

# Șiruri de numere reale - sinteză-

Lect. univ. dr. **Anca GRAD**  
17 noiembrie 2017

## Terminologie

Fie  $m \in \mathbb{N}$  fixat. Considerăm mulțimea  $N_m = \{n \in \mathbb{N} : n \geq m\}$ .

**Definiție:** Se numește **șir de numere reale** orice funcție

$$f : N_m \rightarrow \mathbb{R}.$$

Șirul  $f : N_m \rightarrow \mathbb{R}$  atașează fiecărui nr. natural  $n \geq m$ , nr. real

$$f(n) : \stackrel{\text{not.}}{=} x_n.$$

Notățiile uzuale folosite pentru un șir sunt

$$(x_n)_{n \in N_m}, \text{ sau } (x_n)_{n \geq m} \text{ sau } (x_n, x_{n+1}, \dots, x_n, \dots).$$

Când nu există pericol de confuzie notăm simplu  $(x_n)$ .

Pentru  $n \in N_m$  arbitrar, nr. real  $x_n$  s.n. **termenul de rang  $n$**  sau **termenul general** al șirului  $(x_n)_{n \in N_m}$ .

## Terminologie

Fie  $m \in \mathbb{N}$  fixat. Considerăm mulțimea  $N_m = \{n \in \mathbb{N} : n \geq m\}$ .

**Definiție:** Se numește **șir de numere reale** orice funcție

$$f : N_m \rightarrow \mathbb{R}.$$

Șirul  $f : N_m \rightarrow \mathbb{R}$  atașează fiecărui nr. natural  $n \geq m$ , nr. real

$$f(n) : \stackrel{\text{not.}}{=} x_n.$$

Notațiile uzuale folosite pentru un șir sunt

$$(x_n)_{n \in N_m}, \text{ sau } (x_n)_{n \geq m} \text{ sau } (x_n, x_{n+1}, \dots, x_n, \dots).$$

Când nu există pericol de confuzie notăm simplu  $(x_n)$ .

Pentru  $n \in N_m$  arbitrar, nr. real  $x_n$  s.n. **termenul de rang  $n$**  sau **termenul general** al șirului  $(x_n)_{n \in N_m}$ .

## Terminologie

Fie  $m \in \mathbb{N}$  fixat. Considerăm mulțimea  $N_m = \{n \in \mathbb{N} : n \geq m\}$ .

**Definiție:** Se numește **șir de numere reale** orice funcție

$$f : N_m \rightarrow \mathbb{R}.$$

Șirul  $f : N_m \rightarrow \mathbb{R}$  atașează fiecărui nr. natural  $n \geq m$ , nr. real

$$f(n) : \stackrel{\text{not.}}{=} x_n.$$

Notațiile uzuale folosite pentru un șir sunt

$$(x_n)_{n \in N_m}, \text{ sau } (x_n)_{n \geq m} \text{ sau } (x_n, x_{n+1}, \dots, x_n, \dots).$$

Când nu există pericol de confuzie notăm simplu  $(x_n)$ .

Pentru  $n \in N_m$  arbitrar, nr. real  $x_n$  s.n. **termenul de rang  $n$**  sau **termenul general** al șirului  $(x_n)_{n \in N_m}$ .

## Terminologie

Fie  $m \in \mathbb{N}$  fixat. Considerăm mulțimea  $N_m = \{n \in \mathbb{N} : n \geq m\}$ .

**Definiție:** Se numește **șir de numere reale** orice funcție

$$f : N_m \rightarrow \mathbb{R}.$$

Șirul  $f : N_m \rightarrow \mathbb{R}$  atașează fiecărui nr. natural  $n \geq m$ , nr. real

$$f(n) : \stackrel{\text{not.}}{=} x_n.$$

Notațiile uzuale folosite pentru un șir sunt

$$(x_n)_{n \in N_m}, \text{ sau } (x_n)_{n \geq m} \text{ sau } (x_n, x_{n+1}, \dots, x_n, \dots).$$

Când nu există pericol de confuzie notăm simplu  $(x_n)$ .

Pentru  $n \in N_m$  arbitrar, nr. real  $x_n$  s.n. **termenul de rang  $n$**  sau **termenul general** al șirului  $(x_n)_{n \in N_m}$ .

## Limita unui șir de numere reale. Unicitatea limitei.

**Definiție:** Fie  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_m}$  un șir de numere reale. Spunem că șirul  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_m}$  **are limită** (în  $\overline{\mathbb{R}}$ ) dacă

$$\exists x \in \overline{\mathbb{R}}, \quad \text{a.î.} \quad \forall V \in \mathcal{V}(x), \quad \exists n_V \geq m \quad \text{a.î.} \quad \forall n \geq n_V, x_n \in V.$$

**Teorema 1:** Fie  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_m} \subseteq \mathbb{R}$ . Șirul  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_m}$  are limită (în  $\overline{\mathbb{R}}$ ) dacă există un element  $x \in \overline{\mathbb{R}}$  a.î. în afara oricărei vecinătăți  $V$  a lui  $x$  se află cel mult un număr finit de termeni ai șirului  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_m}$ .

Dacă limita unui șir există, ea este unică.

**Teorema 2 (de unicitate a limitei):** Dacă  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_m} \subseteq \mathbb{R}$ , atunci există cel mult un element  $x \in \overline{\mathbb{R}}$  a.î.

$$\forall V \in \mathcal{V}(x), \quad \exists n_V \geq m \quad \text{a.î.} \quad \forall n \geq n_V, x_n \in V.$$

## Limita unui șir de numere reale. Unicitatea limitei.

**Definiție:** Fie  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_m}$  un șir de numere reale. Spunem că șirul  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_m}$  **are limită** (în  $\overline{\mathbb{R}}$ ) dacă

$$\exists x \in \overline{\mathbb{R}}, \quad \text{a.î.} \quad \forall V \in \mathcal{V}(x), \quad \exists n_V \geq m \quad \text{a.î.} \quad \forall n \geq n_V, x_n \in V.$$

**Teorema 1:** Fie  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_m} \subseteq \mathbb{R}$ . Șirul  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_m}$  are limită (în  $\overline{\mathbb{R}}$ ) dacă există un element  $x \in \overline{\mathbb{R}}$  a.î. în afara oricărei vecinătăți  $V$  a lui  $x$  se află cel mult un număr finit de termeni ai șirului  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_m}$ .

Dacă limita unui șir există, ea este unică.

**Teorema 2 (de unicitate a limitei):** Dacă  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_m} \subseteq \mathbb{R}$ , atunci există cel mult un element  $x \in \overline{\mathbb{R}}$  a.î.

$$\forall V \in \mathcal{V}(x), \quad \exists n_V \geq m \quad \text{a.î.} \quad \forall n \geq n_V, x_n \in V.$$

## Limita unui șir de numere reale. Unicitatea limitei.

**Definiție:** Fie  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_m}$  un șir de numere reale. Spunem că șirul  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_m}$  **are limită** (în  $\overline{\mathbb{R}}$ ) dacă

$$\exists x \in \overline{\mathbb{R}}, \quad \text{a.î.} \quad \forall V \in \mathcal{V}(x), \quad \exists n_V \geq m \quad \text{a.î.} \quad \forall n \geq n_V, x_n \in V.$$

**Teorema 1:** Fie  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_m} \subseteq \mathbb{R}$ . Șirul  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_m}$  are limită (în  $\overline{\mathbb{R}}$ ) dacă există un element  $x \in \overline{\mathbb{R}}$  a.î. în afara oricărei vecinătăți  $V$  a lui  $x$  se află cel mult un număr finit de termeni ai șirului  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_m}$ .

Dacă limita unui șir există, ea este unică.

**Teorema 2 (de unicitate a limitei):** Dacă  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_m} \subseteq \mathbb{R}$ , atunci există cel mult un element  $x \in \overline{\mathbb{R}}$  a.î.

$$\forall V \in \mathcal{V}(x), \quad \exists n_V \geq m \quad \text{a.î.} \quad \forall n \geq n_V, x_n \in V.$$



## Limita unui șir de numere reale. Unicitatea limitei.

**Definiție:** Fie  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_m}$  un șir de numere reale. Spunem că șirul  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_m}$  **are limită** (în  $\overline{\mathbb{R}}$ ) dacă

$$\exists x \in \overline{\mathbb{R}}, \quad \text{a.î.} \quad \forall V \in \mathcal{V}(x), \quad \exists n_V \geq m \quad \text{a.î.} \quad \forall n \geq n_V, x_n \in V.$$

**Teorema 1:** Fie  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_m} \subseteq \mathbb{R}$ . Șirul  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_m}$  are limită (în  $\overline{\mathbb{R}}$ ) dacă există un element  $x \in \overline{\mathbb{R}}$  a.î. în afara oricărei vecinătăți  $V$  a lui  $x$  se află cel mult un număr finit de termeni ai șirului  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_m}$ .

Dacă limita unui șir există, ea este unică.

**Teorema 2 (de unicitate a limitei):** Dacă  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_m} \subseteq \mathbb{R}$ , atunci există cel mult un element  $x \in \overline{\mathbb{R}}$  a.î.

$$\forall V \in \mathcal{V}(x), \quad \exists n_V \geq m \quad \text{a.î.} \quad \forall n \geq n_V, x_n \in V.$$

## Limita unui șir de numere reale. Unicitatea limitei.

**Definiție:** Fie  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_m}$  un șir de numere reale. Spunem că șirul  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_m}$  **are limită** (în  $\overline{\mathbb{R}}$ ) dacă

$$\exists x \in \overline{\mathbb{R}}, \quad \text{a.î.} \quad \forall V \in \mathcal{V}(x), \quad \exists n_V \geq m \quad \text{a.î.} \quad \forall n \geq n_V, x_n \in V.$$

**Teorema 1:** Fie  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_m} \subseteq \mathbb{R}$ . Șirul  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_m}$  are limită (în  $\overline{\mathbb{R}}$ ) dacă există un element  $x \in \overline{\mathbb{R}}$  a.î. în afara oricărei vecinătăți  $V$  a lui  $x$  se află cel mult un număr finit de termeni ai șirului  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_m}$ .

Dacă limita unui șir există, ea este unică.

**Teorema 2 (de unicitate a limitei):** Dacă  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_m} \subseteq \mathbb{R}$ , atunci există cel mult un element  $x \in \overline{\mathbb{R}}$  a.î.

$$\forall V \in \mathcal{V}(x), \quad \exists n_V \geq m \quad \text{a.î.} \quad \forall n \geq n_V, x_n \in V.$$

## Notăție

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  și se numește **limita șirului**  $(x_n)$ .

**Definiție**  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_m} \subseteq \mathbb{R}$ . Spunem că șirul  $(x_n)$  este **convergent** dacă

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \text{ și } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in \mathbb{R}.$$

Pentru  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_m} \subseteq \mathbb{R}$  există una din posibilitățile:

- ▶ are o limită unică  $x \in \mathbb{R}$ , (s.n. **șir convergent**);
- ▶ are limita  $\infty$  sau  $-\infty$  (s.n. **șir cu limita infinită**);
- ▶ nu admite limită în  $\overline{\mathbb{R}}$ .

Orice șir care nu admite limită finită s.n. șir **divergent**.

Studiul unui șir comportă două probleme:

- ▶
- ▶

## Notăție

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  și se numește **limita șirului**  $(x_n)$ .

**Definiție**  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_m} \subseteq \mathbb{R}$ . Spunem că șirul  $(x_n)$  este **convergent** dacă

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \text{ și } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in \mathbb{R}.$$

Pentru  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_m} \subseteq \mathbb{R}$  există una din posibilitățile:

- ▶ are o limită unică  $x \in \mathbb{R}$ , (s.n. **șir convergent**);
- ▶ are limita  $\infty$  sau  $-\infty$  (s.n. **șir cu limita infinită**);
- ▶ nu admite limită în  $\overline{\mathbb{R}}$ .

Orice șir care nu admite limită finită s.n. șir **divergent**.

Studiul unui șir comportă două probleme:

- ▶
- ▶

## Notăție

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  și se numește **limita șirului**  $(x_n)$ .

**Definiție**  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_m} \subseteq \mathbb{R}$ . Spunem că șirul  $(x_n)$  este **convergent** dacă

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \text{ și } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in \mathbb{R}.$$

Pentru  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_m} \subseteq \mathbb{R}$  există una din posibilitățile:

- ▶ are o limită unică  $x \in \mathbb{R}$ , (s.n. **șir convergent**);
- ▶ are limita  $\infty$  sau  $-\infty$  (s.n. **șir cu limita infinită**);
- ▶ nu admite limită în  $\overline{\mathbb{R}}$ .

Orice șir care nu admite limită finită s.n. șir **divergent**.

Studiul unui șir comportă două probleme:

- ▶
- ▶

## Notăție

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  și se numește **limita șirului**  $(x_n)$ .

**Definiție**  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_m} \subseteq \mathbb{R}$ . Spunem că șirul  $(x_n)$  este **convergent** dacă

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \text{ și } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in \mathbb{R}.$$

Pentru  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_m} \subseteq \mathbb{R}$  există una din posibilitățile:

- ▶ are o limită unică  $x \in \mathbb{R}$ , (s.n. **șir convergent**);
- ▶ are limita  $\infty$  sau  $-\infty$  (s.n. **șir cu limita infinită**);
- ▶ nu admite limită în  $\overline{\mathbb{R}}$ .

Orice șir care nu admite limită finită s.n. șir **divergent**.

Studiul unui șir comportă două probleme:



## Notăție

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  și se numește **limita șirului**  $(x_n)$ .

**Definiție**  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_m} \subseteq \mathbb{R}$ . Spunem că șirul  $(x_n)$  este **convergent** dacă

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \text{ și } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in \mathbb{R}.$$

Pentru  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_m} \subseteq \mathbb{R}$  există una din posibilitățile:

- ▶ are o limită unică  $x \in \mathbb{R}$ , (s.n. **șir convergent**);
- ▶ are limita  $\infty$  sau  $-\infty$  (s.n. **șir cu limita infinită**);
- ▶ nu admite limită în  $\overline{\mathbb{R}}$ .

Orice șir care nu admite limită finită s.n. șir **divergent**.

Studiul unui șir comportă două probleme:



## Notăție

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  și se numește **limita șirului**  $(x_n)$ .

**Definiție**  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_m} \subseteq \mathbb{R}$ . Spunem că șirul  $(x_n)$  este **convergent** dacă

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \text{ și } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in \mathbb{R}.$$

Pentru  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_m} \subseteq \mathbb{R}$  există una din posibilitățile:

- ▶ are o limită unică  $x \in \mathbb{R}$ , (s.n. **șir convergent**);
- ▶ are limita  $\infty$  sau  $-\infty$  (s.n. **șir cu limita infinită**);
- ▶ nu admite limită în  $\overline{\mathbb{R}}$ .

Orice șir care nu admite limită finită s.n. șir **divergent**.

Studiul unui șir comportă două probleme:

- ▶
- ▶



# Caracterizări ale limitei unui șir de numere reale

## Teorema 3 (de caracterizare cu $\varepsilon$ a limitei finite):

Fie  $(x_n)_{n \in N_m} \subseteq \mathbb{R}$  și  $x \in \mathbb{R}$ . Atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \iff \forall \varepsilon > 0 (\in \mathbb{R}), \exists n_\varepsilon \geq m (\in \mathbb{N}) \text{ a.î. } |x_n - x| < \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon.$$

**Consecința:** Fie  $(x_n)_{n \in N_m} \subseteq \mathbb{R}$  și  $x \in \mathbb{R}$ . Atunci șirul  $(x_n)_{n \in N_m}$  converge către  $x$ ,  $\iff$  șirul  $(x_n - x)_{n \in N_m}$  converge către 0.

## Teorema 4 (de caracterizare cu $\varepsilon$ a limitelor $\infty$ și $-\infty$ ):

Fie  $(x_n)_{n \in N_m} \subseteq \mathbb{R}$ . Atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty \iff \forall \varepsilon > 0 (\in \mathbb{R}), \exists n_\varepsilon \geq m (\in \mathbb{N}) \text{ a.î. } x_n > \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty \iff \forall \varepsilon > 0 (\in \mathbb{R}), \exists n_\varepsilon \geq m (\in \mathbb{N}) \text{ a.î. } x_n < -\varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon.$$

## Caracterizări ale limitei unui șir de numere reale

### Teorema 3 (de caracterizare cu $\varepsilon$ a limitei finite):

Fie  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_m} \subseteq \mathbb{R}$  și  $x \in \mathbb{R}$ . Atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \iff \forall \varepsilon > 0 (\in \mathbb{R}), \exists n_\varepsilon \geq m (\in \mathbb{N}) \text{ a.î. } |x_n - x| < \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon.$$

**Consecința:** Fie  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_m} \subseteq \mathbb{R}$  și  $x \in \mathbb{R}$ . Atunci șirul  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_m}$  converge către  $x$ ,  $\iff$  șirul  $(x_n - x)_{n \in \mathbb{N}_m}$  converge către 0.

### Teorema 4 (de caracterizare cu $\varepsilon$ a limitelor $\infty$ și $-\infty$ ):

Fie  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_m} \subseteq \mathbb{R}$ . Atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty \iff \forall \varepsilon > 0 (\in \mathbb{R}), \exists n_\varepsilon \geq m (\in \mathbb{N}) \text{ a.î. } x_n > \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty \iff \forall \varepsilon > 0 (\in \mathbb{R}), \exists n_\varepsilon \geq m (\in \mathbb{N}) \text{ a.î. } x_n < -\varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon.$$

## Caracterizări ale limitei unui șir de numere reale

### Teorema 3 (de caracterizare cu $\varepsilon$ a limitei finite):

Fie  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_m} \subseteq \mathbb{R}$  și  $x \in \mathbb{R}$ . Atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \iff \forall \varepsilon > 0 (\varepsilon \in \mathbb{R}), \exists n_\varepsilon \geq m (\in \mathbb{N}) \text{ a.î. } |x_n - x| < \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon.$$

**Consecința:** Fie  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_m} \subseteq \mathbb{R}$  și  $x \in \mathbb{R}$ . Atunci șirul  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_m}$  converge către  $x$ ,  $\iff$  șirul  $(x_n - x)_{n \in \mathbb{N}_m}$  converge către 0.

### Teorema 4 (de caracterizare cu $\varepsilon$ a limitelor $\infty$ și $-\infty$ ):

Fie  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_m} \subseteq \mathbb{R}$ . Atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty \iff \forall \varepsilon > 0 (\varepsilon \in \mathbb{R}), \exists n_\varepsilon \geq m (\in \mathbb{N}) \text{ a.î. } x_n > \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty \iff \forall \varepsilon > 0 (\varepsilon \in \mathbb{R}), \exists n_\varepsilon \geq m (\in \mathbb{N}) \text{ a.î. } x_n < -\varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon.$$

## Caracterizări ale limitei unui șir de numere reale

### Teorema 3 (de caracterizare cu $\varepsilon$ a limitei finite):

Fie  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_m} \subseteq \mathbb{R}$  și  $x \in \mathbb{R}$ . Atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \iff \forall \varepsilon > 0 (\varepsilon \in \mathbb{R}), \exists n_\varepsilon \geq m (\in \mathbb{N}) \text{ a.î. } |x_n - x| < \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon.$$

**Consecința:** Fie  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_m} \subseteq \mathbb{R}$  și  $x \in \mathbb{R}$ . Atunci șirul  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_m}$  converge către  $x$ ,  $\iff$  șirul  $(x_n - x)_{n \in \mathbb{N}_m}$  converge către 0.

### Teorema 4 (de caracterizare cu $\varepsilon$ a limitelor $\infty$ și $-\infty$ ):

Fie  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_m} \subseteq \mathbb{R}$ . Atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty \iff \forall \varepsilon > 0 (\varepsilon \in \mathbb{R}), \exists n_\varepsilon \geq m (\in \mathbb{N}) \text{ a.î. } x_n > \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty \iff \forall \varepsilon > 0 (\varepsilon \in \mathbb{R}), \exists n_\varepsilon \geq m (\in \mathbb{N}) \text{ a.î. } x_n < -\varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon.$$

## Caracterizări ale limitei unui șir de numere reale

### Teorema 3 (de caracterizare cu $\varepsilon$ a limitei finite):

Fie  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_m} \subseteq \mathbb{R}$  și  $x \in \mathbb{R}$ . Atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \iff \forall \varepsilon > 0 (\in \mathbb{R}), \exists n_\varepsilon \geq m (\in \mathbb{N}) \text{ a.î. } |x_n - x| < \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon.$$

**Consecința:** Fie  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_m} \subseteq \mathbb{R}$  și  $x \in \mathbb{R}$ . Atunci șirul  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_m}$  converge către  $x$ ,  $\iff$  șirul  $(x_n - x)_{n \in \mathbb{N}_m}$  converge către 0.

### Teorema 4 (de caracterizare cu $\varepsilon$ a limitelor $\infty$ și $-\infty$ ):

Fie  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_m} \subseteq \mathbb{R}$ . Atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty \iff \forall \varepsilon > 0 (\in \mathbb{R}), \exists n_\varepsilon \geq m (\in \mathbb{N}) \text{ a.î. } x_n > \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty \iff \forall \varepsilon > 0 (\in \mathbb{R}), \exists n_\varepsilon \geq m (\in \mathbb{N}) \text{ a.î. } x_n < -\varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon.$$

**Exemple:**

- ▶ șirul cu termenul general  $x_n = 0, (n \in \mathbb{N})$  are limita 0

$$n_\varepsilon = 1;$$

- ▶ șirul cu termenul general  $x_n = \frac{1}{n}, (n \in \mathbb{N})$  are limita 0

$$n_\varepsilon = \left[ \frac{1}{\varepsilon} \right] + 1;$$

- ▶ șirul cu termenul general  $x_n = n, (n \in \mathbb{N})$  are limita  $+\infty$

$$n_\varepsilon = [\varepsilon] + 1;$$

- ▶ șirul cu termenul general  $x_n = -n, (n \in \mathbb{N})$  are limita  $-\infty$

$$n_\varepsilon = [\varepsilon] + 1;$$

- ▶ șirul cu termenul general  $x_n = (-1)^n, (n \in \mathbb{N})$  nu are limită în  $\overline{\mathbb{R}}$ .

**Exemple:**

- șirul cu termenul general  $x_n = 0, (n \in \mathbb{N})$  are limita 0

$$n_\varepsilon = 1;$$

- șirul cu termenul general  $x_n = \frac{1}{n}, (n \in \mathbb{N})$  are limita 0

$$n_\varepsilon = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1;$$

- șirul cu termenul general  $x_n = n, (n \in \mathbb{N})$  are limita  $+\infty$

$$n_\varepsilon = \lceil \varepsilon \rceil + 1;$$

- șirul cu termenul general  $x_n = -n, (n \in \mathbb{N})$  are limita  $-\infty$

$$n_\varepsilon = \lceil \varepsilon \rceil + 1;$$

- șirul cu termenul general  $x_n = (-1)^n, (n \in \mathbb{N})$  nu are limită în  $\overline{\mathbb{R}}$ .

**Exemple:**

- șirul cu termenul general  $x_n = 0, (n \in \mathbb{N})$  are limita 0

$$n_\varepsilon = 1;$$

- șirul cu termenul general  $x_n = \frac{1}{n}, (n \in \mathbb{N})$  are limita 0

$$n_\varepsilon = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1;$$

- șirul cu termenul general  $x_n = n, (n \in \mathbb{N})$  are limita  $+\infty$

$$n_\varepsilon = \lceil \varepsilon \rceil + 1;$$

- șirul cu termenul general  $x_n = -n, (n \in \mathbb{N})$  are limita  $-\infty$

$$n_\varepsilon = \lceil \varepsilon \rceil + 1;$$

- șirul cu termenul general  $x_n = (-1)^n, (n \in \mathbb{N})$  nu are limită în  $\overline{\mathbb{R}}$ .



**Exemple:**

- șirul cu termenul general  $x_n = 0, (n \in \mathbb{N})$  are limita 0

$$n_\varepsilon = 1;$$

- șirul cu termenul general  $x_n = \frac{1}{n}, (n \in \mathbb{N})$  are limita 0

$$n_\varepsilon = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1;$$

- șirul cu termenul general  $x_n = n, (n \in \mathbb{N})$  are limita  $+\infty$

$$n_\varepsilon = \lceil \varepsilon \rceil + 1;$$

- șirul cu termenul general  $x_n = -n, (n \in \mathbb{N})$  are limita  $-\infty$

$$n_\varepsilon = \lceil \varepsilon \rceil + 1;$$

- șirul cu termenul general  $x_n = (-1)^n, (n \in \mathbb{N})$  nu are limită în  $\overline{\mathbb{R}}$ .

**Exemple:**

- ▶ șirul cu termenul general  $x_n = 0, (n \in \mathbb{N})$  are limita 0

$$n_\varepsilon = 1;$$

- ▶ șirul cu termenul general  $x_n = \frac{1}{n}, (n \in \mathbb{N})$  are limita 0

$$n_\varepsilon = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1;$$

- ▶ șirul cu termenul general  $x_n = n, (n \in \mathbb{N})$  are limita  $+\infty$

$$n_\varepsilon = \lceil \varepsilon \rceil + 1;$$

- ▶ șirul cu termenul general  $x_n = -n, (n \in \mathbb{N})$  are limita  $-\infty$

$$n_\varepsilon = \lceil \varepsilon \rceil + 1;$$

- ▶ șirul cu termenul general  $x_n = (-1)^n, (n \in \mathbb{N})$  nu are limită în  $\overline{\mathbb{R}}$ .

**Exemple:**

- șirul cu termenul general  $x_n = 0, (n \in \mathbb{N})$  are limita 0

$$n_\varepsilon = 1;$$

- șirul cu termenul general  $x_n = \frac{1}{n}, (n \in \mathbb{N})$  are limita 0

$$n_\varepsilon = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1;$$

- șirul cu termenul general  $x_n = n, (n \in \mathbb{N})$  are limita  $+\infty$

$$n_\varepsilon = \lceil \varepsilon \rceil + 1;$$

- șirul cu termenul general  $x_n = -n, (n \in \mathbb{N})$  are limita  $-\infty$

$$n_\varepsilon = \lceil \varepsilon \rceil + 1;$$

- șirul cu termenul general  $x_n = (-1)^n, (n \in \mathbb{N})$  nu are limită în  $\overline{\mathbb{R}}$ .

## Convergență, monotonie și mărginire

**Teorema 5** Orice șir convergent este mărginit.

**Teorema 6** Orice șir nemărginit este divergent.

**Observație:** Nu orice șir mărginit este convergent. De exemplu, șirul cu termenul general

$$x_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}.$$

## Convergență, monotonie și mărginire

**Teorema 5** Orice șir convergent este mărginit.

**Teorema 6** Orice șir nemărginit este divergent.

**Observație:** Nu orice șir mărginit este convergent. De exemplu, șirul cu termenul general

$$x_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}.$$

## Convergență, monotonie și mărginire

**Teorema 5** Orice șir convergent este mărginit.

**Teorema 6** Orice șir nemărginit este divergent.

**Observație:** Nu orice șir mărginit este convergent. De exemplu, șirul cu termenul general

$$x_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}.$$

## Convergență, monotonie și mărginire

**Teorema 5** Orice șir convergent este mărginit.

**Teorema 6** Orice șir nemărginit este divergent.

**Observație:** Nu orice șir mărginit este convergent. De exemplu, șirul cu termenul general

$$x_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}.$$

## Teorema 7 [ a lui Weirstrass]

### (de convergență a șirurilor monotone și mărginite)

Fie  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_m} \subseteq \mathbb{R}$ . Atunci u.a.s. adevărate:

1. Șirul  $(x_n)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{crescător} \\ \text{și} \\ \text{mărginit superior} \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} (x_n) \text{ este convergent} \\ \text{și} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}_m\} \end{array} \right\}.$$

2. Șirul  $(x_n)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{descrescător} \\ \text{și} \\ \text{mărginit inferior} \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} (x_n) \text{ este convergent} \\ \text{și} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}_m\} \end{array} \right\}.$$

$$3. \text{ Șirul } (x_n) \left\{ \begin{array}{l} \text{monoton} \\ \text{și} \\ \text{mărginit} \end{array} \right\} \implies (x_n) \text{ este convergent.}$$



## Teorema 7 [ a lui Weirstrass]

### (de convergență a șirurilor monotone și mărginite)

Fie  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_m} \subseteq \mathbb{R}$ . Atunci u.a.s. adevărate:

1. Șirul  $(x_n)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{crescător} \\ \text{și} \\ \text{mărginit superior} \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} (x_n) \text{ este convergent} \\ \text{și} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}_m\} \end{array} \right. .$$

2. Șirul  $(x_n)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{descrescător} \\ \text{și} \\ \text{mărginit inferior} \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} (x_n) \text{ este convergent} \\ \text{și} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}_m\} \end{array} \right. .$$

$$3. \text{ Șirul } (x_n) \left\{ \begin{array}{l} \text{monoton} \\ \text{și} \\ \text{mărginit} \end{array} \right\} \implies (x_n) \text{ este convergent.}$$

## Teorema 7 [ a lui Weirstrass]

### (de convergență a șirurilor monotone și mărginite)

Fie  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_m} \subseteq \mathbb{R}$ . Atunci u.a.s. adevărate:

1. Șirul  $(x_n)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{crescător} \\ \text{și} \\ \text{mărginit superior} \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} (x_n) \text{ este convergent} \\ \text{și} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}_m\} \end{array} \right.$$

2. Șirul  $(x_n)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{descrescător} \\ \text{și} \\ \text{mărginit inferior} \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} (x_n) \text{ este convergent} \\ \text{și} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}_m\} \end{array} \right.$$

$$3. \text{ Șirul } (x_n) \left\{ \begin{array}{l} \text{monoton} \\ \text{și} \\ \text{mărginit} \end{array} \right\} \implies (x_n) \text{ este convergent.}$$

## Teorema 7 [ a lui Weirstrass]

### (de convergență a șirurilor monotone și mărginite)

Fie  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_m} \subseteq \mathbb{R}$ . Atunci u.a.s. adevărate:

1. Șirul  $(x_n)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{crescător} \\ \text{și} \\ \text{mărginit superior} \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} (x_n) \text{ este convergent} \\ \text{și} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}_m\} \end{array} \right. .$$

2. Șirul  $(x_n)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{descrescător} \\ \text{și} \\ \text{mărginit inferior} \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} (x_n) \text{ este convergent} \\ \text{și} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}_m\} \end{array} \right. .$$

3. Șirul  $(x_n)$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{monoton} \\ \text{și} \\ \text{mărginit} \end{array} \right. \implies (x_n) \text{ este convergent.}$

**Observație:** Referitor la șiruri monotone și/sau mărginite întâlnim ipostazele:

- ▶  $\left\{ \begin{array}{l} \text{monoton} \\ \text{și} \\ \text{mărginit} \end{array} \right. \implies (x_n) \text{ este convergent};$
- ▶  $\text{convergent} \implies \text{mărginit};$
- ▶  $\text{convergent} \not\implies \text{monoton}$ . Exemplu:  $x_n = \frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N};$
- ▶  $\text{monoton} \not\implies \text{convergent}$ . Exemplu:  $x_n = n, n \in \mathbb{N};$
- ▶  $\text{mărginit} \not\implies \text{convergent}$ . Exemplu:  $x_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}.$

**Consecința:** Fie  $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$  un șir monoton. Atunci

$$(x_n) \text{ convergent} \iff \text{mărginit}.$$

**Teorema 8:** U.a.s. adevărate:

1. Orice șir crescător și nemărginit are limita  $+\infty$ .
2. Orice șir descrescător și nemărgnit are limita  $-\infty$ .

**Observație:** Referitor la șiruri monotone și/sau mărginite întâlnim ipostazele:

- ▶  $\left\{ \begin{array}{l} \text{monoton} \\ \text{și} \\ \text{mărginit} \end{array} \right. \implies (x_n) \text{ este convergent};$
- ▶  $\text{convergent} \implies \text{mărginit};$
- ▶  $\text{convergent} \not\implies \text{monoton}.$  Exemplu:  $x_n = \frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N};$
- ▶  $\text{monoton} \not\implies \text{convergent}.$  Exemplu:  $x_n = n, n \in \mathbb{N};$
- ▶  $\text{mărginit} \not\implies \text{convergent}.$  Exemplu:  $x_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}.$

**Consecința:** Fie  $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$  un șir monoton. Atunci

$$(x_n) \text{ convergent} \iff \text{mărginit}.$$

**Teorema 8:** U.a.s. adevărate:

1. Orice șir crescător și nemărginit are limita  $+\infty$ .
2. Orice șir descrescător și nemărgnit are limita  $-\infty$ .

**Observație:** Referitor la șiruri monotone și/sau mărginite întâlnim ipostazele:

- ▶  $\left\{ \begin{array}{l} \text{monoton} \\ \text{și} \\ \text{mărginit} \end{array} \right. \implies (x_n) \text{ este convergent};$
- ▶  $\text{convergent} \implies \text{mărginit};$
- ▶  $\text{convergent} \not\implies \text{monoton}.$  Exemplu:  $x_n = \frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N};$
- ▶  $\text{monoton} \not\implies \text{convergent}.$  Exemplu:  $x_n = n, n \in \mathbb{N};$
- ▶  $\text{mărginit} \not\implies \text{convergent}.$  Exemplu:  $x_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}.$

**Consecința:** Fie  $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$  un șir monoton. Atunci

$$(x_n) \text{ convergent} \iff \text{mărginit}.$$

**Teorema 8:** U.a.s. adevărate:

1. Orice șir crescător și nemărginit are limita  $+\infty$ .
2. Orice șir descrescător și nemărgnit are limita  $-\infty$ .

**Observație:** Referitor la șiruri monotone și/sau mărginite întâlnim ipostazele:

- ▶  $\left\{ \begin{array}{l} \text{monoton} \\ \text{și} \\ \text{mărginit} \end{array} \right. \implies (x_n) \text{ este convergent};$
- ▶  $\text{convergent} \implies \text{mărginit};$
- ▶  $\text{convergent} \not\implies \text{monoton}.$  Exemplu:  $x_n = \frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N};$
- ▶  $\text{monoton} \not\implies \text{convergent}.$  Exemplu:  $x_n = n, n \in \mathbb{N};$
- ▶  $\text{mărginit} \not\implies \text{convergent}.$  Exemplu:  $x_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}.$

**Consecința:** Fie  $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$  un șir monoton. Atunci

$$(x_n) \text{ convergent} \iff \text{mărginit}.$$

**Teorema 8:** U.a.s. adevărate:

1. Orice șir crescător și nemărginit are limita  $+\infty$ .
2. Orice șir descrescător și nemărgnit are limita  $-\infty$ .

**Observație:** Referitor la șiruri monotone și/sau mărginite întâlnim ipostazele:

- ▶  $\left\{ \begin{array}{l} \text{monoton} \\ \text{și} \\ \text{mărginit} \end{array} \right. \implies (x_n) \text{ este convergent};$
- ▶  $\text{convergent} \implies \text{mărginit};$
- ▶  $\text{convergent} \not\implies \text{monoton. Exemplu: } x_n = \frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N};$
- ▶  $\text{monoton} \not\implies \text{convergent. Exemplu: } x_n = n, n \in \mathbb{N};$
- ▶  $\text{mărginit} \not\implies \text{convergent. Exemplu: } x_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}.$

**Consecința:** Fie  $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$  un șir monoton. Atunci

$$(x_n) \text{ convergent} \iff \text{mărginit}.$$

**Teorema 8:** U.a.s. adevărate:

1. Orice șir crescător și nemărginit are limita  $+\infty$ .
2. Orice șir descrescător și nemărgnit are limita  $-\infty$ .



**Observație:** Referitor la șiruri monotone și/sau mărginite întâlnim ipostazele:

- ▶  $\left\{ \begin{array}{l} \text{monoton} \\ \text{și} \\ \text{mărginit} \end{array} \right. \implies (x_n) \text{ este convergent};$
- ▶  $\text{convergent} \implies \text{mărginit};$
- ▶  $\text{convergent} \not\implies \text{monoton}.$  Exemplu:  $x_n = \frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N};$
- ▶  $\text{monoton} \not\implies \text{convergent}.$  Exemplu:  $x_n = n, n \in \mathbb{N};$
- ▶  $\text{mărginit} \not\implies \text{convergent}.$  Exemplu:  $x_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}.$

**Consecința:** Fie  $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$  un șir monoton. Atunci

$$(x_n) \text{ convergent} \iff \text{mărginit}.$$

**Teorema 8:** U.a.s. adevărate:

1. Orice șir crescător și nemărginit are limita  $+\infty$ .
2. Orice șir descrescător și nemărgnit are limita  $-\infty$ .

**Observație:** Referitor la șiruri monotone și/sau mărginite întâlnim ipostazele:

- ▶  $\left\{ \begin{array}{l} \text{monoton} \\ \text{și} \\ \text{mărginit} \end{array} \right. \implies (x_n) \text{ este convergent};$
- ▶  $\text{convergent} \implies \text{mărginit};$
- ▶  $\text{convergent} \not\implies \text{monoton}.$  Exemplu:  $x_n = \frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N};$
- ▶  $\text{monoton} \not\implies \text{convergent}.$  Exemplu:  $x_n = n, n \in \mathbb{N};$
- ▶  $\text{mărginit} \not\implies \text{convergent}.$  Exemplu:  $x_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}.$

**Consecința:** Fie  $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$  un șir monoton. Atunci

$$(x_n) \text{ convergent} \iff \text{mărginit}.$$

**Teorema 8:** U.a.s. adevărate:

1. Orice șir crescător și nemărginit are limita  $+\infty$ .
2. Orice șir descrescător și nemărgnit are limita  $-\infty$ .

**Observație:** Referitor la șiruri monotone și/sau mărginite întâlnim ipostazele:

- ▶  $\left\{ \begin{array}{l} \text{monoton} \\ \text{și} \\ \text{mărginit} \end{array} \right. \implies (x_n) \text{ este convergent};$
- ▶  $\text{convergent} \implies \text{mărginit};$
- ▶  $\text{convergent} \not\implies \text{monoton}.$  Exemplu:  $x_n = \frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N};$
- ▶  $\text{monoton} \not\implies \text{convergent}.$  Exemplu:  $x_n = n, n \in \mathbb{N};$
- ▶  $\text{mărginit} \not\implies \text{convergent}.$  Exemplu:  $x_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}.$

**Consecința:** Fie  $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$  un șir monoton. Atunci

$$(x_n) \text{ convergent} \iff \text{mărginit}.$$

**Teorema 8:** U.a.s. adevărate:

1. Orice șir crescător și nemărginit are limita  $+\infty$ .
2. Orice șir descrescător și nemărgnit are limita  $-\infty$ .

**Teorema 9 [ a lui Cantor]:** Fie  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  și  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  două șiruri  $\subseteq \mathbb{R}$  care satisfac proprietățile:

i)  $\exists p \in \mathbb{N}$  a.î.

$$x_n \leq x_{n+1} < y_{n+1} \leq y_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p;$$

ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - x_n) = 0$ .

Atunci șirurile  $(x_n)$  și  $(y_n)$  sunt convergente și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

**Observație** Teorema de mai sus folosită pentru delimitarea constantei  $e$ , prin particularizarea

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{și} \quad y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

**Teorema 9 [ a lui Cantor]:** Fie  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  și  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  două șiruri  $\subseteq \mathbb{R}$  care satisfac proprietățile:

i)  $\exists p \in \mathbb{N}$  a.î.

$$x_n \leq x_{n+1} < y_{n+1} \leq y_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p;$$

ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - x_n) = 0.$

Atunci șirurile  $(x_n)$  și  $(y_n)$  sunt convergente și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

**Observație** Teorema de mai sus folosită pentru delimitarea constantei  $e$ , prin particularizarea

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{și} \quad y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

**Teorema 9 [ a lui Cantor]:** Fie  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  și  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  două șiruri  $\subseteq \mathbb{R}$  care satisfac proprietățile:

i)  $\exists p \in \mathbb{N}$  a.î.

$$x_n \leq x_{n+1} < y_{n+1} \leq y_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p;$$

ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - x_n) = 0.$

Atunci șirurile  $(x_n)$  și  $(y_n)$  sunt convergente și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

**Observație** Teorema de mai sus folosită pentru delimitarea constantei  $e$ , prin particularizarea

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{și} \quad y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

## Trecerea la limită în inegalități

**Teorema 10:** Fie  $(x_n)$  și  $(y_n) \subseteq \mathbb{R}$ , două șiruri care au limită.  
Dacă  $\exists p \in \mathbb{N}$  a.î.

$$x_n \leq y_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p,$$

atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

**Teorema 11 [a cleștelui]:** Fie  $(x_n)$ ,  $(y_n)$  și  $(z_n) \subseteq \mathbb{R}$ , trei șiruri și fie  $p \in \mathbb{N}$  a.î.

$$x_n \leq y_n \leq z_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p$$

Dacă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$$

atunci șirul  $(y_n)$  are limită și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n.$$

## Trecerea la limită în inegalități

**Teorema 10:** Fie  $(x_n)$  și  $(y_n) \subseteq \mathbb{R}$ , două șiruri care au limită.  
Dacă  $\exists p \in \mathbb{N}$  a.î.

$$x_n \leq y_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p,$$

atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

**Teorema 11 [a cleștelui]:** Fie  $(x_n)$ ,  $(y_n)$  și  $(z_n) \subseteq \mathbb{R}$ , trei șiruri și fie  $p \in \mathbb{N}$  a.î.

$$x_n \leq y_n \leq z_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p$$

Dacă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$$

atunci șirul  $(y_n)$  are limită și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n.$$



## Trecerea la limită în inegalități

**Teorema 10:** Fie  $(x_n)$  și  $(y_n) \subseteq \mathbb{R}$ , două șiruri care au limită.  
Dacă  $\exists p \in \mathbb{N}$  a.î.

$$x_n \leq y_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p,$$

atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

**Teorema 11 [a cleștelui]:** Fie  $(x_n)$ ,  $(y_n)$  și  $(z_n) \subseteq \mathbb{R}$ , trei șiruri și  
fie  $p \in \mathbb{N}$  a.î.

$$x_n \leq y_n \leq z_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p$$

Dacă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$$

atunci șirul  $(y_n)$  are limită și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n.$$

## Operații cu șiruri convergente

**Teorema 12** Fie  $(x_n), (y_n) \subseteq \mathbb{R}$  două șiruri convergente. U.a.s.a:

1. șirul sumă  $(x_n + y_n)$  este convergent și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n;$$

2. dacă  $c \in \mathbb{R}$ , atunci șirul  $(cx_n)$  este convergent și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (cx_n) = c \left( \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right);$$

3. șirul produs  $(x_n y_n)$  este convergent și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n;$$

4. dacă  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0$  și  $y_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ , atunci șirul  $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$  este convergent și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}.$$

## Operații cu șiruri convergente

**Teorema 12** Fie  $(x_n), (y_n) \subseteq \mathbb{R}$  două șiruri convergente. U.a.s.a:

1. șirul sumă  $(x_n + y_n)$  este convergent și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n;$$

2. dacă  $c \in \mathbb{R}$ , atunci șirul  $(cx_n)$  este convergent și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (cx_n) = c \left( \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right);$$

3. șirul produs  $(x_n y_n)$  este convergent și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n;$$

4. dacă  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0$  și  $y_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ , atunci șirul  $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$  este convergent și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}.$$

## Operații cu șiruri convergente

**Teorema 12** Fie  $(x_n), (y_n) \subseteq \mathbb{R}$  două șiruri convergente. U.a.s.a:

1. șirul sumă  $(x_n + y_n)$  este convergent și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n;$$

2. dacă  $c \in \mathbb{R}$ , atunci șirul  $(cx_n)$  este convergent și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (cx_n) = c \left( \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right);$$

3. șirul produs  $(x_n y_n)$  este convergent și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n;$$

4. dacă  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0$  și  $y_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ , atunci șirul  $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$  este convergent și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}.$$

## Operații cu șiruri convergente

**Teorema 12** Fie  $(x_n), (y_n) \subseteq \mathbb{R}$  două șiruri convergente. U.a.s.a:

1. șirul sumă  $(x_n + y_n)$  este convergent și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n;$$

2. dacă  $c \in \mathbb{R}$ , atunci șirul  $(cx_n)$  este convergent și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (cx_n) = c \left( \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right);$$

3. șirul produs  $(x_n y_n)$  este convergent și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n;$$

4. dacă  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0$  și  $y_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ , atunci șirul  $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$  este convergent și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}.$$

## Operații cu șiruri convergente

**Teorema 12** Fie  $(x_n), (y_n) \subseteq \mathbb{R}$  două șiruri convergente. U.a.s.a:

1. șirul sumă  $(x_n + y_n)$  este convergent și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n;$$

2. dacă  $c \in \mathbb{R}$ , atunci șirul  $(cx_n)$  este convergent și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (cx_n) = c \left( \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right);$$

3. șirul produs  $(x_n y_n)$  este convergent și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n;$$

4. dacă  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0$  și  $y_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ , atunci șirul  $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$  este convergent și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}.$$

## Operații cu șiruri convergente

**Teorema 12** Fie  $(x_n), (y_n) \subseteq \mathbb{R}$  două șiruri convergente. U.a.s.a:

1. șirul sumă  $(x_n + y_n)$  este convergent și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n;$$

2. dacă  $c \in \mathbb{R}$ , atunci șirul  $(cx_n)$  este convergent și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (cx_n) = c \left( \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right);$$

3. șirul produs  $(x_n y_n)$  este convergent și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n;$$

4. dacă  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0$  și  $y_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ , atunci șirul  $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$  este convergent și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}.$$