

Serii - considerații teoretice

O serie de numere reale este o pereche ordonată de două șiruri $((x_n), (s_n))_{n \geq k}$ unde

$$s_n = x_k + x_2 + \dots + x_n.$$

numit **șriul sumelor parțiale**. Notățiile uzuale pentru serii sunt:

$$\sum_{n \geq k} x_n = \sum x_n.$$

Dacă există $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ea se numește suma seriei și se notează cu

$$\sum_{n=k}^{\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n.$$

Atunci când $\sum_{n=k}^{\infty} x_n \in \mathbb{R}$, seria se numește **convergentă**. Ea este divergentă în rest, adică dacă:

- a) $\nexists \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$
- sau
- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n \in \{\pm\infty\}$.

1 Criteriul general de convergență al lui Cauchy

Seria $\sum x_n$ este convergentă dacă și numai dacă

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N} : \|x_{n+1} + \dots + x_{n+p}\| < \varepsilon.$$

2 Teorema de legătură între seria $\sum x_n$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Dacă seria $\sum x_n$ este convergentă, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$

Care este echivalentă cu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq 0 \implies \sum x_n \text{ divergenta.}$$

Această teoremă este foarte utilă atunci când exercițiul se referă la o serie divergentă, deoarece dacă $\lim x_n \neq 0$, am terminat rapid rezolvarea.

Aplicații la teorema de legătură între seria $\sum x_n$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

Aplicația 1 Studiați natura seriei

$$\sum \ln \left(2 + \frac{1}{n} \right).$$

Rezolvare: Deoarece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(2 + \frac{1}{n} \right) = \ln 2 \neq 0$$

rezultă că seria $\sum \ln \left(2 + \frac{1}{n} \right)$ este divergentă.

Aplicația 2 Studiați natura seriei

$$\sum_{n \geq 3} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right).$$

Rezolvare: Constatăm că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \ln 1 = 0.$$

Nu putem concluziona nimic încă, seria trebuie studiată prin alte mijloace. Constatăm că

$$x_n = \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) = \ln(n+1) - \ln n.$$

Deci seria este una telescopică, definită cu ajutorul șirului (a_n) , având termenul general

$$a_n = \ln n \quad \text{cu} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty.$$

Conform teoriei de la seminarul anterior, deoarece $x_n = a_{n+1} - a_n$ iar $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ există, seria $\sum x_n$ are sumă, iar aceasta este:

$$\sum_{n=3}^{\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - a_3 = \infty - \ln 3 = \infty.$$

Astfel, seria $\sum_{n \geq 3} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$ este divergentă, cu suma $+\infty$.

3 Serii cu termeni pozitivi

Seriile cu termeni pozitivi (STP) sunt acelea care au

$$x_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

STP sunt caracterizate de faptul că șirul sumelor parțiale este strict crescător, deoarece

$$s_{n+1} - s_n = x_{n+1} > 0.$$

Astfel, conform teoremi lui Weierstrass, (s_n) are întotdeauna limită, deci seria $\sum x_n$ are întotdeauna sumă. Mai mult, seria este

$$\text{convergenta} \iff \text{șirul } (s_n) \text{ este marginit.}$$

Deci, dacă seria $\sum x_n$ este divergentă, întotdeauna $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \infty$.

3.1 Criteriul condensării al lui Cauchy

Fie $\sum x_n$ o STP cu (x_n) descrescător. Atunci

$$\sum x_n \sim \sum 2^n x_{2^n}.$$

Aplicație la criteriul condensării al lui Cauchy - Seria armonică generalizată

Este seria

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$$

cu $\alpha \in \mathbb{R}$. Despre ea avem următoarele concluzii:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha} \quad \text{este} \quad \begin{cases} \text{convergenta} : & \alpha > 1 \\ \text{divergenta} : & \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Ea are întotdeauna suma, iar în cazul în care $\alpha \leq 1$ suma este

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = \infty.$$

În particular:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

Această serie este deseori folosită ca termen de comparație în C2C.

3.2 Criterii de comparație pentru STP

C1C

Fie $\sum x_n$ și $\sum y_n$ două STP astfel încât $\exists a > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ pentru care

$$x_n \leq ay_n, \forall n \geq n_0.$$

Atunci

$$(*) \left\{ \begin{array}{ll} \sum y_n \text{ convergenta} & \implies \sum x_n \text{ convergenta} \\ \sum x_n \text{ divergenta} & \implies \sum y_n \text{ divergenta} \end{array} \right.$$

C2C

Fie $\sum x_n$ și $\sum y_n$ două STP astfel încât

$$\exists l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} \in [0, \infty].$$

Atunci

1. Dacă $l = 0$ atunci (*).
2. Dacă $l = \infty$ atunci

$$(**) \left\{ \begin{array}{ll} \sum x_n \text{ convergenta} & \implies \sum y_n \text{ convergenta} \\ \sum y_n \text{ divergenta} & \implies \sum x_n \text{ divergenta} \end{array} \right.$$

3. Dacă $l \in (0, \infty)$, atunci (*) și (**). Deci

$$\sum x_n \sim \sum y_n,$$

adică seriile au aceeași natură (deci sunt amândouă simultan, fie convergente, fie divergente).

Aplicații la criteriile de comparație pentru STP

Studiază natura seriilor:

$$a) \sum \frac{2^n}{3^n + 5^n} \quad \text{si} \quad b) \sum \frac{1}{\sqrt{n(n^2 + 1)}}.$$

Rezolvare: a) Întotdeauna atunci când în expresia termenului general al seriei apar constante la puterea n , încercăm o comparație cu seria geometrică. Pentru cazul nostru constatăm destul de simplu că

$$\frac{2^n}{3^n + 5^n} \leq \frac{2^n}{3^n}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Seria $\sum_{n \geq 1} \frac{2^n}{3^n} = \frac{2}{3} \sum_{n \geq 1} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ este convergentă deoarece este o constantă înmulțită cu seria geometrică de rație $\frac{2}{3} < 1$, care este convergentă.

Aplicăm C1C pentru $\sum x_n = 2^n 3^n + 5^n$ și $\sum y_n = \sum \frac{2^n}{3^n}$. Din (*) va rezulta că $\sum x_n$ este convergentă, deoarece seria mai mare, adică $\sum y_n$ este tot convergentă.

b) Atunci când în expresia termenului general al seriei apare n la putere constantă, încercăm o comparație cu seria armonică generalizată $\sum y_n = \sum \frac{1}{n^\alpha}$, prin C2C. Nu fixăm de la început valoarea parametrului α ci o vom deduce pe parcurs. Efectuăm astfel

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}}{\frac{1}{n^\alpha}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{\sqrt{n(n^2+1)}}.$$

Pentru a obține echivalența celor două serii, care are loc doar pentru limita $\in (0, \infty)$ setăm $\alpha = \frac{3}{2}$. Atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n(n^2+1)}} = 1$$

deci, conform C2C

$$\sum x_n \sim \sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

Deoarece $\frac{3}{2} > 1$, seria $\sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ este convergentă, în consecință și seria inițială este convergentă.

3.3 Consecința criteriului raportului și a radicalului

Fie $\sum x_n$ o serie cu termeni pozitivi. Dacă există

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \quad \text{sau} \quad l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n}$$

atunci

$$(***) \begin{cases} l < 1 \implies \sum x_n & \text{convergenta;} \\ l > 1 \implies \sum x_n & \text{divergenta;} \\ l = 1 \implies ? \end{cases}$$

3.4 Criteriul lui Raabe-Duhamel

Fie $\sum x_n$ o serie cu termeni pozitivi. Dacă există

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right)$$

atunci

$$(***) \begin{cases} l > 1 \implies \sum x_n & \text{convergenta;} \\ l < 1 \implies \sum x_n & \text{divergenta;} \\ l = 1 \implies ? \end{cases}$$

3.5 Algoritm în doi pași pentru rezolvarea problemelor cu rapoarte

Pasul 1: Calculăm

$$D := \lim_{n \rightarrow \infty} D_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}. \quad \text{Atunci} \begin{cases} D < 1 \implies \sum x_n & \text{convergenta;} \\ D > 1 \implies \sum x_n & \text{divergenta;} \\ D = 1 \implies & \text{go to Pasul 2} \end{cases}.$$

Pasul 2: Calculăm

$$R := \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{D_n} - 1 \right). \quad \text{Atunci} \begin{cases} R > 1 \implies \sum x_n & \text{convergenta;} \\ R < 1 \implies \sum x_n & \text{divergenta;} \\ R = 1 \implies & \text{go to ipoteze} \end{cases}.$$

Aplicație la algoritmul în doi pași:

Studiați natura seriei, pentru $a > 0$:

$$\sum \frac{n!}{a(a+1)\dots(a+n-1)}.$$

Observăm că termenii succesivi ai șirului care generează seria sunt reductibili, de aceea mergem cu gândul la criteriul raportului, și aplicăm algoritmul în 2 pași.

Pasul 1: Calculăm

$$\begin{aligned} D &:= \lim_{n \rightarrow \infty} D_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{a(a+1)\dots(a+n-1)(a+n)} \cdot \frac{a(a+1)\dots(a+n-1)}{n!} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n+a} = 1 \end{aligned}$$

Deci trecem la **pasul 2**, deoarece pasul 1 nu ne oferă nici o concluzie. Calculăm

$$R := \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{D_n} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{n+a}{n+1} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a-1) \cdot \frac{n}{n+1} = 1-a.$$

Conform concluziilor teoremei lui Raabe-Duhamel:

$$\left\{ \begin{array}{l} a-1 > 1 \implies \sum x_n \text{ convergenta}; \\ a-1 < 1 \implies \sum x_n \text{ divergenta}; \\ a-1 = 1 \implies \text{go to ipoteze} \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} a > 2 \implies \sum x_n \text{ convergenta}; \\ a < 2 \implies \sum x_n \text{ divergenta}; \\ a = 2 \implies \text{go to ipoteze} \end{array} \right.$$

Înlocuind a cu 2 în expresia inițială a seriei obținem seria

$$\sum \frac{n!}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2+n-1)} = \sum \frac{n!}{(n+1)!} = \sum \frac{1}{n+1}.$$

Studiem natura seriei nou-obținute

$$\sum \frac{1}{n+1}$$

în formularea cărei observăm că intervine doar n la o putere constantă. În acest caz folosim comparația cu seria armonică generalizată

$$\sum y_n = \sum \frac{1}{n^\alpha}$$

prin cel de-al doilea criteriul al comparației (C2C). Deci calculăm

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n^\alpha}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{n+1}.$$

Se observă că C2C oferă concluzii pentru cazul în care limita de mai sus $\in [0, \infty]$, dar nu complete (adică există situații care se exclud, cum ar fi cazul în care $\sum y_n$ este divergentă dacă limita este 0, sau $\sum x_n$ convergentă tot pentru această limită 0).

Atunci când obținem o limită $\in (0, \infty)$, cele două serii sunt echivalente, deci au aceeași natură. În consecință tot timpul când aplicăm C2C ar fi de preferat să obținem o astfel de limită. În cazul particular al exercițiului nostru, o astfel de limită se obține doar pentru

$$\alpha = 1.$$

Astfel

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = 1,$$

deci, conform C2C cele două serii au aceeași natură

$$\sum x_n \sim \sum \frac{1}{n}.$$

Deoarece $\sum \frac{1}{n}$ este divergentă, obținem concluzia că

$$\sum \frac{1}{n+1}$$

este divergentă.

Adunăm concluziile:

$$\sum \frac{n!}{a(a+1)\dots(a+n-1)} \text{ este } \begin{cases} \text{convergenta} & \text{daca } a > 2; \\ \text{divergenta} & \text{daca } a \leq 2; \end{cases}$$

Aplicație la consecința criteriului radicalului

Studiază natura seriei, atunci când $a \in \mathbb{R}$

$$\sum \frac{n^{n^2+a}}{(n+1)^2}.$$

Atunci când în expresia lui x_n apare n la o putere care depinde tot de n încercăm să aplicăm consecința criteriului radicalului. Astfel calculăm

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^{n^2+a}}{(n+1)^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{n+\frac{a}{n}}}{(n+1)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot (\sqrt[n]{n})^a.$$

Observăm că limita este separabilă (deoarece ambele șiruri au limită, și înmulțindu-le nu obținem un caz de nedeterminare). Calculăm cele două limite separat:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \stackrel{1^\infty}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-1}{n+1}\right)^n = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{n}{n+1}\right)} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{n})^a = 1^a = 1.$$

Înmulțindu-le obținem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = \frac{1}{e} \cdot 1 = \frac{1}{e} < 1.$$

Atunci, conform consecinței criteriului radicalului, pentru ca limita este < 1 , seria este **convergentă**.