Serii - consideraţii teoretice

O serie de numere reale este o pereche ordonată de dou a şiruri $((x_n), (s_n))_{n\geq k}$ unde

$$s_n = x_k + x_2 + ... + x_n.$$

numit **şriul sumelor parţiale**. Notaţiile uzuale pentru serii sunt:

$$\sum_{n\geq k} x_n = \sum x_n.$$

Dacă există $\lim\limits_{n\to\infty} s_n \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ea se numeşte suma seriei şi se notează cu

$$\sum_{n=k}^{\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} s_n.$$

Atunci când $\sum\limits_{n=k}^{\infty} x_n \in \mathbb{R}$, seria se numeşte **convergentă**. Ea este divergentă în rest, adică dacă:

a) $\nexists \lim\limits_{n\to\infty} s_n$

- sau

b) $\lim\limits_{n\to\infty} s_n \in \{\pm\infty\}$.

1 Criteriul general de convergenţă al lui Cauchy

Seria $\sum x_n$ este convergentă dacă şi numai dacă

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N} : \|x_{n+1} + ... + x_{n+p}\| < \varepsilon.$$

2 Teorema de legătură între seria $\sum x_n$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Dacă seria $\sum x_n$ este convergentă, atunci $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

Care este echivalentă cu

$$\lim_{n\to\infty} x_n \neq 0 \Longrightarrow \sum x_n \quad \textit{divergenta}.$$

Această teoremă este foarte utilă atunci când exerciţiul se referă la o serie divergentă, deorece dacă $\lim x_n \neq 0$**, am terminat rapid rezolvarea**.

Aplicaţii la teorema de legătură între seria $\sum x_n$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

Aplicaţia 1 Studiaţi natura seriei

$$\sum \ln\left(2 + \frac{1}{n}\right).$$

Rezolvare: Deoarece

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left(2 + \frac{1}{n}\right) = \ln 2 \neq 0$$

rezultă că seria $\sum \ln\left(2 + \frac{1}{n}\right)$ este divergentă.

Aplicaţia 2 Studiaţi natura seriei

$$\sum_{n\geq 3} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Rezolvare: Constatăm că

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln 1 = 0.$$

Nu putem concluziona nimci încă, seria trebuie studiată prin alte mijloace. Constatăm că

$$x_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln n.$$

Deci seria este una telescopică, definită cu ajutorul şirului (a_n), având termenul general

$$a_n = \ln n \qquad cu \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

Conform teoriei de la seminarul anterior, deoarece $x_n = a_{n+1} - a_n$ iar $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ există, seria $\sum x_n$ are sumă, iar aceasta este:

$$\sum_{n=3}^{\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} a_n - a_3 = \infty - \ln 3 = \infty.$$

Astfel, seria $\sum\limits_{n\geq 3} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ este divergentă, cu suma $+\infty$.

3 Serii cu termeni pozitvi

Seriile cu termeni pozitivi (STP) sunt acelea care au

$$x_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

STP sunt caracterizate de faptul că şirul sumelor parţiale este strict crescător, deoarece

$$s_{n+1} - s_n = x_{n+1} > 0.$$

Astfel, confrom teoremi lui Weierstrass, (s_n) are întotdeauna limită, deci seria $\sum x_n$ are întotdeauna sumă. Mai mult, seria este

$$convergenta \iff \quad sirul \quad (s_n) \quad este \quad marginit.$$

Deci, dacă seria $\sum x_n$ este divergentă, întotdeauna $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n = \infty$.

3.1 Criteriul condensării al lui Cauchy

Fie $\sum x_n$ o STP cu (x_n) descrescător. Atunci

$$\sum x_n \sim \sum 2^n x_{2^n}.$$

Aplicaţie la criteriul condensării al lui Cauchy - Seria armonică generalizată

Este seria

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$$

cu $\alpha \in \mathbb{R}$. Despre ea avem următoarele concluzii:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha} \quad este \quad \begin{cases} convergenta: & \alpha > 1 \\ divergenta: & \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Ea are întotdeauana sumă, iar în cazul în care $\alpha \leq 1$ suma este

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \infty.$$

În particular:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

Această serie este deseori folosită ca termen de comparaţie în C2C.

3.2 Criterii de comparaţie pentru STP

C1C

Fie $\sum x_n$ şi $\sum y_n$ două STP astfel încât $\exists a > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ pentru care

$$x_n \leq a y_n, \forall n \geq n_0.$$

Atunci

$$(*) \begin{cases} \sum y_n \quad convergenta & \Longrightarrow \quad \sum x_n \quad convergenta \\ \sum x_n \quad divergenta & \Longrightarrow \quad \sum y_n \quad divergenta \end{cases}$$

C2C

Fie $\sum x_n$ şi $\sum y_n$ două STP astfel încât

$$\exists \quad l = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} \in [0, \infty].$$

Atunci

1. Dacă $l = 0$ atunci $(*)$.
2. Dacă $l = \infty$ atunci

$$(**) \begin{cases} \sum x_n \quad convergenta & \Longrightarrow \quad \sum y_n \quad convergenta \\ \sum y_n \quad divergenta & \Longrightarrow \quad \sum x_n \quad divergenta \end{cases}$$

3. Dacă $l \in (0, \infty)$, atunci $(*)$ şi $(**)$. Deci

$$\sum x_n \sim \sum y_n,$$

adică seriile au aceeaşi natură (deci sunt amândouă simultan, fie convergente, fie divergente).

Aplicaţii la criteriile de comparaţie pentru STP

Studiaţi natura seriilor:

$$a) \sum \frac{2^n}{3^n + 5^n} \quad si \quad b) \sum \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}.$$

Rezolvare: a) Întotdeauna atunci când în expresia termenului general al seriei apar constante la puterea n, încercăm o comparaţie cu seria geometrica. Pentru cazul nostru constatăm destul de simplu că

$$\frac{2^n}{3^n + 5^n} \leq \frac{2^n}{3^n}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Seria $\sum_{n\geq 1}\frac{2^n}{3^n}=\frac{2}{3}\sum_{n\geq 1}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ este convergentă deoarece este o constantă înmulţită cu seria geoemtrică de raţie $\frac{2}{3}<1$, care este convergentă.
Aplicăm C1C pentru $\sum x_n = 2^n 3^n + 5^n$ şi $\sum y_n = \sum \frac{2^n}{3^n}$. Din $(*)$ va rezulta că $\sum x_n$ este convergentă, deorece seria mai mare, adică $\sum y_n$ este tot convergentă.

b) Atunci când în expresia termenului general al seriei apare n la putere constantă, încercăm o comparaţie cu seria armonică generalizată $\sum y_n = \sum \frac{1}{n^\alpha}$, prin C2C. Nu fixăm de la început valoarea parametrului α ci o vom deduce pe parcurs. Efectuăm astfel

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}}{\frac{1}{n^\alpha}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^\alpha}{\sqrt{n(n^2+1)}}.$$

Pentru a obţine echivalenţa celor două serii, care are loc doar pentru limita $\in(0,\infty)$ setam $\alpha=\frac{3}{2}$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n(n^2+1)}}=1$$

deci, conform C2C

$$\sum x_n \sim \sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

Deoarece $\frac{3}{2}>1$, seria $\sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ este convergentă, în consecinţă şi seria iniţială este convergentă.

3.3 Consecinţa criteriului raportului şi a radicalului

Fie $\sum x_n$ o serie cu termeni pozitivi. Dacă există

$$l=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}\quad \textit{sau}\quad l=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}$$

atunci

$$(***)\begin{cases} l<1 \Longrightarrow \sum x_n & convergenta;\\ l>1 \Longrightarrow \sum x_n & divergenta;\\ l=1 \Longrightarrow \quad ? \end{cases}$$

3.4 Criteriul lui Raabe-Duhamel

Fie $\sum x_n$ o serie cu termeni pozitivi. Dacă există

$$l=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)$$

atunci

$$(****)\begin{cases} l>1 \Longrightarrow \sum x_n & convergenta;\\ l<1 \Longrightarrow \sum x_n & divergenta;\\ l=1 \Longrightarrow \quad ? \end{cases}$$

3.5 Algoritm în doi paşi pentru rezolvarea problemelor cu rapoarte

Pasul 1: Calculam

$$D:=\lim_{n\to\infty}D_n=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}.\quad Atunci \begin{cases} D<1 \Longrightarrow \sum x_n & convergenta;\\ D>1 \Longrightarrow \sum x_n & divergenta;\\ D=1 \Longrightarrow & go\quad to\quad Pasul\quad 2 \end{cases}.$$

Pasul 2: Calculam

$$R:=\lim_{n\to\infty}R_n=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{1}{D_n}-1\right).\quad Atunci \begin{cases} R>1 \Longrightarrow \sum x_n & convergenta;\\ R<1 \Longrightarrow \sum x_n & divergenta;\\ R=1 \Longrightarrow & go\quad to\quad ipoteze \end{cases}.$$

Aplicaţie la algoritmul în doi paşi:

Studiaţi natura seriei, pentru $a > 0$:

$$\sum \frac{n!}{a(a+1)...(a+n-1)}.$$

Observăm că termenii succesivi ai şirului care generează seria sunt reductibili, de aceea mergem cu gândul la criteriul raportului, şi aplicăm algoritmul în 2 pasi.
Pasul 1: Calculăm

$$D := \lim_{n\to\infty} D_n = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{a(a+1)...(a+n-1)(a+n)} \cdot \frac{a(a+1)...(a+n-1)}{n!}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+a} = 1$$

Deci trecem la **pasul 2**, deoarece pasul 1 nu ne oferă nici o concluzie. Calculăm

$$R := \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{D_n} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{n+a}{n+1} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} (a-1) \cdot \frac{n}{n+1} = 1 - a.$$

Conform concluziilor teoremei lui Raabe-Duhamel:

$$\begin{cases} a-1 > 1 \Longrightarrow \sum x_n & convergenta; \\ a-1 < 1 \Longrightarrow \sum x_n & divergenta; \\ a-1 = 1 \Longrightarrow & go \quad to \quad ipoteze \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a > 2 \Longrightarrow \sum x_n & convergenta; \\ a < 2 \Longrightarrow \sum x_n & divergenta; \\ a = 2 \Longrightarrow & go \quad to \quad ipoteze \end{cases}$$

Înlocuind a cu 2 în expresia iniţială a seriei obţinem seria

$$\sum \frac{n!}{2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (2+n-1)} = \sum \frac{n!}{(n+1)!} = \sum \frac{1}{n+1}.$$

Studiem natura seriei nou-obţinute

$$\sum \frac{1}{n+1}$$

în formularea cărei observăm ca intervine doar n la o putere constantă. În acest caz folosim comparaţia cu seria armonică generalizată

$$\sum y_n = \sum \frac{1}{n^\alpha}$$

prin cel de-al doilea criteriul al comparaţiei (C2C). Deci calculăm

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n^\alpha}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{n+1}.$$

Se observă că C2C oferă concluzii pentru cazul în care limita de mai sus $\in [0, \infty]$, dar nu complete (adică există situaţii care se exclud, cum ar fi cazul în care $\sum y_n$ este divergentă dacă limita este 0, sau $\sum x_n$ convergentă tot pentru acestă limtia 0).

Atunci când obţinem o limită $\in (0, \infty)$**, cele două serii sunt echivalente, deci au aceeşi natură.** În consecinţătot timpul când aplicăm C2C ar fi de preferat să obţinem o astfel de limită. În cazul particular al exerciţiului nostru, o astfel de limită se obţinem doar pentru

$$\alpha = 1.$$

Astfel

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = 1,$$

deci, conform C2C cele două serii au aceeaşi natură

$$\sum x_n \sim \sum \frac{1}{n}.$$

Deoarece $\sum \frac{1}{n}$ este divergentă, obţinem concluzia că

$$\sum \frac{1}{n+1}$$

este divergentă.

Adunăm concluziile:

$$\sum \frac{n!}{a(a+1)...(a+n-1)} \quad este \quad \begin{cases} convergenta \quad daca \quad a > 2; \\ divergenta \quad daca \quad a \leq 2; \end{cases}$$

Aplicaţie la consecinţa criteriului radicalului

Studiaţi natura seriei, atunci când $a \in \mathbb{R}$

$$\sum \frac{n^{n^2+a}}{(n+1)^2}.$$

Atunci când în expresia lui x_n apare n la o putere care depinde tot de n încercăm să aplicăm consecinţa criteriului radicalului. Astfel calculăm

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^{n^2+a}}{(n+1)^{n^2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{n+\frac{a}{n}}}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \left(\sqrt[n]{n}\right)^a.$$

Observăm că limita este separabilă (deoarece ambele şiruri au limită,şi înmulţindu-le nu obţinem un caz de nedeterminare). Calulăm cele două limite separat:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \stackrel{1^\infty}{=} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{-1}{n+1}\right)^n = e^{\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{n}{n+1}\right)} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n}\right)^a = 1^a = 1.$$

Înmulţindu-le obţinem

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \frac{1}{e} \cdot 1 = \frac{1}{e} < 1.$$

Atunci, conform consecinţei criteriului radicaluli, pentru ca limta este < 1, seria este **convergentă**.