Elemente de topologie
- sinteză-

Lect. univ. dr. **Anca GRAD**

11 noiembrie 2018

Definiție: Fie $x \in \mathbb{R}$ și $r \in \mathbb{R}$ cu $r > 0$. Se numește **bilă deschisă de centru** x **și rază** r mulțimea

$$B(x, r) := \{y \in \mathbb{R} : x - r < y < x + r\} = (x - r, x + r).$$

Definiție: Fie $x \in \mathbb{R}$ și $V \subseteq \mathbb{R}$. Mulțimea V se numește **vecinătate a punctului** x dacă

$$\exists r > 0 \text{ astfel încât } B(x, r) \subseteq V.$$

Observație:

- x fixat, vom nota $\vartheta(x)$ mulțimea tuturor vecinătăților sale;
- $\mathbb{R}$ este vecinătate pentru fiecare punct al său;
- oricare ar fi $r > 0$, $B(x, r) \in \vartheta(x)$;
- $\vartheta(x)$ are o infinitate de elemente;
- $\emptyset$ nu este vecinătate pentru nici un punct.

Definiție: Fie $x \in \mathbb{R}$ și $r \in \mathbb{R}$ cu $r > 0$. Se numește **bilă deschisă de centru** x **și rază** r mulțimea

$$B(x, r) := \{y \in \mathbb{R} : x - r < y < x + r\} = (x - r, x + r).$$

Definiție: Fie $x \in \mathbb{R}$ și $V \subseteq \mathbb{R}$. Mulțimea V se numește **vecinătate a punctului** x dacă

$$\exists r > 0 \text{ astfel încât } B(x, r) \subseteq V.$$

Observație:

- x fixat, vom nota $\vartheta(x)$ mulțimea tuturor vecinătăților sale;
- $\mathbb{R}$ este vecinătate pentru fiecare punct al său;
- oricare ar fi $r > 0$, $B(x, r) \in \vartheta(x)$;
- $\vartheta(x)$ are o infinitate de elemente;
- $\emptyset$ nu este vecinătate pentru nici un punt.

Definiție: Fie $x \in \mathbb{R}$ și $r \in \mathbb{R}$ cu $r > 0$. Se numește **bilă deschisă de centru x și rază r** mulțimea

$$B(x, r) := \{y \in \mathbb{R} : x - r < y < x + r\} = (x - r, x + r).$$

Definiție: Fie $x \in \mathbb{R}$ și $V \subseteq \mathbb{R}$. Mulțimea V se numește **vecinătate a punctului** x dacă

$$\exists r > 0 \text{ astfel încât } B(x, r) \subseteq V.$$

Observație:

- x fixat, vom nota $\vartheta(x)$ mulțimea tuturor vecinătăților sale;
- $\mathbb{R}$ este vecinătate pentru fiecare punct al său;
- oricare ar fi $r > 0$, $B(x, r) \in \vartheta(x)$;
- $\vartheta(x)$ are o infinitate de elemente;
- $\emptyset$ nu este vecinătate pentru nici un punct.

Definiție: Fie $x \in \mathbb{R}$ și $r \in \mathbb{R}$ cu $r > 0$. Se numește **bilă deschisă de centru** x **și rază** r mulțimea

$$B(x, r) := \{y \in \mathbb{R} : x - r < y < x + r\} = (x - r, x + r).$$

Definiție: Fie $x \in \mathbb{R}$ și $V \subseteq \mathbb{R}$. Mulțimea V se numește **vecinătate a punctului** x dacă

$$\exists r > 0 \text{ astfel încât } B(x, r) \subseteq V.$$

Observație:

- x fixat, vom nota $\vartheta(x)$ mulțimea tuturor vecinătăților sale;
- $\mathbb{R}$ este vecinătate pentru fiecare punct al său;
- oricare ar fi $r > 0$, $B(x, r) \in \vartheta(x)$;
- $\vartheta(x)$ are o infinitate de elemente;
- $\emptyset$ nu este vecinătate pentru nici un punct.

Definiție: Fie $x \in \mathbb{R}$ și $r \in \mathbb{R}$ cu $r > 0$. Se numește **bilă deschisă de centru** x **și rază** r mulțimea

$$B(x, r) := \{y \in \mathbb{R} : x - r < y < x + r\} = (x - r, x + r).$$

Definiție: Fie $x \in \mathbb{R}$ și $V \subseteq \mathbb{R}$. Mulțimea V se numește **vecinătate a punctului** x dacă

$$\exists r > 0 \text{ astfel încât } B(x, r) \subseteq V.$$

Observație:

- x fixat, vom nota $\vartheta(x)$ mulțimea tuturor vecinătăților sale;
- $\mathbb{R}$ este vecinătate pentru fiecare punct al său;
- oricare ar fi $r > 0$, $B(x, r) \in \vartheta(x)$;
- $\vartheta(x)$ are o infinitate de elemente;
- $\emptyset$ nu este vecinătate pentru nici un punct.

Definiție: Fie $x \in \mathbb{R}$ și $r \in \mathbb{R}$ cu $r > 0$. Se numește **bilă deschisă de centru** x **și rază** r mulțimea

$$B(x,r) := \{y \in \mathbb{R} : x - r < y < x + r\} = (x - r, x + r).$$

Definiție: Fie $x \in \mathbb{R}$ și $V \subseteq \mathbb{R}$. Mulțimea V se numește **vecinătate a punctului** x dacă

$$\exists r > 0 \text{ astfel încât } B(x,r) \subseteq V.$$

Observație:

- x fixat, vom nota $\vartheta(x)$ mulțimea tuturor vecinătăților sale;
- $\mathbb{R}$ este vecinătate pentru fiecare punct al său;
- oricare ar fi $r > 0$, $B(x,r) \in \vartheta(x)$;
- $\vartheta(x)$ are o infinitate de elemente;
- $\emptyset$ nu este vecinătate pentru nici un punct.

Proprietăți ale vecinătăților.

Teorema 1: Fie $x \in \mathbb{R}$. Următoarele afirmații sunt adevărate:

a) $V \in \vartheta v(x) \Longrightarrow x \in V$;

b) $V \in \vartheta(x)$ și $W \subseteq \mathbb{R}$ a.î. $V \subseteq W$, atunci $W \in \vartheta(x)$;

c) $V, W \in \vartheta(x) \Longrightarrow V \cap W \in \vartheta(x)$;

d) $V \in \vartheta(x) \Longrightarrow \exists W \in \vartheta(x)$ a.î. $V \in \vartheta(y), \forall y \in W$.

Teorema 2: Fie $x, y \in \mathbb{R}$ a.î. $x \neq y$. Atunci

$$\exists V \in \vartheta(x) \text{ și } \exists W \in \vartheta(y) \text{ a.î. } V \cap W = \emptyset.$$

Proprietăți ale vecinătăților.

Teorema 1: Fie $x \in \mathbb{R}$. Următoarele afirmații sunt adevărate:

a) $V \in \vartheta v(x) \Longrightarrow x \in V$;

b) $V \in \vartheta(x)$ și $W \subseteq \mathbb{R}$ a.î. $V \subseteq W$, atunci $W \in \vartheta(x)$;

c) $V, W \in \vartheta(x) \Longrightarrow V \cap W \in \vartheta(x)$;

d) $V \in \vartheta(x) \Longrightarrow \exists W \in \vartheta(x)$ a.î. $V \in \vartheta(y), \forall y \in W$.

Teorema 2: Fie $x, y \in \mathbb{R}$ a.î. $x \neq y$. Atunci

$$\exists V \in \vartheta(x) \text{ și } \exists W \in \vartheta(y) \text{ a.î. } V \cap W = \emptyset.$$

Proprietăți ale vecinătăților.

Teorema 1: Fie $x \in \mathbb{R}$. Următoarele afirmații sunt adevărate:

a) $V \in \vartheta v(x) \Longrightarrow x \in V$;

b) $V \in \vartheta(x)$ și $W \subseteq \mathbb{R}$ a.î. $V \subseteq W$, atunci $W \in \vartheta(x)$;

c) $V, W \in \vartheta(x) \Longrightarrow V \cap W \in \vartheta(x)$;

d) $V \in \vartheta(x) \Longrightarrow \exists W \in \vartheta(x)$ a.î. $V \in \vartheta(y), \forall y \in W$.

Teorema 2: Fie $x, y \in \mathbb{R}$ a.î. $x \neq y$. Atunci

$$\exists V \in \vartheta(x) \text{ și } \exists W \in \vartheta(y) \text{ a.î. } V \cap W = \emptyset.$$

Proprietăți ale vecinătăților.

Teorema 1: Fie $x \in \mathbb{R}$. Următoarele afirmații sunt adevărate:

a) $V \in \vartheta v(x) \Longrightarrow x \in V$;

b) $V \in \vartheta(x)$ și $W \subseteq \mathbb{R}$ a.î. $V \subseteq W$, atunci $W \in \vartheta(x)$;

c) $V, W \in \vartheta(x) \Longrightarrow V \cap W \in \vartheta(x)$;

d) $V \in \vartheta(x) \Longrightarrow \exists W \in \vartheta(x)$ a.î. $V \in \vartheta(y), \forall y \in W$.

Teorema 2: Fie $x, y \in \mathbb{R}$ a.î. $x \neq y$. Atunci

$$\exists V \in \vartheta(x) \text{ și } \exists W \in \vartheta(y) \text{ a.î. } V \cap W = \emptyset.$$

Proprietăți ale vecinătăților.

Teorema 1: Fie $x \in \mathbb{R}$. Următoarele afirmații sunt adevărate:

a) $V \in \vartheta v(x) \Longrightarrow x \in V$;

b) $V \in \vartheta(x)$ și $W \subseteq \mathbb{R}$ a.î. $V \subseteq W$, atunci $W \in \vartheta(x)$;

c) $V, W \in \vartheta(x) \Longrightarrow V \cap W \in \vartheta(x)$;

d) $V \in \vartheta(x) \Longrightarrow \exists W \in \vartheta(x)$ a.î. $V \in \vartheta(y), \forall y \in W$.

Teorema 2: Fie $x, y \in \mathbb{R}$ a.î. $x \neq y$. Atunci

$$\exists V \in \vartheta(x) \text{ și } \exists W \in \vartheta(y) \text{ a.î. } V \cap W = \emptyset.$$

Proprietăți ale vecinătăților.

Teorema 1: Fie $x \in \mathbb{R}$. Următoarele afirmații sunt adevărate:

a) $V \in \vartheta v(x) \Longrightarrow x \in V$;

b) $V \in \vartheta(x)$ și $W \subseteq \mathbb{R}$ a.î. $V \subseteq W$, atunci $W \in \vartheta(x)$;

c) $V, W \in \vartheta(x) \Longrightarrow V \cap W \in \vartheta(x)$;

d) $V \in \vartheta(x) \Longrightarrow \exists W \in \vartheta(x)$ a.î. $V \in \vartheta(y), \forall y \in W$.

Teorema 2: Fie $x, y \in \mathbb{R}$ a.î. $x \neq y$. Atunci

$$\exists V \in \vartheta(x) \text{ și } \exists W \in \vartheta(y) \text{ a.î. } V \cap W = \emptyset.$$

Proprietăți ale vecinătăților.

Teorema 1: Fie $x \in \mathbb{R}$. Următoarele afirmații sunt adevărate:

a) $V \in \vartheta v(x) \Longrightarrow x \in V$;

b) $V \in \vartheta(x)$ și $W \subseteq \mathbb{R}$ a.î. $V \subseteq W$, atunci $W \in \vartheta(x)$;

c) $V, W \in \vartheta(x) \Longrightarrow V \cap W \in \vartheta(x)$;

d) $V \in \vartheta(x) \Longrightarrow \exists W \in \vartheta(x)$ a.î. $V \in \vartheta(y), \forall y \in W$.

Teorema 2: Fie $x, y \in \mathbb{R}$ a.î. $x \neq y$. Atunci

$$\exists V \in \vartheta(x) \text{ și } \exists W \in \vartheta(y) \text{ a.î. } V \cap W = \emptyset.$$

Definiție: Submulțimea $A \subseteq \mathbb{R}$ se numește **deschisă** dacă

$$\forall x \in A, \exists V_A \in \vartheta(x) \text{ a.î. } V_A \subseteq A.$$

Exemple: Fie $x, y \in \mathbb{R}$ a.î. $x < y$, arbitrar alese.

- Intervalele deschise (x, y) sunt mulțimi deschise;
- intervalele de forma $(-\infty, x)$ și (x, ∞) sunt mulțimi deschise;
- intervalele de forma $(x, y]$, $[x, y)$ și $[x, y]$ nu sunt mulțimi deschise.

Teorema 3 Următoarele afirmații sunt adevărate:

1) $\emptyset$ și $\mathbb{R}$ sunt mulțimi deschise.
2) Reuniunea oricărei familii de mulțimi deschise este deschisă.
3) Intersecția oricărei familii **finite** de mulțimi deschise este o mulțime deschisă.

Intersecția unei familii infinite de mulțimi deschise poate să nu fie o mulțime deschisă. Fie $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right)$. După cum am demonstrat la seminar $A = \{0\}$, care nu este deschisă.

Definiție: Fie A o submulțime a lui $\mathbb{R}$ și fie $x \in \mathbb{R}$. Atunci punctul x se numește:

- **punct interior** al mulțimii A dacă $\exists V \in \vartheta(x)$ a.î. $V \subseteq A$;
- **punct exterior** mulțimii A dacă $\exists V \in \vartheta(x)$ a.î. $V \subseteq \mathbb{R} \setminus A$;
- **punct de frontieră** al mulțimii A dacă

$$\forall V \in \vartheta(x), V \cap A \neq \emptyset \text{ și } V \cap (\mathbb{R} \setminus A) \neq \emptyset;$$

- **punct de aderență(închidere)** al mulțimii A dacă

$$\forall V \in \vartheta(x), V \cap A \neq \emptyset;$$

- **punct de acumulare** al mulțimii A dacă

$$\forall V \in \vartheta(x), V \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset;$$

- **punct izolat** al mulțimii A dacă

$$\exists V \in \vartheta(x) \text{ a.î. } V \cap A = \{x\}.$$

Fie $A \subseteq \mathbb{R}$. Ei îi asociem mulțimile

- **interiorul lui** A

$$\operatorname{int} D = \{x \in \mathbb{R} : \exists V \in \vartheta(x) \text{ a.î. } V \subseteq A\}$$

- **exteriorul lui** A

$$\operatorname{ext} D = \{x \in \mathbb{R} : \exists V \in \vartheta(x) \text{ a.î. } V \subseteq (\mathbb{R} \setminus A)\,;$$

- **frontiera lui** A

$$\operatorname{bd} A = \{x \in \mathbb{R} : \forall V \in \vartheta(x), V \cap A \neq \emptyset \text{ și } V \cap (\mathbb{R} \setminus A) \neq \emptyset;$$

- **aderența (închiderea) lui** A

$$\operatorname{cl} A = \{x \in \mathbb{R} : \forall V \in \vartheta(x), V \cap A \neq \emptyset\}$$

- **derivata** lui A

$$A' = \{x \in \mathbb{R} : \forall V \in \vartheta(x), V \cap A = \{x\}\}.$$