Algebră 1 (Algebră liniară)

Lect. univ. dr. MODOI George Ciprian

Model de examen

(modelul 1)

Subiectul 1.

1. Să se definească următoarele noţiuni: *grup*, *spaţiu vectorial*, *transformare liniară*, *bază*, *corp*, *subspaţiu vectorial*, *homomorfism de grupuri* şi *vector propriu*.
2. Având lista $(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{N}, \cdot)$, $(\mathbb{N}, +, \cdot)$, $(\mathbb{N}^*, +, \cdot)$, $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{Q}, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ şi $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, să se precizeze care dintre structurile enumerate sunt grupuri, care dintre ele sunt inele şi care sunt corpuri.
3. Să se definească noţiunea de *subgrup* şi să se enunţeze teorema de caracterizare a subgrupului. Să se scrie un exemplu de grup, un exemplu de subgrup al său şi un exemplu de mulţime a sa care nu este subgrup; să se justifice.
4. Să se definească noţiunea de *subcorp* şi să se enunţeze teorema de caracterizare a subcorpului. Să se scrie un exemplu de corp, un exemplu de subcorp al său şi un exemplu de mulţime a sa care nu este subcorp; să se justifice.

Subiectul 2.

1. Să se definească noţiunea de *nucleu al unei transformări liniare* şi să se caracterizeze injectivitatea unei transformări liniare relativ la nucleul acesteia.
2. Să se definească noţiunea de *nucleu al unui grup* şi să se caracterizeze injectivitatea unui homomorfism de grupuri relativ la nucleul acestuia.
3. Fie spaţiile vectoriale ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{V}$ şi ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{V}'$, $v := (v_1, v_2, v_3)$ o bază în $\mathbb{V}$, $v' := (v'_1, v'_2, v'_3)$ o bază în $\mathbb{V}'$ şi transformarea liniară

$$f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}', \ [f]_{(v,v')} := \begin{bmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}.$$

   (a) Să se determine:
      i. $\dim(\mathrm{Im}(f))$ şi $\dim(\ker(f))$.
      ii. $[f]_{(v,e')}$, dacă $\mathbb{V}' \equiv \mathbb{R}^3$, iar $e' := (e'_1, e'_2, e'_3)$ este baza canonică a spaţiului $\mathbb{R}^3$.

   (b) Să se verifice injectivitatea transformării liniare f.

4. Fie spaţiile vectoriale ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{V}$ şi ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{V}'$, $v := (v_1, v_2, v_3)$ o bază în $\mathbb{V}$, $v' := (v'_1, v'_2, v'_3)$ o bază în $\mathbb{V}'$ şi transformarea liniară

$$f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}',\ [f]_{(v,v')} := \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

(a) Să se determine:

i. $\dim(\mathrm{Im}(f))$ şi $\dim(\ker(f))$.

ii. $[f]_{(v,e')}$, dacă $\mathbb{V}' \equiv \mathbb{R}^3$, iar $e' := (e'_1, e'_2, e'_3)$ este baza canonică a spaţiului $\mathbb{R}^3$.

(b) Să se verifice injectivitatea transformării liniare f.

Subiectul 3.

1. Să se discute, în funcţie de parametrul $\alpha \in \mathbb{R}$, şi să se rezolve sistemul

$$(s) : \begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ x - y + 2z = 2 \\ -x + 3y - z = 1 \\ 2x - y - z = \alpha \end{cases}.$$

2. Să se discute, în funcţie de parametrul $\beta \in \mathbb{R}$, şi să se rezolve sistemul

$$(s') : \begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ -x + y - 2z = -2 \\ 3x - y + z = 3 \\ x + y + z = \beta \end{cases}.$$

Algebră 1 (Algebră liniară)

Lect. univ. dr. MODOI George Ciprian

Model de examen
(modelul 2)

Subiectul 1.

1. Să se definească şi să se exemplifice fiecare dintre noţiunile: *homomorfism de inele*, *ordinul unui element al unui grup* şi *dimensiunea unui spaţiu vectorial*.
2. Să se demonstreze că vectorii $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{V}$ formează o bază a unui spaţiu vectorial ${}_{\mathbb{K}}\mathbb{V}$ dacă şi numai dacă sunt liniar independenţi şi, pentru orice vector $x \in \mathbb{V}$, vectorii $v_1, v_2, \ldots, v_n$ nu mai au aceeaşi proprietate.
3. Fie $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ o aplicaţie liniară. Să se demonstreze că dacă aplicaţia f este bijectivă, atunci f^{-1} este, de asemenea, aplicaţie liniară.

Subiectul 2.

1. Fie mulţimile
$$A := \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 3x_1 - x_2 + x_3 = 0\right\}$$
şi
$$B := \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1 - x_2 = 0) \wedge (x_1 + 2x_2 + x_3 = 0)\right\}.$$
Să se demonstreze că:
   (a) $A \leqslant \mathbb{R}^3$ şi $B \leqslant \mathbb{R}^3$.
   (b) $A \oplus B = \mathbb{R}^3$.
2. Fie vectorii $v_1 := (1, 2, 1)$, $v_2 := (1, 1, 1)$, $v_3 := (-2, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$. Să se demonstreze că $v := (v_1, v_2, v_3)^t$ formează o bază a spaţiului $\mathbb{R}^3$ şi să se determine $[t]_v$, unde $t := (1, 6, 4)$.

Subiectul 3.

1. Fie aplicaţia
$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,$$
$$f(x_1, x_2, x_3) := (-4x_1 - 18x_2 - 24x_3,\ -3x_1 - 7x_2 - 12x_3,\ 3x_1 + 9x_2 + 14x_3).$$
   (a) Să se demonstreze că $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}\left(\mathbb{R}^3\right)$.
   (b) Să se determine câte o bază în subspaţiile $\ker(f)$ şi $\mathrm{Im}(f)$; de asemenea, să se precizeze $\dim(\ker(f))$, respectiv $\dim(\mathrm{Im}(f))$.