MATHÉMATIQUES POUR L'INFORMATIQUE 1.

Examen

Durée : 2h
Les imprimés des chapitres 1 et 2 du cours sont autorisés.

Exercice 1. (5 points) Quelles sont les valeurs de vérité des propositions suivantes ?

1. π vaut 4 et la somme des angles d'un triangle vaut 180°.
2. π vaut 3,141592... implique que la somme des angles d'un triangle vaut 180°
3. π vaut 4 implique que la somme des angles d'un triangle vaut 182°
4. Il n'est pas vrai qu'un entier impair ne puisse pas être divisible par 6
5. Si 2 est plus grand que 3 alors l'eau bout à 100°C
6. Si 6 est plus petit que 7 alors 7 est plus petit que 6
7. Si 7 est plus petit que 6 alors 6 est plus petit que 7
8. 84 est divisible par 7 implique que 121 est divisible par 11
9. Si 531617 + 1 est divisible par 7 alors 531617 + 1 est plus grand que 7
10. La décimale d de π qui porte le numéro 10^{400} est 3 implique que si d n'est pas 3 alors d est 3.

Exercice 2. (5 points) Soit F une formule propositionnelle dépendant de trois variables P, Q, R qui possède deux propriétés :

- $F(P, Q, R)$ est vraie si P, Q, R sont toutes les trois vraies,
- la valeur de vérité de $F(P, Q, R)$ change quand celle d'une seule des trois variables change.

1. Construire la table de vérité de F.
2. Déterminer une formule possible pour F.
3. Justifier la formule propositionnelle F proposée en 2. en expliquant la méthode utilisée pour la trouver.

Exercice 3. (5 points) Démontrer les théorèmes logiques suivants en vous aidant :

- soit des axiomes, règles d'inférence, règles d'inférence annexes et théorèmes du chapitre 2 du cours.
- soit des théorèmes de complétude et de la théorie des fonctions ou tables de vérité.

1. $\vdash (P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \Leftrightarrow (P \wedge Q \Rightarrow R)$
2. $\vdash (P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$
3. $\vdash P \Leftrightarrow \neg\neg P$
4. $\vdash P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
5. $\vdash P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$.

Exercice 4. (5 points) On considère une algèbre de Boole quelconque $(\mathcal{A}, +, ., ^{-})$. On définit l'opération « somme disjonctive », notée $\oplus$, par :

$$\forall a, b \in \mathcal{A}, a \oplus b = \bar{a}.b + a.\bar{b}.$$

1. Que vaut $a \oplus 0$?, $a \oplus 1$?

2. Calculer $a \oplus a$ et $a \oplus \bar{a}$.
3. Calculer $\overline{a \oplus b}$.
4. Montrer que $\oplus$ est associative et commutative.
5. Montrez que l'on a $a=b$ si et seulement si $a \oplus b = 0$.

Une correction de l'examen

Exercice 1.

1. Faux
2. Vrai
3. Vrai
4. Faux
5. Vrai
6. Faux
7. Vrai
8. Vrai
9. Vrai
10. Vrai

Exercice 2.

1. Table de vérité de F :

P	Q	R	$F(P,Q,R)$
V	V	V	V
F	V	V	F
V	F	V	F
V	F	F	V
V	V	F	F
F	V	F	V
F	F	V	V
F	F	F	V

2. Une formule possible pour F.
   $F = (P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R)$
3. Pour trouver la formule propositionnelle F, nous avons tout simplement construit la disjonction des formules propositionnelles des lignes de la table de vérité pour lesquelles $F(P,Q,R)=V$. Et pour trouver la formule propositionnelle de chacune des lignes, nous avons pris la conjonction vraie.

Exercice 3. Soit F une formule propositionnelle. Par les théorèmes de complétude on a :

$$\vdash F \Longleftrightarrow \vDash F.$$

Ainsi, établir $\vdash F$ dans les questions suivantes, revient à établir $\models F$.

1. Soit $F := (P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \Leftrightarrow (P \wedge Q \Rightarrow R)$

$$\Phi_F = \overline{\Phi_{P\Rightarrow(Q\Rightarrow R)}}.\overline{\Phi_{P\wedge Q\Rightarrow R}} + \Phi_{P\Rightarrow(Q\Rightarrow R)}.\Phi_{P\wedge Q\Rightarrow R}$$
$$\Phi_F = \overline{\overline{\Phi_P} + \Phi_{Q\Rightarrow R}}.\overline{\overline{\Phi_{P\wedge Q}} + \Phi_R} + (\overline{\Phi_P} + \Phi_{Q\Rightarrow R}).(\overline{\Phi_{P\wedge Q}} + \Phi_R)$$
$$\Phi_F = \overline{\overline{\Phi_P} + \overline{\Phi_Q} + \Phi_R}.\overline{\overline{\Phi_P.\Phi_Q} + \Phi_R} + (\overline{\Phi_P} + \overline{\Phi_Q} + \Phi_R).(\overline{\Phi_P.\Phi_Q} + \Phi_R)$$
$$\Phi_F(p,q,r) = \overline{\bar p + \bar q + r}.\overline{\overline{p.q} + r} + (\bar p + \bar q + r).(\overline{p.q} + r)$$
$$\Phi_F(p,q,r) = \overline{\bar p + \bar q + r}.\overline{\bar p + \bar q + r} + (\bar p + \bar q + r).(\bar p + \bar q + r)$$
$$\text{Comme, } (\bar p + \bar q + r).(\bar p + \bar q + r) = (\bar p + \bar q + r) \ \text{ et } \ \overline{\bar p + \bar q + r}.\overline{\bar p + \bar q + r} = \overline{\bar p + \bar q + r}$$
$$\Phi_F(p,q,r) = \overline{\bar p + \bar q + r} + (\bar p + \bar q + r)$$
$$\Phi_F(p,q,r) = 1$$

Donc $\models F$.

2. Soit $G := (P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$

$$\Phi_G = \overline{\Phi_{P\Rightarrow Q}}.\overline{\Phi_{\neg Q\Rightarrow\neg P}} + \Phi_{P\Rightarrow Q}.\Phi_{\neg Q\Rightarrow\neg P}$$
$$\Phi_G = \overline{\overline{\Phi_P} + \Phi_Q}.\overline{\Phi_Q + \overline{\Phi_P}} + (\overline{\Phi_P} + \Phi_Q).(\Phi_Q + \overline{\Phi_P})$$
$$\Phi_G(p,q) = \overline{\bar p + q}.\overline{q + \bar p} + (\bar p + q).(q + \bar p)$$
$$\Phi_G(p,q) = \overline{\bar p + q} + (\bar p + q)$$
$$\Phi_G(p,q) = 1.$$

Donc $\models G$.

3. $H = P \Leftrightarrow \neg\neg P$

$$\Phi_H = \overline{\Phi_P}.\overline{\Phi_{\neg\neg P}} + \Phi_P.\Phi_{\neg\neg P}$$
$$\Phi_H = \overline{\Phi_P}.\overline{\Phi_P} + \Phi_P.\Phi_P$$
$$\Phi_H(p) = \bar p.\bar p + p.p$$
$$\Phi_H(p) = \bar p + p$$
$$\Phi_H(p) = 1$$

Donc $\models H$.

4. Soit $I := P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$. Par distributuvité de $\wedge$ sur $\vee$ on a : $P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$, d'où $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ par conséquent $\models I$.

5. Soit $J := P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$. Par distributuvité de $\vee$ sur $\wedge$ on a : $P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$, d'où $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ par conséquent $\models J$.

Exercice 4.

1. Calcul de :
   $\boldsymbol{a \oplus 0}$**.**

$$a \oplus 0 = \bar a.0 + a.\bar 0$$
$$a \oplus 0 = 0 + a$$
$$a \oplus 0 = a$$

$\boldsymbol{a \oplus 1.}$

$$a \oplus 1 = \bar{a}.1 + a.\bar{1}$$
$$a \oplus 1 = \bar{a} + 0$$
$$a \oplus 1 = \bar{a}$$

2. Calcul de :

   $\boldsymbol{a \oplus a.}$

$$a \oplus a = \bar{a}.a + a.\bar{a}$$
$$a \oplus a = 0 + 0$$
$$a \oplus a = 0$$

   $\boldsymbol{a \oplus \bar{a}.}$

$$a \oplus \bar{a} = \bar{a}.\bar{a} + a.\bar{\bar{a}}$$
$$a \oplus \bar{a} = \bar{a} + a.a$$
$$a \oplus \bar{a} = \bar{a} + a$$
$$a \oplus \bar{a} = 1$$

3. Calcul de $\overline{a \oplus b}$.

$$\overline{a \oplus b} = \overline{\bar{a}.b + a.\bar{b}}.$$
$$\overline{a \oplus b} = \overline{\bar{a}.b}.\overline{a.\bar{b}}$$
$$\overline{a \oplus b} = (\bar{\bar{a}} + \bar{b}).(\bar{a} + \bar{\bar{b}})$$
$$\overline{a \oplus b} = (a + \bar{b}).(\bar{a} + b)$$
$$\overline{a \oplus b} = a\bar{a} + ab + \bar{b}\bar{a} + \bar{b}b$$
$$\overline{a \oplus b} = ab + \bar{a}\bar{b}$$
$$\overline{a \oplus b} = \bar{a} \oplus b = a \oplus \bar{b}$$

4. Associativité et commutativité de $\oplus$:

   Associativité de $\oplus$:

$$(a \oplus b) \oplus c = (\bar{a}.b + a.\bar{b}) \oplus c$$
$$(a \oplus b) \oplus c = \overline{(\bar{a}.b + a.\bar{b})}.c + (\bar{a}.b + a.\bar{b}).\bar{c}$$
$$(a \oplus b) \oplus c = (a + \bar{b})(\bar{a} + b).c + \bar{a}.b.\bar{c} + a.\bar{b}.\bar{c}$$
$$(a \oplus b) \oplus c = a.b.c + \bar{a}.\bar{b}.c + \bar{a}.b.\bar{c} + a.\bar{b}.\bar{c} \qquad (1)$$

$$a \oplus (b \oplus c) = a \oplus (\bar{b}.c + b.\bar{c})$$
$$a \oplus (b \oplus c) = \bar{a}(\bar{b}.c + b.\bar{c}) + a.\overline{(\bar{b}.c + b.\bar{c})}$$
$$a \oplus (b \oplus c) = \bar{a}.\bar{b}.c + \bar{a}.b.\bar{c} + a(b + \bar{c})(\bar{b} + c)$$
$$a \oplus (b \oplus c) = \bar{a}.\bar{b}.c + \bar{a}.b.\bar{c} + a.b.c + a.\bar{c}.\bar{b} \qquad (2)$$

   (1) et (2) implique $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$. Ainsi $\oplus$ est associative.

   Commutativité de $\oplus$:

$$a \oplus b = \bar{a}.b + a.\bar{b}$$
$$b \oplus a = \bar{b}.a + b.\bar{a}$$

Comme « . » et « + »sont commutatives, alors $a \oplus b = b \oplus a$. Ainsi $\oplus$ est commutative.

5. Montrons que $a = b$ si et seulement si $a \oplus b = 0$.
   Si $a = b$, alors par 2. $a \oplus b = a \oplus a = 0$. Réciproquement, si $a \oplus b = 0$ alors $\bar{a}.b + a.\bar{b} = 0$. Ajoutant a à cette expression on $a + \bar{a}.b + a.\bar{b} = a$. Or $a + \bar{a}.b + a.\bar{b} = a + \bar{a}.b = a + b$, d'où $a + b = a$. Ajoutant, cette fois ci, b à l'expression $\bar{a}.b + a.\bar{b} = 0$, on a $b = b + \bar{a}.b + a.\bar{b} = b + a.\bar{b} = b + a$. Comme $a + b = b + a$, on en déduit que $a = b$.