11.12.2023 Warszawa

Marcin Gronicki

Politechnika Warszawska  
Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych

Zadanie projektowe nr 2: Estymacja parametrów modelu Lotki-Volterry  
semestr zimowy 2023/24

Modelowanie Matematyczne dr hab. inż. Kajetana Snopek prof. uczelni

Spis treści

[1. Symbole matematyczne i akronimy 2](#_Toc153228387)

[2. Wprowadzenie 3](#_Toc153228388)

[2.1 Równanie Lotki-Volterry 3](#_Toc153228389)

[2.2 Jawna metoda Eulera 3](#_Toc153228390)

[2.3 Niejawna metoda Eulera 3](#_Toc153228391)

[2.4 Metoda Heuna 4](#_Toc153228392)

[2.4 Wbudowana w środowisko Matlab funkcja ode45 4](#_Toc153228393)

[3. Metodyka i wyniki doświadczeń 4](#_Toc153228394)

[3.1 Wyznaczenie optymalnych parametrów dopasowania modelu do danych 4](#_Toc153228395)

# Symbole matematyczne i akronimy

# 2. Wprowadzenie

## Równanie Lotki-Volterry

Celem tego projektu jest znalezienie optymalnych parametrów układu równań Lotki-Volterry (1), dla których model zdefiniowany równaniem (1), w najbardziej dokładny sposób będzie odwzorowywał liczność populacji x i y.

Równanie

Równanie Lotki-Volterry jest układem dynamicznym, używanym do symulowania liczności populacji ofiar i drapieżników w danym ekosystemie.

W niniejszym projekcie zadanie znalezienia optymalnych parametrów zostanie zaimplementowane przy użyciu różnych metod rozwiązywania układów równań różniczkowych, zaimplementowanych przez autora a także dostępnych w środowisku matlab, w początkowych eksperymentach metody zostaną sprawdzone na danych syntetycznych, a w końcowym eksperymencie zostaną sprawdzone na danych obrazujących rzeczywisty ekosystem (//wpisać jaki).

## Jawna metoda Eulera

Metoda jawna Eulera jest jedną z prostszych technik numerycznego rozwiązywania równań różniczkowych. Jej idea opiera się na przybliżeniu wartości funkcji pochodnej. Użyta w tym projekcie jawna metoda Eulera wyraża się wzorem (1)

Wzór

Gdzie oznacza uzyskane w n-tym kroku przybliżenie liczności populacji x lub y, a oznacza dokładną zmierzoną wartość populacji x lub y w n-tym kroku, oznacza krok czasowy.

Metoda Eulera jest stosunkowo prosta w implementacji, ale jej dokładność jest niska, szczególnie dla dużych wartości kroku czasowego.

## Niejawna metoda Eulera

Metod niejawna Eulera jest zmodyfikowaną wersją jawnej metody Eulera, gdzie różnica polega na wykorzystywaniu obliczanej wartości w momencie jej obliczania, w przypadku implementacji tej metody w tym programie skorzystałem z faktu możliwości przedstawienia wzoru (2), jako funkcji kwadratowej i obliczeniu jej pierwiastków a następnie wykorzystaniu większego.

Wzór

## 2.4 Metoda Heuna

Metoda Heuna jest ulepszoną metodą Eulera, do jej zaimplementowania posłużą wzory (3), (4), (5), (6)

Wzór

Wzór

Wzór

## Wbudowana w środowisko Matlab funkcja ode45

Funkcja ode45 znajduje numerycznie rozwiązania równań różniczkowych, opiera się na algorytmie Rungego-Kutty rzędu (4,5). Ode45 przyjmuje uchwyt do funkcji reprezentującej równanie/układ równań różniczkowych, tspan – wektor rozmiaru 2 zawierającą czas początkowy i końcowy, a następnie y0 – wektor warunków początkowych. Jako wynik zwraca wektor o rozmiarze 2 zawierający t – wektor próbek czasu i y – wektor wyliczonych wartości w chwili odpowiedniej próbki z t.

# 3. Metodyka i wyniki doświadczeń

## 3.1 Wyznaczenie optymalnych parametrów dopasowania modelu do danych

Początkowym eksperymentem była próba znalezienia optymalnych parametrów minimalizujących wzór (6) gdzie oznacza dokładną zmierzoną liczność populacji.

Wzór

Następnie znalezienie parametrów minimalizujących wzór (7).

Wzór

W celu znalezienia tych parametrów przeszukałem przy użyciu wbudowanej w Matlab R2023b funkcji *combinations* generującej kombinacje punktu startowego i parametrów , gdzie z podanych przedziałów wybrano dla 50, 20, 10, 20 wartości położonych w odstępach liniowych. Następnie wybrałem kombinację dającą najmniejszą wartość i wywołałem dla tej kombinacji elementów wbudowaną w Matlab funkcję *fimnsearch* która znajduje parametry dające najmniejszą wartość funkcji.

Analogicznie postąpiłem dla populacji y, z tym że parametry startowe dla funkcji *fminsearch* zostały wybrane z przedziałów i parametrów . Następne kroki zostały wykonane w sposób identyczny jak w przypadku populacji x, oprócz tego że funkcja *fminsearch* znajdowała optymalne rozwiązanie dla .