MATHÉMATIQUES POUR L'INFORMATIQUE 1

Devoir

Durée : 2h

L'imprimé du chapitre 1 du cours est autorisé.

Exercice 1. (4 points) Construire les tables de vérité des formules propositionnelles suivantes :

1. $(P \Rightarrow Q) \vee (Q \Rightarrow P)$
2. $(P \Rightarrow \neg Q) \vee (Q \Rightarrow \neg P)$
3. $(P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q)$
4. $P \wedge (P \vee Q) \Longleftrightarrow P$

Exercice 2. (4 points) Calculer les fonctions de vérité des formules propositionnelles suivantes, et dire s'il s'agit éventuellement de tautologies ou d'antilogies :

1. $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg C) \Rightarrow (B \Rightarrow C)$
2. $(\neg A \vee B) \wedge (C \Rightarrow (A \Longleftrightarrow B))$
3. $A \wedge \neg A \Rightarrow (B \vee C \Rightarrow (C \Rightarrow \neg A))$
4. $(A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow D) \wedge (\neg C \vee \neg D) \Rightarrow \neg A \vee \neg B$

Exercice 3. (3 points) (Opérateurs de Peirce) On considère une algèbre de Boole quelconque $(\mathcal{A}, +, ., ^{-})$. On définit l'opération de Peirce par : $a \downarrow b = \bar{a}.\bar{b}$.

1. Exprimer $\bar{a}$, $a+b$, $a.b$ en n'utilisant que l'opérateur $\downarrow$.
2. Exprimer $a+\bar{b}$ en n'utilisant que l'opérateur $\downarrow$.
3. Étudier l'associativité de l'opérateur de Peirce.

Exercice 4. (5 points) En vous aidant du Théorème de validité et du calcul de fonctions de vérité, établir les résultats suivants :

1. $\models (P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \Leftrightarrow (P \wedge Q \Rightarrow R)$
2. $\models P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
3. $\models P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
4. $\{P \vee R, P \Rightarrow Q, R \Leftrightarrow S\} \models Q \vee S$
5. $\{P \wedge \neg S, Q \vee \neg R, S \Rightarrow R\} \models (P \Rightarrow Q) \vee (R \Rightarrow S)$.

Exercice 5. (4 points) Trois dirigeants d'une Société (Pathé, Manoumbé et Alioune) sont prévenus de malversations financières ; au cours de l'enquête, l'agent du fisc enregistre leurs déclarations :

– Pathé : "Manoumbé est coupable et Alioune est innocent".

– Manoumbé : “Si Pathé est coupable, Alioune l’est aussi”.

– Alioune. : “Je suis innocent, mais l’un au moins des deux autres est coupable”.

1. Ces trois témoignages sont-ils compatibles ?
2. En supposant qu’ils sont tous les trois innocents, lequel a menti ?
3. En supposant que chacun dit la vérité, qui est innocent et qui est coupable ?
4. En supposant que les innocents disent la vérité et que les coupables mentent, qui est innocent et qui est coupable ?

Une correction du devoir.

Exercice 1. Tables de vérité des formules propositionnelles suivantes :

1. $F_1 := (P \Rightarrow Q) \vee (Q \Rightarrow P)$:

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	F_1
V	V	V	V	V
F	F	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V

2. $F_2 := (P \Rightarrow \neg Q) \vee (Q \Rightarrow \neg P)$

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \Rightarrow \neg Q$	$Q \Rightarrow \neg P$	F_2
V	V	F	F	F	F	F
F	F	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	V	V
F	V	V	F	V	V	V

3. $F_3 := (P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q)$

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \vee \neg Q$	$\neg P \vee Q$	F_2
V	V	F	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	F	V	F

4. $F_4 := P \wedge (P \vee Q) \Longleftrightarrow P$. Par les règles de priorité des connecteurs logique on a : $F_4 = (P \wedge (P \vee Q)) \Longleftrightarrow P$.

P	Q	$P \vee Q$	$P \wedge (P \vee Q)$	F_4
V	V	V	V	V
F	F	F	F	V
V	F	V	V	V
F	V	V	F	V

Exercice 2. Fonctions de vérité de formules propositionnelles et leur caractère tautologique ou antilogique :

1. $F_1 := (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg C) \Rightarrow (B \Rightarrow C)$. Par les règles de priorité des connecteurs logiques, on a :

$$F_1 = ((A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg C)) \Rightarrow (B \Rightarrow C).$$

Ainsi :

$$\begin{gathered}
\Phi_{F_1} = \overline{\Phi_{(A\wedge B)\vee(\neg A\wedge\neg C)}} + \Phi_{B\Rightarrow C} \\
\Phi_{F_1} = \overline{\Phi_{A\wedge B} + \Phi_{\neg A\wedge\neg C}} + \overline{\Phi_B} + \Phi_C \\
\Phi_{F_1} = \overline{\Phi_A.\Phi_B + \Phi_{\neg A}.\Phi_{\neg C}} + \overline{\Phi_B} + \Phi_C \\
\Phi_{F_1} = \overline{\Phi_A.\Phi_B + \overline{\Phi_A}.\overline{\Phi_C}} + \overline{\Phi_B} + \Phi_C \\
\Phi_{F_1}(a,b,c) = \overline{a.b + \bar{a}.\bar{c}} + \bar{b} + c \\
\Phi_{F_1}(a,b,c) = \overline{a.b}.\overline{\bar{a}.\bar{c}} + \bar{b} + c \\
\Phi_{F_1}(a,b,c) = (\bar{a} + \bar{b}).(a + c) + \bar{b} + c \\
\Phi_{F_1}(a,b,c) = \bar{a}a + \bar{a}c + \bar{b}a + \bar{b}c + \bar{b} + c. \\
\text{Comme } \bar{a}a = 0, \bar{b}a + \bar{b}c + \bar{b} = \bar{b}, \bar{a}c + c = c, \text{ alors :} \\
\Phi_{F_1}(a,b,c) = \bar{b} + c
\end{gathered}$$

Ainsi F_1 n'est ni une tautologie, ni une antilogie car :

$$\begin{cases} \Phi_{F_1}(0,0,0) = 1 \\ \Phi_{F_1}(0,1,0) = 0 \end{cases}$$

2. $F_2 := (\neg A \vee B) \wedge (C \Rightarrow (A \Longleftrightarrow B))$

$$\begin{gathered}
\Phi_{F_2} = \Phi_{(\neg A\vee B)}.\Phi_{C\Rightarrow(A\Longleftrightarrow B)} \\
\Phi_{F_2} = (\Phi_{\neg A} + \Phi_B).(\overline{\Phi_C} + \Phi_{A\Longleftrightarrow B}) \\
\Phi_{F_2} = (\overline{\Phi_A} + \Phi_B).(\overline{\Phi_C} + \overline{\Phi_A}.\overline{\Phi_B} + \Phi_A.\Phi_B) \\
\Phi_{F_2}(a,b,c) = (\bar{a} + b).(\bar{c} + \bar{a}.\bar{b} + a.b) \\
\Phi_{F_2}(a,b,c) = \bar{a}\bar{c} + \bar{a}\bar{a}\bar{b} + \bar{a}ab + b\bar{c} + b\bar{a}\,\bar{b} + bab. \\
\text{Comme } \bar{a}\bar{a} = \bar{a}, \bar{a}a = 0, \bar{b}b = 0, bb = b \text{ alors :} \\
\Phi_{F_2}(a,b,c) = \bar{a}\bar{c} + \bar{a}\bar{b} + b\bar{c} + ab
\end{gathered}$$

Ainsi F_2 n'est ni une tautologie, ni une antilogie car :

$$\begin{cases} \Phi_{F_2}(0,0,0) = 1 \\ \Phi_{F_2}(1,0,1) = 0 \end{cases}$$

3. $F_3 := A \wedge \neg A \Rightarrow (B \vee C \Rightarrow (C \Rightarrow \neg A))$

   Par les règles de priorité des connecteurs logiques on a :

$$F_3 := (A \wedge (\neg A)) \Rightarrow (B \vee C \Rightarrow (C \Rightarrow \neg A)).$$

Ainsi :

$$\Phi_{F_3} = \overline{\Phi_{(A\wedge(\neg A))}} + \Phi_{(B\vee C\Rightarrow(C\Rightarrow\neg A))}.$$

Comme $A\wedge(\neg A)$ est une antilogie, alors :

$$\Phi'_{(A\wedge(\neg A))}(a) = 0,$$

d'où

$$\overline{\Phi_{(A\wedge(\neg A))}}(a) = 1.$$

Par conséquent ,

$$\Phi_{F_3}(a,b,c) = 1 + \Phi_{(B\vee C\Rightarrow(C\Rightarrow\neg A))}(a,b,c)$$
$$\Phi_{F_3}(a,b,c) = 1.$$

Ainsi F_3 est une tautologie.

4. $F_4 := (A\Rightarrow C)\wedge(B\Rightarrow D)\wedge(\neg C\vee\neg D)\Rightarrow\neg A\vee\neg B$.

   Par les règles de priorité des connecteurs logiques on a :

$$F_4 := ((A\Rightarrow C)\wedge(B\Rightarrow D)\wedge(\neg C\vee\neg D))\Rightarrow(\neg A\vee\neg B).$$

Ainsi :

$$\Phi_{F_4} = \overline{\Phi_{((A\Rightarrow C)\wedge(B\Rightarrow D)\wedge(\neg C\vee\neg D))}} + \Phi_{(\neg A)\vee(\neg B)}$$
$$\Phi_{F_4} = \overline{\Phi_{A\Rightarrow C}.\Phi_{B\Rightarrow D}.\Phi_{\neg C\vee\neg D}} + \Phi_{\neg A} + \Phi_{\neg B}$$
$$\Phi_{F_4} = \overline{(\overline{\Phi_A}+\Phi_C).(\overline{\Phi_B}+\Phi_D).(\Phi_{\neg C}+\Phi_{\neg D})} + \overline{\Phi_A} + \overline{\Phi_B}$$
$$\Phi_{F_4} = \overline{(\overline{\Phi_A}+\Phi_C).(\overline{\Phi_B}+\Phi_D).(\overline{\Phi_C}+\overline{\Phi_D})} + \overline{\Phi_A} + \overline{\Phi_B}$$
$$\Phi_{F_4}(a,b,c,d) = \overline{(\bar a+c).(\bar b+d).(\bar c+\bar d)} + \bar a + \bar b$$
$$\Phi_{F_4}(a,b,c,d) = \overline{(\bar a+c)} + \overline{(\bar b+d)} + \overline{(\bar c+\bar d)} + \bar a + \bar b$$
$$\Phi_{F_4}(a,b,c,d) = a\bar c + b\bar d + dc + \bar a + \bar b$$

Comme $\bar a + a\bar c = \bar a + \bar c, \bar b + b\bar d = \bar b + \bar d$ alors :

$$\Phi_{F_4}(a,b,c,d) = \bar a + \bar c + dc + \bar b + \bar d$$

Comme $\bar c + dc = \bar c + d$, alors :

$$\Phi_{F_4}(a,b,c,d) = \bar a + \bar c + d + \bar b + \bar d$$

Comme $d + \bar d = 1$, alors

$$\Phi_{F_4}(a,b,c,d) = \bar a + \bar c + 1 + \bar b$$
$$\Phi_{F_4}(a,b,c,d) = 1$$

Ainsi F_4 est une tautologie.

Exercice 3.

1. Expression en fonction de l'opérateur $\downarrow$ de :

   - $\bar a$: Comme $a\downarrow b = \bar a.\bar b$, alors $a\downarrow 0 = \bar a.\bar 0 = \bar a.1 = \bar a$, d'où :

$$\bar a = a\downarrow 0 \tag{1}$$

- $a+b$: Comme $a{\downarrow}b=\bar{a}.\bar{b}$, alors $a{\downarrow}b=\overline{a+b}$, par conséquent $a+b=\overline{a{\downarrow}b}$. Or, par (1), $\bar{a}=a{\downarrow}0$. Ainsi :

$$a+b=(a{\downarrow}b){\downarrow}0 \tag{2}$$

- $a.b$: Comme $a{\downarrow}b=\bar{a}.\bar{b}$, alors $\bar{a}{\downarrow}\bar{b}=\bar{\bar{a}}.\bar{\bar{b}}=a.b$. Or, par (1), $\bar{a}=a{\downarrow}0$. Ainsi :

$$a.b=(a{\downarrow}0){\downarrow}(b{\downarrow}0) \tag{3}$$

2. Expression de $a+\bar{b}$ en fonction de l'opérateur $\downarrow$.

   Par (2), $a+\bar{b}=(a{\downarrow}\bar{b}){\downarrow}0$. Or par (1), $\bar{b}=b{\downarrow}0$. Ainsi :

$$a+\bar{b}=(a{\downarrow}(b{\downarrow}0)){\downarrow}0 \tag{4}$$

3. Étude de l'associativité de l'opérateur de Peirce.

   Soient $a,b,c\in\mathcal{A}$:

$$(a{\downarrow}b){\downarrow}c=(\bar{a}.\bar{b}){\downarrow}c=\overline{\bar{a}.\bar{b}}.\bar{c}=(\bar{\bar{a}}+\bar{\bar{b}}).\bar{c}=(a+b).\bar{c} \tag{5}$$

$$a{\downarrow}(b{\downarrow}c)=a{\downarrow}(\bar{b}.\bar{c})=\bar{a}.\overline{\bar{b}.\bar{c}}=\bar{a}(\bar{\bar{b}}+\bar{\bar{c}})=\bar{a}.(b+c). \tag{6}$$

   Prenant $a=1$, $b=1$ et $c=0$ on a :

$$\text{Par (5)}: (a{\downarrow}b){\downarrow}c=(1+1).1=1 \tag{7}$$

$$\text{Par (6)}: a{\downarrow}(b{\downarrow}c)=0.(1+0)=0 \tag{8}$$

   Ainsi $(a{\downarrow}b){\downarrow}c\neq a{\downarrow}(b{\downarrow}c)$, d'où l'opérateur de Peirce n'est pas associatif.

Exercice 4. Établissons :

1. $\vDash(P\Rightarrow(Q\Rightarrow R))\Leftrightarrow(P\wedge Q\Rightarrow R)$:

   Soit $F_1:=(P\Rightarrow(Q\Rightarrow R))\Leftrightarrow(P\wedge Q\Rightarrow R)$.

$$\begin{gathered}
\Phi_{F_1}=\overline{\Phi_{P\Rightarrow(Q\Rightarrow R)}}.\overline{\Phi_{P\wedge Q\Rightarrow R}}+\Phi_{P\Rightarrow(Q\Rightarrow R)}.\Phi_{P\wedge Q\Rightarrow R}\\
\Phi_{F_1}=\overline{\overline{\Phi_P}+\overline{\Phi_Q}+\Phi_R}.\overline{\overline{\Phi_P.\Phi_Q}+\Phi_R}+(\overline{\Phi_P}+\overline{\Phi_Q}+\Phi_R).(\overline{\Phi_P.\Phi_Q}+\Phi_R)\\
\Phi_{F_1}(p,q,r)=\overline{\bar{p}+\bar{q}+r}.\overline{\overline{p.q}+r}+(\bar{p}+\bar{q}+r).(\overline{p.q}+r)\\
\Phi_{F_1}(p,q,r)=pq\bar{r}pq\bar{r}+(\overline{p.q}+r).(\overline{p.q}+r).\\
\text{Comme } pp=p,\ qq=q,\ \bar{r}\bar{r}=\bar{r},\ (\overline{p.q}+r).(\overline{p.q}+r)=\overline{pq}+r,\ \text{ alors :}\\
\Phi_{F_1}(p,q,r)=pq\bar{r}+\overline{pq}+r.\\
\text{Comme } pq\bar{r}+r=pq+r, \text{alors :}\\
\Phi_{F_1}(p,q,r)=pq+r+\overline{pq}.\\
\text{Comme } pq+\overline{pq}=1 \text{ et } 1+r=1, \text{alors :}\\
\Phi_{F_1}(p,q,r)=1.
\end{gathered}$$

   Ainsi F_1 est une tautologie.

2. $\models P\wedge(Q\vee R)\Leftrightarrow(P\wedge Q)\vee(P\wedge R)$:

   Soit $F_2 := P\wedge(Q\vee R)\Leftrightarrow(P\wedge Q)\vee(P\wedge R)$.

$$\Phi_{F_2}=\overline{\Phi_{P\wedge(Q\vee R)}}.\overline{\Phi_{(P\wedge Q)\vee(P\wedge R)}}+\Phi_{P\wedge(Q\vee R)}.\Phi_{(P\wedge Q)\vee(P\wedge R)}$$

$$\Phi_{F_2}=\overline{\Phi_P.\Phi_{Q\vee R}}.\overline{\Phi_{P\wedge Q}+\Phi_{P\wedge R}}+(\Phi_P.\Phi_{Q\vee R}).(\Phi_{P\wedge Q}+\Phi_{P\wedge R})$$

$$\Phi_{F_2}=\overline{\Phi_P.(\Phi_Q+\Phi_R)}.\overline{\Phi_P.\Phi_Q+\Phi_P.\Phi_R}+(\Phi_P.(\Phi_Q+\Phi_R)).\big(\Phi_P.\Phi_Q+\Phi_P.\Phi_R\big)$$

$$\Phi_{F_2}(p,q,r)=\overline{p.(q+r)}.\overline{p.q+p.r}+(p.(q+r)).(p.q+p.r)$$

$$\Phi_{F_2}(p,q,r)=\overline{p.(q+r)}.\overline{p.q+p.r}+(p.(q+r)).(p.q+p.r)$$

$$\Phi_{F_2}(p,q,r)=\overline{p.(q+r)}.\overline{p(q+r)}+\ p.(q+r))p.(q+r)$$

$$\text{Comme }\ \overline{p.(q+r)}.\overline{p(q+r)}=\overline{p(q+r)}\ \text{ et }\ p.(q+r))p.(q+r)=p.(q+r),\text{alors}:$$

$$\Phi_{F_2}(p,q,r)=\overline{p(q+r)}+p.(q+r)=1$$

Ainsi F_2 est une tautologie.

3. $\models P\vee(Q\wedge R)\Leftrightarrow(P\vee Q)\wedge(P\vee R)$

   Soit $F_3 := P\vee(Q\wedge R)\Leftrightarrow(P\vee Q)\wedge(P\vee R)$.

$$\Phi_{F_3}=\overline{\Phi_{P\vee(Q\wedge R)}}.\overline{\Phi_{(P\vee Q)\wedge(P\vee R)}}+\Phi_{P\vee(Q\wedge R)}.\Phi_{(P\vee Q)\wedge(P\vee R)}$$

$$\Phi_{F_3}=\overline{(\Phi_P+\Phi_{Q\wedge R})}.\overline{\Phi_{P\vee Q}.\Phi_{P\vee R}}+(\Phi_P+\Phi_{Q\wedge R}).\Phi_{P\vee Q}.\Phi_{P\vee R}$$

$$\Phi_{F_3}=\overline{(\Phi_P+\Phi_Q.\Phi_R)}.\overline{(\Phi_P+\Phi_Q).(\Phi_P+\Phi_R)}+(\Phi_P+\Phi_Q.\Phi_R).(\Phi_P+\Phi_Q).(\Phi_P+\Phi_R)$$

$$\Phi_{F_3}(p,q,r)=\overline{(p+q.r)}.\overline{(p+q).(p+r)}+(p+qr).(p+q).(p+r)$$

$$\Phi_{F_3}(p,q,r)=\bar p.(\bar q+\bar r).(\bar p.\bar q+\bar p.\bar r)+(p+qr).(p+q).(p+r)$$

$$\Phi_{F_3}(p,q,r)=\bar p.(\bar q+\bar r).\bar p.(\bar q+\bar r)+(p+qr).(p+q).(p+r).$$

$$\text{Comme }\ \bar p.(\bar q+\bar r).\bar p.(\bar q+\bar r)=\bar p.(\bar q+\bar r),\text{alors :}$$

$$\Phi_{F_3}(p,q,r)=\bar p.(\bar q+\bar r)+(p+qr).(p+q).(p+r).$$

$$\text{Comme }\bar p.(\bar q+\bar r)=\overline{(p+qr)},\text{alors :}$$

$$\Phi_{F_3}(p,q,r)=\overline{(p+qr)}+(p+qr).(p+q).(p+r)$$

Pour tout a, b on a : $a+\bar a\,b=a+b$. Ainsi, prenant $a:=\overline{(p+qr)}$ et $b:=(p+q).(p+r)$, on a:

$$\Phi_{F_3}(p,q,r)=\overline{(p+qr)}+(p+q).(p+r)$$

$$\Phi_{F_3}(p,q,r)=\bar p.\bar q+\bar p.\bar r+pp+pr+qp+qr$$

$$\text{Comme }pp=p\text{ et }p+pr=p,\text{alors:}$$

$$\Phi_{F_3}(p,q,r)=\bar p.\bar q+\bar p.\bar r+p+qp+qr$$

$$\text{Comme }\bar p.\bar q+\bar p.\bar r+p=p+\bar r+\bar q,\text{alors}$$

$$\Phi_{F_3}(p,q,r)=\bar q+p+\bar r+qp+qr$$

$$\text{Comme }p+qp=p+q\ \text{ et }\ q+\bar q=1,\text{alors}$$

$$\Phi_{F_3}(p,q,r)=1+p+\bar r+qr=1$$

Ainsi F_3 est une tautologie.

4. $\{P\vee R, P\Rightarrow Q, R\Leftrightarrow S\}\models Q\vee S$. Par le Théorème de validité on a :

   $\{P\vee R,\ P\Rightarrow Q,\ R\Leftrightarrow S\}\models Q\vee S$ si et seulement si $\models(P\vee R)\Rightarrow((P\Rightarrow Q)\Rightarrow((R\Leftrightarrow S)\Rightarrow(Q\vee S)))$.

Soit $F_4 := (P \vee R) \Rightarrow ((P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((R \Leftrightarrow S) \Rightarrow (Q \vee S)))$.

$$\Phi_{F_4} = \overline{\Phi_{P\vee R}} + \Phi_{(P\Rightarrow Q)\Rightarrow((R\Leftrightarrow S)\Rightarrow(Q\vee S))}$$
$$\Phi_{F_4} = \overline{\Phi_P + \Phi_R} + \overline{\Phi_{(P\Rightarrow Q)}} + \Phi_{(R\Leftrightarrow S)\Rightarrow(Q\vee S)}$$
$$\Phi_{F_4} = \overline{\Phi_P + \Phi_R} + \overline{\overline{\Phi_P} + \Phi_Q} + \overline{\Phi_{R\Leftrightarrow S}} + \Phi_{Q\vee S}$$
$$\Phi_{F_4} = \overline{\Phi_P + \Phi_R} + \Phi_P.\overline{\Phi_Q} + \overline{\overline{\Phi_R}.\overline{\Phi_S} + \Phi_R.\Phi_S} + \Phi_Q + \Phi_S$$
$$\Phi_{F_4}(p,q,r,s) = \overline{p+r} + p\bar{q} + \overline{\bar{r}\bar{s} + r.s} + q + s$$
$$\Phi_{F_4}(p,q,r,s) = \bar{p}\bar{r} + p\bar{q} + (r+s).(\bar{r}+\bar{s}) + q + s$$
$$\Phi_{F_4}(p,q,r,s) = \bar{p}\bar{r} + p\bar{q} + r\bar{r} + r\bar{s} + s\bar{r} + s\bar{s} + q + s$$

Comme $r\bar{r} = 0, s\bar{s} = 0, s + s\bar{r} = s$ alors :

$$\Phi_{F_4}(p,q,r,s) = \bar{p}\bar{r} + p\bar{q} + r\bar{s} + q + s$$

Comme $q + p\bar{q} = q + p, s + r\bar{s} = s + r$ alors :

$$\Phi_{F_4}(p,q,r,s) = \bar{p}\bar{r} + p + q + r + s$$

Comme $p + \bar{p}\bar{r} = p + \bar{r}$, alors :

$$\Phi_{F_4}(p,q,r,s) = \bar{r} + p + q + r + s$$

Comme $r + \bar{r} = 1$, alors :

$$\Phi_{F_4}(p,q,r,s) = 1 + p + q + s$$
$$\Phi_{F_4}(p,q,r,s) = 1$$

Ainsi F_4 est une tautologie, d'où $\{P \vee R, P \Rightarrow Q, R \Leftrightarrow S\} \models Q \vee S$.

5. $\{P \wedge \neg S, Q \vee \neg R, S \Rightarrow R\} \models (P \Rightarrow Q) \vee (R \Rightarrow S)$. Par le Théorème de validité on a : $\{P \wedge \neg S, Q \vee \neg R, S \Rightarrow R\} \models (P \Rightarrow Q) \vee (R \Rightarrow S)$ si et seulement $\models (P \wedge \neg S) \Rightarrow ((Q \vee \neg R) \Rightarrow ((S \Rightarrow R) \Rightarrow ((P \Rightarrow Q) \vee (R \Rightarrow S))))$.
Soit $F_5 := (P \wedge \neg S) \Rightarrow ((Q \vee \neg R) \Rightarrow ((S \Rightarrow R) \Rightarrow ((P \Rightarrow Q) \vee (R \Rightarrow S))))$.

$$\Phi_{F_4} = \overline{\Phi_{P\wedge\neg S}} + \Phi_{(Q\vee\neg R)\Rightarrow((S\Rightarrow R)\Rightarrow((P\Rightarrow Q)\vee(R\Rightarrow S)))}$$
$$\Phi_{F_4} = \overline{\Phi_P.\overline{\overline{\Phi_S}}} + \overline{\Phi_{Q\vee\neg R}} + \Phi_{(S\Rightarrow R)\Rightarrow((P\Rightarrow Q)\vee(R\Rightarrow S))}$$
$$\Phi_{F_4} = \overline{\Phi_P.\overline{\overline{\Phi_S}}} + \overline{\Phi_Q + \overline{\overline{\Phi_R}}} + \overline{\Phi_{S\Rightarrow R}} + \Phi_{(P\Rightarrow Q)\vee(R\Rightarrow S)}$$
$$\Phi_{F_4} = \overline{\Phi_P.\overline{\overline{\Phi_S}}} + \overline{\Phi_Q + \overline{\overline{\Phi_R}}} + \overline{\overline{\Phi_S} + \Phi_R} + \Phi_{P\Rightarrow Q} + \Phi_{R\Rightarrow S}$$
$$\Phi_{F_4} = \overline{\Phi_P.\overline{\overline{\Phi_S}}} + \overline{\Phi_Q + \overline{\overline{\Phi_R}}} + \overline{\overline{\Phi_S} + \Phi_R} + \overline{\Phi_P} + \Phi_Q + \overline{\Phi_R} + \Phi_S$$
$$\Phi_{F_4}(p,q,r,s) = \overline{p.\bar{s}} + \overline{q+\bar{r}} + \overline{\bar{s}+r} + \bar{p} + q + \bar{r} + s$$
$$\Phi_{F_4}(p,q,r,s) = \bar{p} + s + \bar{q}r + s\bar{r} + \bar{p} + q + \bar{r} + s$$

Comme $q + \bar{q}r = q + r$, alors:

$$\Phi_{F_4}(p,q,r,s) = \bar{p} + s + r + s\bar{r} + \bar{p} + q + \bar{r} + s$$

Comme $r + \bar{r} = 1$, alors:

$$\Phi_{F_4}(p,q,r,s) = \bar{p} + s + 1 + s\bar{r} + \bar{p} + q + s$$

Ainsi:

$$\Phi_{F_4}(p,q,r,s) = 1$$

Ainsi F_5 est une tautologie, d'où $\{P \wedge \neg S, Q \vee \neg R, S \Rightarrow R\} \models (P \Rightarrow Q) \vee (R \Rightarrow S)$.

Exercice 5. On introduit des variables propositionnelles P, M et A qui représentent le fait que Pathé (P), Manoumbé (M) et Alioune (A) sont innocents. On traduit ainsi le témoignage de chacun de la manière suivante :

– Pathé : $\neg M \wedge A$.

– Manoumbé : $\neg P \Rightarrow \neg A$.

– Alioune : $A \wedge (\neg M \vee \neg P)$.

On construit ensuite une table de verité pour visualiser toutes les configurations possibles :

				PATHÉ	MANOUMBÉ		ALIOUNE
	A	M	P	$\neg M \wedge A$	$\neg P \Rightarrow \neg A$	$(\neg M \vee \neg P)$	$A \wedge (\neg M \vee \neg P)$
1	V	V	V	F	V	F	F
2	F	V	V	F	V	F	F
3	V	F	V	V	V	V	V
4	V	F	F	V	F	V	V
5	V	V	F	F	F	V	V
6	F	V	F	F	V	V	F
7	F	F	V	F	V	V	F
8	F	F	F	F	V	V	F

1. Compatibilité des trois témoignages : Les trois témoignages sont compatibles si et seulement si ils peuvent être vraies à la fois. C'est à dire notre table de vérité contient, au moins, une ligne où Pathé, Manoumbé et Alioune disent tous la vérité.

   La ligne 3 de notre table de vérité satisfait cette condition. Donc les trois témoignages sont compatibles.

2. Supposons qu'ils sont tous les trois innocents, ce qui revient à se placer à la Ligne 1 de notre table de vérité (c'est la ligne où $A = V$, $M = V$ et $P = V$) : on lit ainsi sur la Ligne 1 que Pathé et Alioune ont menti.

3. Supposons que chacun dit la vérité, ce qui revient à se placer sur la Ligne 3 (c'est la seule ligne où Pathé, Alioune et Manoumbé disent simultanément la vérité) : on lit sur cette ligne que $A = V \;\; M = F \;\; P = V$. Donc s'ils disent tous la vérité alors Alioune et Pathé sont innocents et Manoumbé est coupable.

4. Supposons que les innocents disent la vérité et les couples mentent : Alors il convient de modifier la table de vérité en fonction du statue (innocent ou coupable) de celui qui fait le témoignage. La Ligne 1 de la table de vérité reste identique car on y suppose que les trois sont innocents. Sur la Ligne 2, seul le témoingne d'Alioune change car il y est considéré comme coupable. Ainsi de suite... On obtient à la fin la table de vérité suivante :

				PATHÉ	MANOUMBÉ		ALIOUNE
	A	M	P	$\neg M \wedge A$	$\neg P \Rightarrow \neg A$	$(\neg M \vee \neg P)$	$A \wedge (\neg M \vee \neg P)$
1	V	V	V	F	V	F	F
2	F	V	V	F	V	F	V
3	V	F	V	V	F	V	V
4	V	F	F	F	V	V	V
5	V	V	F	V	F	V	V
6	F	V	F	V	V	V	V
7	F	F	V	F	F	V	V
8	F	F	F	V	F	V	V

   Ainsi, suite à ces modifications la seule ligne de la table de vérité où les trois témoignages sont vraies est la Ligne 6. Donc Alioune et Pathé sont coupables et Manoumbé est innocent.

DR. D.N. DIATTA (dndiatta@univ-zig.sn)