Algebră
Recapitularea unor noţiuni învăţate în liceu

Sisteme de m ecuaţii liniare cu n necunoscute

Ianuarie 2018

Matrici

Definiţie Fie $m, n \in \mathbb{N}$ şi $N_m = \{1, 2, \dots, m\}$, $N_m = \{1, 2, \dots, m\}$ şi $\mathbb{C}$ mulţimea numerelor complexe. Se numeşte *matrice de tipul (m,n)* cu elemente numere complexe, o funcţie

$$A : N_m \times N_n \to \mathbb{C}\,, \quad A(i, j) = a_{ij}\,, \quad i \in N_m\,,\, j \in N_n$$

Valorile funcţiei $A(i, j)$ se numesc *elementele matricii A*. Matricea A se poate reprezenta sub forma unui tablou cu m linii şi n coloane

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{m\times n}\,.$$

Notaţie Mulţimea matricilor de m linii şi n coloane se notează cu $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$.
Definiţie Dacă $m = n$ matricea se numeşte *matrice pătratică*.

Rangul unei matrici

Definiţie Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $A = (a_{ij})_{m\times n}$ şi r un număr natural astfel încât $1 \le r \le \min(m, n)$. Alegem din matricea A r-linii $i_1, i_2, \dots, i_r$ şi r-coloane $j_1, j_2, \dots, j_r$. Determinantul format cu elemente din A aflate la intersecţia celor r linii şi r coloane se numeşte *minor de ordinul* r al lui A.

Definiţie Spunem că o matrice nenulă $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ are *rangul* r, scriem $\text{rang}A = r$, dacă matricea A are un minor de rangul r nenul şi toţi minorii lui A de rang $r+1$ (dacă există) sunt nuli.

Sisteme de ecuaţii liniare

Forma generală a unui sistem de m ecuaţii liniare cu n necunoscute este

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Definiţii Mărimile $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se numesc *necunoscutele sistemului*, iar $a_{ij} \in \mathbb{C}, 1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ - *coeficienţii necunoscutelor*. Numerele $b_1, b_2, \ldots, b_m \in \mathbb{C}$ se numesc *termenii liberi* ai sistemului. Dacă toţi termenii liberi ai sistemului sunt nuli, sistemul se numeşte *omogen*.

Matricea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

se numeşte *matricea sistemului*.

Matricile coloană

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{şi} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$$

se numesc *matricea (coloana) necunoscutelor*, respectiv *matricea (coloana) termenilor liberi*.

Matricea A completată cu coloana termenilor liberi, notată $\bar{A}$, se numeşte *matricea extinsă a sistemului*

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Sistemul de numere $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ care satisface condiţiile $\Sigma_{j=i}^{n} a_{ij}\alpha_j = b_i$, $i = \overline{1, m}$ se numeşte *soluţia sistemului*.

Definiţie Un sistem liniar de ecuaţii se numeşte *compatibil* dacă există un sistem de numere α care verifică ecuaţiile sistemului. Altfel, sistemul se numeşte *incompatibil*.

Un sistem care admite soluţie unică se numeşte *compatibil determinat*, dacă admite o infinitate de soluţii se numeşte *compatibil nedeterminat*.

Sisteme de tip Cramer

Definiţie Fie (S) un sistem de n ecuaţii liniare cu n necunoscute. Dacă matricea sistemului are determinantul nenul, atunci sistemul se numeşte *sistem de tip Cramer*.

Teoremă (Regula lui Kramer) Un sistem de tip Cramer este compatibil determinat, soluţia sa este dată de formulele

$$x_1 = \frac{d_1}{d}\,,\; x_2 = \frac{d_2}{d}\,, \ldots\,,\; x_n = \frac{d_n}{d} \tag{1}$$

unde $d = \det(A)$ şi d_k este determinantul obţinut din determinantul matricii sistemului A, înlocuind coloana k cu coloana termenilor liberi.

Consecinţă Un sistem omogen de ecuaţii liniare, de tip Kramer, admite doar soluţia nulă $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$.

Compatibilitatea sistemelor de ecuaţii liniare

Teoremă (Proprietatea Kronecker-Capelli) Un sistem de ecuaţii liniare este compatibil $\Leftrightarrow$ rang(A)=rang$(\bar{A})$, unde A este matricea sistemului, iar $\bar{A}$ este matricea extinsă.

Definiţii Dacă rang$(A) = r$, minorul de ordinul r care dă rangul matricii se numeşte *minor principal* sau *determinantul principal*. Necunoscutele sistemului de ecuaţii liniare ai căror coeficienţi formează minorul principal se numesc *necunoscute principale*, iar celelalte *necunoscute secundare*. Ecuaţiile sistemului care corespund liniilor minorului principal se numesc *ecuaţii principale*, iar restul *ecuaţii secundare*.

Orice minor al matricii $\bar{A}$ care se obţine prin bordarea (completarea) minorului principal cu o linie alcătuită din coeficienţii necunoscutelor principale dintr-o ecuaţie secundară şi cu o coloană formată din termenii liberi ai ecuaţiilor principale şi a ecuaţiei secundare alese, se numeşte *minor caracteristic*.

Teoremă (Rouche) Un sistem de ecuaţii liniare este compatibil $\Leftrightarrow$ toţi minorii caracteristici sunt nuli.

Algoritm de rezolvare a sistemelor de m ecuaţii liniare cu n necunoscute

1. Se scrie matricea sistemului şi matricea extinsă.
2. Dacă $m = n$, se calculează $d = \det A$.
3. Dacă $\det A \neq 0$, atunci sistemul este de tip Cramer şi se calculează d_k şi soluţia sistemului.
4. Dacă $\det A = 0$ sau $m \neq n$ se determină rangul matricii şi se stabileşte minorul principal.
5. Se determină rang$(\bar{A})$ folosind minorii caracteristici.
6. Dacă rang$(A)\neq$rang$(\bar{A})$, sistemul este incompatibil.
7. Dacă rang(A)=rang$(\bar{A})$, sistemul este compatibil. Pentru a obţine soluţia acestui sistem se rezolvă sistemul alcătuit din ecuaţiile principale. Coloana termenilor liberi a acestui sistem conţine termenii liberi şi termenii care conţin necunoscutele secundare cu semn schimbat. Soluţia acestui sistem nu este unică.