Feuille de TD 4 : Le problème du plus court chemin

I. Algorithme de Bellman-Ford

Exercice 1 Exécuter l'algorithme de Bellman-Ford sur le graphe orienté de la figure 24.4, en prenant z pour origine. À chaque passage, relâcher les arcs dans le même ordre que sur la figure, et donner les valeurs de d et p après chaque passage. Ensuite, donner au poids de l'arc (z, x) la valeur 4, et exécuter à nouveau l'algorithme en prenant pour origine le sommet s.

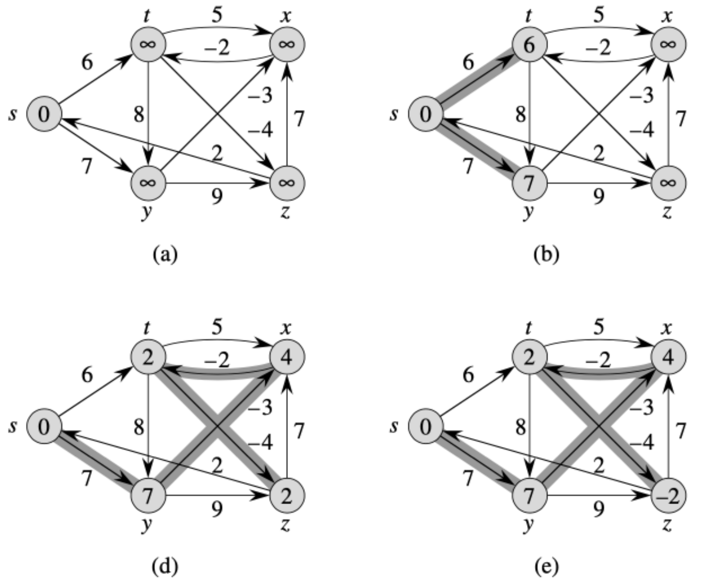

Figure 24.4 L'exécution de l'algorithme de Bellman-Ford. Le sommet origine est s. Les valeurs de d sont représentées dans les sommets, et les arcs en gris indiquent les valeurs prédécesseur : si l'arc (u, v) est en gris, alors $\pi[v] = u$. Dans cet exemple particulier, chaque passage relâche les arcs dans l'ordre $(t,x), (t,y), (t,z), (x,t), (y,x), (y,z), (z,x), (z,s), (s,t), (s,y)$. **(a)** La situation juste avant le premier passage sur les arcs. **(b)–(e)** La situation après chacun des passages suivants. Les valeurs d et π donnée en partie (e) sont les valeurs finales. L'algorithme de Bellman-Ford retourne VRAI pour cet exemple.

Exercice 2 Démontrer le corollaire 24.3 ci-dessous.

Corollaire 24.3 *Soit* $G = (S, A)$ *un graphe orienté pondéré de fonction de pondération* $w : A \to \mathbf{R}$ *et d'origine* s. *Alors, pour chaque sommet* $v \in S$, *il existe un chemin de* s *vers* v *si et seulement si* BELLMAN-FORD *se termine avec* $d[v] < \infty$ *quand elle est exécutée sur* G.

Exercice 3 ÉtantdonnéungrapheorientépondéréG=(S,A)sanscircuitdelongueurstrictement négative, soit m le maximum, pour tous les couples de sommets u, $v \in S$, du nombre minimal d'arcs dans un plus court chemin de u à v. (Ici, « plus court » signifie de poids minimal et ne concerne pas le nombre d'arcs). Suggérer une modification simple à l'algorithme de Bellman-Ford, lui permettant de se terminer après $m + 1$ passages.

II. Algorithme de Dijkstra

Exercice 1 Exécuter l'algorithme de Dijkstra sur le graphe orienté de la figure 24.2, en prenant d'abord comme origine le sommet s, puis le sommet z. En s'inspirant de la figure 24.6, donner la valeur des attributs d et p ainsi que les sommets de l'ensemble E après chaque itération de la boucle **tant que**.

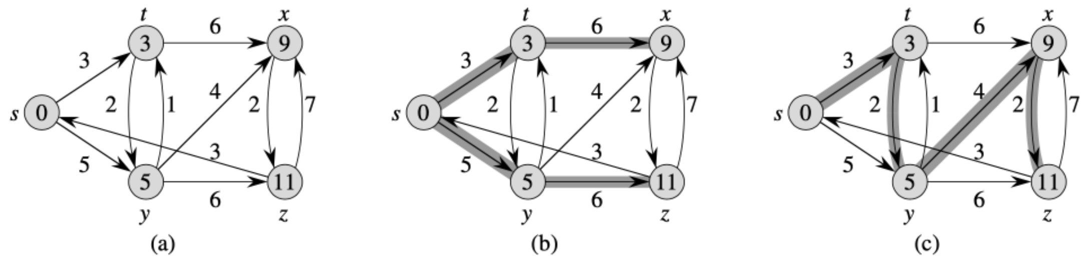

Figure 24.2 **(a)** Un graphe orienté pondéré avec des poids des plus courts chemins à partir de l'origine s. **(b)** Les arcs en gris forment une arborescence de plus courts chemins de racine s. **(c)** Une autre arborescence de plus courts chemins de même racine.

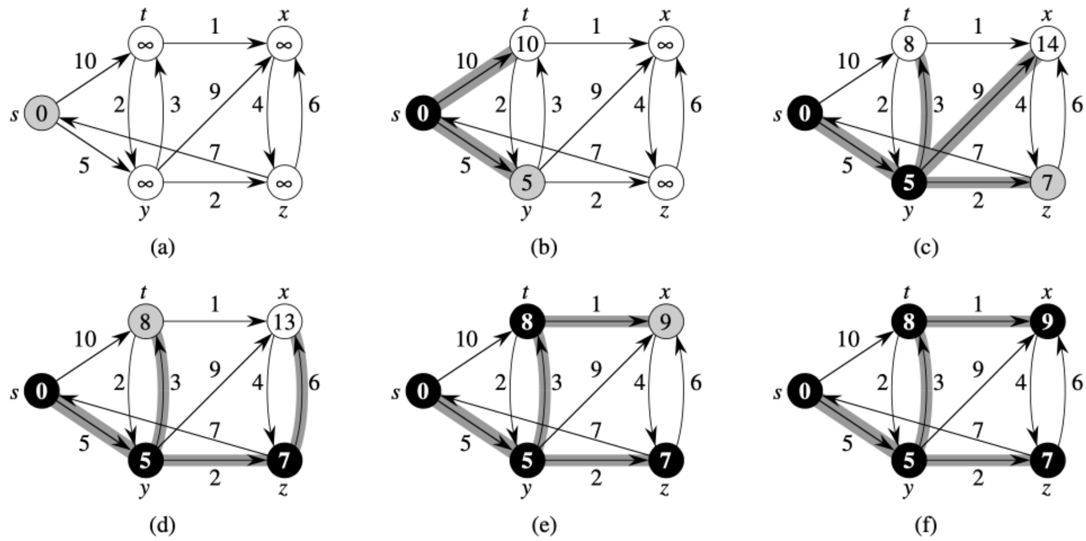

Figure 24.6 L'exécution de l'algorithme de Dijkstra. L'origine s est le sommet le plus à gauche. Les estimations de plus court chemin sont représentées à l'intérieur des sommets, et les arcs en gris indiquent les prédécesseurs. Les sommets noirs sont dans l'ensemble E, et les sommets blancs sont dans la file de priorités min $F = S - E$. **(a)** La situation juste avant la première itération de la boucle **tant que** des lignes 4–8. Le sommet gris contient la valeur minimale de d et est choisi comme sommet u à la ligne 5. **(b)–(f)** La situation après les itérations successives de la boucle **tant que**. A chaque étape, le sommet gris est celui choisi comme sommet u à la ligne 5 de l'itération suivante. Les valeurs d et π représentées en (f) sont les valeurs finales.

Exercice 2 Supposons que la ligne 4 de l'algorithme de Dijkstra soit remplacée par celle-ci :

4 **tant que** $|F| > 1$

Cette modification permet à la boucle **tant que** de s'exécuter $|S| - 1$ fois au lieu de $|S|$ fois. L'algorithme ainsi modifié est-il correct ?