Mulțimi de numere (naturale, raționale, iraționale, reale)

Lect. univ. dr. **Anca GRAD**

octombrie 2018

Conceptul de relație este strâns legat de conceptul de produs cartezian.

Definiție: Fie A și B două mulțimi. Se numește **relație sau corespondență** de la A la B orice triplet ordonat $r = (A, B, G)$, unde G este o submulțime a produsului cartezian $A \times B$.

Dacă $r = (A, B, G)$ este o relație de la A la B, si $x \in A$ iar $y \in B$ au proprietatea că $(x, y) \in G$, spunem că elementul x este în relația r cu elementul y, și scriem xry.

Terminologie:

- A s.n. mulțimea de pornire a relației r;
- B s.n. mulțimea de sosire a relației r;
- G s.n. graficul relației r;
- mulțimea $D := \{x \in A : \exists y \in Ba.i.(x, y) \in G\}$ s.n. mulțimea de definiție a relației r;
- mulțimea $r(A) := \{y \in B : \exists x \in Aa.i.(x, y) \in G\}$ s.n. mulțimea valorilor relației r;
- dacă $x \in A$, atunci mulțimea $r(x) = \{y \in B : (x, y) \in G\}$ s.n. imaginea directă a elementului x prin relația r.

Conceptul de relație este strâns legat de conceptul de produs cartezian.

Definiție: Fie A și B două mulțimi. Se numește **relație sau corespondență** de la A la B orice triplet ordonat $r = (A, B, G)$, unde G este o submulțime a produsului cartezian $A \times B$.

Dacă $r = (A, B, G)$ este o relație de la A la B, si $x \in A$ iar $y \in B$ au proprietatea că $(x, y) \in G$, spunem că elementul x este în relația r cu elementul y, și scriem xry.

Terminologie:

- A s.n. mulțimea de pornire a relației r;
- B s.n. mulțimea de sosire a relației r;
- G s.n. graficul relației r;
- mulțimea $D := \{x \in A : \exists y \in Ba.i.(x, y) \in G\}$ s.n. mulțimea de definiție a relației r;
- mulțimea $r(A) := \{y \in B : \exists x \in Aa.i.(x, y) \in G\}$ s.n. mulțimea valorilor relației r;
- dacă $x \in A$, atunci mulțimea $r(x) = \{y \in B : (x, y) \in G\}$ s.n. imaginea directă a elementului x prin relația r.

Conceptul de relație este strâns legat de conceptul de produs cartezian.

Definiție: Fie A și B două mulțimi. Se numește **relație sau corespondență** de la A la B orice triplet ordonat $r = (A, B, G)$, unde G este o submulțime a produsului cartezian $A \times B$.

Dacă $r = (A, B, G)$ este o relație de la A la B, si $x \in A$ iar $y \in B$ au proprietatea că $(x, y) \in G$, spunem că elementul x este în relația r cu elementul y, și scriem xry.

Terminologie:

- A s.n. mulțimea de pornire a relației r;
- B s.n. mulțimea de sosire a relației r;
- G s.n. graficul relației r;
- mulțimea $D := \{x \in A : \exists y \in Ba.i.(x, y) \in G\}$ s.n. mulțimea de definiție a relației r;
- mulțimea $r(A) := \{y \in B : \exists x \in Aa.i.(x, y) \in G\}$ s.n. mulțimea valorilor relației r;
- dacă $x \in A$, atunci mulțimea $r(x) = \{y \in B : (x, y) \in G\}$ s.n. imaginea directă a elementului x prin relația r.

Conceptul de relație este strâns legat de conceptul de produs cartezian.

Definiție: Fie A și B două mulțimi. Se numește **relație sau corespondență** de la A la B orice triplet ordonat $r = (A, B, G)$, unde G este o submulțime a produsului cartezian $A \times B$.

Dacă $r = (A, B, G)$ este o relație de la A la B, si $x \in A$ iar $y \in B$ au proprietatea că $(x, y) \in G$, spunem că elementul x este în relația r cu elementul y, și scriem xry.

Terminologie:

- A s.n. mulțimea de pornire a relației r;
- B s.n. mulțimea de sosire a relației r;
- G s.n. graficul relației r;
- mulțimea $D := \{x \in A : \exists y \in Ba.i.(x, y) \in G\}$ s.n. mulțimea de definiție a relației r;
- mulțimea $r(A) := \{y \in B : \exists x \in Aa.i.(x, y) \in G\}$ s.n. mulțimea valorilor relației r;
- dacă $x \in A$, atunci mulțimea $r(x) = \{y \in B : (x, y) \in G\}$ s.n. imaginea directă a elementului x prin relația r.

Conceptul de relație este strâns legat de conceptul de produs cartezian.
Definiție: Fie A și B două mulțimi. Se numește **relație sau corespondență** de la A la B orice triplet ordonat $r = (A, B, G)$, unde G este o submulțime a produsului cartezian $A \times B$.

Dacă $r = (A, B, G)$ este o relație de la A la B, si $x \in A$ iar $y \in B$ au proprietatea că $(x, y) \in G$, spunem că elementul x este în relația r cu elementul y, și scriem xry.

Terminologie:

- A s.n. mulțimea de pornire a relației r;
- B s.n. mulțimea de sosire a relației r;
- G s.n. graficul relației r;
- mulțimea $D := \{x \in A : \exists y \in Ba.i.(x, y) \in G\}$ s.n. mulțimea de definiție a relației r;
- mulțimea $r(A) := \{y \in B : \exists x \in Aa.i.(x, y) \in G\}$ s.n. mulțimea valorilor relației r;
- dacă $x \in A$, atunci mulțimea $r(x) = \{y \in B : (x, y) \in G\}$ s.n. imaginea directă a elementului x prin relația r.

Conceptul de relație este strâns legat de conceptul de produs cartezian.
Definiție: Fie A și B două mulțimi. Se numește **relație sau corespondență** de la A la B orice triplet ordonat $r = (A, B, G)$, unde G este o submulțime a produsului cartezian $A \times B$.

Dacă $r = (A, B, G)$ este o relație de la A la B, si $x \in A$ iar $y \in B$ au proprietatea că $(x, y) \in G$, spunem că elementul x este în relația r cu elementul y, și scriem xry.

Terminologie:

- A s.n. mulțimea de pornire a relației r;
- B s.n. mulțimea de sosire a relației r;
- G s.n. graficul relației r;
- mulțimea $D := \{x \in A : \exists y \in B a.i. (x, y) \in G\}$ s.n. mulțimea de definiție a relației r;
- mulțimea $r(A) := \{y \in B : \exists x \in A a.i. (x, y) \in G\}$ s.n. mulțimea valorilor relației r;
- dacă $x \in A$, atunci mulțimea $r(x) = \{y \in B : (x, y) \in G\}$ s.n. imaginea directă a elementului x prin relația r.

Conceptul de relație este strâns legat de conceptul de produs cartezian.

Definiție: Fie A și B două mulțimi. Se numește **relație sau corespondență** de la A la B orice triplet ordonat $r = (A, B, G)$, unde G este o submulțime a produsului cartezian $A \times B$.

Dacă $r = (A, B, G)$ este o relație de la A la B, si $x \in A$ iar $y \in B$ au proprietatea că $(x, y) \in G$, spunem că elementul x este în relația r cu elementul y, și scriem xry.

Terminologie:

- A s.n. mulțimea de pornire a relației r;
- B s.n. mulțimea de sosire a relației r;
- G s.n. graficul relației r;
- mulțimea $D := \{x \in A : \exists y \in B a.i. (x, y) \in G\}$ s.n. mulțimea de definiție a relației r;
- mulțimea $r(A) := \{y \in B : \exists x \in A a.i. (x, y) \in G\}$ s.n. mulțimea valorilor relației r;
- dacă $x \in A$, atunci mulțimea $r(x) = \{y \in B : (x, y) \in G\}$ s.n. imaginea directă a elementului x prin relația r.

Conceptul de relație este strâns legat de conceptul de produs cartezian.
Definiție: Fie A și B două mulțimi. Se numește **relație sau corespondență** de la A la B orice triplet ordonat $r = (A, B, G)$, unde G este o submulțime a produsului cartezian $A \times B$.

Dacă $r = (A, B, G)$ este o relație de la A la B, si $x \in A$ iar $y \in B$ au proprietatea că $(x, y) \in G$, spunem că elementul x este în relația r cu elementul y, și scriem xry.

Terminologie:

- A s.n. mulțimea de pornire a relației r;
- B s.n. mulțimea de sosire a relației r;
- G s.n. graficul relației r;
- mulțimea $D := \{x \in A : \exists y \in Ba.i.(x, y) \in G\}$ s.n. mulțimea de definiție a relației r;
- mulțimea $r(A) := \{y \in B : \exists x \in Aa.i.(x, y) \in G\}$ s.n. mulțimea valorilor relației r;
- dacă $x \in A$, atunci mulțimea $r(x) = \{y \in B : (x, y) \in G\}$ s.n. imaginea directă a elementului x prin relația r.

Funcții

În cazul unei relații imaginea directă $r(x)$ poate fi

- vidă
- formată dintr-un singur element
- formată din mai multe elemente.

Pionieri ai teoriei funcțiilor: Leibniz(1673-1692), Bernoulli (1968), Euler (1750).

Definiție. Fie A și B două mulțimi. Se numește funție definită pe mulțimea A cu valori în mulțimea B orice relație $f = (A, B, G)$ de la mulțimea A la mulțimea B care are proprietatea că pentru fiecare element $x \in A$ există un element $y \in B$ și unul singur, a.i. x să fie în relație cu y.

Funcții

În cazul unei relații imaginea directă $r(x)$ poate fi

- vidă
- formată dintr-un singur element
- formată din mai multe elemente.

Pionieri ai teoriei funcțiilor: Leibniz(1673-1692), Bernoulli (1968), Euler (1750).

Definiție. Fie A și B două mulțimi. Se numește funție definită pe mulțimea A cu valori în mulțimea B orice relație $f = (A, B, G)$ de la mulțimea A la mulțimea B care are proprietatea că pentru fiecare element $x \in A$ există un element $y \in B$ și unul singur, a.i. x să fie în relație cu y.

Funcții

În cazul unei relații imaginea directă $r(x)$ poate fi

- vidă
- formată dintr-un singur element
- formată din mai multe elemente.

Pionieri ai teoriei funcțiilor: Leibniz(1673-1692), Bernoulli (1968), Euler (1750).

Definiție. Fie A și B două mulțimi. Se numește funție definită pe mulțimea A cu valori în mulțimea B orice relație $f = (A, B, G)$ de la mulțimea A la mulțimea B care are proprietatea că pentru fiecare element $x \in A$ există un element $y \in B$ și unul singur, a.i. x să fie în relație cu y.

Funcții

În cazul unei relații imaginea directă $r(x)$ poate fi

- vidă
- formată dintr-un singur element
- formată din mai multe elemente.

Pionieri ai teoriei funcțiilor: Leibniz(1673-1692), Bernoulli (1968), Euler (1750).

Definiție. Fie A și B două mulțimi. Se numește funție definită pe mulțimea A cu valori în mulțimea B orice relație $f = (A, B, G)$ de la mulțimea A la mulțimea B care are proprietatea că pentru fiecare element $x \in A$ există un element $y \in B$ și unul singur, a.i. x să fie în relație cu y.

Definiție. Fie M o mulțime nevidă. Se numește operație internă pe M, orice funcție $f : M \times M \to M$.

Definiție: Se numește corp orice triplet $(K, +, \cdot)$ format dintr-o mulțime nevidă K și două operații interne

$$+, \cdot : K \times K \to K$$

care se bucură de proprietățile:

1. $(K, +)$ este un grup comutativ
2. $(K^*, \cdot)$ este un grup
3. oricare ar fi $x, y, z \in K$ au log egalitățile

$$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$$

$$(x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)$$

Definiție. Fie M o mulțime nevidă. Se numește operație internă pe M, orice funcție $f : M \times M \to M$.

Definiție: Se numește corp orice triplet $(K, +, \cdot)$ format dintr-o mulțime nevidă K și două operații interne

$$+, \cdot : K \times K \to K$$

care se bucură de proprietățile:

1. $(K, +)$ este un grup comutativ
2. $(K^*, \cdot)$ este un grup
3. oricare ar fi $x, y, z \in K$ au log egalitățile

$$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$$

$$(x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)$$

Fie D o mulțime. Se numește relație binară pe D orice relație $r = (D, D, G)$

Definiție: Fie D o mulțime. O relație binară pe D, $r = (D, D, G)$ se numește

- reflexivă dacă $\forall x \in D, xrx$;
- simetrică dacă $\forall x, y \in D$, cu xry avem yrx;
- antisimetrică dacă $\forall x, y \in D$, cu xry și yrx, avem $x = y$;
- tranzitivă dacă $\forall x, y, z \in D$ cu xry și yrz, avem xrz;
- de echivalență daca este reflexivă, simetrică și tranzitivă;
- de ordine dacă este reflexivă, antisimetrică și tranzitivă;
- de ordine strictă dacă este tranzitivă și $\forall x, y \in D$ cu xry, avem $x \neq y$;
- de orgine totală dacă este relație de ordine și dacă pentru oricare $x, y \in D$ avem xry sau yrx.

Fie D o mulțime. Se numește relație binară pe D orice relație $r = (D, D, G)$

Definiție: Fie D o mulțime. O relație binară pe D, $r = (D, D, G)$ se numește

- reflexivă dacă $\forall x \in D, xrx$;
- simetrică dacă $\forall x, y \in D$, cu xry avem yrx;
- antisimetrică dacă $\forall x, y \in D$, cu xry și yrx, avem $x = y$;
- tranzitivă dacă $\forall x, y, z \in D$ cu xry și yrz, avem xrz;
- de echivalență daca este reflexivă, simetrică și tranzitivă;
- de ordine dacă este reflexivă, antisimetrică și tranzitivă;
- de ordine strictă dacă este tranzitivă și $\forall x, y \in D$ cu xry, avem $x \neq y$;
- de orgine totală dacă este relație de ordine și dacă pentru oricare $x, y \in D$ avem xry sau yrx.

Fie D o mulțime. Se numește relație binară pe D orice relație $r = (D, D, G)$

Definiție: Fie D o mulțime. O relație binară pe D, $r = (D, D, G)$ se numește

- reflexivă dacă $\forall x \in D, xrx$;
- simetrică dacă $\forall x, y \in D$, cu xry avem yrx;
- antisimetrică dacă $\forall x, y \in D$, cu xry și yrx, avem $x = y$;
- tranzitivă dacă $\forall x, y, z \in D$ cu xry și yrz, avem xrz;
- de echivalență daca este reflexivă, simetrică și tranzitivă;
- de ordine dacă este reflexivă, antisimetrică și tranzitivă;
- de ordine strictă dacă este tranzitivă și $\forall x, y \in D$ cu xry, avem $x \neq y$;
- de orgine totală dacă este relație de ordine și dacă pentru oricare $x, y \in D$ avem xry sau yrx.

Fie D o mulțime. Se numește relație binară pe D orice relație $r = (D, D, G)$

Definiție: Fie D o mulțime. O relație binară pe D, $r = (D, D, G)$ se numește

- reflexivă dacă $\forall x \in D, xrx$;
- simetrică dacă $\forall x, y \in D$, cu xry avem yrx;
- antisimetrică dacă $\forall x, y \in D$, cu xry și yrx, avem $x = y$;
- tranzitivă dacă $\forall x, y, z \in D$ cu xry și yrz, avem xrz;
- de echivalență daca este reflexivă, simetrică și tranzitivă;
- de ordine dacă este reflexivă, antisimetrică și tranzitivă;
- de ordine strictă dacă este tranzitivă și $\forall x, y \in D$ cu xry, avem $x \neq y$;
- de orgine totală dacă este relație de ordine și dacă pentru oricare $x, y \in D$ avem xry sau yrx.

Fie D o mulțime. Se numește relație binară pe D orice relație $r = (D, D, G)$

Definiție: Fie D o mulțime. O relație binară pe D, $r = (D, D, G)$ se numește

- reflexivă dacă $\forall x \in D, xrx$;
- simetrică dacă $\forall x, y \in D$, cu xry avem yrx;
- antisimetrică dacă $\forall x, y \in D$, cu xry și yrx, avem $x = y$;
- tranzitivă dacă $\forall x, y, z \in D$ cu xry și yrz, avem xrz;
- de echivalență daca este reflexivă, simetrică și tranzitivă;
- de ordine dacă este reflexivă, antisimetrică și tranzitivă;
- de ordine strictă dacă este tranzitivă și $\forall x, y \in D$ cu xry, avem $x \neq y$;
- de orgine totală dacă este relație de ordine și dacă pentru oricare $x, y \in D$ avem xry sau yrx.

Fie D o mulțime. Se numește relație binară pe D orice relație $r = (D, D, G)$

Definiție: Fie D o mulțime. O relație binară pe D, $r = (D, D, G)$ se numește

- reflexivă dacă $\forall x \in D, xrx$;
- simetrică dacă $\forall x, y \in D$, cu xry avem yrx;
- antisimetrică dacă $\forall x, y \in D$, cu xry și yrx, avem $x = y$;
- tranzitivă dacă $\forall x, y, z \in D$ cu xry și yrz, avem xrz;
- de echivalență daca este reflexivă, simetrică și tranzitivă;
- de ordine dacă este reflexivă, antisimetrică și tranzitivă;
- de ordine strictă dacă este tranzitivă și $\forall x, y \in D$ cu xry, avem $x \neq y$;
- de orgine totală dacă este relație de ordine și dacă pentru oricare $x, y \in D$ avem xry sau yrx.

Fie D o mulțime. Se numește relație binară pe D orice relație $r = (D, D, G)$

Definiție: Fie D o mulțime. O relație binară pe D, $r = (D, D, G)$ se numește

- reflexivă dacă $\forall x \in D, xrx$;
- simetrică dacă $\forall x, y \in D$, cu xry avem yrx;
- antisimetrică dacă $\forall x, y \in D$, cu xry și yrx, avem $x = y$;
- tranzitivă dacă $\forall x, y, z \in D$ cu xry și yrz, avem xrz;
- de echivalență daca este reflexivă, simetrică și tranzitivă;
- de ordine dacă este reflexivă, antisimetrică și tranzitivă;
- de ordine strictă dacă este tranzitivă și $\forall x, y \in D$ cu xry, avem $x \neq y$;
- de orgine totală dacă este relație de ordine și dacă pentru oricare $x, y \in D$ avem xry sau yrx.

Fie D o mulțime. Se numește relație binară pe D orice relație $r = (D, D, G)$

Definiție: Fie D o mulțime. O relație binară pe D, $r = (D, D, G)$ se numește

- reflexivă dacă $\forall x \in D, xrx$;
- simetrică dacă $\forall x, y \in D$, cu xry avem yrx;
- antisimetrică dacă $\forall x, y \in D$, cu xry și yrx, avem $x = y$;
- tranzitivă dacă $\forall x, y, z \in D$ cu xry și yrz, avem xrz;
- de echivalență daca este reflexivă, simetrică și tranzitivă;
- de ordine dacă este reflexivă, antisimetrică și tranzitivă;
- de ordine strictă dacă este tranzitivă și $\forall x, y \in D$ cu xry, avem $x \neq y$;
- de orgine totală dacă este relație de ordine și dacă pentru oricare $x, y \in D$ avem xry sau yrx.

Fie D o mulțime. Se numește relație binară pe D orice relație $r = (D, D, G)$

Definiție: Fie D o mulțime. O relație binară pe D, $r = (D, D, G)$ se numește

- reflexivă dacă $\forall x \in D, xrx$;
- simetrică dacă $\forall x, y \in D$, cu xry avem yrx;
- antisimetrică dacă $\forall x, y \in D$, cu xry și yrx, avem $x = y$;
- tranzitivă dacă $\forall x, y, z \in D$ cu xry și yrz, avem xrz;
- de echivalență daca este reflexivă, simetrică și tranzitivă;
- de ordine dacă este reflexivă, antisimetrică și tranzitivă;
- de ordine strictă dacă este tranzitivă și $\forall x, y \in D$ cu xry, avem $x \neq y$;
- de orgine totală dacă este relație de ordine și dacă pentru oricare $x, y \in D$ avem xry sau yrx.

Mulțimi ordonate

Definiție: Se numește mulțime ordonată orice pereche $(A, \leq)$ unde A este o mulțime iar $\leq$ este o relație de ordine pe mulțimea A.

Definiție: Fie $(A, \leq)$ o mulțime ordonată și $B \subseteq A$. Spunem că mulțimea B este total ododonată în raport cu relația $\leq$ dacă oricare ar fi $x, y \in B$ avem $x \leq y$ sau $y \leq x$.

Definiție: Fie $(A, \leq)$ o mulțime ordonată și $B \subseteq A$. Spunem că elementul $a \in A$ este:

- cel mai mic element al mulțimii B dacaă $a \in B$ și $\forall x \in B$, avem $a \leq x$;
- cel mai mare element al mulțimii B dacaă $a \in B$ și $\forall x \in B$, avem $x \leq a$;
- minorant al mulțimii B, dacă $\forall x \in B$, avem $a \leq x$;
- majorant al mulțimii B, dacă $\forall x \in B$, avem $x \leq a$;
- infimum al mulțimii B, dacă este cel mai mare minorant al lui B;
- supremum al mulțimii B, dacă este cel mai mic majorant al lui

Mulțimi ordonate

Definiție: Se numește mulțime ordonată orice pereche $(A, \leq)$ unde A este o mulțime iar $\leq$ este o relație de ordine pe mulțimea A.

Definiție: Fie $(A, \leq)$ o mulțime ordonată și $B \subseteq A$. Spunem că mulțimea B este total ododonată în raport cu relația $\leq$ dacă oricare ar fi $x, y \in B$ avem $x \leq y$ sau $y \leq x$.

Definiție: Fie $(A, \leq)$ o mulțime ordonată și $B \subseteq A$. Spunem că elementul $a \in A$ este:

- cel mai mic element al mulțimii B dacaă $a \in B$ și $\forall x \in B$, avem $a \leq x$;
- cel mai mare element al mulțimii B dacaă $a \in B$ și $\forall x \in B$, avem $x \leq a$;
- minorant al mulțimii B, dacă $\forall x \in B$, avem $a \leq x$;
- majorant al mulțimii B, dacă $\forall x \in B$, avem $x \leq a$;
- infimum al mulțimii B, dacă este cel mai mare minorant al lui B;
- supremum al mulțimii B, dacă este cel mai mic majorant al lui

Mulțimea numerelor reale

Definiție: Se numește corp comuttiv total ordonat orice sistem $(K, +, \cdot, \leq)$ unde $(K, +, \cdot)$ este un corp comuativ iar $\leq$ este o relație de ordine totală pe K.

Definiție: Fie $(K, +, \cdot, \leq)$ un corp comutativ total ordonat. Se numește mulțime inductivă a lui K orice submulțime $I \subseteq K$ a.i.:

- $1 \in I$;
- dacă $x \in I$, atunci $x + 1 \in I$.

Definiție: Mulțimea tuturor mulțimilor inductive ale lui K se numește mulțimea numerelor naturale ale lui K.

Definiție: Mulțimea

$$\mathbb{Z} := \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{x \in K : -x \in \mathbb{N}\}$$

s.n. mulțimea numerelor întregi ale lui K.

Definiție: Mulțimea numerelor raționale este

$$\mathbb{Q} := \{x \in K : \exists p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \text{ a.î.} x = p \cdot q^{-1}\}.$$

Definiție: Fie $(K, +, \cdot, \leq)$ un corp comutativ total ordonat.
Afirmația: "Pentru orice pereche ordonată (A,B) de submulțimi nevide ale lui K, care are proprietatea că

$$x \leq y, \forall x \in A, y \in B$$

există cel puțin un element $z \in K$ a.i.

$$x \leq z \leq y, \forall x \in A, y \in B\text{''}$$

se numește axioma elementului separator (AES).

Afirmația: "Orice submulțime nevidă și minorată a lui K are infimum în K" s.n. axioma existenței infimumului. (AI)

Teoremă: În orice CCTO

$$AES \iff AI \iff AS.$$

Definiție: Se numește mulțime a numerelor reale, și se notează cu $\mathbb{R}$ orice CCTO, care satisface AES (AI, AS)

Teoremă: Fie $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ și $m \in \mathbb{R}$. Atunci

$$m = \sup A$$

dacă și numai dacă

$$m \geq A, \forall a \in A$$

și

$$\forall \varepsilon > 0, \exists a_\varepsilon \in A \text{ a. i. } m - \varepsilon < a_\varepsilon.$$

$$m = \inf A$$

dacă și numai dacă

$$m \leq a, \forall a \in A$$

și

$$\forall \varepsilon > 0, \exists a_\varepsilon \in A \text{ a. i. } a_\varepsilon < m + \varepsilon.$$

Axioma lui Arhimede: Fie $(K, +, \cdot, \leq)$ un corp comutativ total ordonat. Pentru fiecare $x, y \in K$ cu $y > 0$ există un număr natural n a.i.

$$x < n \cdot y.$$

Teoremă: Pentru orice număr real $\varepsilon > 0$ există un număr natural n a.i.

$$\frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Teoremă: Orice submulțime nevidă și minorată $\subseteq Z$ are un cel mai mic element.

Teoremă: Orice submulțime nevidă și majorată $\subseteq Z$ are un cel mai mare element.

Teoremă: $\forall x \in \mathbb{R}$ există un număr natural n și unul singur a.i.

$$n \leq x < n + 1.$$