Analiză matematică 2 (Calcul diferențial în $\mathbb{R}^n$)

Examen scris la grupele 111 și 313 (13.6.2014 – vineri!)

1. Pentru fiecare număr real α se consideră integrala improprie

$$I(\alpha) = \int_{0+0}^{1-0} \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha} dx.$$

a) Să se determine toate valorile $\alpha \in \mathbb{R}$ pentru care $I(\alpha)$ este convergentă.

b) Să se calculeze $I(1/2)$.

2. Să se studieze diferențiabilitatea funcției $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+|y|} & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dacă } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

în punctul $(0,0)$.

3. a) Să se demonstreze că dacă A este o submulțime convexă, compactă și nevidă a lui $\mathbb{R}^n$, iar $f : A \to \mathbb{R}$ este o funcție continuă pe A, atunci $f(A)$ este un interval compact.

b) Fie mulțimea $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2\}$ și fie $f : A \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = (x+y)e^{-x^2-y^2}$. Să se determine $\min f(A)$, $\max f(A)$ și $f(A)$.

4. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulțime convexă, deschisă și nevidă, iar $f : A \to \mathbb{R}$ o funcție diferențiabilă pe A. Să se demonstreze că:

a) Pentru orice $x, y \in A$ funcția $F : [0,1] \to \mathbb{R}$, $F(t) := f((1-t)x + ty)$ este derivabilă pe $[0,1]$ și să se determine derivata ei.

b) Pentru orice $x, y \in A$ există un $z \in A$ cu proprietatea că

$$f(y) - f(x) = df(z)(y-x).$$