Serii de puteri

Probleme rezolvate

Fie $(a_n)_{n\geq 0} \subseteq \mathbb{R}$ un şir de numere reale. Se numeşte **serie de puteri** o serie de funcţii de forma

$$\sum_{n\geq 0} a_n x^n,$$

cu observaţia că prima funcţie din această serie de funcţii este funcţia constantă a_0. Astfel, pentru un $x_0 \in \mathbb{R}$, se obţine o serie de numere reale,

$$\sum_{n\geq 0} a_n {x_0}^n = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + ... + a_n x_0^n + ...$$

Un punct $x_0 \in \mathbb{R}$ se numeşte **punct de convergenţă** dacă seria de numere reale $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x_0^n$, este convergentă, adică

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n \in \mathbb{R}\,.$$

Mulţimea tuturor punctelor de convergenţă formează **mulţimea de convergenţă a seriei de puteri**, notată prin

$$\mathcal{C} = \left\{ x_0 \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n \in \mathbb{R} \right\}.$$

Se constată că în cazul seriilor de puteri întotdeauna

$$0 \in \mathcal{C},$$

deoarece

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n 0 = a_0 \in \mathbb{R}\,.$$

Raza de convergenţă a seriei de puteri este

$$R = \frac{1}{\lambda} \quad unde \quad \lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Conform teoremei lui Cauchy-Hadamard,

$$(-R, R) \subseteq \mathcal{C} \subseteq [-R, R].$$

Cazurile particulare în care

$$x = -R \quad si \quad x = R$$

trebuie analizate separat, pentru a se stabili cu exactitate $\mathcal{C}$.

Toate exerciţiile au acelaşi enunţ: stabiliţi raza de convergenţă şi mulţimea de convergenţă a următoarelor serii de puteri:

Exerciţiul 1:

$$\sum_{n\geq 0} x^n.$$

Rezolvare:

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1} = 1 \Longrightarrow R = 1.$$

Pentru $x = 1$, seria de numere reale $\sum_{n=0}^{\infty} 1 = \infty$, este divergentă, deci $1 \notin \mathcal{C}$.

Petru $x = -1$, seria de numere reale $\sum_{n\geq 0} (-1)^n$ nu are sumă deoarece şirul sumelor sale parţiale oscilează periodic între 1 şi 0, sau altfel demonstrat, $\nexists \lim_{n\to\infty} (-1)^n$. Astfel $-1 \notin \mathcal{C}$. În concluzie

$$\mathcal{C} = (-1, 1).$$

Exerciţiul 2:

$$\sum_{n\geq 1} n^n x^n.$$

Rezolvare: Şirul care generează seria de puteri este $(a_n)_{n\geq 1}$, are termenul general

$$a_n = n^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Calculăm

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^n} = \lim_{n\to\infty} n = \infty \Longrightarrow R = 0.$$

De aceea

$$\mathcal{C} = \{0\}.$$

Exerciţiul 3:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n.$$

Rezolvare: Şirul care generează seria de puteri este $(a_n)_{n\geq 1}$, are termenul general

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Calculăm

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+2} \cdot n}{(-1)^{n+1} \cdot (n+1)} \right| = 1 \Longrightarrow R = \frac{1}{1} = 1.$$

Pentru $x = 1$, seria de numere reale $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} n$, este convergentă, folosind ciriteriul lui Leibniz, şi ţinând cont de faptul că şirul $(\frac{1}{n})_{n\geq 1}$ este descrescă tor şi convergent către 0. Astfel $1 \in \mathcal{C}$.

Petru $x = -1$, seria de numere reale $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot (-1)^n = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^{2n+1}}{n} = -\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n}$, care este o serie divergentă, cu suma $-\infty$, fiind - seria armonică. Astfel $-1 \notin \mathcal{C}$. În concluzie

$$\mathcal{C} = (-1, 1].$$

Exercițiul 4:

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n!)^2} x^n.$$

Rezolvare: Şirul care generează seria de puteri este $(a_n)_{n\geq 1}$, are termenul general

$$a_n = \frac{1}{(n!)^2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Calculăm

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n!)^2}{(n+1)^2!} \right| = 0 \Longrightarrow R = \frac{1}{+0} = +\infty.$$

În concluzie

$$\mathcal{C} = (-R, R) = \mathbb{R}\,.$$

Observaţie: Seriile de puteri pot fi scrise ca fiind dezoltate în jururl unor puncte arbitrare în $\mathbb{R}$, caz în care au formularea;

$$\sum_{n\geq 0} a_n (x - x_0)^n.$$

Pentru aceste cazuri raza de convergenţă se calculează exact dupa modelul de mai sus. Singura diferenţă apare la formularea mulţimii de oconvergenţă, astfel;

$$(x_0 - R, x_0 + R) \subseteq \mathcal{C} \subseteq [x_0 - R, x_0 + R].$$

Cazurile în care $x = x_0 - R$ şi $x = x_0 + R$ trebuie analizate separat pentru a preciza cu exactitate multţimea de convergenţă.

Exercițiul 5 :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n(2n+1)} (x+2)^n.$$

Rezolvare: Seria de puteri este dezolvtată în jurul punctului $x_0 = -2$, iar şirul care o generează este $(a_n)_{n\geq 1}$, având termenul general

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n(2n+1)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Calculăm

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)(2n+3)}{n(2n+1)} \right| = 1 \Longrightarrow R = \frac{1}{1} = 1.$$

Deci

$$(-2-1, -2+1) = (-3, -1) \subseteq \mathcal{C}.$$

Verificăm pe rând capetele intervalului de convergenţă.

Pentru $x = -3$, seria de numere reale

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(2n+1)} \cdot (-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)} \quad \sim \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2},$$

care este convergentă, deci $-3 \in \mathcal{C}$.

Pentru $x = -1$, seria de numere reale $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(2n+1)} \cdot (1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(2n+1)}$ este o serie alternată. Deoarece şirul de numere reale $\left(\frac{1}{n(2n+1)}\right)_{n\geq 1}$ este descrescă tor, cu limita 0, din criteriul lui Leibniz, rezultă că avem convergenţă, astfel, $-1 \in \mathcal{C}$.

În concluzie

$$\mathcal{C} = [-3, -1].$$