11.12.2023 Warszawa

Marcin Gronicki

Politechnika Warszawska  
Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych

Zadanie projektowe nr 2: Estymacja parametrów modelu Lotki-Volterry  
semestr zimowy 2023/24

Modelowanie Matematyczne dr hab. inż. Kajetana Snopek prof. uczelni

Spis treści

[1. Symbole matematyczne i akronimy 2](#_Toc153357618)

[2. Wprowadzenie 3](#_Toc153357619)

[2.1 Równanie Lotki-Volterry 3](#_Toc153357620)

[2.2 Jawna metoda Eulera 3](#_Toc153357621)

[2.3 Niejawna metoda Eulera 3](#_Toc153357622)

[2.4 Metoda Heuna 4](#_Toc153357623)

[2.5 Wbudowana w środowisko Matlab funkcja ode45 4](#_Toc153357624)

[3. Metodyka i wyniki doświadczeń 4](#_Toc153357625)

[3.1 Wyznaczenie optymalnych parametrów dopasowania modelu do danych z wykorzystaniem jawenej metody eulera 4](#_Toc153357626)

[3.2 Wyznaczenie optymalnych parametrów dopasowania modelu do danych z wykorzystaniem niejawnej metody Eulera i metody Heuna 5](#_Toc153357627)

[3.3 Wyznaczenie optymalnych parametrów dopasowania modelu do danych z wykorzystaniem ode45 i jawnej metody Eulera. 5](#_Toc153357628)

[3.4 Wyznaczanie wartości x, y dla których populacje osiągają stan równowagi. 5](#_Toc153357629)

[4. Dyskusja wyników eksperymentów numerycznych 6](#_Toc153357630)

[4.1 Wyniki wyznaczenia optymalnych parametrów dopasowania modelu do danych z wykorzystaniem jawenej metody eulera. 6](#_Toc153357631)

[4.2 Wyniki wyznaczenia optymalnych parametrów dopasowania modelu do danych z wykorzystaniem niejawnej metody Eulera i metody Heuna 7](#_Toc153357632)

[4.3 Wyniki wyznaczenia optymalnych parametrów dopasowania modelu do danych z wykorzystaniem ode45 i jawnej metody Eulera. 10](#_Toc153357633)

[4.4 Znalezione wartości x, y dla których populacje osiągają stan rówonowagi. 10](#_Toc153357634)

# Symbole matematyczne i akronimy

# 2. Wprowadzenie

## Równanie Lotki-Volterry

Celem tego projektu jest znalezienie optymalnych parametrów układu równań Lotki-Volterry (1), dla których model zdefiniowany równaniem (1), w najbardziej dokładny sposób będzie odwzorowywał liczność populacji x i y.

Równanie

Równanie Lotki-Volterry jest układem dynamicznym, używanym do symulowania liczności populacji ofiar i drapieżników w danym ekosystemie.

W niniejszym projekcie zadanie znalezienia optymalnych parametrów zostanie zaimplementowane przy użyciu różnych metod rozwiązywania układów równań różniczkowych, zaimplementowanych przez autora a także dostępnych w środowisku matlab, w początkowych eksperymentach metody zostaną sprawdzone na danych syntetycznych, a w końcowym eksperymencie zostaną sprawdzone na danych obrazujących rzeczywisty ekosystem (//wpisać jaki).

## Jawna metoda Eulera

Metoda jawna Eulera jest jedną z prostszych technik numerycznego rozwiązywania równań różniczkowych. Jej idea opiera się na przybliżeniu wartości funkcji pochodnej. Użyta w tym projekcie jawna metoda Eulera wyraża się wzorem (1)

Wzór

Gdzie oznacza uzyskane w n-tym kroku przybliżenie liczności populacji x lub y, a oznacza dokładną zmierzoną wartość populacji x lub y w n-tym kroku, oznacza krok czasowy.

Metoda Eulera jest stosunkowo prosta w implementacji, ale jej dokładność jest niska, szczególnie dla dużych wartości kroku czasowego.

## Niejawna metoda Eulera

Metod niejawna Eulera jest zmodyfikowaną wersją jawnej metody Eulera, gdzie różnica polega na wykorzystywaniu obliczanej wartości w momencie jej obliczania, w przypadku implementacji tej metody w tym programie skorzystałem z faktu możliwości przedstawienia wzoru (2), jako funkcji kwadratowej i obliczeniu jej pierwiastków a następnie wykorzystaniu większego.

Wzór

## 2.4 Metoda Heuna

Metoda Heuna jest ulepszoną metodą Eulera, do jej zaimplementowania posłużą wzory (3), (4), (5), (6)

Wzór

Wzór

Wzór

## Wbudowana w środowisko Matlab funkcja ode45

Funkcja ode45 znajduje numerycznie rozwiązania równań różniczkowych, opiera się na algorytmie Rungego-Kutty rzędu (4,5). Ode45 przyjmuje uchwyt do funkcji reprezentującej równanie/układ równań różniczkowych, tspan – wektor rozmiaru 2 zawierającą czas początkowy i końcowy, a następnie y0 – wektor warunków początkowych. Jako wynik zwraca wektor o rozmiarze 2 zawierający t – wektor próbek czasu i y – wektor wyliczonych wartości w chwili odpowiedniej próbki z t.

# 3. Metodyka i wyniki doświadczeń

## 3.1 Wyznaczenie optymalnych parametrów dopasowania modelu do danych z wykorzystaniem jawenej metody eulera

Początkowym eksperymentem była próba znalezienia optymalnych parametrów minimalizujących wzór (6) gdzie oznacza dokładną zmierzoną liczność populacji.

Wzór

Następnie znalezienie parametrów minimalizujących wzór (7).

Wzór

W celu znalezienia tych parametrów przeszukałem przy użyciu wbudowanej w Matlab R2023b funkcji *combinations* generującej kombinacje punktu startowego i parametrów , gdzie z podanych przedziałów wybrano dla 50, 20, 10, 20 wartości położonych w odstępach liniowych. Następnie wybrałem kombinację dającą najmniejszą wartość i wywołałem dla tej kombinacji elementów wbudowaną w Matlab funkcję *fimnsearch* która znajduje parametry dające najmniejszą wartość funkcji.

Analogicznie postąpiłem dla populacji y, z tym że parametry startowe dla funkcji *fminsearch* zostały wybrane z przedziałów i parametrów . Następne kroki zostały wykonane w sposób identyczny jak w przypadku populacji x, oprócz tego że funkcja *fminsearch* znajdowała optymalne rozwiązanie dla .

## 3.2 Wyznaczenie optymalnych parametrów dopasowania modelu do danych z wykorzystaniem niejawnej metody Eulera i metody Heuna

W następnym etapie projektu w celuz znalezienia optymalnych parametrów została wykorzystana niejawna metoda Eulera (2.3) i metoda Heuna (2.4). W celu wykonania tego zadania procedura była analogiczna do tej zdefiniowanej w podrozdziale (3.1). Jedyną istotną różnicą było zastępienie jawnej metody Eulera, metodą niejawną i Heuna. W celu implementacji niejawnej metody Eulera została ona przekształcona do postaci funkcji kwadratowej odpowiednio wzór (8) i (9). Następnie znalazłem miejsca zerowe tych funkcji przy użyciu zaaimplementowanej przeze mnie funkcji *findRoot* (obliczającą delte, a następnie pierwiastki z wykorzystaniem wzoru Vieta). W każdej iteracji program poszukiwał miejsc zerowych a następnie wybierał większe.

Wzór

Wzór

## 3.3 Wyznaczenie optymalnych parametrów dopasowania modelu do danych z wykorzystaniem ode45 i jawnej metody Eulera.

W tym eksperymenice wyznaczyłem parametry które są jednocześnie optymalne dla populacji x i y, to znaczy minimalizujace wzór (10) . Wykorzystałem wyznaczone w pierwszym eksperymencie wartości startowe dla optymalizacji wzorów (6) i (7).

Wzór

Następnie zaimplementowałem metody rozwiązywaia URRZ: metodę ode45 i jawną metodę Eulera dla których uruchomiłem optymalizacje przy użyciu *fminsearch.* Dodatkowo funkcje implementujące poprzednio wspomniane metody numeryczne rozszerzyłem o interpolowanie uzyskanych przez te metody wyników w punktach . Interpolacje wykonowałem używając wbudowanej w środowisko funkcji *interp1.*

## 3.4 Wyznaczanie wartości x, y dla których populacje osiągają stan równowagi.

Celeme niniejszego eksperymentu było oblicznenie liczności populacji x i y > 0 dla których układ osiąga stan równowagi (tzn. x(t) i y(t) nie zmienia się w czasie). W tym celu użyłem funkcji *solve* znajdującej się w Matlab Symbolic toolbox, która rozwiązuje układy równań. Jednka najpierw nie zbędne było zmodyfikowanie równania (1), poprzez podstawienie za obie pochodne 0, a pod parametry r podstawiłem optymalne wartości znalezione w zadaniu 3. Tak zmodyfikowane równanie zostało rozwiązane symbolicznie przy użyciy *solve*.

# 4. Dyskusja wyników eksperymentów numerycznych

## 4.1 Wyniki wyznaczenia optymalnych parametrów dopasowania modelu do danych z wykorzystaniem jawenej metody eulera.

W niniejszym podrozdziale przedstawię otrzymane parametry dla populacji x i y, a także zobrazuję ich jakość na wykresie (1) i (2), w porówaniu do dokładnych zmierzonych liczności populacji.

Dla populacji x otrzymałem wartości parametrów

I minimalną wartość

A graph of a graph

Description automatically generated

Wykres

Dla populacji y otrzymałem parametry:

Natomiast minimalna wartość wyniosła 1.7088e+04.

A graph of a graph

Description automatically generated

Wykres

## 4.2 Wyniki wyznaczenia optymalnych parametrów dopasowania modelu do danych z wykorzystaniem niejawnej metody Eulera i metody Heuna

W tej części raportu przedstawię optymalne wartości parametrów uzyskanych przy użyciu niejawnej metody Eulera i Heuna. W obu przypadkach niezbędna była minimalizacja wzorów (6) i (7). W przypadku obliczeń wykonywanych przy użyciu niejawnej metody Eulera otrzymałem dla populacji x następujące wartości parametrów:

a wartość dla tych parametrów wyniosła 9.9245e+04. Na wykresie (3) jest przedstawiona liczność populacji x uzyskana przy pomocy przybliżonej metody w porównaniu do dokładnych wartości.

Obraz zawierający tekst

Opis wygenerowany automatycznie

Wykres

Dla populacji y optymalne parametry wyniosły:

Z kolei minimalna wartość współczynnika wyniosła 9.9245e+04

Wykres (4) przedstawia uzyskany przybliżony przebieg zmienność populacji w porównaniu do dokładnej liczności populacji y.

Obraz zawierający tekst

Opis wygenerowany automatycznie

Wykres

Następnie wyznaczyłem optymalne parametry wykorzystując metodę Heuna. Dla populacji x optymalne parametry wyniosły:

Natomiast wartość współczynnika wyniosła 2.7790e+04

Na wykresie (5) został przedstawiony wynik w analogiczny do poprzednich wykresów sposób.

Obraz zawierający tekst

Opis wygenerowany automatycznie

Wykres

Optymalne parametry dla modelu populacji y wyniosły:

a minimalna wartość współczynnika wyniosła 1.5550e+04. Wykres (6) przedstawia populację y wyznaczoną metodą Heuna.

Obraz zawierający tekst

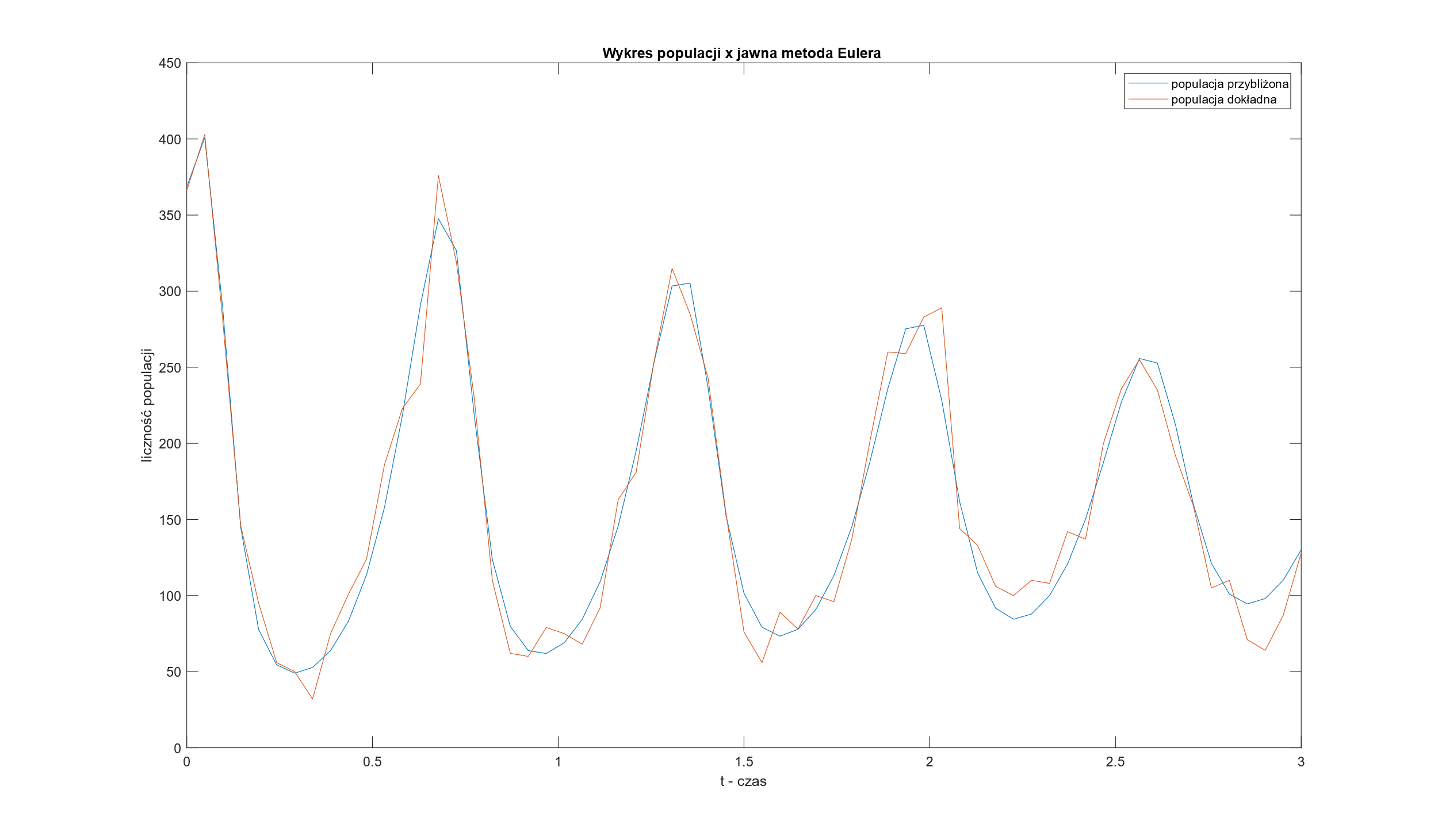
Opis wygenerowany automatycznie

Wykres

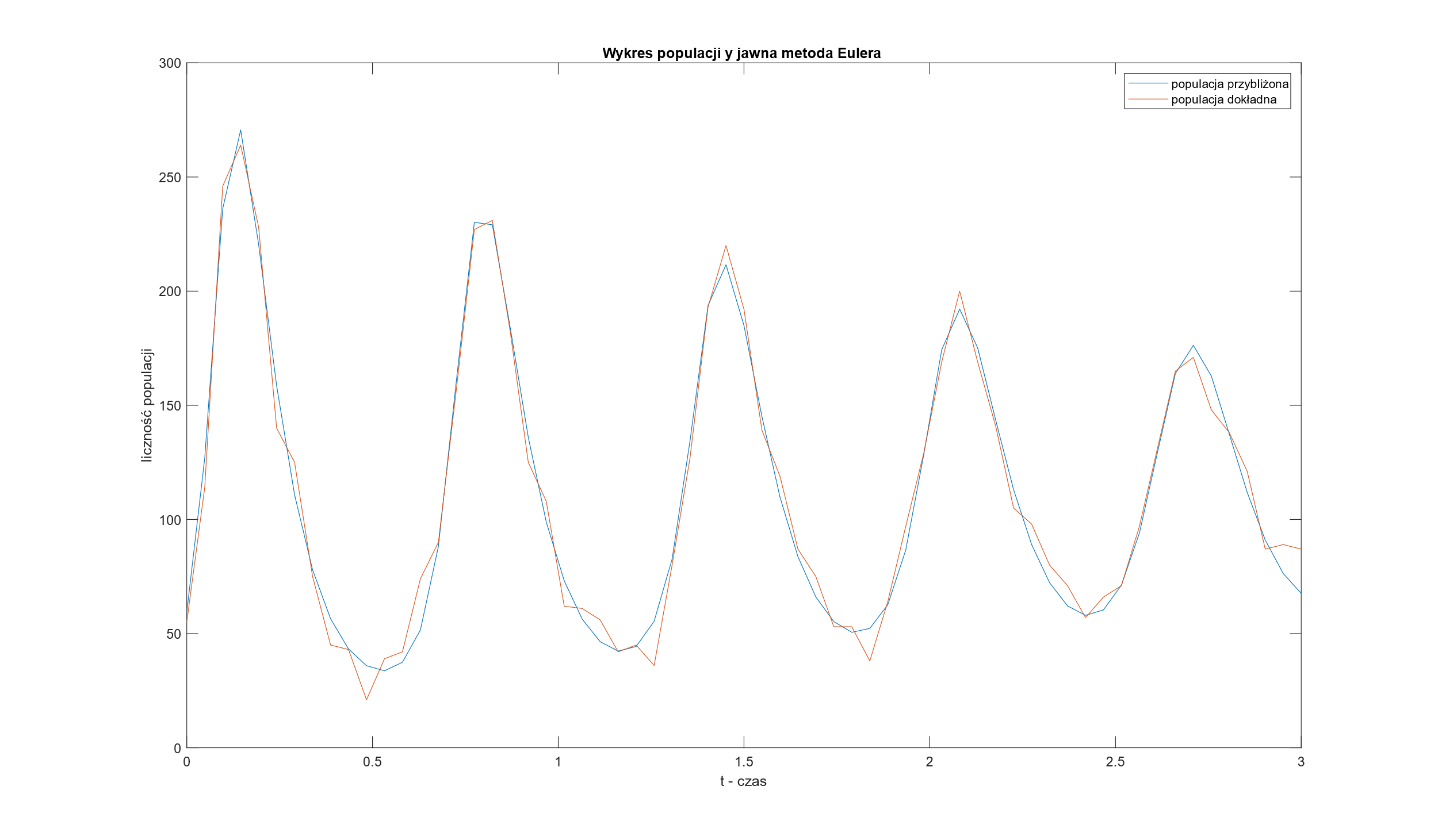
## 4.3 Wyniki wyznaczenia optymalnych parametrów dopasowania modelu do danych z wykorzystaniem ode45 i jawnej metody Eulera.

W tym rozdziale przedstawie otrzymane wartości parametrów gdzie do obliczeń wykorzystałem wbudowaną funkcje w matlab *ode45* i jawną metodę Eulera. W przypadku pierwszej funkcji otrzymałem wartości wszystkich parametrów:

Wartość wyniosła 8.6068e+04, a wykres (7) i (8) przedstawia odpowiednio populacje x i y uzyskane przy użyciu ode45.



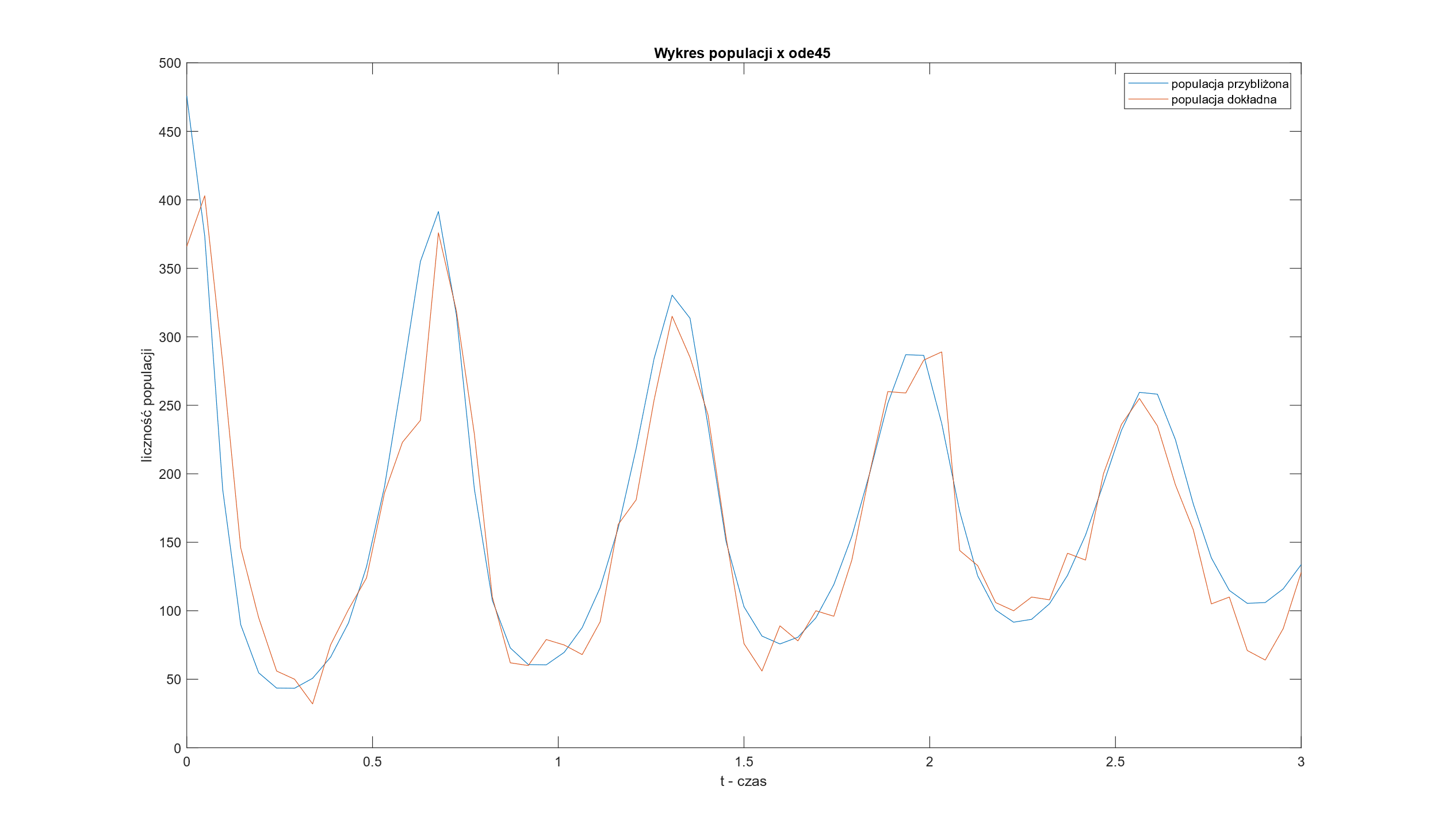
Wykres



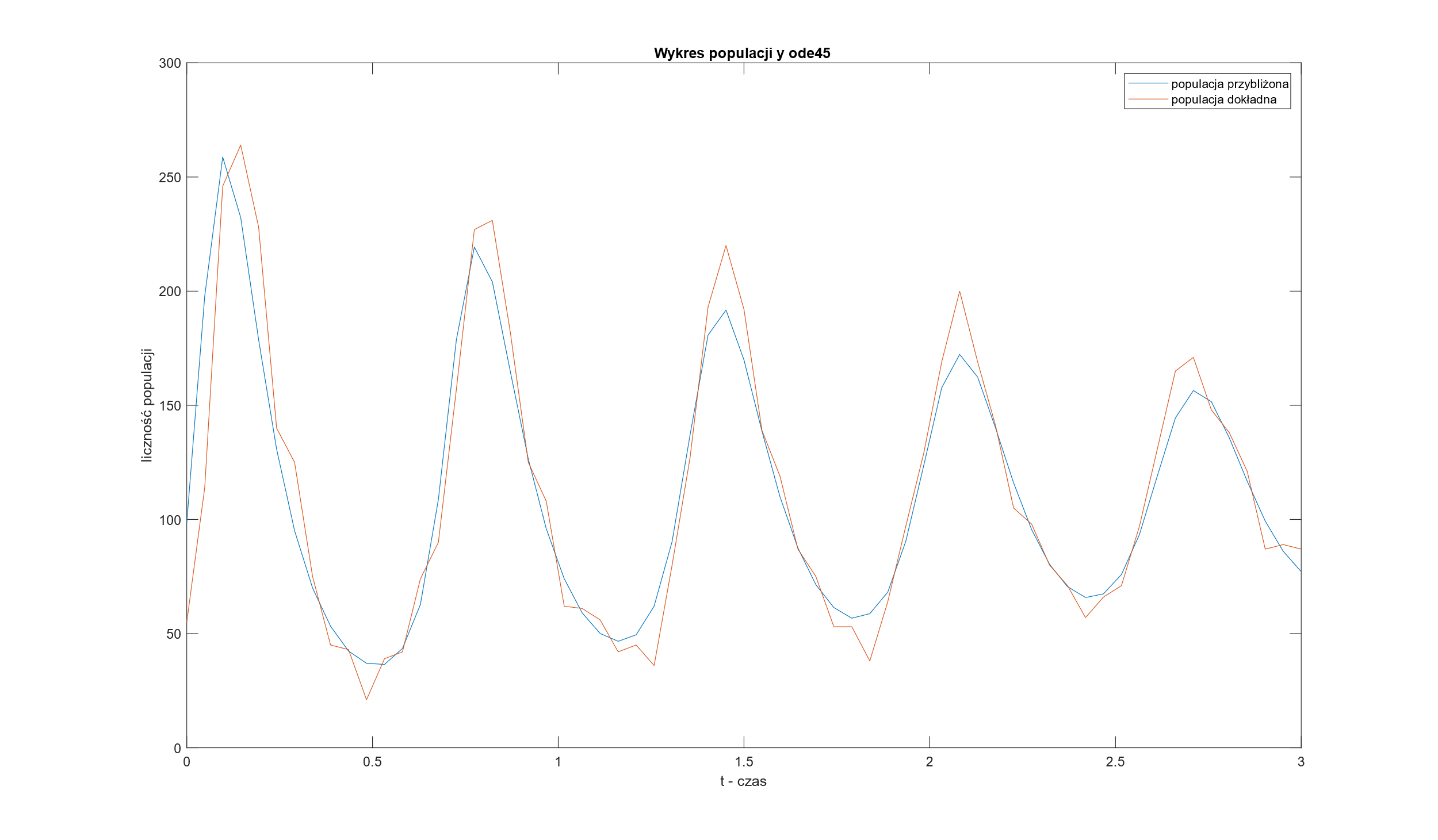
Wykres

Wykorzystując jawną metodę Eulera otrzymałem parametry:

Wartość wyniosła 2.5538e+04, a wykres (9) i (10) przedstawia odpowiednio populacje x i y uzyskane przy użyciu jawnej metody Eulera.



Wykres



Wykres

## 4.4 Znalezione wartości x, y dla których populacje osiągają stan rówonowagi.

Postępując zgodnie z instrukcjami przedstawionymi w rozdziale 3.4 otrzymałem 4 pary rozwiązań, z czego tylko jedna para miała dla x i y wartości większe od zera. Dla x szukana liczność populacji wyniosła , a dla populacji y wyniosła .

Możemy podać odpowiednie interpretacje parametrów w kontekście Lotki-Volterra:

* ​: Wzrost naturalny populacji ofiary (αα w klasycznym Lotka-Volterra).
* ​: Wpływ drapieżnika na ofiarę (czynnik ograniczający populację ofiary z powodu drapieżnictwa).
* ​: Interakcje między osobnikami w obrębie populacji ofiary (samoregulacja populacji ofiary).
* ​: Utrata energii przez drapieżnika (czynnik redukujący liczebność drapieżnika).
* ​: Wpływ ofiary na drapieżnika (czynnik zwiększający liczebność drapieżnika w wyniku dostępu do pokarmu).
* ​: Interakcje między osobnikami w obrębie populacji drapieżnika (samoregulacja populacji drapieżnika).