx = \iint_T \left[\frac{\partial}{\partial u}\left((f_1\circ\sigma)\,\frac{\partial x}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left((f_1\circ\sigma)\,\frac{\partial x}{\partial u}\right)\right] dudv.$$

Dar, efectuând calculele, găsim

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial u}\left((f_1\circ\sigma)\,\frac{\partial x}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left((f_1\circ\sigma)\,\frac{\partial x}{\partial u}\right)\\
&= \left[\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\circ\sigma\right)\frac{\partial x}{\partial u} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\circ\sigma\right)\frac{\partial y}{\partial u} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z}\circ\sigma\right)\frac{\partial z}{\partial u}\right]\frac{\partial x}{\partial v}\\
&\qquad +(f_1\circ\sigma)\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v} - (f_1\circ\sigma)\frac{\partial^2 x}{\partial v\partial u}\\
&\qquad\qquad - \left[\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\circ\sigma\right)\frac{\partial x}{\partial v} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\circ\sigma\right)\frac{\partial y}{\partial v} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z}\circ\sigma\right)\frac{\partial z}{\partial v}\right]\frac{\partial x}{\partial u}\\
&= \left(\frac{\partial f_1}{\partial z}\circ\sigma\right)\left(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}\right) - \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\circ\sigma\right)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\right)\\
&= \left(\frac{\partial f_1}{\partial z}\circ\sigma\right)\frac{D(z,x)}{D(u,v)} - \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\circ\sigma\right)\frac{D(x,y)}{D(u,v)}.
\end{aligned}$$

Drept urmare, avem

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\sigma} f_1\, dx &= \iint_T \frac{\partial f_1}{\partial z}\,(\sigma(u,v))\,\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\,(u,v)\, dudv\\
&\qquad - \iint_T \frac{\partial f_1}{\partial y}\,(\sigma(u,v))\,\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\,(u,v)\, dudv\\
&= \int_\sigma \frac{\partial f_1}{\partial z}\, dz\wedge dx - \frac{\partial f_1}{\partial y}\, dx\wedge dy
\end{aligned}$$

și egalitatea (2) este demonstrată. □

6.6 Formula lui Gauss-Ostrogradski

6.6.1 Definiție (bordul unei k-pânze în $\mathbb{R}^n$)**.** In scopul de a defini bordul unei k-pânze în $\mathbb{R}^n$ cu $k \le n$ arbitrare, vom utiliza pentru bordul

$$\partial\sigma = \left(\sigma_{a_2} \vee \sigma_{b_1}\right) \vee \left(\bar{\sigma}_{b_2} \vee \bar{\sigma}_{a_1}\right)$$

al pânzei de suprafață σ din definiția 6.1.5 notația

$$\partial\sigma = \sigma_{a_2} + \sigma_{b_1} - \sigma_{b_2} - \sigma_{a_1} = \sigma_{20} + \sigma_{11} - \sigma_{21} - \sigma_{10},$$

unde

$$\begin{aligned} \sigma_{20}(t) &= \sigma_{a_2}(t) = \sigma(t, a_2), & \sigma_{11}(t) &= \sigma_{b_1}(t) = \sigma(b_1, t), \\ \sigma_{21}(t) &= \sigma_{b_2}(t) = \sigma(t, b_2), & \sigma_{10}(t) &= \sigma_{a_1}(t) = \sigma(a_1, t). \end{aligned}$$

Fie $m \in \mathbb{N}$ și fie $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ niște k-pânze în $\mathbb{R}^n$. O sumă formală de tipul

$$\lambda := c_1\sigma_1 + \cdots + c_m\sigma_m,$$

unde $c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{Z}$ se numește *k-lanț în $\mathbb{R}^n$*. Subliniem că suma din definiția lui λ este una formală și nu reprezintă formula de definiție a unei funcții deoarece k-pânzele σ_i pot avea domenii de definiție diferite.

Fie D un domeniu în $\mathbb{R}^k$, fie $F : D \to \mathbb{R}^n$ o funcție continuă, fie

$$T := [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_k, b_k]$$

un hiperparalelipiped inclus în D și fie k-pânza $\sigma := F\Big|_T$. Considerăm $(k-1)$-lanțul

$$\partial\sigma := \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=0}^{1} (-1)^{i+j} \sigma_{ij},$$

unde $\sigma_{ij} : T_i \to \mathbb{R}^n$, cu

$$T_i := [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_{i-1}, b_{i-1}] \times [a_{i+1}, b_{i+1}] \times \cdots \times [a_k, b_k],$$

este $(k-1)$-pânza definită prin

$$\sigma_{ij}(u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_k) := \sigma(u_1, \ldots, u_{i-1}, v_{ij}, u_{i+1}, \ldots, u_k),$$

iar

$$v_{ij} := \begin{cases} a_i & \text{dacă } j = 0 \\ b_i & \text{dacă } j = 1. \end{cases}$$

Acest $(k-1)$-lanț $\partial\sigma$ se numește *bordul k-pânzei σ.*

6.6.2 Exemplu (bordul unei 3-pânze în $\mathbb{R}^3$)**.** Fie D un domeniu din $\mathbb{R}^3$, fie $F : D \to \mathbb{R}^3$ o funcție continuă, fie $T := [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ un paralelipiped inclus în D și fie 3-pânza în $\mathbb{R}^3$ definită prin $\sigma := F\Big|_T$. Atunci bordul lui σ este 2-lanțul

$$\partial\sigma = \sigma_{11} + \sigma_{20} + \sigma_{31} - \sigma_{10} - \sigma_{21} - \sigma_{30},$$

unde

$$\begin{aligned} \sigma_{11}(u,v) &:= \sigma(b_1,u,v), & \sigma_{10}(u,v) &:= \sigma(a_1,u,v), \\ \sigma_{21}(u,v) &:= \sigma(u,b_2,v), & \sigma_{20}(u,v) &:= \sigma(u,a_2,v), \\ \sigma_{31}(u,v) &:= \sigma(u,v,b_3), & \sigma_{30}(u,v) &:= \sigma(u,v,a_3). \end{aligned}$$

6.6.3 Exemplu (bordul unei bile în $\mathbb{R}^3$)**.** In exemplul 6.6.2 să considerăm cazul particular când funcţia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ este definită prin

$$F(\rho,\varphi,\theta) := \big(\rho \sin\varphi \cos\theta,\ \rho \sin\varphi \sin\theta,\ \rho\cos\varphi\big),$$

iar $T := [0,a] \times [0,\pi] \times [0,2\pi]$, cu $a > 0$ fixat. In acest caz bordul 3-pânzei $\sigma := F\Big|_T$ este 2-lanţul $\partial\sigma = \sigma_{11} + \sigma_{20} + \sigma_{31} - \sigma_{10} - \sigma_{21} - \sigma_{30}$, unde

$$\begin{aligned} &\sigma_{11}(\varphi,\theta) := \sigma(a,\varphi,\theta) = \big(a\sin\varphi\cos\theta,\ a\sin\varphi\sin\theta,\ a\cos\varphi\big), \\ &\sigma_{10}(\varphi,\theta) := \sigma(0,\varphi,\theta) = (0,\ 0,\ 0), \\ &\sigma_{21}(\rho,\theta) := \sigma(\rho,\pi,\theta) = (0,\ 0,\ -\rho), \\ &\sigma_{20}(\rho,\theta) := \sigma(\rho,0,\theta) = (0,\ 0,\ \rho), \\ &\sigma_{31}(\rho,\varphi) := \sigma(\rho,\varphi,2\pi) = \big(\rho\sin\varphi,\ 0,\ \rho\cos\varphi\big), \\ &\sigma_{30}(\rho,\varphi) := \sigma(\rho,\varphi,0) = \big(\rho\sin\varphi,\ 0,\ \rho\cos\varphi\big). \end{aligned}$$

Imaginea lui σ este bila

$$I(\sigma) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \le a^2\}$$

cu centrul în origine şi rază a. Aşa cum se constată imediat, avem

$$I(\sigma_{11}) \cup I(\sigma_{10}) \cup I(\sigma_{21}) \cup I(\sigma_{20}) \cup I(\sigma_{31}) \cup I(\sigma_{30}) \ne \operatorname{bd} I(\sigma) = I(\sigma_{11}),$$

adică reuniunea imaginilor pânzelor de suprafaţă care definesc bordul lui σ nu coincide cu frontiera topologică a imaginii lui σ. Cu toate acestea, dacă f este o formă diferenţială de gradul doi în $\mathbb{R}^3$, atunci avem (a se vedea definiţia 6.6.4) $\int_{\partial\sigma} f = \int_{\sigma_{11}} f$, deoarece $\int_{\sigma_{10}} f = \int_{\sigma_{21}} f = \int_{\sigma_{20}} f = 0$.

6.6.4 Definiţie (integrala unei forme diferenţiale de gradul doi pe un 2-lanţ în $\mathbb{R}^3$)**.** Fie A o submulţime deschisă a lui $\mathbb{R}^3$, fie $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ pânze de suprafaţă de clasă C^1 având toate imaginea inclusă în A şi fie 2-lanţul

$$\lambda := c_1\sigma_1 + \cdots + c_m\sigma_m,$$

cu $c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{Z}$. Dacă f este o formă diferenţială de gradul doi în A, atunci numărul real $\sum_{i=1}^m c_i \int_{\sigma_i} f$ se numeşte *integrala lui f pe lanţul λ* şi se notează cu $\int_\lambda f$.

Vom stabili în continuare o formulă care leagă o integrală de suprafață de al doilea tip de o integrală triplă. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^3$ o mulțime deschisă, fie $f_1, f_2, f_3 : A \to \mathbb{R}$ funcții de clasă C^1 pe A și fie forma diferențială de gradul doi, definită prin $f := f_1\, dy \wedge dz + f_2\, dz \wedge dx + f_3\, dx \wedge dy$. Fie apoi D un domeniu în $\mathbb{R}^3$ și fie $F := (x, y, z) : D \to A$ o funcție cu proprietatea că funcțiile x, y și z sunt de două ori derivabile parțial pe D și toate derivatele lor parțiale de ordinul doi sunt continue pe D. Fie

$$T := [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$$

un paralelipiped inclus în D și fie 3-pânza $\sigma := F\Big|_T$.

6.6.5 Teoremă (formula lui Gauss-Ostrogradski)**.** *In condițiile de mai sus presupunem, în plus, că*

$$\det J(\sigma)(u, v, w) > 0 \quad \textit{oricare ar fi } (u, v, w) \in T.$$

Atunci are loc egalitatea

$$\int_{\partial\sigma} f = \iiint_{I(\sigma)} \operatorname{div} f \, dxdydz, \tag{1}$$

unde

$$\operatorname{div} f := \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}.$$

Demonstrație. Este suficient să dovedim că

$$\int_{\partial\sigma} f_1\, dy \wedge dz = \iiint_{I(\sigma)} \frac{\partial f_1}{\partial x}\, dxdydz, \tag{2}$$

deoarece (2), împreună cu celelalte două egalități similare, implică (1). Bordul $\partial\sigma$ al 3-pânzei σ este 2-lanțul

$$\partial\sigma = \sigma_{11} - \sigma_{10} + \sigma_{20} - \sigma_{21} + \sigma_{31} - \sigma_{30},$$

unde $\sigma_{10}, \sigma_{11}, \sigma_{20}, \sigma_{21}, \sigma_{30}, \sigma_{31}$ sunt pânzele de suprafață din exemplul 6.6.2. Ținând seama de acest fapt, avem

$$\int_{\partial\sigma} f_1\, dy \wedge dz = I_1 + I_2 + I_3,$$

unde

$$\begin{aligned} I_1 &:= \int_{\sigma_{11}} f_1\, dy \wedge dz - \int_{\sigma_{10}} f_1\, dy \wedge dz, \\ I_2 &:= \int_{\sigma_{20}} f_1\, dy \wedge dz - \int_{\sigma_{21}} f_1\, dy \wedge dz, \\ I_3 &:= \int_{\sigma_{31}} f_1\, dy \wedge dz - \int_{\sigma_{30}} f_1\, dy \wedge dz. \end{aligned}$$

In baza definiției integralei unei forme diferențiale de gradul doi pe o pânză de suprafață avem

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{a_2}^{b_2}\int_{a_3}^{b_3} \left[f_1(\sigma(b_1,v,w)) \frac{D(y,z)}{D(v,w)}(b_1,v,w) \right. \\ &\qquad \left. - f_1(\sigma(a_1,v,w)) \frac{D(y,z)}{D(v,w)}(a_1,v,w) \right] dvdw \\ &= \int_{a_2}^{b_2}\int_{a_3}^{b_3} \left[\int_{a_1}^{b_1} \frac{\partial}{\partial u} \left(f_1(\sigma(u,v,w)) \frac{D(y,z)}{D(v,w)}(u,v,w) \right) du \right] dvdw. \end{aligned}$$

Aplicând teorema lui Fubini, obținem

$$I_1 = \iiint_T \frac{\partial}{\partial u} \left(f_1(\sigma(u,v,w)) \frac{D(y,z)}{D(v,w)}(u,v,w) \right) dudvdw. \tag{3}$$

Analog se arată că

$$I_2 = -\iiint_T \frac{\partial}{\partial v} \left(f_1(\sigma(u,v,w)) \frac{D(y,z)}{D(u,w)}(u,v,w) \right) dudvdw \tag{4}$$

și

$$I_3 = \iiint_T \frac{\partial}{\partial w} \left(f_1(\sigma(u,v,w)) \frac{D(y,z)}{D(u,v)}(u,v,w) \right) dudvdw. \tag{5}$$

Dar, efectuând calculele, găsim

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial u}\left((f_1 \circ \sigma) \frac{D(y,z)}{D(v,w)} \right) - \frac{\partial}{\partial v}\left((f_1 \circ \sigma) \frac{D(y,z)}{D(u,w)} \right) \\ &\qquad + \frac{\partial}{\partial w}\left((f_1 \circ \sigma) \frac{D(y,z)}{D(u,v)} \right) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} \circ \sigma \right) \det J(\sigma). \end{aligned}$$

Combinând această egalitate cu (3), (4) și (5) deducem că

$$\begin{aligned}\int_{\partial\sigma} f_1\, dy \wedge dz &= I_1 + I_2 + I_3 \\ &= \iiint_T \frac{\partial f_1}{\partial x}\,(\sigma(u,v,w)) \det J(\sigma)(u,v,w)\, dudvdw.\end{aligned}$$

Aplicând acum formula de schimbare a variabilelor în integrala triplă, obținem

$$\int_{\partial\sigma} f_1\, dy \wedge dz = \iiint_{\sigma(T)} \frac{\partial f_1}{\partial x}\,(x,y,z)\, dxdydz$$

și egalitatea (2) este demonstrată. □

6.6.6 Observație (formulele lui Green)**.** Cu notația $\Omega := I(\sigma)$, formula (1) a lui Gauss-Ostrogradski este scrisă uneori sub forma

$$\iiint_\Omega \operatorname{div} f\, dxdydz = \int_{\partial\Omega} f = \int_{\partial\Omega} \langle f, n\rangle\, dS, \tag{6}$$

unde $\partial\Omega$ notează frontiera topologică a mulțimii Ω, iar n versorul normalei lui $\partial\Omega$. Menționăm că egalitatea (6) necesită o justificare aparte, ea nefiind o consecință a teoremei 6.6.5. Intr-adevăr, așa cum s-a văzut în exemplul 6.6.3, reuniunea imaginilor pânzelor de suprafață care definesc bordul lui σ poate să nu coincidă cu $\partial\Omega$.

In ipotezele din preambulul teoremei 6.6.5, fie $U, V : A \to \mathbb{R}$ două funcții de două ori derivabile parțial pe A, cu toate derivatele parțiale de ordinul doi continue pe A. Notăm

$$\Delta U := \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

laplacianul lui U și

$$\frac{\partial U}{\partial n} := U'(\cdot\,; n)$$

derivata funcției U după direcția n. Ținând seama că

$$U'(\cdot\,; n) = d\,U(\cdot)(n) = \langle \nabla U(\cdot),\, n\rangle,$$

putem scrie

$$\frac{\partial U}{\partial n} = \langle \nabla U,\, n\rangle.$$

Analog se definesc ΔV și $\frac{\partial V}{\partial n}$.

Alegem acum în formula (6) a lui Gauss-Ostrogradski

$$f := U\,\frac{\partial V}{\partial x}\,dy\wedge dz + U\,\frac{\partial V}{\partial y}\,dz\wedge dx + U\,\frac{\partial V}{\partial z}\,dx\wedge dy.$$

Atunci avem $\langle f, n\rangle = U\,\langle \nabla V,\, n\rangle = U\frac{\partial V}{\partial n}$ și

$$\begin{aligned}\operatorname{div} f &= \frac{\partial}{\partial x}\left(U\,\frac{\partial V}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(U\,\frac{\partial V}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(U\,\frac{\partial V}{\partial z}\right)\\ &= \frac{\partial U}{\partial x}\cdot\frac{\partial V}{\partial x} + U\,\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial U}{\partial y}\cdot\frac{\partial V}{\partial y} + U\,\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial U}{\partial z}\cdot\frac{\partial V}{\partial z} + U\,\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\\ &= U\,\Delta V + \langle \nabla U,\, \nabla V\rangle.\end{aligned}$$

Formula (6) devine

$$\text{(7)}\qquad \iiint_\Omega U\,\Delta V\,dxdydz + \iiint_\Omega \langle \nabla U,\, \nabla V\rangle\,dxdydz = \int_{\partial\Omega} U\,\frac{\partial V}{\partial n}\,dS.$$

Schimbând în egalitatea (7) rolurile funcțiilor U și V, obținem

$$\text{(8)}\qquad \iiint_\Omega V\,\Delta U\,dxdydz + \iiint_\Omega \langle \nabla U,\, \nabla V\rangle\,dxdydz = \int_{\partial\Omega} V\,\frac{\partial U}{\partial n}\,dS.$$

Scăzând membru cu membru relațiile (7) și (8), găsim

$$\text{(9)}\qquad \iiint_\Omega \big(U\,\Delta V - V\,\Delta U\big)\,dxdydz = \int_{\partial\Omega}\left(U\,\frac{\partial V}{\partial n} - V\,\frac{\partial U}{\partial n}\right)dS.$$

Egalitățile (7), (8) și (9) sunt cunoscute în literatura matematică drept *formulele lui Green* și ele joacă un rol important în teoria clasică a ecuațiilor cu derivate parțiale.

6.7 Probleme – Integrale de suprafață de primul tip

1. Fie $a, c > 0$, fie $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ funcția definită prin

$$F(u,v) := (u\cos v,\; u\sin v,\; cv)$$

și fie pânza de suprafață $\sigma := F\Big|_{[0,a]\times[0,2\pi]}$ (a se vedea figura 6.7.1). Să se determine aria pânzei σ.

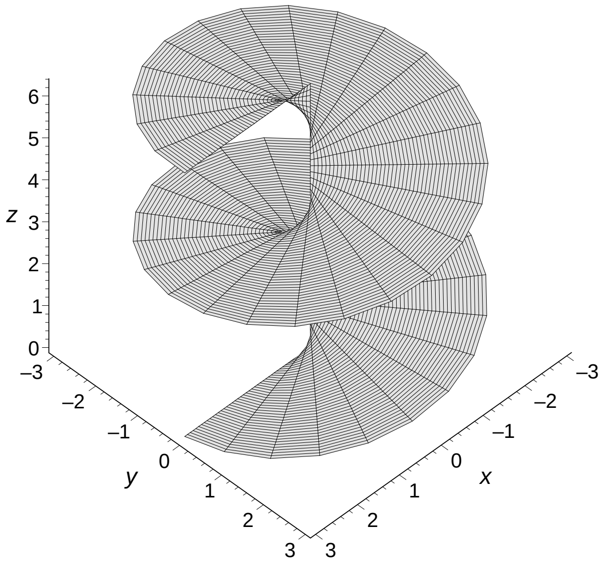


Figura 6.7.1: Graficul pânzei $F\Big|_{[0,3]\times[0,4\pi]}$ din problema 1, pentru $c = 0.5$.

2. Fie $R, r > 0$, fie $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ funcția definită prin

$$F(u, v) := \big((R + r\cos v)\cos u,\ (R + r\cos v)\sin u,\ r\sin v\big)$$

și fie pânza de suprafață $\sigma := F\Big|_{[0,2\pi]\times[0,2\pi]}$ (a se vedea figura 6.7.2). Să se determine aria pânzei σ.

3. Fie $H := \{\,(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geq 0\,\}$ semisfera unitate, fie $C := \{\,(x, y, 0) \mid x^2 + y^2 = 1\,\}$ cercul unitate și fie P un pentagon regulat înscris în C. Să se determine aria porțiunii lui H situate deasupra regiunii plane din interiorul lui P. Răspunsul va fi exprimat sub forma $A\sin\alpha + B\cos\beta$, cu A, B, α, β numere reale.

Concursul William Lowell Putnam 1998

4. O sferă $S \subseteq \mathbb{R}^3$ intersectează o altă sferă B de rază 1. In plus, S conține centrul lui B. Să se demonstreze că aria porțiunii lui S, situate în interiorul lui B, este independentă de raza lui S.

J. Mycielski, Math. Mag. [1998, 143]

5. Să se calculeze $\displaystyle\int_\Sigma (xy + yz + zx)\,dS$, dacă Σ este suprafața având drept

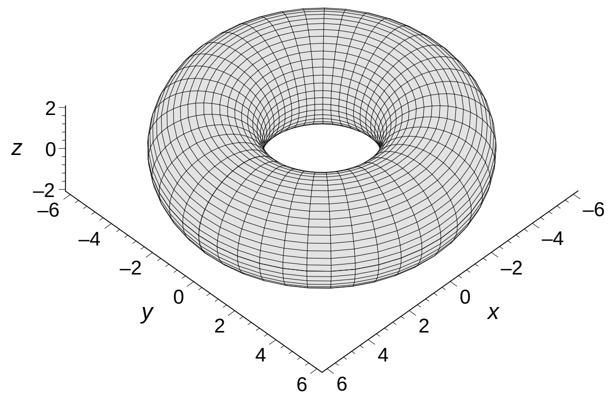


Figura 6.7.2: Graficul pânzei din problema 2, pentru $r = 2$ și $R = 4$.

imagine porțiunea din conul de ecuație $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, situată în interiorul cilindrului $x^2 + y^2 - 2ax = 0$, cu $a > 0$.

6. Fie $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ funcția definită prin

$$F(u, v) := \big((1 + \cos^2 u) \cos v,\ (1 + \cos^2 u) \sin v,\ \sin^2 u\big)$$

și fie pânza de suprafață $\sigma := F\Big|_{[0,\pi/2]\times[0,2\pi]}$ (a se vedea figura 6.7.3). Să se calculeze $\displaystyle\int_\sigma y^2\, dS$.

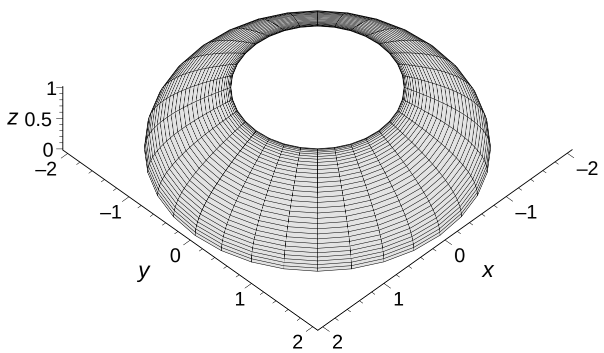


Figura 6.7.3: Graficul pânzei din problema 6.

7. Să se calculeze $\displaystyle\int_\Sigma (x^2 + y^2)\, dS$, dacă Σ este suprafața având drept imagine sfera cu centrul în origine și de rază $a > 0$.

8. Să se calculeze $\displaystyle\int_\Sigma (x^2+y+z)\,dS$, dacă Σ este suprafața având drept imagine sfera cu centrul în origine și de rază 1.

9. Fie $a,b,c>0$, iar Σ suprafața având imaginea

$$I(\Sigma)=\left\{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\;\middle|\;x,y,z\ge 0,\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\,\right\}.$$

Să se calculeze

$$\int_\Sigma \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}\,dS.$$

10. Să se calculeze $\displaystyle\int_\Sigma xyz\,dS$, dacă Σ este suprafața având drept imagine porţiunea din paraboloidul $z=x^2+y^2$, situată în primul octant și în interiorul cilindrului $x^2+y^2=1$.

11. Să se demonstreze că atracția gravitațională exercitată de o coajă subțire omogenă sferică asupra unui punct material exterior este aceeași ca și când materialul cojii ar fi concentrat în centrul sferei.

Concursul William Lowell Putnam 1938

6.8 Probleme – Integrale de suprafață de al doilea tip

1. Fie $R,r>0$, fie $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ funcția definită prin

$$F(u,v):=\big((R+r\cos v)\cos u,\,(R+r\cos v)\sin u,\,r\sin v\big)$$

și fie pânza de suprafață $\sigma:=F\Big|_{[0,2\pi]\times[0,2\pi]}$ (a se vedea figura 6.7.2). Să se calculeze $\displaystyle\int_\sigma x\,dy\wedge dz+y\,dz\wedge dx+z\,dx\wedge dy$.

2. Fie funcția $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, definită prin

$$F(\varphi,\theta):=\big(\sin\varphi\cos\theta,\,\sin\varphi\sin\theta,\,\cos\varphi\big)$$

și fie pânza de suprafață $\sigma:=F\Big|_{[0,\pi/2]\times[0,2\pi]}$. Să se calculeze direct și cu ajutorul formulei lui Stokes $\displaystyle\int_{\partial\sigma}-ydx+xdy+zdz$.

3. Să se calculeze $\int_\Sigma x\,dy \wedge dz + y^2\,dz \wedge dx - 2yz\,dx \wedge dy$, dacă Σ este fața exterioară a semisferei $x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geq 0$.

4. Să se calculeze $\int_\Sigma x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx + z\,dx \wedge dy$, dacă Σ este fața interioară a sferei cu centrul în origine și de rază $a > 0$.

5. Să se calculeze $\int_\Sigma -y^2\,dy \wedge dz + xy\,dz \wedge dx + (y + z)\,dx \wedge dy$, dacă Σ este acea față a triunghiului definit prin $x, y, z \geq 0,\ 2x + 2y + z = 6$, având componenta pe axa Ox a normalei pozitivă.

6. Să se calculeze

$$\int_\Sigma \left(xz^2 + e^{y^2}\right) dy \wedge dz + x \sin z\,dz \wedge dx + (y^2 + yz)\,dx \wedge dy,$$

dacă Σ este fața exterioară a elipsoidului $x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1$.

7. Să se calculeze $\int_\Sigma x^2\,dy \wedge dz + y^2\,dz \wedge dx + z^2\,dx \wedge dy$, dacă Σ este fața exterioară a paraboloidului de ecuație $z = x^2 + y^2,\ z \leq h$, unde $h > 0$ este dat.

8. Fie funcția $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definită prin

$$F(\rho, \varphi, \theta) := \big(\rho \sin\varphi \cos\theta,\ \rho \sin\varphi \sin\theta,\ \rho \cos\varphi\big)$$

și fie 3-pânza în $\mathbb{R}^3$ definită prin $\sigma := F\Big|_{[0,1]\times[0,\pi]\times[0,2\pi]}$. Să se calculeze direct și cu ajutorul formulei lui Gauss-Ostrogradski

$$\int_{\partial\sigma} x\,dy \wedge dz + z\,dz \wedge dx + x\,dx \wedge dy.$$

Bibliografie

[1] W. W. Breckner: *Analiză matematică. Topologia spațiului* $\mathbb{R}^n$. Universitatea din Cluj-Napoca, 1985.

[2] D. Cătinaș et al.: *Calcul integral. Culegere de probleme pentru seminarii, examene și concursuri.* Editura U. T. Pres, Cluj-Napoca, 2000.

[3] Ş. Cobzaș: *Analiză matematică (calculul diferențial).* Presa Universitară Clujeană, Cluj-Napoca, 1997.

[4] P. N. De Souza și J.-N. Silva: *Berkeley Problems in Mathematics*. Springer, 1998.

[5] P.M. Fitzpatrick: *Advanced Calculus: Second Edition*. AMS, 2006

[6] K. S. Kedlaya, B. Poonen și R. Vakil: *The William Lowell Putnam Mathematical Competition 1985 - 2000. Problems, Solutions, and Commentary*. The Mathematical Association of America, 2002.

[7] M. Megan: *Bazele analizei matematice. Vol. 2,3*. Editura EUROBIT, Timișoara, 1998.

[8] C. P. Niculescu: *Calculul integral al funcțiilor de mai multe variabile. Teorie și aplicații*. Editura Universitaria, Craiova, 2002.

[9] S. Rădulescu și M. Rădulescu: *Teoreme și probleme de analiză matematică*. Editura Didactică și Pedagogică, București, 1982.

[10] T. Trif: *Probleme de calcul diferențial și integral în* $\mathbb{R}^n$. Universitatea Babeș-Bolyai, Cluj-Napoca, 2003.

Index