Funcţii derivabile

Exerciţiul 1: Determinaţi derivata de ordinul n a următoarelor funcţii:

a) $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = (1 + x)^r$, unde $r \in \mathbb{R}$;

b) $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = x \cdot \ln(1 + x)$;

c) $f : (-\infty, -1) \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = x \cdot \ln(1 - x)$;

d) $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \sqrt{3x + 4}$;

e) $f : (-\frac{1}{2}, \infty) \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$.

Exerciţiul 2: Determinaţi derivata de ordinul n a următoarelor funcţii:

a) $f : \mathbb{R} \setminus -\frac{b}{a} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \frac{1}{ax+b}$;

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \sin(ax + b)$;

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \cos(ax + b)$;

d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = e^{ax+b}$.

Exerciţiul 3: Calculaţi derivatele următoarelor funcţii:

a) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = x^x$;

b) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$;

c) $f : (0, \pi) \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \sin x^x$;

d) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = x^{\sin x}$;

Exerciţiul 4: Arătaţi că $\frac{1}{x+1} < \ln(x + 1) - \ln x < \frac{1}{x}$ oricare ar fi $x > 0$.

Exerciţiul 5:

a) Arătaţi că pentru orice număr natural $n \geq 2$ au loc inegalităţile

$$na^{n-1} < \frac{b^n - a^n}{b - a} < nb^{n-1}$$

oricare ar fi $a, b \in (0, +\infty)$ cu $a < b$.

b) Deduceţi că pentru oricare număr natural n,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}, \qquad \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}.$$

Excerciţiul 6:

Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = x + |x-1|$$

oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

a) Să se arate că funcţia f are derivate laterale în punctul $x_0 = 1$;

b) Să se calculeze derivatele laterale în punctul $x_0 = 1$;

c) Este funcţia f derivabilă la stânga în punctul $x_0 = 1$? Dar la dreapta?

d) Are funcţia f derivată în punctul $x_0 = 1$?

e) Este funcţia f derivabilă în punctul $x_0 = 1$;