Seminarul 3

Fie X un spaţiu liniar real şi $\|\cdot\| : X \to [0,\infty)$ o normă pe X. Se spune că norma $\|\cdot\|$ provine dintr-un produs scalar dacă există un produs scalar $\langle\cdot,\cdot\rangle$ pe X, cu proprietatea $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ pentru orice $x \in X$.

1. Să se demonstreze că orice normă pe un spaţiu liniar real X, care provine dintr-un produs scalar, satisface identitatea paralelogramului:

$$\forall \;\; x, y \in X \;\; : \qquad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 .$$

2. Să se demonstreze că funcţia $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$, definită prin

$$\|x\|_\infty := \max\{\, |x_1|, \ldots, |x_n|\,\} \quad \text{oricare ar fi } x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

este o normă, numită *norma Cebîşev* pe $\mathbb{R}^n$. Să se arate că norma Cebîşev nu provine dintr-un produs scalar.

3. Să se demonstreze că funcţia $\|\cdot\|_1 : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$, definită prin

$$\|x\|_1 := |x_1| + \cdots + |x_n| \quad \text{oricare ar fi } x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

este o normă, numită *norma Minkowski* pe $\mathbb{R}^n$. Să se arate că norma Minkowski nu provine dintr-un produs scalar.