Noţiuni de geometrie afină (II)

Aprilie 2018

Reprezentarea subspaţiilor vectoriale cu ajutorul sistemelor de ecuaţii liniare

Fie
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0, i = 1, \dots, m \tag{1}$$
un sistem de ecuaţii liniare şi omogene, unde coeficienţii a_{ij} aparţin unui corp comutativ C. Să considerăm aplicaţia liniară $f : C^n \to C^m$ definită prin
$$(x_1, \dots, x_n) \to \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j, \dots, \sum_{j=1}^{n} a_{mj} x_j \right)$$
Se observă că mulţimea S a soluţiilor sistemului (1) este egală cu $\ker f$. Se poate demonstra că S *este un spaţiu vectorial*.

Rangul r al matricei $[a]_{ij}$ se numeşte *rangul* sistemului (1). Din formula
$$\dim \mathbb{C}^n = \dim(\ker f) + \operatorname{rang} f$$
deducem că
$$\dim S = n - r\,. \tag{2}$$

Rezultă că *orice soluţie a sistemului (1) este o combinaţie liniară a $n-r$ soluţii liniar independente*.

Din formula (2) rezultă că *sistemul (1) admite soluţie nenulă* (S este diferit de spaţiul nul) *dacă şi numai dacă r<n*.

Fie
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = 1, \dots, m \tag{3}$$
un sistem de ecuaţii liniare oarecari, unde $a_{ij}, b_i \in C$.

Acest sistem se numeşte *compatibil*, dacă admite cel puţin o soluţie. Pentru aceasta este necesar şi suficient ca $b = (b_1, \dots, b_m)$ să aparţină mulţimii $\operatorname{im} f$. Cu alte cuvinte b este o combinaţie liniară a coloanelor matricei $[a_i j]$. Rezultă

Teorema lui Kronecker-Capelli. *Sistemul (3) de ecuaţii liniare, este compatibil dacă şi numai dacă matricea sistemului şi matricea completată au acelaşi rang.* Prin matricea sistemului înţelegem matricea $[a_{ij}]$, iar matricea completată se obţine adăugând la matricea sistemului coloana formată din termenii liberi b_i.

Presupunem că sistemul (3) este compatibil şi fie $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ o soluţie a sa. Pentru a obţine toate soluţiile sistemului (3) considerăm sistemul (1), dedus din (3) prin înlocuirea termenilor liberi cu 0, numit *sistemul omogen asociat sistemului (3)*, şi mulţimea S a soluţiilor sistemului (1). În caz de compatibilitate, *mulţimea soluţiilor sistemului liniar oarecare (3) este egală cu* $x^0 + S = \{x^0 + x | x \in S\}$.

Într-adevăr, sistemul 3 se poate scrie sub forma

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^0, i = 1, \ldots, m$$

sau

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j - x_j^0) = 0, i = 1, \ldots, m$$

de unde se vede că $x = (x_1, \ldots, x^n)$ verifică sistemul (3) dacă şi numai dacă $x - x^0$ verifică sistemul (1).

Hiperplane vectoriale

V un spaţiu vectorial cu scalarii într-un corp . Un subspaţiu al lui V, diferit de V, se zice *propriu.* Un subspaţiu propriu maximal se numeşte *hiperplan vectorial.*

Dacă $\dim V = n$, subspaţiile vectoriale de dimensiune $n-1$ sunt hiperplane vectoriale.

În spaţiile infinit dimensionale, existanţa hiperplanelor se bazează pe următoarea proprietate de schimb:

Lemă. Fie H un subspaţiu propriu al lui V şi $a \in V$ asffel încât $H + < a >= \{h + \lambda a | h \in H, \lambda \in C\} = V$. Atunci pentru orice $b \in V \setminus H$ are loc $H + < b >= V$ şi H este un hiperplan vectorial.

Există o legătură între hiperplanele vectoriale şi funcţionalele liniare:

Teorema 1. Hiperplanele vectoriale sunt nuclee de funcţionale liniare şi reciproc.

Observaţie Dacă $\dim V = n$, alegem o bază $B = (e_1, \ldots, e_n)$ şi funcţionalele liniare devin forme liniare. În acest caz, orice hiperplan H al lui V se scrie

$$H = \left\{ x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i | a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0 \right\}$$

unde a_i sunt scalari, nu toţi nuli.

$$a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0$$

este *ecuaţia hiperplanului* H.

În cazul unui spaţiu vectorial oarecare ecuaţia lui H se generalizează la

$$f(x) = 0$$

unde f este o funcţională liniară pentru care $H = \ker f$.

Teorema 2. Fie X un subspaţiu propriu al unui spaţiu vectorial nenul V. Există o familie de hiperplane H_α, $\alpha \in I$, astfel încât

$$X = \cap_{\alpha \in I} H_\alpha.$$

Corolarul 1. Fie $\dim V = n \neq 0$. Fiecare subspaţiu propriu X al lui V este intersecţia unui număr finit de hiperplane.

Corolarul 2. Dacă $(e_1, \ldots, e_n)$ este o bază a spaţiului V şi X un subspaţiu propriu al lui V, atunci există $a_{ij} \in C$ astfel încât

$$X = \left\{ x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \mid \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0, i = 1, \ldots, m \right\}$$

Sistemul de ecuaţii liniare şi omogene

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0,\ i = 1, \ldots, m \tag{4}$$

se numeşte *sistemul de ecuaţii al subspaţiului X.*

Observaţie. Soluţiile unui sistem liniar şi omogen formează un subspaţiu în V, iar conform celor demonstrate mai sus fiecare subspaţiu al lui V poate fi obţinut pe această cale (şi cel impropriu, dacă se ia u $a_{ij} = 0$). În concluzie: *Subspaţiile unui spaţiu vectorial finit dimensional se caracterizează prin sistemele de ecuaţii de forma (4).*

Aplicaţii

Problema 1. Studiaţi poziţia relativă a planelor afine, definite cu ajutorul ecuaţiilor lor, în următoarele cazuri:

a) În spaţiul C^4 se consideră planele:

$$\pi_1 : \begin{cases} x^1 - 2x^2 + x^3 + 4x^4 = 0, \\ 3x^1 + x^2 - 2x^4 - 2 = 0, \\ 2x^3 + x^4 = 3; \end{cases} \qquad \pi_2 : \begin{cases} 2x^1 + 3x^2 - x^3 - 6x^4 = -2, \\ 3x^1 + x^2 - 4x^3 - 4x^4 = -8. \end{cases}$$

Soluţie: Rangul matricii sistemului este 3, al matricii extinse 4, sistem incompatibil, varietăţi care nu se intersectează, dar dacă scrii spaţiile directoare vei vedea că sunt conţinute unul în celălalt, adică varietăţile sunt paralele.

b) În spaţiul C^4 se consideră planele:

$$\pi_3 : x^1 + x^2 + x^3 + x^4 = 0; \quad \pi_1 : \begin{cases} x^1 + x^2 + x^3 = 0, \\ x^3 - x^4 = 0, \\ x^1 - x^3 = 1. \end{cases}$$

Soluţie: Rangul matricii sistemului este 4, al matricii extinse 4, sistem compatibil, varietăţile se intersectează într-un punct (soluţia sistemului (1,-1,0,0)).