Şiruri de funcţii

Probleme rezolvate

Toate exemplele au acelaşi enunţ: studiaţi mulţimea de convergenţă şi natura convergenţei (deci punctuală sau uniformă) pentru următoarele şiruri de funcţii:

Exerciţiul 1:

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{x^2}{n^2 + x^4}, \quad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

Rezolvare:

Pasul 1. Fixăm $x \in \mathbb{R}$ şi calculăm

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{n^2 + x^4} = 0.$$

Deoarece valoarea limitei nu variaza deloc şi nu este influenţată de valoarea lui x, nu avem restricţii, deci mulţimea de convergenţă coincide cu domeniul de definiţie al şirului de funcţii şi este

$$\mathcal{C} = \mathbb{R},$$

şi putem defini funcţia limită punctuală

$$f : \mathcal{C} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

Aşadar

$$f_n \to f.$$

Pasul 2. Fixăm un $n \in \mathbb{N}$ şi calculăm

$$a_n = \sup \{|f_n(x) - f(x)| : x \in \mathbb{R}\}\,.$$

Se observă că acest supremum este de fapt asemănător maximului unei funcţii, de aceea introducem, pe mulţimea de convergenţă funcţia

$$g : \mathcal{C} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = |f_n(x) - f(x)|, \quad \forall x \in \mathcal{C}.$$

Vom studia variaţia acestei funcţii cu ajutorul derivatei şi vom realiza în acest scop tabelul de variaţie. Remintim faptul că am fixat n-ul, deci el este o constantă în toate calculele. Astfel

$$g(x) = |f_n(x) - f(x)| = |f_n(x) - 0| = \left|\frac{x^2}{n^2 + x^4}\right| = \frac{x^2}{n^2 + x^4}, \quad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

Funcţia g, fiind o compunere de funcţii elementare, este derivabilă pe $\mathbb{R}$, iar derivata este:

$$g'(x) = \frac{2x(n^2 + x^4) - x^2 \cdot 4x^3}{(n^2 + x^4)^2} = \frac{2x(n^2 - x^4)}{(n^2 + x^4)^2} = \frac{2x(n - x^2)(n + x^2)}{(n^2 + x^4)^2}.$$

Observăm că soluţiile ecuaţiei $g'(x) = 0$ sunt $x = \pm\sqrt{n}$.

Se observă că atât $x = -\sqrt{n}$ cât şi $x = \sqrt{n}$ sunt puncte de mxim local ale lui g, iar

$$g(-\sqrt{n}) = g(\sqrt{n}) = \frac{1}{2n}.$$

Deoarece $g(x) \leq \frac{1}{2n}, quad \forall x \in \mathbb{R}$, putem seta

$$a_n = \frac{1}{2n}.$$

Acesta este momentul când generalizăm, şi ajungem la concluzia că pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{1}{2n}$. Observăm că ipotezele teoremei lui Weierstrass sunt satisfăcute, deoarece

$$|f_n(x) - f(x)| \leq a_n, \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} \quad si \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

De aceea

$$f_n \rightrightarrows f.$$

Exerciţiul 2:

$$f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{1}{1+nx}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Rezolvare:

Pasul 1. Fixăm $x \in [0,\infty)$ şi calculăm

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+nx} = \begin{cases} 1: & x = 0 \\ 0: & x \in (0,\infty). \end{cases}$$

Mulţimea de convergenţă coincide cu domeniul de definiţie al şirului de funcţii şi este

$$\mathcal{C} = [0,\infty),$$

şi putem defini funcţia limită punctuală

$$f : \mathcal{C} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1: & x = 0 \\ 0: & x \in (0,\infty). \end{cases}$$

Aşadar

$$f_n \to f.$$

Pasul 2. Analizăm convergenţa uniformă. Constatăm că pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, funcţia f_n este continuă pe domeniul de definiţie. În contrast cu această situaţie constatăm că:

$$\lim_{x\downarrow 0} f(x) = 0 \neq 1 = f(0),$$

deci, conform teoremei de caracterizare a continuităţii cu limite latereale, rezultă că funcţia f nu este continuă în 0.

Din teorema de caracterizare a continuităţii prin convergenţa uniformă, constatăm că în acest caz

$$f_n \not\rightrightarrows f,$$

deoarece toate funcţiile $f_n, \forall n \in \mathbb{N}$ sunt continue, dar funcţia limită punctuală nu este continuă.

Exerciţiul 3:

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = 2n^2 x e^{-n^2x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Rezolvare:

Pasul 1. Fixăm $x \in \mathbb{R}$ şi calculăm

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} 2n^2 x e^{-n^2x^2} = \begin{cases} 0 : & x = 0 \\ 2x \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{e^{n^2x^2}} : & x \neq 0 \end{cases}.$$

Separăm

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{e^{n^2x^2}} = \frac{\infty}{\infty}.$$

Pentru a rezolva această limită când $n \to \infty$, fixăm un $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ şi introducem o nouă funcţie $h : [1, \infty) \to \mathbb{R}$, definită prin

$$h(t) = \frac{t^2}{e^{t^2x^2}}.$$

Calculăm limita următoare folosind teorema lui l'Hospital

$$\lim_{t\to\infty} h(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{t^2}{e^{t^2x^2}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{t\to\infty} \frac{2t}{2tx^2e^{t^2x^2}} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{x^2e^{t^2x^2}} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Particularizând aceasta limită la mulţimea numerelor naturale, ajungem la concluzia că:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{e^{n^2x^2}} = 0.$$

Deci, mulţimea de convergenţă coincide cu domeniul de definiţie al şirului de funcţii şi este

$$\mathcal{C} = \mathbb{R},$$

şi putem defini funcţia limită punctuală

$$f : \mathcal{C} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Aşadar

$$f_n \to f.$$

Pasul 2. Fixăm un $n \in \mathbb{N}$ şi calculăm

$$a_n = \sup \{|f_n(x) - f(x)| : x \in \mathbb{R}\}.$$

Se observă că acest supremum este de fapt asemănător maximului unei funcţii, de aceea introducem, pe mulţimea de convergenţă funcţia

$$g : \mathcal{C} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = |f_n(x) - f(x)|, \quad \forall x \in \mathcal{C}.$$

Vom studia variaţia acestei funcţii cu ajutorul derivatei şi vom realiza în acest scop tabelul de variaţie. Remintim faptul că am fixat n-ul, deci el este o constantă în toate calculele. Astfel

$$g(x) = |f_n(x) - f(x)| = |f_n(x) - 0| = \left|\frac{2n^2x}{e^{n^2x^2}}\right|, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Funcţia g, fiind o compunere de funcţii elementare, este derivabilă pe $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, iar derivata este:

$$g'(x) = 2n^2 \frac{e^{n^2x^2} - x2xn^2e^{n^2x^2}}{e^{2n^2x^2}} = 2n^2 \frac{1-2x^2n^2}{e^{n^2x^2}}.$$

Observăm că soluţiile ecuaţiei $g'(x) = 0$ sunt $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}n}$, Trebuie facut tabelul de variatie al funcţiei. Din acesta se va observa că $x = \frac{1}{\sqrt{2}n}$ este un punct de maxim. Dar,

$$f(\frac{1}{\sqrt{2}n}) = \sqrt{2}ne^{-\frac{1}{2}},$$

Atribuim pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, termenului a_n valoarea de mai sus, si constatăm că

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

Atunci, se poate demonstra că nu avem uniform convergenţă, deci

$$f_n \not\rightrightarrows f.$$