

## Integrale improprii

**Exercițiul 1:** Studiați integrabilitatea improprie (cu ajutorul definiției și a formulei lui Leibniz-Newton) pentru următoarele funcții. În caz de convergență, determinați valoarea integralei improprii.

Pentru toate exemplele de aici, vom urma următorii pași:

**Pasul 1:** Determinăm integrala nedefinită a lui  $f$

**Pasul 2:** Alegem o primitivă a lui  $f$  (de regulă din integrala nedefinită alegem funcția cu constanta =0)

**Pasul 3:** Calculăm  $\lim$  din primitivă, înspre punctele problemă. Dacă limita există și este finită, atunci suntem într-un caz de convergență.

a)

$$f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

b)

$$f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{1}{x(x+1)}.$$

c)

$$f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \ln x.$$

d)

$$f : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

e)

$$f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}.$$

f)

$$f : [e, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{1}{x \cdot (\ln x)^3}.$$

g)

$$f : \left( \frac{1+\sqrt{3}}{2}, 2 \right] \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2x^2-2x-1}}.$$

h)

$$f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x.$$

i)

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{1+x^2},$$

j)

$$f: \left(\frac{1}{3}, 3\right] \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{3x-1}}$$

k)

$$f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}.$$

**Exercițiul 2:** Studiați integrabilitatea improprie (cu ajutorul criteriului de comparație) pentru următoarele funcții. (În caz de convergență nu se poate determina imediat valoarea integralei improprie, criteriul doar ne asigură ipotezele de convergență).

Pentru toate exemplele de aici, vom urma următorii pași:

**Pasul 1:** Determinăm capetele problemă ale domeniului de definiție.

**Pasul 2:** Calculăm

$$\lim_{x \uparrow b} (b-x)^p f(x)$$

și setăm  $p$  astfel încât valoarea limitei să fie  $\in (0, \infty)$ , pentru  $f: [a, b) \rightarrow [0, \infty)$ . Dacă domeniul este deschis în  $a$ , atunci calculăm

$$L = \lim_{x \downarrow a} (x-a)^p f(x)$$

iar dacă domeniul este nemărginit superior (deci  $[a, \infty)$ )

$$L = \lim_{x \rightarrow \infty} x^p f(x).$$

**Pasul 3:** În primele două cazuri dacă  $p < 1$  avem integrabilitate improprie convergentă, iar în al treilea, dacă  $p > 1$ .

a)

$$f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$$

b)

$$f: [0, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{1}{\cos x}$$

c)

$$f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \left(\frac{\arctg x}{x}\right)^2$$

d)

$$f: (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \left(\frac{\ln x}{x\sqrt{x^2-1}}\right)^2$$

e)

$$f : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \left( \frac{\ln x}{x\sqrt{x^2 - 1}} \right)^2$$