La suite de Syracuse

Sommaire:

1. Introduction
2. Enonce et hypothèse
3. Exemples de la suite de Syracuse
4. Origine de la suite de Syracuse
5. Y a-t-il un cycle non-trivial?
6. Argument probabiliste pour la non-divergence
7. Conclusion

1. Introduction:

- La conjecture de syracuse est un problème arithmétique.
- Arithmétique: partie des mathématiques traitant des calculs.
- La conjecture de Syracuse n’a pas été prouvée par les mathématiciens.
- Une prépublication, par Gerhard Opfer, annonçait sa démonstration mais une faille a été trouvée (en 2011) par Gerhard Opfer.

2. Enoncé et hypothèse:

On prend un nombre positif:

- S‘il est pair on le divise par 2
- S‘il est impair on le multiplie par 3 et on ajoute 1

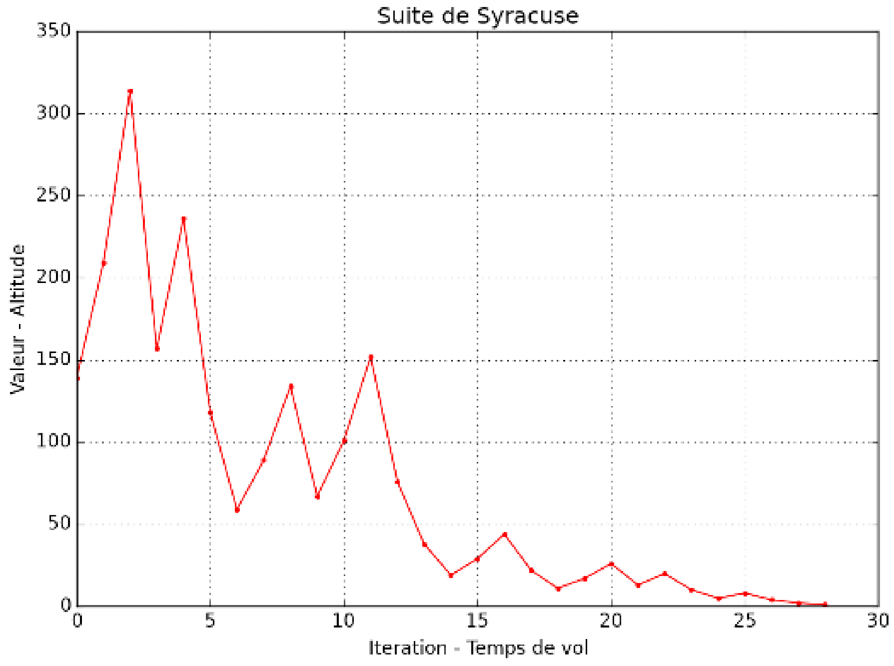
On obtient ainsi un nouveau nombre avec lequel on répète la même procédure jusqu‘a obtenir une séquence de nombres qui se termine par 1.

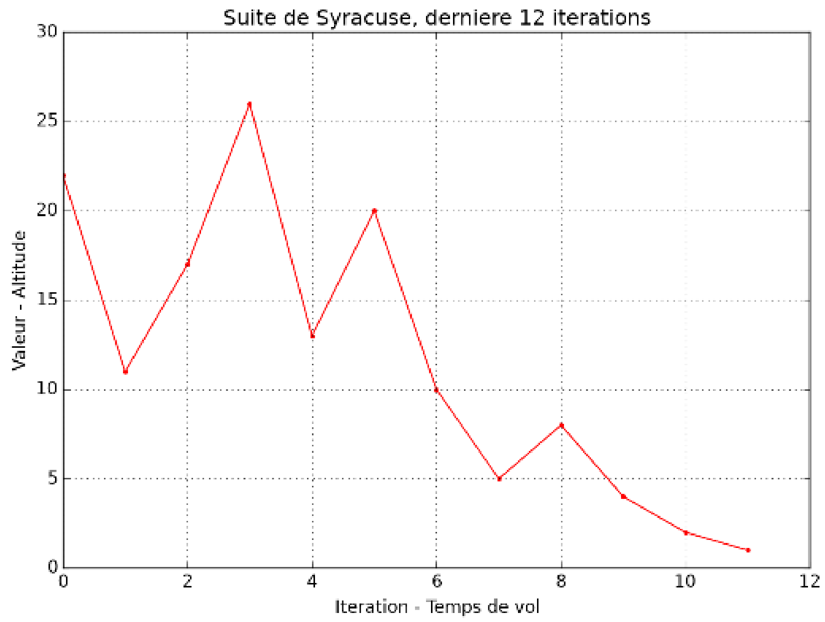
L‘hypothèse de la suite de Syracuse est que peu importe le nombre, on termine toujours par 4, 2, 1, le cycle trivial, qui ce répète éternellement.

Démonstration du cycle trivial: 1 est impair, donc $1 * 3 + 1 = 4$

4 est pair, donc $4/2 = 2$, 2 est pair, donc $2/2 = 1$. On retrouve 1, donc le cycle se répète.

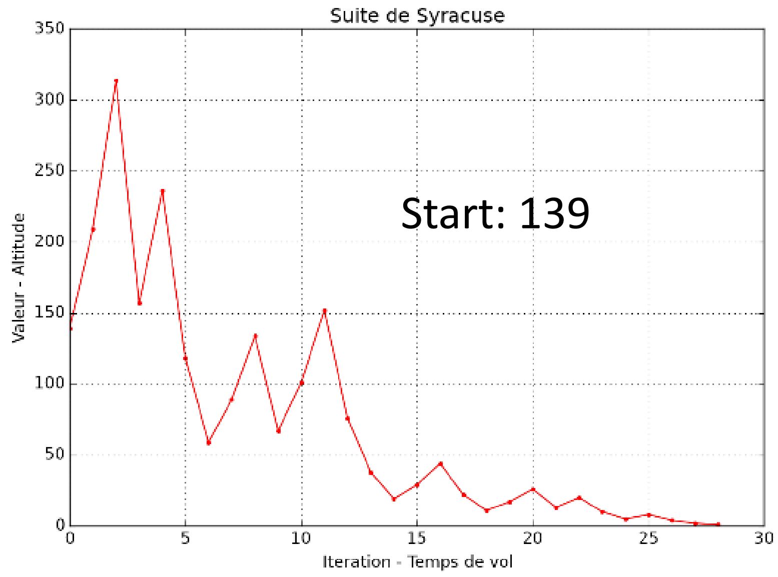
3. Exemple de la Suite de Syracuse:

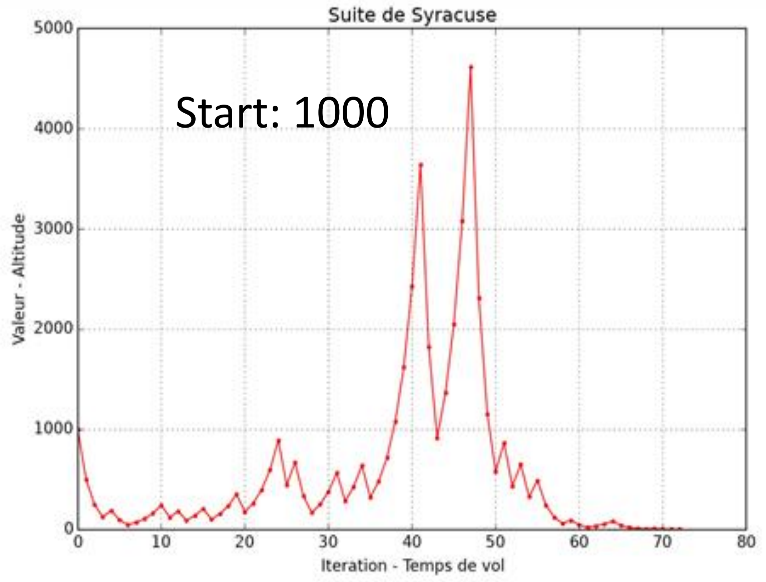


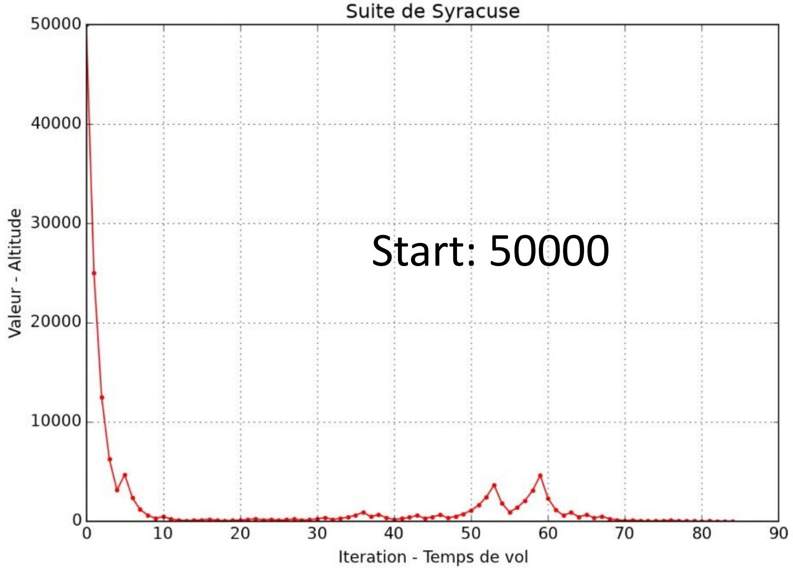


Voici le graphique complet et le graphique des dernières 12 itérations représentant la suite de Syracuse pour 139, le temps de vol est de 28.

3. Exemples de la Suite de Syracuse:







Les dernières 8 iterations

Start: 139:
13, 20, 10, 5, 8, 4, 2, 1.

Start: 1000:
40, 20, 10, 5, 8, 4, 2, 1.

Start: 50000:
40, 20, 10, 5, 8, 4, 2, 1.

Start: 27000000:
128, 32, 16, 5, 8, 4, 2, 1.

4. Origine de la suite de Syracuse:

- Cette conjecture est plutôt récente, elle date des années 1937.
- Le mathématicien allemand Lothar Collatz s'intéresse aux itérations dans les nombres entiers, il invente le problème 3x+1.
- 1952: il va à Hambourg et explique son problème à Helmut Hasse. A la suite de son exposé, à l'université de Syracuse à New York elle obtient son surnom le plus connu: La suite de Syracuse. Elle est aussi appelée conjecture de Collatz, problème 3x+1.
- années 1960: le problème repris par Shizuo Kakutani qui diffuse la conjecture dans les universités Yale et Chicago.
- Elle paraît simple mais pourtant cette conjecture défie depuis des années les mathématiciens. Paul Erdos dit à propos de la conjecture: ***« Les mathématiciens ne sont pas prêts pour de tels problèmes ».***

5. Y a-t-il un cycle non-trivial?

Si la conjecture est vraie, peu importe le nombre on termine avec 4, 2, 1, le cycle trivial. Pour prouver qu’elle est fausse il faut trouver un contre-exemple. Soit:

- Une séquence qui diverge a l’infini
- Une séquence qui se fini avec un cycle autre que le cycle trivial.
- La conjecture a déjà été vérifiée numériquement jusqu’à 10^20. Pour trouver un contre-exemple il faut donc prendre un nombre plus grand.

Pour prouver qu’elle est vraie il suffit de prouver:

- que la séquence ne diverge jamais a l’infini
- Il n’existe pas d’autres cycles à part le cycle trivial.

Pour l‘instant il n‘existe pas de cycle non-trivial.

6. Argument probabiliste pour la non-divergence:

On peut essayer de se convaincre qu‘une divergence a l‘infini est peu probable en utilisant l‘argument probabiliste. Un nombre impair fois 3 plus 1 est toujours égale a un nombre pair qui se divise par 2.

- Si N pair => N/2
- Si N impair => (N*3+1)/2

La moitie des nombres naturels et pair et l‘autre impair, donc la probabilité de diviser par 2 est égale a la probabilité de l‘opération (*3+1)/2. Alors l‘opération moyenne est:

$\frac{1}{2}(N*3/2 + 1/2) = N*3/4 + 1/4.$

- Pour N = 1, c‘est égale a 1. Ca correspond au cycle trivial.
- Pour N >1, c‘est plus petit que 1.

C‘est pour cette raison qu‘on pense que la suite ne diverge pas, mais ce n‘est pas une démonstration.

7. Conclusion:

La suite de Syracuse

- Apparemment très simple
- Cependant, elle n’est pas prouvée par les mathématiciens.