Analiză matematică 2 (Calcul diferenţial în $\mathbb{R}^n$)

Examen scris la grupele 311 şi 312 (29.6.2012)

1. Să se calculeze $\displaystyle\int_0^{1-0} \frac{dx}{(x+2)\sqrt{1-x^2}}$.

2. Să se determine punctele critice ale funcţiei $f : (0,\infty)^2 \to \mathbb{R}$, definite prin

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3\ln(xy)$$

şi să se precizeze natura acestora.

3. Fie funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x-y)^3}{x^2+y^2} & \text{dacă } x > y \\ x - y & \text{dacă } x \leq y. \end{cases}$$

a) Să se determine $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ astfel încât f să fie derivabilă în $(0,0)$ după direcţia v.

b) Să se studieze diferenţiabilitatea lui f în punctul $(0,0)$.

4. a) Definiţi noţiunea de mulţime compactă în $\mathbb{R}^n$.

b) Demonstraţi că orice submulţime mărginită şi închisă a lui $\mathbb{R}^n$ este compactă.