Seminarul 4

1. Să se demonstreze că pentru orice mulţimi $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ are loc incluziunea

$$\mathrm{bd}\,(A \cup B) \subseteq (\mathrm{bd}\,A) \cup (\mathrm{bd}\,B).$$

Să se dea exemplu de mulţimi $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ pentru care această incluziune este strictă.

2. Fie mulţimile din $\mathbb{R}^2$

$$A_k := \left\{\frac{1}{k}\right\} \times [0,1]\ (k \in \mathbb{N}) \quad \text{şi} \quad A := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k.$$

Să se determine (justificând răspunsul) $\mathrm{cl}\,A$, $\mathrm{bd}\,A$ şi A'.

3. Fiind dată mulţimea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ şi numărul real $r > 0$, notăm

$$B := \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid \exists\, a \in A \ :\ \|x - a\| = r \,\}.$$

a) Să se reprezinte grafic mulţimea B în cazul în care $r = 1$, iar $A \subseteq \mathbb{R}^2$ este cercul cu centrul în $(0,0)$ şi de rază 2, respectiv segmentul care uneşte punctele $(0,0)$ şi $(1,1)$.

b) Să se demonstreze că dacă A este închisă, atunci şi B este închisă.