

Șiruri de numere reale - partea a 2-a

Exercițiul 1: Studiați natura (monotonia și mărginirea)șirului cu termenul general

$$x_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right), \quad n \geq 2.$$

În caz de convergență calculați efectiv limita.

Exercițiul 2: Calculați limitele următoarelor șirui de numere reale având ca termen general:

$$\begin{aligned} a) \quad & \frac{3^n}{4^n}, & b) \quad & \frac{2^n + (-2)^n}{3^n}, & c) \quad & \frac{5 - n^3}{n^2 + 1}, & d) \quad & \left(2 + \frac{4^n + (-5)^n}{7^n + 1}\right)^{2n^3 - n^2}, \\ e) \quad & \frac{1 + 2 + \dots + n}{n^2}, & f) \quad & \left(\frac{n^3 + 4n + 1}{2n^3 + 5}\right)^{\frac{-2n^4 + 1}{n^4 + 3n + 1}}, & g) \quad & (\cos(-2013))^n, \\ h) \quad & \left(\frac{n^5 + 3n + 1}{2n^5 - n^4 + 3}\right)^{\frac{3n - n^4}{n^3 + 1}}. \end{aligned}$$

Exercițiul 3: Calculați limitele următoarelor șirui de numere reale

$$\begin{aligned} a) \quad & \left(1 + \frac{1}{-n^3 + 3n}\right)^{n^2 - n^3}, & b) \quad & (3n^2 + 5)\ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right), \\ c) \quad & \frac{n^n}{1^1 + 2^2 + \dots + n^n}, \\ d) \quad & \frac{x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n}{n^2}, \end{aligned}$$

unde $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir convergent către $x \in \mathbb{R}$.

Exercițiul 4: Calculați limitele șirurilor de numere reale având termenul general:

$$\begin{aligned} a) x_n &= \frac{a^n - a^{-n}}{a^n + a^{-n}}, \quad a \neq 0 \\ b) y_n &= \frac{a^n + b^n}{a^{n+1} + b^{n+1}}, \quad a \neq -b \\ c) z_n &= \frac{1 + a + \dots + a^n}{1 + b + \dots + b^n}, \quad a, b > 0. \end{aligned}$$