

Analiză matematică 2 (Calcul diferențial în \mathbb{R}^n)

Lucrare de control la grupele 111, 311, 312 și 313 (16.4.2013)

1. a) Să se calculeze $\int_{0+0}^1 \ln(\sqrt{1+x} - 1) dx$.
b) Să se determine numerele $\alpha \in \mathbb{R}$ pentru care integrala improprie

$$I(\alpha) := \int_{0+0}^1 \frac{x}{(1 - \cos 2x)^\alpha} dx$$

este convergentă.

2. a) Să se definească noțiunile de punct interior, punct aderent și punct frontieră pentru o submulțime A a lui \mathbb{R}^n .
b) Să se demonstreze că pentru orice mulțime $A \subseteq \mathbb{R}^n$ are loc egalitatea

$$\text{cl } A = (\text{int } A) \cup (\text{bd } A).$$

- c) Fie $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ o funcție continuă pe \mathbb{R}^n și fie B o submulțime închisă a lui \mathbb{R}^m . Să se demonstreze că mulțimea

$$f^{-1}(B) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \in B\}$$

este închisă în \mathbb{R}^n .

3. a) Există limita $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 - x^2y^2 + y^4}{x^2y}$?
b) Să se calculeze $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy - \sin x \sin y}{xy(x^2 + y^2)}$.