Geometrie afină - Poziţia relativă a planelor afine - probleme cu soluţii

Aprilie 2018

Noţiuni teoretice: Varietatea liniară aflată la intersecţia a două varietăţii afine, date prin sistemele de ecuaţii liniare S_1 şi S_2, este dată de sistemul de ecuaţii alcătuit din ecuaţiile sistemelor S_1 şi S_2. Dacă rangul matricii sistemului astfel obţinut este r, atunci dimensiunea intersecţiei este $n-r$, unde n este dimensiunea spaţiului vectorial iniţial (4 sau 5 în problemele de mai jos).

La problemele în care este cunoscută forma parametrică a varietăţii liniare se determină soluţia sistemului, apoi subspaţiul director şi se stabileşte dacă au elemente comune. Adică determinăm $D(A)\bigcap D(B)$. Dacă $D(A)\subset D(B)$ sau invers, cele două varietăţi afine sunt paralele.

Problema 1. În fiecare dintre următoarele cazuri studiaţi poziţiile relative ale planelor afine din spaţiile indicate, date prin intermediul ecuaţiilor lor.

a) Spaţiul C^5, planele:

$$\pi_4 : -2x^1+2x^2-4x^3+2x^5=2;$$

$$\pi_3 : \begin{cases} -3x^1-x^3-x^4=2, \\ -3x^1-6x^2+9x^3-3x^4-6x^5=0. \end{cases}$$

Soluţie: Rangul matricii sistemului alcătuit din cele trei ecuaţii este egal cu doi, deoarece ecuaţia prin care se defineşte π_4 este o combinaţie liniară a celor care dau π_3.

Observăm că

$$\pi_4=\{(x^1,x^2,x^3,x^4,x^5)|x^1=\alpha-2\beta+\delta-1,\ x^2=\alpha,\ x^3=\beta,\ x^4=\gamma,\ x^5=\delta,\ \alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}\}$$

depinde de patru parametri reali, iar

$$\pi_3=\{(x^1,x^2,x^3,x^4,x^5)|x^1=-\frac{1}{3}(\beta+\gamma+2),x^2=\frac{1}{3}(5\beta-\gamma-3\delta+1),\ x^3=\beta,x^4=\gamma,x^5=\delta,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}\}$$

depinde de trei parametri. Calculând x^1-x^2 pentru punctele din π_3 găsim $x^1-x^2=-2\beta+\delta-1$, condiţie îndeplinită de punctele din π_4, de aceea spunem că $\pi_3\subset\pi_4$.

b) Spaţiul C^5, planele:

$$\pi_3 : \begin{cases} x^1-2x^2+x^3-5x^4-3x^5+3=3, \\ 3x^1+4x^2-2x^3-x^4-x^5-15=0; \end{cases}$$

$$\pi_2 : \begin{cases} x^1=-t+u+2, \\ x^2=3t-u+2, \\ x^3=u-1, \\ x^4=-t+2u+3, \\ x^5=-3u-4. \end{cases}$$

Soluţie: Se intersectează într-un punct. Sistemul obţinut după înlocuirea $x_1, \ldots, x_5$ are soluţie unică.

c) Spaţiul C^4, planele:

$$\pi_2 : \begin{cases} x^1 - 3x^2 - 2x^3 = -3, \\ 3x^2 + 2x^3 - x^4 = 4; \end{cases} \qquad \theta_2 : \begin{cases} x^1 + x^2 - 3x^3 + x^4 = 0, \\ 2x^1 + x^2 - 3x^3 = 1. \end{cases}$$

Soluţie: Rangul matricii sistemului este trei. A doua ecuaţie din θ_2 este o combinaţie liniară între celelalte trei. Intersecţia este o dreaptă, pentru că dimensiunea spaţiului vectorial este egală cu 4, varietatea este dată de trei ecuaţii liniare, dimensiunea ei este 4-3=1 - dreaptă in C^4.

d) Spaţiul C^5, planele:

$$\pi_2 : \begin{cases} x^1 = 1 + 2u - 3v, \\ x^2 = 1 + u - v, \\ x^3 = 2 - u + 2v, \\ x^4 = -1 + u + 2v, \\ x^5 = 3u - v; \end{cases} \qquad \theta_2 : \begin{cases} x^1 = 2 - u + v, \\ x^2 = 4 + 2u - v, \\ x^3 = 3u + v, \\ x^4 = 2 + u + 2v, \\ x^5 = 1 + u + v. \end{cases}$$

Soluţie: Matricea care are pe coloane vectorii bazelor are rangul 4, subspaţiile directoare ale varietăţiilor sunt disjuncte (vectorii care le alcătuiesc sunt liniar independenţi), rezultă ca varietăţiile sunt neparalele (strâmbe).

e) Spaţiul C^4, planele:

$$\pi_1 : \begin{cases} x^1 = -2t - 1, \\ x^2 = t - 2, \\ x^3 = -t + 1, \\ x^4 = -t - 3; \end{cases} \qquad \pi_2 : \begin{cases} x^1 + 2x^2 + 3x^3 - 3x^4 + 8 = 0, \\ 3x^1 + 4x^2 - x^3 - x^4 + 6 = 0. \end{cases}$$

Soluţie: Sistemul obţinut după înlocuirea lui $x_1, \ldots, x_4$, este 15=0, -3=0, nu are soluţie, cele două varietăţi nu au nici un punct în comun. Vectorul director al dreptei π_1 este în spaţiul director al planului π_2 (pe care îl obţii scriind soluţia parametrică a sistemului de 2 ecuaţii cu 2 necunoscute), de aceea varietăţile sunt paralele.

f) Spaţiul C^4, planele:

$$\pi_3 : x^1 + x^2 + x^3 + x^4 = 0; \quad \pi_2 : \begin{cases} x^1 + x^2 = 5, \\ x^2 - x^4 = 0. \end{cases}$$

Soluţie: Rangul matricii sistemului este 3, al matricii extinse 3, sistem compatibil nedeterminat, ecuaţiile din sistem reprezintă ecuaţiile unei varietăţi de dimensiune 1 - o dreaptă.

g) Spaţiul C^5, planele:

$$\pi_3 : \begin{cases} x^1 = 1 + t^1 - t^2, \\ x^2 = t^2 + t^3, \\ x^3 = 3 - t^1 - t^2 - t^3, \\ x^4 = 5 + t^1 + 2t^2 + t^3, \\ x^5 = 1 + t^3; \end{cases} \qquad \pi_4 : x^1 - x^2 - x^3 - x^4 + 5x^5 = 0.$$

Soluţie: Înlocuind $x_1, \ldots, x_5$ în ecuaţia lui π_4 găseşti $-2 + 6\,t^1 - 3\,t^2 - t^3 = 0$, relaţie verificată dacă $t^1 = (1/6)(2 + 3t^2 + t^3)$, adică intersecţia este un plan de parametrii t^2 şi t^3.

Problema 2. În spaţiul C^4, stabiliţi poziţia relativă a dreptei l_1, definită de punctul $M(0,4,0,1)$ şi vectorul $\vec{p}(1,0,0,3)$, şi a planului π_2, definit de punctul $N(1,1,2,2)$ şi de vectorii $\vec{q}_1(0,0,1,2)$ şi $\vec{q}_2(1,0,-1,2)$.

Soluţie: Ecuaţiile parametrice ale dreptei care trece prin punctul $M(0,4,0,1)$ şi are vector director $\vec{p}(1,0,0,3)$ sunt

$$l_1 : \begin{cases} x^1 = t, \\ x^2 = 4, \\ x^3 = 0, \\ x^4 = 1 + 3t; \end{cases}$$

iar ecuaţiile parametrice ale planului π_2, care conţine punctul $N(1,1,2,2)$ şi este paralel cu vectorii $\vec{q}_1(0,0,1,2)$ şi $\vec{q}_2(1,0,-1,2)$ sunt

$$\pi_2 : \begin{cases} x^1 = 1 + v, \\ x^2 = 1, \\ x^3 = 2 + u - v, \\ x^4 = 2 + 2u + 2v. \end{cases}$$

Observăm că punctele care se găsesc pe dreapta l_1 au $x^2 = 4$, iar cele din planul π_2 au $x^2 = 1$, de aceea cele două varietăţi liniare nu au puncte comune.

Sunt paralele? Dacă da, atunci există două numere reale α şi β, astfel încât vectorul director al lui l_1 se scrie sub forma $\vec{p} = \alpha\vec{q}_1 + \beta\vec{q}_2$. Sistemul obţinut explicitând relaţia vectorială de mai sus

$$\begin{cases} 1 = \beta, \\ 0 = 0, \\ 0 = \alpha - \beta, \\ 3 = 2\alpha + 2\beta \end{cases}$$

este incompatibil. Rezultă că varietăţile considerate sunt strâmbe (nu sunt paralele şi nu au nici un punct comun).

Problema 3. În spaţiul C^4 se dau dreptele AB şi CD. Stabiliţi poziţia lor relativă în fiecare dintre următoarele cazuri:

a) $A(2,1,-1,2), B(-1,0,3,1), C(6,2,8,-2), D(3,1,12,-3)$;

b) $A(4,0,-1,2), B(0,3,2,1), C(1,-1,-1,0), D(2,-1,-4,-5)$.

Soluţie:

a) Dreapta AB trece prin punctul $A(2,1,-1,2)$ are vector director $\vec{AB}(-3,-1,4,-1)$, iar dreapta CD care trece prin $C(6,2,8,-2)$ are vector director $\vec{CD}(-3,-1,4,-1)$. Observăm că $\vec{AB} = \vec{CD}$, adică dreptele sunt paralele.

Pentru a afla dacă au un punct comun, scriem ecuaţiile parametrice ale celor două drepte

$$AB : \begin{cases} x^1 = 2 - 3\lambda, \\ x^2 = 1 - \lambda, \\ x^3 = -1 + 4\lambda, \\ x^4 = 2 - \lambda, \end{cases} \qquad CD : \begin{cases} x^1 = 6 - 3\mu, \\ x^2 = 2 - \mu, \\ x^3 = 8 + 4\mu, \\ x^4 = -2 - \mu \end{cases}$$

cu $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Condiţia necesară pentru ca cele două drepte să se intersecteze este ca să existe valori ale parametrilor λ şi μ astfel încât (x^1, x^2, x^3, x^4) calculate cu ajutorul lui AB să aibă aceeaşi valoare ca şi cele calculate cu ajutorul ecuaţiilor parametrice ale lui CD. Egalând ecuaţiile corespunzătoare componentelor x^1 şi x_2 găsim $3(\mu - \lambda) = 4$, respectiv $\mu - \lambda = 1$, contradicţie. Rezultă că $AB \parallel CD$.

b) Dreapta AB trece prin punctul $A(4,0,-1,2)$ are vector director $\vec{AB}(-4,3,3,-1)$, iar dreapta CD care trece prin $C(1,-1,-1,0)$ are vector director $\vec{CD}(1,0,-3,-5)$. Observăm că oricare ar fi $\lambda \in \mathbb{R}$ $\vec{AB} \neq \lambda\vec{CD}$, adică dreptele nu sunt paralele. Pentru a verifica dacă se intersectează procedăm ca mai sus, scriem ecuaţiile parametrice ale celor două drepte şi punem condiţia ca un punct de pe dreapta AB să aparţină şi dreptei CD. Sistemul obţinut este incompatibil, dreptele AB şi CD sunt strâmbe.