

## Serii de funcții - noțiuni introductive

Fie  $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$ . Notăm prin

$$\mathcal{F}(D) = \{f \mid f : D \rightarrow \mathbb{R}\}$$

mulțimea tuturor funcțiilor reale definite pe mulțimea  $D$ .

Fie șirul de funcții  $(f_n)_{n \geq 0} \subseteq \mathcal{F}(D)$ . Se numește **serie de funcții** orice pereche ordonată  $(f_n, s_n)_{n \geq 0}$  de două șiruri de funcții, în care cel de-al doilea șir de funcții este format din sumele parțiale ale primului șir. (Pentru a simplifica notațiile considerăm ca șirurile se indexează începând de la 1, dar aceeași teorie este valabilă și dacă pornim doar de la un  $n \geq k$ , unde  $k \in \mathbb{N}$  fixat,  $> 1$ .) Astfel pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ , șirul funcțiilor sumelor parțiale are termenul general

$$S_n : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad S_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x), \quad \forall x \in D.$$

Notațiile uzuale pentru seria de funcții este

$$\sum_{n \geq 0} f_n = \sum f_n.$$

Un punct  $x_0 \in D$  se numește **punct de convergență** (punctuală) dacă seria de numere reale rezultat prin aplicarea tuturor funcțiilor unui șir de funcții, este convergent. Adică

$$\exists \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x_0) \in \mathbb{R}.$$

Mulțimea tuturor punctelor de convergență formează **mulțimea de convergență a seriei de funcții**, notată cu

$$\mathcal{C} = \left\{ x \in D : \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \in \mathbb{R} \right\}.$$

Atunci când, mulțimea de convergență asociată unui serii de funcții este nevidă, ei i se asociază în mod natural o funcție, numită **funcția sumă**,

$$S : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R},$$

definită prin

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x), \quad \forall x \in \mathcal{C}.$$

Notăția pentru această **convergență punctuală** este:

$$\sum f_n \xrightarrow{p} S \quad \text{sau} \quad S_n \rightarrow S.$$

Folosind noțiunile corespunzătoare ale șirurilor de funcții, se poate defini convergența uniformă a unei serii de funcții, atunci când

$$S_n \rightrightarrows S.$$

# Serii de puteri- proprietăți ale sumei

## Seria binomială

Ținând cont de teoria dezvoltată mai sus, constatăm că seriile de puteri, care sunt de forma

$$\sum_{n \geq 0} a_n x^n,$$

unde  $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$  este un șir de numere reale, sunt de fapt niște serii de funcții, având

$$\forall n \in \mathbb{N}, f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = a_n x^n, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

și

$$f_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_0(x) = a_0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Asociată unei serii de puteri, putem defini o alta numită **seria derivatelor**, definită ca

$$\sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1}$$

și **seria rezultată prin integrare**, definită prin

$$\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

Conform observațiilor făcute la serii de puteri,  $0 \in \mathcal{C}$ , de aceea, asociată unei serii de puteri putem defini întotdeauna funcția sumă

$$S : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}, \quad S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad \forall x \in \mathcal{C}.$$

Observații:

- Funcția sumă moștenește proprietăți ale funcțiilor care generează seria de funcții.
- În cazul seriilor de puteri, toate funcțiile  $f_n$  sunt de fapt polinoame, deci sunt continue, derivabile și integrabile indefinit pe  $\mathbb{R}$ .
- Raza de convergență  $R$  a unei serii de puteri se moștenește atât prin derivare, cât și prin integrare, deci seriile de puteri derivată și cea rezultată prin integrare au aceeași rază de convergență  $R$ , a seriei inițiale
- Reamintim teorema de structură a mulțimii de convergență care ne asigură că

$$(-R, R) \subseteq \mathcal{C} \subseteq [-R, R].$$

- Prin moștenire Astfel, funcția sumă  $S$  este o funcție continuă (și astfel și local integrabilă Riemann pe  $(-R, R)$ ).

- Funcția sumă  $S$  este indefinit derivabilă pe  $(-R, R)$ , iar

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad \forall x \in (-R, R)$$

și pentru oricare  $k \in \mathbb{N}$

$$S^k(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_{n-k+1}x^{n-k}, \quad \forall x \in (-R, R).$$

- Funcția sumă  $S$  este local integrabilă Riemann pe  $(-R, R)$  iar

$$\int_0^x S(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, \quad \forall x \in (-R, R).$$

**Exemplul 1:** Fie seria de puteri

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n.$$

Determinați-i suma și calculați

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

**Rezolvare:** Așa cum am rezolvat în exercițiul 3 de la serii de puteri exemple (vezi pe site)

$$\mathcal{C} = (-1, 1].$$

Acum definim funcția sumă

$$S : (-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n, \quad \forall x \in (-1, 1].$$

Deoarece ea este derivabilă,

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot n \cdot x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-x)^{n-1}.$$

Observăm că am obținut chiar seria geometrică de rație  $-x$ . Iar  $x \in (-1, 1)$  implică că această rație este în modul mai mică decât 1. Astfel, obținem convergență și cunoaștem și valoarea sumei:

$$S'(x) = \frac{1}{1 - (-x)} = \frac{1}{1 + x}.$$

Integrând ajungem la concluzia că

$$S(x) = \ln(1 + x) + c \quad \text{cu} \quad c \in \mathbb{R}.$$

Dar

$$S(0) = a_0 = 0.$$

De aceea  $S(0) = \ln(1 + 0) + c$  implică  $c = 0$ . Astfel

$$S(x) = \ln(1 + x), \quad \forall x \in (-1, 1).$$

Trebuie să precizăm și valoarea lui  $S$  în 1, deoarece funcția sumă este definită și în acest punct. Ne folosim de faptul că funcția sumă este continuă, de aceea valoarea ei într-un punct (din teorema de caracterizare a continuității cu ajutorul limitelor), este egală cu limita lui  $S$  înspre acel punct. Constatăm că din cauza domeniului, vom avea în 1 doar limită la stânga. Astfel:

$$S(1) = \lim_{x \rightarrow 1, x < 1} S(x) = \lim_{x \rightarrow 1, x < 1} \ln(1+x) = \ln 2.$$

În concluzie

$$S(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2.$$

## Seria binomială

generalizare a binomului lui Newton

Seria de puteri formulată ca

$$1 + \frac{k!}{1!}x + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{k(k-1) \cdot \dots \cdot (k-n+1)}{n!}x^n + \dots,$$

pentru o constantă  $k \in \mathbb{R}$  fixată se numește **seria binomială**. Ea este de fapt o serie de puteri generată de șirul de numere reale  $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$  având termenul general

$$a_n = \frac{k(k-1) \cdot \dots \cdot (k-n+1)}{n!}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{și} \quad a_0 = 1.$$

Se observă că atunci când  $k \in \mathbb{N}$  toți termenii șirului  $(a_n)$ , de indice  $n \geq k+1$  sunt 0, pentru că în formularea lor apare  $(k-n) = 0$ . În acest caz seria binomială este chiar binomul lui Newton de grad  $k$ .

În continuare vom considera că  $k \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ .

Determinăm

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|k-n|}{n+1} = 1$$

Deci

$$R = \frac{1}{\lambda} = 1.$$

Comportamentul seriei de puteri în  $-1$ , respectiv 1 se poate studia mai ușor atunci când se cunoaște exact valoarea lui  $k$ . Pe noi la acest moment ne interesează doar că

$$(-1, 1) \subseteq \mathcal{C}.$$

Putem defini astfel funcția sumă a seriei de puteri, care sigur este definită pe intervalul de convergență  $(-1, 1)$  și este derivabilă pe acesta. Astfel:

$$S'(x) = \frac{k}{1!} + \frac{k(k-1)}{2!}x + \dots + \frac{k(k-1)(k-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1} + \dots, \forall x \in (-1, 1).$$

Efectuând calculele aferente, ajungem la concluzia că

$$(1+x)S'(x) = kS(x), \quad x \in (-1, 1).$$

Înmulțind ambii termeni ai egalității cu constanta pozitivă  $(1+x)^{k-1}$  obținem

$$(1+x)^k S'(x) - k(1+x)^{k-1} S(x) = 0$$

care implică

$$\left( \frac{S(x)}{(1+x)^k} \right)' = 0$$

Deci

$$\left( \frac{S(x)}{(1+x)^k} \right) = c.$$

Deoarece  $S(0) = 1 \implies c = 1$ , așadar

$$S(x) = (1+x)^k \quad x \in (-1, 1).$$

În concluzie

$$(1+x)^k = 1 + \frac{k!}{1!}x + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{k(k-1) \cdot \dots \cdot (k-n+1)}{n!}x^n + \dots$$

pentru orice  $x \in (-1, 1)$ , și pentru  $k \in \mathbb{R}$ , formulă care generalizează binomul lui Newton.

Paricularizând  $k$  obținem cunoscute dezvoltări în serii Taylor.

**Caz 1:  $k = -1$**  Atunci:

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + \dots, \quad x \in (-1, 1).$$

Pentru  $x = -x$ ,

$$(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots, \quad x \in (-1, 1).$$

Pentru  $x = x^2$

$$(1+x^2)^{-1} = 1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots, \quad x \in (-1, 1).$$

**Caz 2:  $k = \frac{1}{2}$**  Atunci:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 + \dots + \frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{(2n)!!}x^n + \dots, \quad x \in (-1, 1).$$

**Caz 2:  $k = -\frac{1}{2}$**  Atunci:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 + \dots + \frac{(-1)^{n-1}(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n + \dots, \quad x \in (-1, 1).$$

Dacă luăm  $x = -x^2$ , atunci

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!}x^4 + \dots + \frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!}x^{2n} + \dots, \quad x \in (-1, 1).$$

**Exemplul 2: Nu neapărat pt. examen, doar pentru aprofundare** Fie seria de puteri

$$\sum_{n \geq 1} \frac{n}{n+1} x^n.$$

Determinați suma acestei serii.

**Rezolvare:**

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} = 1.$$

Deci raza de convergență este

$$R = \frac{1}{\lambda} = 1.$$

Studiem seria de numere reale generată de  $x = -1$ :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{n}{n+1} (-1)^n.$$

Deoarece

$$\nexists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} (-1)^n,$$

seria este divergentă. Astfel  $-1 \notin \mathcal{C}$ .

Studiem seria de numere reale generată de  $x = 1$ :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{n}{n+1}.$$

Deoarece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0,$$

seria este divergentă, astfel  $1 \notin \mathcal{C}$ .

În concluzie

$$\mathcal{C} = (-1, 1).$$

Pentru calculul sumei, constatăm că pentru oricare  $x \in (-1, 1)$

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) x^n = \sum_{n=1}^{\infty} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} \\ &= x \cdot \frac{1}{1-x} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}. \end{aligned}$$

Deoarece

$$\sum_{n=1}^{\infty} y^{n-1} = \frac{1}{1-y},$$

prin integrare

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n} = -\ln(1-y) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Este ușor de observat că  $c = 0$ . Dacă facem o schimbare de indexare, din  $n$  în  $m + 1$  obținem

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{m+1}}{m+1} = -\ln(1-x).$$

Noi avem nevoie de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{x} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} - x \right) = \frac{1}{x} (-\ln(1-x) - x).$$

De aceea

$$S(x) = x \cdot \frac{1}{1-x} - \frac{1}{x} (-\ln(1-x) - x) = \frac{1}{1-x} + \frac{\ln(1-x)}{x}.$$