Analiză matematică 2 (Calcul diferenţial în $\mathbb{R}^n$)

Lucrare de control la grupele 111 şi 311 (15.4.2011)

1. a) Să se demonstreze că dacă $a, b \in \mathbb{R}$ verifică $a^2 - 4b < 0$, atunci

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + ax + b} = \frac{2\pi}{\sqrt{4b - a^2}} .$$

b) Să se calculeze $\displaystyle\int_{-1+0}^{1-0} \frac{dx}{(x+2)\sqrt{1-x^2}}$.

c) Să se demonstreze că dacă $a, b \in \mathbb{R}$ verifică $b > |a|$, atunci

$$\int_{-1+0}^{1-0} \frac{dx}{(ax+b)\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{b^2 - a^2}} .$$

2. a) Să se definească interiorul şi închiderea unei mulţimi $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

b) Să se demonstreze că pentru orice mulţimi $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ au loc incluziunile

$$\begin{aligned} \operatorname{int}(A \setminus B) &\subseteq \big(\operatorname{int} A\big) \setminus \big(\operatorname{int} B\big), \\ \big(\operatorname{cl} A\big) \setminus \big(\operatorname{cl} B\big) &\subseteq \operatorname{cl}(A \setminus B). \end{aligned}$$

c) Să se dea exemple de mulţimi $A, B \subseteq \mathbb{R}$ pentru care incluziunile de la b) sunt stricte.

3. Să se determine numerele reale α pentru care integrala improprie

$$I(\alpha) = \int_{0+0}^{1} \left(\frac{x - \sin x}{e^x - 1} \right)^{\alpha} dx$$

este convergentă.

4. Fie funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x, y) = \begin{cases} xy & \text{dacă } x \neq 0 \\ y^2 & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$

Atunci f este continuă pe (argumentaţi răspunsul):

a) $\mathbb{R}^2$;

b) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$;

c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\} \cup \{(0,0)\}$;

d) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\}$.