Noţiuni de geometrie afină

Martie 2018

Structura afină a unui spaţiu vectorial

Fie V un spaţiu vectorial cu scalarii într-un corp $\mathbb{K}$. O submulţime a lui $A \subset V$ de forma

$$A = a + U = \{a + u, u \in U\},$$

unde $a \in V$ şi U este un subspaţiu vectorial al lui V, se numeşte *varietate liniară* în V. U poartă numele de *subspaţiu director* al varietăţii A. Mulţimea varietăţilor liniare ale spaţiului vectorial V, împreună cu mulţimea vidă, ordonată prin incluziune, se numeşte *structura afină* a lui V. Ea se notează cu $\mathscr{A}(V)$.

Mulţimea V are structură de spaţiu vectorial, care induce o structură de ordine pe $(\mathscr{A}(V), \subset)$.

Propoziţia 1. Fie $A = a + U \in \mathscr{A}(V)$ şi $b \in A$. Atunci $A = b + U$.

Corolar: O varietate liniară A este un subspaţiu vectorial dacă şi numai dacă $0_V \in A$.

Propoziţia 2. Dacă $a + U = a' + U' \in \mathscr{A}(V)$, atunci $U = U'$.

Observaţie: În reprezentarea unei varietăţi liniare nevide sub forma $A = a + U$, subspaţiul vectorial U este unic determinat, el se notează cu $D(A)$.

Definiţii. Subspaţiul vectorial care intră în reprezentarea lui A se numeşte *spaţiul director* al varietăţii liniare A. *Dimensiunea varietăţi liniare* se defineşte astfel: $\dim A = \dim D(A)$ dacă $A \neq \emptyset$ şi $\dim \emptyset$ = -1. Dacă $\dim A = 0$, atunci mulţimea A este formată dintr-un singur vector a, numit *punct*. Dacă $\dim (A) = 1, 2, p$, varietatea liniară A se numeşte respectiv *dreaptă*, *plan*, *p-plan*. Dacă $0_V \in A$, atunci avem o dreaptă vectorială, un plan vectorial, s.a.m.d. Dacă U este un hiperplan vectorial, $a + U$ se numeşte *hiperplan*. Dacă V are dimensiunea finită n, un hiperplan are dimensiunea $n - 1$.

Propoziţia 3. Dacă $A_\alpha \in \mathscr{A}(V)$, pentru $\alpha \in I$, atunci $\bigcap\limits_{\alpha \in I} A_\alpha \in \mathscr{A}(V)$

Corolar: Dacă varietăţile liniare A_α, $\alpha \in A$, sunt finit dimensionale şi au intersecţie nevidă, atunci

$$\dim \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \dim \bigcap_{\alpha \in I} D(A_\alpha).$$

Propoziţia 4. Dacă a şi b sunt puncte distincte în V, atunci există o singură dreaptă care conţine pe a şi b; o vom nota cu ab.

Observaţie: Dreapta ab se poate scrie sub forma următoare

$$ab = \{(1 - \lambda)a + \lambda b | \lambda \in \mathbb{C}\}.$$

Varietăţile liniare pot fi caracterizate cu ajutorul dreptelor.

Proprietate 5. Fie V un spaţiu cu scalari într-un corp C, care conţine cel puţin 3 elemente. O submulţime L a lui Veste o varietate liniară dacă şi numai dacă, odată cu două puncte distincte $a, b \in L$, dreapta ab este inclusă în L.

Propoziţia 6. O submulţime $L \in V$ este o varietate liniară dacă şi numai dacă următoarea condiţie este satisfăcută:

$$\left(x_1, \dots, x_m \in L, \lambda_1, \dots, \lambda_m \in C, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1\right) \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i \in L.$$

Definiţii. Combinaţia liniară $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i$, în care coeficienţii λ_i îndeplinesc condiţia $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$, se numeşte *combinaţie afină* a punctelor $x_1, \dots, x_m \in V$.

Fie $M \subset V$. Conform propoziţiei 3, intersecţia tuturor varietăţilor liniare ale lui V care conţin M, este o varietate liniară. Ea se numeşte *varietatea liniară subîntinsă de M* sau *înfăşurătoarea (anvelopa) afină a lui M* sau *închiderea afină a lui M* şi se notează *af M*. Este evident că *af M* este elementul minim în $(\mathscr{A}(V), \subset)$ care conţine pe M:

$$A \in \mathscr{A}(V), M \subset A \Rightarrow af M \subset A.$$

Propoziţia 7. Înfăşurătoarea afină a unei mulţimi $M \subset V$ este formată din toate combinaţiile afine care se pot forma cu toate selecţiile finite de elemente din M:

$$af M = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i | m \in \mathbb{N}, x_1, \dots x_m \in M, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1 \right\}.$$

Proprietăţi laticeale

Definiţii. Fie $(S, \leq)$ o mulţime ordonată oarecare şi $M \subset S$. Dacă mulţimea majorantelor lui M admite un minim s (în mod necesar unic), atunci acest element s se numeşte *supremum al mulţimii M* şi se notează cu $\sup M$. Aşadar $s = \sup M$ înseamnă că

1) $x \in M \Rightarrow x \leq s$

2) $(\forall x \in M,\ x \leq y) \Rightarrow s \leq y$.

Analog $s' = \inf M$ (*infimum* al lui M), dacă

1) $x \in M \Rightarrow s' \leq x$

2) $(\forall x \in M,\ y \leq x) \Rightarrow y \leq s'$.

Dacă oricare două elemente din S admit un supremum şi un infimum, atunci structura $(S, \leq)$ se numeşte *latice*. În acest caz notăm, pentru $a, b \in S$

$$a \vee b = \sup\{a, b\},\ a \wedge b = \inf\{a, b\}$$

unde $a \vee b$ se numeşte *uniunea*, iar $a \wedge b$ *secţiunea* elementelor a şi b.

Rezultă uşor că orice mulţime finită a lui S are un supremum şi un infimum. Dacă orice submulţime a lui S admite un supremum şi un infimum, $(S, \leq)$ se numeşte *latice completă*.

Exemple: 1) Mulţimea numerelor naturale $(\mathbb{N}, \leq)$ cu ordonarea naturală este o latice.

2) Fie $(\mathscr{L}(V), \subset)$ mulţimea tuturor subspaţiilor vectoriale ale spaţiului vectorial V, ordonate prin incluziune. $(\mathscr{L}(V), \subset)$ este o latice completă. Pentru $X_\alpha \in \mathscr{L}(V)$, $\alpha \in I$, avem

$$\inf_{\alpha \in I} X_\alpha = \inf\{X_\alpha | \alpha \in I\} = \bigcap_{\alpha \in I} X_\alpha$$

şi

$$\sup_{\alpha \in I} X_\alpha = \sum \{X_\alpha | \alpha \in I\} = \sum_{\alpha \in I} X_\alpha .$$

Teoremă. Structura afină $\mathscr{A}(V)$ este o latice completă. Pentru o familie oarecare $A_\alpha \in \mathscr{A}(V)$, $\alpha \in I$, avem

$$\inf_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$$

şi

$$\sup_{\alpha \in I} A_\alpha = af \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha .$$

În particular, dacă $A, B \in \mathscr{A}(V)$

$$A \vee B = A \cap B,\ A \wedge B = af(A \cup B).$$

Propoziţie Dacă spaţiile vectoriale V şi W, cu scalari în acelaşi corp C, sunt izomorfe, atunci şi laticele $\mathscr{A}(V)$ şi $\mathscr{A}(W)$ sunt izomorfe.

Într-ucât fiecare spaţiu vectorial, cu scalari în C, de dimensiune n este izomorf cu spaţiul standard C^n, sturcturile afine finit dimensionale sunt (laticeal) izomorfe cu $\mathscr{A}(C^n)$. Cu alte cuvinte, proprietăţile structurilor afine finit dimensionale pot fi studiate pe prototipul $\mathscr{A}(C^n)$.

Fie $a = x^0 + U \in \mathscr{A}(C^n)$, $\{d_1, \dots, d_r\}$ o bază a lui U, $x_0 = (x_1, \dots, x_n)$ şi $d_j = (d_{1j}, \dots, d_{nj}),\ j = 1, \dots, r$. Avem

$$A = \left\{ (x_1, \dots, x_n) |\ x_i = x_i^0 + \sum_{j=1}^{r} d_{ij} \lambda_j,\ \lambda_j \in C \right\}.$$

Ecuaţiile

$$x_i = x_i^0 + \sum_{j=1}^{r} d_{ij} \lambda_j,\ i = 1, \dots, n$$

se numesc *ecuaţiile parametrice ale varietăţii liniare A.* Dar, varietăţile liniare ale lui C^n coincid cu soluţiile sistemelor de ecuaţii liniare. Cu alte cuvinte, $A \in \mathscr{A}(C^n)$ poate fi caracterizat şi astfel

$$A = \left\{ (x_1, \dots, x_n) |\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i = 1, \dots, m \right\}.$$

Condiţiile care figurează aici,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i = 1, \ldots, m,$$

formează *sistemul de ecuaţii al varietăţii liniare A*.

Intersecţia a două varietăţi liniare $A, B \in \mathscr{A}(V)$ se obţine luând împreună ecuaţiile lui A şi B.

Teorema dimensiunii. Paralelism

Propoziţia 1. Fie A, $B \in \mathscr{A}(V)$, $a \in A$, $b \in B$, atunci

$$A \vee B = a + D(A) + D(B) + < b - a > .$$

Propoziţia 2. Fie A, $B \in \mathscr{A}(V)$, $a \in A$, $b \in B$, atunci

$$A \cap B \neq \emptyset \Leftrightarrow < b - a > \subset D(A) + D(B) .$$

Propoziţia 3. Dacă varietătile liniare A şi B au un punct în comun a, avem

$$A \vee B = a + D(A) + D(B)$$

$$A \wedge B = a + D(A) \cup D(B) .$$

Teorema dimensiunii. Fie A şi B două varietăti liniare nevide de dimensiuni finite din V.

a) Dacă $A \cup B \neq \emptyset$, are loc relaţia

$$\dim(A \vee B) = \dim A + \dim B - \dim(A \wedge B)$$

b) Dacă $A \cup B = \emptyset$, avem

$$A \wedge B = \dim(D(A) + D(B)) + 1 .$$

Observaţie: Varietatea liniară $L_1 \vee L_2$ subîntinsă de dreptele L_1 şi L_2, este un plan, dacă dreptele L_1 şi L_2 se intersectează într-un singur punct; $L_1 \vee L_2$ este tot un plan dacă $L_1 \cup L_2 = \emptyset$ sau $D(L_1) = D(L_2)$; $L_1 \vee L_2$ are dimensiunea trei, dacă $L_1 \cup L_2 = \emptyset$ sau $D(L_1) \neq D(L_2)$

Definiţie. Subspaţiile afine A şi B se numesc *paralele*, notate $A \parallel B$, dacă $D(A) \subset D(B)$ sau $D(B) \subset D(A)$.

Propoziţia 4. Dacă pentru A, $B \in \mathscr{A}(V)$ avem $A \parallel B$, atunci $A \subset B$ sau $B \subset A$ sau $A \cup B = \emptyset$.

Propoziţia 5. Fie $\dim V = n$. Dacă subspaţiul afin nevid A nu are punct comun cu hiperplanul H, atunci $A \parallel H$.

Propoziţia 6. Dacă dreapta L intersectează hiperplanul H într-un punct, atunci o paralelă L' la L intersectează de asemenea pe H într-un punct.