Integrale improprii

Exerciţiul 1: Studiaţi integrabilitatea improprie (cu ajutorul definiţiei şi a formulei lui Leibniz-Newton) pentru următoarele funcţii. În caz de convergenţă, determinaţi valoarea integralei improprii.

Pentru toate exemplele de aici, vorm urma următorii paşi:

Pasul 1: Determinăm integrala nedefinită a lui f

Pasul 2: Alegem o primitivă a lui f (de regulă din integrala nedefinită alegem funcţia cu constanta =0)

Pasul 3: Calculăm lim din primitivă, înspre punctele problemă. Dacă limita există şi este finită, atunci suntem într-un caz de convergenţă.

a)

$$f:(-1,1)\to\mathbb{R} \quad f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Observăm ca avem probleme atât în -1 cât şi în 1, de aceea vom calcula două limite din primitivă.

Funcţia $F\colon(-1,1)\to\mathbb{R}$, definită prin $F(x)=\arcsin x$, este o primitivă a lui f. Deoarece

$$\lim_{\substack{x\to-1\\ x>-1}}\arcsin x=-\frac{\pi}{2} \quad \text{si} \quad \lim_{\substack{x\to1\\ x<1}}\arcsin x=\frac{\pi}{2},$$

rezultă că există integrala improprie a lui f pe $(-1,1)$ iar valoarea ei este $\int_{-1+}^{1-}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\pi$.

b)

$$f:[1,\infty)\to\mathbb{R} \quad f(x)=\frac{1}{x(x+1)}.$$

Calculăm

$$\int\frac{1}{x(1+x)}dx=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}\right)dx=\ln x-\ln(1+x)+\mathcal{C}.$$

Funcţia $F\colon[1,\infty)\to\mathbb{R}$, definită prin $F(x)=\ln\frac{x}{1+x}$, este o primitivă a lui f. Deoarece

$$\lim_{x\to\infty}\ln\frac{x}{1+x}=0,$$

rezultă că integrala improprie a lui f pe $[1,\infty)$ este convergentă, şi $\int_1^\infty\frac{1}{x(1+x)}dx=\ln 2$.

c)

$$f:(0,1]\to\mathbb{R}\quad f(x)=\ln x.$$

Calculăm
$$\int \ln x dx=\int (x)'\ln x dx = x\ln x-\int 1dx = x\ln x - x+\mathcal{C},$$
Deci funcţia $F\colon (0,1]\to\mathbb{R}$, definită prin $F(x)=x\ln x-x$, este o primitivă a lui f. Deaorece
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(x\ln x-x)=-\lim_{y\to\infty}\frac{\ln y}{y}=0,$$
rezultă că integrala improprie a lui f pe $(0,1]$ este convergentă şi $\int_{0+}^{1}\ln x dx=-1$.

d)

$$f:[0,1)\to\mathbb{R}\quad f(x)=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Calculăm
$$\int\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int \arcsin x(\arcsin x)'dx=\frac{1}{2}(\arcsin x)^2+\mathcal{C}.$$
Deci funcţia $F\colon [0,1)\to\mathbb{R}$, definită prin $F(x)=\frac{1}{2}(\arcsin x)^2$, este o primitivă a lui$f$. Din
$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}(\arcsin x)^2=\left(\frac{\pi}{2}\right)^2,$$
rezultă că integrala improprie a lui f pe $[0,1)$ este convergentă şi $\int_{0}^{1-}\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{(\pi)^2}{8}$.

e)

$$f:(0,1]\to\mathbb{R}\quad f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}.$$

Calculăm
$$\int\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx=2\int(\sqrt{x})'\ln x dx=2\sqrt{x}\ln x-2\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{x}\ln x-4\sqrt{x}+\mathcal{C}.$$
Deci $F\colon (0,1]\to\mathbb{R}$, definită prin $F(x)=2\sqrt{x}\ln x-4\sqrt{x}$, este o primitivă a lui f. Deoarece
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(2\sqrt{x}\ln x-4\sqrt{x}\right)=-2\lim_{y\to\infty}\frac{\ln y}{\sqrt{y}}=0,$$
rezultă că integrala improprie a lui f pe $(0,1]$ este convergentă şi $\int_{0+}^{1}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx=-4$.

f)

$$f:[e,\infty)\to\mathbb{R}\quad f(x)=\frac{1}{x\cdot(\ln x)^3}.$$

Calucluăm
$$\int \frac{1}{x(\ln x)^3}dx = \int \frac{(\ln x)'}{(\ln x)^3}dx = -\frac{1}{2(\ln x)^2} + \mathcal{C}.$$
Deci $F\colon [e, \infty[\to \mathbb{R}$, definită prin $F(x) = -\frac{1}{2(\ln x)^2}$, este o primitivă a lui f. Deoarece
$$\lim_{x\to\infty} -\frac{1}{2(\ln x)^2} = 0,$$
rezultă că integrala improprie a lui f pe $[e, \infty)$ este convergentă şi $\int_e^\infty \frac{1}{x(\ln x)^3}dx = \frac{1}{2}$.

g)

$$f:(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, 2] \to \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2x^2-2x-1}}.$$

Observăm că rădăcinile ecuaţiei $2x^2 - 2x - 1 = 0$ sunt $x_1 = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ şi $x_2 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$. Calculăm
$$\int \frac{1}{x\sqrt{2x^2-2x-1}}dx = \int \frac{1}{x^2\sqrt{2-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}}dx = -\int \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)'}{\sqrt{3-\left(1+\frac{1}{x}\right)^2}}dx = -\arcsin\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{3}} + \mathcal{C}.$$
Deci $F\colon]x_2, 2] \to \mathbb{R}$, definită prin $F(x) = -\arcsin\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{3}}$, este o primitivă a lui f. Deoarece
$$\lim_{\substack{x\to x_2\\ x>x_2}} \arcsin\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{3}} = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2} \quad \text{and} \quad \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3},$$
rezultă că integrala improprie a lui f pe $(x_2, 2]$ este convergentă şi $\int_{x_2+}^2 \frac{1}{x\sqrt{2x^2-2x-1}}dx = \frac{\pi}{6}$.

h)
$$f:[0,\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{\pi}{2} - \text{arctg}x.$$

Calculăm
$$\int \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right)dx = \frac{\pi}{2}x - \int (x)'\operatorname{arctg} x dx = \frac{\pi}{2}x - x\operatorname{arctg} x + \int \frac{x}{1+x^2}dx =$$
$$= x\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right) + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \mathcal{C} = x\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right) + \ln(\sqrt{1+x^2}) + \mathcal{C},$$
Deci $F\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $F(x) = x\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right) + \ln(\sqrt{1+x^2})$, este o primitivă a lui f. Deoarece
$$\lim_{x\to\infty} x\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right) = \lim_{\substack{y\to 0\\ y>0}} \frac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{1}{y}}{y} = \lim_{\substack{y\to 0\\ y>0}} \frac{1}{y^2+1} = 1$$
(am folosit şi teorema lui L'Hospital). Deci
$$\lim_{x\to\infty}\left(x\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right) + \ln(\sqrt{1+x^2}\right) = \infty,$$

integrala improprie a lui f pe $[0, \infty)$ este divergentă, având valorea ∞.

i)

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{1+x^2},$$

Calculăm
$$\int \frac{1}{1+x^2} = \text{arctg} x + \mathcal{C}.$$
Deci $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $F(x) = \text{arctgx}$ este o primitivă a lui f. Din
$$\lim_{x\to-\infty} \text{arctg} x = -\frac{\pi}{2} \text{ and } \lim_{x\to\infty} \text{arctg} x = \frac{\pi}{2}$$
rezultă că integrala improprie a lui f pe $\mathbb{R}$ este convergentă, şi
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi.$$

j)

$$f\colon \left(\frac{1}{3}, 3\right] \to \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{3x-1}}$$

Calculăm
$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{3x-1}} dx = \int (3x-1)^{-\frac{1}{3}} dx = \int (3x-1)^{-\frac{1}{3}} \cdot (3x-1)' \cdot \frac{1}{3} dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{(3x-1)^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} = \frac{(3x-1)^{\frac{2}{3}}}{2} + \mathcal{C},$$
Deci $F\colon \left(\frac{1}{3}, 3\right] \to \mathbb{R}$, definită prin $F(x) = \frac{(3x-1)^{\frac{2}{3}}}{2}$ este o primitivă a lui f. Din
$$\lim_{\substack{x > \frac{1}{3} \\ x \to \frac{1}{3}}} \frac{(3x-1)^{\frac{2}{3}}}{2} = 0$$
rezultă că integrala improprie a lui f pe $\left(\frac{1}{3}, 3\right]$ este convergentă, şi
$$\int_{\frac{1}{3}+}^{3} f(x)dx = F(3) - \lim_{\substack{x > \frac{1}{3} \\ x \to \frac{1}{3}}} F(x) = \frac{8^{\frac{2}{3}}}{2} = 2.$$

j)

$$f\colon [1, \infty) \to \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}.$$

Calculăm
$$\int \frac{x}{(1+x^2)^2} dx = \int (1+x^2)^{-2} \cdot (1+x^2)' \cdot \frac{1}{2} dx = \frac{(1+x^2)^{-2+1}}{-2+1} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \cdot (1+x^2)^{-}1 + \mathcal{C}.$$

Deci $F\colon [1,\infty) \to \mathbb{R}$ definită prin $F(x) = -\frac{1}{2(1+x^2)}$ este o primitivă a lui f. Din

$$\lim_{x\to\infty} -\frac{1}{2(1+x^2)} = 0$$

rezultă că integrala improprie a lui f pe $[1,\infty)$ este convergentă şi

$$\int_1^\infty f(x)dx = \lim_{x\to\infty} F(x) - F(1) = 0 - \left(-\frac{1}{2(1+1)}\right) = \frac{1}{4}.$$