Șiruri de numere reale
- sinteză-

Lect. univ. dr.**Anca GRAD**

noiembrie 2018

Terminologie

Fie $m \in \mathbb{N}$ fixat. Considerăm mulțimea $N_m = \{n \in \mathbb{N} : n \geq m\}$.

Definiție: Se numește **șir de numere reale** orice funție

$$f : N_m \to \mathbb{R}.$$

Șirul $f : \mathbb{N}_m \to \mathbb{R}$ atașează fiecărui nr. natural $n \geq m$, nr. real

$$f(n) :\overset{not.}{=} x_n.$$

Notațiile uzuale folosite pentru un șir sunt

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}_m}, \text{ sau } (x_n)_{n \geq m} \text{ sau } (x_n, x_{n+1}, \ldots, x_n, \ldots).$$

Când nu există pericol de confuzie notăm simplu (x_n).
Pentru $n \in \mathbb{N}_m$ arbitrar, nr. real x_n s.n. **termenul de rang** n sau **termenul general** al șirului $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_m}$.

Terminologie

Fie $m \in \mathbb{N}$ fixat. Considerăm mulțimea $N_m = \{n \in \mathbb{N} : n \geq m\}$.

Definiție: Se numește **șir de numere reale** orice funție

$$f : N_m \to \mathbb{R}.$$

Șirul $f : \mathbb{N}_m \to \mathbb{R}$ atașează fiecărui nr. natural $n \geq m$, nr. real

$$f(n) :\stackrel{not.}{=} x_n.$$

Notațiile uzuale folosite pentru un șir sunt

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m}, \text{ sau } (x_n)_{n\geq m} \text{ sau } (x_n, x_{n+1}, ..., x_n, ...).$$

Când nu există pericol de confuzie notăm simplu (x_n).
Pentru $n \in \mathbb{N}_m$ arbitrar, nr. real x_n s.n. **termenul de rang n** sau **termenul general** al șirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$.

Terminologie

Fie $m \in \mathbb{N}$ fixat. Considerăm mulțimea $N_m = \{n \in \mathbb{N} : n \geq m\}$.

Definiție: Se numește **șir de numere reale** orice funție

$$f : N_m \to \mathbb{R}.$$

Șirul $f : \mathbb{N}_m \to \mathbb{R}$ atașează fiecărui nr. natural $n \geq m$, nr. real

$$f(n) :\overset{not.}{=} x_n.$$

Notațiile uzuale folosite pentru un șir sunt

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}_m}, \text{ sau } (x_n)_{n \geq m} \text{ sau } (x_n, x_{n+1}, ..., x_n, ...).$$

Când nu există pericol de confuzie notăm simplu (x_n).

Pentru $n \in \mathbb{N}_m$ arbitrar, nr. real x_n s.n. **termenul de rang** n sau **termenul general** al șirului $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_m}$.

Terminologie

Fie $m \in \mathbb{N}$ fixat. Considerăm mulțimea $N_m = \{n \in \mathbb{N} : n \geq m\}$.

Definiție: Se numește **șir de numere reale** orice funție

$$f : N_m \to \mathbb{R}.$$

Șirul $f : \mathbb{N}_m \to \mathbb{R}$ atașează fiecărui nr. natural $n \geq m$, nr. real

$$f(n) \overset{not.}{:=} x_n.$$

Notațiile uzuale folosite pentru un șir sunt

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}_m}, \text{ sau } (x_n)_{n \geq m} \text{ sau } (x_n, x_{n+1}, \ldots, x_n, \ldots).$$

Când nu există pericol de confuzie notăm simplu (x_n).
Pentru $n \in \mathbb{N}_m$ arbitrar, nr. real x_n s.n. **termenul de rang n** sau **termenul general** al șirului $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_m}$.

Limita unui șir de numere reale. Unicitatea limitei.

Definiție: Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ un șir de numere reale. Spunem că șirul $(x_n)_{n\in N_m}$ **are limită** (în $\overline{\mathbb{R}}$) dacă

$$\exists x \in \overline{\mathbb{R}}, \quad \text{a.î.} \quad \forall V \in \vartheta(x), \quad \exists n_V \geq m \quad \text{a.î.} \quad \forall n \geq n_V, x_n \in V.$$

Teorema 1: Fie $(x_n)_{n\in N_m} \subseteq \mathbb{R}$. Șirul $(x_n)_{n\in N_m}$ are limită (în $\overline{\mathbb{R}}$) dacă există un element $x \in \overline{\mathbb{R}}$ a.î. în afara oricărei vecinătăți V a lui x se află cel mult un număr finit de termeni ai șirului $(x_n)_{n\in N_m}$.

Dacă limita unui șir există, ea este unică.

Teorema 2 (de unicitate a limitei): Dacă $(x_n)_{n\in N_m} \subseteq \mathbb{R}$, atunci există cel mult un element $x \in \overline{\mathbb{R}}$ a.î.

$$\forall V \in \vartheta(x), \quad \exists n_V \geq m \quad \text{a.î.} \quad \forall n \geq n_V, x_n \in V.$$

Limita unui șir de numere reale. Unicitatea limitei.

Definiție: Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ un șir de numere reale. Spunem că șirul $(x_n)_{n\in N_m}$ **are limită** (în $\overline{\mathbb{R}}$) dacă

$$\exists x \in \overline{\mathbb{R}}, \quad \text{a.î.} \quad \forall V \in \vartheta(x), \quad \exists n_V \geq m \quad \text{a.î.} \quad \forall n \geq n_V, x_n \in V.$$

Teorema 1: Fie $(x_n)_{n\in N_m} \subseteq \mathbb{R}$. Șirul $(x_n)_{n\in N_m}$ are limită (în $\overline{\mathbb{R}}$) dacă există un element $x \in \overline{\mathbb{R}}$ a.î. în afara oricărei vecinătăți V a lui x se află cel mult un număr finit de termeni ai șirului $(x_n)_{n\in N_m}$.

Dacă limita unui șir există, ea este unică.

Teorema 2 (de unicitate a limitei): Dacă $(x_n)_{n\in N_m} \subseteq \mathbb{R}$, atunci există cel mult un element $x \in \overline{\mathbb{R}}$ a.î.

$$\forall V \in \vartheta(x), \quad \exists n_V \geq m \quad \text{a.î.} \quad \forall n \geq n_V, x_n \in V.$$

Limita unui șir de numere reale. Unicitatea limitei.

Definiție: Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ un șir de numere reale. Spunem că șirul $(x_n)_{n\in N_m}$ **are limită** (în $\overline{\mathbb{R}}$) dacă

$$\exists x \in \overline{\mathbb{R}}, \quad \text{a.î.} \quad \forall V \in \vartheta(x), \quad \exists n_V \geq m \quad \text{a.î.} \quad \forall n \geq n_V, x_n \in V.$$

Teorema 1: Fie $(x_n)_{n\in N_m} \subseteq \mathbb{R}$. Șirul $(x_n)_{n\in N_m}$ are limită (în $\overline{\mathbb{R}}$) dacă există un element $x \in \overline{\mathbb{R}}$ a.î. în afara oricărei vecinătăți V a lui x se află cel mult un număr finit de termeni ai șirului $(x_n)_{n\in N_m}$.

Dacă limita unui șir există, ea este unică.

Teorema 2 (de unicitate a limitei): Dacă $(x_n)_{n\in N_m} \subseteq \mathbb{R}$, atunci există cel mult un element $x \in \overline{\mathbb{R}}$ a.î.

$$\forall V \in \vartheta(x), \quad \exists n_V \geq m \quad \text{a.î.} \quad \forall n \geq n_V, x_n \in V.$$

Limita unui șir de numere reale. Unicitatea limitei.

Definiție: Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ un șir de numere reale. Spunem că șirul $(x_n)_{n\in N_m}$ **are limită** (în $\overline{\mathbb{R}}$) dacă

$$\exists x \in \overline{\mathbb{R}}, \quad \text{a.î.} \quad \forall V \in \vartheta(x), \quad \exists n_V \geq m \quad \text{a.î.} \quad \forall n \geq n_V, x_n \in V.$$

Teorema 1: Fie $(x_n)_{n\in N_m} \subseteq \mathbb{R}$. Șirul $(x_n)_{n\in N_m}$ are limită (în $\overline{\mathbb{R}}$) dacă există un element $x \in \overline{\mathbb{R}}$ a.î. în afara oricărei vecinătăți V a lui x se află cel mult un număr finit de termeni ai șirului $(x_n)_{n\in N_m}$.

Dacă limita unui șir există, ea este unică.

Teorema 2 (de unicitate a limitei): Dacă $(x_n)_{n\in N_m} \subseteq \mathbb{R}$, atunci există cel mult un element $x \in \overline{\mathbb{R}}$ a.î.

$$\forall V \in \vartheta(x), \quad \exists n_V \geq m \quad \text{a.î.} \quad \forall n \geq n_V, x_n \in V.$$

Limita unui șir de numere reale. Unicitatea limitei.

Definiție: Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ un șir de numere reale. Spunem că șirul $(x_n)_{n\in N_m}$ **are limită** (în $\overline{\mathbb{R}}$) dacă

$$\exists x \in \overline{\mathbb{R}}, \quad \text{a.î.} \quad \forall V \in \vartheta(x), \quad \exists n_V \geq m \quad \text{a.î.} \quad \forall n \geq n_V, x_n \in V.$$

Teorema 1: Fie $(x_n)_{n\in N_m} \subseteq \mathbb{R}$. Șirul $(x_n)_{n\in N_m}$ are limită (în $\overline{\mathbb{R}}$) dacă există un element $x \in \overline{\mathbb{R}}$ a.î. în afara oricărei vecinătăți V a lui x se află cel mult un număr finit de termeni ai șirului $(x_n)_{n\in N_m}$.

Dacă limita unui șir există, ea este unică.

Teorema 2 (de unicitate a limitei): Dacă $(x_n)_{n\in N_m} \subseteq \mathbb{R}$, atunci există cel mult un element $x \in \overline{\mathbb{R}}$ a.î.

$$\forall V \in \vartheta(x), \quad \exists n_V \geq m \quad \text{a.î.} \quad \forall n \geq n_V, x_n \in V.$$

Notație

$$\lim_{n\to\infty} x_n \text{ și se numește } \textbf{limita șirului } (x_n).$$

Definiție $(x_n)_{n\in N_m} \subseteq \mathbb{R}$. Spunem că șirul (x_n) este **convergent** dacă

$$\exists \lim_{n\to\infty} x_n \text{ și } \lim_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R}.$$

Pentru $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m} \subseteq \mathbb{R}$ există una din posibilitățile:

- are o limită unică $x \in \mathbb{R}$,(s.n. **șir convergent**);
- are limita ∞ sau $-\infty$ (s.n. **șir cu limita infinită**);
- nu admite limită în $\overline{\mathbb{R}}$.

Orice șir care nu admite limită finită s.n. șir **divergent**.

Studiul unui șir comportă două probleme:

-
-

Notație

$$\lim_{n\to\infty} x_n \text{ și se numește } \textbf{limita șirului } (x_n).$$

Definiție $(x_n)_{n\in N_m} \subseteq \mathbb{R}$. Spunem că șirul (x_n) este **convergent** dacă

$$\exists \lim_{n\to\infty} x_n \text{ și } \lim_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R}.$$

Pentru $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m} \subseteq \mathbb{R}$ există una din posibilitățile:

- are o limită unică $x \in \mathbb{R}$,(s.n. **șir convergent**);
- are limita ∞ sau $-\infty$ (s.n. **șir cu limita infinită**);
- nu admite limită în $\overline{\mathbb{R}}$.

Orice șir care nu admite limită finită s.n. șir **divergent**.

Studiul unui șir comportă două probleme:

-
-

Notație

$$\lim_{n\to\infty} x_n \text{ și se numește } \textbf{limita șirului } (x_n).$$

Definiție $(x_n)_{n\in N_m} \subseteq \mathbb{R}$. Spunem că șirul (x_n) este **convergent** dacă

$$\exists \lim_{n\to\infty} x_n \text{ și } \lim_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R}.$$

Pentru $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m} \subseteq \mathbb{R}$ există una din posibilitățile:

- are o limită unică $x \in \mathbb{R}$,(s.n. **șir convergent**);
- are limita ∞ sau $-\infty$ (s.n. **șir cu limita infinită**);
- nu admite limită în $\overline{\mathbb{R}}$.

Orice șir care nu admite limită finită s.n. șir **divergent**.

Studiul unui șir comportă două probleme:

-
-

Notație

$$\lim_{n\to\infty} x_n \text{ și se numește } \textbf{limita șirului } (x_n).$$

Definiție $(x_n)_{n\in N_m} \subseteq \mathbb{R}$. Spunem că șirul (x_n) este **convergent** dacă

$$\exists \lim_{n\to\infty} x_n \text{ și } \lim_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R}.$$

Pentru $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m} \subseteq \mathbb{R}$ există una din posibilitățile:

- are o limită unică $x \in \mathbb{R}$,(s.n. **șir convergent**);
- are limita ∞ sau $-\infty$ (s.n. **șir cu limita infinită**);
- nu admite limită în $\overline{\mathbb{R}}$.

Orice șir care nu admite limită finită s.n. șir **divergent**.

Studiul unui șir comportă două probleme:

Notație

$$\lim_{n\to\infty} x_n \text{ și se numește } \textbf{limita șirului } (x_n).$$

Definiție $(x_n)_{n\in N_m} \subseteq \mathbb{R}$. Spunem că șirul (x_n) este **convergent** dacă

$$\exists \lim_{n\to\infty} x_n \text{ și } \lim_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R}.$$

Pentru $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m} \subseteq \mathbb{R}$ există una din posibilitățile:

- are o limită unică $x \in \mathbb{R}$,(s.n. **șir convergent**);
- are limita ∞ sau $-\infty$ (s.n. **șir cu limita infinită**);
- nu admite limită în $\overline{\mathbb{R}}$.

Orice șir care nu admite limită finită s.n. șir **divergent**.

Studiul unui șir comportă două probleme:

-
-

Notație

$$\lim_{n\to\infty} x_n \text{ și se numește } \textbf{limita șirului } (x_n).$$

Definiție $(x_n)_{n\in N_m} \subseteq \mathbb{R}$. Spunem că șirul (x_n) este **convergent** dacă

$$\exists \lim_{n\to\infty} x_n \text{ și } \lim_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R}.$$

Pentru $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m} \subseteq \mathbb{R}$ există una din posibilitățile:

- are o limită unică $x \in \mathbb{R}$,(s.n. **șir convergent**);
- are limita ∞ sau $-\infty$ (s.n. **șir cu limita infinită**);
- nu admite limită în $\overline{\mathbb{R}}$.

Orice șir care nu admite limită finită s.n. șir **divergent**.

Studiul unui șir comportă două probleme:

-
-

Caracterizări ale limitei unui șir de numere reale

Teorema 3 (de caracterizare cu ε a limitei finite):
Fie $(x_n)_{n\in N_m} \subseteq \mathbb{R}$ și $x \in \mathbb{R}$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \iff \forall\varepsilon > 0(\in \mathbb{R}), \exists n_\varepsilon \geq m(\in \mathbb{N}) \text{ a.î. } |x_n - x| < \varepsilon,\ \forall n \geq n_\varepsilon.$$

Consecința: Fie $(x_n)_{n\in N_m} \subseteq \mathbb{R}$ și $x \in \mathbb{R}$. Atunci șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ converge către x, $\iff$ șirul $(x_n - x)_{n\in\mathbb{N}_m}$ converge către 0.

Teorema 4 (de caracterizare cu ε a limitelor ∞ și $-\infty$):
Fie $(x_n)_{n\in N_m} \subseteq \mathbb{R}$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \iff \forall\varepsilon > 0(\in \mathbb{R}), \exists n_\varepsilon \geq m(\in \mathbb{N}) \text{ a.î. } x_n > \varepsilon,\ \forall n \geq n_\varepsilon.$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \iff \forall\varepsilon > 0(\in \mathbb{R}), \exists n_\varepsilon \geq m(\in \mathbb{N}) \text{ a.î. } x_n < -\varepsilon,\ \forall n \geq n_\varepsilon.$$

Caracterizări ale limitei unui șir de numere reale

Teorema 3 (de caracterizare cu ε a limitei finite):
Fie $(x_n)_{n\in N_m} \subseteq \mathbb{R}$ și $x \in \mathbb{R}$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0(\in \mathbb{R}), \exists n_\varepsilon \geq m(\in \mathbb{N}) \text{ a.î. } |x_n - x| < \varepsilon,\ \forall n \geq n_\varepsilon.$$

Consecința: Fie $(x_n)_{n\in N_m} \subseteq \mathbb{R}$ și $x \in \mathbb{R}$. Atunci șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ converge către x, $\Longleftrightarrow$ șirul $(x_n - x)_{n\in\mathbb{N}_m}$ converge către 0.

Teorema 4 (de caracterizare cu ε a limitelor ∞ și $-\infty$):
Fie $(x_n)_{n\in N_m} \subseteq \mathbb{R}$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0(\in \mathbb{R}), \exists n_\varepsilon \geq m(\in \mathbb{N}) \text{ a.î. } x_n > \varepsilon,\ \forall n \geq n_\varepsilon.$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0(\in \mathbb{R}), \exists n_\varepsilon \geq m(\in \mathbb{N}) \text{ a.î. } x_n < -\varepsilon,\ \forall n \geq n_\varepsilon.$$

Caracterizări ale limitei unui șir de numere reale

Teorema 3 (de caracterizare cu ε a limitei finite):
Fie $(x_n)_{n\in N_m} \subseteq \mathbb{R}$ și $x \in \mathbb{R}$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \iff \forall \varepsilon > 0(\in \mathbb{R}), \exists n_\varepsilon \geq m(\in \mathbb{N}) \text{ a.î. } |x_n - x| < \varepsilon,\ \forall n \geq n_\varepsilon.$$

Consecința: Fie $(x_n)_{n\in N_m} \subseteq \mathbb{R}$ și $x \in \mathbb{R}$. Atunci șirul $(x_n)_{n\in \mathbb{N}_m}$ converge către x, $\iff$ șirul $(x_n - x)_{n\in \mathbb{N}_m}$ converge către 0.

Teorema 4 (de caracterizare cu ε a limitelor ∞ și $-\infty$):
Fie $(x_n)_{n\in N_m} \subseteq \mathbb{R}$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \iff \forall \varepsilon > 0(\in \mathbb{R}), \exists n_\varepsilon \geq m(\in \mathbb{N}) \text{ a.î. } x_n > \varepsilon,\ \forall n \geq n_\varepsilon.$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \iff \forall \varepsilon > 0(\in \mathbb{R}), \exists n_\varepsilon \geq m(\in \mathbb{N}) \text{ a.î. } x_n < -\varepsilon,\ \forall n \geq n_\varepsilon.$$

Caracterizări ale limitei unui șir de numere reale

Teorema 3 (de caracterizare cu ε a limitei finite):
Fie $(x_n)_{n\in N_m} \subseteq \mathbb{R}$ și $x \in \mathbb{R}$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \iff \forall\varepsilon > 0(\in \mathbb{R}), \exists n_\varepsilon \geq m(\in \mathbb{N}) \text{ a.î. } |x_n - x| < \varepsilon, \ \forall n \geq n_\varepsilon.$$

Consecința: Fie $(x_n)_{n\in N_m} \subseteq \mathbb{R}$ și $x \in \mathbb{R}$. Atunci șirul $(x_n)_{n\in \mathbb{N}_m}$ converge către x, $\iff$ șirul $(x_n - x)_{n\in \mathbb{N}_m}$ converge către 0.

Teorema 4 (de caracterizare cu ε a limitelor ∞ și $-\infty$):
Fie $(x_n)_{n\in N_m} \subseteq \mathbb{R}$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \iff \forall\varepsilon > 0(\in \mathbb{R}), \exists n_\varepsilon \geq m(\in \mathbb{N}) \text{ a.î. } x_n > \varepsilon, \ \forall n \geq n_\varepsilon.$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \iff \forall\varepsilon > 0(\in \mathbb{R}), \exists n_\varepsilon \geq m(\in \mathbb{N}) \text{ a.î. } x_n < -\varepsilon, \ \forall n \geq n_\varepsilon.$$

Caracterizări ale limitei unui șir de numere reale

Teorema 3 (de caracterizare cu ε a limitei finite):
Fie $(x_n)_{n\in N_m} \subseteq \mathbb{R}$ și $x \in \mathbb{R}$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \iff \forall\varepsilon > 0(\in \mathbb{R}), \exists n_\varepsilon \geq m(\in \mathbb{N}) \text{ a.î. } |x_n - x| < \varepsilon,\ \forall n \geq n_\varepsilon.$$

Consecința: Fie $(x_n)_{n\in N_m} \subseteq \mathbb{R}$ și $x \in \mathbb{R}$. Atunci șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ converge către x, $\iff$ șirul $(x_n - x)_{n\in\mathbb{N}_m}$ converge către 0.

Teorema 4 (de caracterizare cu ε a limitelor ∞ și $-\infty$):
Fie $(x_n)_{n\in N_m} \subseteq \mathbb{R}$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \iff \forall\varepsilon > 0(\in \mathbb{R}), \exists n_\varepsilon \geq m(\in \mathbb{N}) \text{ a.î. } x_n > \varepsilon,\ \forall n \geq n_\varepsilon.$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \iff \forall\varepsilon > 0(\in \mathbb{R}), \exists n_\varepsilon \geq m(\in \mathbb{N}) \text{ a.î. } x_n < -\varepsilon,\ \forall n \geq n_\varepsilon.$$

Exemple:

- șirul cu termenul general $x_n = 0, (n \in \mathbb{N})$ are limita 0
$$n_\varepsilon = 1;$$
- șirul cu termenul general $x_n = \frac{1}{n}, (n \in \mathbb{N})$ are limita 0
$$n_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1;$$
- șirul cu termenul general $x_n = n, (n \in \mathbb{N})$ are limita $+\infty$
$$n_\varepsilon = [\varepsilon] + 1;$$
- șirul cu termenul general $x_n = -n, (n \in \mathbb{N})$ are limita $-\infty$
$$n_\varepsilon = [\varepsilon] + 1;$$
- șirul cu termenul general $x_n = (-1)^n, (n \in \mathbb{N})$ nu are limită în $\overline{\mathbb{R}}$.

Exemple:

- șirul cu termenul general $x_n = 0, (n \in \mathbb{N})$ are limita 0

$$n_\varepsilon = 1;$$

- șirul cu termenul general $x_n = \frac{1}{n}, (n \in \mathbb{N})$ are limita 0

$$n_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1;$$

- șirul cu termenul general $x_n = n, (n \in \mathbb{N})$ are limita $+\infty$

$$n_\varepsilon = [\varepsilon] + 1;$$

- șirul cu termenul general $x_n = -n, (n \in \mathbb{N})$ are limita $-\infty$

$$n_\varepsilon = [\varepsilon] + 1;$$

- șirul cu termenul general $x_n = (-1)^n, (n \in \mathbb{N})$ nu are limită în $\overline{\mathbb{R}}$.

Exemple:

- șirul cu termenul general $x_n = 0, (n \in \mathbb{N})$ are limita 0
$$n_\varepsilon = 1;$$
- șirul cu termenul general $x_n = \frac{1}{n}, (n \in \mathbb{N})$ are limita 0
$$n_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1;$$
- șirul cu termenul general $x_n = n, (n \in \mathbb{N})$ are limita $+\infty$
$$n_\varepsilon = [\varepsilon] + 1;$$
- șirul cu termenul general $x_n = -n, (n \in \mathbb{N})$ are limita $-\infty$
$$n_\varepsilon = [\varepsilon] + 1;$$
- șirul cu termenul general $x_n = (-1)^n, (n \in \mathbb{N})$ nu are limită în $\overline{\mathbb{R}}$.

Exemple:

- șirul cu termenul general $x_n = 0, (n \in \mathbb{N})$ are limita 0
$$n_\varepsilon = 1;$$
- șirul cu termenul general $x_n = \frac{1}{n}, (n \in \mathbb{N})$ are limita 0
$$n_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1;$$
- șirul cu termenul general $x_n = n, (n \in \mathbb{N})$ are limita $+\infty$
$$n_\varepsilon = [\varepsilon] + 1;$$
- șirul cu termenul general $x_n = -n, (n \in \mathbb{N})$ are limita $-\infty$
$$n_\varepsilon = [\varepsilon] + 1;$$
- șirul cu termenul general $x_n = (-1)^n, (n \in \mathbb{N})$ nu are limită în $\overline{\mathbb{R}}$.

Exemple:

- șirul cu termenul general $x_n = 0, (n \in \mathbb{N})$ are limita 0
$$n_\varepsilon = 1;$$

- șirul cu termenul general $x_n = \frac{1}{n}, (n \in \mathbb{N})$ are limita 0
$$n_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1;$$

- șirul cu termenul general $x_n = n, (n \in \mathbb{N})$ are limita $+\infty$
$$n_\varepsilon = [\varepsilon] + 1;$$

- șirul cu termenul general $x_n = -n, (n \in \mathbb{N})$ are limita $-\infty$
$$n_\varepsilon = [\varepsilon] + 1;$$

- șirul cu termenul general $x_n = (-1)^n, (n \in \mathbb{N})$ nu are limită în $\overline{\mathbb{R}}$.

Exemple:

- șirul cu termenul general $x_n = 0, (n \in \mathbb{N})$ are limita 0
$$n_\varepsilon = 1;$$

- șirul cu termenul general $x_n = \frac{1}{n}, (n \in \mathbb{N})$ are limita 0
$$n_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1;$$

- șirul cu termenul general $x_n = n, (n \in \mathbb{N})$ are limita $+\infty$
$$n_\varepsilon = [\varepsilon] + 1;$$

- șirul cu termenul general $x_n = -n, (n \in \mathbb{N})$ are limita $-\infty$
$$n_\varepsilon = [\varepsilon] + 1;$$

- șirul cu termenul general $x_n = (-1)^n, (n \in \mathbb{N})$ nu are limită în $\overline{\mathbb{R}}$.

Convergență, monotonie și mărginire

Teorema 5 Orice șir convergent este mărginit.

Teorema 6 Orice șir nemărginit este divergent.

Observație: Nu orice șir mărginit este convergent. De exemplu, șirul cu termenul general

$$x_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}.$$

Convergență, monotonie și mărginire

Teorema 5 Orice șir convergent este mărginit.

Teorema 6 Orice șir nemărginit este divergent.

Observație: Nu orice șir mărginit este convergent. De exemplu, șirul cu termenul general

$$x_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}.$$

Convergență, monotonie și mărginire

Teorema 5 Orice șir convergent este mărginit.

Teorema 6 Orice șir nemărginit este divergent.

Observație: Nu orice șir mărginit este convergent. De exemplu, șirul cu termenul general

$$x_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}.$$

Convergență, monotonie și mărginire

Teorema 5 Orice șir convergent este mărginit.

Teorema 6 Orice șir nemărginit este divergent.

Observație: Nu orice șir mărginit este convergent. De exemplu, șirul cu termenul general

$$x_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}.$$

Teorema 7 [a lui Weirstrass] (de convergență a șirurilor monotone și mărginite)

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m} \subseteq \mathbb{R}$. Atunci u.a.s. adevărate:

1. Șirul (x_n)
$$\begin{cases} \text{crescător} \\ \text{și} \\ \text{mărginit superior} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (x_n) \text{ este convergent} \\ \text{și} \\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}_m\} \end{cases}.$$
2. Sirul (x_n)
$$\begin{cases} \text{descrescător} \\ \text{și} \\ \text{mărginit inferior} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (x_n) \text{ este convergent} \\ \text{și} \\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}_m\} \end{cases}.$$
3. Sirul $(x_n) \begin{cases} \text{monoton} \\ \text{și} \\ \text{mărginit} \end{cases} \Longrightarrow (x_n)$ este convergent.

Teorema 7 [a lui Weirstrass] (de convergență a șirurilor monotone și mărginite)

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m} \subseteq \mathbb{R}$. Atunci u.a.s. adevărate:

1. Șirul (x_n)
$$\left\{\begin{array}{c}\text{crescător}\\ \text{și}\\ \text{mărginit superior}\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c}(x_n)\text{ este convergent}\\ \text{și}\\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n : n\in\mathbb{N}_m\}\end{array}\right. .$$
2. Sirul (x_n)
$$\left\{\begin{array}{c}\text{descrescător}\\ \text{și}\\ \text{mărginit inferior}\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c}(x_n)\text{ este convergent}\\ \text{și}\\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n : n\in\mathbb{N}_m\}\end{array}\right. .$$
3. Sirul (x_n) $\left\{\begin{array}{c}\text{monoton}\\ \text{și}\\ \text{mărginit}\end{array}\right. \Longrightarrow (x_n)$ este convergent.

Teorema 7 [a lui Weirstrass] (de convergență a șirurilor monotone și mărginite)

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m} \subseteq \mathbb{R}$. Atunci u.a.s. adevărate:

1. Șirul (x_n)
$$\left\{\begin{array}{c}\text{crescător}\\ \text{și}\\ \text{mărginit superior}\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c}(x_n)\text{ este convergent}\\ \text{și}\\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n : n\in\mathbb{N}_m\}\end{array}\right. .$$
2. Sirul (x_n)
$$\left\{\begin{array}{c}\text{descrescător}\\ \text{și}\\ \text{mărginit inferior}\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c}(x_n)\text{ este convergent}\\ \text{și}\\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n : n\in\mathbb{N}_m\}\end{array}\right. .$$
3. Sirul (x_n) $\left\{\begin{array}{c}\text{monoton}\\ \text{și}\\ \text{mărginit}\end{array}\right. \Longrightarrow (x_n)$ este convergent.

Teorema 7 [a lui Weirstrass] (de convergență a șirurilor monotone și mărginite)

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m} \subseteq \mathbb{R}$. Atunci u.a.s. adevărate:

1. Șirul (x_n)

$$\left\{\begin{array}{c} \text{crescător} \\ \text{și} \\ \text{mărginit superior} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} (x_n) \text{ este convergent} \\ \text{și} \\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}_m\} \end{array}\right. .$$

2. Sirul (x_n)

$$\left\{\begin{array}{c} \text{descrescător} \\ \text{și} \\ \text{mărginit inferior} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} (x_n) \text{ este convergent} \\ \text{și} \\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}_m\} \end{array}\right. .$$

3. Sirul (x_n) $\left\{\begin{array}{c} \text{monoton} \\ \text{și} \\ \text{mărginit} \end{array}\right. \Longrightarrow (x_n)$ este convergent.

Observație: Referitor la șiruri monotone și/sau mărginite întâlnim ipostazele:

- $\left\{\begin{array}{c} \text{monoton} \\ \text{și} \\ \text{mărginit} \end{array}\right. \Longrightarrow (x_n)$ este convergent;
- convergent $\Longrightarrow$ mărginit;
- convergent $\not\Longrightarrow$ monoton. Exemplu: $x_n = \frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N}$;
- monoton $\not\Longrightarrow$ convergent. Exemplu: $x_n = n, n \in \mathbb{N}$;
- mărginit $\not\Longrightarrow$ convergent. Exemplu: $x_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$.

Consecința: Fie $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$ un șir monoton. Atunci

$$(x_n) \text{ convergent } \iff \text{ mărginit.}$$

Teorema 8: U.a.s. adevărate:

1. Orice șir crescător și nemărginit are limita $+\infty$.
2. Orice șir descrescător și nemărgnit are limita $-\infty$.

Observație: Referitor la șiruri monotone și/sau mărginite întâlnim ipostazele:

- $\left\{\begin{array}{c}\text{monoton}\\ \text{și}\\ \text{mărginit}\end{array}\right. \Longrightarrow (x_n)$ este convergent;
- convergent $\Longrightarrow$ mărginit;
- convergent $\not\Longrightarrow$ monoton. Exemplu: $x_n = \frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N}$;
- monoton $\not\Longrightarrow$ convergent. Exemplu: $x_n = n, n \in \mathbb{N}$;
- mărginit $\not\Longrightarrow$ convergent. Exemplu: $x_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$.

Consecința: Fie $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$ un șir monoton. Atunci

$$(x_n) \text{ convergent } \iff \text{ mărginit.}$$

Teorema 8: U.a.s. adevărate:

1. Orice șir crescător și nemărginit are limita $+\infty$.
2. Orice șir descrescător și nemărgnit are limita $-\infty$.

Observație: Referitor la șiruri monotone și/sau mărginite întâlnim ipostazele:

- $\left\{\begin{array}{c}\text{monoton}\\ \text{și}\\ \text{mărginit}\end{array}\right. \Longrightarrow (x_n)$ este convergent;
- convergent $\Longrightarrow$ mărginit;
- convergent $\not\Longrightarrow$ monoton. Exemplu: $x_n = \frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N}$;
- monoton $\not\Longrightarrow$ convergent. Exemplu: $x_n = n, n \in \mathbb{N}$;
- mărginit $\not\Longrightarrow$ convergent. Exemplu: $x_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$.

Consecința: Fie $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$ un șir monoton. Atunci

$$(x_n) \text{ convergent } \Longleftrightarrow \text{ mărginit.}$$

Teorema 8: U.a.s. adevărate:

1. Orice șir crescător și nemărginit are limita $+\infty$.
2. Orice șir descrescător și nemărgnit are limita $-\infty$.

Observație: Referitor la șiruri monotone și/sau mărginite întâlnim ipostazele:

- $\left\{\begin{array}{c}\text{monoton}\\ \text{și}\\ \text{mărginit}\end{array}\right. \implies (x_n)$ este convergent;
- convergent $\implies$ mărginit;
- convergent $\not\Longrightarrow$ monoton. Exemplu: $x_n = \frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N}$;
- monoton $\not\Longrightarrow$ convergent. Exemplu: $x_n = n, n \in \mathbb{N}$;
- mărginit $\not\Longrightarrow$ convergent. Exemplu: $x_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$.

Consecința: Fie $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$ un șir monoton. Atunci

$$(x_n) \text{ convergent} \iff \text{mărginit.}$$

Teorema 8: U.a.s. adevărate:

1. Orice șir crescător și nemărginit are limita $+\infty$.
2. Orice șir descrescător și nemărgnit are limita $-\infty$.

Observație: Referitor la șiruri monotone și/sau mărginite întâlnim ipostazele:

- $\left\{\begin{array}{c}\text{monoton}\\ \text{și}\\ \text{mărginit}\end{array}\right. \Longrightarrow (x_n)$ este convergent;
- convergent $\Longrightarrow$ mărginit;
- convergent $\not\Longleftarrow$ monoton. Exemplu: $x_n = \frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N}$;
- monoton $\not\Longrightarrow$ convergent. Exemplu: $x_n = n, n \in \mathbb{N}$;
- mărginit $\not\Longrightarrow$ convergent. Exemplu: $x_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$.

Consecința: Fie $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$ un șir monoton. Atunci

$$(x_n) \text{ convergent } \iff \text{ mărginit.}$$

Teorema 8: U.a.s. adevărate:

1. Orice șir crescător și nemărginit are limita $+\infty$.
2. Orice șir descrescător și nemărgnit are limita $-\infty$.

Observație: Referitor la șiruri monotone și/sau mărginite întâlnim ipostazele:

- $\left\{\begin{array}{c}\text{monoton}\\ \text{și}\\ \text{mărginit}\end{array}\right. \Longrightarrow (x_n)$ este convergent;
- convergent $\Longrightarrow$ mărginit;
- convergent $\not\Longleftarrow$ monoton. Exemplu: $x_n = \frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N}$;
- monoton $\not\Longrightarrow$ convergent. Exemplu: $x_n = n, n \in \mathbb{N}$;
- mărginit $\not\Longrightarrow$ convergent. Exemplu: $x_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$.

Consecința: Fie $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$ un șir monoton. Atunci

$$(x_n) \text{ convergent } \iff \text{ mărginit.}$$

Teorema 8: U.a.s. adevărate:

1. Orice șir crescător și nemărginit are limita $+\infty$.
2. Orice șir descrescător și nemărgnit are limita $-\infty$.

Observație: Referitor la șiruri monotone și/sau mărginite întâlnim ipostazele:

- $\left\{\begin{array}{c}\text{monoton}\\ \text{și}\\ \text{mărginit}\end{array}\right. \Longrightarrow (x_n)$ este convergent;
- convergent $\Longrightarrow$ mărginit;
- convergent $\not\Longleftarrow$ monoton. Exemplu: $x_n = \frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N}$;
- monoton $\not\Longrightarrow$ convergent. Exemplu: $x_n = n, n \in \mathbb{N}$;
- mărginit $\not\Longrightarrow$ convergent. Exemplu: $x_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$.

Consecința: Fie $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$ un șir monoton. Atunci

$$(x_n) \text{ convergent } \iff \text{ mărginit.}$$

Teorema 8: U.a.s. adevărate:

1. Orice șir crescător și nemărginit are limita $+\infty$.
2. Orice șir descrescător și nemărgnit are limita $-\infty$.

Observație: Referitor la șiruri monotone și/sau mărginite întâlnim ipostazele:

- $\left\{\begin{array}{c}\text{monoton}\\ \text{și}\\ \text{mărginit}\end{array}\right. \Longrightarrow (x_n)$ este convergent;
- convergent $\Longrightarrow$ mărginit;
- convergent $\not\Longrightarrow$ monoton. Exemplu: $x_n = \frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N}$;
- monoton $\not\Longrightarrow$ convergent. Exemplu: $x_n = n, n \in \mathbb{N}$;
- mărginit $\not\Longrightarrow$ convergent. Exemplu: $x_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$.

Consecința: Fie $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$ un șir monoton. Atunci

$$(x_n) \text{ convergent } \iff \text{ mărginit.}$$

Teorema 8: U.a.s. adevărate:

1. Orice șir crescător și nemărginit are limita $+\infty$.
2. Orice șir descrescător și nemărgnit are limita $-\infty$.

Teorema 9 [a lui Cantor]: Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ și $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ două șiruri $\subseteq \mathbb{R}$ care satisfac proprietățile:

i) $\exists p \in \mathbb{N}$ a.î.

$$x_n \le x_{n+1} < y_{n+1} \le y_n,\ \forall n \in \mathbb{N}, n \ge p;$$

ii) $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0.$

Atunci șirurile (x_n) și (y_n) sunt convergente și

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Observație Teorema de mai sus folosită pentru delimitarea constantei e, prin particularizarea

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \text{ și } y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Teorema 9 [a lui Cantor]: Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ și $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ două șiruri $\subseteq \mathbb{R}$ care satisfac proprietățile:

i) $\exists p \in \mathbb{N}$ a.î.

$$x_n \leq x_{n+1} < y_{n+1} \leq y_n, \ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p;$$

ii) $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0.$

Atunci șirurile (x_n) și (y_n) sunt convergente și

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Observație Teorema de mai sus folosită pentru delimitarea constantei e, prin particularizarea

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \text{ și } y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Teorema 9 [a lui Cantor]: Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ și $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ două șiruri $\subseteq \mathbb{R}$ care satisfac proprietățile:

i) $\exists p \in \mathbb{N}$ a.î.

$$x_n \leq x_{n+1} < y_{n+1} \leq y_n,\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p;$$

ii) $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0.$

Atunci șirurile (x_n) și (y_n) sunt convergente și

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Observație Teorema de mai sus folosită pentru delimitarea constantei e, prin particularizarea

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \text{ și } y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Trecerea la limită în inegalități

Teorema 10: Fie (x_n) și $(y_n) \subseteq \mathbb{R}$, două șiruri care au limită. Daca $\exists p \in \mathbb{N}$ a.î.

$$x_n \leq y_n, \ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p,$$

atunci

$$\lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Teorema 11 [a cleștelui]: Fie (x_n), (y_n) și $(z_n) \subseteq \mathbb{R}$, trei șiruri și fie $p \in \mathbb{N}$ a.î.

$$x_n \leq y_n \leq z_n, \ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p$$

Dacă

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n$$

atunci șirul (y_n) are limită și

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n.$$

Trecerea la limită în inegalități

Teorema 10: Fie (x_n) și $(y_n) \subseteq \mathbb{R}$, două șiruri care au limită. Daca $\exists p \in \mathbb{N}$ a.î.

$$x_n \leq y_n, \ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p,$$

atunci

$$\lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Teorema 11 [a cleștelui]: Fie (x_n), (y_n) și $(z_n) \subseteq \mathbb{R}$, trei șiruri și fie $p \in \mathbb{N}$ a.î.

$$x_n \leq y_n \leq z_n, \ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p$$

Dacă

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n$$

atunci șirul (y_n) are limită și

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n.$$

Trecerea la limită în inegalități

Teorema 10: Fie (x_n) și $(y_n) \subseteq \mathbb{R}$, două șiruri care au limită. Daca $\exists p \in \mathbb{N}$ a.î.

$$x_n \leq y_n, \ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p,$$

atunci

$$\lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Teorema 11 [a cleștelui]: Fie (x_n), (y_n) și $(z_n) \subseteq \mathbb{R}$, trei șiruri și fie $p \in \mathbb{N}$ a.î.

$$x_n \leq y_n \leq z_n, \ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p$$

Dacă

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n$$

atunci șirul (y_n) are limită și

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n.$$

Operații cu șiruri convergente

Teorema 12 Fie $(x_n), (y_n) \subseteq \mathbb{R}$ două șiruri convergente. U.a.s.a:

1. șirul sumă $(x_n + y_n)$ este convergent și
$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n;$$
2. dacă $c \in \mathbb{R}$, atunci șirul (cx_n) este convergent și
$$\lim_{n\to\infty}(cx_n) = c\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right);$$
3. șirul produs $(x_n y_n)$ este convergent și
$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n;$$
4. dacă $\lim_{n\to\infty} y_n \neq 0$ și $y_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, atunci șirul $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ este convergent și
$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}.$$

Operații cu șiruri convergente

Teorema 12 Fie $(x_n), (y_n) \subseteq \mathbb{R}$ două șiruri convergente. U.a.s.a:

1. șirul sumă $(x_n + y_n)$ este convergent și
$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n;$$
2. dacă $c \in \mathbb{R}$, atunci șirul (cx_n) este convergent și
$$\lim_{n\to\infty}(cx_n) = c\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right);$$
3. șirul produs $(x_n y_n)$ este convergent și
$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n;$$
4. dacă $\lim_{n\to\infty} y_n \neq 0$ și $y_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, atunci șirul $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ este convergent și
$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}.$$

Operații cu șiruri convergente

Teorema 12 Fie $(x_n), (y_n) \subseteq \mathbb{R}$ două șiruri convergente. U.a.s.a:

1. șirul sumă $(x_n + y_n)$ este convergent și
$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n;$$
2. dacă $c \in \mathbb{R}$, atunci șirul (cx_n) este convergent și
$$\lim_{n\to\infty}(cx_n) = c\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right);$$
3. șirul produs $(x_n y_n)$ este convergent și
$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n;$$
4. dacă $\lim_{n\to\infty} y_n \neq 0$ și $y_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, atunci șirul $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ este convergent și
$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}.$$

Operații cu șiruri convergente

Teorema 12 Fie $(x_n), (y_n) \subseteq \mathbb{R}$ două șiruri convergente. U.a.s.a:

1. șirul sumă $(x_n + y_n)$ este convergent și
$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n;$$
2. dacă $c \in \mathbb{R}$, atunci șirul (cx_n) este convergent și
$$\lim_{n\to\infty}(cx_n) = c\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right);$$
3. șirul produs $(x_n y_n)$ este convergent și
$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n;$$
4. dacă $\lim_{n\to\infty} y_n \neq 0$ și $y_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, atunci șirul $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ este convergent și
$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}.$$

Operații cu șiruri convergente

Teorema 12 Fie $(x_n), (y_n) \subseteq \mathbb{R}$ două șiruri convergente. U.a.s.a:

1. șirul sumă $(x_n + y_n)$ este convergent și
$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n;$$
2. dacă $c \in \mathbb{R}$, atunci șirul (cx_n) este convergent și
$$\lim_{n\to\infty}(cx_n) = c\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right);$$
3. șirul produs $(x_n y_n)$ este convergent și
$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n;$$
4. dacă $\lim_{n\to\infty} y_n \neq 0$ și $y_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, atunci șirul $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ este convergent și
$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}.$$

Operații cu șiruri convergente

Teorema 12 Fie $(x_n), (y_n) \subseteq \mathbb{R}$ două șiruri convergente. U.a.s.a:

1. șirul sumă $(x_n + y_n)$ este convergent și
$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n;$$
2. dacă $c \in \mathbb{R}$, atunci șirul (cx_n) este convergent și
$$\lim_{n\to\infty}(cx_n) = c\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right);$$
3. șirul produs $(x_n y_n)$ este convergent și
$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n;$$
4. dacă $\lim_{n\to\infty} y_n \neq 0$ și $y_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, atunci șirul $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ este convergent și
$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}.$$