Analiză matematică 2 (Calcul diferenţial în $\mathbb{R}^n$)

Examen scris la grupa 111 (19.6.2010)

1. Pentru calculul integralei improprii $I_n = \int_1^{\infty} \frac{\ln x}{(x+1)^n}\, dx$ $(n \geq 2)$, se consideră şi integrala improprie $J_n = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x(x+1)^n}$ $(n \geq 1)$. Se cere:

a) Să se arate că $J_n = J_{n-1} - \frac{1}{(n-1)2^{n-1}}$ oricare ar fi $n \geq 2$.

b) Să se arate că

$$J_n = \ln 2 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k \cdot 2^k} \quad \text{oricare ar fi } n \geq 1.$$

c) Să se determine I_n.

2. Să se determine punctele critice ale funcţiei $f : (0, \infty)^2 \to \mathbb{R}$, definite prin

$$f(x, y) = 2x^3 - \frac{5}{2}x^2 - y - \frac{x^2}{4y}$$

şi să se precizeze natura acestora.

3. Fie funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x, y) = \begin{cases} \left(1 - \cos \frac{x}{y}\right) \sqrt{x^2 + y^2} & \text{dacă } y \neq 0 \\ 0 & \text{dacă } y = 0. \end{cases}$$

Să se studieze:

a) continuitatea lui f în $(0, 0)$;

b) continuitatea lui f în $(1, 0)$;

c) diferenţiabilitatea lui f în $(0, 0)$.

4. a) Definiţi noţiunea de mulţime compactă şi enunţati teorema de caracterizare a mulţimilor compacte în $\mathbb{R}^n$.

b) Fie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ o funcţie de două ori diferenţiabilă pe $\mathbb{R}^n$ şi fie $a \in \mathbb{R}^n$ astfel încât $\nabla f(a) = 0_n$ şi $d^2 f(a)$ este formă pătratică pozitiv definită. Să se demonstreze că a este punct de minim local pentru f.