Seminarul 5

1. Fie (x_k) un şir convergent de puncte din $\mathbb{R}^n$ şi $x := \lim\limits_{k\to\infty} x_k$. Să se demonstreze că mulţimea $A := \{x\} \cup \{ x_k \mid k = 1, 2, \ldots \}$ este compactă.

2. Fiind date mulţimile $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$, notăm

$$A + B := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \exists\, a \in A \text{ şi } \exists\, b \in B \;:\; x = a + b \}.$$

a) Să se demonstreze că dacă una dintre mulţimile A şi B este închisă, iar cealaltă este compactă, atunci mulţimea $A + B$ este închisă.

b) Daţi exemplu de mulţimi închise A şi B pentru care mulţimea $A+B$ nu este închisă.

3. Fie A şi B submulţimi nevide ale lui $\mathbb{R}^n$ şi fie

$$d(A, B) := \inf \{ d(x, y) \mid x \in A,\ y \in B \}.$$

a) Să se demonstreze că dacă $A = \{a\}$ şi B este închisă, atunci există un $b \in B$ aşa încât $d(A, B) = d(a, b)$.

b) Să se demonstreze că dacă A este compactă şi B este închisă, atunci există $a \in A$ şi există $b \in B$ aşa încât $d(A, B) = d(a, b)$.

c) Arătaţi printr-un contraexemplu că afirmaţia de la b) nu rămâne adevărată în cazul când A şi B sunt ambele închise dar niciuna compactă.