MATHÉMATIQUES DISCRÈTES 1

Devoir

Durée : 2h
Les imprimés des chapitres 1, 2 et 3 du cours sont autorisés.

Exercice 1. (5 points) Pour deux ensembles A et B, on appelle différence symétrique, noté $A\Delta B$, l'ensemble défini par

$$A\Delta B = (A\cup B)\backslash(A\cap B).$$

Ainsi, $A\Delta B$ est constitué des éléments qui appartiennent soit à A, soit à B, mais pas aux deux.

1. Matérialiser sur un dessin $A\Delta B$.
2. Soit E un ensemble et $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$.
   a) Montrez que $A\Delta B = [A\cap(E\setminus B)]\cup[(E\setminus A)\cap B]$.
   b) Calculer $A\Delta A, A\Delta(E\setminus A), A\Delta E$ et $E\setminus(A\Delta B)$.
   c) Montrer que, si $A\Delta B = C$, alors $A\Delta C = B$ et $B\Delta C = A$.

Exercice 2. (5 points) Soit $(\mathcal{A}, +, ., ^{-})$ une algèbre de Boole. On considère la relation binaire, de symbole $<$, définie dans $\mathcal{A}$ par :

$$a < b \Longleftrightarrow a + b = b.$$

1. Montrer que $<$ est une relation d'ordre dans $\mathcal{A}$.
2. Montrer que $(a < b) \Longleftrightarrow a.b = a$.
3. Montrer que, $\forall (a, b, c) \in \mathcal{A}^3$, $b.c < a.b + \bar{a}.c$.
4. On définit la relation binaire $\subset$ par : $a \subset b$ si et seulement si $a.\bar{b} = 0$; montrer que c'est une relation d'ordre dans $\mathcal{A}$.

Problème. (10 points)

Partie A : Considérons l'application $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = xe^{-x}$.

1. Calculer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de l'application$f$.
2. Calculer la dérivée de l'application f.
3. Construire le tableau de variation de l'application f.
4. Construire soigneusement $\mathcal{C}_f$, la courbe représentative de l'application f.
5. L'application f est elle injective ? Justifier votre réponse à l'aide de $\mathcal{C}_f$.
6. L'application f est elle surjective ? Justifier votre réponse à l'aide de $\mathcal{C}_f$.
7. L'application f est elle bijective ? Justifier votre réponse.

DR. D.N. DIATTA (dndiatta@univ-zig.sn)

Partie B : On considère la relation binaire définie par :

$$x\mathcal{R}y \text{ si et seulement si } xe^y = ye^x.$$

1. Établir que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. En vous aidant de la première partie du problème, déterminer pour tout réel x le nombre d'éléments que contient $\mathcal{R}(x)$ la classe d'équivalence de x.

Une correction du devoir.

Exercice 1.

1. Matérialisation de $A\Delta B$.

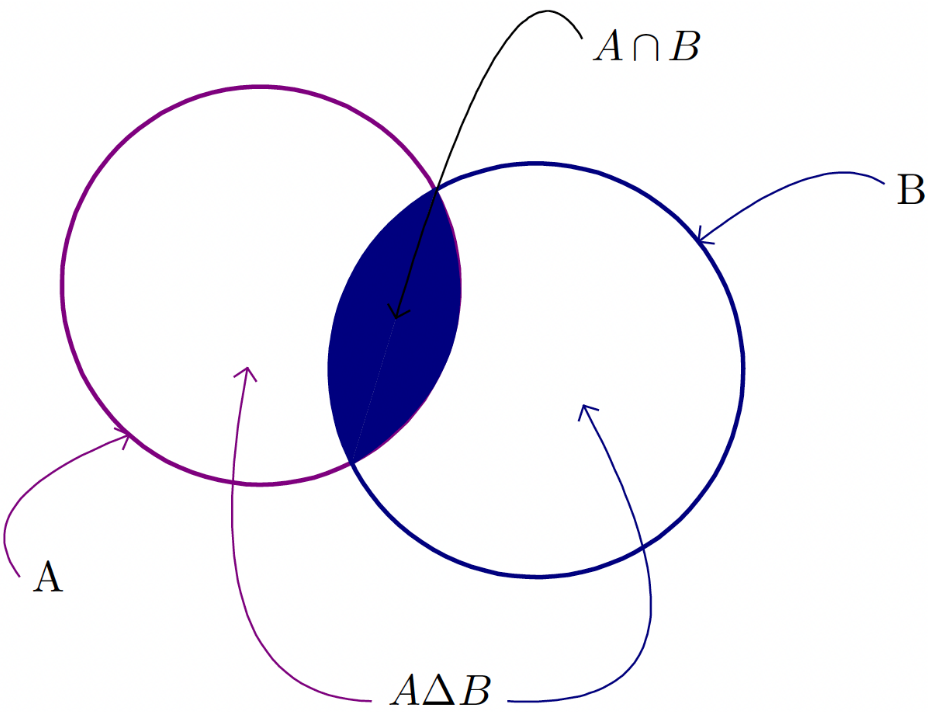

Figure 1.

2.

a) Montrons que $A\Delta B = [A\cap(E\setminus B)]\cup[(E\setminus A)\cap B]$.

$$A\Delta B = (A\cup B)\setminus(A\cap B)$$
$$A\Delta B = (A\cup B)\cap(\overline{A\cap B})$$
$$A\Delta B = (A\cup B)\cap(\bar{A}\cup\bar{B})$$
$$A\Delta B = ((A\cap\bar{A})\cup(A\cap\bar{B}))\cup((B\cap\bar{B})\cup(B\cap\bar{A}))$$
$$\text{Comme } A\cap\bar{A} = B\cap\bar{B} = \varnothing, \text{alors:}$$
$$A\Delta B = (A\cap\bar{B})\cup(B\cap\bar{A})$$
$$A\Delta B = [A\cap(E\setminus B)]\cup[(E\setminus A)\cap B].$$

b) Calculons $A\Delta A$, $A\Delta(E\setminus A)$, $A\Delta E$ et $E\setminus(A\Delta B)$.

$$A\Delta A=(A\cup A)\backslash(A\cap A)$$
$$A\Delta A=A\backslash A=\varnothing.$$

$$A\Delta(E\setminus A)=(A\cup(E\setminus A))\backslash(A\cap(E\setminus A))$$
$$A\Delta(E\setminus A)=E\backslash\varnothing=E$$

$$A\Delta E=(A\cup E)\backslash(A\cap E)$$
$$A\Delta E=E\backslash A$$
$$A\Delta E=\bar{A}$$

$$E\setminus(A\Delta B)=E\setminus([A\cap(E\setminus B)]\cup[(E\setminus A)\cap B])$$
$$E\setminus(A\Delta B)=\overline{(A\cap\bar{B})\cup\bar{A}\cap B}$$
$$E\setminus(A\Delta B)=\overline{(A\cap\bar{B})}\cap\overline{(\bar{A}\cap B)}$$
$$E\setminus(A\Delta B)=(\bar{A}\cup B)\cap(A\cup\bar{B})$$

c) Montrons que $(A\Delta B=C)\Longrightarrow((A\Delta C)=B)\wedge((B\Delta C)=A)$.
Supposons que $A\Delta B=C$.

$$A\Delta C=A\Delta(A\Delta B)$$
$$A\Delta C=(A\Delta A)\Delta B$$
$$A\Delta C=\varnothing\Delta B=B$$

car la différence symérique est associative et $\varnothing$ en est un élément neutre.

$$B\Delta C=B\Delta(A\Delta B)$$
$$B\Delta C=B\Delta(B\Delta A)$$
$$B\Delta C=(B\Delta B)\Delta A$$
$$B\Delta C=\varnothing\Delta A=A$$

car la différence symérique est commutative, associative et $\varnothing$ en est un élément neutre.

Exercice 2.

1. Montrons que $<$ est une relation d'ordre dans $\mathcal{A}$ c'est à dire qu'elle est réflexive, antisymétrique et transitive.
   - **Reflexivité.** Soit $a\in\mathcal{A}$. Comme $(\mathcal{A},+,.,^{-})$ est une algèbre de Boole, alors par la propriété d'idempotence on a : $a+a=a$, d'où $a<a$.
   - **Antisymétrie**. Soient $a,b\in\mathcal{A}/(a<b)\wedge(b<a)$. On a :

     $$(S_1)\begin{cases} a+b=b\\ b+a=a\end{cases}$$

     Par commutativité de l'addition dans une algèbre de Boole, on a : $(a+b)=(b+a)$. Ainsi (S) implique $a=b$.
   - **Transitivité.** Soient $a,b,c\in\mathcal{A}/(a<b)\wedge(b<c)$. On a :

     $$a+b=b \tag{1}$$

     $$b+c=c \tag{2}$$

Par l'équation (1) $b=a+b$. Remplaçant b par $a+b$ dans l'équation (2) on a :

$$a+b+c=c. \tag{3}$$

Par l'équation (2) $b+c=c$. Remplaçant c par $b+c$ dans l'équation (3), on a :

$$a+c=c \tag{4}$$

d'où $a<c$.

2. Montrons que $(a<b) \Longleftrightarrow a.b=a$.

   $\boldsymbol{(a<b) \Longrightarrow a.b=a.}$ Admettons que $a<b$. Ainsi $a+b=b$, d'où $a.(a+b)=a.b$. Comme $a.(a+b)=a.a+a.b=a+a.b$, alors $a+a.b=a.b$. Or $a+a.b=a$ par conséquent $a=a.b$.

   $\boldsymbol{a.b=a \Longrightarrow (a<b).}$ Admettons que $a.b=a$. Comme $a.b+b=b$, remplaçant $a.b$ par a dans cette expression, on a : $a+b=b$, d'où $a<b$.

3. Montrons que $\forall (a,b,c)\in \mathcal{A}^3$, $b.c<a.b+\bar{a}.c$. Soient $a,b,c\in\mathcal{A}$. $(b.c)(a.b+\bar{a}.c)=b.c.a.b+b.c.\bar{a}.c=b.c.a+b.c.\bar{a}$ car $b.b=b$ et $c.c=c$. Mettant en facteur $b.c$ dans cette dernière expression, on a : $(b.c)(a.b+\bar{a}.c)=b.c(a+\bar{a})=b.c$ car $a+\bar{a}=1$. Ainsi, $(b.c)(a.b+\bar{a}.c)=b.c$ d'où par l'équivalence démontrée en 2. on a :

$$b.c<a.b+\bar{a}.c. \tag{5}$$

4. Montrons que $\subset$ est une relation d'ordre dans $\mathcal{A}$ c'est à dire qu'elle est réflexive, antisymétrique et transitive.
   Reflexivité. Soit $a\in\mathcal{A}$. Comme $a.\bar{a}=0$ alors $a\subset a$.
   Antisymétrie. Soient $a,b\in\mathcal{A}/(a\subset b)\wedge(b\subset a)$. On a :

$$(S_2)\begin{cases} a.\bar{b}=0\\ b.\bar{a}=0\end{cases}$$

   Comme $a+\bar{a}.b=a+b$ et $b+\bar{b}a=b+a$, alors $a+\bar{a}.b=b+\bar{b}a$. Subsituant dans cette dernière expression les relations de (S_2), on a $a+0=b+0$, d'où $a=b$.
   Transitivité. Soient $a,b,c\in\mathcal{A}/(a\subset b)\wedge(b\subset c)$. On a :

$$a.\bar{b}=0 \tag{6}$$

$$b.\bar{c}=0 \tag{7}$$

   Comme $b+\bar{b}=1$, alors $a.\bar{c}.(b+\bar{b})=a.\bar{c}$. Or $a.\bar{c}.(b+\bar{b})=a.\bar{c}.b+a.\bar{c}.\bar{b}=a.(b.\bar{c})+\bar{c}.(a.\bar{b})=0$ car $a.\bar{b}=0$ et $b.\bar{c}=0$. Ainsi $a.\bar{c}=0$, d'où $a\subset c$.

Problème.

Partie A :

1. Calcul des limites de f.
   - En $-\infty$: $\lim_{x\longrightarrow-\infty}x=-\infty$ et $\lim_{x\longrightarrow-\infty}e^{-x}=+\infty$, donc $\lim_{x\longrightarrow-\infty}f(x)=-\infty$ par produit.
   - En $+\infty$: $\lim_{x\longrightarrow+\infty}x=+\infty$ et $\lim_{x\longrightarrow+\infty}e^{-x}=0$, donc $\lim_{x\longrightarrow+\infty}f(x)=0$ car la fonction exponentielle domine la fonction x.
2. Dérivée de la fonction f.
   Pour $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=e^{-x}-xe^{-x}=(1-x)e^{-x}$.
3. Tableau de variations de f.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $e^{-x} > 0$, $f'(x) \geqslant 0 \Longleftrightarrow (1-x) \geqslant 0 \Longleftrightarrow x \leqslant 1$. On a ainsi le tableau suivant :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

Figure 2.

4. Courbe représentative de f.

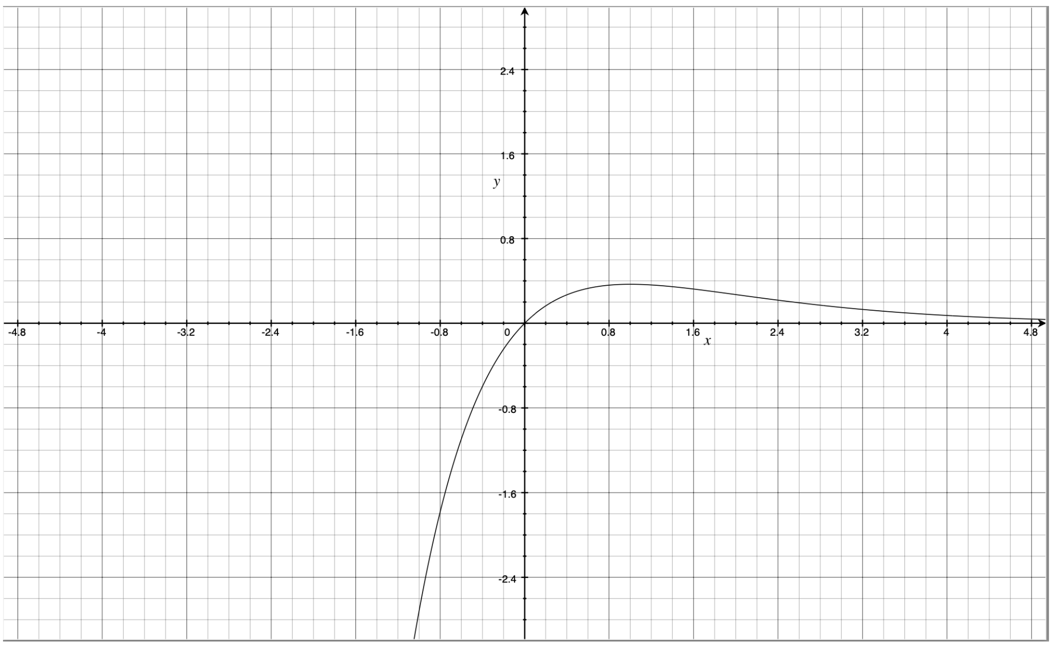

Figure 3.

5. L'application f n'est pas injective. Si f était injective, toute droite parallèle à l'axe des abscisses (donc d'equation $y=b$, $b \in \mathbb{R}$) couperait au plus une fois $\mathcal{C}_f$. Or les droites d'équation $y=b$, $b \in]0, e^{-1}[$ coupent deux fois $\mathcal{C}_f$.
6. L'application f n'est pas surjective. Si f était surjective, toute droite parallèle à l'axe des abscisses (donc d'equation $y=b$, $b \in \mathbb{R}$) couperait au mois une fois $\mathcal{C}_f$. Or les droites d'équation $y=b$, $b \in]e^{-1}, +\infty[$ ne coupent pas $\mathcal{C}_f$.

7. L'application f n'est pas bijective car elle n'est pas injective.

Partie B :

1. Montrons que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence c'est à dire qu'elle est réflexive, symetrique et transitive.

   Réflexivité. Soit $x \in \mathbb{R}$, comme $xe^x = xe^x$, alors $\mathcal{R}$ est réflexive.

   Symétrie. Soit x, $y \in \mathbb{R}$ tels que $x\mathcal{R}y$. On a : $xe^y = ye^x$. Par symétrie de l'égalité, on a $ye^x = xe^y$, d'où $y\mathcal{R}x$.

   Trasitivité. Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$. On a :

$$xe^y = ye^x \tag{8}$$

$$ye^z = ze^y \tag{9}$$

   De l'équation (8) on a :

$$xe^{-x} = ye^{-y}. \tag{10}$$

   De l'équation (9) on a :

$$ye^{-y} = ze^{-z}. \tag{11}$$

   Des équations (10) et (11) on déduit :

$$xe^{-x} = ze^{-z}, \tag{12}$$

   qui donne $xe^z = ze^x$, soit $x\mathcal{R}z$.

2. Nombre d'éléments de la classe de $x \in \mathbb{R}$.

   Soient x, $y \in \mathbb{R}$. $y \in \mathcal{R}(x)$ si et seulement si $x\mathcal{R}y$. Or $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $xe^y = ye^x$, soit $xe^{-x} = ye^{-y}$. Ainsi, $y \in \mathcal{R}(x)$ si et seulement si $f(y) = f(x)$. Autrement dit : $\mathcal{R}(x)$ a autant d'éléments qu'il y'a de points d'intersection entre $\mathcal{C}_f$ et la droite horizontale d'équation $y = f(x)$. Ainsi, à l'aide du $\mathcal{C}_f$, on conclut que :

   - Pour $x \in]-\infty, 0] \cup \{e^{-1}\}$, $\#\mathcal{R}(x) = 1$.
   - Pour $x \in]0, e^{-1}[\cup]e^{-1}, +\infty[$, $\#\mathcal{R}(x) = 2$.