Corrigé Exercice 1 : NUMERATION.

Question 1 : *Exprimer en binaire le nombre décimal $965_{(10)}$, le nombre octal $607_{(8)}$ et le nombre hexadécimal $A8B_{(16)}$.*

$965_{(10)} = 1111000101_{(2)}$ en divisant par 2, par 2, …
$607_{(8)} = 110\ \ 000\ \ 111_{(2)} = 110000111_{(2)}$
$A8B_{(16)} = 1010\ \ 1000\ \ 1011_{(2)} = 101010001011_{(2)}$

Question 2 : *Exprimer en octal le nombre binaire $10111010_{(2)}$, le nombre décimal $1157_{(10)}$ et le nombre hexadécimal $F1F_{(16)}$.*

$10111010_{(2)} = 010\ \ 111\ \ 010_{(8)} = 272_{(8)}$
$1157_{(10)} = 2205_{(8)}$ en divisant par 8, par 8, …
$F1F_{(16)} = 1111\ \ 0001\ \ 1111_{(2)} = 111\ \ 100\ \ 011\ \ 111_{(2)} = 7437_{(8)}$

Question 3 : *Exprimer en hexadécimal le nombre binaire $10110110011101_{(2)}$, le nombre octal $7106_{(8)}$ et le nombre décimal $3589_{(10)}$.*

$10110110011101_{(2)} = 0010\ \ 1101\ \ 1001\ \ 1101_{(2)} = 2D9D_{(16)}$
$7106_{(8)} = 111\ \ 001\ \ 000\ \ 110_{(2)} = 1110\ \ 0100\ \ 0110_{(2)} = E46_{(16)}$
$3589_{(10)} = E05_{(16)}$ en divisant par 16, par 16, …

Question 4 : *Exprimer en décimal le nombre binaire $10010111_{(2)}$, le nombre octal $146_{(8)}$ et le nombre hexadécimal $C0E_{(16)}$.*

$10010111_{(2)} = 1\times2^7 + 1\times2^4 + 1\times2^2 + 1\times2^1 + 1\times2^0 = 128 + 16 + 4 + 2 + 1 = 151_{(10)}$
$146_{(8)} = 1\times8^2 + 4\times8^1 + 6\times8^0 = 64 + 32 + 6 = 102_{(10)}$
$C0E_{(16)} = C\times16^2 + 0\times16^1 + E\times16^0 = 12\times16^2 + 0\times16^1 + 14\times16^0 = 3072 + 0 + 14 = 3086_{(10)}$

Corrigé Exercice 2 : CODAGE.

Question 1 : *Coder les 3 nombres décimaux $31_{(10)}$, $32_{(10)}$ et $33_{(10)}$ en code BCD, en code binaire réfléchi, puis vérifier qu'un seul bit du codage change lorsqu'on passe de l'un à l'autre dans cet ordre.*

$31_{(10)} = 0011\ \ 0001_{(BCD)} = 10000_{(BR)}$
$32_{(10)} = 0011\ \ 0010_{(BCD)} = 110000_{(BR)}$
$33_{(10)} = 0011\ \ 0011_{(BCD)} = 110001_{(BR)}$

					0	0	0	0
					0	0	1	1
					0	1	1	2
					0	1	0	3
					1	1	0	
					1	1	1	
					1	0	1	
				0	1	0	0	7
				1	1	0	0	8
			0	1	0	0	0	15
			1	1	0	0	0	16
		0	1	0	0	0	0	31
		1	1	0	0	0	0	32
		1	1	0	0	0	1	33
	0	1	0	0	0	0	0	63
	1	1	0	0	0	0	0	64
0	1	0	0	0	0	0	0	127
1	1	0	0	0	0	0	0	128
128	64	32	16	8	4	2	1	

Corrigé Exercice 3 : CAPTEUR DE POSITION ANGULAIRE.

(Selon le concours ICARE 1998 filière PSI)

Fonctionnement des codeurs.

Question 1 : *Donner la résolution (plus petite grandeur mesurable) de ces capteurs (codeur sur 4 bits) en points/tour.*
Quelle aurait été la résolution si les codeurs codaient sur 12 bits.

$2^4 = 16$ points/tour $\Rightarrow 16$ points $/ 360° = 1$ point$/ 22{,}5°$

$2^{12} = 4096$ points/tour $\Rightarrow 4096$ points $/ 360° = 1$ point$/ 0{,}09°$

Question 2 : *Quels sont les avantages et inconvénients des 2 codeurs.*

En utilisant un codeur en Binaire Naturel, nous n'avons pas besoin de transcodeur. L'information issue du codeur est utilisable directement par la partie commande.
En revanche, en utilisant un codeur en Binaire Réfléchi, nous avons besoin d'un transcodeur pour convertir le code Gray en code Binaire Naturel exploitable par la partie commande.
Mais le codeur en Binaire Réfléchi, permet d'éviter toutes confusions de codes lors du passage d'une position à une autre, adjacente (voir cours).

Question 3 : *Si N est l'image numérique de la position du plateau, quel est le gain* $B = \dfrac{N}{\theta}$ *de ce codeur si θ est en radian ?*

$\theta \to N$
$2\pi \to 16$ donc $N = \dfrac{16.\theta}{2\pi}$ et $B = \dfrac{16}{2\pi}$

Fonctionnement du transcodeur 4 bits vers 4 bits (binaire réfléchi $\rightarrow$ binaire naturel).

Question 4 : *Réaliser la table de vérité de ce transcodeur.*

g_4	g_3	g_2	g_1	b_4	b_3	b_2	b_1
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	1	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1	1	0
0	1	0	0	0	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	0	0	1
1	1	1	1	1	0	1	0
1	1	1	0	1	0	1	1
1	0	1	0	1	1	0	0
1	0	1	1	1	1	0	1
1	0	0	1	1	1	1	0
1	0	0	0	1	1	1	1

Cette table sert à déterminer les équations de passage d'un code à l'autre.
g_4 et b_4 sont les bits de poids forts.

Question 5 : *Déterminer les fonctions combinatoires donnant les sorties* b_i *en fonction des entrées* g_i *à l'aide de tableaux de Karnaugh. Commencer par b_4, puis b_3, b_2 et b_1.*

b_4 (colonnes : g_2, g_1 ; lignes : g_4, g_3)

0	0	0	0
1	1	1	1
1	1	1	1
0	0	0	0

$$b_4 = g_4$$

b_3 (colonnes : g_2, g_1 ; lignes : g_4, g_3)

0	0	0	0
1	1	1	1
0	0	0	0
1	1	1	1

$$b_3 = g_3.\overline{g_4} + \overline{g_3}.g_4$$

b_2 (colonnes : g_2, g_1 ; lignes : g_4, g_3)

0	1	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1

b_1 (colonnes : g_2, g_1 ; lignes : g_4, g_3)

0	1	0	1
1	0	1	0
0	1	0	1
1	0	1	0

$$b_2 = g_2.\overline{g_3}.\overline{g_4} + g_2.g_3.g_4 + \overline{g_2}.g_3.\overline{g_4} + \overline{g_2}.\overline{g_3}.g_4$$

$$b_1 = g_1.\overline{g_2}.\overline{g_3}.\overline{g_4} + \overline{g_1}.g_2.\overline{g_3}.\overline{g_4} + \overline{g_1}.\overline{g_2}.g_3.\overline{g_4} + g_1.g_2.g_3.\overline{g_4} + g_1.\overline{g_2}.g_3.g_4 + \overline{g_1}.g_2.g_3.g_4 + \overline{g_1}.\overline{g_2}.\overline{g_3}.g_4 + g_1.g_2.\overline{g_3}.g_4$$

Question 6 : *Réécrire les expressions de b_3, b_2 et b_1 avec seulement des opérateurs OU EXCLUSIF.*

$$\mathbf{b_4 = g_4}$$

$$b_3 = g_3.\overline{g_4} + \overline{g_3}.g_4$$

$$\mathbf{b_3 = g_3 \oplus g_4}$$

$$b_2 = g_2.\overline{g_3}.\overline{g_4} + g_2.g_3.g_4 + \overline{g_2}.g_3.\overline{g_4} + \overline{g_2}.\overline{g_3}.g_4 = g_2.\overline{(g_3 \oplus g_4)} + \overline{g_2}.(g_3 \oplus g_4)$$

$$\mathbf{b_2 = g_2 \oplus g_3 \oplus g_4}$$

$$b_1 = g_1.\overline{g_2}.\overline{g_3}.\overline{g_4} + \overline{g_1}.g_2.\overline{g_3}.\overline{g_4} + \overline{g_1}.\overline{g_2}.g_3.\overline{g_4} + g_1.g_2.g_3.\overline{g_4} + g_1.\overline{g_2}.g_3.g_4 + \overline{g_1}.g_2.g_3.g_4 + \overline{g_1}.\overline{g_2}.\overline{g_3}.g_4 + g_1.g_2.\overline{g_3}.g_4$$

$$b_1 = (g_1.\overline{g_2} + \overline{g_1}.g_2).\overline{g_3}.\overline{g_4} + (\overline{g_1}.\overline{g_2} + g_1.g_2).g_3.\overline{g_4} + (g_1.\overline{g_2} + \overline{g_1}.g_2).g_3.g_4 + (\overline{g_1}.\overline{g_2} + g_1.g_2).\overline{g_3}.g_4$$

$$b_1 = (g_1 \oplus g_2).\overline{g_3}.\overline{g_4} + \overline{(g_1 \oplus g_2)}.g_3.\overline{g_4} + (g_1 \oplus g_2).g_3.g_4 + \overline{(g_1 \oplus g_2)}.\overline{g_3}.g_4$$

$$b_1 = (g_1 \oplus g_2).(\overline{g_3}.\overline{g_4} + g_3.g_4) + \overline{(g_1 \oplus g_2)}.(g_3.\overline{g_4} + \overline{g_3}.g_4)$$

$$b_1 = (g_1 \oplus g_2).\overline{(g_3 \oplus g_4)} + \overline{(g_1 \oplus g_2)}.(g_3 \oplus g_4)$$

$$\mathbf{b_1 = g_1 \oplus g_2 \oplus g_3 \oplus g_4}$$

Question 7 : *Dans le cas général, pour un transcodeur à n bits, déduire le $i^{ème}$ bit naturel* b_i *en fonction des* g_i.

$$\boxed{b_i = g_i \oplus g_{i+1} \oplus ... \oplus g_n \quad \text{pour } 0 < i \leq n-1 \qquad \text{et} \qquad b_n = g_n}$$

Corrigé Exercice 4 : TRANSCODEUR (BINAIRE NATUREL → BINAIRE REFLECHI).

Question 1 : *Déterminer les fonctions combinatoires donnant les sorties* g_i *en fonction des entrées* b_i *à l'aide de tableaux de Karnaugh. Commencer par* g_1*, puis* g_2*,* g_3 *et* g_4*.*

g_1 — b_2, b_1 ; b_4, b_3

0	1	0	1
0	1	0	1
0	1	0	1
0	1	0	1

$$g_1 = b_1.\overline{b_2} + \overline{b_1}.b_2$$

g_2 — b_2, b_1 ; b_4, b_3

0	1	1	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	0	1

$$g_2 = b_2.\overline{b_3} + \overline{b_2}.b_3$$

g_3 — b_2, b_1 ; b_4, b_3

0	0	0	0
1	1	1	1
0	0	0	0
1	1	1	1

$$g_3 = b_3.\overline{b_4} + \overline{b_3}.b_4$$

g_4 — b_2, b_1 ; b_4, b_3

0	0	0	0
1	1	1	1
1	1	1	1
0	0	0	0

$$g_4 = b_4$$

Question 2 : *Réécrire les expressions de* g_1*,* g_2 *et* g_3 *avec seulement des opérateurs OU EXCLUSIF.*

$g_1 = b_1 \oplus b_2$
$g_2 = b_2 \oplus b_3$
$g_3 = b_3 \oplus b_4$
$g_4 = b_4$

Question 3 : *Dans le cas général, pour un transcodeur à n bits, déduire le* $i^{ème}$ *bit réfléchi* g_i *en fonction des* b_i*.*

$\boxed{g_i = b_i \oplus b_{i+1} \quad \text{pour } 0 < i \leq n-1 \qquad \text{et} \qquad g_n = b_n}$

Corrigé Exercice 5 : IDENTIFICATION DE PIECES.

(Selon le concours X 2001 filière MP)

Question 1 : *Compléter les codes des chiffres de 1 à 9 dans le tableau ci-dessous (6 premières colonnes). En déduire le code du chiffre 0 en justifiant son unicité. Déterminer le nombre décimal correspondant au code de la figure ci-dessus.*

Commencer par remplir les colonnes abcd dans le tableau : 1→1000, 2→0100, 3→1100, 4→0010, 5→1010, 6→0110, 7→0001, 8→1001 et 9→0101.
La colonne e se trouve aisément pour que dans abcde il y ait toujours deux 1.

Pour les valeurs abcd de la ligne 0, il reste les combinaisons inutilisées 0000, 1101, 0011, 1011, 0111, 1110 et 1111. Parmi ces combinaisons, la seule qui permet d'avoir deux 1 en ajoutant e est la combinaison 0011 (avec e = 0).

Poids	1	2	4	7	0	$2^3=8$	$2^2=4$	$2^1=2$	$2^0=1$
	a	b	c	d	e	s_3	s_2	s_1	s_0
0	0	0	1	1	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	1	0	0	0	1
2	0	1	0	0	1	0	0	1	0
3	1	1	0	0	0	0	0	1	1
4	0	0	1	0	1	0	1	0	0
5	1	0	1	0	0	0	1	0	1
6	0	1	1	0	0	0	1	1	0
7	0	0	0	1	1	0	1	1	1
8	1	0	0	1	0	1	0	0	0
9	0	1	0	1	0	1	0	0	1

Déchiffrons le code à barres de la pièce, on lit :
C3 = 00110 → 0
C2 = 10001 → 1
C1 = 10100 → 5
C0 = 01100 → 6
Le numéro de la pièce est donc 0156.

Question 2 : *Compléter la table de vérité des sorties* s_i. *En déduire les équations simplifiées des sorties s3, s2, s1 et s0 en fonction des entrées a, b, c, d et e ci-dessus.*

La partie droite du tableau ci-dessus est évidente, ce qui donne les tableaux de Karnaugh suivants :

S_3

de \ abc	000	001	011	010	110	111	101	100
00	Φ	Φ	0	Φ	0	Φ	0	Φ
01	Φ	0	Φ	0	Φ	Φ	Φ	0
11	0	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ
10	Φ	0	Φ	1	Φ	Φ	Φ	1

$$s_3 = d.(a+b)$$

S_2

de \ abc	000	001	011	010	110	111	101	100
00	Φ	Φ	1	Φ	0	Φ	1	Φ
01	Φ	1	Φ	0	Φ	Φ	Φ	0
11	1	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ
10	Φ	0	Φ	0	Φ	Φ	Φ	0

$$s_2 = d.e + c\overline{d}$$

S_1

de \ abc	000	001	011	010	110	111	101	100
00	Φ	Φ	1	Φ	1	Φ	0	Φ
01	Φ	0	Φ	1	Φ	Φ	Φ	0
11	1	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ
10	Φ	0	Φ	0	Φ	Φ	Φ	0

$$s_1 = d.e + b.\overline{d}$$

S_0

de \ abc	000	001	011	010	110	111	101	100
00	Φ	Φ	0	Φ	1	Φ	1	Φ
01	Φ	0	Φ	0	Φ	Φ	Φ	1
11	1	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ
10	Φ	0	Φ	1	Φ	Φ	Φ	0

S_0

de \ abc	000	001	011	010	110	111	101	100
00	Φ	Φ	0	Φ	1	Φ	1	Φ
01	Φ	0	Φ	0	Φ	Φ	Φ	1
11	1	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ
10	Φ	0	Φ	1	Φ	Φ	Φ	0

Il y a plusieurs solutions pour s_0 :
ci-dessus : $s_0 = d.e + a.\overline{d} + b.d$
ou à gauche : $s_0 = a.\overline{d} + \overline{a}.\overline{c}.d$
……

NB : Si vous ne comprenez pas les tableaux de Karnaugh à 5 variables d'entrée, utilisez l'algèbre de Boole.