

基于分形布朗运动的地形建模及其参数分析

王 琰

(沈阳理工大学 信息科学与工程学院, 辽宁 沈阳 110168)

摘 要:采用计算机图形学技术进行虚拟地形的三维建模, 难点在于对地形非规则性的几何描述. 基于分形布朗运动原理, 对经典的 Diamond-square 算法进行了改进, 得到了具有多特征的虚拟地形. 对算法的参数进行了分析, 并用计算机进行模拟实验. 通过分析各参数对虚拟地形形状特征的影响, 确定了各参数的有效区间, 保证了算法灵活快速地生成真实感三维地形.

关 键 词:虚拟地形; 三维建模; 分形布朗运动; 参数分析

中图分类号: TP391

文献标识码: A

The Mathematical Modeling and Parameter Analysis on Fractal Brownian Motion for Simulating the Terrain

WANG Yan

(Shenyang Ligong University, Shenyang 110168, China)

Abstract: The difficulty of virtual 3D terrain modeling with computer graphics technology is the terrain of non-regularity of the geometric description. Based on the FBM, the classic diamond-square is advanced. virtual terrain with multi-feature is got. The algorithm parameters is analysed and is simulated with computer. By analyzing the various parameters on the shape of the virtual terrain features, it determines the effective range of each parameter and ensures the algorithm to generate realistic 3D terrain flexibly and fast.

Key words: virtual terrain; 3D modeling; fractal brownian motion(FBM); parameters analyzing

三维地形的模拟分为两类: 真实地形和虚拟地形. 真实地形采用数字高程模型方法^[1], 利用卫星遥感图片和卫星定位系统所取得的海量地理数据, 生成计算机虚拟地形, 具有非常高的真实度. 虚拟地形主要应用于影视、游戏制作中, 做为自然景观的组成部分, 只追求视觉效果. 虚拟地形的建模有两种技术: 一是把地形看成是由复杂的几何面组成的, 用三角形面片或其它计算机易于实现的图形进行逼近, 建立地形图形的三维网格

模型, 通常称为基于图形建模; 另一是图像的叠加, 就是对已有的多幅图像进行处理, 消除重复的部分, 产生三维的特征, 称为基于图像建模^[2]. 基于图像的建模技术优点是真实感好, 缺点是数据量大且动态漫游实现较为复杂; 基于图形的建模技术优点是数据量较少且能方便地进行漫游等交互操作, 缺点是真实感较差. 对于真实感要求不很高、生成及漫游速度要求高的应用领域, 后者是个较好的选择.

地形是非规则几何体, 描述非规则形体的最有效工具就是分形几何. 分形布朗运动是 Mandelbrot 和 Van Ness^[3-4]提出的描述自然界中随机分形的一种典型的数学模型, 能较好地反映地物. 经典

收稿日期: 2009-02-24

作者简介: 王琰 (1962-), 女, 教授, 博士, 研究方向: 计算机图形学, 虚拟现实技术和图像处理技术.

的中点位移 (Diamond-square)分形地形建模方法,采用服从高斯分布的一维随机插值算法,可以生成具有一定粗糙度的分形地形,但生成的地形突兀、尖锐,与自然界中的地形特征相差甚远.本文用分形布朗运动改进 Diamond-square算法,分析其控制参数实际应用的功能和意义,以求更为灵活地生成不同特征真实感更好的虚拟地形.

1 布朗运动 (BM)和分形布朗运动 (FBM)

1.1 一维布朗运动 (BM)

布朗运动是基于对布朗噪声的研究而建立的数学模型,具有平稳的独立增量和有限方差,是唯一具有维纳随机分布的函数^[5].

布朗样本函数 $X: [0, 1] \rightarrow R$ 的豪斯道夫维数与盒维数都为 1.5^[6],而自然界中地形是多变的,表征地形变化的分形维数不会仅仅局限于 1.5 的固定范围.因此,为了获得各种不同分形维数的地形模型,还需要建立分形维数更加灵活的随机模型.为了得到不同特征的样本函数,通常有两种变化:

- 1)分形布朗运动的增量是服从正态分布的,但是不再相互独立;
- 2)仍然是平稳过程,但是去掉方差有限这个条件,并由此得出不连续函数.

1.2 一维分形布朗运动 (FBM) 定义^[1,6,7]

定义 指数为 H ($0 < H < 1$) 的分形布朗运动是定义在某概率空间上的一维随机过程 $X: [0, \infty] \rightarrow R$,使得:

- (1) 以概率 1, $X(t)$ 连续且 $X(0) = 0$;
- (2) 对任何 $t \geq 0$ 及 $H > 0$, 增量 $X(t+h) - X(t) \sim N(0, h^{2H})$, 有:
$$P(X(t+h) - X(t) \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} h^{-H} \int_{-\infty}^x \exp(-\frac{u^2}{2h^{2H}}) du$$

该定义说明增量 $X(t+h) - X(t)$ 是平稳的,即它们具有不依赖于 t 的概率分布.由于 $E[(X(t+h) - X(t))^2] = h^{2H}$,由此可以证明: $E[X(t)(X(t+h) - X(t))] = 0$,由此可以证明: $E[X(t)(X(t+h) - X(t))] = 0$

2) Diamond过程:取正方形两对角线交点 (即中点),用四个角高程值的平均值加上一个随机量

$$(t+h) - X(t)) = \frac{1}{2} [(t+h)^{2H} - t^{2H} - h^{2H}]$$

定理 指数为 H 的布朗样本函数 $X: [0, 1] \rightarrow R$ 的豪斯道夫维数及盒维数为 $2-H$.

分形布朗运动可以获得更为灵活的分形维数,因此本文采用分形布朗运动数学模型进行地形建模.

1.3 随机插值算法

二维平面上的布朗运动可以产生三维的地形景观,即平面内的坐标 x 和 y 产生 $V_H(x, y)$ 作为位置 (x, y) 的表面梯度,以恒定的速度在 XOY 平面内沿直线路径行走的梯度变化就是分形布朗运动.那么,设平面内行走的距离为 Δr 其中: $\Delta r^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$,则曲线梯度变化由式 (1) 给出,而这一结果通常是应用分形布朗运动的理论基础^[8]:

$$\Delta V \propto \Delta r^H \tag{1}$$

对已知端点的线段,其线段中点的高程为两端点高程的平均值,再加上随机位移量,经过若干次迭代后,可以产生布朗运动高程离散点,即带有高度的虚拟地形三维离散点,其功能是高效地以愈来愈小的比例为表面增加细节.公式如下^[9-10]:

$$Z_{MP} = \frac{Z_a + Z_b + Z_c + Z_d}{4} + D'$$

其中, D' 是高斯随机函数, Z 表示相关点的高程值.当 $H \neq 1/2$ 根据式 (1) 得^[11-12]:

$$\text{var}[V(t) - V(t)] = |t - t|^{2H} \sigma^2 \tag{2}$$

式 (2) 中 $V(t)$ 是服从均值为 0, 方差为 σ^2 的高斯分布.

2 分形布朗运动三维地形建模算法

2.1 Diamond-square算法

该算法是由 Fournier、Fussell 和 Carpenter 提出的,又称为钻石 四边形算法:

1) 初始化二维数组并将 4 个角设为相同高程值,如图 1 所示,为一个 5×5 的数组的 Diamond-Square 算法流程,其中对图 1a 中的 4 个角的高程值进行了初始化,用黑点表示;

计算得到的值作为中点的高程值,得到了一个棱锥.当网格上分布着多个,如图 1b;

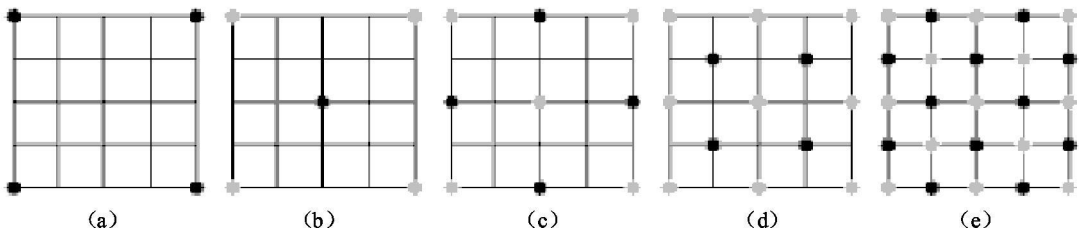


图 1 Diamond-Square算法

3) 如图 1c所示,将 5×5 正方形细分成四个 3×3 正方形,而图中的四个黑点的高程值分别是 5×5 正方形的四边中点,可以用每条边端点平均值加上随机量而获得;

4) Square过程:取每四点形成的棱锥,在棱锥的中心生成一个随机值,平均四角高程值再加上与 diamond过程相同的随机量,计算出每条边的中点值,如图 1d;

5) 对上述过程进行迭代,直至达到规定次数.

2.2 分形布朗运动三维地形建模算法

Diamond-square算法是由 Diamond过程和 Square过程构成的.本算法将服从高斯分布的二维随机插值算法用于 Diamond处理阶段,以求生成矩形区域中心点高程值;将一维随机插值算法用于 Square处理阶段,以求生成矩形边界中点高程值.

2.2.1 一维随机插值算法

设 $V(t) \sim N(0, \sigma^2)$, $D \sim N(0, \Delta^2)$, 那么随机插值模型为 $V(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} [V(t) + V(0)] + D$, 其中 $V(0) = 0$.

求解随机偏移增量的分布,关键为求解 Δ^2 , 主要过程如下:

第 1次迭代, $V(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} [V(1) + V(0)] + D_1$, 根据式 (2)有 $\Delta_1^2 = \frac{\sigma^2}{2^{2H}} - \frac{1}{4} \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{2^{2H}} (1 - 2^{2H-2})$

以此类推,经过 n 次迭代后,一维随机偏移增量的方差: $\Delta_n^2 = \frac{\sigma^2}{(2^n)^{2H}} \cdot (1 - 2^{2H-2})$

则一维随机偏移增量服从: $V(t) \sim N(0, \sigma^2)$, $D_n \sim N(0, \frac{\sigma^2}{(2^n)^{2H}} (1 - 2^{2H-2}))$

2.2.2 二维随机插值算法

定义视窗范围 $Z = \{(x, y): X_{min} \leq x \leq X_{max}, Y_{min} \leq y \leq Y_{max}\}$, $\forall m, n \in Z^+$, 令

$\Delta x = \frac{X_{max} - X_{min}}{m}$, $\Delta y = \frac{Y_{max} - Y_{min}}{n}$, 那么有 $x_i = X_{min} + i \Delta x$, $y_j = Y_{min} + j \Delta y$, $i = 0, 1, \dots, m-1$; $j = 0, 1, \dots, n-1$. 分布的离散点依然服从高斯分布, 期望为 0, 方差为 σ^2 .

初始化四个顶点, 有: $\text{var}[X(0, \frac{1}{n}) - X(0, 0)] = \frac{\sigma^2}{n^{2H}}$, $\text{var}[X(\frac{1}{m}, 0) - X(0, 0)] = \frac{\sigma^2}{m^{2H}}$,

$\text{var}[X(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}) - X(0, 0)] = (\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2})^H \sigma^2$

有中点 $X(\frac{1}{2m}, \frac{1}{2n})$, 那么初次迭代插值为 $(\frac{1}{2m}, \frac{1}{2n})$
 $-X(0, 0) = \frac{1}{4} [X(0, 0) + X(\frac{1}{m}, 0) + X(0, \frac{1}{n}) + X(\frac{1}{m}, \frac{1}{n})] + D_1$

$\text{var}[(\frac{1}{2m}, \frac{1}{2n}) - X(0, 0)] = \frac{1}{4^H} (\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2})^H \sigma^2$
可知 $\Delta_1^2 = \frac{\sigma^2}{2^{2H}} \{ (\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2})^H - 2^{2H-4} [\frac{1}{m^{2H}} + \frac{1}{n^{2H}} + (\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2})^H] \}$

经 i 次迭代后, 二维随机偏移增量的方差 $\Delta_i^2 = \frac{\sigma^2}{2^{2Hi}} \{ (\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2})^H - 2^{2H-4} [\frac{1}{m^{2H}} + \frac{1}{n^{2H}} + (\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2})^H] \}$

则二维随机偏移增量服从: $X(x, y) \sim N(0, \sigma^2)$, $D_i \sim N(0, \Delta_i^2)$.

3 参数分析

3.1 分形地形生成中参数 H 的作用

分形布朗运动增量产生的布朗噪声在形态上具有地形特征. 为了增强布朗噪声在虚拟地形建

模中的可行性, 一般采用高斯分布进行布朗噪声采样, 利用参数 H 进行噪声形态控制. 参数 H 可以对布朗噪声进行 0~1 范围内的缩放, 而缩放过程实现了对布朗噪声统计相似性的控制. 当 $H \neq 1/2$ 时, H 介于 0~1 之间的逼近, 可以对频谱、随机行走轨迹, 以及地形山势的表现, 起到调节作用, 详见表 1.

表 1 参数 H 在分形地形中的作用

参数 H 的取值		频谱	轨迹	山势	H 的经验值
$0 < H < 1$	H 逼近 0	高频居多	粗糙	陡峭	0.6 ~ 0.8
	H 逼近 1	低频居多	平滑	平缓	
$H > 1$		分形图形垂直比例增幅大于水平增幅, 不适合用于控制地形模型.			

3.2 地形细节生成中参数 σ 和 Δ_i 的作用

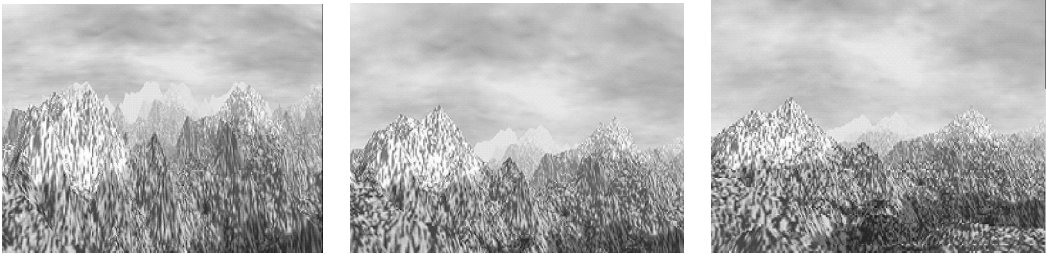
采用随机插值算法, 通过迭代可以为山体增加任意多的细节. 由式 (1) 可以看出, 由于采用的高斯分布进行随机行走的模型采样, 使得随机行走的步长同距离成正比, 再由式 (2) 可知, σ 决定了高斯分布函数的离散度, 同时步长确定了每次迭代的比例因子, 也决定了垂直方向的比例.

当不考虑 Δ 每次迭代的具体过程时, 由于其高斯分布的特性, 参数 H 依然控制着其细节图形上的轨迹, 在插值算法的建立之初, 就为 Δ_i 的每次变化作了限定. 当 $H > 0.5$ 时, 在每次细分的过

程中, 方差 Δ_i 也随着变小了, 曲线较通常的布朗运动曲线要光滑一些, 反之, 当 H 逼近于 0 时, 方差 Δ_i 会相对变大, 曲线相对变得粗糙. 因此, Δ_i 在为地形增加细节的过程中, 虽然决定了垂直方向的变化, 但在细节曲线的表现上, 是受参数 H 约束的. 因此, 二者共同构成分形山多变特性的控制因素.

3.3 分形地形和分形维数

分形维数在不同的距离比例上决定着细节或不规则性的程度. 维数大, 则表面粗糙; 相反, 维数小, 则表面就会相对细腻.



(a) 分形维数为 2.45 (b) 分形维数为 2.30 (c) 分形维数为 2.15

图 2 分形地形及其分形维数

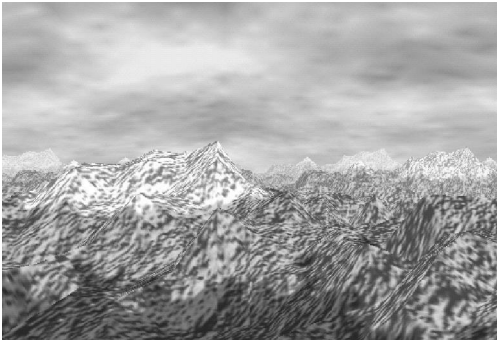
图 2 中三幅图像表明, 分形维数为 2.3 的曲面具有相对适度的分形维数, 这对地形表面在很大程度上是合适的. 当分形维数增加到 2.45 时, 产生对于实际风景的不现实的粗糙表面. 分形维数增大时, 图形曲面变形较大, 地形表现较为陡峭粗糙; 相反, 分形维数减小, 分形曲面的变化也随之趋缓, 地形表现较为细腻平坦. 图 3 中四幅图展示了在分形控制参数的变化过程中呈现出的多种地形地貌, 其具体参数数据参见表 2.



(a) 参数组 1 效果图



(b) 参数组 2 效果图



(c) 参数组 3 效果图



(d) 参数组 4 效果图

图 3 高斯随机插值算法参数控制及其效果图

表 2 分形地形生成控制参数列表

参数组序号	σ	H	迭代次数	随机种子数	分形维数
参数组 1	0.77	0.70	4	10	2.30
参数组 2	0.77	0.80	5	20	2.20
参数组 3	0.65	0.70	4	10	2.30
参数组 4	0.55	0.75	5	5	2.25

4 结论

- 1)用一维随机插值和二维随机插值改进经典的分形地形生成算法——中点偏移算法,所生成的地形有效地克服了原算法突兀、尖锐,更趋近自然界中的地形特征;
- 2)详细地分析了分形地形生成的控制参数,获得了分形地形模拟控制经验值,加大了不同特征地形建模的灵活性;
- 3)参数 H和分形维数可以较好地反映分形地形的自然特征,可以有效地增强地形的生成效果,而分形维数一般采用的经验值为 2.2~2.4.

参考文献:

[1] 徐青. 地形三维可视化技术 [M]. 北京:测绘出版社, 2000: 1-24.

[2] 横枕雄一郎. 计算机图形学应用 [M]. 北京:科学出版社, 2003.

[3] Mandelbrot B B. The Fractal Geometry of Nature [M]. W H Freeman and Co., New York. 1982.

[4] Mandelbrot B B. Ness J W van. Fractional Brownian motion, fractional noises and application [M]. SIAM Review 10, 4, 1968, 422-437.

[5] 毛用才,胡奇英. 随机过程 [M]. 西安:西安电子科技大学出版社, 2004: 38-39, 92-93.

[6] Kenneth J. Falconer. Fractal Geometry Mathematical Foundations and Applications [M]. 沈阳:东北大学出版社, 2003: 306-326, 341-344.

[7] 张山山. 分形方法在地形数据内插中的应用 [J]. 西南交通大学学报, 2000, 35(2): 141-144.

[8] Michael F Bamsley, Robert L Devaney. 分形图形学 [M]. 北京:海洋出版社, 1995: 27-29, 31-33.

[9] 梁俊,王琪,刘坤良. 基于随机中点位移法的三维地形模拟 [J]. 计算机仿真, 2005, 22(1): 213-215, 223.

[10] 王琰,宋志刚,苑勋. 中点偏移算法构建分形山的病态值分析及解决 [J]. 小型微型计算机系统, 2001, 22(6): 763-765.

[11] 李耀辉,周丽莉. 虚拟现实三维仿真地形的生成 [J]. 微型计算机信息, 2006, 22(4-1): 280-282.

[12] 刘丹,徐钢. 计算机辅助几何设计中的剖分匹配 FBM 算法 [J]. 系统仿真学报, 2001, 13(5): 605-607.

[13] 于子凡,林宗坚. 基于图像表面积的分形布朗运动分形维数法研究 [J]. 武汉大学学报, 2005, 30(2): 161-165.

(责任编辑:王桂萍)