Analiză matematică 2 (Calcul diferenţial în $\mathbb{R}^n$)

Lucrare de control la grupele 111, 311 şi 312 (18.5.2012)

**1.** a) Să se determine valorile parametrului $\alpha \in \mathbb{R}$ pentru care integrala improprie $I(\alpha) := \displaystyle\int_{1+0}^{\infty} \frac{(x+1)^\alpha}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$ este converegentă.

b) Să se calculeze $I(-1)$.

**2.** Să se demonstreze că funcţia $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$, definită prin

$$d(x, y) := \sqrt{|x_1 - y_1|} + \cdots + \sqrt{|x_n - y_n|}$$

pentru orice $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ şi orice $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, este o distanţă pe $\mathbb{R}^n$, care nu provine dintr-o normă. (O distanţă $d : X \times X \to [0, \infty)$, pe un spaţiu vectorial $X$, provine dintr-o normă dacă există o normă $\|\cdot\|$ pe $X$ astfel ca $d(x, y) = \|x - y\|$ oricare ar fi $x, y \in X$.)

**3.** a) Să se definească noţiunea de punct frontieră pentru o submulţime $A$ a lui $\mathbb{R}^n$.

b) Să se demonstreze că pentru orice mulţimi $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ are loc incluziunea

$$\operatorname{bd}(A \cup B) \subseteq (\operatorname{bd} A) \cup (\operatorname{bd} B).$$

c) Să se dea exemplu de mulţimi $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ pentru care incluziunea de la b) este strictă.

d) Să se arate (prin contraexemple) că, în general, niciuna dintre mulţimile $\operatorname{bd}(A \cap B)$ şi $(\operatorname{bd} A) \cap (\operatorname{bd} B)$ nu este inclusă în cealaltă.