Université Assane SECK de Ziguinchor

Unité de Formation et de Recherche des Sciences et Technologies

Département d'Informatique

Le problème du mariage stable

Licence d'informatique

Avril 2021

ydieng@univ-zig.sn

1 - Introduction

Le facteur humain est devenu incontournable aujourd'hui dans les organisations et dans les systèmes de production de bien et service [3]. L'homme est une composante décisionnelle essentielle qui a une grande influence sur la productivité des entreprises. C'est dans ce sens que des problématiques de gestion et d'affectation de ressources humaines intéressent de plus en plus les chercheurs. Cette problématique, couvre en réalité un ensemble de problèmes qui varient en fonction de l'objectif d'optimisation, des contraintes prises en compte. Dans les problèmes d'affectation, l'objectifs visé est de maximiser une quantité globale.

Dans ce chapitre, nous mettons l'accent plus particulièrement sur le problème de mariage stable. Cette problématique cadre mieux avec de nombreuses situations, telles que la création de binômes, où on veut maximiser dans une certaine mesure une quantité locale (la satisfaction de chaque binôme). Même si, de manière générale, une satisfaction optimale de tout le monde est impossible, on a des notions qui s'en approchent, issues de l'économie ou de la théorie des jeux.

1.1 - Le problème du mariage stable

Le concept de ***mariage stable*** a été imaginé en 1962 par Gale et Shapley [1]. Shapley a obtenu le prix Nobel d'économie en 2012 pour ses travaux sur ce sujet. Les bénéfices tirés de ces résultats sont exploités dans de nombreux domaines : affectations d'internes dans des services hospitaliers, aux attributions de bourses, aux acceptations d'élèves dans les écoles préparatoires, etc.

Imaginons une situation où on a **m** filles et **n** garçons pour lesquels on veut former des mariages. Chaque fille accepterait éventuellement de se marier avec certains garçons, et elle a un ordre total de préférence sur ces garçons. De même, chaque garçon accepterait éventuellement de se marier avec certaines filles et a un ordre de préférence total sur ces filles.

Pour illustration, ci-dessous, on a un exemple de tableaux de préférences masculines et féminines, pour un groupe de 5 filles et 5 garçons. Le type de mariage souhaité est monogame c'est-à-dire, chaque homme est marié à une et une seule femme et chaque femme mariée à un et un seul homme.

	1er choix	2ème choix	3ème choix
Dame	Bintou	Khady	Amy
Yoro	Khady	Bintou	Amy
Zal	Khady	Bintou	Amy

Préférences Masculines

	1er choix	2ème choix	3ème choix
Amy	Dame	Zal	Yoro
Khady	Zal	Dame	Yoro
Bintou	Dame	Zal	Yoro

Préférences féminines

1.2 - Problème de couplage

Un couplage (Matching) C d'un graphe simple G=(V,E) est un sous ensemble d'arêtes de E, deux à deux sans sommet commun. Un sommet x est dit **saturé** par C s'il est extrémité d'une arête de C. Sinon, il est dit **libre** ou **insaturé**. Un **couplage parfait** sature tous les sommets de V : ceci implique d'il est de cardinal maximal et que |X|=N est pair. Un couplage maximal de G est un couplage de cardinal maximal. Si les arêtes sont munies de coûts, on peut aussi chercher de couplages de coût minimal ou maximal, de cardinal imposé ou maximal. Le terme de problème d'affectation désigne la recherche d'un couplage maximal, de cout minimal ou maximal, dans un graphe biparti. Le problème du mariage stable peut être modélisé, par un graphe biparti, de la manière suivante :

- les filles et les garçons forment les sommets d'un graphe biparti G = (V, E) ;
- il y a une arête entre un sommet fille **x** et un sommet garçon **y** si **x** ou **y** accepteraient éventuellement un mariage (**x, y**).

Un ensemble de mariages sera représenté par un couplage dans G. Un tel couplage M est dit stable si la condition suivante est satisfaite pour toute arête **(u,v)** de G :

- Si une fille **u** et un garçon **v** ne sont pas mariés ensemble (c'est-à-dire **(u,v)** n'est pas dans M) alors que **u** et **v** seraient prêts éventuellement à être en couple, c'est que l'un des deux (**u** ou **v**) est marié avec quelqu'un, disons **w**, qu'il préfère. C'est une notion tout à fait naturelle de stabilité : un tel coulage est dit stable, et il ne conduira pas à des réarrangements locaux.

2 - Solution

Le modèle utilisé pour résoudre ce problème est le graphe biparti. On parle de stabilité d'un couplage M si aucun couple de participants n'est incité à bouleverser l'affectation par une action concertée. Dans l'attribution M, un couple non marié **m-w** est dit **instable** si l'homme **m** et la femme **w** se préfèrent à leurs partenaires courants. Chaque membre d'un couple instable **m-w** peut améliorer son sort (en bouleversant l'affectation courante). On a besoins du théorème suivant, la preuve est simple et algorithmique.

Théorème 2.1. *(*Gale et Shapley [9]) *Il existe toujours un couplage stable dans un graphe biparti. De plus, un tel couplage se trouve en O(nm).*

Démonstration. Tous les matins, chaque garçon invite à dîner la fille qu'il préfère parmi celles qui ne lui ont pas déjà refusé une invitation. Chaque fille qui a été invitée dîne le soir avec le garçon qu'elle préfère parmi ceux qui l'ont invitée ce jour là, à condition bien sûr qu'elle accepterait éventuellement de se marier avec lui. Tout garçon qui a vu son invitation refusée par une fille décide de ne plus jamais l'inviter. L'algorithme se poursuit tant qu'au moins une invitation change. Les couples qui ont dîné entre eux le dernier soir sont mariés.

2.1 - Algorithme de Gale-Shapley

```
Initialisation : tout le monde est libre.
Tant que (un homme est libre et n’a pas demandé toutes les femmes)
{
    Choisir un tel homme m
    w := 1re femme sur le liste de m que m n’a pas encore demandée
    si (w est libre)
        alors apparier m et w
    sinon si (w préfère m à son partenaire courant m')
              alors apparier m et w, et libérer m'
          sinon
              w rejette m
}
```

2.2 - Correction de l’algorithme

Pour se convaincre que cet algorithme fournit un couplage stable, il faut d'abord remarquer que toute fille qui est invitée un soir à dîner est sûre de dîner le lendemain avec un garçon qui lui plaise au moins autant.

En effet, si une fille, disons Awa, est invitée à dîner par un garçon, disons Dame, c'est que Dame préfère Awa à toutes celles qui ne l'ont pas déjà refusé. Awa est donc sûre d'être réinvitée le lendemain par Dame, mais elle sera peut-être aussi invitée par de nouveaux garçons qui viennent d'essuyer des refus et pour qui elle est désormais le meilleur choix restant. Peut-être que Zal, l'un de ces nouveaux garçons, lui plait plus que Dame, dans ce cas elle dînera avec Zal, en congédiant Dame. Dans tous les cas, Awa dîne le lendemain avec un garçons au moins aussi plaisant.

2.3 - Terminaisons de l’algorithme

Montrons que l'algorithme se termine.

En effet, une invitation qui a été refusée ne sera jamais répétée. À chaque étape précédant la fin de l'algorithme, au moins une invitation est refusée. Le nombre d'étapes avant que la liste des invitations ne se stabilise est donc borné par le nombre d'invitations possibles, i.e. par le nombre de filles fois le nombre de garçons.

Lemme 2.3. *Lorsque l'algorithme se termine, les mariages fournissent un couplage stable.*

Preuve.

Démonstration. Considérons le mariage obtenu à l'issue de l'algorithme.

1. Supposons qu'Awa et Dame ne sont pas mariés ensemble et qu'Awa préfère Dame à son mari actuel. Cela implique que Dame ne l'a jamais invitée car sinon, en vertu de la remarque ci-dessus, son mari serait forcément mieux que Dame. Si Dame ne l'a jamais invitée, c'est qu'il est marié à une fille qu'il préfère à Awa.
2. Supposons qu'Awa et Dame ne sont pas mariés ensemble et que Dame préfère Awa à sa femme actuelle. Comme Dame fait ses invitations dans l'ordre décroissant de ses préférences, c'est qu'Awa a refusé une invitation de sa part, et donc qu'Awa, ce matin-là et les suivants, a reçu des invitations plus intéressantes de son point de vue.

Dans tous les cas, si Awa et Dame ne sont pas mariés ensemble, c'est que l'un des deux est mariés à quelqu'un qu'il préfère. L'ensemble des mariages est donc stable.

3 - Exemple

Imaginons que le ministère de l'éducation souhaite recruter des profs de mathématique (p1, p2, p3, p4, p5) pour un ensemble de 5 lycées (L1, L2, L3, L4, L5) du Sénégal. Pour les affectations de ces profs, on demande à chaque prof de classer les lycées par ordre de préférence. On demande aussi aux proviseurs des lycée de faire un classement des profs par ordre de préférence. Nous avons ci-dessous une proposition d'affectation. La question posée est de savoir si elle est stable ? Appliquer l'algorithme sur cet exemple ?

p1	p2	p3	p4	p5	L1
p3	p2	p4	p1	p5	L2
p2	p1	p5	p4	p3	L3
p5	p1	p2	p3	p4	L4
p3	p2	p4	p1	p5	L5

p1	L1	L3	L4	L2	L5
p2	L5	L1	L3	L2	L4
p3	L5	L3	L1	L2	L4
p4	L2	L4	L3	L5	L1
p5	L3	L1	L5	L2	L4

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. Gale and L.S. Shapley, College admissions and the stability of marriage, American Mathematical Monthly (1962), 9 - 15.

[2] Frédéric Meunier, Introduction à la recherche opérationnelle, https://educnet.enpc.fr/file.php/297/CoursROPonts.pdf, (consulté le 21 mars 2022)

[3] Bouajaja, Sana and Dridi, Najoua, RESOLUTION DU PROBLEME D'AFFECTATION DES RESSOURCES HUMAINES AUX LIGNES D'ASSEMBLAGE, year = 2014, 10ème Conférence Francophone de Modélisation, Optimisation et Simulation, Nov 2014, Nancy, France, hal-01166592