Cours d'analyse pour la licence et le Capes

Jean-Étienne ROMBALDI

26 avril 2018

Table des matières

Avant-propos

Ce livre est en construction.

Les thèmes étudiés dans cet ouvrage ne sont pas des leçons de Capes rédigées. Il faut les considérer comme des outils permettant de rédiger ces leçons en fonction de son niveau propre.

La première partie est réservée à des généralités.

La partie II peut être utilisée pour bâtir des exposés ayant pour thèmes les suites numériques. Il s'agit des leçons suivantes :

— Suites monotones, suites adjacentes. Approximation d'un nombre réel, développement décimal. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.

— Suites convergentes. Opérations algébriques, composition par une application continue. Comparaison de suites entre elles.

— Rapidité de la convergence d'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers une limite ℓ. Cas où $|u_n - \ell|$ est dominé par $n^{-\alpha}$, par k^n, $\cdots$. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.

— Suites divergentes. Cas des suites admettant une limite infinie : comparaison, opérations algébriques, composition par une application.

— Étude des suites de terme général a^n, n^b et $n!$. Croissances comparées. Exemples de comparaison de suites aux suites précédentes. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.

— Étude de suites de nombres réels définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et une condition initiale. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.

La partie III peut être utilisée pour bâtir des exposés ayant pour thèmes les fonctions numériques. Il s'agit des leçons suivantes :

— Limite finie d'une fonction à valeurs réelles en un point a de $\mathbb{R}$. Opérations algébriques sur les limites. Continuité d'une fonction en un point. Exemples.

— Limite à l'infini d'une fonction à valeurs réelles. Branches infinies de la courbe représentative d'une fonction. Exemples. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.

— Image d'un intervalle par une fonction continue, image d'un segment. Continuité de la fonction réciproque d'une fonction continue strictement monotone sur un intervalle.

— Fonction réciproque d'une fonction continue strictement monotone sur un intervalle de $\mathbb{R}$. Propriétés. Exemples.

— Dérivée en un point. Interprétation géométrique. Exemples. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.

— Fonctions dérivées. Opérations algébriques. Dérivée d'une fonction composée. Exemples.

— Formules de Taylor. Applications.

— Développements limités, opérations sur les développements limités.

— Applications du calcul différentiel à la recherche d'extremum d'une fonction numérique d'une variable réelle. Exemples. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.
— Comparaison des fonctions : domination, prépondérance, équivalence. Exemples et applications.
— Fonctions convexes d'une variable réelle. Applications.
— Théorème de Rolle. Applications.

Première partie

Généralités

1

Le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels

1.1 Construction de $\mathbb{R}$ à l'aide des suites de Cauchy de nombres rationnels

On explique brièvement dans ce paragraphe comment construire le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels à partir du corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels.

L'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels peut être construit à partir de la notion de cardinal dans le cadre de la théorie des ensembles. Après avoir étudié la théorie des groupes, on construit l'anneau $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs par symétrisation puis le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est construit comme le corps des fractions de $\mathbb{Z}$.

Le corps $\mathbb{Q}$ étant totalement ordonné, on peut définir sur cet ensemble les notions de valeur absolue, de minorant, de majorant, de borne inférieure et de borne supérieure.

On note $\mathbb{Q}^+$ [resp. $\mathbb{Q}^{+,*}$] le sous-ensemble de $\mathbb{Q}$ formé des nombres rationnels positifs ou nuls [resp. strictement positif].

Dire que $M \in \mathbb{Q}$ est la borne supérieure d'une partie non vide X de $\mathbb{Q}$ signifie que M est le plus petit des majorants de X, ce qui se traduit par :

$$\begin{cases} \forall x \in X,\ x \leq M, \\ \forall a \in \mathbb{Q} \text{ tel que } a < M,\ \exists x \in X \mid a < x \leq M \end{cases}$$

et on note $M = \sup(X)$. Il n'est pas difficile de montrer l'unicité d'une telle borne supérieure quand elle existe.

Exercice 1.1 *Montrer que* 0 *est la borne inférieure du sous-ensemble* $X = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$ *de* $\mathbb{Q}$.

Solution 1.1 ♠♠♠

Exercice 1.2 *Montrer que le sous-ensemble* $X = \{r \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ *de* $\mathbb{Q}$ *n'a pas de borne supérieure dans* $\mathbb{Q}$.

Solution 1.2 ♠♠♠

Le but de ce chapitre est de donner les principales idées qui conduisent à la démonstration du théorème suivant.

Théorème 1.1 *Il existe un corps totalement ordonné* $\mathbb{R}$ *qui contient* $\mathbb{Q}$ *dans lequel toute partie majorée non vide admet une borne supérieure.*

Un tel corps est unique à isomorphisme près.

On rappelle que, si X est un ensemble non vide, alors une suite d'éléments de X est une application définie sur $\mathbb{N}$ (ou une partie de $\mathbb{N}$) à valeurs dans X. On note usuellement $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $u = (u_n)_{n\geq n_0}$ une telle suite.

L'ensemble $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ des suites de nombres rationnels est un anneau commutatif unitaire pour les opérations classiques d'addition et de multiplication.

Définition 1.1 *On dit qu'une suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres rationnels est convergente s'il existe un nombre rationnel r tel que :*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}^{+,*},\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0,\ |r_n - r| < \varepsilon.$$

En cas de convergence il y a unicité de la limite et on écrira $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} \ell$.

Définition 1.2 *On dit qu'une suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres rationnels est de Cauchy si :*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}^{+,*},\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0,\ \forall m \geq n_0,\ |r_n - r_m| < \varepsilon.$$

En utilisant l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{Q}$, on vérifie facilement qu'une suite convergente est de Cauchy et qu'une suite de Cauchy est bornée.

On vérifie aussi facilement, à partir de la définition, que s'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres rationnels convergente vers 0 telle que $|r_m - r_n| < \varepsilon_n$ pour tous $m > n$, alors la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

Exercice 1.3 *Montrer que si $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres rationnels telle que $|r_{n+1} - r_n| \leq \lambda^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, où λ est un rationnel strictement compris entre 0 et 1, alors cette suite est de Cauchy.*

Solution 1.3 *Il suffit d'écrire pour $m > n$:*

$$\begin{aligned} |r_m - r_n| &= \left| \sum_{k=n}^{m-1} (r_{k+1} - r_k) \right| \leq \sum_{k=n}^{m-1} |r_{k+1} - r_k| \\ &\leq \sum_{k=n}^{m-1} \lambda^k < \frac{\lambda^n}{1-\lambda} \underset{n\to+\infty}{\to} 0. \end{aligned}$$

Exercice 1.4 *Montrer que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres rationnels définie par $r_0 = 2$ et $r_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{r_n}$ est de Cauchy, mais non convergente dans $\mathbb{Q}$.*

Solution 1.4 *On vérifie par récurrence que cette suite est bien définie et à valeurs dans $\mathbb{Q}$.*
On vérifie également par récurrence que $r_n > 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Il en résulte que $r_n r_{n+1} = r_n + 1 > 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et :

$$|r_{n+1} - r_n| = \left| \frac{1}{r_n} - \frac{1}{r_{n-1}} \right| = \frac{|r_n - r_{n-1}|}{r_n r_{n-1}} < \frac{1}{2} |r_n - r_{n-1}|$$

pour $n \geq 1$ et par récurrence $|r_{n+1} - r_n| < \dfrac{1}{2^n} |r_1 - r_0| = \dfrac{1}{2^{n+1}}$, ce qui implique que $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

♠♠♠

Exercice 1.5 *Montrer que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres rationnels définie par $r_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ est de Cauchy, mais non convergente dans $\mathbb{Q}$.*

Solution 1.5 *On vérifie facilement que cette suite est bien définie et à valeurs dans $\mathbb{Q}$.*
Pour $m > n > 2$, on a :

$$\begin{aligned}
|r_m - r_n| = \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k!} &= \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{(n+2)\cdots(m-1)\,m}\right) \\
&\leq \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+2)^{m-n-1}}\right) \\
&\leq \frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{1-\frac{1}{n+2}} = \frac{n+2}{(n+1)^2\,n!} \leq \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

ce qui implique que $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.
Supposons qu'elle soit convergente vers un rationnel $r = \frac{p}{q}$ où p, q sont deux entiers strictement positifs premiers entre eux. Pour tout $n > q$, le nombre

$$p_n = n!\,(r - r_n) = n! \lim_{m\to+\infty} (r_m - r_n)$$

est un entier strictement positif avec :

$$0 < n!\,(r_m - r_n) \leq \frac{n+2}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{2}$$

pour $m > n \geq 2$, ce qui implique $0 < p_n < 1$ dans $\mathbb{N}$ qui est impossible.
La suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc non convergente dans $\mathbb{Q}$.

Exercice 1.6 *Montrer que, pour tout entier $a \geq 2$, la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres rationnels définie par $r_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{a^{k^2}}$ est de Cauchy, mais non convergente dans $\mathbb{Q}$.*

Solution 1.6 ♠♠♠

En notant $\mathcal{C}$ l'ensemble des suites de Cauchy de nombres rationnel, on vérifie facilement que c'est un sous-anneau de $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$. Le fait que $\mathcal{C}$ est stable pour la multiplication se montre en utilisant fait qu'une suite de Cauchy est bornée.

Le sous-ensemble $\mathcal{Z}$ de $\mathcal{C}$ formé des suites qui tendent vers 0 est un idéal de $\mathcal{C}$ (là encore on utilise le fait qu'une suite de Cauchy est bornée).

On vérifie alors que $\mathcal{Z}$ est un idéal maximal de $\mathcal{C}$ et l'anneau quotient $\mathbb{R} = \frac{\mathcal{C}}{\mathcal{Z}}$ est un corps commutatif. L'application i qui associe à un nombre rationnel r la classe de la suite constante égal à r dans $\frac{\mathcal{C}}{\mathcal{Z}}$ réalise une injection de $\mathbb{Q}$ dans $\frac{\mathcal{C}}{\mathcal{Z}}$, ce qui permet d'identifier $\mathbb{Q}$ à $i(\mathbb{Q})$.

On peut alors munir $\mathbb{R}$ d'une relation d'ordre total compatible avec la structure de corps.

On vérifie ensuite que dans $\mathbb{R}$ toute partie non vide majorée dans $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure et que toute suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ est convergente.

On consultera le livre de Doukhan et Sifre (Cours d'Analyse chez Dunod) ou celui de Boualem et Brouzet (La planète $\mathbb{R}$ chez Dunod) pour plus de détails.

Les suites réelles seront étudiées en détails au chapitre 3, mais nous en utiliserons quand même quelques propriétés de bases connues du Lycée.

1.2 La propriété de la borne supérieure

On peut définir sur $\mathbb{R}$ les notions de minorant, majorant, borne inférieure et supérieure. Les définitions étant analogues à celles données sur $\mathbb{Q}$.

Dans les définitions qui suivent X est une partie non vide de $\mathbb{R}$.

Définition 1.3 *On dit qu'un réel m est un minorant de X si :*

$$\forall x \in X,\ m \leq x$$

On dit qu'un réel M est un majorant de X si :

$$\forall x \in X,\ x \leq M$$

On dit qu'un réel M est une borne inférieure de X si M est un minorant de X et si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in X \mid m \leq x \leq m + \varepsilon$$

(ce qui peut se traduire en disant que m est le plus grand des minorants de X).
On dit qu'un réel M est une borne supérieure de X si M est un majorant de X et si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in X \mid M - \varepsilon < x \leq M$$

(ce qui peut se traduire en disant que M est le plus petit des majorants de X).

Théorème 1.2 *Si X admet une borne inférieure [resp. supérieure] cette dernière est unique.*

Démonstration. Supposons que X admette deux bornes supérieures M et M' avec $M' < M$. Prenant $\varepsilon = M - M'$, on peut alors trouver $x \in X$ tel que $M' = M - \varepsilon < x \leq M$, ce qui contredit l'inégalité $x \leq M'$. L'ensemble X admet donc au plus une borne supérieure.

On procède de même pour la borne inférieure. ∎

En cas d'existence, on peut donc noter $m = \inf(X)$ la borne inférieure de X et $M = \sup(X)$ sa borne supérieure.

La borne inférieure ou supérieure de X quand elle existe n'est pas nécessairement un élément de X. Si $\inf(X)$ [resp. $\sup(X)$] existe et est dans X, on dit alors que $\inf(X)$ [resp. $\sup(X)$] est le plus petit [resp. plus grand] élément de X. Si $\inf(X) \in X$ [resp. $\sup(X) \in X$] on dit aussi que c'est le minimum [resp. maximum] de X et on le note $\min(X)$ [resp. $\max(X)$].

Exemple 1.1 *Si $X = [0, 1[$, alors 0 est le plus petit élément (et donc la borne inférieure) et 1 est la borne supérieure de X, mais cette borne supérieure n'est pas dans X, il n'y a donc pas de plus grand élément.*

Exemple 1.2 *$X = [0, +\infty[$ n'a ni plus grand élément ni borne supérieure.*

Dans le cas où X est une partie finie de $\mathbb{R}$, ses éléments peuvent être rangés dans l'ordre croissant et l'existence des bornes inférieure et supérieure est assurée sans référence au théorème précédent, ces bornes étant des éléments X. Dans ce cas de figure, on dit que $\inf(X)$ [resp. $\sup(X)$] est le plus petit [resp. plus grand] élément de X, on le note aussi $\min(X)$ [resp. $\max(X)$].

On rappelle que la valeur absolue d'un réel x est définie par :

$$|x| = \max\{-x, x\} = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

et la majoration $|x| \leq \alpha$ est équivalente à $-\alpha \leq x \leq x$ ou encore à $x \in [-\alpha, \alpha]$. Plus généralement, les équivalences suivantes sont bien utiles :

$$|x - x_0| \leq \alpha \Leftrightarrow -\alpha \leq x - x_0 \leq x \Leftrightarrow x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$$

ou encore :

$$|x - x_0| < \alpha \Leftrightarrow -\alpha < x - x_0 < x \Leftrightarrow x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$$

Exercice 1.7 *Montrer que pour réels a et b, on a :*

$$\begin{cases} \max(a, b) = \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{|b-a|}{2} \\ \min(a, b) = \dfrac{a+b}{2} - \dfrac{|b-a|}{2} \end{cases}$$

On peut retenir ces égalités en remarquant que $\min(a, b)$ *est la borne inférieure de l'intervalle d'extrémités a, b,* $\max(a, b)$ *la borne supérieure et* $\dfrac{a+b}{2}$ *le milieu de cet intervalle.*

Solution 1.7 *Laissée au lecteur.*

Une partie de $\mathbb{R}$ qui admet un minorant [resp. majorant] est dite minorée [resp. majorée].

On dit qu'une partie de $\mathbb{R}$ est bornée si elle est minorée et majorée. Une partie X de $\mathbb{R}$ bornée admet donc une borne inférieure et une borne supérieure et on a $\inf(X) \leq \sup(X)$.

Les bornes inférieures et supérieures d'un ensemble peuvent aussi s'exprimer comme limites de suites de points de cet ensemble. Cette caractérisation est souvent utilisée.

Théorème 1.3 *Si X admet une borne inférieure [resp. supérieure], il existe alors une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de X qui converge vers $m = \inf(X)$ [resp. $M = \sup(X)$].*

Démonstration. Supposons que X admette une borne supérieure M. Pour tout entier naturel n, on peut trouver un élement x_n de X tel que $M - \dfrac{1}{n+1} < x_n \leq M$. De cet encadrement on déduit alors que $M = \lim\limits_{n \to +\infty} x_n$. ■

Si un ensemble X n'a pas de borne supérieure, on peut alors trouver pour tout entier $n \geq 1$ un élément x_n de X tel que $x_n > n$. La suite $(x_n)_{n \geq 1}$ diverge alors vers $+\infty$. Il est alors naturel de noter dans ce cas là que $\sup(X) = +\infty$.

De manière analogue, on notera $\inf(X) = -\infty$ si X n'est pas minoré.

La construction de $\mathbb{R}$ esquissée au paragraphe précédent permet de montrer le théorème suivant que nous admettons.

Théorème 1.4 *Toute partie non vide minorée [resp. majorée] dans $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure [resp. supérieure].*

Exercice 1.8 *Soient A, B sont deux parties non vide et bornées de $\mathbb{R}$. Montrer que :*

$$\begin{cases} \sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B)) \\ \inf(A \cup B) = \min(\inf(A), \inf(B)) \\ A \subset B \Rightarrow \inf(B) \leq \inf(A) \ \textit{ et } \sup(A) \leq \sup(B) \end{cases}$$

Solution 1.8 *Supposons que* $\sup(A) \leq \sup(B)$. *Si* $x \in A \cup B$, *on a soit* $x \in A$ *et* $x \leq \sup(A) \leq \sup(B)$, *soit* $x \in B$ *et* $x \leq \sup(B)$, *il en résulte que* $\sup(A \cup B) \leq \sup(B)$. *Pour* $\varepsilon > 0$ *donné, on peut trouver* $x \in B \subset A \cup B$ *tel que* $\sup(B) - \varepsilon < x \leq \sup(B)$. *On a donc* $\sup(A \cup B) = \sup(B)$.
On montre de manière analogue que $\inf(A \cup B) = \min(\inf(A), \inf(B))$.
Supposons que $A \subset B$. *Pour tout* $x \in A$, *on a* $x \in B$ *et* $\inf(B) \leq x \leq \sup(B)$, *ce qui entraîne, par définition des bornes inférieure et supérieure,* $\inf(B) \leq \inf(A)$ *et* $\sup(A) \leq \sup(B)$.

Exercice 1.9 *Si* A, B *sont deux parties non vide de* $\mathbb{R}$, *on définit l'ensemble :*

$$A + B = \{x + y \mid x \in A \text{ et } y \in B\}$$

Montrer que si A *et* B *sont majorés, il en est alors de même de* $A + B$ *et :*

$$\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$$

Solution 1.9 *Notons* $M = \sup(A)$ *et* $M' = \sup(B)$. *Pour tout* $z = x + y$ *avec* $(x, y) \in A \times B$, *on a :*

$$z = x + y \leq M + M'$$

L'ensemble $A + B$ *est donc non vide majoré et en conséquence admet une borne supérieure* $M'' \leq M + M'$. *Pour tout réel* $\varepsilon > 0$, *on peut trouver* $x \in A$ *et* $y \in B$ *tels que* $M - \frac{\varepsilon}{2} < x \leq M$ *et* $M' - \frac{\varepsilon}{2} < y \leq M'$, *ce qui nous donne* $z = x + y \in A + B$ *tel que :*

$$M + M' - \varepsilon < z \leq M + M'$$

Le réel $M + M'$ *est donc la borne supérieure de* $A + B$.

Exercice 1.10 *Déterminer, si elles existent les bornes inférieure et supérieure des ensembles suivants :*

$$A = \left\{2^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$$
$$B = [0, 1[\cap \mathbb{Q}$$
$$C = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$$

Solution 1.10 *On a* $2^0 \in A$ *et* $2^{-n} \leq 1$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *Il en résulte que* 1 *est la plus grand élément (et donc la borne supérieure) de* A. *Tous les éléments de* A *étant strictement positifs,* 0 *est un minorant de* X. *Comme pour tout réel* $\varepsilon > 0$ *on peut trouver un entier naturel* n *tel que* $0 < 2^{-n} < \varepsilon$ *(c'est équivalent à* $n > \log_2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$*), on déduit que* 0 *est la borne inférieure de* X.
L'ensemble B *étant contenu dans* $[0, 1]$ *est borné. Comme* $0 \in B$ *et minore* B, *on a* $0 = \min(B)$.
L'ensemble B *est majoré par* 1 *et pour tout réel* $\varepsilon > 0$ *on peut trouver un entier* $n \geq 1$ *tel que* $1 - \varepsilon < 1 - \frac{1}{n} < 1$ *avec* $1 - \frac{1}{n} \in B$, *il en résulte que* $1 = \sup(B)$ *et* B *n'a pas de plus grand élément car* $1 \notin B$.
En séparant les entiers pairs des entiers impairs, on a $C = C_1 \cup C_2$ *avec :*

$$C_1 = \left\{1 + \frac{1}{2p} \mid p \in \mathbb{N}^*\right\},\ C_2 = \left\{-1 + \frac{1}{2p+1} \mid p \in \mathbb{N}\right\}$$

et comme pour l'ensemble A, on vérifie que $\inf(C_1) = 1 \notin C_1$, $\sup(C_1) = \dfrac{3}{2} \in C_1$, $\inf(C_2) = -1 \notin C_2$, $\sup(C_2) = 0 \in C_1$, *soit :*

$$\sup(C) = \max(\sup(C_1), \sup(C_2)) = \frac{3}{2} \in C$$
$$\inf(C) = \min(\inf(C_1), \inf(C_2)) = -1 \notin C$$

Exercice 1.11 *Soit X une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Montrer que si $M = \sup(X) \notin X$, il existe alors pour tout réel $\varepsilon > 0$ une infinité d'éléments de X dans l'intervalle $]M - \varepsilon, M[$.*

Solution 1.11 *On se donne $\varepsilon > 0$. Par définition de la borne supérieure M il existe $x_0 \in X$ tel que $M - \varepsilon < x_0 < M$ (on a $x_0 < M$ du fait que $M \notin X$). Toujours par définition de M, on peut trouver $x_1 \in X$ tel que $x_0 < x_1 < M$. Et par récurrence on construit ne suite strictement croissante $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans l'intervalle $]M - \varepsilon, M[$. En effet, x_0 et x_1 ont été trouvés et supposant trouvés $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ dans $]M - \varepsilon, M[\cap X$, on peut trouver x_{n+1} dans X tel que $x_n < x_{n+1} < M$.*

Une conséquence importante du théorème de la borne supérieure est la propriété d'Archimède qui suit.

Théorème 1.5 *L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels est archimédien, c'est-à-dire que :*

$$\forall a \in \mathbb{R}^{+,*},\ \forall b \in \mathbb{R}^{+},\ \exists n \in \mathbb{N}^*;\ na > b.$$

Démonstration. Si $na \leq b$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, alors $A = \{na,\ n \in \mathbb{N}^*\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée (par b), elle admet donc une borne supérieure α. On a alors $(n+1)a \leq \alpha$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui entraîne $na \leq \alpha - a$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha - a$ est un majorant de A strictement inférieur à α, ce qui est impossible. Il existe donc un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $na > b$. ■

De ce théorème on déduit le résultat important suivant sur l'existence de la partie entière d'un réel.

Théorème 1.6 *Pour tout réel x il existe un unique entier relatif n tel que :*

$$n \leq x < n + 1. \tag{1.1}$$

Démonstration. Pour x entier relatif, il suffit de prendre $n = x$. On suppose donc x non entier.

Supposons d'abord que x est strictement positif.

En prenant $a = 1$ dans le théorème précédent, on déduit que :

$$\forall x > 0,\ \exists m \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \mid m > x$$

et en conséquence, l'ensemble des entiers $m > 0$ vérifiant $m > x$ est non vide. Il admet donc un plus petit élément p qui vérifie :

$$p > x,\ p - 1 \leq x.$$

Il suffit alors de poser $n = p - 1$.

Pour $x < 0$ en raisonnant avec $-x$ on aboutit à l'existence d'un entier p vérifiant :

$$p \leq -x < p + 1.$$

On a alors $-(p+1) < x < p$ (x n'est pas entier) et $n = -(p+1)$ convient.

Si pour x réel il existe deux entiers n et p vérifiant (1.1), on a alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} n \leq x < n+1, \\ -p-1 < -x \leq -p, \end{array} \right.$$

donc $n - p < 1$, soit $n - p \leq 0$ et $n - p > -1$, soit $n - p \geq 0$. Et nécessairement $n = p$. D'où l'unicité de n vérifiant (1.1). ■

Définition 1.4 *Avec les notations du théorème précédent, l'entier n est appelé la partie entière de x. On le note $[x]$ ou $E(x)$.*

L'existence de cette fonction partie entière nous suffit pour montrer que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que tout réel est limite d'une suite de nombres rationnels. L'étude détaillée des suites numériques est faite au paragraphe suivant.

Exercice 1.12 *On se donne un entier $b \geq 2$ et pour tout entier naturel non nul n, on définit l'ensemble :*

$$Q_n = \left\{ \frac{k}{b^n} \mid k \in \mathbb{N},\ 0 \leq k \leq b^n \right\}.$$

Montrer que pour tout réel $x \in [0,1]$ et tout entier naturel non nul n, il existe $r_n \in Q_n$ tel que :

$$r_n \leq x < r_n + \frac{1}{b^n}.$$

En déduire que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Solution 1.12 *Pour $x \in [0,1]$ et $n \geq 1$, on a :*

$$[b^n x] \leq b^n x < [b^n x] + 1$$

et :

$$r_n = \frac{[b^n x]}{b^n} \leq x < r_n + \frac{1}{b^n}.$$

Comme $0 \leq x \leq 1$, on a $0 \leq [b^n x] < b^n$ et $r_n \in Q_n$.
De $0 \leq x - r_n < \dfrac{1}{b^n}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{b^n} = 0$, on déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n = x$, $(r_n)_{n \geq 1}$ étant une suite de nombres rationnels. Pour $b = 10$, $(r_n)_{n \geq 1}$ est une suite d'approximations décimales par défaut de x.
Tout réel x pouvant s'écrire sous la forme $x = p + y$ avec $p = E[x]$ entier et $y \in [0,1]$, on en déduit que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
Pour $b = 10$, on a en fait montrer que l'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux est $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

La densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ peut aussi se montrer directement comme conséquence du fait que $\mathbb{R}$ est archimédien.

Théorème 1.7 *Entre deux nombres réels distincts il existe un nombre rationnel.*

Démonstration. Soient x, y deux réels distincts. On peut supposer que $y > x$. Comme $\mathbb{R}$ est archimédien il existe un entier naturel $n \geq 1$ tel que $n(y-x) > 1$ et un entier naturel $m \geq 1$ tel que $m\frac{1}{n} > |x|$. Il en résulte que l'ensemble E des entiers relatifs k tels que $\frac{k}{n} \leq x$ est non vide puisque $-m \in E$ (on a $-\frac{m}{n} < -|x| \leq x$) et majoré par m (on a $\frac{k}{n} \leq x \leq |x| < \frac{m}{n}$ et donc $k \leq m$ puisque $n > 0$). Cet ensemble E admet donc un plus grand élément p et on a :

$$\frac{p}{n} \leq x < \frac{p+1}{n}$$

(p est tout simplement la partie entière de nx).

Enfin avec $n(y-x) > 1$, on déduit que :

$$y > \frac{1}{n} + x \geq \frac{1}{n} + \frac{p}{n}$$

et :

$$x < \frac{p+1}{n} < y.$$

■

Corollaire 1.1 *Tout réel est limite d'une suite de nombres rationnels.*

Démonstration. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ on peut trouver un rationnel r_n tel que $x < r_n < x + \frac{1}{n+1}$. De cet encadrement on déduit que $x = \lim_{n \to +\infty} r_n$. ■

Dans la démonstration précédente les rationnels r_n sont tels que $x < r_n$ pour tout n. On peut aussi trouver une suite de rationnels $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers x et telle que $s_n < x$ en utilisant l'existe d'un rationnel s_n tel que $x - \frac{1}{n+1} < s_n < x$.

Ces résultats peuvent être utilisés pour déterminer toutes les fonctions monotones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ f(x+y) = f(x) + f(y) \tag{1.2}$$

Cette équation (1.2) est l'équation fonctionnelle de Cauchy.

Exercice 1.13 *On désigne par f une fonction monotone vérifiant l'équation* (1.2) *.*

1. *Montrer que :*
$$\forall a \in \mathbb{R}, \ \forall r \in \mathbb{Q}, \quad f(ra) = rf(a).$$
2. *Montrer qu'il existe un réel λ tel que $f(x) = \lambda x$ pour tout réel x.*
3. *Montrer que l'identité est l'unique fonction non identiquement nulle $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x+y) = f(x) + f(y)$ et $f(xy) = f(x) f(y)$ pour tous réels x, y.*

Solution 1.13

1. *En prenant $(x, y) = (0, 0)$ dans* (1.2) *, on obtient $f(0) = 2f(0)$, ce qui équivaut à $f(0) = 0$.*
En prenant $(x, y) = (x, -x)$ dans (1.2) *, on obtient $f(x) + f(-x) = 0$. On a donc $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire que la fonction f est impaire.*
De (1.2) *on déduit par récurrence que pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a :*
$$\forall n \in \mathbb{N}, \ f(na) = nf(a).$$

En effet, le résultat est vrai pour $n = 0$ *et le supposant vrai pour* $n \geq 0$, *on a :*

$$f((n+1)a) = f(na) + f(a) = nf(a) + f(a) = (n+1)f(a),$$

il est donc vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.
En écrivant, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, *que* $f(a) = f\left(n\frac{a}{n}\right) = nf\left(\frac{a}{n}\right)$, *on déduit que* $f\left(\frac{a}{n}\right) = \frac{1}{n}f(a)$ *pour tout* $a \in \mathbb{R}$ *et tout* $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. *Il en résulte que pour tout rationnel positif* $r = \frac{p}{q}$, *avec* $p \in \mathbb{N}$ *et* $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, *on a :*

$$f(ra) = f\left(p\frac{a}{q}\right) = pf\left(\frac{a}{q}\right) = \frac{p}{q}f(a) = rf(a).$$

Enfin avec l'imparité de f, *on déduit que ce dernier résultat est encore vrai pour les rationnels négatifs. On a donc* $f(ra) = rf(a)$ *pour tout* $a \in \mathbb{R}$ *et tout* $r \in \mathbb{Q}$.
Pour $a = 1$, *en notant* $\lambda = f(1)$, *on obtient* $f(r) = \lambda r$ *pour tout* $r \in \mathbb{Q}$.

2. *On suppose que* f *est croissante. On a* $\lambda = f(1) \geq f(0) = 0$.
En notant, pour $x \in \mathbb{R}$, *par* $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *des suites de rationnels qui convergent vers* x *avec* $r_n < x < s_n$, *on a pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *:*

$$\lambda r_n = f(r_n) \leq f(x) \leq f(s_n) = \lambda s_n$$

et faisant tendre n *vers l'infini, on en déduit que* $f(x) = \lambda x$.
On procède de manière analogue pour f *décroissante.*

3. *Avec* $f(1) = (f(1))^2$, *on déduit que* $f(1) = 0$ *ou* $f(1) = 1$. *Si* $f(1) = 0$, *alors pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *on a* $f(x) = f(x)f(1) = 0$ *et* f *est identiquement nulle.*
Si on suppose que f *n'est pas identiquement nulle, on a alors* $f(1) = 1$.
Avec $f(x^2) = (f(x))^2 \geq 0$, *on déduit que* $f(x) \geq 0$ *pour tout* $x \geq 0$ *et pour* $x \geq y$ *dans* $\mathbb{R}$, *on a* $f(x) - f(y) = f(x-y) \geq 0$, *ce qui signifie que* f *est croissante. On déduit alors de la question précédente que* $f(x) = x$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *(*$\lambda = f(1) = 1$*).*

Exercice 1.14 *Montrer que* $E = \{r^3 \mid r \in \mathbb{Q}\}$ *est dense dans* $\mathbb{R}$.

Solution 1.14 *Soient* $x < y$ *des réels. En utilisant la densité de* $\mathbb{Q}$ *dans* $\mathbb{R}$, *on peut trouver un nombre rationnel* r *tel que* $\sqrt[3]{x} < r < \sqrt[3]{y}$ *et on a alors* $x < r^3 < y$. *D'où la densité de* E *dans* $\mathbb{R}$.

2

Quelques inégalités classiques

On se propose de montrer, sous forme d'exercices, quelques inégalités classiques. Les preuves de ces inégalités ne nécessitent que quelques connaissances élémentaires.

2.1 Exercices classiques et moins classiques

L'inégalité suivante est souvent utilisée.

Exercice 2.1 *Montrer que pour tous réels positifs a, b on a :*

$$\sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a+b).$$

Dans quel cas l'égalité est-elle réalisée ?

Solution 2.1 *Il suffit de remarquer que :*

$$\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 = a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0$$

l'égalité étant réalisée si, et seulement si, $a = b$.

En en déduit la suivante.

Exercice 2.2 *Montrer que pour tous réels strictement positifs a, b on a :*

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab}.$$

Dans quel cas l'égalité est-elle réalisée ?

Solution 2.2 *Cette inégalité s'écrit :*

$$\sqrt{\frac{1}{a}\frac{1}{b}} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

et l'égalité étant réalisée si, et seulement si, $a = b$.

Exercice 2.3 *Montrer que :*

1. *pour tous réels positifs a et b on a $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$;*

2. *pour tous réels a et b on a $\sqrt{|a-b|} \geq \left|\sqrt{|a|} - \sqrt{|b|}\right|$.*
   On étudiera les cas d'égalité.

Solution 2.3

1. *On a :*
$$\sqrt{a+b}^2 = a+b \leq a + 2\sqrt{ab} + b \leq \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2$$
ce qui équivaut à $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ puisque toutes les quantités mises en jeux sont positives.
L'égalité est réalisée si, et seulement si, $a+b = a + 2\sqrt{ab} + b$, ce qui équivaut à $a = 0$ ou $b = 0$.
2. *En utilisant la question précédente, on a :*
$$\begin{cases} \sqrt{|a|} = \sqrt{|a-b+b|} \leq \sqrt{|a-b|} + \sqrt{|b|} \\ \sqrt{|b|} = \sqrt{|b-a+a|} \leq \sqrt{|a-b|} + \sqrt{|a|} \end{cases}$$
donc :
$$-\sqrt{|a-b|} \leq \sqrt{|a|} - \sqrt{|b|} \leq \sqrt{|a-b|}$$
ce qui équivaut à :
$$\sqrt{|a-b|} \geq \left|\sqrt{|a|} - \sqrt{|b|}\right|.$$

Exercice 2.4

1. *Montrer que pour tous réels x, y on a :*
$$(x+y)^2 \geq 4xy.$$
2. *Montrer que pour tous réels strictement positifs a, b, c, on a $(b+c)(c+a)(a+b) \geq 8abc$.*
3. *En déduire que $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$.*

Solution 2.4

1. *Pour tous réels x, y on a :*
$$(x+y)^2 - 4xy = (x-y)^2 \geq 0.$$
2. *Donc, pour a, b, c positifs :*
$$(b+c)^2 (c+a)^2 (a+b)^2 \geq 4bc4ca4ab = 8^2a^2b^2c^2$$
et $(b+c)(c+a)(a+b) \geq 8abc$.
3. *En notant $S = a+b+c$, on a :*
$$\begin{aligned} (b+c)(c+a)(a+b) &= (S-a)(S-b)(S-c) \\ &= S^3 - (a+b+c)S^2 + (ab+bc+ac)S - abc \\ &= (ab+bc+ac)S - abc \geq 8abc \end{aligned}$$
soit :
$$(ab+bc+ac)S \geq 9abc$$

et divisant par $abc > 0$, *on obtient :*

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(a+b+c) \geq 9.$$

On peut aussi utiliser les inégalités entre moyennes harmonique, géométrique et arithmétique (paragraphe 2.4) :

$$\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \leq \sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3}$$

qui donne directement :

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(a+b+c) \geq 9.$$

Exercice 2.5 *On se propose de généraliser les résultats l'exercice précédent. On se donne un entier* $n \geq 2$ *et des réels strictement positifs* $a_1, \cdots, a_n$.

1. *Déterminer le nombre de couples* (i,j) *d'entiers tels que* $1 \leq i < j \leq n$.
2. *Montrer que, pour tout entier* $n \geq 2$, *on a :*

$$\prod_{1\leq i<j\leq n} a_i a_j = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{n-1}.$$

3. *Montrer que :*

$$\prod_{1\leq i<j\leq n} (a_i + a_j) \geq \left(2^n \prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{n-1}{2}}.$$

Solution 2.5

1. *L'ensemble de ces couples est :*

$$E = \{(1,2),(1,3),\cdots,(1,n),(2,3),\cdots,(2,n),\cdots,(n-1,n)\}$$

et le nombre d'éléments de E *est :*

$$(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1 = \frac{n(n-1)}{2}$$

(pour i *fixé entre* 1 *et* $n-1$ *il y a* $n-i$ *possibilités pour* j*).*

2. *On procède par récurrence sur* $n \geq 2$. *Pour* $n = 2$, *on a :*

$$\prod_{1\leq i<j\leq n} a_i a_j = a_1 a_2$$

et supposant le résultat acquis au rang $n \geq 2$, *on a :*

$$\prod_{1\leq i<j\leq n+1} a_i a_j = \prod_{1\leq i<j\leq n} a_i a_j \prod_{i=1}^{n} a_i a_{n+1}$$
$$= \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{n-1} a_1 \cdots a_n a_{n+1}^n = \left(\prod_{k=1}^{n+1} a_k\right)^{n}$$

3. *Pour $1 \leq i < j \leq n$, on a :*
$$(a_i + a_j)^2 \geq 4a_i a_j.$$
et :
$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_i + a_j)^2 \geq 4^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j = \left(2^n \prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{n-1}$$
ce qui donne :
$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_i + a_j) \geq \left(2^n \prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{n-1}{2}}.$$
Pour $n = 2$, on a l'inégalité $a_1 + a_2 \geq \sqrt{a_1 a_2}$ et pour $n = 3$, on retrouve l'exercice précédent.
4. *En utilisant les inégalités entre moyennes harmonique, géométrique et arithmétique (paragraphe 2.4), on peut généraliser la deuxième inégalité de l'exercice précédent. De :*
$$\frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}} \leq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k$$
on déduit que :
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} \sum_{k=1}^{n} a_k \geq n^2.$$
On peut aussi utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz (paragraphe 2.2) pour écrire que :
$$n^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{a_k}} \sqrt{a_k}\right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Exercice 2.6 *Montrer que pour tous réels a, b, c, on a $b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2 \geq abc\,(a + b + c)$.*

Solution 2.6 *On a :*
$$\begin{aligned} 0 &\leq a^2 (b - c)^2 + b^2 (a - c)^2 + c^2 (a - b)^2 \\ &= 2 \left(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2\right) - 2abc\,(a + b + c) \end{aligned}$$

Exercice 2.7 *Montrer que pour tous réels strictement positifs a, b, c, on a :*
$$\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \leq \frac{a+b+c}{2}.$$
Quand y-a-t'il égalité ?

Solution 2.7 *Pour x, y réels strictement positifs, on a :*
$$\frac{xy}{x+y} \leq \frac{x+y}{4}$$
qui est équivalent à $(x + y)^2 - 4xy = (x - y)^2 \geq 0$. Il en résulte que :
$$\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \leq \frac{a+b}{4} + \frac{b+c}{4} + \frac{a+c}{4} = \frac{a+b+c}{2}$$

Exercice 2.8 *Soit $x_1, x_2, \cdots, x_n$ des réels dans $[0,1]$. Montrer que :*

$$\prod_{k=1}^{n}(1-x_k) \geq 1 - \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Solution 2.8 *Notons :*

$$u_n = \prod_{k=1}^{n}(1-x_k) \text{ et } v_n = 1 - \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Pour $n=1$, on a $u_1 = v_1$.
Supposant le résultat acquis au rang $n \geq 1$ et tenant compte de $1 - x_{n+1} \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} = u_n(1-x_{n+1}) &\geq \left(1 - \sum_{k=1}^{n} x_k\right)(1-x_{n+1}) \\ &\geq 1 - \sum_{k=1}^{n} x_k - x_{n+1} + x_{n+1}\sum_{k=1}^{n} x_k \geq 1 - \sum_{k=1}^{n+1} x_k = v_{n+1}. \end{aligned}$$

puisque tous les x_k sont positifs.

Exercice 2.9 *Montrer que si $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n > 0$ et $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n > 0$, alors :*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) \leq n \sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

Solution 2.9 *On procède par récurrence sur $n \geq 1$.*
Pour $n = 1$, on a l'égalité $a_1 b_1 = a_1 b_1$.
Supposons le résultat acquis au rang $n \geq 1$. On se donne deux suites croissantes $(a_k)_{1\leq k\leq n+1}$ et $(b_k)_{1\leq k\leq n+1}$ de réels positifs. On a :

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n+1} b_k\right) &= \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) \\ &\quad + a_{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} b_k + b_{n+1}\sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1}b_{n+1} \\ &\leq n\sum_{k=1}^{n} a_k b_k + a_{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} b_k + b_{n+1}\sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1}b_{n+1} \end{aligned}$$

et l'inégalité :

$$\left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n+1} b_k\right) \leq (n+1)\sum_{k=1}^{n+1} a_k b_k$$

sera réalisée si :

$$a_{n+1}\sum_{k=1}^{n} b_k + b_{n+1}\sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1}b_{n+1} \leq \sum_{k=1}^{n} a_k b_k + (n+1)\, a_{n+1}b_{n+1}$$

soit si :

$$a_{n+1}\sum_{k=1}^{n} b_k + b_{n+1}\sum_{k=1}^{n} a_k \leq \sum_{k=1}^{n} a_k b_k + n a_{n+1}b_{n+1}$$

ou :

$$\sum_{k=1}^{n} a_{n+1} b_k + \sum_{k=1}^{n} b_{n+1} a_k \leq \sum_{k=1}^{n} a_k b_k + \sum_{k=1}^{n} a_{n+1} b_{n+1}$$

ou :

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{n+1} - a_k) b_k \leq \sum_{k=1}^{n} b_{n+1} (a_{n+1} - a_k)$$

ou :

$$\sum_{k=1}^{n} (b_{n+1} - b_k)(a_{n+1} - a_k) \geq 0$$

qui est bien vérifiée.

2.2 L'inégalité de Cauchy-Schwarz

Pour tout entier $n \geq 1$, on note $x_1, x_2, \cdots, x_n$ les coordonnées d'un vecteur x de $\mathbb{R}^n$. Un tel vecteur sera noté $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz se démontre classiquement comme suit.

Exercice 2.10 *On se donne un entier $n \geq 2$, des réels strictement positifs $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$ et on désigne par φ la fonction définie sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ par :*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \ \varphi(x, y) = \sum_{k=1}^{n} \omega_k x_k y_k$$

On associe à cette fonction φ la fonction q définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \ q(x) = \varphi(x, x) = \sum_{k=1}^{n} \omega_k x_k^2$$

1. *Exprimer, pour tout réel t et tous vecteurs x, y dans $\mathbb{R}^n$ la quantité $q(x + ty)$ en fonction de t, $\varphi(x, y)$, $q(x)$ et $q(y)$.*
2. *Rappeler à quelle condition portant sur les réels a, b, c, le réel a étant non nul, un polynôme de degré 2, $P(t) = at^2 + 2bt + c$, est à valeurs positives ou nulles.*
3. *En remarquant que pour x, y fixés dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, la fonction :*

$$P : t \mapsto q(x + ty)$$

est polynomiale de degré 2, montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \omega_k x_k y_k \right|^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} \omega_k x_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{n} \omega_k y_k^2 \right)$$

Préciser dans quel cas l'égalité est réalisée.

4. *En déduire l'inégalité de Minkowski :*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \omega_k (x_k + y_k)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} \omega_k x_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^{n} \omega_k y_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Préciser dans quel cas l'égalité est réalisée.

Solution 2.10 *Laissée au lecteur.*

On peut aussi démontrer simplement cette inégalité, dans le cas où tous les ω_k valent 1, comme suit.

Exercice 2.11

1. *Montrer que pour tous réels x, y, on a :*

$$xy \leq \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right).$$

2. *On se donne un entier $n \geq 1$, des réels $x_1, \cdots, x_n$ non tous nuls et des réels $y_1, \cdots, y_n$ non tous nuls. On note $A = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$ et $B = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}$.*

   (a) *Montrer que pour tout entier k compris entre 1 et n, on a :*

$$x_k y_k \leq \frac{1}{2}\left(\frac{B}{A}x_k^2 + \frac{A}{B}y_k^2\right).$$

   (b) *En déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz :*

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}.$$

Solution 2.11

1. *Résulte de $(x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy \geq 0$ pour tous réels x, y.*
2. *Comme les x_k [resp. les y_k] ne sont pas tous nuls, on a $A > 0$ et $B > 0$.*

   (a) *Prenant $(x, y) = \left(\frac{x_k}{A}, \frac{y_k}{B}\right)$ dans l'inégalité précédente, on a :*

$$\frac{x_k}{A}\frac{y_k}{B} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{x_k^2}{A^2} + \frac{y_k^2}{B^2}\right)$$

   et multipliant cette inégalité par $AB > 0$, on en déduit que $x_k y_k \leq \frac{1}{2}\left(\frac{B}{A}x_k^2 + \frac{A}{B}y_k^2\right)$.

   (b) *En additionnant ces inégalités, on obtient :*

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leq \frac{1}{2}\left(\frac{B}{A}\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + \frac{A}{B}\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)$$

   avec $\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = A^2$ et $\sum_{k=1}^{n} y_k^2 = B^2$, ce qui donne :

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leq \frac{1}{2}\left(\frac{B}{A}A^2 + \frac{A}{B}B^2\right) = AB = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}.$$

Exercice 2.12 *On se donne un entier $n \geq 1$ et des réels $x_1, \cdots, x_n$ tous non nuls. Montrer que :*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k^2}\right) \geq n^2.$$

En déduire que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \geq \frac{6n}{(n+1)(2n+1)}.$$

Solution 2.12

1. *L'inégalité de Cauchy-Schwarz nous donne :*

$$n = \sum_{k=1}^{n} x_k \frac{1}{x_k} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k^2}}$$

   encore équivalent à l'inégalité proposée.

2. *Prenant $x_k = k$ pour tout k compris entre 1 et n, on en déduit que :*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right) \geq n^2$$

   et avec $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, on en déduit que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \geq \frac{6n}{(n+1)(2n+1)}.$$

Exercice 2.13 *Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a :*

$$\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k} \leq \frac{n(n+1)}{2\sqrt{3}}\sqrt{2n+1}$$

Solution 2.13 *L'inégalité de Cauchy-Schwarz nous donne :*

$$\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} k}$$

avec $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$ et $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, ce qui donne :

$$\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k} \leq \sqrt{\frac{n^2(n+1)^2(2n+1)}{12}} = \frac{n(n+1)}{2\sqrt{3}}\sqrt{2n+1}.$$

2.3 Inégalité de Bernoulli

Exercice 2.14 *Montrer que pour tout réel $a > -1$ et tout entier naturel n, on a $(1+a)^n \geq 1 + na$ (inégalité de Bernoulli). Préciser dans quel cas l'égalité est réalisée.*

Solution 2.14 *Pour $n = 0$ ou $n = 1$, on a $(1+a)^n = 1 + na$ pour tout réel a.*
On suppose donc que $n \geq 2$.
On désigne par P_n la fonction polynomiale définie par :

$$P_n(x) = x^n - 1 - n(x-1) = x^n - nx + n - 1.$$

On a $P_n(1) = 0$ et, en posant $x = a + 1$, il s'agit de montrer que $P_n(x) > 0$ pour tout $x \in D = \mathbb{R}^{+,*} \setminus \{1\}$.
Avec $P_2(x) = (x-1)^2 > 0$ et :

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + (x-1)(x^n - 1) = P_n(x) + (x-1)^2 \sum_{k=0}^{n-1} x^k > P_n(x)$$

pour tout $n \geq 2$ et tout $x \in D$, le résultat se déduit par récurrence sur $n \geq 2$.
Une autre démonstration consiste à remarquer que pour tout $x \in]0,1[$ [resp. $x \in]1,+\infty[$], on a $P_n'(x) = n(x^{n-1} - 1) < 0$ [resp. $P_n'(x) > 0$]. La fonction P_n est strictement décroissante sur $]0,1[$ et strictement croissante sur $]1,+\infty[$ avec $P_n(1) = 0$, ce qui implique $P_n(x) > 0$ pour tout $x \in D$.
On peut aussi écrire que pour tout $x \in D$ on a :

$$\begin{aligned} P_n(x) = x^n - 1 - n(x-1) &= (x-1)\sum_{k=0}^{n-1}\left(x^k - 1\right) \\ &= (x-1)^2\left(\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=0}^{k-1} x^j\right) > 0. \end{aligned}$$

Pour $n \geq 1$ et $a \geq 0$, cette inégalité peut se montrer très facilement en utilisant la formule du binôme de Newton comme suit :

$$(1+a)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k \geq C_n^0 a^0 + C_n^1 a = 1 + na.$$

L'inégalité de Bernoulli peut être généralisée comme suit.

Exercice 2.15 *Pour tout entier $n \geq 2$, on désigne par D_n la partie de $\mathbb{R}^n$ définie par :*

$$D_n = (]-1,0[)^n \cup (]0,+\infty[)^n.$$

Montrer que :

$$\forall a = (a_1, \ldots, a_n) \in D_n, \ \prod_{k=1}^{n}(1+a_k) > 1 + \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Solution 2.15 *En posant $x_k = 1 + a_k$ pour tout entier k compris entre 1 et n et :*

$$\Delta_n = (]0,1[)^n \cup (]1,+\infty[)^n$$

il s'agit de montrer que :

$$\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Delta_n,\ P_n(x) = \prod_{k=1}^{n} x_k - \sum_{k=1}^{n} x_k + n - 1 > 0.$$

Avec :

$$P_2(x) = x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1 = (x_1 - 1)(x_2 - 1) > 0$$

pour tout $x \in D_2$ *(si* $x \in (]0,1[)^2$ *alors* $x_1 - 1$ *et* $x_2 - 1$ *sont strictement négatifs et si* $x \in (]1,+\infty[)^2$ *alors* $x_1 - 1$ *et* $x_2 - 1$ *sont strictement positifs) et :*

$$P_{n+1}(x, x_{n+1}) = (x_{n+1} - 1)\left(\prod_{k=1}^{n} x_k - 1\right) + P_n(x) > P_n(x)$$

pour tout $(x, x_{n+1}) \in D_{n+1}$ *le résultat se déduit par récurrence sur* $n \geq 2$.

2.4 L'inégalité de Cauchy

Pour tout entier $n \geq 1$ et tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}^{+,*})^n$, on note respectivement :

$$A_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k,\ G_n(x) = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k} = \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}},\ H_n(x) = \frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}}$$

les moyennes arithmétique, géométriques et harmoniques des réels $x_1, \ldots, x_n$.

Pour $n = 1$, on a $A_1(x) = G_1(x) = H_1(x) = x_1$ pour tout réel non nul x_1.

On suppose donc dans ce qui suit que $n \geq 2$.

Remarque 2.1 *On a :*

$$H_n(x) = \frac{1}{A_n(y)}$$

où $y = \left(\frac{1}{x_k}\right)_{1 \leq k \leq n}$.

Le théorème qui suit va nous permettre de comparer ces trois moyennes.

Théorème 2.1 (Cauchy) *Pour tout entier* $n \geq 2$, *et tout* n*-uplet de réels strictement positifs* $(x_1, \cdots, x_n)$, *on a :*

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$$

avec égalité si, et seulement si, $x_1 = \cdots = x_n$.

Démonstration. En utilisant la stricte concavité de la fonction ln sur $\mathbb{R}^{+,*}$, on a :

$$\ln(G_n(x)) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\ln(x_k) \leq \ln\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} x_k\right) = \ln(A_n(x)),$$

l'égalité étant réalisée si, et seulement si tous les x_i sont égaux. En utilisant la croissance stricte de la fonction exp, on déduit que $G_n(x) \leq A_n(x)$, l'égalité étant réalisée si, et seulement si tous les x_i sont égaux. ■

Pour $n = 2$ on retrouve l'inégalité $\sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2}$ conséquence de la positivité de $\left(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}\right)^2$.

Corollaire 2.1 *Pour tout entier $n \geq 2$, et tout n-uplet de réels strictement positifs $(x_1, \cdots, x_n)$, on a :*

$$H_n(x) \leq G_n(x) \leq A_n(x)$$

l'une des égalités $H_n(x) = G_n(x)$ ou $G_n(x) = A_n(x)$ étant réalisée si, et seulement si, tous les x_i sont égaux.

Démonstration. En utilisant la remarque 2.1, on a :

$$H_n(x) = \frac{1}{A_n(y)} \leq \frac{1}{G_n(y)} = G_n(x) \leq A_n(x).$$

L'égalité $H_n(x) = G_n(x)$ équivaut à $A_n(y) = G_n(y)$ soit à l'égalité de tous les x_i. ∎

Exercice 2.16 *Déduire l'inégalité de Bernoulli de celle de Cauchy.*

Solution 2.16 *Pour $a > -1$ et $a \neq 0$, on a :*

$$1 + a = A_n(1, 1, \ldots, 1 + na) > G_n(1, 1, \ldots, 1 + na) = (1 + na)^{\frac{1}{n}}$$

ou encore $(1 + a)^n > 1 + na$.

L'inégalité de Cauchy peut aussi se montrer sans référence à la stricte concavité de la fonction ln comme suit : tout d'abord on montre l'inégalité $G_n(x) \leq A_n(x)$ pour les entiers de la forme $n = 2^p$ en procédant par récurrence sur $p \geq 1$, puis on en déduit le cas général. Cette démonstration, due à Cauchy, est détaillée avec l'exercice qui suit.

Exercice 2.17

1. *Montrer que, pour tout $x = (x_1, x_2) \in (\mathbb{R}^{+,*})^2$, on a $G_2(x) \leq A_2(x)$, l'égalité étant réalisée si, et seulement si, $x_1 = x_2$.*
2. *Soit $n = 2^p$ avec $p \geq 2$ et $x = (x_1, \ldots, x_n)$ donné dans $(\mathbb{R}^{+,*})^n$. On définit $y = \left(y_1, \ldots, y_{\frac{n}{2}}\right)$ et $z = \left(z_1, \ldots, z_{\frac{n}{2}}\right)$ dans $(\mathbb{R}^{+,*})^{\frac{n}{2}}$ par :*

$$\begin{cases} y_k = \dfrac{x_{2k-1} + x_{2k}}{2} = A_2(x_{2k-1}, x_{2k}) \\ z_k = \sqrt{x_{2k-1} x_{2k}} = G_2(x_{2k-1}, x_{2k}), \end{cases} \quad \left(1 \leq k \leq \frac{n}{2} = 2^{p-1}\right)$$

soit :

$$\begin{cases} y = \left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{x_3 + x_4}{2}, \ldots, \dfrac{x_{n-1} + x_n}{2}\right) \\ z = \left(\sqrt{x_1 x_2}, \sqrt{x_3 x_4}, \ldots, \sqrt{x_{2n-1} x_{2n}}\right) \end{cases}.$$

Montrer que $A_n(x) = A_{\frac{n}{2}}(y)$ et $G_n(x) = G_{\frac{n}{2}}(z)$.

3. *On suppose que $n = 2^p$ avec $p \geq 2$ et que l'inégalité de Cauchy est vérifiée avec son cas d'égalité pour $\dfrac{n}{2} = 2^{p-1}$.*
   (a) *En utilisant la question précédente, montrer que $G_n(x) \leq A_n(x)$.*
   (b) *Étudier le cas d'égalité dans l'inégalité précédente.*
4. *Si n est un entier supérieur ou égal à 2, on désigne par p un entier naturel non nul tel que $n < 2^p$ et on définit le vecteur $y = (y_k)_{1 \leq k \leq 2^p}$ dans $(\mathbb{R}^{+,*})^{2^p}$ par :*

$$y_k = \begin{cases} x_k \text{ si } 1 \leq k \leq n, \\ A_n(x) \text{ si } n + 1 \leq k \leq 2^p. \end{cases}$$

(a) *Exprimer* $G_{2^p}(y)$ *et* $A_{2^p}(y)$ *en fonction de* $G_n(x)$ *et* $A_n(x)$.

(b) *Déduire de ce qui précède le théorème de Cauchy dans le cas général.*

Solution 2.17

1. *Pour* $n = 2$, *on a :*

$$G_2^2(x) = x_1x_2 = \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 = A_2^2(x)$$

l'égalité étant réalisée si, et seulement si, $\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)^2 = 0$, *ce qui équivaut à* $x_1 = x_2$.

2. *Pour* $n = 2^p$ *avec* $p \geq 2$, *on a :*

$$\begin{aligned} A_n(x) &= \frac{1}{2^{p-1}}\left(\frac{x_1+x_2}{2} + \frac{x_3+x_4}{2} + \ldots + \frac{x_{n-1}+x_n}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2^{p-1}}\sum_{k=1}^{2^{p-1}} A_2(x_{2k-1}, x_{2k}) = A_{\frac{n}{2}}(y). \end{aligned}$$

et :

$$G_n^n(x) = \prod_{k=1}^{2^{p-1}} x_{2k-1}x_{2k} = \prod_{k=1}^{2^{p-1}} G_2^2(x_{2k-1}, x_{2k}),$$

soit :

$$G_n(x) = \left(\prod_{k=1}^{2^{p-1}} G_2^2(x_{2k-1}, x_{2k})\right)^{\frac{1}{2^p}} = \left(\prod_{k=1}^{2^{p-1}} G_2(x_{2k-1}, x_{2k})\right)^{\frac{1}{2^{p-1}}} = G_{\frac{n}{2}}(z)$$

3.

(a) *En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a :*

$$G_n(x) = G_{\frac{n}{2}}(z) \leq A_{\frac{n}{2}}(z)$$

avec :

$$A_{\frac{n}{2}}(z) = \frac{1}{2^{p-1}}\sum_{k=1}^{2^{p-1}} G_2(x_{2k-1}, x_{2k}) \leq \frac{1}{2^{p-1}}\sum_{k=1}^{2^{p-1}} A_2(x_{2k-1}, x_{2k}) = A_{\frac{n}{2}}(y)$$

(le cas $n = 2$*) et* $A_{\frac{n}{2}}(y) = A_n(x)$, *ce qui donne* $G_n(x) \leq A_n(x)$.

(b) *Avec :*

$$G_n(x) = G_{\frac{n}{2}}(z) \leq A_{\frac{n}{2}}(z) \leq A_{\frac{n}{2}}(y) = A_n(x),$$

on déduit que si l'égalité $G_n(x) = A_n(x)$ *est réalisée, on a alors d'une part* $A_{\frac{n}{2}}(z) = A_{\frac{n}{2}}(y)$, *soit :*

$$\sum_{k=1}^{2^{p-1}} (A_2(x_{2k-1}, x_{2k}) - G_2(x_{2k-1}, x_{2k})) = 0$$

avec $A_2(x_{2k-1}, x_{2k}) - G_2(x_{2k-1}, x_{2k}) \geq 0$ *pour tout* k *compris entre* 0 *et* n, *ce qui équivaut à* $A_2(x_{2k-1}, x_{2k}) = G_2(x_{2k-1}, x_{2k})$ *et en conséquence* $x_{2k-1} = x_{2k}$ *(le cas d'égalité pour* $n = 2$*) pour tout* k *compris entre* 0 *et* n *et d'autre part* $G_{\frac{n}{2}}(z) = A_{\frac{n}{2}}(z)$ *qui équivaut à l'égalité de tous les* $z_k = \sqrt{x_{2k-1}x_{2k}}$ *(l'hypothèse de récurrence) avec* $z_k = x_{2k-1} = x_{2k}$. *Les* x_k *sont donc tous égaux si* $G_n(x) = A_n(x)$. *La réciproque est évidente.*

4.

(a) *On a :*

$$G_{2^p}^{2^p}(y) = \prod_{k=1}^{2^p} y_k = \prod_{k=1}^{n} x_k \prod_{k=n+1}^{2^p} A_n(x) = (G_n(x))^n (A_n(x))^{2^p-n},$$

soit :

$$G_{2^p}(y) = (G_n(x))^{\frac{n}{2^p}} (A_n(x))^{\frac{2^p-n}{2^p}}$$

et :

$$\begin{aligned} 2^p A_{2^p}(y) &= \sum_{k=1}^{2^p} y_k = \sum_{k=1}^{n} x_k + \sum_{k=n+1}^{2^p} A_n(x) \\ &= nA_n(x) + (2^p - n) A_n(x) = 2^p A_n(x), \end{aligned}$$

soit $A_{2^p}(y) = A_n(x)$.

(b) *En utilisant l'inégalité* $G_{2^p}(y) \leq A_{2^p}(y)$ *et les calculs précédents, on obtient :*

$$(G_n(x))^{\frac{n}{2^p}} (A_n(x))^{1-\frac{n}{2^p}} = G_{2^p}(y) \leq A_{2^p}(y) = A_n(x),$$

qui entraîne $G_n(x) \leq A_n(x)$.
L'égalité étant réalisée si, et seulement si, tous les y_k, *et donc tous les* x_k, *sont égaux.*

Les exercices qui suivent nous donnent quelques exemples d'utilisation des inégalités entre moyennes harmoniques, géométriques et arithmétiques.

Exercice 2.18 *Soit* x *un réel non nul. Montrer, sans utiliser la fonction* ln *et en utilisant l'inégalité de Cauchy, que la suite* $u = (u_n)_{n\geq 1}$ *définie par :*

$$\forall n \geq 1,\ u_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

est strictement croissante à partir d'un certain rang.

Solution 2.18 *Pour* $x = 0$, *la suite* u *est stationnaire sur* 1.
Pour $x \in \mathbb{R}^*$, *il existe un entier naturel non nul* n_x *tel que* $n_x + x > 0$ *(pour* $x > 0$, $n_x = 1$ *et pour* $x < 0$ *prendre* $n_x > -x = |x|$*). En notant* $n_x = E(|x|) + 1$, *où* E *désigne la fonction partie entière, on a* $1 + \dfrac{x}{n} > 0$ *pour tout* $n \geq n_x$ *et :*

$$\begin{aligned} G_{n+1} = u_n^{\frac{1}{n+1}} = \left(\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right)^{\frac{1}{n+1}} &= \left(1 \cdot \left(1 + \frac{x}{n}\right) \cdots \left(1 + \frac{x}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n+1}} \\ &= G_{n+1}\left(1, 1 + \frac{x}{n}, \ldots, 1 + \frac{x}{n}\right) \end{aligned}$$

avec :

$$G_{n+1} < A_{n+1} = A_{n+1}\left(1, 1 + \frac{x}{n}, \ldots, 1 + \frac{x}{n}\right)$$

(comme $x \neq 0$, *on a* $1 + \dfrac{x}{n} \neq 1$ *et l'inégalité de Cauchy est stricte), et :*

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= \frac{1}{n+1}\left(1 + \left(1 + \frac{x}{n}\right) + \cdots + \left(1 + \frac{x}{n}\right)\right) \\ &= 1 + \frac{1}{n+1} n \frac{x}{n} = 1 + \frac{x}{n+1} = u_{n+1}^{\frac{1}{n+1}}. \end{aligned}$$

On a donc $u_n^{\frac{1}{n+1}} < u_{n+1}^{\frac{1}{n+1}}$ *pour tout* $n \geq n_x$, *ce qui équivaut à* $u_n < u_{n+1}$ *pour tout* $n \geq n_x$ *puisque la fonction* $t \mapsto t^{n+1}$ *est strictement croissante. La suite* $(u_n)_{n\geq n_x}$ *est donc strictement croissante.*

Exercice 2.19 *Montrer que :*

$$n\left(\sqrt[n]{n+1}-1\right) < \sum_{k=}^{n} \frac{1}{k} < n\left(1-\frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}+\frac{1}{n+1}\right).$$

Solution 2.19 *L'inégalité* $G_n(x) < A_n(x)$ *pour* $x = \left(\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \cdots, \frac{n+1}{n}\right)$ *s'écrit :*

$$\sqrt[n]{n+1} = \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k}\right)^{\frac{1}{n}} < \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k} = 1 + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

qui donne $n\left(\sqrt[n]{n+1}-1\right) < H_n = \sum_{k=}^{n} \frac{1}{k}$.
De même l'inégalité $G_n(x) < A_n(x)$ *pour* $x = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n}{n+1}\right)$ *s'écrit :*

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt[n]{n+1}} &= \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1}\right)^{\frac{1}{n}} < \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1} = 1 - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \\ &< 1 - \frac{1}{n}\left(H_n + \frac{1}{n+1} - 1\right) = 1 - \frac{1}{n}H_n + \frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

qui donne $H_n < n\left(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}} + \frac{1}{n+1}\right)$.

Deuxième partie

Suites et séries numériques

3

Suites réelles ou complexes

3.1 Prérequis

L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels est supposé construit avec les propriétés suivantes :
— c'est un corps commutatif totalement ordonné ;
— il contient l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels ;
— il est archimédien, c'est-à-dire que :

$$\forall a \in \mathbb{R}^{+,*},\ \forall b \in \mathbb{R}^{+},\ \exists n \in \mathbb{N}^{*} \mid na > b.$$

Pour tout réel x, on note $E(x)$ la partie entière de x, c'est l'entier relatif défini par :

$$E(x) \leq x < E(x) + 1.$$

L'existence de cette partie entière se déduit du caractère archimédien de $\mathbb{R}$.

La corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes est également supposée construit.

Les éléments de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ seront appelés scalaires.

Les résultats classiques sur les fonctions continues ou dérivables d'une variable réelle sont supposés connus de même que les fonctions usuelles exp, ln, sin, $\cdots$ Ces notions seront étudiées plus loin.

3.2 Généralités sur les suites réelles ou complexes

Les réels étant des complexes particuliers, les suites considérées sont a priori complexes.

On rappelle qu'une suite d'éléments de nombres complexes est une application définie sur $\mathbb{N}$ (ou une partie de $\mathbb{N}$) à valeurs dans $\mathbb{C}$. On note usuellement $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $u = (u_n)_{n\geq n_0}$ une telle suite.

Pour simplifier, on suppose que les suites sont définies sur $\mathbb{N}$ et on note $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites d'éléments de nombres complexes.

Dans l'ensemble $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, on définit la somme des suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u + v = (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et le produit de u par le scalaire λ par $\lambda u = (\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Muni de ces deux lois $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.

On définit également le produit des suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u \cdot v = (u_n \cdot v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ce qui confère à $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une structure d'algèbre commutative sur $\mathbb{C}$.

Une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :
— constante si :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n\ ;$$

— stationnaire (ou plus précisément stationnaire à partir d'un certain rang) si :

$$\exists p \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq p,\ u_{n+1} = u_n \ ;$$

— périodique s'il existe un entier $p \geq 1$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+p} = u_n.$$

Définition 3.1 *Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{C}$. On dit que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite (ou une sous suite) de u s'il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{\varphi(n)}.$$

Par exemple, les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$ sont extraites de u.
On peut vérifier par récurrence que si $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi(n) \geq n.$$

Cette propriété est souvent utilisée.

Définition 3.2 *On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée [resp. minorée] si l'ensemble $U = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est majorée [resp. minorée] dans $\mathbb{R}$, ce qui signifie qu'il existe un réel M [resp. m] tel que :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq M \ \textit{[resp. } m \leq u_n.\textit{]}$$

Définition 3.3 *On dit qu'une suite réelle ou complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si l'ensemble $U = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est borné dans $\mathbb{C}$, ce qui signifie qu'il existe un réel $M > 0$ tel que :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq M.$$

Exercice 3.1 *Montrer que la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ est bornée.*

Solution 3.1 *Avec $k! \geq 2^{k-1}$ pour tout entier $k \geq 1$, on déduit que pour tout $n > 1$, on a :*

$$\begin{aligned} 0 < u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} &\leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \\ &\leq 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3. \end{aligned}$$

Exercice 3.2 *Montrer que la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \ln(n)$ pour tout $n \geq 1$ est bornée.*

Solution 3.2 *La fonction $t \to \dfrac{1}{t}$ étant décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, on a :*

$$\forall k \geq 1,\ \frac{1}{k+1} = \int_k^{k+1} \frac{dt}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{k} = \frac{1}{k}$$

et donc pour $n \geq 2$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} = \int_1^{n+1} \frac{dt}{t} = \ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k},$$

soit :

$$u_n + \frac{1}{n+1} - 1 + \ln(n) \leq \ln(n+1) \leq u_n + \ln(n)$$

ou encore :

$$0 < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq u_n \leq \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1} + 1 < 1 + \ln(2).$$

Exercice 3.3 *Montrer que, pour tout réel $\alpha > 1$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :*

$$\forall n \geq 1,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$$

est bornée.

Solution 3.3 *Il est clair que u est minorée par 0.*
La fonction $t \to \dfrac{1}{t^\alpha}$ étant décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, on a :

$$\forall k \geq 2,\ \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^\alpha} \geq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{k^\alpha} = \frac{1}{k^\alpha}$$

et donc pour tout $n \geq 2$, on a :

$$\begin{aligned} u_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^\alpha} = 1 + \int_{1}^{n} \frac{dt}{t^\alpha} &= 1 + \frac{1}{\alpha-1}\left(1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right) \\ &\leq \frac{\alpha}{\alpha-1}. \end{aligned}$$

Exercice 3.4 *On désigne par $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ les suites définies par :*

$$u_n = \int_0^{\sqrt{n}} \cos\left(t^2\right) dt,\ v_n = \int_1^{\sqrt{n}} \cos\left(t^2\right) dt$$

et on se propose de montrer que ces deux suites sont bornées.

1. *Montrer que pour tout réel $\alpha > 1$ et tout entier $n \geq 1$, on a :*

$$\int_1^n \frac{dx}{x^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha-1}.$$

2. *Montrer que pour tout réel $\alpha > 1$ la suite $(w_n)_{n\geq 1}$ définie par :*

$$w_n = \int_1^n \frac{\sin(x)}{x^\alpha} dx$$

   est bornée.

3. *Montrer que :*

$$v_n = \frac{1}{2} \int_1^n \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} dx.$$

4. *En utilisant une intégration par parties et le résultat de la question* ***2.*** *pour une valeur particulière de α, montrer que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est bornée.*
5. *En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est bornée.*

Solution 3.4

1. *On a :*
$$\int_1^n \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}\left(1-\frac{1}{n^{\alpha-1}}\right) \leq \frac{1}{\alpha-1}.$$
2. *On a :*
$$|w_n| \leq \int_1^n \frac{|\sin(x)|}{x^\alpha}dx \leq \int_1^n \frac{dx}{x^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha-1}.$$
3. *Le changement de variable $x=t^2$ donne $dx = 2tdt = 2\sqrt{x}dt$ et :*
$$v_n = \frac{1}{2}\int_1^n \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}dx.$$
4. *Une intégration par parties donne en posant :*
$$\begin{cases} u = \dfrac{1}{\sqrt{x}},\ u' = -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x\sqrt{x}} \\ v' = \cos(x),\ v = \sin(x) \end{cases}$$
$$\begin{aligned} 2v_n &= \left[\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}\right]_1^n + \frac{1}{2}\int_1^n \frac{\sin(x)}{x\sqrt{x}}dx \\ &= \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}} - \sin(1) + \frac{1}{2}\int_1^n \frac{\sin(x)}{x\sqrt{x}}dx \end{aligned}$$
avec $\left|\dfrac{\sin(n)}{\sqrt{n}}\right| \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}} \leq 1$ *et* $\left(\displaystyle\int_1^n \frac{\sin(x)}{x\sqrt{x}}dx\right)_{n\geq 1}$ *borné. Il en résulte que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est bornée.*
5. *Résulte de* $u_n = \displaystyle\int_0^1 \cos(t^2)\,dt + v_n$.

3.3 Suites convergentes ou divergentes

De manière intuitive, on peut dire qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un scalaire ℓ si l'écart $|u_n-\ell|$ peut être rendu aussi petit que l'on souhaite dès que n est assez grand.

Définition 3.4 *On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente s'il existe un scalaire ℓ tel que :*
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0,\ |u_n - \ell| < \varepsilon. \tag{3.1}$$

Dans l'assertion (3.1), les deux dernières inégalités peuvent être strictes ou larges.

Il est parfois commode de se limiter à $\varepsilon \in]0,1[$ sans que cela ne soit restrictif.

En utilisant l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$, on montre facilement que si une suite converge, alors sa limite ℓ est uniquement déterminée. En effet, s'il existe deux scalaires ℓ et ℓ' vérifiant (3.1), on peut alors trouver pour tout réel $\varepsilon > 0$ un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, on ait :
$$|\ell - \ell'| = |(\ell - u_n) + (u_n - \ell')| \leq |\ell - u_n| + |u_n - \ell'| < 2\varepsilon,$$
ce qui équivaut à $\ell - \ell' = 0$.

En cas de convergence, on écrira $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} \ell$.

Exercice 3.5 *Montrer que* $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0$.

Solution 3.5 *Pour* $\varepsilon>0$ *donné il existe un entier* $n_0>\dfrac{1}{\varepsilon}$ *(*$\mathbb{R}$ *est archimédien), ce qui implique que pour tout* $n\geq n_0$, *on a* $|u_n|=\dfrac{1}{n}<\varepsilon$. *On a donc bien* $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0$.

Le résultat suivant, qui est élémentaire, est souvent utile pour montrer la convergence d'une suite.

Théorème 3.1 *Si* $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de nombres complexes pour laquelle on peut trouver une suite* $\varepsilon=(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de réels positifs telle que* $\lim\limits_{n\to+\infty}\varepsilon_n=0$ *et* $|u_n-\ell|\leq\varepsilon_n$ *à partir d'un certain rang, où* ℓ *est un nombre complexe donné, alors* $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\ell$.

Démonstration. On a :

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N}\mid\forall n\geq n_0,\ |u_n-\ell|\leq\varepsilon_n<\varepsilon.$$

∎

De l'inégalité :

$$||a|-|b||\leq|a-b|$$

valable pour tous scalaires a,b, on déduit, en utilisant le théorème précédent, que :

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n)=\ell\ \Rightarrow\ \lim_{n\to+\infty}(|u_n|)=|\ell|\,.$$

Exercice 3.6 *Montrer que* $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\cos(n)}{n}=0$.

Solution 3.6 *Se déduit de* $\left|\dfrac{\cos(n)}{n}\right|\leq\dfrac{1}{n}$.

Exercice 3.7 *Montrer que* $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n!}{n^n}=0$.

Solution 3.7 *Se déduit de :*

$$0<\frac{n!}{n^n}=\frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\cdots\frac{2}{n}\frac{1}{n}\leq\frac{1}{n}.$$

Exercice 3.8 *Montrer que pour tout nombre complexe* λ, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\lambda^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}=0$.

Solution 3.8 *Soit* $n_0\in\mathbb{N}$ *tel que* $n_0>|\lambda|$. *Pour tout* $n>n_0$, *on a* $n_0+k>|\lambda|$ *pour tout* k *compris entre* 1 *et* $n-n_0-1$, *et :*

$$0\leq\left|\frac{\lambda^n}{n!}\right|=\left|\frac{\lambda^{n_0}}{n_0!}\right|\frac{|\lambda|^{n-n_0}}{(n_0+1)\cdots n}\leq\left|\frac{\lambda^{n_0}}{n_0!}\right|\frac{|\lambda|^{n-n_0}}{|\lambda|^{n-n_0-1}n}=\left|\frac{\lambda^{n_0}}{n_0!}\right|\frac{|\lambda|}{n}$$

et en conséquence $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\lambda^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}=0$.

En utilisant l'inégalité triangulaire, on déduit le résultat suivant.

Théorème 3.2 *Une suite convergente est bornée.*

Démonstration. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, il existe un entier n_0 tel que :

$$\forall n > n_0,\ |u_n| = |(u_n - \ell) + \ell| \leq |u_n - \ell| + |\ell| < 1 + |\ell|$$

et en posant $M = \max\{|u_0|, \cdots, |u_{n_0}|, 1 + |\ell|\}$, on a $|u_n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. ■

Le résultat qui suit se déduit immédiatement de la définition d'une suite convergente.

Théorème 3.3 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = \ell$.*

1. *Si $\ell > 0$ [resp. $\ell < 0$] on a alors $u_n > 0$ [resp. $u_n < 0$] à partir d'un certain rang.*
2. *Si u_n est positif [resp. négatif] à partir d'un certain rang, on a alors $\ell \geq 0$ [resp. $\ell \leq 0$].*

Démonstration.

1. Pour $\varepsilon = \dfrac{\ell}{2} > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq n_0,\ |u_n - \ell| < \frac{\ell}{2},$$

soit :

$$\forall n \geq n_0,\ -\frac{\ell}{2} + \ell < u_n < \frac{\ell}{2} + \ell$$

et donc :

$$\forall n \geq n_0,\ u_n > \frac{\ell}{2} > 0.$$

Pour $\ell < 0$, on travaille avec la suite $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. Se déduit facilement du premier point.

■

De manière générale, $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = \ell \neq 0$ dans $\mathbb{C}$, entraîne $|u_n| \neq 0$ (et même $|u_n| > \dfrac{|\ell|}{2}$, comme vu dans la démonstration du théorème précédent) à partir d'un certain rang et $u_n \neq 0$ à partir de ce même rang.

Le résultat suivant est souvent utilisé pour prouver la convergence de suites réelles.

Théorème 3.4 *Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles telles que :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \leq u_n \leq w_n.$$

Si $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n) = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(w_n) = \ell$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = \ell$.

Démonstration. Soit ε un réel strictement positif. Il existe un entier naturel n_0 vérifiant :

$$\forall n \geq n_0,\ \ell - \varepsilon \leq v_n \leq u_n \leq w_n \leq \ell + \varepsilon,$$

donc

$$\forall n \geq n_0,\ |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

La suite u est donc convergente vers ℓ. ■

Exercice 3.9 *Étudier la suite* $u = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k}\right)_{n\geq 1}$.

Solution 3.9 *Pour tout entier* $k \geq 1$, *on a* $\frac{n}{n^2+n} \leq \frac{n}{n^2+k} \leq \frac{n}{n^2+1}$, *ce qui entraîne :*

$$v_n = \frac{n^2}{n^2+n} \leq u_n \leq w_n = \frac{n^2}{n^2+1}.$$

Avec $|v_n - 1| = \frac{n}{n^2+n} \leq \frac{1}{n}$ *et* $|w_n - 1| = \frac{1}{n^2+n} \leq \frac{1}{n}$, *on déduit que* $\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} w_n = 1$ *et* $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

L'exercice qui suit nous fournit une démonstration relativement simple de la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 3.10 *Montrer que pour tout réel* x, *la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *définie par :*

$$u_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}[kx]$$

où $[\cdot]$ *est la partie entière, converge vers* $\frac{x}{2}$.

Solution 3.10 *Pour tout entier* k *compris entre* 1 *et* n, *on a :*

$$[kx] \leq kx < [kx] + 1$$

ou encore :

$$0 \leq kx - [kx] < 1$$

et :

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n} kx - \sum_{k=1}^{n}[kx] < n$$

soit :

$$0 \leq \frac{n(n+1)}{2}x - \sum_{k=1}^{n}[kx] < n$$

ce qui donne :

$$0 \leq \frac{n+1}{2n}x - u_n < \frac{1}{n}$$

et $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{x}{2}$.

Définition 3.5 *Une suite non convergente est dite divergente.*

La divergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut se traduire par :

$$\forall \ell \in \mathbb{C},\ \exists \varepsilon > 0,\ \forall n_0 \in \mathbb{N},\ \exists n \geq n_0 \mid |u_n - \ell| \geq \varepsilon.$$

Une suite non bornée est donc divergente.

Exercice 3.11 *En utilisant la définition, montrer que la suite* $u = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est divergente.*

Solution 3.11 *Si cette suite converge vers un réel ℓ, la suite $|u| = \left(|(-1)^n|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est constante égale à 1 va converger vers $|\ell|$ et nécessairement $\ell = \pm 1$.*
En écrivant que pour $\varepsilon = 1$, il existe un entier n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0,\ |(-1)^n - \ell| < 1,$$

et en prenant $n \geq n_0$ de la parité contraire à celle de ℓ, on aboutit à $2 < 1$ qui est impossible.
La suite u est donc divergente.

Le résultat précédent est un cas particulier du suivant.

Exercice 3.12 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si, et seulement si, elle est stationnaire.*

Solution 3.12 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$ convergente vers $\ell \in \mathbb{R}$. Il existe un entier n_0 tel que :*

$$\forall n \geq n_0,\ |u_n - u_{n_0}| \leq |u_n - \ell| + |\ell - u_{n_0}| < \frac{1}{2}$$

ce qui implique que :

$$\forall n \geq n_0,\ u_n = u_{n_0}$$

puisque les u_n sont entiers. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc stationnaire et $\ell \in \mathbb{Z}$.
La réciproque est évidente.

Parmi les suites réelles divergentes, on traite à part celles qui tendent vers l'infini.

Définition 3.6 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.*
On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ si :

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0,\ u_n > M.$$

On note alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$.
On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ si :

$$\forall m \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0,\ u_n < m.$$

On note alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} -\infty$.

Une suite qui tend vers $+\infty$ est nécessairement positive à partir d'un certain rang.
On peut remarquer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ si, et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} (-u_n) = +\infty$.
Si $u_n = \dfrac{1}{v_n}$ avec $v_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ si, et seulement si, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
Dans la définition ci-dessus, les inégalités peuvent être larges ou strictes et on peut se limiter à $M > 0$ et $m < 0$ sans que cela ne soit restrictif.
Une suite qui tend vers l'infini (i. e. vers $+\infty$ ou $-\infty$) est non bornée donc divergente.
Une suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = +\infty$ est divergente puisque non bornée.

Théorème 3.5 *Si $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres complexes pour laquelle on peut trouver une suite $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ et $|u_n| \geq v_n$ à partir d'un certain rang alors la suite u diverge.*

Démonstration. On a :

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0,\ |u_n| \geq v_n > M,$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = +\infty$ est u est divergente. ■

Exercice 3.13 *Montrer que pour tout réel $\alpha > 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$.*

Solution 3.13 *Pour $M > 0$ donné, on a $n^\alpha > M$ si, et seulement si, $\alpha \ln(n) > \ln(M)$ ce qui est encore équivalent à $n > e^{\frac{\ln(M)}{\alpha}}$ (les fonctions $\ln$ et $\exp$ sont strictement croissantes). Il suffit donc de prendre $n_0 > e^{\frac{\ln(M)}{\alpha}}$.*

Exercice 3.14 *Montrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n) = \ell$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$. La réciproque est-elle vraie ?*

Solution 3.14 *Si $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n) = \ell$, on peut alors trouver, pour tout réel $\varepsilon > 0$, un entier n_0 tel que :*

$$\forall n > n_0,\ |u_{n+1} - u_n| \leq |u_{n+1} - \ell| + |\ell - u_n| < \varepsilon,$$

ce qui signifie que $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$.
Plus généralement, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_{n+p} - u_n) = 0$ pour tout entier $p \geq 1$.
La réciproque est fausse comme le montre l'exemple de la suite $u = (\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$.
Cette suite est divergente puisque non bornée et pour $n \geq 1$, on a :

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

On peut aussi considérer, plus généralement, la suite $u = (n^\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\alpha \in \left]0,1\right[$. Cette suite est divergente puisque non bornée et pour $n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned}(n+1)^\alpha - n^\alpha = [t^\alpha]_n^{n+1} &= \int_n^{n+1} \frac{\alpha}{t^{1-\alpha}} dt \\ &\leq \frac{\alpha}{n^{1-\alpha}} \underset{n\to+\infty}{\to} 0\end{aligned}$$

puisque $1 - \alpha > 0$.
On peut aussi utiliser le théorème des accroissements finis pour écrire que :

$$(n+1)^\alpha - n^\alpha = \alpha \xi_n^{\alpha-1}$$

avec ξ_n compris entre n et $n+1$, ce qui donne $\alpha \xi_n^{\alpha-1} = \frac{\alpha}{\xi_n^{1-\alpha}} \leq \frac{\alpha}{n^{1-\alpha}}$.
Ou encore écrire que :

$$0 < (n+1)^\alpha - n^\alpha = n^\alpha \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha - 1 \right) \leq n^\alpha \left(1 + \frac{1}{n} - 1\right) = \frac{1}{n^{1-\alpha}}.$$

Exercice 3.15 *Montrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n) = \ell$ alors, pour toute application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(u_{\varphi(n)} - u_n\right) = 0$.*

Solution 3.15 *En utilisant l'inégalité $\varphi(n) \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on déduit que si $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n) = \ell$, on peut alors trouver, pour tout réel $\varepsilon > 0$, un entier n_0 tel que :*

$$\forall n > n_0, \ \left|u_{\varphi(n)} - u_n\right| \leq \left|u_{\varphi(n)} - \ell\right| + |\ell - u_n| < \varepsilon,$$

ce qui signifie que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(u_{\varphi(n)} - u_n\right) = 0.$

Exercice 3.16 *Montrer que les suites $u = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $v = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $w = (\ln(n))_{n\geq 1}$ sont divergentes.*

Solution 3.16 *Résulte de :*

$$|u_{n+1} - u_n| = \left|(-1)^{n+1} - (-1)^n\right| = 2,$$

$$|v_{2n} - v_n| = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2},$$

et :

$$|w_{2n} - w_n| = \ln(2).$$

On peut remarquer que la deuxième suite est telle que pour tout entier $p \geq 1$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} (v_{n+p} - v_n) = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{n+k}\right) = 0$$

(somme finie de suites convergentes vers 0 - voir le théorème 3.14, page 48 -).

Exercice 3.17 *Montrer que la suite $u = (\ln(\ln(n)))_{n\geq 2}$ est telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} - u_n = 0$ et non convergente.*

Solution 3.17 *On a :*

$$u_{2n} - u_n = \ln(\ln(2n)) - \ln(\ln(n)) = \ln \frac{\ln(n) + \ln(2)}{\ln(n)} = \ln(1 + \frac{\ln(2)}{\ln(n)})$$

et comme $\dfrac{\ln(2)}{\ln(n)}$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, il en est de même pour $u_{2n} - u_n = \ln(1 + \dfrac{\ln(2)}{\ln(n)})$.
Pourtant si l'on forme : $u_{n^2} - u_n$ on a :

$$u_{n^2} - u_n = \ln\left((\ln n^2)\right) - \ln(\ln(n)) = \ln(\frac{2\ln(n)}{\ln(n)}) = \ln 2.$$

Pour étudier une suite, il est parfois commode de la comparer à une suite de référence. Les suites géométriques font parties de ces suites de référence.

Exercice 3.18 *Étudier la suite géométrique $u = (a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $a \in \mathbb{C}$.*

Solution 3.18 *Si $a = 0$ alors u est stationnaire sur 0.*
Pour $|a| > 1$, l'inégalité de Bernoulli (ou plus simplement la formule du binôme de Newton) nous dit que $|a^n| \geq 1 + n(|a| - 1)$ et comme $|a| - 1 > 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} (n(|a| - 1)) = +\infty$, ce qui entraîne que $\lim\limits_{n\to+\infty} |a|^n = +\infty$ et la suite u diverge.
Pour $0 < |a| < 1$, en écrivant que $|a|^n = \dfrac{1}{\frac{1}{|a|^n}}$ avec $\dfrac{1}{|a|} > 1$, on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 0$.
Pour $|a| = 1$, on a $a = e^{i\theta}$.
Si $\theta = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ (soit $a = 1$), alors u est constante égale à 1.
Supposons que $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(e^{in\theta}\right) = \ell$. Avec :

$$|u_{n+1} - u_n|^2 = \left|e^{in\theta}\left(1 - e^{i\theta}\right)\right|^2 = \left|1 - e^{i\theta}\right|^2 = 4\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right),$$

on déduit que $\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = 0$ *et $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$, ce qui est contradictoire. La suite u est donc divergente.*
On peut aussi dire que si $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(e^{in\theta}\right) = \ell$ alors $|\ell| = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\left|e^{in\theta}\right|\right) = 1$, donc $\ell \neq 0$ et $e^{i\theta} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) = 1$, *ce qui contredit $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$.*

Exercice 3.19 *Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe.*

1. *Montrer que s'il existe un réel $\lambda \in [0, 1[$ tel que $|u_{n+1}| \leq \lambda |u_n|$ à partir d'un certain rang n_0, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n) = 0$.*
2. *Montrer que s'il existe un indice n_0 tel que $u_{n_0} \neq 0$ et s'il existe un réel $\lambda > 1$ tel que $|u_{n+1}| \geq \lambda |u_n|$ pour tout $n \geq n_0$, alors u diverge.*
3. *Montrer que si $u_n \neq 0$ à partir d'un certain rang n_0, et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|\right) = \lambda \in [0, 1[$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n) = 0$.*
4. *Montrer que si $u_n \neq 0$ à partir d'un certain rang n_0, et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|\right) = \lambda > 1$, alors u diverge.*
5. *Trouver $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.*
6. *Trouver $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.*
7. *Trouver $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 10$.*

Solution 3.19

1. *Si $\lambda = 0$, alors u est stationnaire sur 0 à partir du rang $n_0 + 1$.*
   On suppose donc que $\lambda \in]0, 1[$.
   Montrons par récurrence sur $n \geq n_0$ que $|u_n| \leq u_{n_0}\lambda^{n-n_0}$.
   C'est vrai pour $n = n_0$.
   Supposons que pour une valeur $n \geq n_0$ on ait $|u_n| \leq u_{n_0}\lambda^{n-n_0}$, comme $|u_{n+1}| \leq \lambda |u_n|$, on a $|u_{n+1}| \leq u_{n_0}\lambda^{n+1-n_0}$ et la récurrence est établie.
   Pour $\lambda \in]0, 1[$ la suite géométrique de terme général $\dfrac{u_{n_0}}{\lambda^{n_0}}\lambda^n$ converge vers 0, et comme cette suite majore la suite positive $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ on peut affirmer que cette dernière converge aussi vers 0 et il en est de même de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. *Si* $u_{n_0} \neq 0$, *on vérifie par récurrence que* $u_n \neq 0$ *pour* $n \geq n_0$. *En appliquant le résultat précédent à la suite* $\left(\frac{1}{|u_n|}\right)_{n \geq n_0}$, *on déduit que* $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{|u_n|}\right)$, *ce qui équivaut à* $\lim\limits_{n \to +\infty} (|u_n|) = +\infty$ *et* u *diverge.*
3. *Si* $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\right) = \lambda$, *on a :*
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ n > n_0 \ \Rightarrow\ \lambda - \varepsilon < \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < \lambda + \varepsilon.$$
Dans le cas où $\lambda \in [0,1[$, *on peut choisir* ε *assez petit pour que* $\rho = \lambda + \varepsilon$ *soit strictement inférieur à* 1 *et on a alors* $|u_{n+1}| \leq \rho\, |u_n|$ *pour tout* $n \geq n_0$ *avec* $\rho \in]0,1[$, *ce qui implique* $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = 0$.
4. *Le résultat précédent appliqué à la suite* v *définie par* $v_n = \frac{1}{|u_n|}$ *pour* n *assez grand, nous dit que* $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n) = 0$, *donc* $\lim\limits_{n \to +\infty} (|u_n|) = +\infty$ *et* $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *diverge.*
5. *On considère la suite de terme général* $u_n = n + 1$.
6. *Il suffit de prendre* $u_n = \frac{1}{n+1}$.
7. *On considère la suite de terme général* $u_n = 10 + \frac{1}{n+1}$.

Exercice 3.20 *Soit* $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite réelle ou complexe.*

1. *Montrer que s'il existe un réel* $\lambda \in [0,1[$ *tel que* $\sqrt[n]{|u_n|} \leq \lambda$ *à partir d'un certain rang* n_0, *alors* $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = 0$.
2. *Montrer que s'il existe s'il existe un réel* $\lambda > 1$ *tel que* $\sqrt[n]{|u_n|} \geq \lambda$ *à partir d'un certain rang* n_0, *alors* u *diverge.*
3. *Montrer que si* $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\sqrt[n]{|u_n|}\right) = \lambda \in [0,1[$, *alors* $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = 0$.
4. *Montrer que si* $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\sqrt[n]{|u_n|}\right) = \lambda > 1$, *alors* u *diverge.*
5. *Trouver* $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *telle que* $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = 1$ *et* $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
6. *Trouver* $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *telle que* $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = 1$ *et* $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.
7. *Trouver* $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *telle que* $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = 1$ *et* $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 10$.

Solution 3.20

1. *Résulte de* $0 \leq |u_n| \leq \lambda^n$ *pour* $n \geq n_0$ *avec* $\lim\limits_{n \to +\infty} (\lambda^n) = 0$ *(*$\lambda \in [0,1[$*).*
2. *Résulte de* $|u_n| \geq \lambda^n$ *pour* $n \geq n_0$ *avec* $\lim\limits_{n \to +\infty} (\lambda^n) = +\infty$ *(*$\lambda > 1$*).*
3. *Si* $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\sqrt[n]{|u_n|}\right) = \lambda$, *on a :*
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ n > n_0 \ \Rightarrow\ \lambda - \varepsilon < \sqrt[n]{|u_n|} < \lambda + \varepsilon.$$
Dans le cas où $\lambda \in [0,1[$, *on peut choisir* ε *assez petit pour que* $\rho = \lambda + \varepsilon$ *soit strictement inférieur à* 1 *et on a alors* $\sqrt[n]{|u_n|} \leq \rho$ *pour tout* $n \geq n_0$ *avec* $\rho \in [0,1[$, *ce qui implique* $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = 0$.

4. *Le résultat précédent appliqué à la suite v définie par $v_n = \dfrac{1}{|u_n|}$ pour n assez grand (pour $\varepsilon > 0$ assez petit et $n \geq n_0$, on a $\sqrt[n]{|u_n|} > \lambda - \varepsilon > 0$ et $u_n \neq 0$) nous dit que $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n) = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (|u_n|) = +\infty$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.*
5. *On considère la suite de terme général $u_n = n$.*
6. *Il suffit de prendre $u_n = \dfrac{1}{n+1}$.*
7. *On considère la suite définie par $u_n = \dfrac{10}{e} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ pour $n \geq 1$.*

En utilisant le théorème de Césaro, on peut montrer le résultat suivant.

Théorème 3.6 *Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe telle que u_n soit non nul à partir d'un certain rang. Si $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\left| \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \right| \right) = \lambda$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\sqrt[n]{|u_n|} \right) = \lambda$.*

Démonstration. Voir l'exercice 3.73. ∎

Remarque 3.1 *La réciproque du théorème précédent est fausse (voir l'exercice 3.73.).*

Exercice 3.21 *Montrer que la suite $u = \left(\dfrac{n!}{n^n} \right)_{n \geq 1}$ est convergente vers 0.*

Solution 3.21 *Se déduit de $u_n > 0$ pour tout $n \geq 1$ et :*

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right) = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{(n+1)\, n^n}{(n+1)^{n+1}} \right) = \lim_{n \to +\infty} \left(\left(\frac{n}{n+1} \right)^n \right) = \frac{1}{e} < 1.$$

Exercice 3.22 *Montrer, en utilisant le théorème précédent, que pour tout nombre complexe λ, la suite $u = \left(\dfrac{\lambda^n}{n!} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente vers 0.*

Solution 3.22 *Pour $\lambda = 0$ c'est clair et pour $\lambda \neq 0$ le résultat se déduit de :*

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \right) = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{|\lambda|}{n+1} \right) = 0.$$

Exercice 3.23 *Montrer que si $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ est une fonction telle que la fonction $g : x \longmapsto x f(x)$ soit minorée par un réel $\lambda > 0$, alors la suite réelle $u = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} f(k) \right)_{n \geq 1}$ est divergente.*

Solution 3.23 *On a :*

$$u_{2n} - u_n = \sum_{k=1}^{n} f(n+k) \geq \lambda \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \geq \lambda \frac{n}{2n} = \frac{\lambda}{2} > 0$$

et la suite diverge.

Exercice 3.24 *Montrer que pour tout $\alpha \leq 1$, la suite réelle de terme général $u = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^\alpha} \right)_{n \geq 1}$ est divergente.*

Solution 3.24 *Il suffit d'appliquer le résultat précédent à*

$$f : x \longmapsto \frac{1}{x^\alpha}$$

avec $x f(x) = x^{1-\alpha} \geq 1$ pour $\alpha \leq 1$ et $x \geq 1$.

3.4 Valeurs d'adhérence

Définition 3.7 *On dit qu'un scalaire a est valeur d'adhérence de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *s'il est limite d'une suite extraite de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple 3.1 *On considère la suite de réels* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par,*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n+1}\right).$$

Les réels 1 *et* -1 *sont valeurs d'adhérence de cette suite car la suite* $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente vers* 1 *et la suite* $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ *vers* -1.

Le résultat suivant est parfois utilisé par sa contraposée pour prouver la divergence d'une suite.

Théorème 3.7 *Une suite convergente a une unique valeur d'adhérence. Autrement dit : si une suite est convergente, alors toute suite extraite converge vers la même limite.*

Démonstration. Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n) = \ell$. Pour tout réel ε strictement positif, on a :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0,\ |u_n - \ell| < \varepsilon$$

et pour toute application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante, on a :

$$\forall n \geq n_0,\ \varphi(n) \geq n \geq n_0$$

ce qui implique que :

$$\forall n \geq n_0,\ \left|u_{\varphi(n)} - \ell\right| < \varepsilon.$$

La suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc convergente vers ℓ. ∎

L'exercice qui suit nous montre que la réciproque est fausse, c'est-à-dire qu'une suite qui n'a qu'une valeur d'adhérence n'est pas nécessairement convergente.

Exercice 3.25 *Montrer que la suite* $u = \left(n^{(-1)^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *admet* 0 *comme unique valeur d'adhérence et est divergente.*

Solution 3.25 *De* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2n+1} = 0$, *on déduit que* 0 *est une valeur d'adhérence de* u.
Si $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)}$ *est une valeur d'adhérence non nulle de* u, *où* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *est strictement croissante, on a alors* $\ell > 0$ *(puisque* $u_n > 0$ *pour tout* n*) et :*

$$|\ln(\ell)| = \lim_{n\to+\infty} \left|\ln\left(u_{\varphi(n)}\right)\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|(-1)^{\varphi(n)} \varphi(n)\right| = \lim_{n\to+\infty} \varphi(n) = +\infty,$$

ce qui est impossible. Donc 0 *est l'unique valeur d'adhérence de* u.
Et cette suite est divergente puisque non majorée $(u_{2n} = 2n)$.

On peut aussi utiliser la suite définie par :

$$u_n = \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ est impair,} \\ n \text{ si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

Comme conséquence du théorème de Bolzano-Weierstrass, on montrera le résultat suivant (théorème 3.20).

Théorème 3.8 *Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si, et seulement si, elle est bornée et n'a qu'une seule valeur d'adhérence.*

Théorème 3.9 *Une suite réelle est divergente, si et seulement si, elle vérifie l'une des deux conditions suivantes :*
— *elle est non bornée ;*
— *elle est bornée et admet au moins deux valeurs d'adhérence.*

Exercice 3.26 *Montrer qu'une suite périodique convergente est nécessairement constante.*

Solution 3.26 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite périodique convergente vers ℓ et périodique de période p où p est un entier strictement positif.*
Pour tout entier naturel k, la suite extraite $(u_{pn+k})_{n\in\mathbb{N}}$ est constante de valeur commune u_k et convergente vers ℓ. On a donc $u_k = \ell$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
La réciproque est évidente.

Exercice 3.27 *Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe telle que les deux suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes. À quelle condition la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est elle convergente ?*

Solution 3.27 *En notant ℓ et ℓ' les limites respectives des suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, montrons que u est convergente si, et seulement si, $\ell = \ell'$.*
Si $\ell \neq \ell'$, alors u admet au moins deux valeurs d'adhérences distinctes et en conséquence ne peut converger.
Si $\ell = \ell'$, pour tout réel $\varepsilon > 0$, on peut trouver des entiers n_1 et n_2 tels que :

$$\begin{cases} \forall n \geq n_1, \ |u_{2n} - \ell| < \varepsilon \\ \forall n \geq n_2, \ |u_{2n+1} - \ell'| < \varepsilon \end{cases}$$

et en notant $n_0 = \max(2n_1, 2n_2 + 1)$, on a :

$$\forall n \geq n_0, \ |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

Exercice 3.28 *Montrer que si $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite complexe telle que les trois suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes (pas nécessairement vers la même limite), alors u est convergente.*

Solution 3.28 *Notons ℓ, ℓ' et ℓ'' les limites respectives des suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$.*
La suite $(u_{6n})_{n\in\mathbb{N}}$ qui est extraite de $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ et ℓ'', ce qui entraîne $\ell = \ell''$ du fait de l'unicité de la limite. De même en remarquant que $(u_{6n+3})_{n\in\mathbb{N}}$ est extraite de $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$, on déduit que $\ell' = \ell''$ et $\ell = \ell'$, c'est-à-dire que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite, ce qui équivaut à la convergence de u.

Le résultat qui suit est classique, même si démonstration n'est pas élémentaire.

Exercice 3.29 *On se propose de montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $u = (\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est $[-1, 1]$.*
On dit qu'un sous-groupe additif H de $(\mathbb{R}, +)$ est discret si pour tout compact K de $\mathbb{R}$, l'intersection $H \cap K$ est finie.

1. *Montrer que les sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$ discrets sont de la forme :*
$$\mathbb{Z}\alpha = \{p\alpha \mid p \in \mathbb{Z}\},$$
où α est un réel.
2. *Montrer que les sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$ sont denses ou discrets.*
3. *Soient a, b deux réels non nuls. Montrer que le groupe additif $G = \mathbb{Z}a+\mathbb{Z}b = \{pa + qb \mid (p, q) \in \mathbb{Z}^2\}$ est discret [resp. dense] si, et seulement si, $\frac{a}{b}$ est rationnel [resp. irrationnel].*
4. *On note $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ le cercle unité dans le plan complexe.*
   (a) *Montrer que $\{e^{in} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans Γ.*
   (b) *Montrer que l'ensemble $\{\cos(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1, 1]$, ce qui signifie que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $u = (\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est $[-1, 1]$.*

Solution 3.29

1. *Il est clair que tout sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ de la forme $\mathbb{Z}\alpha$ est discret. En effet pour $\alpha = 0$ c'est clair et pour $\alpha \neq 0$ tout compact K de $\mathbb{R}$ est contenu dans un intervalle $[a, b]$ avec $a < b$ et il n'y a qu'un nombre fini d'entiers p vérifiant $a \leq p\alpha \leq b$.*
Réciproquement si H est un sous-groupe discret de $(\mathbb{R}, +)$ non réduit à $\{0\}$, il existe alors un réel a dans $H \cap \mathbb{R}_+^*$ ($0 \neq a \in H \Rightarrow -a \in H$) et $]0, a] \cap H$ est fini non vide, il admet donc un plus petit élément $\alpha > 0$. De $\alpha \in H$ on déduit que $\mathbb{Z}\alpha \subset H$. De plus, pour tout $x \in H$ il existe un entier relatif k tel que $0 \leq x - k\alpha < \alpha \leq a$ ($k = E\left(\frac{x}{\alpha}\right)$) et avec $x - k\alpha \in H \cap \mathbb{R}_+$ on déduit du caractère minimal de α que $x - k\alpha = 0$, soit $x = k\alpha \in \mathbb{Z}\alpha$. On a donc en définitive $H = \mathbb{Z}\alpha$.
2. *Si H un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ non réduit à $\{0\}$ alors :*
$$K = H \cap \mathbb{R}_+^* \neq \emptyset$$
et cet ensemble est minoré par 0, il admet donc une borne inférieure α.
On distingue deux cas.
Si $\alpha > 0$, alors $\alpha \in K$. En effet dans le cas contraire, par définition de la borne inférieure, on peut trouver $x \in K$ tel que $\alpha < x < 2\alpha$ (on suppose que $\alpha \notin H$). Pour la même raison, on peut trouver $y \in K$ tel que $\alpha < y < x$. On a alors $0 < x - y < \alpha$ avec $x - y \in H \cap \mathbb{R}_+^*$, ce qui est contradictoire avec la définition de la borne inférieure α. Avec la structure de groupe additif de H, on déduit alors que $H = \mathbb{Z}\alpha$. En effet, $\mathbb{Z}\alpha \subset H$ du fait que α appartient au groupe H et pour tout x dans H, il existe k dans $\mathbb{Z}$ tel que $0 \leq x - k\alpha < \alpha$, donc $x - k\alpha = 0$ et $x \in \mathbb{Z}\alpha$, c'est-à-dire que $H \subset \mathbb{Z}\alpha$.
Si $\alpha = 0$, alors H est dense dans $\mathbb{R}$. En effet pour $x < y$ dans $\mathbb{R}$, il existe z dans $H \cap \mathbb{R}_+^*$ tel que $0 < z < y - x$ soit $1 < \frac{y}{z} - \frac{x}{z}$ et pour $n \in \left]\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right[\cap \mathbb{Z}$, on a $x < nz < y$ avec $nz \in H$.
Si G est discret, alors $G = \mathbb{Z}\alpha$ et $a = p\alpha$, $b = q\alpha$ avec p et q non nuls dans $\mathbb{Z}$ et en conséquence $\frac{a}{b} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$.
Réciproquement, supposons $\frac{a}{b}$ rationnel, on peut écrire $\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$ avec p et q entiers premiers entre eux et on a :
$$G = \mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b = \left(\mathbb{Z}\frac{p}{q} + \mathbb{Z}\right) b = (\mathbb{Z}p + \mathbb{Z}q)\, \frac{b}{q}.$$

Le théorème de Bézout nous dit que $\mathbb{Z}p+\mathbb{Z}q=\mathbb{Z}$ *et donc* $G=\mathbb{Z}\frac{b}{q}$, *c'est-à-dire que* G *est discret.*

3.

(a) Comme 2π *est irrationnel, le groupe* $H=\mathbb{Z}2\pi+\mathbb{Z}$ *est dense dans* $\mathbb{R}$. *Avec la* 2π-*périodicité, la continuité et la surjectivité de l'application* $f : x \mapsto e^{ix}$ *de* $\mathbb{R}$ *sur* Γ, *on déduit alors que l'ensemble :*

$$f(H)=\left\{e^{(2\pi m+n)i} \mid (m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\right\}=\left\{e^{in}\mid n\in\mathbb{Z}\right\}$$

est dense dans Γ.

(b) Avec la continuité et la surjectivité de la projection $p : z \mapsto \Re(z)$ *de* Γ *sur* $[-1,1]$, *on déduit que l'ensemble* $\{\cos(n)\mid n\in\mathbb{Z}\}$ *est dense dans* $[-1,1]$, *puis par parité que l'ensemble* $\{\cos(n)\mid n\in\mathbb{N}\}$ *est dense dans* $[-1,1]$.

Moins classique sont les résultats suivants.

Exercice 3.30 *Soit* α *un réel fixé dans* $]0,1[$ *et* $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $u_n=\cos(n^\alpha)$ *pour* $n\geq 0$.
On se donne un réel $x\in[-1,1]$ *et on note* θ *le réel de* $[0,\pi]$ *défini par* $x=\cos(\theta)$.
Pour tout entier $n\geq 1$, *on désigne par* $\varphi(n)$ *l'entier défini par :*

$$\varphi(n)^\alpha\leq\theta+2n\pi<(\varphi(n)+1)^\alpha$$

c'est-à-dire que $\varphi(n)=E\left((\theta+2n\pi)^{\frac{1}{\alpha}}\right)$ *(*E *est la fonction partie entière).*

1. *Montrer que* φ *est une fonction strictement croissante de* $\mathbb{N}^*$ *dans* $\mathbb{N}^*$.
2. *Montrer que* $\lim\limits_{n\to+\infty}(\theta+2n\pi-\varphi(n)^\alpha)=0$.
3. *Montrer que* $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(u_{\varphi(n)}\right)=x$.
4. *En déduire que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite* u *est* $[-1,1]$.

Solution 3.30

1. *Résulte de la croissance de la fonction partie entière (précisément si* $x-y>1$ *alors* $E(x)>E(y)$*), de la stricte croissance de la fonction* $t^{\frac{1}{\alpha}}$ *et du fait que* $2\pi>1$. *En effet, en posant* $v_n=(\theta+2n\pi)^{\frac{1}{\alpha}}$ *et en utilisant le théorème des accroissements finis, on a pour tout entier* $n\geq 1$ *:*
$$v_{n+1}-v_n=2\pi\frac{1}{\alpha}\xi_n^{\frac{1}{\alpha}-1}$$
où ξ_n *est un réel compris entre* $\theta+2n\pi$ *et* $\theta+2(n+1)\pi$. *Et comme* $0<\alpha<1$, $\xi_n>1$, *on a* $\frac{1}{\alpha}\xi_n^{\frac{1}{\alpha}-1}>1$ *et* $v_{n+1}-v_n>2\pi>1$ *de sorte que* $\varphi(n+1)=E(v_{n+1})>E(v_n)=\varphi(n)$.
2. *Résulte de :*
$$0\leq\theta+2n\pi-\varphi(n)^\alpha<(\varphi(n)+1)^\alpha-\varphi(n)^\alpha$$
et de $\lim\limits_{p\to+\infty}((p+1)^\alpha-p^\alpha)=0$ *(exercice 3.14).*
3. *Pour* $n\geq 1$, *on a, en utilisant l'inégalité des accroissements finis pour la fonction* $\cos$ *:*

$$\begin{aligned}\left|u_{\varphi(n)}-x\right|&=|\cos(\varphi(n)^\alpha)-\cos(\theta)|=|\cos(\varphi(n)^\alpha)-\cos(\theta+2n\pi)|\\&\leq|\theta+2n\pi-\varphi(n)^\alpha|\underset{n\to+\infty}{\to}0.\end{aligned}$$

4. *La suite u étant à valeurs dans $[-1,1]$, ses valeurs d'adhérence sont dans $[-1,1]$ et ce qui précède nous donne l'inclusion réciproque puisqu'on a montré que tout réel $x \in [-1,1]$ est limite d'une suite extraite de u.*

Exercice 3.31 *Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \cos(\ln(n))$ pour $n \geq 1$.*
On se donne un réel $x \in [-1,1]$ et on note θ le réel de $[0,\pi]$ défini par $x = \cos(\theta)$.
Pour tout entier $n \geq 1$, on désigne par $\varphi(n)$ l'entier défini par :

$$\ln(\varphi(n)) \leq \theta + 2n\pi < \ln(\varphi(n)+1)$$

c'est-à-dire que $\varphi(n) = E\left(e^{\theta+2n\pi}\right)$ (E est la fonction partie entière).

1. *Montrer que φ est une fonction strictement croissante de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$.*
2. *Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} (\theta + 2n\pi - \ln(\varphi(n))) = 0$.*
3. *Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(u_{\varphi(n)}\right) = x$.*
4. *En déduire que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite u est $[-1,1]$.*

Solution 3.31

1. *Résulte de la croissance de la fonction partie entière (précisément si $x - y > 1$ alors $E(x) > E(y)$), de la stricte croissance de la fonction e^t et du fait que $e^{2\pi} > 2$. En effet, en posant $v_n = e^{\theta+2n\pi}$, on a pour tout entier $n \geq 1$:*

$$v_{n+1} - v_n = e^{\theta+2n\pi}\left(e^{2\pi} - 1\right) > 1$$

de sorte que $\varphi(n+1) = E(v_{n+1}) > E(v_n) = \varphi(n)$.

2. *Résulte de :*

$$0 \leq \theta + 2n\pi - \ln(\varphi(n)) < \ln(\varphi(n)+1) - \ln(\varphi(n)) = \ln\left(1 + \frac{1}{\varphi(n)}\right)$$

avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{\varphi(n)}\right) = 0$ (φ est strictement croissante de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi(n) = +\infty$).

3. *Pour $n \geq 1$, on a, en utilisant l'inégalité des accroissements finis pour la fonction* cos *:*

$$\begin{aligned}\left|u_{\varphi(n)} - x\right| &= |\cos(\ln(\varphi(n))) - \cos(\theta)| = |\cos(\ln(\varphi(n))) - \cos(\theta + 2n\pi)| \\ &\leq |\theta + 2n\pi - \ln(\varphi(n))| \underset{n\to+\infty}{\to} 0.\end{aligned}$$

4. *La suite u étant à valeurs dans $[-1,1]$, ses valeurs d'adhérence sont dans $[-1,1]$ et ce qui précède nous donne l'inclusion réciproque puisqu'on a montré que tout réel $x \in [-1,1]$ est limite d'une suite extraite de u.*

3.5 Le critère de Cauchy

Définition 3.8 *On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy si :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0,\ \forall m \geq n_0,\ |u_n - u_m| < \varepsilon.$$

Comme pour la définition d'une suite convergente les inégalités peuvent être strictes ou larges et on peut se limiter à $\varepsilon \in \left]0,1\right[$. De plus, comme m et n jouent des rôles symétriques, on peut se limiter à $m > n$.

Théorème 3.10 *Une suite de Cauchy est bornée.*

Démonstration. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, il existe alors un entier naturel $n_0 \geq 1$ tel que :

$$\forall n \geq n_0,\ \forall m \geq n_0,\ |u_n - u_m| < 1$$

ce qui entraîne :

$$\forall n \geq n_0,\ |u_n| \leq |u_n - u_{n_0}| + |u_{n_0}| < 1 + |u_{n_0}|$$

et en posant :

$$M = \max\left\{|u_0|, \cdots, |u_{n_0}|, 1 + |u_{n_0}|\right\}$$

on a $|u_n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui signifie que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. ■

Théorème 3.11 *Une suite convergente est de Cauchy.*

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente vers ℓ. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un entier positif n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0,\ |u_n - \ell| < \varepsilon$$

et :

$$\forall n \geq n_0,\ \forall m \geq n_0,\ |u_n - u_m| \leq |u_n - \ell| + |u_m - \ell| < 2\varepsilon.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc de Cauchy. ■

On admet que la réciproque est vrai, c'est-à-dire le résultat fondamental suivant.

Théorème 3.12 *Une suite réelle ou complexe est convergente si, et seulement si, elle est de Cauchy.*

Ce résultat se traduit en disant que l'espace métrique $\mathbb{C}$ muni de la norme usuelle est complet.

Le résultat suivant est souvent utilisé pour montrer qu'une suite est de Cauchy.

Théorème 3.13 *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dans $\mathbb{C}$ telle qu'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\geq n_0}$ de réels positifs vérifiant :*

$$\left\{\begin{array}{l} \forall m > n \geq n_0,\ |u_m - u_n| \leq \varepsilon_n, \\ \lim\limits_{n\to+\infty} (\varepsilon_n) = 0, \end{array}\right.$$

alors cette suite est de Cauchy et en conséquence convergente.

Démonstration. De $\lim\limits_{n\to+\infty} (\varepsilon_n) = 0$, on déduit que pour tout réel $\varepsilon > 0$ on peut trouver un entier n_0 tel que $\varepsilon_n < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$, ce qui entraîne $|u_m - u_n| < \varepsilon$ pour $m > n \geq n_0$. ■

Exercice 3.32 *Montrer que, pour tout nombre complexe z, la suite $(u_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{z^k}{k!}$ est convergente. La limite de cette suite est l'exponentielle complexe de z notée* $\exp(z)$.

Solution 3.32 *Pour $m > n > 2$, on a :*

$$|u_m(z) - u_n(z)| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} \frac{z^k}{k!}\right| = \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}\left|1 + \frac{z}{n+2} + \cdots + \frac{z^{m-n-1}}{(n+2)\cdots(m-1)m}\right|$$
$$\leq \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}\left(1 + \frac{|z|}{n+2} + \frac{|z|^2}{(n+2)^2}\cdots + \frac{|z|^{m-n-1}}{(n+2)^{m-n-1}}\right)$$

et en désignant par $n_0 > 2$ un entier naturel tel que $n_0 + 2 > |z|$, on a pour $m > n \geq n_0$:

$$|u_m(z) - u_n(z)| \leq \varepsilon_n = \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}\frac{1}{1 - \frac{|z|}{n+2}}$$

avec $\lim\limits_{n\to+\infty}(\varepsilon_n) = 0$, ce qui implique que $(u_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, donc convergente.
En écrivant $\varepsilon_n = \delta_n \dfrac{1}{1 - \frac{|z|}{n+2}}$, le fait que $\lim\limits_{n\to+\infty}(\varepsilon_n) = 0$ se déduit de $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 - \dfrac{|z|}{n+2}\right) = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\delta_{n+1}}{\delta_n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{|z|}{n+2} = 0$ qui entraîne $\lim\limits_{n\to+\infty}(\delta_n) = 0$.

Exercice 3.33 *Montrer que, pour tout nombre complexe z tel que $|z| < 1$, la suite $(u_n(z))_{n\geq 1}$ définie par $u_n(z) = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{z^k}{k}$ est convergente (pour z réel, cette limite est $-\ln(1-z)$).*

Solution 3.33 *Pour $m > n \geq 1$, on a :*

$$|u_m(z) - u_n(z)| = \left|\sum_{k=n+1}^{m}\frac{z^k}{k}\right| \leq |z|^{n+1}\sum_{k=0}^{m-n-1}|z|^k$$
$$\leq |z|^{n+1}\frac{1 - |z|^{m-n}}{1 - |z|} \leq |z|^{n+1}\frac{1}{1 - |z|}$$

3.6 Opérations sur les suites convergentes

Théorème 3.14 *Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n) = \ell'$.*

1. *Les suites $u + v$ et $u \cdot v$ sont convergentes vers respectivement $\ell + \ell'$ et $\ell \cdot \ell'$.*
2. *Dans le cas où les suites u et v sont réelles, les suites $\min\{u, v\} = (\min\{u_n, v_n\})_{n\in\mathbb{N}}$ et $\max\{u, v\} = (\max\{u_n, v_n\})_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes vers respectivement $\min\{\ell, \ell'\}$ et $\max\{\ell, \ell'\}$.*
3. *Si $\ell' \neq 0$, il existe alors un entier n_0 tel que la suite $\dfrac{u}{v} = \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\geq n_0}$ soit définie et cette suite converge vers $\dfrac{\ell}{\ell'}$.*
4. *Si $\ell > 0$, il existe un entier n_0 tel que $u_n > 0$ pour tout $n \geq n_0$ et la suite $\sqrt{u} = \left(\sqrt{u_n}\right)_{n\geq n_0}$ converge vers $\sqrt{\ell}$.*

Démonstration.

1. Soit ε un réel strictement positif.

$$\exists n_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_1,\ |u_n - \ell| < \varepsilon,$$

$$\exists n_2 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_2,\ |v_n - \ell'| < \varepsilon.$$

En posant $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, on a :

$$\forall n \geq n_0,\ |(u_n + v_n) - (\ell + \ell')| \leq |u_n - \ell| + |v_n - \ell'| < 2\varepsilon$$

ce qui signifie que la suite $u + v$ converge vers $\ell + \ell'$.
Par ailleurs, comme la suite convergente v est bornée, il existe un réel $M > 0$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |v_n| \leq M$$

et pour tout $n \geq n_0$, on a :

$$\begin{aligned} |u_n v_n - \ell\ell'| \leq |u_n v_n - \ell v_n| + |\ell v_n - \ell\ell'| &\leq M\,|u_n - \ell| + |\ell|\,|v_n - \ell'| \\ &\leq (M + |\ell|)\,\varepsilon, \end{aligned}$$

ce qui signifie que la suite $u \cdot v$ est convergente vers $\ell \cdot \ell'$.

2. Se déduit de :

$$\begin{cases} \min(a, b) = \dfrac{1}{2}(a + b - |a - b|), \\ \max(a, b) = \dfrac{1}{2}(a + b + |a - b|). \end{cases}$$

3. Si $\ell' \neq 0$ alors à partir d'un certain rang n_0, les éléments de la suite v sont non nuls et la suite $\dfrac{u}{v}$ est définie à partir de ce rang. On peut en fait trouver n_0 tel que $|v_n| > \dfrac{|\ell'|}{2}$ pour $n \geq n_0$ (voir la démonstration du théorème 3.3), ce qui entraîne que :

$$\forall n \geq n_0,\ \left|\frac{1}{v_n} - \frac{1}{\ell'}\right| = \left|\frac{\ell' - v_n}{\ell' v_n}\right| \leq \frac{2}{|\ell'|^2}\,|v_n - \ell'|$$

et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{v_n}\right) = \dfrac{1}{\ell'}$. Le résultat sur le produit nous donne alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right) = \dfrac{\ell}{\ell'}$.

4. Si $\ell > 0$, on peut en fait trouver un entier n_0 tel que $u_n \geq \dfrac{\ell}{4}$ pour tout $n \geq n_0$ et avec :

$$\left|\sqrt{u_n} - \sqrt{\ell}\right| = \frac{|u_n - \ell|}{\sqrt{u_n} + \sqrt{\ell}} \leq \frac{2}{3\sqrt{\ell}}\,|u_n - \ell|$$

on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{u_n}\right) = \sqrt{\ell}$.

■

Exercice 3.34 *Montrer que la suite* $u = (\tan(n))_{n\in\mathbb{N}}$ *est divergente.*

Solution 3.34 *Supposons que* $\lim\limits_{n\to+\infty}(\tan(n)) = \ell$. *Avec :*

$$\tan(n+1) = \frac{\tan(n) + \tan(1)}{1 - \tan(n)\tan(1)},$$

on déduit que $\ell = \dfrac{\ell + \tan(1)}{1 - \ell\tan(1)}$ *et* $\tan(1)(1 + \ell^2) = 0$ *qui est impossible.*

Exercice 3.35 *Montrer que les suites réelles* $u = (\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $v = (\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ *sont divergentes.*

Solution 3.35 *Supposons que* $\lim\limits_{n\to+\infty} (\sin(n)) = \ell$. *Avec :*

$$\sin(n+1) + \sin(n-1) = 2\sin(n)\cos(1),$$

on déduit que $2\ell = 2\ell\cos(1)$, *ce qui impose* $\ell = 0$ *puisque* $\cos(1) \neq 1$.
Avec :

$$\sin(n+1) = \cos(n)\sin(1) + \sin(n)\cos(1),$$

on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} (\cos(n)\sin(1)) = 0$, *ce qui entraîne* $\lim\limits_{n\to+\infty} (\cos(n)) = 0$ *puisque* $\sin(1) \neq 0$, *mais ce dernier résultat est incompatible avec* $\cos^2(n) + \sin^2(n) = 1$.
On procède de manière analogue pour la suite v.

Exercice 3.36 *Étudier, de manière plus générale, les suites* $u = (\sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $v = (\cos(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$, *où* θ *est un réel fixé.*

Solution 3.36 *Si* $\theta = k\pi$, *où* k *est un entier relatif, on a alors pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0$ *et* $v_n = (-1)^{nk}$. *La suite* u *est donc convergente et la suite* v *est convergente pour* k *pair et divergente pour* k *impair.*
On suppose maintenant que $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$. *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} (\sin(n\theta)) = \ell$, *avec :*

$$\sin((n+1)\theta) + \sin((n-1)\theta) = 2\sin(n\theta)\cos(\theta),$$

on déduit que $2\ell = 2\ell\cos(\theta)$, *ce qui impose* $\ell = 0$ *puisque* $\cos(\theta) \neq 1$ *pour* $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$. *Puis avec :*

$$\sin((n+1)\theta) = \cos(n\theta)\sin(\theta) + \sin(n\theta)\cos(\theta),$$

on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} (\cos(n\theta)\sin(\theta)) = 0$, *ce qui entraîne* $\lim\limits_{n\to+\infty} (\cos(n\theta)) = 0$ *puisque* $\sin(\theta) \neq 0$ *pour* $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$. *Mais ce dernier résultat est incompatible avec* $\cos^2(n\theta) + \sin^2(n\theta) = 1$.
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} (\cos(n\theta)) = \ell$, *avec :*

$$\cos((n+1)\theta) = \cos(n\theta)\cos(\theta) - \sin(n\theta)\sin(\theta),$$

on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin(n\theta) = \dfrac{\ell(\cos(\theta) - 1)}{\sin(\theta)}$, *ce qui contredit la divergence de* u.

Exercice 3.37 *Étudier, sans utiliser la fonction* $\ln$, *la suite* $u = \left(\sqrt[n]{\lambda}\right)_{n\geq 1}$ *où* λ *est un nombre réel strictement positif (voir l'exercice 3.45 pour une autre solution).*

Solution 3.37 *On suppose d'abord que* $\lambda \geq 1$. *En posant* $v_n = \sqrt[n]{\lambda} - 1$, *on a* $v_n \geq 0$ *pour tout* $n \geq 1$ *et en utilisant l'inégalité de Bernoulli (ou plus simplement la formule du binôme de Newton) :*

$$\lambda = (1 + v_n)^n \geq 1 + nv_n,$$

ce qui donne :

$$0 \leq v_n \leq \frac{\lambda - 1}{n}$$

et en conséquence $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n) = 0$ *encore équivalent à* $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt[n]{\lambda}\right) = 1$.

Pour $0 < \lambda < 1$, *de* $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt[n]{\dfrac{1}{\lambda}}\right) = 1$, *on déduit encore que* $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt[n]{\lambda}\right) = 1$.

Exercice 3.38 *Étudier, sans utiliser la fonction* ln, *la suite* $u = \left(\sqrt[n]{n}\right)_{n\geq 1}$.

Solution 3.38 *En posant* $v_n = \sqrt[n]{n} - 1$, *on a* $v_n \geq 0$ *pour tout* $n \geq 1$ *et en utilisant la formule du binôme :*

$$\forall n \geq 2,\ n = (1 + v_n)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k v_n^k \geq \frac{n(n-1)}{2} v_n^2,$$

ce qui donne :

$$0 \leq v_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

et en conséquence $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n) = 0$ *encore équivalent à* $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt[n]{n}\right) = 1$.

Exercice 3.39 *Étudier, pour tout nombre complexe* λ *et tout réel* $b > 0$, *la suite* $u = \left(\dfrac{\lambda^n}{n^b}\right)_{n\geq 1}$.

Solution 3.39 *Pour* $\lambda = 0$, u *est constante égale à* 0.
On suppose donc que $\lambda \neq 0$.
Avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = |\lambda|$, *on déduit que* $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n) = 0$ *pour* $|\lambda| < 1$ *et que* u *diverge pour* $|\lambda| > 1$.
Pour $|\lambda| = 1$, *avec* $|u_n| = \dfrac{1}{n^b}$, *on déduit que* u *est convergente vers* 0.

Théorème 3.15 *Soient* $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites réelles telles que* $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n) = \ell$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n) = \ell$.

1. *Si* $\ell > \ell'$ *on a alors* $u_n > v_n$ *à partir d'un certain rang.*
2. *Si à partir d'un certain rang,* $u_n \leq v_n$ *alors* $\ell \leq \ell'$.
3. *Si* M *est un majorant de la suite* u, *alors* $\ell \leq M$.
4. *Si* m *est un minorant de la suite* u, *alors* $\ell \geq m$.

Démonstration. On applique le théorème 3.3 aux suites $v - u$, $M - u$ et $u - m$. ■

Exercice 3.40 *Que dire de la somme et du produit de deux suites divergentes, d'une suite divergente et d'une suite convergente, de l'inverse d'une suite divergente.*

Solution 3.40 ♠♠♠

Exercice 3.41 *Soient* $(\varepsilon_n)_{n\geq 0}$ *une suite de réels positifs telle que* $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$ *et* $(u_n)_{n\geq 0}$ *une suite de réels positifs telle qu'il existe* $\lambda \in [0, 1[$ *avec*

$$\forall n \geq 0,\ u_{n+1} \leq \lambda u_n + \varepsilon_n.$$

Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Solution 3.41 *Par récurrence, on a pour tout entier* $n \geq 0$ *:*

$$\forall n \geq n_0,\ u_{n+1} \leq \lambda^{n-n_0+1} u_{n_0} + \lambda^{n-n_0} \varepsilon_{n_0} + \lambda^{n-n_0-1} \varepsilon_{n_0+1} + \cdots + \lambda \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n.$$

Pour tout réel $\varepsilon > 0$, *on peut trouver un entier* n_0 *tel que :*

$$\forall n \geq n_0,\ 0 \leq \varepsilon_n < \varepsilon,\ 0 \leq \lambda^{n-n_0+1} < \varepsilon.$$

On a alors, pour tout $n \geq n_0$ *:*

$$\begin{aligned} 0 \leq u_{n+1} \leq \lambda^{n-n_0+1} u_{n_0} + \left(\lambda^{n-n_0} + \lambda^{n-n_0-1} + \cdots + \lambda + 1\right)\varepsilon &= \varepsilon u_{n_0} + \frac{1-\lambda^{n-n_0+1}}{1-\lambda}\varepsilon \\ &\leq \left(u_{n_0} + \frac{1}{1-\lambda}\right)\varepsilon \end{aligned}$$

Ce qui prouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0.$

Exercice 3.42 *Montrer que pour toute fonction* f *continue sur* $[0,1]$, *on a* $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f(t)\cos(nt^2)\,dt = 0$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f(t)\sin(nt^2)\,dt = 0$ *(on peut utiliser l'exercice 3.4).*

Solution 3.42 *A revoir.*

3.7 Comparaison des suites

Les suites considérées dans ce paragraphe sont à valeurs réelles.

Définition 3.9 *Soient* $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites réelles. On dit que :*

1. *la suite* u *est dominée par la suite* v, *s'il existe un entier* $n_0 \geq 0$ *et une suite bornée* $(\varphi_n)_{n\geq n_0}$ *tels que :*
$$\forall n \geq n_0,\ u_n = \varphi_n v_n$$
2. *la suite* u *est négligeable devant la suite* v, *s'il existe un entier* $n_0 \geq 0$ *et une suite* $(\varepsilon_n)_{n\geq n_0}$ *convergente vers* 0 *tels que :*
$$\forall n \geq n_0,\ u_n = \varepsilon_n v_n$$
3. *la suite* u *est équivalente à la suite* v, *s'il existe un entier* $n_0 \geq 0$ *et une suite* $(\varphi_n)_{n\geq n_0}$ *convergente vers* 1 *tels que :*
$$\forall n \geq n_0,\ u_n = \varphi_n v_n$$

On notera $u_n = O(v_n)$ pour signifier que u est dominée par v, $u_n = o(v_n)$ pour signifier que u est négligeable devant v et $u_n \underset{+\infty}{\backsim} v_n$ pour signifier que u est équivalente à v.

Remarque 3.2 *On vérifie facilement que la relation* $\backsim$ *définit une relation d'équivalence sur les suite réelles, c'est-à-dire* $u \backsim u$ *(réflexivité), si* $u \backsim v$, *alors* $v \backsim u$ *(symétrie) et si* $u \backsim v$, $v \backsim w$ *alors* $u \backsim w$ *(transitivité).*

Remarque 3.3 *Si la suite* u *converge vers un réel* $\ell \neq 0$, *alors* $u_n \underset{+\infty}{\backsim} \ell$ *(il suffit d'écrire* $u_n = \dfrac{u_n}{\ell}\ell$*). Mais attention ce résultat est faux pour* $\ell = 0$. *Dire que* u *est équivalente à* 0 *signifie que les* u_n *sont tous nuls à partir d'un certain rang et une suite peut avoir une limite nulle en étant à valeurs dans* $\mathbb{R}^*$ *comme le montre l'exemple de* $u_n = \dfrac{1}{n}$.

On montre facilement le résultat suivant.

Théorème 3.16 *Si $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites réelles équivalents, alors elles sont de même nature, c'est-à-dire que u converge si, et seulement si v converge. En cas de convergence de l'une des deux suites, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.*

Démonstration. On a $u_n = \varphi_n v_n$ pour tout $n \geq n_0$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi_n = 1$. En utilisant le résultat relatif au produit de deux suites convergentes, on déduit que si u converge, il en est alors de même de v et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \varphi_n \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi_n = 1$, on aura $\varphi_n \neq 0$ à partir d'un rang $n_1 \geq n_0$ et en écrivant que $v_n = \dfrac{1}{\varphi_n} u_n$ pour $n \geq n_1$, on déduit que si v converge, il en est alors de même de u et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Il en résulte que u diverge si, et seulement si v diverge. ■

3.8 Suites monotones

On rappelle que $\mathbb{R}$ est un corps commutatif totalement ordonné qui vérifie la propriété de la borne supérieure.

Dire que $M \in \mathbb{R}$ est la borne supérieure d'une partie non vide X de $\mathbb{R}$ signifie que M est le plus petit des majorants de X, ce qui se traduit par :

$$\begin{cases} \forall x \in X,\ x \leq M, \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in X \mid M - \varepsilon < x \leq M \end{cases}$$

et on note $M = \sup(X)$.

Dans le cas où $M \in X$, on dit que M est le plus grand élément de X ou le maximum de X et il est souvent noté $M = \max(X)$.

Définition 3.10 *On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :*

— *croissante si :*
$$\forall n \geq 0,\ u_{n+1} \geq u_n,$$
— *décroissante si :*
$$\forall n \geq 0,\ u_{n+1} \leq u_n,$$
— *monotone si elle est croissante ou décroissante.*

En remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes on parle de suites strictement monotones.

Pour étudier la monotonie d'une suite, on étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$ ou, si $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, le signe de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1$.

Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante si, et seulement si, $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Il suffit donc de s'intéresser aux suites croissantes.

Exemple 3.2 *Pour toute fonction monotone f définie sur $\mathbb{R}^+$, la suite $u = (f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.*

Exemple 3.3 *Si $f : I \mapsto I$ est une fonction croissante, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est monotone de monotonie dépendant du signe de $u_1 - u_0$.*

Exercice 3.43 *Que dire de la somme du produit ou du quotient (quand il est défini) de deux suites monotones.*

Solution 3.43 ♠♠♠

Exercice 3.44 *Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante, il en est de même de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des moyennes de Césaro définie par $v_n = \dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k$.*

Solution 3.44 *On a :*

$$v_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}v_n + \frac{u_{n+1}}{n+2}$$

et donc :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+2}(u_{n+1} - v_n) &= \frac{1}{n+2}\left(u_{n+1} - \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k\right) \\ &= \frac{1}{(n+2)(n+1)}\left((n+1)\,u_{n+1} - \sum_{k=0}^{n} u_k\right) \\ &= \frac{1}{(n+2)(n+1)}\left(\sum_{k=0}^{n}(u_{n+1} - u_k)\right) \geq 0. \end{aligned}$$

Du théorème de la borne supérieure, on déduit immédiatement le résultat suivant.

Théorème 3.17 *Une suite réelle croissante [resp. décroissante] $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si, et seulement si, elle est majorée [resp. minorée] et dans ce cas on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ [resp. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$] Sinon on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. [resp. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$].*

Démonstration. Considérons une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante. Si elle est majorée, alors l'ensemble $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ qui est non vide et majoré admet une borne supérieure M. Soit ε un réel strictement positif. Il existe un naturel n_0 tel que :

$$M - \varepsilon \leq u_{n_0} \leq M.$$

La suite étant croissante et M étant un majorant de la suite, on a :

$$\forall n \geq n_0,\ M - \varepsilon \leq u_n \leq M,$$

soit :

$$\forall n \geq n_0,\ |u_n - M| \leq \varepsilon.$$

La suite u est donc convergente vers M.

Si elle n'est pas majorée, pour tout réel $M > 0$, il existe un entier n_0 tel que $u_{n_0} \geq M$ et avec la croissance de u, on déduit que $u_n \geq M$ pour tout $n \geq n_0$. La suite u est donc divergente vers $+\infty$.

On procède de même pour les suites décroissantes et minorées. ∎

Exercice 3.45 *Étudier, sans utiliser la fonction* ln, *la suite $u = \left(\sqrt[n]{\lambda}\right)_{n\geq 1}$ où λ est un nombre réel strictement positif.*

Solution 3.45 *Avec* $\sqrt[n]{1} = 1$ *et* $\sqrt[n]{\dfrac{1}{\lambda}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{\lambda}}$, *il suffit de montrer le résultat pour* $\lambda > 1$. *Dans ce cas la suite* $\left(\sqrt[n]{\lambda}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est strictement décroissante (* $\sqrt[n+1]{\lambda} < \sqrt[n]{\lambda}$ *équivaut à* $\lambda < \lambda^{\frac{n+1}{n}} = \lambda\sqrt[n]{\lambda}$ *encore équivalent à* $\sqrt[n]{\lambda} > 1$*) et minorée par* 1*, elle converge donc vers un réel* $\ell \geq 1$. *Si* $\ell > 1$, *pour* $\gamma \in]1, \ell[$ *il existe un entier* n_0 *tel que* $\sqrt[n]{\lambda} > \gamma$ *pour tout* $n \geq n_0$, *ce qui entraîne* $\lambda > \gamma^n$ *pour tout* $n \geq n_0$ *qui est incompatible avec* $\lim\limits_{n\to+\infty} \gamma^n = +\infty$. *On a donc* $\ell = 1$.

Exercice 3.46 *Montrer que la suite* $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par la relation de récurrence,* $u_0 = 0$ *et* $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$ *est convergente vers le nombre d'or* $\ell = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Solution 3.46 *On vérifie facilement par récurrence que* $1 \leq u_n \leq 2$ *pour tout* $n \geq 1$. *En effet, pour* $n = 1$, *on a* $1 = u_1 < 2$ *et en supposant acquis le résultat au rang* $n \geq 1$, *on a* $1 < \sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq \sqrt{3} < 2$. *Et avec* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \sqrt{1 + \dfrac{1}{u_n}} > 1$, *on déduit que u est croissante majorée, donc convergente vers* $\ell \in [1, 2]$. *De* $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$, *on déduit que* $\ell = \sqrt{\ell + 1}$, *soit* $\ell^2 - \ell - 1 = 0$ *avec* $1 \leq \ell \leq 2$, *ce qui équivaut à* $\ell = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Exercice 3.47 *Soit* x *un réel dans* $]0, 2[$. *Montrer, sans utiliser la fonction* ln, *que la suite* $(u_n)_{n\geq 1}$ *définie par :*

$$\forall n \geq 1,\ u_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

est convergente.

Solution 3.47 *Pour* $n \geq 1$ *on a :*

$$\begin{aligned} u_{n+1} = \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1} &= \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n+1} \left(\frac{1 + \dfrac{x}{n+1}}{1 + \dfrac{x}{n}}\right)^{n+1} \\ &= \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n+1} \left(\frac{n^2 + n(1+x)}{n^2 + n(1+x) + x}\right)^{n+1} \\ &= \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n+1} \left(1 - \frac{x}{n^2 + n(1+x) + x}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

avec $\dfrac{x}{n^2 + n(1+x) + x} < 1$ *pour tout réel* $x > 0$. *On peut donc utiliser l'inégalité de Bernoulli pour écrire que :*

$$\left(1 - \frac{x}{n^2 + n(1+x) + x}\right)^{n+1} > 1 - \frac{(n+1)x}{n^2 + n(1+x) + x} = 1 - \frac{x}{n+x} = \frac{n}{n+x} = \frac{1}{1 + \dfrac{x}{n}}$$

(on a $n^2 + n(1+x) + x = (n+1)(n+x)$*) et donc :*

$$u_{n+1} > \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = u_n,$$

ce qui signifie que, pour $x > 0$, $(u_n)_{n\geq 1}$ *est croissante.*
D'autre part, en utilisant la formule du binôme, on a pour $n \geq 2$ *:*

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{x^k}{n^k} = 1 + x + \sum_{k=2}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \frac{x^k}{n^k}$$

avec :

$$k! = \prod_{j=2}^{k} \geq 2^{k-1} \text{ et } \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} = \prod_{j=0}^{k-1} \frac{n-j}{n} \leq 1$$

pour tout k compris entre 2 et n, ce qui donne pour $x \in \left]0,2\right[$:

$$\begin{aligned} u_n &\leq 1 + x + \sum_{k=2}^{n} \frac{x^k}{2^{k-1}} = 1 + x + \frac{x^2}{2} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{x^{k-2}}{2^{k-2}} \\ &\leq 1 + x + \frac{x^2}{2} \frac{1 - \frac{x^{n-1}}{2^{n-1}}}{1 - \frac{x}{2}} \leq 1 + x + \frac{x^2}{2-x}. \end{aligned}$$

La suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est donc majorée et en conséquence convergente puisque croissante.
Sa limite est e^x et pour $x = 1$, la majoration précédente donne $e = e^1 \leq 3$.

Exercice 3.48 *Montrer que la suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ est convergente vers un nombre irrationnel e.*

Solution 3.48 *La suite u est croissante et pour $n > 2$, on a :*

$$\begin{aligned} u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} &\leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \\ &\leq 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3 \end{aligned}$$

puisque $k! \geq 2^{k-1}$ pour $k \geq 2$, ce qui implique que u est convergente.
On a vu avec l'exercice 1.5 que sa limite e est irrationnelle.

Exercice 3.49 *Montrer que la suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$ pour tout $n \geq 1$ est décroissante minorée. Sa limite est la constante d'Euler, notée γ.*

Solution 3.49 *Pour $n \geq 1$, on a :*

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) &= \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{t}\right) dt \\ &= \int_n^{n+1} \frac{t-(n+1)}{(n+1)\,t} dt < 0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire que u est décroissante.
La fonction $t \to \frac{1}{t}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, donc :

$$\forall k \geq 1, \ \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{k} = \frac{1}{k}$$

et pour tout $n \geq 2$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} = \int_1^{n+1} \frac{dt}{t} = \ln(n+1),$$

soit $u_n \geq \ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) > 0$.

Exercice 3.50 *En utilisant l'exercice précédent, montrer que :*

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}=\ln(2)$$

Solution 3.50 *Avec les notations de l'exercice précédent, on a pour tout $n\geq 1$:*

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}&=u_{2n}+\ln(2n)-(u_n+\ln(n))\\&=u_{2n}-u_n+\ln(2)\end{aligned}$$

et la convergence de la suite u permet alors de conclure.

Le résultat de l'exercice 3.49 peut aussi être utilisé pour montrer que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\ln(2)$.

Exercice 3.51 *On désigne par $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v=(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites respectivement définies par :*

$$u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n),\ v_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

pour $n\geq 1$.

1. *Montrer que :*
$$\forall n\geq 1,\ v_{2n}=u_{2n}-u_n+\ln(2).$$
2. *En déduire la limite de la suite v sachant que la suite u converge.*

Solution 3.51

1. *Pour $n\geq 1$, on a :*
$$\begin{aligned}v_{2n}=\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}&=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2j-1}-\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2j}\\=\left(\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}-\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2j}\right)-\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2j}&=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\\=u_{2n}+\ln(2n)-(u_n+\ln(n))&=u_{2n}-u_n+\ln(2)\end{aligned}$$
2. *Sachant que la suite u converge vers γ, on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}v_{2n}=\ln(2)$ et avec $v_{2n+1}=v_{2n}+\frac{1}{2n+1}$, on a aussi $\lim\limits_{n\to+\infty}v_{2n+1}=\ln(2)$ et en conséquence $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\ln(2)$ (exercice 3.27), soit $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\ln(2)$.*

Exercice 3.52 *Montrer que, pour tout réel $\alpha>1$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :*

$$\forall n\geq 1,\ u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\alpha}}$$

est convergente.

Solution 3.52 *La fonction* $t \to \dfrac{1}{t^\alpha}$ *est décroissante sur* $\mathbb{R}^{+*}$, *donc :*

$$\forall k \geq 2,\ \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^\alpha} \geq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{k^\alpha} = \frac{1}{k^\alpha}$$

et pour tout $n \geq 2$, *on a :*

$$\begin{aligned} u_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^\alpha} = 1 + \int_{1}^{n} \frac{dt}{t^\alpha} &= 1 + \frac{1}{\alpha - 1}\left(1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right) \\ &\leq \frac{\alpha}{\alpha - 1}. \end{aligned}$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est alors croissante majorée et donc convergente.*
Pour $\alpha = 2$, *on peut utiliser les inégalités :*

$$\forall k \geq 2,\ \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

pour déduire que :

$$u_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 1 + 1 + \frac{1}{n} \leq 2.$$

L'exercice 3.49 est un cas particulier du suivant.

Exercice 3.53 *Soit* $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ *une fonction continue décroissante et* F *la primitive de* f *nulle en* 1. *Montrer que la suite* $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f(k) - F(n)$ *pour tout* $n \geq 1$ *est décroissante minorée et donc convergente.*

Solution 3.53 *La fonction* F *est définie par :*

$$\forall x \geq 1,\ F(x) = \int_{1}^{x} f(t)\, dt.$$

Pour $n \geq 1$, *on a :*

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= f(n+1) - (F(n+1) - F(n)) \\ &= f(n+1) - \int_{n}^{n+1} f(t)\, dt = \int_{n}^{n+1} (f(n+1) - f(t))\, dt \end{aligned}$$

avec f *continue et* $f(n+1) \leq f(t)$ *pour tout* $t \in [n, n+1]$. *On a donc* $u_{n+1} - u_n \leq 0$ *et* u *est décroissante.*
La fonction f *est continue décroissante sur* $[1, +\infty[$, *donc :*

$$\forall k \geq 1,\ \int_{k}^{k+1} f(t)\, dt \leq \int_{k}^{k+1} f(k)\, dt = f(k)$$

et pour tout $n \geq 2$, *on a :*

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \geq \sum_{k=1}^{n} \int_{k}^{k+1} f(t)\, dt = \int_{1}^{n+1} f(t)\, dt = F(n+1),$$

et $u_n \geq F(n+1) - F(n) = \displaystyle\int_{n}^{n+1} f(t)\, dt \geq 0$ *puisque* f *est à valeurs positives.*

Le choix de $f(t) = \dfrac{1}{t}$ nous permet de retrouver la constante γ d'Euler.

Plus généralement le choix de $f(t) = \dfrac{1}{t^\alpha}$ avec $\alpha > 0$ nous permet de montrer les résultats classiques sur les séries de Riemann (théorème 6.4, page 123).

Exercice 3.54 *Montrer que si $(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite de réels positifs qui vérifie :*

$$\forall n \geq 1,\ u_{n+1} \leq u_n + \frac{1}{n^2}$$

alors cette suite est convergente.

Solution 3.54 *On a :*

$$u_{n+1} \leq u_n + \frac{1}{n^2} \leq u_n + \frac{1}{n(n-1)} = u_n + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

soit :

$$0 < u_{n+1} + \frac{1}{n} \leq u_n + \frac{1}{n-1}$$

C'est-à-dire que la suite $\left(u_n + \dfrac{1}{n-1}\right)_{n\geq 2}$ est décroissante minorée. Elle est donc convergente. Ce qui entraîne la convergence de $(u_n)_{n\geq 1}$.

Le théorème 3.17 associé au résultat qui suit nous donne une démonstration du théorème de Bolzano-Weierstrass.

Théorème 3.18 *De toute suite réelle on peut extraire une suite monotone.*

Démonstration. Soit A la partie de $\mathbb{N}$, éventuellement vide, définie par :

$$n \in A \Leftrightarrow \forall m > n,\ u_m \leq u_n.$$

Si A est finie, elle admet un majorant $n_0 \notin A$. Il existe alors un entier $n_1 > n_0$ tel que $u_{n_1} > u_{n_0}$. Comme $n_1 \notin A$, il existe $n_2 > n_1$ tel que $u_{n_2} > u_{n_1}$ et ainsi de suite, on construit par récurrence une suite strictement croissante d'entiers $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $u_{n_{k+1}} > u_{n_k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. La suite $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est alors extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et strictement croissante.

Si A est infinie, on peut ranger ces éléments dans l'ordre croissant, soit $A = \{n_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ avec $n_k < n_{k+1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et par construction, on a $u_{n_{k+1}} \leq u_{n_k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. La suite $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est alors extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et décroissante. ■

Théorème 3.19 (Bolzano-Weierstrass) *De toute suite bornée de nombres réels on peut extraire une sous-suite convergente.*

Démonstration. Résulte immédiatement du théorème précédent et du théorème 3.17. ■

Une conséquence importante de ce résultat est le suivant.

Théorème 3.20 *Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si, et seulement si, elle est bornée et n'a qu'une seule valeur d'adhérence.*

Démonstration. On sait déjà qu'une suite convergente est bornée et qu'elle n'a qu'une seule valeur d'adhérence (théorème 3.7).

Réciproquement, supposons que la suite bornée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admette ℓ pour seule valeur d'adhérence. Si cette suite ne converge pas vers ℓ, on peut alors trouver un réel $\varepsilon > 0$ tel que pour tout entier n, il existe $p > n$ avec $|u_p - \ell| \geq \varepsilon$. Par récurrence on peut alors construire une suite strictement croissante d'entiers $(\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\left|u_{\varphi(n)} - \ell\right| \geq \varepsilon$ pour tout n. De la suite bornée $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ on peut extraire une sous suite $\left(u_{\psi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers ℓ' et par passage à la limite dans l'inégalité $\left|u_{\psi(n)} - \ell\right| \geq \varepsilon$ on déduit que $|\ell' - \ell| \geq \varepsilon > 0$, c'est-à-dire que ℓ' est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ distincte de ℓ, ce qui contredit l'hypothèse de départ. ■

Exercice 3.55 *Soit x un nombre irrationnel. Montrer que si $\left(\dfrac{p_n}{q_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres rationnels qui converge vers x, où pour tout $n \in \mathbb{N}$, p_n est un entier relatif et q_n un entier naturel non nul, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = +\infty$, si $x > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = -\infty$, si $x < 0$.*

Solution 3.55 *Dire que la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers l'infini signifie qu'il existe une réel $\alpha > 0$ tel que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un entier $k_n > n$ tel que $0 < q_{k_n} \leq \alpha$. On peut alors extraire de $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite $\left(q_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $[0,\alpha]$ comme suit : pour $n = 0$ il existe $\varphi(0) > 0$ tel que $0 < q_{\varphi(0)} \leq \alpha$ et en supposant construits les entiers $\varphi(0) < \varphi(1) < \cdots < \varphi(n)$ tels que $0 < q_{\varphi(k)} \leq \alpha$ pour tout k compris entre 0 et n, on peut trouver $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ tel que $0 < q_{\varphi(n+1)} \leq \alpha$. De cette suite bornée on peut alors extraire une sous-suite $\left(q_{\psi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un entier $q \geq 1$, mais alors avec $p_{\psi(n)} = \dfrac{p_{\psi(n)}}{q_{\psi(n)}} q_{\psi(n)}$, on déduit que la suite $\left(p_{\psi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est également convergente et sa limite $p = xq$ est également un entier, ce qui est en contradiction avec x irrationnel.*
Avec $p_n = q_n \dfrac{p_n}{q_n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{p_n}{q_n} = x \neq 0$, on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \pm\infty$, le signe étant celui de x.

3.9 Suites adjacentes

Définition 3.11 *Deux suites réelles $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes si la suite u est croissante, la suite v est décroissante et si la suite $v - u$ est convergente vers 0.*

Lemme 3.1 *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites adjacentes. Pour tous n, m dans $\mathbb{N}$ on a $u_n \leq v_m$.*

Démonstration. Supposons qu'il existe deux indices n, m tels que $u_n > v_m$. Comme u est croissante, et v décroissante, on a alors pour tout $k \geq \max(n,m)$, $u_k \geq u_n$ et $v_k \leq v_m$, ce qui entraîne $u_k - v_k \geq u_n - v_m > 0$ et $0 = \lim\limits_{k\to+\infty} (u_k - v_k) \geq u_n - v_m > 0$, ce qui est impossible. ■

Théorème 3.21 *Deux suites adjacentes $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite ℓ, avec :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall m \in \mathbb{N},\ u_n \leq \ell \leq v_m.$$

Démonstration. En utilisant le lemme précédent et la monotonie des suites u et v, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n \leq v_0,$$

c'est-à-dire que u est croissante majorée par v_0 et v décroissante et minorée par u_0, ces deux suites sont donc convergentes avec :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n - \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0.$$

Elles convergent donc vers la même limite :

$$\ell = \sup_{n\in\mathbb{N}} (u_n) = \inf_{n\in\mathbb{N}} (v_n) .$$

■

On peut remarquer qu'une majoration de l'erreur d'approximation de ℓ par les u_n est donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq \ell - u_n \leq v_n - u_n.$$

Exercice 3.56 *Soit x un réel dans $[0,1]$. Montrer, sans utiliser la fonction* ln, *que les suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par : :*

$$\forall n \geq 1,\ u_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n,\ v_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n+1}$$

sont convergentes.

Solution 3.56 *Pour $x = 0$, ces suites stationnent sur* 1.
On a déjà vu avec l'exercice 3.47 que u est croissante pour $x > 0$ (et majorée pour $x \in]0,2[$).
Pour $n \geq 1$ on a :

$$\begin{aligned} v_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n+1} &= \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1} \left(\frac{1 + \dfrac{x}{n}}{1 + \dfrac{x}{n+1}}\right)^{n+1} \\ &= \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1} \left(\frac{n^2 + n(1+x) + x}{n^2 + n(1+x)}\right)^{n+1} \\ &= \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1} \left(1 + \frac{x}{n^2 + n(1+x)}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

et en utilisant l'inégalité de Bernoulli (ou plus simplement la formule du binôme de Newton) pour $x > 0$, on obtient :

$$\left(1 + \frac{x}{n^2 + n(1+x)}\right)^{n+1} > 1 + \frac{(n+1)x}{n^2 + n(1+x)} > 1 + \frac{x}{n+1}$$

(c'est équivalent à $(n+1)^2 x > x(n^2 + n(1+x))$ encore équivalent à $(n+1)^2 > n^2 + n(1+x)$ ou a $n(1-x) + 1 > 0$ qui est vérifié pour $x \leq 1$) et donc :

$$v_n < \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+2} = v_{n+1}$$

ce qui signifie que $(v_n)_{n\geq 1}$ est décroissante pour $x \in]0,1]$.
Enfin, pour $n \geq 1$, on a :

$$v_n - u_n = u_n \frac{x}{n} \geq 0$$

et donc $u_n \leq v_n \leq v_1$ (v est décroissante), ce qui donne $0 \leq v_n - u_n \leq \dfrac{xv_1}{n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) =$ 0.
Ces deux suites sont donc adjacentes et en conséquence convergentes.

Exercice 3.57 *Montrer que les suites* $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définies par :*

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!},\ v_n = u_n + \frac{1}{n!}$$

convergent vers la même limite irrationnelle e.

Solution 3.57 *Il est clair que* u *est croissante et pour* $n \geq 1$, *on a :*

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = -\frac{n-1}{(n+1)!} \leq 0$$

donc $(v_n)_{n\geq 1}$ *est décroissante. De plus avec* $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n!}\right) = 0$, *on déduit que ces suites sont adjacentes. Elles convergent donc vers la limite.*
On a vu avec l'exercice 1.5 que la limite e *de* u *est irrationnelle.*
Les encadrements $u_n \leq e \leq v_m$, *nous permettent de donner des valeurs approchées de* e *par défaut et par excès. Par exemple, pour* $n = m = 10$, *on obtient :*

$$u_{10} \approx 2.7183 \leq e \leq v_{10} \approx 2.7183$$

avec une majoration de l'erreur d'approximation donnée par :

$$0 \leq e - u_{10} \leq v_{10} - u_{10} = \frac{1}{10!} \approx 2.755 \cdot 10^{-7}.$$

On peut aussi utiliser la suite $v = (v_n)_{n\geq 1}$ *définie par* $v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}$ *(les suites* u *et* v *sont encore adjacentes) et on a en fait :*

$$0 \leq e - u_{10} \leq v_{10} - u_{10} = \frac{1}{10 \cdot 10!} \approx 2.755 \cdot 10^{-8}.$$

Exercice 3.58 *Montrer que les suites* $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définies par :*

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n),\ v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$$

convergent vers une même limite γ *(la constante d'Euler).*

Solution 3.58 *Avec l'exercice 3.49, on a déjà vu que* u *est décroissante.*
De manière analogue, pour $n \geq 1$, *on a :*

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \int_{n+1}^{n+2} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{t}\right) dt \\ &= \int_{n+1}^{n+2} \frac{t-(n+1)}{(n+1)\,t} dt > 0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire que v *est croissante.*
Et avec :

$$\lim_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = \lim_{n\to+\infty} \left(\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\right) = \ln(1) = 0,$$

on conclut que ces deux suites sont adjacentes.
Les encadrements $v_n \leq \gamma \leq u_m$, *nous permettent de donner des valeurs approchées de* γ. *Par exemple, pour* $n = m = 10$, *on obtient :*

$$v_{10} \approx 0.53107 \leq \gamma \leq u_{10} \approx 0.62638$$

Exercice 3.59 *Montrer que les suites* $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définies par :*

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1},\ v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$$

convergent vers une même limite.

Solution 3.59 *Pour* $n \geq 1$, *on a :*

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} + 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2}\right) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}} \\ &= \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}\right)^2} > 0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire que u *est croissante.*
De même :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} + 2\left(\sqrt{n} - \sqrt{n+1}\right) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \\ &= \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)} = -\frac{1}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)^2} < 0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire que v *est décroissante.*
Enfin avec :

$$\lim_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 2 \lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = 2 \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right) = 0,$$

on conclut que ces deux suites sont adjacentes et donc convergentes vers ℓ.
Les encadrements $u_n \leq \ell \leq v_m$, *nous permettent de donner des valeurs approchées de* ℓ. *Par exemple, pour* $n = m = 20$, *on obtient :*

$$u_{20} \approx -1.569\,9 \leq \ell \leq v_{20} \approx -1.349$$

En fait, les deux exercices qui précèdent ne sont que des cas particulier du résultat suivant qui complète l'exercice 3.53.

Exercice 3.60 *Soit* $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ *une fonction continue décroissante telle que* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ *et* F *la primitive de* f *nulle en* 1. *Montrer que les suites* $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définies par*

$$\forall n \geq 1,\ \begin{cases} u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f(k) - F(n+1) \\ v_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f(k) - F(n) \end{cases}$$

convergent vers une même limite.

Solution 3.60 *Comme* f *tend vers* 0 *en décroissant à l'infini, elle est nécessairement à valeurs positives.*
Avec l'exercice 3.53 on a vu que u *est croissante et* v *décroissante.*
Avec :

$$v_n - u_n = F(n+1) - F(n) = \int_n^{n+1} f(t)\, dt$$

et f positive décroissante, on déduit que :

$$0 \leq v_n - u_n \leq f(n)$$

et $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$ *puisque* $\lim\limits_{n \to +\infty} f(n) = 0$.

Les suites adjacentes peuvent être utilisées pour étudier des suites construites à partir de moyennes, arithmétiques, géométriques ou harmoniques.

Exercice 3.61 *Soient $0 < a < b$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par :*

$$\begin{cases} u_0 = a \\ v_0 = b \end{cases}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{2}{\frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n}} & \text{(moyenne harmonique)} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} & \text{(moyenne arithmétique)} \end{cases}$$

Montrer que ces suites sont adjacentes de limite $\sqrt{ab}$ (moyenne géométrique). Pour $b = 1$, on a des approximations de $\sqrt{a}$.

Solution 3.61 *On vérifie facilement, par récurrence, que $u_n > 0$ et $v_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :*

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2}$$

avec $u_0 - v_0 = a - b < 0$ et pour $n \geq 1$:

$$u_n - v_n = \frac{2u_{n-1}v_{n-1}}{u_{n-1} + v_{n-1}} - \frac{u_{n-1} + v_{n-1}}{2} = -\frac{(u_{n-1} - v_{n-1})^2}{2(u_{n-1} + v_{n-1})} \leq 0.$$

Il en résulte que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
Avec :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} - u_n = \frac{u_n (v_n - u_n)}{u_n + v_n},$$

on déduit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
Enfin avec $u_n > 0$ on a :

$$0 \leq v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)} \leq \frac{v_n - u_n}{2}$$

et par récurrence :

$$0 \leq u_n - v_n \leq \frac{b - a}{2^n} \underset{n \to +\infty}{\to} 0.$$

Les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont donc adjacentes et en conséquence convergent vers une même limite $\lambda \geq 0$.
D'autre part avec $u_{n+1}v_{n+1} = u_n v_n$, on déduit que $u_n v_n = u_0 v_0$ pour tout n et $\lambda^2 = u_0 v_0$. Donc :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} v_n = \sqrt{u_0 v_0} = \sqrt{ab}.$$

Exercice 3.62 *Soient* $0 < a < b$ *et* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définies par :*

$$\left\{\begin{array}{l} u_0 = a \\ v_0 = b \end{array}\right.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left\{\begin{array}{l} u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \text{ (moyenne géométrique)} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \text{ (moyenne arithmétique)} \end{array}\right.$$

Montrer que ces suites sont adjacentes de même limite. Cette limite est appelée moyenne arithmético-géométrique de a et b.

Solution 3.62 *On vérifie facilement, par récurrence, que* $u_n > 0$ *et* $v_n > 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
On rappelle que pour tous réels u, v *positifs, on a* $\sqrt{uv} \leq \dfrac{u+v}{2}$ *(conséquence de* $(\sqrt{v} - \sqrt{u})^2 \geq 0$*).*
Avec l'inégalité précédente, on déduit que $u_n \leq v_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
Avec $u \leq \sqrt{uv} \leq v$ *et* $u \leq \dfrac{u+v}{2} \leq v$ *pour* $u > 0$ *et* $v > 0$, *on déduit que* $u_n \leq u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ *et* $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \leq v_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est donc croissante et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *décroissante.*
Enfin avec :

$$0 \leq v_{n+1} - u_{n+1} \leq v_{n+1} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2},$$

on déduit par récurrence sur $n \geq 0$ *que* $0 \leq v_n - u_n \leq \dfrac{b-a}{2^n}$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$.
Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont donc adjacentes et en conséquence convergent vers une même limite* $\ell > 0$.
On peut montrer que cette limite est $\ell = \dfrac{\pi}{2 \cdot E(a,b)}$, *où* $E(a,b)$ *est l'intégrale elliptique définie par :*

$$E(a,b) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t^2 + a^2)(t^2 + b^2)}}$$

(voir l'épreuve 1 du Capes Externe 1995).

Exercice 3.63 *Soient* $0 < a < b$ *et* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définies par :*

$$\left\{\begin{array}{l} u_0 = a \\ v_0 = b \end{array}\right., \forall n \in \mathbb{N}, \left\{\begin{array}{l} u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1} v_n} \end{array}\right.$$

Montrer que ces suites sont adjacentes de limite $\ell = b\dfrac{\sin(\theta)}{\theta}$ *où* $\cos(\theta) = \dfrac{a}{b}$.

Solution 3.63 *On vérifie par récurrence, que*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n < u_{n+1} < v_{n+1} < v_n.$$

Pour $n = 0$, *on a* $0 < u_0 = a < b = v_0$ *et :*

$$u_1 = \frac{u_0 + v_0}{2} > u_0 > 0$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{u_0 + v_0}{2} v_0} < \sqrt{v_0^2} = v_0$$

$$\begin{aligned}v_1 - u_1 &= \sqrt{u_1}\left(\sqrt{v_0} - \sqrt{u_1}\right) = \frac{\sqrt{u_1}}{\sqrt{v_0} + \sqrt{u_1}}\left(v_0 - u_1\right) \\ &= \frac{\sqrt{u_1}}{\sqrt{v_0} + \sqrt{u_1}}\left(v_0 - \frac{u_0 + v_0}{2}\right) = \frac{\sqrt{u_1}}{\sqrt{v_0} + \sqrt{u_1}}\left(\frac{v_0 - v_0}{2}\right) > 0.\end{aligned}$$

On a donc bien $0 < u_0 < u_1 < v_1 < v_0$.
En supposant le résultat acquis au rang $n \geq 0$, *on a :*

$$u_{n+2} = \frac{u_{n+1} + v_{n+1}}{2} > u_{n+1} > 0$$

$$v_{n+2} = \sqrt{\frac{u_{n+1} + v_{n+1}}{2} v_{n+1}} < \sqrt{v_{n+1}^2} = v_{n+1} > 0$$

$$\begin{aligned}v_{n+2} - u_{n+2} = \sqrt{u_{n+2}}\left(\sqrt{v_{n+1}} - \sqrt{u_{n+2}}\right) &= \frac{\sqrt{u_{n+2}}}{\sqrt{v_{n+1}} + \sqrt{u_{n+2}}}\left(v_{n+1} - u_{n+2}\right) \\ &= \frac{\sqrt{u_{n+2}}}{\sqrt{v_{n+1}} + \sqrt{u_{n+2}}}\left(v_{n+1} - \frac{u_{n+1} + v_{n+1}}{2}\right) \\ &= \frac{\sqrt{u_{n+2}}}{\sqrt{v_{n+1}} + \sqrt{u_{n+2}}}\left(\frac{v_{n+1} - v_{n+1}}{2}\right) > 0.\end{aligned}$$

La suite u *est donc croissante et la suite* v *décroissante.*
La dernière égalité donne pour $n \geq 0$ *:*

$$0 < v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{\sqrt{u_{n+1}}}{\sqrt{v_n} + \sqrt{u_{n+1}}}\left(\frac{v_n - v_n}{2}\right) < \frac{v_n - v_n}{2}$$

et par récurrence $0 < v_n - u_n \leq \dfrac{b-a}{2^n}$, *ce qui entraîne* $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$.
Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont donc adjacentes et en conséquence convergent vers une même limite* $\ell > 0$.
Comme $0 < \dfrac{a}{b} < 1$, *il existe un unique réel* $\theta \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ *tel que* $a = b\cos(\theta)$.
On a donc $u_0 = b\cos(\theta)$ *et* $v_0 = b$.
Pour $n = 1$, *on a ;*

$$u_1 = \frac{u_0 + v_0}{2} = \frac{b\left(1 + \cos(\theta)\right)}{2} = b\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

et :

$$v_1 = \sqrt{u_1 v_0} = b\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

De même pour $n = 2$, *on a :*

$$u_2 = \frac{u_1 + v_1}{2} = b\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\frac{\left(1 + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)}{2} = b\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\theta}{2^2}\right)$$

et :

$$v_2 = \sqrt{u_2 v_1} = b\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2^2}\right)$$

Par récurrence, on vérifie que pour tout $n \geq 1$, *on a :*

$$u_n = b\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2^2}\right)\cdots\cos\left(\frac{\theta}{2^{n-1}}\right)\cos^2\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$$

et :

$$v_n = b\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2^2}\right)\cdots\cos\left(\frac{\theta}{2^{n-1}}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$$

En effet, c'est vrai pour $n = 1$ et le supposant vrai pour $n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{u_n + v_n}{2} \\ &= b\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2^2}\right)\cdots\cos\left(\frac{\theta}{2^{n-1}}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)\frac{\left(1+\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)\right)}{2} \\ &= b\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2^2}\right)\cdots\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)\cos^2\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right) \end{aligned}$$

et :

$$v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1}v_n} = b\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2^2}\right)\cdots\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)$$

On a donc pour tout $n \geq 1$:

$$v_n = b\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right)$$

En remarquant que :

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sin(\theta)\,\frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{\sin(\theta)}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2^2}\right) &= \frac{\sin(\theta)}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\cos\left(\frac{\theta}{2^2}\right) \\ &= \frac{\sin(\theta)}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\frac{\cos\left(\frac{\theta}{2^2}\right)}{2\sin\left(\frac{\theta}{2^2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2^2}\right)} \\ &= \frac{\sin(\theta)}{2^2\sin\left(\frac{\theta}{2^2}\right)} \end{aligned}$$

on vérifie facilement par récurrence que, pour tout $n \geq 1$, on a :

$$v_n = \frac{b\sin(\theta)}{2^n\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}.$$

Puis avec $\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right) \underset{n\to+\infty}{\backsim} \frac{\theta}{2^n}$, on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \frac{b\sin(\theta)}{\theta}$.
Pour $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $b = 1$, on a $\theta = \frac{\pi}{4}$ et les suites u et v donnent des approximations de $\frac{4}{\pi}$.

Le théorème des suites adjacentes est équivalent au théorème des segments emboîtés qui suit.

Théorème 3.22 *Si $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de segments emboîtés (c'est-à-dire que $a_n < b_n$ et $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$) telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$, alors il existe un réel ℓ tel que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n] = \{\ell\}$.*

Démonstration. Il est facile de vérifier que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et :

$$\ell = \sup_{n\in\mathbb{N}} (a_n) = \lim_{n\in\mathbb{N}} (a_n) = \lim_{n\in\mathbb{N}} (b_n) = \inf_{n\in\mathbb{N}} (b_n) .$$

■

Le théorème des suites adjacentes nous permet de retrouver le théorème de Bolzano-Weierstrass.

Théorème 3.23 (Bolzano-Weierstrass) *De toute suite bornée de nombres réels* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *on peut extraire une sous-suite convergente.*

Démonstration. On utilise le principe de dichotomie.

Si $[a_0, b_0]$ est un intervalle réel qui contient tous les éléments de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on le coupe en deux parties égales et on garde une de ces parties qui contient des u_n pour une infinité d'indices n. En réitérant ce procédé on construit deux suites adjacentes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une application φ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telles que chaque intervalle $[a_n, b_n]$ contient un terme $u_{\varphi(n)}$. La suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors convergente. ■

Le théorème des suites adjacentes permet également de montrer que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable en utilisant en utilisant le principe de trichotomie.

Théorème 3.24 $\mathbb{R}$ *n'est pas dénombrable.*

Démonstration. Il suffit pour cela de montrer que $[0, 1]$ n'est pas dénombrable.

Supposons qu'il existe une application bijective $\varphi : \mathbb{N} \to [0, 1]$. En coupant $I = [0, 1]$ en trois segments de même longueur, il en existe un que l'on note I_0 qui ne contient pas $f(0)$. On coupe ensuite I_0 en trois segments de même longueur en notant I_1 l'un de ces segments qui ne contient par $f(1)$. Par récurrence, on construit ainsi une suite de segments emboîtés $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n ne contient pas $f(n)$ et I_n est de longueur $\frac{1}{3^n}$, on déduit alors du théorème des segments emboîtés que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{x\}$ avec $x \in [0, 1]$ et $x \neq f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui contredit la définition de f. ■

Une autre application importante du théorème des segments emboîtés (ou des suites adjacentes) est le théorème des valeurs intermédiaires qui fournit de plus une méthode d'approximation d'une solution d'une équation $f(x) = 0$.

Théorème 3.25 *Si* $I = [a, b]$ *est un intervalle réel fermé borné et* f *une fonction continue de* I *dans* $\mathbb{R}$ *telle que* $f(a) f(b) < 0$, *alors l'équation* $f(x) = 0$ *admet au moins une solution* $\alpha \in]a, b[$.

Démonstration. Supposons que $f(a) < 0 < f(b)$ (en remplaçant au besoin f par $-f$ on se ramène toujours à ce cas).

On construit, par récurrence, une suite $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ d'intervalles emboîtés dans $[a, b]$ de la manière suivante :

— $[a_0, b_0] = [a, b]$;

— en supposant construit $[a_n, b_n] \subset [a, b]$ pour $n \geq 0$, on pose :

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] = \begin{cases} \left[a_n, \dfrac{a_n + b_n}{2}\right] & \text{si } f\left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right) > 0, \\ \left[\dfrac{a_n + b_n}{2}, b_n\right] & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a alors $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ avec $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{b_n - a_n}{2}$ pour tout $n \geq 0$, ce qui entraîne $b_n - a_n = \dfrac{b - a}{2^n}$ pour tout $n \geq 0$.

$([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ est alors une suite de segments emboîtés et $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] = \{\alpha\}$ avec $\alpha \in [a, b]$.

De plus, par construction, on a $f(a_n) \leq 0 \leq f(b_n)$ pour tout $n \geq 0$. En effet, c'est vrai pour $n = 0$ et en supposant cet encadrement vérifié au rang $n \geq 0$, on a $f(a_{n+1}) = f(a_n) \leq 0$ si $f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) > 0$ avec et $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ et $f(b_{n+1}) = f(b_n) \geq 0$ si $f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) \leq 0$ avec et $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$.

Avec $a = \lim\limits_{n\in\mathbb{N}} (a_n) = \lim\limits_{n\in\mathbb{N}} (b_n)$ et la continuité de f, on déduit alors que :

$$f(\alpha) = \lim_{n\in\mathbb{N}} (f(a_n)) \leq 0 \leq \lim_{n\in\mathbb{N}} (f(b_n)) = f(\alpha),$$

ce qui équivaut à $f(\alpha) = 0$. Comme de plus on a supposé que $f(a) f(b) < 0$, α est différent de a et de b. ■

Remarque 3.4 *Si f est strictement monotone, elle est alors injective et α est l'unique solution dans $[a, b]$ de l'équation $f(x) = 0$.*

Remarque 3.5 *La suite $\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge également vers α.*

Pour chacune des trois suites, on la majoration de l'erreur d'approximation :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |\alpha - x_n| \leq \frac{b - a}{2^n},$$

ce qui permet de déterminer un nombre suffisant d'itérations pour atteindre une précision $\varepsilon > 0$ donnée. On peut prendre $n_0 = \log_2 \left(\frac{b - a}{\varepsilon}\right)$.

En pratique on préfère utiliser le test d'arrêt $|b_n - a_n| < \varepsilon$.

Exemple 3.4 *Pour approximer $\sqrt{2}$, on utilise la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 2$ sur $[0, 2]$ (on a $f(0) = -2 < 0 < f(2) = 2$), ce qui conduit aux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $a_0 = 1$, $b_0 = 2$ et :*

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] = \begin{cases} \left[a_n, \frac{a_n + b_n}{2}\right] & si \ \left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)^2 > 2, \\ \left[\frac{a_n + b_n}{2}, b_n\right] & sinon. \end{cases}$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ permet d'approximer $\sqrt{2}$ avec pour majoration de l'erreur :

$$\left|u_n - \sqrt{2}\right| \leq b_n - a_n = \frac{1}{2^n}.$$

La programmation permettant le calcul des u_n est élémentaire.

3.10 Le théorème de Césaro

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite numérique qui converge vers ℓ, les u_n seront proches de ℓ pour n assez grand et il semble naturel qu'il en est de même des moyennes $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} u_k$. C'est ce que dit le théorème de Césaro. Un peu plus généralement, on a le résultat suivant.

Théorème 3.26 *Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sum\limits_{k=0}^{n}\alpha_k\right) = +\infty$.*
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle ou complexe convergente, on a alors :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n-1}\alpha_k}\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k u_k\right) = \lim_{n\to+\infty}(u_n).$$

Démonstration. Notons $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)$ et, pour tout entier $n \geq 1$:

$$A_n = \sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k,\ v_n = \frac{1}{A_n}\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k u_k.$$

On a :

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_\varepsilon,\ |u_n - \ell| < \varepsilon$$

et donc pour $n > n_\varepsilon$:

$$\begin{aligned}
|v_n - \ell| &= \frac{1}{A_n}\left|\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k(u_k-\ell)\right| \\
\leq \frac{1}{A_n}\left|\sum_{k=0}^{n_\varepsilon}\alpha_k(u_k-\ell)\right| &+ \frac{1}{A_n}\sum_{k=n_\varepsilon+1}^{n-1}\alpha_k|u_k-\ell| \\
&\leq \frac{C_\varepsilon}{A_n} + \frac{\sum\limits_{k=n_\varepsilon+1}^{n-1}\alpha_k}{A_n}\varepsilon \leq \frac{C_\varepsilon}{A_n} + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Si de plus on $\lim\limits_{n\to+\infty}(A_n) = +\infty$, il en résulte que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{C_\varepsilon}{A_n}\right) = 0$ (ε étant fixé) et on peut trouver un entier $n_1 > n_\varepsilon$ tel que :

$$\forall n \geq n_1,\ |v_n - \ell| \leq 2\varepsilon$$

D'où le résultat annoncé. ∎

Remarque 3.6 *Ce théorème est souvent utilisé en considérant les moyennes arithmétiques, c'est-à-dire avec la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stationnaire sur 1. Précisément, on a :*

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n) \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}u_k\right) = \ell.$$

Définition 3.12 *On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge au sens de Césaro vers un scalaire ℓ, si la suite $\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente vers ℓ.*

Exercice 3.64 *Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle ou complexe convergente, on a alors pour tout réel $\alpha \geq 0$:*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\sum_{k=1}^{n} k^\alpha u_k\right) = \frac{1}{\alpha+1}\lim_{n\to+\infty}(u_n).$$

Solution 3.64 *On désigne par $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\alpha_n = n^\alpha$. Comme $k^\alpha \geq 1$ pour tout $k \geq 1$, on a $\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k \geq n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k\right) = +\infty$. Le théorème de Césaro nous dit alors que :*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} k^\alpha}\sum_{k=1}^{n} k^\alpha u_k\right) = \lim_{n\to+\infty}(u_n).$$

Il s'agit alors de trouver un équivalent de $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k^\alpha$. En utilisant la croissance de la fonction $t \mapsto t^\alpha$ sur $[1,+\infty[$, on a pour tout entier $k \geq 1$:

$$\forall t \in [k, k+1],\ k^\alpha \leq t^\alpha \leq (k+1)^\alpha$$

et :

$$k^\alpha \leq \int_k^{k+1} t^\alpha dt \leq (k+1)^\alpha$$

de sorte que :

$$\sum_{k=1}^{n} k^\alpha \leq \sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1} t^\alpha dt \leq \sum_{k=1}^{n}(k+1)^\alpha$$

ou encore :

$$S_n \leq \int_1^{n+1} t^\alpha dt = \frac{(n+1)^{\alpha+1}-1}{\alpha+1} \leq S_{n+1} - 1.$$

On a donc $S_n \leq \dfrac{(n+1)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ et $\dfrac{(n+1)^{\alpha+1}-1}{\alpha+1} \leq S_{n+1}$ ou encore $\dfrac{n^{\alpha+1}-1}{\alpha+1} \leq S_n$, ce qui donne :

$$\frac{n^{\alpha+1}-1}{\alpha+1} \leq S_n \leq \frac{(n+1)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

et :

$$\frac{1-\frac{1}{n^{\alpha+1}}}{\alpha+1} \leq \frac{S_n}{n^{\alpha+1}} \leq \frac{1}{\alpha+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha+1}.$$

Il en résulte que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{S_n}{n^{\alpha+1}} = \dfrac{1}{\alpha+1}$, ce qui signifie que $S_n \underset{+\infty}{\backsim} \dfrac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.
En conséquence, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n^{\alpha+1}}\sum\limits_{k=1}^{n} k^\alpha u_k\right) = \dfrac{1}{\alpha+1}\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)$.

Exercice 3.65 *Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle ou complexe telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1}-u_n) = \ell$ (avec ℓ éventuellement infini pour une suite réelle), alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{n} = \ell$.*

Solution 3.65 *Il suffit d'écrire que :*

$$\frac{u_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) + \frac{u_0}{n}$$

et d'utiliser le théorème de Césaro.

L'exercice précédent peut se généraliser comme suit.

Exercice 3.66 *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe et $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle strictement croissante non majorée telle que $\gamma_0 > 0$. Montrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{u_{n+1}-u_n}{\gamma_{n+1}-\gamma_n}\right) = \lambda$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{u_n}{\gamma_n}\right) = \lambda$.*

Solution 3.66 *On désigne par $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\alpha_n = \gamma_{n+1} - \gamma_n$. Comme $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante avec $\gamma_0 > 0$, les suites $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont à valeurs strictement positives. Si de plus $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non majorée, elle diverge vers $+\infty$ et :*

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k\right) = \lim_{n\to+\infty} (\gamma_{n+1} - \gamma_0) = +\infty.$$

En écrivant que :

$$\frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n-1} \alpha_k} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \frac{u_{k+1}-u_k}{\gamma_{k+1}-\gamma_k} = \frac{1}{\gamma_n - \gamma_0} (u_n - u_0)$$

et en utilisant le théorème de Césaro, on déduit que si $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{u_{n+1}-u_n}{\gamma_{n+1}-\gamma_n}\right) = \lambda$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n-u_0}{\gamma_n-\gamma_0} = \lambda$, soit $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{\gamma_n-\gamma_0} = \lambda$ puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \gamma_n = +\infty$. Enfin avec $\dfrac{u_n}{\gamma_n-\gamma_0} = \dfrac{u_n}{\gamma_n} \dfrac{1}{1-\frac{\gamma_0}{\gamma_n}}$, on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{u_n}{\gamma_n}\right) = \lambda$.

Exercice 3.67 *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites numériques convergentes respectivement vers ℓ et ℓ'. Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ w_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k v_{n-k}$$

converge vers $\ell\ell'$.

Solution 3.67 *On a, pour tout $n \geq 1$:*

$$\begin{aligned} w_n - \ell\ell' &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (u_k v_{n-k} - \ell\ell') \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (u_k (v_{n-k} - \ell') + \ell' (u_k - \ell)) \end{aligned}$$

et :

$$|w_n - \ell\ell'| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}^*} |u_n| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (v_{n-k} - \ell') + |\ell'| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (u_k - \ell)$$

(la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée puisque convergente). On conclut alors avec le théorème de Césaro.

Exercice 3.68 *Montrer que le théorème de Césaro est encore valable pour des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui diverge vers $-\infty$ ou $+\infty$.*

Solution 3.68 *Quitte à remplacer $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on peut supposer que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = +\infty$.*
On a donc :

$$\forall\lambda > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0,\ u_n > \lambda$$

et, en gardant les notations utilisées dans la démonstration du théorème, on a pour tout $n > n_0$:

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{1}{A_n}\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k u_k \\ &= \frac{1}{A_n}\sum_{k=0}^{n_0}\alpha_k u_k + \frac{1}{A_n}\sum_{k=n_0+1}^{n-1}\alpha_k u_k \\ &> \frac{C_0}{A_n} + \frac{A_n - A_{n_0}}{A_n}\lambda = \lambda + \frac{C_0 - A_{n_0}}{A_n}\lambda \end{aligned}$$

Si de plus on $\lim\limits_{n\to+\infty}(A_n) = +\infty$, il en résulte que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{C_0 - A_{n_0}}{A_n}\right) = 0$ (λ étant fixé) et on peut trouver un entier $n_1 > n_0$ tel que :

$$\forall n \geq n_1,\ \frac{C_0 - A_{n_0}}{A_n} > -\frac{1}{2}$$

ce qui donne :

$$\forall n \geq n_1,\ v_n > \frac{\lambda}{2}$$

et le résultat annoncé puisque λ est quelconque.

On a donc le résultat suivant.

Théorème 3.27 *Une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente est convergente au sens de Césaro. Si de plus cette suite est réelle et diverge vers $-\infty$ ou $+\infty$, elle diverge aussi au sens de Césaro vers $-\infty$ ou $+\infty$.*

Remarque 3.7 *En considérant les suites définies par $\alpha_n = 1$ et $u_n = (-1)^n$, on voit que la réciproque est fausse. Toutefois, on a le résultat suivant.*

Exercice 3.69 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique convergente au sens de Césaro vers ℓ. Si de plus on a $\lim\limits_{n\to+\infty} n(u_n - u_{n-1}) = 0$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.*

Solution 3.69 *On a :*

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k(u_k - u_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} ku_k - \sum_{k=1}^{n} ku_{k-1} &= \sum_{k=1}^{n} ku_k - \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)u_k \\ &= nu_n - \sum_{k=0}^{n-1} u_k \end{aligned}$$

soit :

$$u_n - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k\left(u_k - u_{k-1}\right) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

en appliquant le théorème de Césaro à la suite $\left(n\left(u_n - u_{n-1}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *, ce qui donne :*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \ell.$$

Le résultat précédent est un cas particulier du théorème de Hardy qui suit.

Exercice 3.70 *Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite numérique et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite des moyennes de Césaro définie par :*

$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k$$

1. Montrer que :

$$\forall m > n,\ u_m - v_m = \frac{n}{m-n}\left(v_m - v_n\right) + \frac{1}{m-n}\sum_{k=n}^{m-1}\left(u_m - u_k\right).$$

2. On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge au sens de Césaro vers ℓ et que la suite $\left(n\left(u_n - u_{n-1}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. On désigne par M un majorant la suite $\left(n\left|u_n - u_{n-1}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

   (a) Montrer que :

$$\forall m > n,\ \left|u_m - v_m\right| \leq \frac{n}{m-n}\left|v_m - v_n\right| + M\frac{m-n}{n+1}.$$

   (b) Montrer que $\lim\limits_{m\to+\infty}\left(u_m - v_m\right) = 0$ et donc que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Solution 3.70

1. *Pour* $m > n$*, on a :*

$$v_m = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{n-1} u_k + \frac{1}{m}\sum_{k=n}^{m-1} u_k = \frac{n}{m}v_n + \frac{1}{m}\sum_{k=n}^{m-1} u_k$$

et :

$$\begin{aligned} u_m - v_m &= u_m - \frac{n}{m}v_n - \frac{1}{m}\sum_{k=n}^{m-1} u_k \\ &= u_m - \frac{n}{m}v_n - \frac{1}{m}\sum_{k=n}^{m-1}\left(u_k - u_m\right) - \frac{m-n}{m}u_m \\ &= \frac{n}{m}\left(u_m - v_n\right) + \frac{1}{m}\sum_{k=n}^{m-1}\left(u_m - u_k\right) \end{aligned}$$

soit :

$$u_m - v_m = \frac{n}{m}(u_m - v_m) + \frac{n}{m}(v_m - v_n) + \frac{1}{m}\sum_{k=n}^{m-1}(u_m - u_k)$$

ou encore :

$$\frac{m-n}{m}(u_m - v_m) = \frac{n}{m}(v_m - v_n) + \frac{1}{m}\sum_{k=n}^{m-1}(u_m - u_k)$$

c'est-à-dire :

$$u_m - v_m = \frac{n}{m-n}(v_m - v_n) + \frac{1}{m-n}\sum_{k=n}^{m-1}(u_m - u_k).$$

2.

(a) Pour $m > n$ et k compris entre n et $m-1$, on a :

$$|u_m - u_k| \leq \sum_{j=k+1}^{m} |u_j - u_{j-1}| \leq M \sum_{j=k+1}^{m} \frac{1}{j} \leq M\frac{m-k}{k+1} \leq M\frac{m-n}{n+1},$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned}|u_m - v_m| &\leq \frac{n}{m-n}|v_m - v_n| + \frac{M}{m-n}\sum_{k=n}^{m-1}\frac{m-n}{n+1}\\ &\leq \frac{n}{m-n}|v_m - v_n| + M\frac{m-n}{n+1}.\end{aligned}$$

(b) D'autre part, la suite convergente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant de Cauchy, on peut trouver, pour tout réel $\varepsilon > 0$, un entier $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ (ce choix sera justifié plus loin) tel que :

$$\forall n \geq n_0,\ \forall m \geq n_0,\ |v_m - v_n| < \varepsilon^2,$$

ce qui donne :

$$\forall m > n \geq n_0,\ |u_m - v_m| \leq \frac{n}{m-n}\varepsilon^2 + M\frac{m-n}{n+1}$$

Pour $m > n_0$ assez grand, on cherche un entier n compris entre n_0 et m tel que :

$$\frac{n}{m-n} < \frac{1}{\varepsilon},\ \frac{m-n}{n+1} < \varepsilon$$

ou encore :

$$\frac{m-\varepsilon}{\varepsilon+1} < n < \frac{m}{\varepsilon+1}.$$

Pour ce faire, il suffit de prendre n tel que :

$$n = E\left(\frac{m-\varepsilon}{\varepsilon+1}\right) + 1$$

où m est choisi tel que :

$$m > n_0 + \varepsilon(n_0 + 1).$$

En effet, on a :

$$n - 1 \leq \frac{m-\varepsilon}{\varepsilon+1} < n$$

donc :
$$n \leq \frac{m-\varepsilon}{\varepsilon+1}+1=\frac{m+1}{\varepsilon+1}<m$$
puisque $m > n_0 > \dfrac{1}{\varepsilon}$ *et :*
$$n > \frac{m-\varepsilon}{\varepsilon+1} \geq n_0$$
si $m > \varepsilon (n_0+1)+n_0$.

On a donc pour $\varepsilon > 0$ *donné et* $m > n_0+\varepsilon(n_0+1)$, *en prenant* $n = E\left(\dfrac{m-\varepsilon}{\varepsilon+1}\right)+1$ *:*
$$|u_m - v_m| \leq \frac{n}{m-n}\varepsilon^2 + M\frac{m-n}{n+1} < (M+1)\varepsilon.$$
On a donc ainsi prouvé que $\lim\limits_{m\to+\infty}(u_m - v_m) = 0$ *et* $\lim\limits_{m\to+\infty} u_m = \lim\limits_{m\to+\infty} v_m = \ell$.

Exercice 3.71 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de réels strictement positifs. Montrer que si la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* ℓ*, alors la suite* $\left(\left(\prod\limits_{k=0}^{n-1} u_k\right)^{\frac{1}{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *des moyennes géométriques converge aussi vers* ℓ.

Solution 3.71 *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = \ell \geq 0$, *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty}(\ln(u_n)) = \ln(\ell) \in [-\infty,+\infty[$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\ln(u_k)\right) = \mu$ *avec* $\mu = \ln(\ell)$ *pour* ℓ *réel et* $\mu = -\infty$ *pour* $\ell = 0$. *On a donc* $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\ln\left(\left(\prod\limits_{k=0}^{n-1}u_k\right)^{\frac{1}{n}}\right)\right) = \mu$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\left(\prod\limits_{k=0}^{n-1}u_k\right)^{\frac{1}{n}}\right) = e^{\mu} = \ell$.

Exercice 3.72 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de réels strictement positifs. Montrer que si la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* ℓ*, alors la suite* $\left(\dfrac{n}{\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{1}{u_k}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *des moyennes harmoniques converge aussi vers* ℓ.

Solution 3.72 *On a* $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{\ell} \in [0,+\infty]$ *et le théorème de Césaro nous dit que* $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{1}{u_k} = \dfrac{1}{\ell}$, *encore équivalent à* $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{1}{u_k}} = \ell$.

Remarque 3.8 *En utilisant l'encadrement* $H_n(u) \leq G_n(u) \leq A_n(u)$, *où* $H_n(u)$, $G_n(u)$ *et* $A_n(u)$ *désigne respectivement les moyennes harmonique, géométrique et arithmétique de la suite* u*, la convergence de* $(G_n(u))_{n\in\mathbb{N}^*}$ *vers* ℓ *se déduit de celle des suites* $(H_n(u))_{n\in\mathbb{N}^*}$ *et* $(A_n(u))_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 3.73 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle ou complexe telle que* u_n *soit non nul à partir d'un certain rang. Montrer que si* $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|\right) = \lambda$, *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt[n]{|u_n|}\right) = \lambda$.
La réciproque est-elle vrai ?

Solution 3.73 *On peut supposer, quitte à réindéxer la suite, que tous les* u_n *sont non nuls. Si* $\lim_{n\to+\infty}\left(\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\right) = \lambda \geq 0$, *alors* $\lim_{n\to+\infty}\left(\ln\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\right) = \mu$ *avec* $\mu = \ln(\lambda)$ *pour* λ *réel et* $\mu = -\infty$ *pour* $\lambda = 0$, *soit* $\lim_{n\to+\infty}(\ln|u_{n+1}| - \ln|u_n|) = \mu$ *et en utilisant le théorème de Césaro :*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(\ln|u_{k+1}| - \ln|u_k|)\right) = \mu$$

soit :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}(\ln|u_n| - \ln|u_0|)\right) = \mu$$

encore équivalent à $\lim_{n\to+\infty}\left(\ln\left(\sqrt[n]{|u_n|}\right)\right) = \mu$ *(c'est l'exercice précédent avec la suite* $(\ln|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$*), ce qui donne* $\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt[n]{|u_n|}\right) = e^{\mu} = \lambda$.

La réciproque est fausse comme le montre l'exemple de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :*

$$u_n = \begin{cases} a^{\frac{n}{2}}b^{\frac{n}{2}} \text{ si } n \text{ est pair} \\ a^{\frac{n+1}{2}}b^{\frac{n-1}{2}} \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

avec $0 < a < b$. *On a :*

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{u_n} &= \begin{cases} \left(a^{\frac{n}{2}}b^{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt{ab} \text{ si } n \text{ est pair} \\ \left(a^{\frac{n+1}{2}}b^{\frac{n-1}{2}}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt{ab}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2n}} \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases} \\ &\underset{n\to+\infty}{\to} \sqrt{ab}\end{aligned}$$

et :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \begin{cases} \dfrac{a^{\frac{n+2}{2}}b^{\frac{n}{2}}}{a^{\frac{n}{2}}b^{\frac{n}{2}}} = a \text{ si } n \text{ est pair} \\ \dfrac{a^{\frac{n+1}{2}}b^{\frac{n+1}{2}}}{a^{\frac{n+1}{2}}b^{\frac{n-1}{2}}} = b \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

donc $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *n'a pas de limite.*

Exercice 3.74 *Déterminer les limites des suites :*

$$\left(\sqrt[n]{C_{2n}^{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}, \left(\sqrt[n]{\prod_{k=0}^{n}(n+k)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ et } \left(\frac{1}{n^2}\sqrt[n]{\frac{(3n)!}{n!}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}.$$

Solution 3.74 *Notons* $v_n = \sqrt[n]{u_n}$ *chacune de ces suites. Dans l'ordre d'apparition, on a :*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\to} 4,$$

donc $\lim_{n\to+\infty} v_n = 4$ *;*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty,$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

$v_n = \sqrt[n]{\dfrac{(3n)!}{n^{2n}n!}}$ *et :*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n} \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+1)^3} \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{27}{e^2},$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dfrac{27}{e^2}$.

Exercice 3.75 *Soit* $\alpha > -1$ *et* $(u_n)_{n\geq 1}$ *la suite de réels définie par*

$$u_0 > 0,\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n^\alpha} \quad (n \geq 0)$$

1. *Montrer que* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
2. *Montrer que pour tout* $\beta > 0$ *on a* $u_{n+1}^\beta = u_n^\beta \left(1 + \dfrac{\beta}{u_n^{\alpha+1}} + o\left(\dfrac{1}{u_n^{\alpha+1}}\right)\right)$.
3. *Donner un équivalent de* u_n *à l'infini.*

Solution 3.75

1. *La suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est strictement croissante (par récurrence). Si elle était bornée, alors elle serait convergente de limite* ℓ *vérifiant* $\ell = \ell + \dfrac{1}{\ell^\alpha}$, *ce qui est impossible. Donc* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
2. *Pour tout réel, on a*
$$u_{n+1}^\beta = u_n^\beta \left(1 + \frac{\beta}{u_n^{\alpha+1}} + o\left(\frac{1}{u_n^{\alpha+1}}\right)\right).$$
3. *Pour* $\beta = \alpha + 1$ *:*
$$\lim_{n\to+\infty} \left(u_{n+1}^{\alpha+1} - u_n^{\alpha+1}\right) = \alpha + 1.$$
Le théorème de Césaro entraîne alors que :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n^{\alpha+1}}{n} = \alpha + 1$$
c'est-à-dire que :
$$u_n \backsim ((\alpha+1)\, n)^{\frac{1}{\alpha+1}}.$$

4

Développement décimal d'un réel

On rappelle que le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels est archimédien, ce qui permet d'y définir la fonction partie entière.

En utilisant cette partie entière on verra dans ce chapitre que tout réel peut être approché par des nombres rationnels particuliers que sont les nombres décimaux.

4.1 Nombres décimaux

Définition 4.1 *On appelle nombre décimal tout nombre rationnel de la forme $\frac{a}{10^m}$ où a est un entier relatif et m un entier naturel.*

On note $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres décimaux.

Il est facile de vérifier que $\mathbb{D}$ est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$. Cet anneau est donc commutatif et intègre (i. e. sans diviseurs de 0).

Exercice 4.1 *Montrer qu'un nombre rationnel non nul $r = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux est décimal si, et seulement si, les seuls diviseurs de q sont 2 et 5.*

Solution 4.1 *Si $q = 2^n 5^m$, on a alors $r = \frac{2^m 5^n p}{10^{n+m}} \in \mathbb{D}$.*
Réciproquement si $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{D}$, on a alors $\frac{p}{q} = \frac{a}{10^m}$ où $a \in \mathbb{Z}^*$ et $10^m p = aq$ avec p et q premiers entre eux entraîne q divise $10^m = 2^m 5^m$ (théorème de Gauss) et les seuls facteurs premiers de q sont 2 et 5 (unicité de la décomposition en facteurs premiers).

Exercice 4.2 *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ le rationnel $r = \frac{n^2+1}{n(n^2-1)}$ n'est jamais décimal.*

Solution 4.2 *Il suffit de remarquer que 3 divise $n(n^2-1)$ (si $n \equiv 0 \mod 3$ c'est clair et si $n \equiv 1$ ou $n \equiv 2 \mod 3$ alors $n^2 - 1 \equiv 0 \mod 3$) et 3 ne divise pas $n^2 + 1$ (si $n \equiv 0 \mod 3$ alors $n^2 + 1 \equiv 1 \mod 3$ et si $n \equiv 1$ ou $n \equiv 2 \mod 3$ alors $n^2 + 1 \equiv 2 \mod 3$), donc r s'écrit sous forme irréductible $r = \frac{p}{q}$ avec 3 qui divise q et $r \notin \mathbb{D}$.*

Exercice 4.3 *Montrer que l'ensemble des nombres décimaux inversibles est :*

$$\mathbb{D}^* = \left\{ r = \pm 2^\alpha 5^\beta \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2 \right\}.$$

Solution 4.3 *Un rationnel* $r = \dfrac{a}{10^m}$ *est inversible dans* $\mathbb{D}$ *si, et seulement si, il existe un entier relatif* b *et un entier naturel* n *tels que* $\dfrac{a}{10^m}\dfrac{b}{10^n} = 1$*, ce qui revient à dire que* $ab = 10^{n+m}$ *ou encore que* 2 *et* 5 *sont les seuls diviseurs premiers possibles de* a *et* b*.*

Exercice 4.4 *Montrer que l'anneau* $\mathbb{D}$ *des nombres décimaux est principal.*

Solution 4.4 *Il s'agit de montrer que dans l'anneau intègre* $\mathbb{D}$*, tout idéal* I *est principal, c'est-à-dire de la forme* $\alpha\mathbb{D}$ *avec* $\alpha \in \mathbb{D}$*.*
Le résultat est trivial si $I = \{0\}$ *.*
Si I *est un idéal de* $\mathbb{D}$ *non réduit à* $\{0\}$ *, alors* $I \cap \mathbb{N}^*$ *est non vide. En effet comme* I *est un sous-groupe additif de* $\mathbb{D}$*, il contient un décimal* $d > 0$ *(si* $d \in I \setminus \{0\}$ *, alors* $-d \in I \setminus \{0\}$*) et en écrivant* $d = \dfrac{a}{10^p}$ *avec* $a \in \mathbb{N}^*$ *et* $p \in \mathbb{N}$*, on a* $a = 10^p d \in I$ *puisque* I *est un idéal de* $\mathbb{D}$ *et* $10^p \in \mathbb{D}$ *avec* $a \in \mathbb{N}^*$*.*
En tant que partie non vide de $\mathbb{N}^*$*,* $I \cap \mathbb{N}^*$ *admet donc un plus petit élément* α*.*
Du fait que I *est un idéal de* $\mathbb{D}$ *on déduit que* $\alpha\mathbb{D} \subset I$*.*
D'autre part, tout $d \in I$ *s'écrit* $d = \dfrac{a}{10^p}$ *avec* $a \in \mathbb{Z}$ *et* $p \in \mathbb{N}$ *et en effectuant la division euclidienne de* $a = 10^p d$ *par* α*, on a* $10^p d = \alpha q + r$ *avec* $q \in \mathbb{Z}$ *et* $0 \leq r \leq \alpha - 1$ *dans* $\mathbb{N}$*, ce qui donne* $r = 10^p d - \alpha q \in I \cap \mathbb{N}$ *(*$10^p d$ *et* αq *sont dans* $\mathbb{D}$ *puisque* d *et* α *y sont et* I *est un idéal) et nécessairement* $r = 0$ *par définition de* α*. On a* $d = \alpha\dfrac{q}{10^p} \in \alpha\mathbb{D}$ *et* $I \subset \alpha\mathbb{D}$*, soit en définitive* $I \subset \alpha\mathbb{D}$*.*

De manière un plus générale, on peut montrer que tout sous-anneau A de $\mathbb{Q}$ est principal. En effet, soit I un idéal de A non réduit à $\{0\}$ (le résultat est trivial si $I = \{0\}$). L'intersection $I \cap \mathbb{Z}$ est un idéal de $\mathbb{Z}$, donc principal et il existe un entier a tel que $I \cap \mathbb{Z} = a\mathbb{Z}$. Tout élément r de I s'écrit $r = \dfrac{p}{q}$ avec p et q premiers entre eux et $qr = p \in I \cap \mathbb{Z}$ (r est dans I et q dans $\mathbb{Z} \subset A$ puisque A est unitaire), il existe donc un entier k tel que $qr = ka$, ce qui donne $r = \dfrac{ka}{q} = \dfrac{k}{q}a$. Par ailleurs le théorème de Bézout nous dit qu'il existe deux entiers u et v tels que $up + vq = 1$, donc $\dfrac{1}{q} = ur + v \in A$ ($\mathbb{Z} \subset A$ et $r \in I \subset A$) et $\dfrac{k}{a} \in A$. On a donc montré que tout élément de I s'écrit $r = sa$ avec $s \in A$ et $a \in I$, ce qui signifie que I est principal. On retrouve ainsi le fait que l'anneau $\mathbb{D}$ des nombres décimaux est principal.

4.2 Approximations décimales des réels

Pour tout réel x, la partie entière $a_0 = [x] \in \mathbb{Z}$ nous fournit une première approximation de x dans $\mathbb{Z}$. On rappelle que a_0 est l'entier relatif défini par :

$$a_0 \leq x < a_0 + 1.$$

En subdivisant l'intervalle $[a_0, a_0 + 1]$ en 10 intervalles de même longueur, ce qui revient à écrire que :

$$[a_0, a_0 + 1] = \bigcup_{k=0}^{9} \left[a_0 + \frac{k}{10}, a_0 + \frac{k+1}{10}\right]$$

il existe un unique indice a_1 compris entre 0 et 9 tel que :

$$r_1 = a_0 + \frac{a_1}{10} \leq x < a_0 + \frac{a_1 + 1}{10} = r_1 + \frac{1}{10}$$

et r_1 est une approximation décimale de x plus fine que $r_0 = a_0$.

En remarquant que $10r_1$ est entier et vérifie :

$$10r_1 \leq 10x < 10r_1 + 1,$$

on déduit que $r_1 = \dfrac{[10x]}{10}$.

En subdivisant de manière analogue l'intervalle $\left[r_1, r_1 + \dfrac{1}{10}\right[$ en 10 intervalles de même longueur, ce qui revient à écrire que :

$$\left[r_1, r_1 + \frac{1}{10}\right[= \bigcup_{k=0}^{9} \left[r_1 + \frac{k}{100}, r_1 + \frac{k+1}{100}\right[$$

il existe un unique indice a_2 compris entre 0 et 9 tel que :

$$r_2 = r_1 + \frac{a_2}{100} \leq x < r_1 + \frac{a_2 + 1}{100} = r_2 + \frac{1}{100}$$

et r_2 est une approximation décimale de x plus fine que r_1.

En remarquant que $100r_2 \in \mathbb{Z}$ et $100r_2 \leq 100x < 100r_2 + 1$, on déduit que $r_2 = \dfrac{[100x]}{100}$.

En continuant ainsi de suite, on définit les nombres décimaux r_n par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ r_n = \frac{[10^n x]}{10^n}$$

et ces nombres vont nous fournir des approximations décimales de x.

En effet, par définition de la partie entière $10^n r_n = [10^n x]$, on a :

$$10^n r_n \leq 10^n x < 10^n r_n + 1, \tag{4.1}$$

ce qui peut aussi s'écrire $r_n \leq x < r_n + \dfrac{1}{10^n}$, ou encore :

$$0 \leq x - r_n < \frac{1}{10^n}, \tag{4.2}$$

ce qui entraîne que $\lim\limits_{n \in \mathbb{N}} (r_n) = x$.

L'encadrement (4.1) va nous fournir d'autres informations sur la convergence de cette suite.

De $10^{n+1} r_{n+1} > 10^{n+1} x - 1$ et $-10^n r_n \geq -10^n x$, on déduit que :

$$10^{n+1} (r_{n+1} - r_n) > -1$$

dans $\mathbb{Z}$, ce qui équivaut à $10^{n+1} (r_{n+1} - r_n) \geq 0$. On a $r_{n+1} - r_n \geq 0$ pour tout $n \geq 0$, ce qui signifie que la suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc croissante.

De manière analogue les inégalités $10^{n+1} r_{n+1} \leq 10^{n+1} x$ et $-10^n r_n < -10^n x + 1$ nous donne :

$$10^{n+1} (r_{n+1} - r_n) < 10$$

dans $\mathbb{Z}$, ce qui équivaut à $10^{n+1} (r_{n+1} - r_n) \leq 9$.

En définitive, pour tout entier n :

$$a_{n+1} = 10^{n+1} (r_{n+1} - r_n) = \left[10^{n+1} x\right] - 10 \left[10^n x\right]$$

est un entier compris entre 0 et 9 et :

$$r_{n+1} = r_n + \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} \tag{4.3}$$

ce qui n'est pas étonnant.

En tenant compte de $r_0 = a_0 = [x]$, on déduit facilement par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ r_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^k}, \tag{4.4}$$

où les a_k sont des entiers compris entre 0 et 9.

Théorème 4.1 *Les suites* $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(r_n + \frac{1}{10^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont des suites adjacentes de nombres décimaux qui convergent vers* x *avec* $r_n \leq x < s_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. On vient de vérifier que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et convergente vers x.

Avec :

$$s_{n+1} - s_n = r_{n+1} - r_n - \frac{9}{10^{n+1}} = \frac{a_{n+1} - 9}{10^{n+1}} \leq 0,$$

on déduit que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante.

De $s_n - r_n = \frac{1}{10^n}$, on déduit que $\lim\limits_{n\in\mathbb{N}} (s_n - r_n) = 0$. Ces deux suites sont donc adjacentes et la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent aussi vers x.

L'encadrement (4.2) $0 \leq x - r_n < \frac{1}{10^n}$ s'écrit aussi :

$$r_n \leq x < r_n + \frac{1}{10^n} = s_n.$$

■

L'encadrement (4.2) nous montre aussi que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\begin{cases} x - \frac{1}{10^n} < r_n \leq x, \\ x < s_n = r_n + \frac{1}{10^n} \leq x + \frac{1}{10^n} \end{cases}$$

Pour ces raisons r_n est appelée l'approximation décimale par défaut à 10^{-n} près de x et s_n l'approximation décimale par excès à 10^{-n} près.

Le théorème précédent peut aussi s'exprimer comme suit.

Théorème 4.2 *L'ensemble* $\mathbb{D}$ *des nombres décimaux est dense dans* $\mathbb{R}$.

La base de numération 10 peut en fait être remplacée par n'importe quelle base $b \geq 2$, c'est-à-dire que l'ensemble :

$$\mathbb{P} = \left\{ \frac{a}{b^m} \mid a \in \mathbb{Z},\ m \in \mathbb{N} \right\}$$

est dense dans $\mathbb{R}$.

En utilisant le fait que les sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$ sont denses ou discrets, on peut même montrer que l'ensemble $\mathbb{D}^*$ des nombres décimaux inversibles est dense dans $\mathbb{R}$.

De l'inclusion $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$, on déduit le résultat suivant.

Corollaire 4.1 *L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnel est dense dans $\mathbb{R}$.*

Exercice 4.5 *Montrer que l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ des nombres irrationnels est dense dans $\mathbb{R}$.*

Solution 4.5 *Pour tout réel x il existe une suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de rationnels qui converge vers $x+\sqrt{2}$ et la suite de nombres irrationnels $\left(r_n - \sqrt{2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x.*

L'approximation décimale des réels permet de comparer deux réels.

Exercice 4.6 *Soient x, y deux réels et $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(r'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites d'approximations décimales par défaut associées. Montrer que $x < y$ si, et seulement si, il existe un entier n tel que $r_n < r'_n$.*

Solution 4.6 *Si $x < y$ on peut alors trouver un entier naturel n tel que $10^n (y - x) > 1$ ($\mathbb{R}$ est archimédien) soit $10^n y > 10^n x + 1$ et alors :*

$$\begin{aligned} 10^n r_n + 1 = [10^n x] + 1 \leq 10^n x + 1 < 10^n y \\ < [10^n y] + 1 = 10^n r'_n + 1 \end{aligned}$$

et $r_n < r'_n$.
Réciproquement s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $r_n < r'_n$, alors $[10^n x] < [10^n y]$, ce qui équivaut à $[10^n x] \leq [10^n y] - 1$ et entraîne :

$$10^n x < [10^n x] + 1 \leq [10^n y] \leq 10^n y,$$

soit $x < y$.

En utilisant (4.3) et (4.4), la convergence de la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers x peut aussi se traduire par le résultat suivant.

Théorème 4.3 *Pour tout réel x on a :*

$$x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{10^k} \tag{4.5}$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = [x] \\ \forall n \geq 1,\ a_n = 10^n (r_n - r_{n-1}) = [10^n x] - 10 [10^{n-1} x] \end{array} \right. \tag{4.6}$$

avec $a_0 \in \mathbb{Z}$ et pour $n \geq 1$, $a_n \in \{0, 1, \cdots, 9\}$.

On dit alors que cette écriture est un développement décimal illimité du réel x et les a_n pour $n \geq 1$ sont les chiffres de x dans cette écriture.

Par exemple pour $x = 32,456$, on vérifie que :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = [x] = 32, \\ a_1 = [10x] - 10 [x] = 4 \\ a_2 = [100x] - 10 [10x] = 5 \\ a_4 = [1000x] - 10 [100x] = 6 \\ a_k = 0,\ \text{pour } k \geq 5, \end{array} \right.$$

c'est-à-dire que pour $k \geq 1$, a_k est la k-ème décimale de x après la virgule.

Mais pour $x < 0$, ce résultat n'est plus vrai. Par exemple pour $x = -32,456$, on a :

$$\begin{cases} a_0 = [x] = -33, \\ a_1 = [10x] - 10\,[x] = -325 + 330 = 5 \\ a_2 = [100x] - 10\,[10x] = -3246 + 3250 = 4 \\ a_4 = [1000x] - 10\,[100x] = -32456 + 32460 = 4 \\ a_k = 0, \text{ pour } k \geq 5, \end{cases}$$

ce qui correspond à $x = -33 + 0,544$.

Pour $x > 0$ le développement (4.5) est noté :

$$x = a_0, a_1 a_2 \cdots a_n \cdots$$

et pour $x < 0$, on écrit :

$$x = -(-x) = -a_0, a_1 a_2 \cdots a_n \cdots$$

où $a_0, a_1 a_2 \cdots a_n \cdots$ est le développement décimal illimité de $-x$ obtenu par le procédé précédent, c'est-à-dire que :

$$\begin{cases} a_0 = [-x]\,, \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = [-10^n x] - 10\,[-10^{n-1} x]\,. \end{cases}$$

Exemple 4.1 *La constante de Ramanujan est le réel* $e^{\pi\sqrt{163}}$ *dont le développement décimal s'écrit :*

$$e^{\pi\sqrt{163}} = 262537412640768743.99999999999992...$$

On pourrait croire qu'il est entier si on ne calcule pas la 13*-ème décimale.*

Une question que l'on peut naturellement se poser est celle de l'unicité d'un tel développement. Plus précisément, on a définit une application δ de $\mathbb{R}^{+,*}$ dans l'ensemble $\mathcal{D}$ des suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $a_0 \in \mathbb{N}$ et $a_k \in \{0, 1, \cdots, 9\}$ pour tout $k \geq 1$ en associant à tout réel x positif ou nul la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par (4.6) et la question est de savoir si cette application est bijective.

Le résultat qui suit nous dit que cette application n'est pas surjective.

Théorème 4.4 *Pour tout réel x la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par* (4.6) *ne peut pas être stationnaire sur* 9 *à partir d'un certain rang.*

Démonstration. Supposons qu'il existe un entier $n_0 \geq 1$ tel que $a_n = 9$ pour tout $n \geq n_0$. On a alors pour tout $n > n_0$:

$$\begin{aligned} r_n - r_{n_0} &= \sum_{k=n_0+1}^{n} \frac{a_k}{10^k} = \frac{9}{10^{n_0+1}} \sum_{k=0}^{n-n_0-1} \frac{1}{10^k} \\ &= \frac{9}{10^{n_0+1}} \frac{1 - \dfrac{1}{10^{n-n_0}}}{1 - \dfrac{1}{10}} = \frac{1}{10^{n_0}} - \frac{1}{10^n}, \end{aligned}$$

soit $s_n = r_n + \dfrac{1}{10^n} = r_{n_0} + \dfrac{1}{10^{n_0}} = s_{n_0}$ et $x = \lim\limits_{n\to+\infty} (s_n) = s_{n_0}$, ce qui contredit $x < s_{n_0}$. ■

On déduit donc que, par exemple, la suite $(0, 9, 9, \cdots, 9, \cdots)$ comportant une infinité de 9 consécutifs n'a pas d'antécédents par l'application δ.

Si $\mathcal{D}'$ désigne le sous-ensemble de $\mathcal{D}$ formé des suites qui ne sont pas stationnaires sur 9 à partir d'un certain rang, nous allons vérifier que δ réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathcal{D}'$.

Définition 4.2 *On appelle développement décimal illimité propre du réel x toute égalité $x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{10^k}$ où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dans $\mathcal{D}'$. Un tel développement est noté $x = a_0, a_1a_2 \cdots a_n \cdots$ et les a_n, pour $n \geq 1$, sont les chiffres de x dans cette écriture.*

La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par (4.6), fournit un développement décimal illimité propre de x.

Le réel $x = 1$ a pour développement propre $1 = 1,00 \cdots 0 \cdots$, mais on peut aussi écrire que :

$$1 = 0,99 \cdots 9 \cdots = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{9}{10^k},$$

ce deuxième développement est un développement impropre de 1.

Théorème 4.5 *Le développement décimal illimité propre d'un réel positif est unique et l'application δ réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathcal{D}'$.*

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}^+$. On a déjà le développement $x = a_0, a_1 \cdots a_n \cdots$ où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite définie par (4.6). Supposons que l'on ait un autre développement :

$$x = b_0, b_1 \cdots b_n \cdots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{b_k}{10^k}$$

avec $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{D}'$. On a $b_0 \in \mathbb{N}$ et du fait que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas stationnaire sur 9 à partir d'un certain rang, on a :

$$0 \leq x - b_0 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b_k}{10^k} < \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{9}{10^k} = 1,$$

soit $b_0 \leq x < b_0 + 1$, ce qui signifie que $b_0 = [x] = a_0$.

Plus généralement, pour $n \geq 1$ on a :

$$10^n \left(x - b_0 - \cdots - \frac{b_{n-1}}{10^{n-1}} \right) = b_n + \frac{b_{n+1}}{10} + \cdots$$

et le raisonnement précédent nous dit que :

$$b_n = \left[10^n \left(x - b_0 - \cdots - \frac{b_{n-1}}{10^{n-1}} \right) \right] = [10^n x] - 10 \left(b_0 10^{n-1} + \cdots + b_{n-1} \right)$$

avec :

$$10^{n-1} x = b_0 10^{n-1} + \cdots + b_{n-1} + \frac{b_n}{10} + \cdots$$

et $b_0 10^{n-1} + \cdots + b_{n-1} = [10^{n-1} x]$. On a donc $b_n = [10^n x] - 10 [10^{n-1} x] = a_n$.

Le développement décimal illimité propre d'un réel positif x est donc bien unique.

Le théorème précédent nous dit que δ est bien une application de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathcal{D}'$.

L'injectivité se déduit immédiatement de l'unicité précédemment démontrée.

Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{D}'$, on peut poser $x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{10^k}$ (avec $a_k \geq 0$ pour tout $k \geq 1$ et $\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{9}{10^k} < 1$, on déduit que la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k} \right)_{n \geq 1}$ est croissante majorée, donc convergente) et l'unicité du développement propre nous dit que $\delta(x) = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. L'application δ est donc surjective. ■

Ce résultat permet de donner une démonstration relativement simple du fait que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Théorème 4.6 $\mathbb{R}$ *est non dénombrable.*

Démonstration. Si $\mathbb{R}$ est dénombrable il en est alors de même de l'ensemble :

$$A = \{x = 0, a_1 a_2 \cdots a_n \cdots \mid \forall k \geq 1,\ 0 \leq a_k \leq 8\}.$$

On peut donc écrire que :

$$A = \{x_p = 0, a_{p,1} a_{p,2} \cdots a_{p,n} \cdots \mid p \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \geq 1,\ 0 \leq a_{p,k} \leq 8\}.$$

Le réel $b = 0, b_1 b_2 \cdots b_n \cdots$ définit par $0 \leq b_i \leq 8$ et $b_i \neq a_{ii}$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ est dans A et distinct de tous les x_p ($b = x_p$ entraîne $b_p = x_{p,p}$) ce qui est contradictoire. En définitive $\mathbb{R}$ est non dénombrable. ∎

Exercice 4.7 *Montrer que pour tout entier naturel non nul n, le premier chiffre après la virgule du développement décimal illimité propre de $\sqrt{n^2+n}$ est égal à 4.*

Solution 4.7 *Ce premier chiffre est $a_1 = \left[10\sqrt{n^2+n}\right] - 10\left[\sqrt{n^2+n}\right]$. Avec $n < \sqrt{n^2+n} < n+1$, on déduit que $\left[\sqrt{n^2+n}\right] = n$ et avec $10n+4 < 10\sqrt{n^2+n} < 10n+5$ que $\left[10\sqrt{n^2+n}\right] = 10n+4$. Le résultat en découle alors.*

Exercice 4.8 *Montrer que pour tout entier $n \geq 5$, le premier chiffre après la virgule du développement décimal illimité propre de $\sqrt{n^2+2n}$ est égal à 9.*

Solution 4.8 *Ce premier chiffre est $a_1 = \left[10\sqrt{n^2+2n}\right] - 10\left[\sqrt{n^2+2n}\right]$. Avec $n < \sqrt{n^2+2n} < n+1$ pour $n \geq 1$, on déduit que $\left[\sqrt{n^2+n}\right] = n$ et avec $10n+9 < 10\sqrt{n^2+n} < 10(n+1)$ pour $n \geq 5$, que $\left[10\sqrt{n^2+n}\right] = 10n+9$. Le résultat en découle alors.*
Pour $n = 1$, on a $a_1 = 1$ et pour $n = 2, 3, 4$, on a $a_1 = 8$.

4.3 Une caractérisation des nombres rationnels

Les développement décimaux illimités propres permettent de caractériser les nombres décimaux et les nombres rationnels.

Comme x est décimal [resp. rationnel] si, et seulement si, $-x$ l'est, il nous suffit de considérer les réels positifs, et même strictement positifs.

Théorème 4.7 *Un réel x strictement positif est décimal si, et seulement si, son développement décimal illimité propre est fini, ce qui signifie que la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ des décimales de x après la virgule est nulle à partir d'un certain rang.*

Démonstration. Si $x = \dfrac{a}{10^m}$ est décimal, par division euclidienne on peut écrire $a = q10^m + r$ avec $0 \leq r < 10^m$ et en utilisant l'écriture en base 10 de r, à savoir $r = \sum\limits_{k=0}^{n} r_k 10^k$ avec $n < m$ et $0 \leq r_k \leq 9$ pour k compris entre 0 et n, on a en posant $r_k = 0$ pour $n+1 \leq k \leq m-1$:

$$x = q + \frac{r}{10^m} = q + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{r_k}{10^{m-k}} = a_0, a_1 \cdots a_m$$

avec $a_0 = q$, $a_k = r_{m-k}$ pour k compris entre 1 et m.

La réciproque est évidente. ∎

Définition 4.3 *On dit que le développement décimal illimité propre d'un réel x est périodique à partir d'un certain rang s'il existe un entier $p \geq 0$ tel que la suite $(a_n)_{n \geq p+1}$ soit périodique, ce qui signifie qu'il existe un entier $q \geq 1$ tel que :*

$$\forall n \geq p+1,\ a_{n+q} = a_n.$$

Un développement périodique à partir du rang $p+1$ est donc de la forme :

$$\begin{aligned} x &= a_0, a_1 \cdots a_p a_{p+1} \cdots a_{p+q} a_{p+1} \cdots a_{p+q} \cdots a_{p+1} \cdots a_{p+q} \cdots \\ &= a_0, a_1 \cdots a_p b_1 \cdots b_q b_1 \cdots b_q \cdots b_1 \cdots b_q \cdots \end{aligned}$$

Théorème 4.8 *Un réel strictement positif x est rationnel si et seulement son développement décimal illimité propre est périodique à partir d'un certain rang.*

Démonstration. Le réel $x > 0$ est rationnel si, et seulement si, $x - [x]$ est rationnel. On peut donc se limiter à $x \in]0, 1[$, ce qui nous ramène à $a_0 = 0$.

Si le développement décimal illimité propre de $x \in]0, 1[$ est périodique à partir d'un certain rang, on a alors :

$$x = \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_p}{10^p} + \frac{b_1}{10^{p+1}} + \cdots + \frac{b_q}{10^{p+q}} + \frac{b_1}{10^{p+q+1}} + \cdots + \frac{b_q}{10^{p+2q}} + \cdots,$$

soit en notant $r = \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_p}{10^p} \in \mathbb{Q}$:

$$x = r + \frac{1}{10^p}\left(\frac{b_1}{10} + \cdots + \frac{b_q}{10^q}\right) + \frac{1}{10^{p+q}}\left(\frac{b_1}{10} + \cdots + \frac{b_q}{10^q}\right) + \cdots$$

et en notant $s = \frac{b_1}{10} + \cdots + \frac{b_q}{10^q} \in \mathbb{Q}$, on a :

$$x = r + \frac{s}{10^p}\left(1 + \frac{1}{10^q} + \frac{1}{10^{2q}} + \cdots\right) = r + \frac{10^q s}{10^p (10^q - 1)} \in \mathbb{Q}.$$

Réciproquement supposons que $x = \frac{a}{b}$ avec $0 < a < b$ dans $\mathbb{N}$. Pour tout entier k compris entre 0 et b, on a la division euclidienne $10^k a = bq_k + r_k$, les restes r_k étant compris entre 0 et $b-1$, ces restes forment donc une famille de $b+1$ entiers à valeurs dans un ensemble à b éléments, il y en a donc forcément deux qui sont égaux, c'est-à-dire qu'il existe deux entiers $p < q$ compris entre 0 et b tels que $10^p a = bq_p + r$ et $10^q a = bq_q + r$ et b divise la différence $10^q a - 10^p a$. On a donc $\frac{10^q a}{b} - \frac{10^p a}{b} \in \mathbb{N}$ et les rationnels $\frac{10^q a}{b}$ et $\frac{10^p a}{b}$ ont les mêmes décimales après la virgule (unicité du développement décimal illimité propre).

Si $\frac{a}{b} = 0, a_1 a_2 \cdots a_n \cdots$ alors :

$$\begin{cases} \dfrac{10^p a}{b} = m_0 + 0, a_{p+1} a_{p+2} \cdots a_{p+n} \cdots \\ \dfrac{10^q a}{b} = m_1 + 0, a_{q+1} a_{q+2} \cdots a_{q+n} \cdots \end{cases}$$

avec m_0, m_1 entiers et il en résulte que $a_{p+n} = a_{q+n}$ pour tout $n \geq 1$, soit :

$$\frac{a}{b} = 0, a_1 \cdots a_p a_{p+1} \cdots a_q a_{p+1} \cdots a_q \cdots a_{p+1} \cdots a_q \cdots$$

c'est-à-dire que le développement est périodique à partir du rang $p+1$. ∎

Exercice 4.9 *Montrer que le réel* $x = 0,0100100010\cdots$ *, où le nombre de* 0 *qui suivent le chiffre* $a_k = 1$ *est augmenté de* 1 *à chaque étape, est irrationnel.*

Solution 4.9 *On a* $x = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{10^{p_k}}$ *avec* $p_0 = 2$ *et pour* $k \geq 1$, $p_k = p_{k-1} + k + 2$, *soit :*

$$p_k = p_0 + 1 + 2 + \cdots + k + 2k = \frac{k\,(k+1)}{2} + 2\,(k+1) = \frac{(k+1)\,(k+4)}{2}.$$

Si x *est rationnel, alors son développement décimal est de la forme :*

$$x = a_0, a_1 \cdots a_p b_1 \cdots b_q b_1 \cdots b_q \cdots b_1 \cdots b_q \cdots$$

avec l'un des $b_j = 1$ *pour* j *compris entre* 1 *et* q *et à partir du rang* $p+1$ *l'écart entre deux* 1 *consécutifs serait majoré, ce qui contredit* $p_k - p_{k-1} = k + 2$ *pour tout* $k \in \mathbb{N}$.

5

Accélération de la convergence des suites réelles

Pour tout ce chapitre, on désigne par $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels qui converge vers un réel ℓ. On suppose de plus que $u_n \neq \ell$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Les résultats classiques sur les séries numériques et les intégrales généralisées sont supposés acquis.

5.1 Vitesse de convergence

Définition 5.1 *Si la suite* $\left(\left|\frac{u_{n+1}-\ell}{u_n-\ell}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente de limite* λ, *on dit alors que la convergence de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *vers* ℓ *est :*

- *lente, pour* $\lambda = 1$ *;*
- *géométrique de rapport* λ, *pour* $\lambda \in \left]0,1\right[$ *;*
- *rapide pour* $\lambda = 0$.

Dans le cas où $\lambda \in \left]0,1\right[$, pour $\varepsilon > 0$ tel que $0 < \lambda+\varepsilon < 1$, on peut trouver un entier naturel n_ε tel que :

$$\forall n \geq n_\varepsilon,\ 0 < \left|\frac{u_{n+1}-\ell}{u_n-\ell}\right| < \lambda+\varepsilon$$

ce qui entraîne, pour $n \geq n_\varepsilon$:

$$|u_n-\ell| < (\lambda+\varepsilon)^{n-n_\varepsilon}|u_{n_\varepsilon}-\ell| = \frac{|u_{n_\varepsilon}-\ell|}{(\lambda+\varepsilon)^{n_\varepsilon}}(\lambda+\varepsilon)^n$$

ce qui signifie que la suite $(|u_n-\ell|)_{n\geq n_\varepsilon}$ est dominée par la suite géométrique $((\lambda+\varepsilon)^n)_{n\geq n_\varepsilon}$.

Définition 5.2 *On dit que le réel* λ, *quand il existe, est le coefficient de convergence de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarque 5.1 *Si la suite* $\left(\left|\frac{u_{n+1}-\ell}{u_n-\ell}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge, sa limite* λ *est alors nécessairement dans* $[0,1]$. *En effet, dans le cas contraire, on a* $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}-\ell}{u_n-\ell}\right| = \lambda > 1$, *ce qui entraîne* $\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n-\ell| = +\infty$ *et la suite* $(u_n-\ell)_{n\in\mathbb{N}}$ *est divergente (cette suite est minorée par une suite géométrique divergente), ce qui est en contradiction avec la convergence de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *vers* ℓ.

Remarque 5.2 *Dans la pratique, on ne connaît pas toujours la limite de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *mais dans certains cas, on peut calculer le coefficient de convergence* λ *sans connaître explicitement cette limite* ℓ.

Lemme 5.1 *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}-\ell}{u_n-\ell} = \lambda \in]-1,1[\setminus \{0\}$ *(la convergence de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *vers* ℓ *est donc géométrique de rapport* $|\lambda|$*) et s'il existe un entier* $n_0 \geq 1$ *tel que* $u_n \neq u_{n-1}$ *pour tout* $n \geq n_0$, *alors la suite* $\left(\dfrac{u_{n+1}-u_n}{u_n-u_{n-1}}\right)_{n\geq n_0}$ *converge vers* λ.

Démonstration. Pour tout $n \geq n_0$, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}-u_n}{u_n-u_{n-1}} &= \frac{u_{n+1}-\ell-(u_n-\ell)}{u_n-\ell-(u_{n-1}-\ell)} \\
&= \frac{u_n-\ell}{u_{n-1}-\ell}\,\frac{\dfrac{u_{n+1}-\ell}{u_n-\ell}-1}{\dfrac{u_n-\ell}{u_{n-1}-\ell}-1} \\
&= \frac{u_n-\ell}{u_{n-1}-\ell}\,\frac{1-\dfrac{u_{n+1}-\ell}{u_n-\ell}}{1-\dfrac{u_n-\ell}{u_{n-1}-\ell}} \underset{n\to+\infty}{\to} \lambda\frac{1-\lambda}{1-\lambda} = \lambda
\end{aligned}$$

(de $u_n \neq u_{n-1}$, on déduit que $\dfrac{u_n-\ell}{u_{n-1}-\ell} \neq 1$) ■

Remarque 5.3 *Le fait que* $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}-\ell}{u_n-\ell}\right| = \lambda$ *n'entraîne pas nécessairement la convergence de la suite* $\left(\left|\dfrac{u_{n+1}-u_n}{u_n-u_{n-1}}\right|\right)_{n\geq n_0}$. *Par exemple pour la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $u_{2p} = (-1)^p \lambda^{2p}$ *et* $u_{2p+1} = (-1)^p \lambda^{2p+1}$ *avec* $0 < \lambda < 1$, *on a* $|u_n| = \lambda^n \underset{n\to+\infty}{\to} \ell = 0$, $\left|\dfrac{u_{n+1}-\ell}{u_n-\ell}\right| = \lambda$, $u_n \neq u_{n-1}$ *pour tout* $n \geq 1$ *et :*

$$\frac{u_{2p+1}-u_{2p}}{u_{2p}-u_{2p-1}} = \frac{(-1)^p \lambda^{2p+1} - (-1)^p \lambda^{2p}}{(-1)^p \lambda^{2p} - (-1)^{p-1} \lambda^{2p-1}} = -\frac{\lambda(1-\lambda)}{\lambda+1}$$

$$\frac{u_{2p+2}-u_{2p+1}}{u_{2p+1}-u_{2p}} = \frac{(-1)^{p+1} \lambda^{2p+2} - (-1)^p \lambda^{2p+1}}{(-1)^p \lambda^{2p+1} - (-1)^p \lambda^{2p}} = \frac{\lambda(\lambda+1)}{1-\lambda}$$

et la suite $\left(\left|\dfrac{u_{n+1}-u_n}{u_n-u_{n-1}}\right|\right)_{n\geq 1}$ *est divergente.*

Exercice 5.1 *Étudier la vitesse de convergence des suites* $(u_n)_{n\geq 2}$ *définies par* $u_n = \dfrac{1}{n^b}$ *où* $b > 0$, $u_n = \dfrac{1}{\ln(n)}$, $u_n = a^n$ *où* $0 < |a| < 1$, $u_n = \dfrac{1}{n!}$ *et* $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$.

Solution 5.1 *Chacune de ces suites converge vers* 0 *et :*

— *pour* $u_n = \dfrac{1}{n^b}$, *on a :*

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left(\frac{n}{n+1}\right)^b \underset{n\to+\infty}{\to} 1,$$

donc la convergence est lente ;

— *pour* $u_n = \dfrac{1}{\ln(n)}$, *on a :*

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{\ln(n)}{\ln(n+1)} = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\frac{1}{\ln(n+1)} + 1 \underset{n\to+\infty}{\to} 1,$$

donc la convergence est lente ;

— *pour* $u_n = a^n$, *on a :*

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = |a| \underset{n\to+\infty}{\to} \lambda = |a|,$$

donc la convergence est géométrique de rapport $|a|$ *;*

— *pour* $u_n = \dfrac{1}{n!}$, *on a :*

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} 0,$$

donc la convergence est rapide ;

— *pour* $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$, *on a :*

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{1}{e} < 1,$$

donc la convergence est géométrique de rapport $\dfrac{1}{e}$.

D'un point de vue pratique, on peut utiliser les critères suivants où l'on compare la suite $(|u_n - \ell|)_{n\in\mathbb{N}}$ aux suites $\left(\dfrac{1}{n^b}\right)_{n\geq 1}$, $\left(\dfrac{1}{\ln(n)}\right)_{n\geq 2}$ ou $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$:

— si $|u_n - \ell| \underset{+\infty}{\backsim} \dfrac{C}{n^b}$ où C et b sont des réels strictement positif, alors la convergence est lente ;

— si $|u_n - \ell| \underset{+\infty}{\backsim} \dfrac{C}{\ln(n)}$ où C est un réel strictement positif, alors la convergence est lente ;

— si $|u_n - \ell| \underset{+\infty}{\backsim} C\lambda^n$, où $C > 0$ et $\lambda \in \left]0,1\right[$, alors la convergence est géométrique de rapport λ.

Exercice 5.2 *En considérant la suite définie par :*

$$u_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} \text{ si } n = 2p \\ \dfrac{2}{n} \text{ si } n = 2p+1 \end{cases}$$

montrer qu'une suite convergente n'a pas nécessairement de vitesse de convergence.

Solution 5.2 *Avec* $|u_n| \leq \dfrac{2}{n}$ *pour tout* $n \geq 1$, *on voit que cette suite converge vers* 0 *et avec :*

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \begin{cases} \dfrac{2n}{n+1} \text{ si } n = 2p \\ \dfrac{n}{2(n+1)} \text{ si } n = 2p+1 \end{cases}$$

on voit que la suite $\left(\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est divergente.*

Remarque 5.4 *L'exemple précédent montre également qu'une majoration du type* $|u_n - \ell| \leq \frac{C}{n^b}$ *ne permet pas nécessairement d'avoir des informations sur la vitesse de convergence de la suite* u.
De même en considérant la suite définie par :

$$u_n = \begin{cases} \lambda^n \text{ si } n = 2p \\ 2\lambda^n \text{ si } n = 2p+1 \end{cases}$$

où $0 < \lambda < 1$, *on a* $|u_n| \leq 2\lambda^n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ *et :*

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \begin{cases} 2\lambda \text{ si } n = 2p \\ \dfrac{\lambda}{2} \text{ si } n = 2p+1 \end{cases}$$

n'a pas de limite.

Exercice 5.3 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *la suite définie par :*

$$\forall n \geq 1,\ u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Montrer que la convergence de cette suite (vers le nombre e) est lente et que la convergence de la suite $(v_n)_{n\geq 0} = (u_{2^n})_{n\geq 0}$ *est géométrique.*

Solution 5.3 *Un développement limité à l'ordre 2 nous donne :*

$$\forall n \geq 1,\ u_n = e\left(1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

ce qui entraîne $|e - u_n| \underset{+\infty}{\backsim} \frac{e}{2n}$ *et la convergence de cette suite est lente.*
Pour la suite $(v_n)_{n\geq 0} = (u_{2^n})_{n\geq 0}$, *on a* $|e - v_n| \underset{+\infty}{\backsim} \frac{e}{2^{n+1}}$ *et la convergence est géométrique de rapport* $\frac{1}{2}$.

De manière plus générale, dès qu'on a un développement asymptotique de la forme :

$$u_n = \ell + \beta\lambda^n + o(\lambda^n)$$

avec β non nul et $|\lambda|$ dans $]0,1[$, la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers ℓ est géométrique de rapport $|\lambda|$.

En considérant les suites $(n\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $\left(\frac{\lambda^n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, on constate que la réciproque est fausse.

Il ne faut pas croire au vu de l'exemple précédent que l'on peut toujours accélérer la convergence d'une suite (on précisera cette notion au paragraphe suivant) par extraction. Par exemple les suites $u = \left(\frac{1}{\ln(n)}\right)_{n\geq 2}$, $v = \left(\frac{1}{\ln(2^n)}\right)_{n\geq 1} = \left(\frac{1}{n\ln(2)}\right)_{n\geq 1}$ et $w = \left(\frac{1}{\ln(n^2)}\right)_{n\geq 2} = \left(\frac{1}{2\ln(n)}\right)_{n\geq 2}$ convergent toutes lentement.

Par contre un développement asymptotique de la forme :

$$u_n = \ell + \frac{\beta}{n^b} + o\left(\frac{1}{n^b}\right)$$

avec β non nul et $b > 0$ qui assure une convergence lente donne :

$$u_{2^n} = \ell + \frac{\beta}{2^{nb}} + o\left(\frac{1}{2^{nb}}\right)$$

qui assure une convergence géométrique de rapport $\frac{1}{2^b}$ de la suite $(u_{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 5.4 *Montrer que la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :*

$$\forall n \geq 0,\ u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!},$$

est rapide.

Solution 5.4 *On sait que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers e.*
La formule de Taylor-Lagrange nous dit que pour tout $n \geq 1$, il existe un réel $c_n \in\ ]0,1[$ tel que :

$$e - u_n = \frac{e^{c_n}}{n!}$$

ce qui donne :

$$0 < \frac{e - u_{n+1}}{e - u_n} = \frac{1}{n+1}\frac{e^{c_{n+1}}}{e^{c_n}} < \frac{1}{n+1}e \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

et la convergence est rapide.

Exercice 5.5 *Montrer que, pour tout réel $\alpha > 1$, la convergence de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par :*

$$\forall n \geq 1,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$$

est lente.

Solution 5.5 *On sait que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers un réel ℓ (série de Riemann).*
Pour $n \geq 1$, on a :

$$\ell - u_n = \ell - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}.$$

Avec les encadrements :

$$\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \frac{1}{k^\alpha}$$

on déduit que :

$$\forall n \geq 2,\ \ell - u_n \leq \int_n^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt = \frac{1}{\alpha - 1}\frac{1}{n^{\alpha-1}} \leq \ell - u_{n-1},$$

ou encore :

$$\forall n \geq 1,\ \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leq (\alpha - 1)(\ell - u_n) \leq \frac{1}{n^{\alpha-1}},$$

ce qui donne :

$$\ell - u_n \underset{+\infty}{\backsim} \frac{1}{\alpha - 1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

et la convergence est lente.

Exercice 5.6 *Montrer que convergence de la suite* $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$ *pour tout* $n \geq 1$ *est lente.*

Solution 5.6 *On sait que la suite* $(u_n)_{n\geq 1}$ *converge vers* γ *(constante gamma d'Euler). Pour tout* $n \geq 1$, *on a :*

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \right) = \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{t} \right) dt = \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{t-k}{kt} dt,$$

ce qui fait apparaître γ *comme somme d'une série, soit :*

$$\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_n^{n+1} \frac{t-n}{nt} dt$$

et :

$$\gamma - u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_k^{k+1} \frac{t-k}{kt} dt.$$

En utilisant les inégalités :

$$\int_k^{k+1} \frac{t-k}{kt} dt \leq \frac{1}{k^2} \int_k^{k+1} (t-k)\, dt = \frac{1}{2k^2} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right)$$

et :

$$\int_k^{k+1} \frac{t-k}{kt} dt \geq \frac{1}{k(k+1)} \int_k^{k+1} (t-k)\, dt = \frac{1}{2} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

on en déduit que :

$$\frac{1}{2(n+1)} < \gamma - u_n < \frac{1}{2n}$$

et $\gamma - u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$. *La convergence est donc lente.*

Exercice 5.7 *Soient* $I = [a, b]$ *un intervalle réel fermé non réduit à un point et* $f : I \to I$ *de classe* $\mathcal{C}^1$ *telle que* $0 < |f'(x)| < 1$ *pour tout* $x \in I$.

1. *Montrer que* f *admet un unique point fixe* $\ell \in I$.
2. *Pour* u_0 *donné dans* $I \setminus \{\ell\}$, *on définit la suite* $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *par* $u_{n+1} = f(u_n)$. *Montrer que cette suite converge vers* ℓ *et que la convergence est géométrique de rapport* $|f'(\ell)|$.

Solution 5.7

1. *Avec la continuité de* f *et* $f(I) \subset I$, *on déduit que* f *admet au moins un point fixe. En effet, la fonction* g *définie sur* I *par* $g(x) = f(x) - x$ *étant continue telle que* $g(a) = f(a) - a \geq 0$ *et* $g(b) = f(b) - b \leq 0$ *(puisque* $f(a)$ *et* $f(b)$ *sont dans* $I = [a, b]$*), le théorème des valeurs intermédiaires nous dit qu'elle s'annule sur* I. *De plus l'hypothèse* $-1 < f' < 1$ *entraîne* $g' = f' - 1 < 0$ *sur* I, *c'est-à-dire que* g *est strictement décroissante sur* I, *donc injective, et la solution* ℓ *de* $g(x) = 0$ *sur* I *est unique. Ce réel* ℓ *est l'unique point fixe de* f *sur* I.

2. *Si $u_0 \neq \ell$ alors $u_n \neq \ell$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En effet, le résultat est vrai pour $n = 0$ et en le supposant vrai pour $n \geq 0$, le théorème des accroissements finis nous permet d'écrire $u_{n+1} - \ell = f(u_n) - f(\ell) = (u_n - \ell) f'(c_n)$ avec c_n strictement compris entre u_n et ℓ et $f'(c_n) \neq 0$, ce qui entraîne $u_{n+1} \neq \ell$.*
Le développement limité qui précède nous permet également de déduire que :
$$\frac{u_{n+1} - \ell}{u_n - \ell} = f'(c_n) \underset{n\to+\infty}{\to} f'(\ell) \in]-1, 1[\setminus \{0\},$$
ce qui implique que la suite u converge vers ℓ et que la convergence est géométrique de rapport $|f'(\ell)|$.
Dans cette situation, on dit que ℓ est un point fixe attractif de f.

Définition 5.3 *Soit $r \geq 2$ un entier naturel. On dit que la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers ℓ est d'ordre r s'il existe une constante $\lambda \neq 0$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|u_{n+1} - \ell|}{|u_n - \ell|^r} = \lambda$.*

Une convergence lente ou géométrique est dite d'ordre 1.
On dit aussi que la convergence est super-linéaire si elle est d'ordre $r \geq 2$.
Si la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers ℓ est d'ordre $r \geq 1$, alors cet entier r est uniquement déterminé. En effet si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|u_{n+1} - \ell|}{|u_n - \ell|^r} = \lambda$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|u_{n+1} - \ell|}{|u_n - \ell|^s} = \mu$ avec $s > r \geq 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - \ell|^{s-r} = \dfrac{\lambda}{\mu}$ avec $\dfrac{\lambda}{\mu} \neq 0$, $s - r > 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - \ell) = 0$, ce qui est impossible.
Si la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers ℓ est d'ordre $r \geq 2$, alors $\left|\dfrac{u_{n+1} - \ell}{u_n - \ell}\right|$ est équivalent à $\lambda |u_n - \ell|^{r-1}$ qui converge vers 0, c'est-à-dire que la convergence est rapide.
Mais réciproquement une convergence rapide n'est pas obligatoirement super-linéaire comme le montre l'exemple de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$
En effet, on a vu (exercice 5.4) que cette suite converge rapidement vers e avec $e - u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{(n+1)!}$, de sorte que pour tout entier $r \geq 2$, on a :
$$\frac{e - u_{n+1}}{|e - u_n|^r} \underset{+\infty}{\sim} \frac{((n+1)!)^r}{(n+2)!} = \frac{((n+1)!)^{r-1}}{(n+2)} \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$$
et la convergence ne peut être d'ordre r.

Exercice 5.8 *Soient $I = [a, b]$ un intervalle réel fermé non réduit à un point et $f : I \to I$ de classe $\mathcal{C}^r$ avec $r \geq 2$ telle que $|f'(x)| < 1$ pour tout $x \in I$.*

1. *Montrer que f admet un unique point fixe $\ell \in I$.*
2. *On suppose que $f^{(k)}(\ell) = 0$ pour tout k compris ente 1 et $r - 1$ et $f^{(r)}(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$. Pour u_0 donné dans $I \setminus \{\ell\}$, on définit la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que cette suite converge vers ℓ et que la convergence est d'ordre r.*
On dit, dans cette situation, que ℓ est un point fixe super-attractif de f.

Solution 5.8

1. *Voir l'exercice 5.7.*
2. *La formule de Taylor-Lagrange à l'ordre r permet d'écrire que :*

$$u_{n+1} - \ell = f(u_n) - f(\ell) = (u_n - \ell)^r \frac{f^{(r)}(c_n)}{r!}$$

avec c_n strictement compris entre u_n et ℓ, ce qui entraîne $u_n \neq \ell$ pour tout $n \geq 0$ (par récurrence) et :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1} - \ell}{(u_n - \ell)^r} = \frac{f^{(r)}(\ell)}{r!} \neq 0$$

ce qui implique que la suite u converge vers ℓ puisque :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|u_{n+1} - \ell|}{|u_n - \ell|} = \lim_{n\to+\infty} |u_n - \ell|^{r-1} \frac{\left|f^{(r)}(c_n)\right|}{r!} = 0$$

et la convergence est d'ordre r.

Exercice 5.9 *On se donne une fonction g de classe $\mathcal{C}^3$ sur un intervalle fermé $I = [a, b]$ telle que $g(a)\,g(b) < 0$, $g'(x) \neq 0$ et $g''(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$.*

1. *Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\ell \in \,]a, b[$.*
2. *On note f la fonction définie sur I par $f(x) = x - \dfrac{g(x)}{g'(x)}$. Montrer que $f'(\ell) = 0$ et $f''(\ell) \neq 0$.*
3. *On désigne par $J = [\ell - \eta, \ell + \eta]$ un intervalle contenu dans I, avec $\eta > 0$, tel que $f''(x) \neq 0$ pour tout $x \in J$. Montrer que la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in J \setminus \{\ell\}$ et $u_{n+1} = u_n - \dfrac{g(u_n)}{g'(u_n)}$ pour tout $n \geq 0$ (méthode de Newton) converge vers ℓ et que la convergence est d'ordre 2.*

Solution 5.9

1. *Le théorème des valeurs intermédiaires nous dit que l'équation $g(x) = 0$ a au moins une solution dans I et l'hypothèse $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$ avec g' continue nous dit que $g' > 0$ ou $g' < 0$ (théorème des valeurs intermédiaires pour g') ce qui implique que g est strictement monotone, donc injective. Cette solution ℓ est donc unique.*
2. *Le réel ℓ est l'unique point fixe dans I de la fonction f définie sur I par $f(x) = x - \dfrac{g(x)}{g'(x)}$.*

   Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I avec $f'(x) = \dfrac{g(x)\,g''(x)}{(g'(x))^2}$. De $g(\ell) = 0$ on déduit que $f'(\ell) = 0$ et :

$$f''(\ell) = \lim_{x\to\ell} \frac{f'(x)}{x - \ell} = \lim_{x\to\ell} \frac{g(x)}{x - \ell} \frac{g''(x)}{(g'(x))^2} = \frac{g''(\ell)}{g'(\ell)} \neq 0.$$

3. *Par continuité de f'' on peut trouver un voisinage J de ℓ tel que $f''(x) \neq 0$ pour tout $x \in J$.*

   La formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 permet d'écrire que :

$$u_{n+1} - \ell = f(u_n) - f(\ell) = (u_n - \ell)^2 \frac{f''(c_n)}{r!}$$

avec c_n strictement compris entre u_n et ℓ et $f''(c_n) \neq 0$, ce qui entraîne $u_n \neq \ell$ pour tout $n \geq 0$ (par récurrence) et :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}-\ell}{(u_n-\ell)^2} = \frac{f''(\ell)}{2} = \frac{g''(\ell)}{2g'(\ell)} \neq 0$$

ce qui implique que la suite u converge vers ℓ (puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|u_{n+1}-\ell|}{|u_n-\ell|} = \lim\limits_{n\to+\infty} |u_n-\ell| \dfrac{|f''(c_n)|}{2} = 0$) et que la convergence est d'ordre 2.

5.2 Accélération de la convergence

Définition 5.4 *Si $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une autre suite convergente vers ℓ avec $v_n \neq \ell$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on dit que la convergence de cette suite vers ℓ est plus rapide que celle de $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_n-\ell}{u_n-\ell} = 0$.*

Accélérer la convergence d'une suite consiste à construire à partir de cette dernière une autre suite qui converge plus vite vers la même limite.

Exercice 5.10 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par :*

$$\forall n \geq 1,\ u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Montrer que la suite $(v_n)_{n\geq 0} = (u_{2^n})_{n\geq 0}$ permet d'accélérer la convergence de cette suite.

Solution 5.10 *On a vu (exercice 5.3) que $e - u_n \underset{+\infty}{\backsim} \dfrac{e}{2n}$ (convergence lente) et $e - v_n \underset{+\infty}{\backsim} \dfrac{e}{2^{n+1}}$ (convergence géométrique) de sorte que :*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{v_n-e}{u_n-e} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2^n} = 0.$$

De manière plus générale, un développement asymptotique de la forme :

$$u_n = \ell + \frac{\beta}{n^b} + o\left(\frac{1}{n^b}\right)$$

avec β non nul et $b > 0$ donne :

$$v_n = u_{2^n} = \ell + \frac{\beta}{2^{nb}} + o\left(\frac{1}{2^{nb}}\right)$$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_n-\ell}{u_n-\ell} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^b}{2^{nb}} = 0.$

Mais l'extraction ne permet pas toujours d'accélérer la convergence d'une suite. Par exemple pour $u = \left(\dfrac{1}{\ln(n)}\right)_{n\geq 2}$ et $v = \left(\dfrac{1}{\ln(n^2)}\right)_{n\geq 2}$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_n}{u_n} = \dfrac{1}{\ln(2)}$.

L'exercice qui suit nous donne un procédé élémentaire, mais peu performant, d'accélération de la convergence, l'idée étant de remplacer chaque u_n par une moyenne pondérée de u_n et u_{n+1}. Ce procédé sera affiné par la méthode de Richardson.

Exercice 5.11 *Soit λ un réel différent de 1 et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :*

$$\forall n \geq 0,\ v_n = \frac{u_{n+1} - \lambda u_n}{1-\lambda}$$

(v_n est un barycentre de u_{n+1} et u_n).

1. *Préciser pour quelles valeurs de λ et à quelles conditions sur u la suite v converge vers ℓ plus rapidement que u.*
2. *Appliquer ce procédé à la suite $u = \left(\left(1+\frac{1}{2^n}\right)^{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ en précisant la vitesse de convergence de la suite accélératrice v obtenue.*

Solution 5.11 *Pour $\lambda = 0$, on a $v_n = u_{n+1}$, ce qui n'a pas beaucoup d'intérêt.*

1. *Pour tout réel λ différent de 1, la suite v converge vers ℓ et :*

$$\frac{v_n-\ell}{u_n-\ell} = \frac{u_{n+1}-\ell-\lambda(u_n-\ell)}{(1-\lambda)(u_n-\ell)} = \frac{1}{1-\lambda}\frac{u_{n+1}-\ell}{u_n-\ell} - \frac{\lambda}{1-\lambda},$$

de sorte que :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{v_n-\ell}{u_n-\ell} = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}-\ell}{u_n-\ell} = \lambda.$$

On a vu que la convergence de u vers ℓ impose $\lambda \in [-1,1]$ et comme $\lambda \neq 1$, on déduit que la suite v converge vers ℓ plus rapidement que u si, et seulement si, $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}-\ell}{u_n-\ell} = \lambda \in [-1,1[$.

Pour $\lambda = -1$, on a $v_n = \frac{u_n+u_{n+1}}{2}$ et cette suite accélère u si, et seulement si, u converge lentement avec $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}-\ell}{u_n-\ell} = -1$.

Pour $0 < |\lambda| < 1$, la suite v accélère u si, et seulement si, la convergence de u est géométrique de rapport $|\lambda|$ avec $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}-\ell}{u_n-\ell} = \lambda$.

2. *On a vu que la convergence de la suite u vers $e \approx 2.718281828$ est géométrique de rapport $\lambda = \frac{1}{2}$ (exercice 5.3), ce qui donne la suite v définie par :*

$$v_n = 2u_{n+1} - u_n.$$

Le développement limité à l'ordre 2 de $\exp\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)$ au voisinage de 0 nous donne le développement asymptotique :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e\left(1-\frac{1}{2n}+\frac{11}{24}\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

et :

$$u_n = e\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{11}{24}\frac{1}{2^{2n}}+o\left(\frac{1}{2^{2n}}\right)\right)$$

puis :

$$v_n = e\left(1-\frac{11}{48}\frac{1}{2^{2n}}+o\left(\frac{1}{2^{2n}}\right)\right).$$

On a donc $e - v_n \underset{+\infty}{\backsim} \frac{11}{48}\frac{1}{2^{2n}}$ et la convergence est géométrique de rapport $\frac{1}{4}$.

Pour $n = 1$, on a $u_1 = 2.25$, $v_1 \approx 2.63281250$ et pour $n = 6$, $u_6 \approx 2.697344953$, $v_6 \approx 2.718133087$.

Exercice 5.12 *Considérons l'approximation du nombre π par la méthode d'Archimède des polygones réguliers. Cette méthode consiste à introduire la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par :*

$$\forall n \geq 1,\ u_n = 2^n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right).$$

1. *Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est aussi définie par :*

$$\begin{cases} u_1 = 2, \\ \forall n \geq 1,\ u_{n+1} = \sqrt{2}2^n\sqrt{1-\sqrt{1-\left(\dfrac{u_n}{2^n}\right)^2}}. \end{cases}$$

   Cette relation de récurrence permet un calcul itératif des u_n sans utiliser le nombre π que l'on veut approcher.

2. *Montrer que la convergence de cette suite vers π est géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$.*
3. *Utiliser le procédé décrit à l'exercice précédent pour accélérer la convergence de cette suite en précisant la vitesse de convergence de la suite accélératrice v obtenue.*

Solution 5.12

1. *Avec :*

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \frac{1-\cos\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right)}{2} = \frac{1-\sqrt{1-\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right)}}{2},$$

   on déduit que :

$$\forall n \geq 1,\ u_{n+1} = \sqrt{2}2^n\sqrt{1-\sqrt{1-\left(\frac{u_n}{2^n}\right)^2}}.$$

2. *En utilisant le développement limité :*

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + o\left(x^3\right),$$

   on obtient le développement asymptotique :

$$u_n = \pi - \frac{\pi^3}{3!}\frac{1}{2^{2n}} + o\left(\frac{1}{2^{2n}}\right)$$

   et $\pi - u_n \underset{+\infty}{\backsim} \dfrac{\pi^3}{3!}\dfrac{1}{2^{2n}}$. Cette suite converge donc vers π et la convergence est géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$.
3. *En utilisant le procédé décrit à l'exercice précédent, on accélère la convergence de cette suite en posant :*

$$\forall n \geq 1,\ v_n = \frac{4u_{n+1} - u_n}{3}.$$

   En poussant le développement limité précédent un peu plus loin, on a :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o\left(x^5\right)$$

et le développement asymptotique :

$$u_n = \pi - \frac{\pi^3}{3!}\frac{1}{2^{2n}} + \frac{\pi^5}{5!}\frac{1}{2^{4n}} + o\left(\frac{1}{2^{4n}}\right)$$

qui donne :

$$v_n = \pi - \frac{\pi^5}{5!}\frac{3}{4}\frac{1}{2^{4n}} + o\left(\frac{1}{2^{4n}}\right),$$

soit $\pi - v_n \underset{+\infty}{\backsim} \frac{\pi^5}{5!}\frac{3}{4}\frac{1}{2^{4n}}$. *Cette suite converge donc vers* π *et la convergence est géométrique de raison* $\frac{1}{16}$.

Dans le cas où on dispose d'un encadrement de la forme :

$$\varepsilon'_n \leq u_n - \ell \leq \varepsilon_n$$

où $(\varepsilon'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites convergentes vers 0, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = u_n - \varepsilon'_n$ converge aussi vers ℓ avec $0 \leq v_n - \ell \leq \delta_n = \varepsilon_n - \varepsilon'_n$, ce qui fournit parfois une suite accélératrice.

Les exercices qui suivent nous fournissent des exemples de telle situation.

Exercice 5.13 *En utilisant l'encadrement obtenu avec l'exercice 5.4, montrer que la suite* $(v_n)_{n\geq 1}$ *définie par :*

$$\forall n \geq 1,\ v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n \cdot n!},$$

accélère la convergence de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ *définie par :*

$$\forall n \geq 1,\ u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

Solution 5.13 *On a obtenu (exercice 5.4) l'encadrement :*

$$\frac{1}{(n+1)!} < e - u_n < \frac{1}{n \cdot n!},$$

qui donne :

$$0 < v_n - e < \frac{1}{n \cdot n!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{n \cdot (n+1)!}$$

et :

$$0 < \frac{v_n - e}{e - u_n} \leq \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

On a par exemple :

$$u_5 = \sum_{k=0}^{5} \frac{1}{k!} \approx 2.7167,\ v_5 = u_5 + \frac{1}{5 * 5!} \approx 2.7183.$$

Exercice 5.14 *En utilisant l'encadrement obtenu avec l'exercice 5.5, montrer que la suite* $(v_n)_{n\geq 1}$ *définie par :*

$$\forall n \geq 1,\ v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} + \frac{1}{\alpha - 1}\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}},$$

accélère la convergence de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ *définie par :*

$$\forall n \geq 1,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$$

Solution 5.14 *On a obtenu (exercice 5.5) l'encadrement :*

$$\forall n \geq 1,\ \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leq (\alpha-1)(\ell-u_n) \leq \frac{1}{n^{\alpha-1}},$$

qui donne :

$$\forall n \geq 1,\ 0 \leq \ell - v_n \leq \frac{1}{\alpha-1} \frac{(n+1)^{\alpha-1} - n^{\alpha-1}}{n^{\alpha-1}(n+1)^{\alpha-1}},$$

et :

$$0 \leq \frac{\ell-v_n}{\ell-u_n} \leq \frac{(n+1)^{\alpha-1} - n^{\alpha-1}}{n^{\alpha-1}} \underset{+\infty}{\backsim} \frac{\alpha-1}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

Exercice 5.15 *En utilisant l'encadrement obtenu avec l'exercice 5.6, montrer que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ définie par :*

$$\forall n \geq 1,\ v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) + \frac{1}{2(n+1)}$$

accélère la convergence de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$\forall n \geq 1,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$$

Solution 5.15 *On a obtenu (exercice 5.6) l'encadrement :*

$$\frac{1}{2(n+1)} < \gamma - u_n < \frac{1}{2n}$$

qui donne :

$$0 < \gamma - v_n < \frac{1}{2n(n+1)}$$

et :

$$0 \leq \frac{\gamma-v_n}{\gamma-u_n} \leq \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

5.3 Méthode d'accélération d'Aitken

Pour ce paragraphe, on suppose que suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ (toujours avec $u_n \neq \ell$ pour tout $n \in \mathbb{N}$) avec :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}-\ell}{u_n-\ell} = \lambda \in \left]-1,1\right[\setminus \{0\}$$

c'est-à-dire que la convergence est géométrique de rapport $|\lambda|$. On suppose de plus que $u_{n+1} \neq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On a vu avec l'exercice 5.11 que la suite $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des moyennes pondérées définie par :

$$v_n = \frac{u_{n+1} - \lambda u_n}{1-\lambda}$$

est une suite accélératrice de u.

Mais dans la pratique le coefficient λ peut être prévu sans connaître explicitement sa valeur, de sorte que ce procédé d'accélération n'est pas utilisable directement.

Un exemple typique d'une telle situation est fourni par une suite d'approximations successives d'un point fixe attractif ℓ d'une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$, le coefficient $\lambda = f'(\ell)$ qui fait intervenir le réel ℓ qu'on cherche à approximer, étant inconnu dans $]-1,1[\setminus\{0\}$ (voir l'exercice 5.7).

La méthode d'Aitken nous permet de construire une suite de réels $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui va converger vers λ et on définira une suite accélératrice par les moyennes pondérées :

$$v_n = \frac{u_{n+1} - \lambda_n u_n}{1-\lambda_n}.$$

On rappelle que la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \lambda_n = \frac{u_{n+1} - u_n}{u_n - u_{n-1}}$$

converge vers λ (lemme 5.1).

Comme $\lambda < 1$, il existe un entier n_0 tel que l'on ait $\lambda_n < 1$ pour tout $n \geq n_0$. On peut donc définir la suite $(v_n)_{n\geq n_0}$ par :

$$\forall n \geq n_0,\ v_n = \frac{u_{n+1} - \lambda_n u_n}{1-\lambda_n}.$$

Théorème 5.1 *La suite $(v_n)_{n\geq n_0}$ converge vers ℓ plus rapidement que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Démonstration. Pour tout $n \geq n_0$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{v_n-\ell}{u_n-\ell} &= \frac{\frac{u_{n+1}-\lambda_n u_n}{1-\lambda_n} - \ell}{u_n - \ell} = \frac{1}{1-\lambda_n}\frac{u_{n+1} - \lambda_n u_n - \ell(1-\lambda_n)}{u_n-\ell}\\ &= \frac{1}{1-\lambda_n}\left(\frac{u_{n+1}-\ell}{u_n-\ell} - \lambda_n\right) \underset{n\to+\infty}{\to} 0.\end{aligned}$$

■

En utilisant la définition des λ_n, on peut écrire chaque terme de la suite accélératrice de Aitken $(v_n)_{n\geq n_0}$ sous la forme :

$$v_n = \frac{u_{n+1}u_{n-1} - u_n^2}{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}} = u_{n-1} - \frac{(u_n - u_{n-1})^2}{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}$$

(comme $\lambda_n = \dfrac{u_{n+1}-u_n}{u_n - u_{n-1}} < 1$, on a $(u_{n+1}-u_n) - (u_n - u_{n-1}) \neq 0$ et le dénominateur de v_n est bien non nul).

En introduisant les opérateurs de Aitken Δ et Δ^2 définis par :

$$\begin{cases} \Delta u_n = u_{n+1} - u_n \\ \Delta^2 u_n = \Delta(\Delta u_n) = u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n \end{cases}$$

on a :

$$v_{n+1} = u_n - \frac{(\Delta u_n)^2}{\Delta^2 u_n}.$$

Exercice 5.16 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmético-géométrique définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = au_n + b$ où a, b sont des réels donnés avec $0 < |a| < 1$.*

1. *Montrer que* u *converge ver* $\ell = \dfrac{b}{1-a}$ *et préciser sa vitesse de convergence dans le cas où* $u_0 \neq \ell$.
2. *Décrire la suite accélératrice de Aitken correspondante.*

Solution 5.16

1. *Si cette suite converge, alors sa limite est solution de l'équation* $x = ax + b$ *qui a pour unique solution* $\ell = \dfrac{b}{1-a}$. *De* $u_{n+1} = au_n + b$ *et* $\ell = a\ell + b$, *on déduit que* $u_{n+1} - \ell = a(u_n - \ell)$ *et par récurrence* $u_n - \ell = a^n(u_0 - \ell)$, *soit* $u_n = \ell + a^n(u_0 - \ell)$ *et* $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ *avec* $u_n \neq \ell$ *pour tout* $n \geq 0$ *et* $\dfrac{u_{n+1} - \ell}{u_n - \ell} = a$, *c'est-à-dire que la convergence est géométrique de rapport* $|a|$ *(ce qui n'est pas étonnant).*
2. *On a* $u_{n+1} - u_n = a^n(u_0 - \ell)(a-1)$ *et* $u_{n+1} - au_n = b = \ell(1-a)$, *de sorte que :*

$$\lambda_n = \frac{u_{n+1} - u_n}{u_n - u_{n-1}} = a \text{ et } v_n = \frac{u_{n+1} - \lambda_n u_n}{1 - \lambda_n} = \ell.$$

La suite v *est donc stationnaire sur* ℓ.

Exercice 5.17 *On reprend la situation de l'exercice 5.7 avec* $I = [a,b]$ *et* $f : I \to I$ *de classe* $\mathcal{C}^2$ *telle que* $0 < |f'(x)| < 1$ *pour tout* $x \in I$.
On a vu que cette fonction admet un unique point fixe (attractif) $\ell \in I$ *et que la suite* $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *définie par* $u_0 \in I \setminus \{\ell\}$ *et* $u_{n+1} = f(u_n)$ *pour tout* $n \geq 0$ *converge vers* ℓ *avec* $u_n \neq \ell$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *la convergence étant géométrique de rapport* $|f'(\ell)|$.
Montrer que, si $f''(\ell) \neq 0$, *alors la convergence de la suite accélératrice* v *de Aitken correspondante est géométrique de rapport* $(f'(\ell))^2$.

Solution 5.17 *Un développement limité à l'ordre 2 en* ℓ *nous donne, en tenant compte de* $f(\ell) = \ell$ *:*

$$u_n - \ell = f'(\ell)(u_{n-1} - \ell) + \frac{f''(\ell)}{2}(u_{n-1} - \ell)^2 + o\left((u_{n-1} - \ell)^2\right).$$

En notant $e_n = u_n - \ell$, $\lambda = f'(\ell)$ *et* $\mu = \dfrac{f''(\ell)}{2}$, *cela s'écrit :*

$$e_n = \lambda e_{n-1} + \mu e_{n-1}^2 + o\left(e_{n-1}^2\right)$$

et, en désignant par $(v_n)_{n \geq n_0}$ *la suite accélératrice de Aitken, on a :*

$$v_n - \ell = u_{n-1} - \ell - \frac{(\Delta u_{n-1})^2}{\Delta^2 u_{n-1}}$$

avec :

$$\begin{cases} \Delta u_{n-1} = u_n - u_{n-1} = e_n - e_{n-1} \\ \Delta^2 u_{n-1} = u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} = e_{n+1} - 2e_n + e_{n-1} \end{cases}$$

ce qui donne :

$$v_n - \ell = e_{n-1} - \frac{(e_n - e_{n-1})^2}{e_{n+1} - 2e_n + e_{n-1}}$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} e_n - e_{n-1} = (\lambda - 1)\, e_{n-1} + \mu e_{n-1}^2 + o\left(e_{n-1}^2\right), \\ (e_n - e_{n-1})^2 = (\lambda - 1)^2\, e_{n-1}^2 + 2\mu\, (\lambda - 1)\, e_{n-1}^3 + o\left(e_{n-1}^3\right), \\ e_{n+1} - e_n = \lambda\, (\lambda - 1)\, e_{n-1} + \left((\lambda - 1)\, \mu + \lambda^2 \mu\right) e_{n-1}^2 + o\left(e_{n-1}^2\right), \\ \begin{array}{rcl} e_{n+1} - 2e_n + e_{n-1} & = & (e_{n+1} - e_n) - (e_n - e_{n-1}) \\ & = & (\lambda - 1)^2\, e_{n-1} + (\lambda - 1)\, (\lambda + 2)\, \mu e_{n-1}^2 + o\left(e_{n-1}^2\right) \end{array} \end{array} \right.$$

et donc :

$$\begin{aligned} v_n - \ell &= e_{n-1} - \frac{(\lambda - 1)\, e_{n-1} + 2\mu e_{n-1}^2 + o\left(e_{n-1}^2\right)}{(\lambda - 1) + \mu\, (\lambda + 2)\, e_{n-1} + o\,(e_{n-1})} \\ &= \frac{\lambda\mu + o\,(1)}{(\lambda - 1) + o\,(1)} e_{n-1}^2. \end{aligned}$$

ou encore :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{v_n - \ell}{e_{n-1}^2} = \frac{\lambda\mu}{\lambda - 1}.$$

Comme $f''\,(\ell) \neq 0$*, on a* $\mu \neq 0$ *et :*

$$v_n - \ell \underset{+\infty}{\backsim} \frac{\lambda\mu}{1 - \lambda} e_{n-1}^2 = \frac{f'\,(\ell)\, f''\,(\ell)}{2\,(1 - f'\,(\ell))} e_{n-1}^2.$$

On a donc :

$$\frac{v_{n+1} - \ell}{v_n - \ell} \underset{+\infty}{\backsim} \left(\frac{e_n}{e_{n-1}}\right)^2 \underset{+\infty}{\backsim} \lambda^2 = (f'\,(\ell))^2.$$

En définitive, on est passé d'une convergence géométrique de rapport $|f'\,(\ell)|$ *à une convergence géométrique de rapport* $(f'\,(\ell))^2$*, ce qui confirme l'accélération de la convergence puisque* $|f'\,(\ell)| < 1$.

Remarque 5.5 *Si, avec les notations de l'exercice précédent, on désigne pour tout entier naturel n, par* M_n *le point de* $\mathbb{R}^2$ *de coordonnées* $(u_n, f\,(u_n)) = (u_n, u_{n+1})$ *dans la base canonique, la pente de la droite* $(M_n M_{n+1})$ *est :*

$$\delta_n = \frac{u_{n+2} - u_{n+1}}{u_{n+1} - u_n} = \frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n}$$

et l'équation de cette droite est :

$$y = u_{n+1} + \frac{\Delta u_{n+1}}{\Delta u_n}\,(x - u_n).$$

Le point d'intersection de cette droite avec la première bissectrice est le point M'_n *de coordonnées* (x_n, x_n) *où* x_n *est solution de :*

$$x = u_{n+1} + \frac{\Delta u_{n+1}}{\Delta u_n}\,(x - u_n) = \Delta u_n + u_n + \frac{\Delta u_{n+1}}{\Delta u_n}\,(x - u_n)$$

soit de :

$$(x - u_n)\left(1 - \frac{\Delta u_{n+1}}{\Delta u_n}\right) = \Delta u_n$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} x_n &= u_n + \frac{\Delta u_n}{1 - \frac{\Delta u_{n+1}}{\Delta u_n}} = u_n - \frac{(\Delta u_n)^2}{\Delta u_{n+1} - \Delta u_n} \\ &= u_n - \frac{(\Delta u_n)^2}{\Delta^2 u_n} = v_{n+1} \end{aligned}$$

Remarque 5.6 *Pour la programmation de la méthode de Aitken on peut remarquer que les v_n s'écrivent aussi :*

$$v_n = u_n + \left(\frac{1}{u_{n+1} - u_n} - \frac{1}{u_n - u_{n-1}} \right)^{-1}.$$

En effet, on a :

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{u_{n+1}u_{n-1} - u_n^2}{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}} \\ &= u_n - \frac{(u_{n+1} - u_n)(u_n - u_{n-1})}{(u_{n+1} - u_n) - (u_n - u_{n-1})} \\ &= u_n + \frac{1}{\frac{1}{u_{n+1}-u_n} - \frac{1}{u_n-u_{n-1}}}. \end{aligned}$$

Dans le cas où la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'approximations successives définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ (avec les notations et hypothèses de l'exercice précédent), en définissant la fonction g par $g(x) = \dfrac{1}{f(x) - x}$ pour $x \in I \setminus \{\ell\}$, les v_n peuvent se calculer comme suit :

$$\begin{cases} u_n = f(u_{n-1}), \\ v_n = u_n + \dfrac{1}{g(u_n) - g(u_{n-1})}. \end{cases}$$

Exemple 5.1 *On s'intéresse aux points fixes de la fonction $f : x \mapsto e^{-x}$ sur $[0, +\infty[$. Cette fonction est indéfiniment dérivable, strictement décroissante sur $[0, +\infty[$ avec $f'(x) = -e^{-x}$ et $f([0, +\infty[) =]0, 1]$. En posant $I = [e^{-1}, 1] = [0.367\,88, 1]$, on a $f(I) = \left[e^{-1}, e^{-e^{-1}}\right] \subset I$ et $0 < |f'(x)| \leq \lambda = e^{-1} < 1$ pour tout $x \in I$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0.5$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \geq 0$ converge donc vers l'unique point fixe $\ell \in I$, la convergence étant géométrique.*
Le programme Maple qui suit nous donne les valeurs des u_n et v_n pour n compris entre 1 et 15 :

```
restart; f :=x->exp(-x); g :=x->1/(f(x)-x); i :=0; x :=0.5;
for n from 1 to 15 do
i :=i+1; z :=f(x); y :=z+1/(g(z)-g(x)); x :=z;
od;
```

Ce qui donne les valeurs suivantes :

$$\begin{cases} u_1 = 0.6065306597 \\ v_1 = 0.5676238764 \end{cases} \begin{cases} u_{14} = 0.5671188642 \\ v_{14} = 0.5671432906 \end{cases} \begin{cases} u_{15} = 0.5671571437 \\ v_{15} = 0.5671432905 \end{cases}$$

On constate que la convergence de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers le point fixe de f, $\ell = 0.567143290409$, est plus rapide que celle de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
En utilisant $f' = -f$, $f'' = f$ et $f(\ell) = \ell$, on a ici :

$$\begin{cases} v_n - \ell \underset{+\infty}{\backsim} \dfrac{f'(\ell) f''(\ell)}{2(1 - f'(\ell))} (u_{n-1} - \ell)^2 = \dfrac{\ell^2}{2(1+\ell)} (u_{n-1} - \ell)^2 \\ \dfrac{v_{n+1} - \ell}{v_n - \ell} \underset{+\infty}{\backsim} (f'(\ell))^2 = \ell^2 \end{cases}$$

avec :

$$\begin{cases} \ell^2 \approx 0.321651511855947 \\ \dfrac{\ell^2}{2(1+\ell)} \approx 0.102623516887215 \end{cases}$$

Dans le cas d'un point fixe super-attractif (c'est-à-dire que $f'(\ell) = 0$), en supposant de plus que $f''(\ell) \neq 0$, on a, pour f de classe $\mathcal{C}^4$, le développement asymptotique suivant de l'erreur d'approximation :

$$e_n = \lambda_2 e_{n-1}^2 + \lambda_3 e_{n-1}^3 + \lambda_4 e_{n-1}^4 + o\left(e_{n-1}^4\right),$$

où on a noté :

$$\lambda_2 = \frac{f''(\ell)}{2},\ \lambda_3 = \frac{f^{(3)}(\ell)}{3!},\ \lambda_4 = \frac{f^{(4)}(\ell)}{3!},$$

ce qui donne :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \left(e_n - e_{n-1}\right)^2 &=& e_{n-1}^2 - 2\lambda_2 e_{n-1}^3 + \left(\lambda_2^2 - 2\lambda_3\right) e_{n-1}^4 + o\left(e_{n-1}^4\right) \\ e_{n+1} - e_n &=& \lambda_2 e_n^2 + o\left(e_n^2\right) - e_n \\ &=& -\lambda_2 e_{n-1}^2 - \lambda_3 e_{n-1}^3 + \left(\lambda_2^3 - \lambda_4\right) e_{n-1}^4 + o\left(e_{n-1}^4\right) \\ e_{n+1} - 2e_n + e_{n-1} &=& e_{n-1} - 2\lambda_2 e_{n-1}^2 - 2\lambda_3 e_{n-1}^3 + \left(\lambda_2^3 - 2\lambda_4\right) e_{n-1}^4 + o\left(e_{n-1}^4\right) \end{array}\right.$$

et :

$$v_n - \ell = \frac{-\lambda_2^2 + o(1)}{1 - 2\lambda_2 e_{n-1} + o\left(e_{n-1}\right)} e_{n-1}^3 = \left(-\lambda_2^2 + o(1)\right) e_{n-1}^3,$$

soit :

$$v_n - \ell \underset{+\infty}{\backsim} \frac{\left(f''(\ell)\right)^2}{4} \left(u_n - \ell\right)^3.$$

Avec

$$\left\{\begin{array}{l} v_n - \ell = \left(-\lambda_2^2 + o(1)\right) e_{n-1}^3, \\ v_{n+1} - \ell = \left(-\lambda_2^2 + o(1)\right) e_n^3 = \left(-\lambda_2^5 + o(1)\right) e_{n-1}^6, \end{array}\right.$$

on déduit que :

$$\frac{v_{n+1} - \ell}{\left(v_n - \ell\right)^2} \backsim \frac{f''(\ell)}{2}.$$

La convergence vers ℓ de $\left(v_n\right)_{n \geq n_0}$ est donc, comme celle de $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$, d'ordre 2, mais cette convergence est quand même plus rapide.

Exercice 5.18 *Donner une expression de la suite accélératrice de Aitken pour la suite* $\left(u_n\right)_{n \geq 1}$ *définie par :*

$$\forall n \geq 1,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$$

où $\alpha > 1$. *Préciser la vitesse de convergence de cette suite accélératrice.*

Solution 5.18 *On a :*

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta u_n = u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)^\alpha} \\ \Delta^2 u_n = \Delta\left(\Delta u_n\right) = \dfrac{1}{(n+2)^\alpha} - \dfrac{1}{(n+1)^\alpha} \end{array}\right.$$

et :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_n - \frac{\left(\Delta u_n\right)^2}{\Delta^2 u_n} = u_n - \frac{(n+2)^\alpha}{(n+1)^{2\alpha} - (n+2)^\alpha (n+1)^\alpha} \\ &= u_n + \frac{(n+2)^\alpha}{(n+1)^\alpha \left((n+2)^\alpha - (n+1)^\alpha\right)}. \end{aligned}$$

Par exemple, pour $n = 2$, on a :

$$v_{n+1} = u_n + \frac{(n+2)^2}{(n+1)^2 (2n+3)}$$

En reprenant les calculs de l'exercice 5.5, on a pour tout $n \geq 1$:

$$\frac{1}{\alpha - 1} \frac{1}{(n+1)^{\alpha - 1}} \leq \ell - u_n \leq \frac{1}{\alpha - 1} \frac{1}{n^{\alpha - 1}}$$

et donc :

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}} \left(1 - \tfrac{(\alpha-1)(n+2)^\alpha}{(n+1)((n+2)^\alpha - (n+1)^\alpha)}\right) &\leq \ell - v_{n+1} \\ &\leq \tfrac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} \left(1 - \tfrac{n^{\alpha-1}(\alpha-1)(n+2)^\alpha}{(n+1)^\alpha((n+2)^\alpha - (n+1)^\alpha)}\right) \end{aligned}$$

soit :

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}} \left(1 - \tfrac{(\alpha-1)}{(n+1)\left(1 - \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^\alpha\right)}\right) &\leq \ell - v_{n+1} \\ &\leq \tfrac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} \left(1 - \tfrac{n^{\alpha-1}(\alpha-1)}{(n+1)^\alpha\left(1 - \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^\alpha\right)}\right) \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} 1 - \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^\alpha &= 1 - \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^\alpha = 1 - \left(1 - \alpha \frac{1}{n+2} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \alpha \frac{1}{n+2} + o\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\alpha}{n} \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\frac{n^{\alpha-1}(\alpha-1)}{(n+1)^\alpha \left(1 - \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^\alpha\right)} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{n^{\alpha-1}(\alpha-1)}{n^\alpha \dfrac{\alpha}{n}} = \frac{\alpha - 1}{\alpha}$$

et :

$$\frac{(\alpha-1)}{(n+1)\left(1 - \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^\alpha\right)} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\alpha - 1}{n \dfrac{\alpha}{n}} = \frac{\alpha - 1}{\alpha}$$

Il en résulte que :

$$\ell - v_{n+1} \underset{n \to +\infty}{\sim} \tfrac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} \left(1 - \frac{\alpha - 1}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

et la convergence de la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ est lente.

5.4 Méthode d'accélération de Richardson

On se place dans un premier temps dans le cas où on dispose d'un développement asymptotique de la forme :

$$u_n = \ell + \beta \lambda^n + \gamma \mu^n + o(\mu^n)$$

avec β, γ non nuls et $0 < |\mu| < |\lambda| < 1$.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge donc vers ℓ et la convergence est géométrique de rapport $|\lambda|$.

Si on connaît explicitement les coefficients β et λ, on peut accélérer la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en la remplaçant par la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$v_n = u_n - \beta\lambda^n.$$

Cette suite converge bien vers ℓ et avec $v_n - \ell \underset{+\infty}{\backsim} \gamma\mu^n$, la convergence est donc géométrique de rapport $|\mu|$ et :

$$\frac{v_n - \ell}{u_n - \ell} \underset{+\infty}{\backsim} \frac{\gamma}{\beta}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\to} 0,$$

ce qui confirme bien que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ plus vite que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Si on connaît explicitement le coefficient λ, mais pas le coefficient β, on peut définir un barycentre de u_{n+1} et u_n où le terme $\beta\lambda^n$ a été éliminé. Pour ce faire, on écrit que :

$$\left\{\begin{array}{l} u_{n+1} = \ell + \beta\lambda^{n+1} + \mu^{n+1}\left(\gamma + o\left(1\right)\right) \\ u_n = \ell + \beta\lambda^n + \mu^n\left(\gamma + o\left(1\right)\right) \end{array}\right.$$

et :

$$u_{n+1} - \lambda u_n = (1-\lambda)\,\ell + \mu^n\left(\left(\mu - \lambda\right)\gamma + o\left(1\right)\right),$$

ce qui nous conduit à introduire la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$v_n = \frac{u_{n+1} - \lambda u_n}{1-\lambda}.$$

C'est la situation décrite à l'exercice 5.11.

On a alors :

$$v_n - \ell = \mu^n\left(\frac{\mu-\lambda}{1-\lambda}\gamma + o\left(1\right)\right) \underset{+\infty}{\backsim} \frac{\mu-\lambda}{1-\lambda}\gamma\mu^n$$

c'est-à-dire que la convergence est géométrique de rapport $|\mu|$ et :

$$\frac{v_n - \ell}{u_n - \ell} \underset{+\infty}{\backsim} \frac{\mu-\lambda}{1-\lambda}\frac{\gamma}{\beta}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

On est donc ainsi passé de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers ℓ avec une vitesse de convergence géométrique de raison $|\lambda|$ à la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge aussi vers ℓ avec une vitesse de convergence géométrique de raison $|\mu| < |\lambda|$.

Les exercices 5.11 et 5.12 nous donnent des exemples de cette situation où on approxime respectivement les nombres e et π.

De manière plus générale, si on dispose d'un développement asymptotique de la forme :

$$u_n = \ell + \frac{\beta}{n} + \frac{\gamma}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

avec β et γ non nuls, on utilise la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ pour laquelle on a le développement asymptotique :

$$v_n = \ell + \frac{\beta}{2^n} + \frac{\gamma}{4^n} + o\left(\frac{1}{4^n}\right)$$

et une suite accélératrice est définie par :

$$w_n = 2v_{n+1} - v_n.$$

On a alors :

$$\begin{cases} v_n - \ell \underset{+\infty}{\backsim} \dfrac{\beta}{2^n} \\ w_n - \ell \underset{+\infty}{\backsim} -\dfrac{1}{2}\dfrac{\gamma}{4^n} \end{cases}$$

c'est-à-dire qu'on passe d'une convergence géométrique de raison $\frac{1}{2}$ à une convergence géométrique de raison $\frac{1}{4}$ (voir l'exercice 5.11).

La méthode de Richardson consiste à itérer le procédé précédent dès que l'on dispose d'un développement asymptotique de la forme :

$$u_n = \ell + \sum_{j=1}^{p+1} \beta_j \lambda_j^n + o\left(\lambda_{p+1}^n\right)$$

où p est un entier naturel non nul, les coefficients β_j sont tous non nuls et les coefficients λ_j tels que :

$$0 < |\lambda_{p+1}| < |\lambda_p| < \cdots < |\lambda_1| < 1.$$

Si tous les coefficients β_j et λ_j sont connus, on peut accélérer la convergence de cette suite en introduisant la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$v_n = u_n - \sum_{j=1}^{p+1} \beta_j \lambda_j^n.$$

Ce cas se présente pour les sommes de séries numériques de la forme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f(n)$, où la fonction f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}^{+,*}$. Le développement asymptotique est obtenu en utilisant la formule d'Euler et Mac-Laurin en supposant le calcul explicite des dérivées de la fonction f facilement réalisable. C'est le cas par exemple pour les séries de Riemann convergentes.

Si les coefficients λ_j sont tous connus, mais pas les coefficients β_j, on va les éliminer progressivement en itérant le procédé barycentrique décrit précédemment, ce qui nous amène à introduire, pour tout entier k compris entre 0 et p, les suites $(u_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$ définies par les formules de récurrence suivantes :

$$\begin{cases} u_{n,0} = u_n, \\ u_{n,k} = \dfrac{u_{n+1,k-1} - \lambda_k u_{n,k-1}}{1-\lambda_k}. \end{cases}$$

Lemme 5.2 *Avec les notations et hypothèses qui précèdent, on a pour tout entier k compris entre 0 et p, le développement asymptotique :*

$$u_{n,k} = \ell + \sum_{j=k+1}^{p+1} \beta_{k,j} \lambda_j^n + o\left(\lambda_{p+1}^n\right),$$

les coefficients $\beta_{k,j}$ étant tous non nuls.

Démonstration. On procède par récurrence finie sur k.

Pour $k = 0$ c'est l'hypothèse.

En supposant le résultat acquis au rang $k-1<p$, on a :

$$\left\{\begin{array}{l} u_{n+1,k-1}=\ell+\sum\limits_{j=k}^{p+1}\beta_{k-1,j}\lambda_j^{n+1}+o\left(\lambda_{p+1}^{n+1}\right) \\ u_{n,k-1}=\ell+\sum\limits_{j=k}^{p+1}\beta_{k-1,j}\lambda_j^{n}+o\left(\lambda_{p+1}^{n}\right) \end{array}\right.$$

l'élimination du coefficient $\beta_{k-1,k}$ entre ces deux équations se faisant avec :

$$\frac{u_{n+1,k-1}-\lambda_k u_{n,k-1}}{1-\lambda_k}=\ell+\sum_{j=k+1}^{p+1}\beta_{k,j}\lambda_j^n+o\left(\lambda_{p+1}^n\right)$$

où $\beta_{k,j}=\dfrac{\lambda_j-\lambda_k}{1-\lambda_k}\beta_{k-1,j}\neq 0$ pour tout j compris entre $k+1$ et $p+1$. ■

Théorème 5.2 (Richardson) *Avec les notations et hypothèses qui précèdent, pour tout entier k compris entre* 1 *et* p, *la suite* $(u_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* ℓ *plus rapidement que la suite* $(u_{n,k-1})_{n\in\mathbb{N}}$, *la convergence de la suite* $(u_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$ *étant géométrique de raison* $|\lambda_{k+1}|$. *Plus précisément, pour tout* k *compris entre* 0 *et* p, *on a :*

$$u_{n,k}-\ell\underset{+\infty}{\backsim}\beta_{k,k+1}\lambda_{k+1}^n$$

avec :

$$\beta_{k,k+1}=\beta_{k+1}\prod_{j=1}^{k}\frac{\lambda_{k+1}-\lambda_j}{1-\lambda_j}.$$

Démonstration. Avec l'hypothèse $0<|\lambda_{p+1}|<\cdots<|\lambda_{k+1}|<|\lambda_k|$ et lemme précédent, on déduit que, pour k compris entre 1 et p, on a :

$$\left\{\begin{array}{l} u_{n,k}-\ell\underset{+\infty}{\backsim}\beta_{k,k+1}\lambda_{k+1}^n \\ \dfrac{u_{n,k}-\ell}{u_{n,k-1}-\ell}\underset{+\infty}{\backsim}\dfrac{\beta_{k,k+1}}{\beta_{k-1,k}}\left(\dfrac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k}\right)^n\underset{n\to+\infty}{\to}0 \end{array}\right.$$

avec :

$$\beta_{k,k+1}=\frac{\lambda_{k+1}-\lambda_k}{1-\lambda_k}\frac{\lambda_{k+1}-\lambda_{k-1}}{1-\lambda_{k-1}}\cdots\frac{\lambda_{k+1}-\lambda_1}{1-\lambda_1}\beta_{k+1}$$

ce qui est le résultat annoncé. ■

Exercice 5.19 *On reprend l'exemple de la suite d'Archimède* $u=(u_n)_{n\geq 1}$ *permettant d'approcher le nombre* π. *On rappelle qu'elle est définie par :*

$$\forall n\geq 1,\ u_n=2^n\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$$

(exercice 5.12).

1. *En utilisant, pour* $p\geq 1$, *le développement limité à l'ordre* $2p$ *de la fonction* sin, *donner un développement asymptotique de la suite* u.
2. *En déduire les suites accélératrices correspondantes à la méthode de Richardson.*

Solution 5.19

1. *Avec le développement limité :*

$$\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j \frac{\pi^{2j}}{(2j+1)!} x^{2j} + o\left(x^{2p+2}\right),$$

on obtient le développement asymptotique :

$$u_n = \pi + \sum_{j=1}^{p+1} (-1)^j \frac{\pi^{4j+1}}{(2j+1)!} \left(\frac{1}{4^j}\right)^n + o\left(\left(\frac{1}{4^{p+1}}\right)^n\right)$$

2. *Les suites accélératrices correspondantes à la méthode de Richardson sont donc données par :*

$$\begin{cases} u_{n,0} = u_n = 2^n \sin\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right), \ (n \geq 1) \\ u_{n,k} = \dfrac{u_{n+1,k-1} - \frac{1}{4^k} u_{n,k-1}}{1 - \frac{1}{4^k}} = \dfrac{4^k u_{n+1,k-1} - u_{n,k-1}}{4^k - 1} \ (1 \leq k \leq p, \ n \geq 1). \end{cases}$$

L'exercice précédent peut se ramener à la situation suivante. On dispose d'une fonction f définie sur $I =]-1, 1[$ et admettant un développement limité d'ordre $p+1$ en 0 :

$$f(x) = \ell + \sum_{j=1}^{p+1} \beta_j x^j + o\left(x^{p+1}\right)$$

où p est un entier naturel non nul et les coefficients β_j sont tous non nuls. On associe à cette fonction la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$\forall n \geq 1, \ u_n = f(r^n)$$

où r est un réel non nul dans $]-1, 1[$. On a alors le développement asymptotique :

$$u_n = \ell + \sum_{j=1}^{p+1} \beta_j \lambda_j^n + o\left(\lambda_{p+1}^n\right)$$

où les coefficients $\lambda_j = r^j$ vérifient bien l'hypothèse :

$$0 < |\lambda_{p+1}| < |\lambda_p| < \cdots < |\lambda_1| < 1.$$

On peut donc définir les suites accélératrices $(u_{n,k})_{n\geq 1}$ par :

$$\begin{cases} u_{n,0} = u_n = f(r^n) \\ u_{n,k} = \dfrac{u_{n+1,k-1} - r^k u_{n,k-1}}{1 - r^k} \ (1 \leq k \leq p). \end{cases}$$

Les coefficients $\beta_{k,k+1}$ sont alors donnés par :

$$\begin{aligned} \beta_{k,k+1} &= \beta_{k+1} \prod_{j=1}^{k} \frac{r^{k+1} - r^j}{1 - r^j} = \beta_{k+1} \prod_{j=1}^{k} r^j \frac{r^{k+1-j} - 1}{1 - r^j} \\ &= \frac{\left(r^k - 1\right)\left(r^{k-1} - 1\right) \cdots (r-1)}{(1-r) \cdots \left(1 - r^{k-1}\right)\left(1 - r^k\right)} \beta_{k+1} \prod_{j=1}^{k} r^j \\ &= (-1)^k r^{(1+2+\cdots+k)} \beta_{k+1} = (-1)^k r^{\frac{k(k+1)}{2}} \beta_{k+1} \end{aligned}$$

On a donc, pour tout k compris entre 0 et p :

$$u_{n,k} - \ell \underset{+\infty}{\backsim} (-1)^k \beta_{k+1} r^{\frac{(k+1)(2n+k)}{2}}$$

Pour la suite d'Archimède, on a :

$$\forall n \geq 1,\ u_n = 2^n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = f\left(\frac{1}{2^n}\right)$$

où $f(x) = \dfrac{\sin(\pi x)}{x}$ et en écrivant $f(x) = g(x^2)$, où :

$$g(t) = \pi + \sum_{j=1}^{p+1} (-1)^j \frac{\pi^{2j+1}}{(2j+1)!} t^j + o\left(x^{p+1}\right)$$

on se ramène à la situation précédente avec $r = \dfrac{1}{4}$. On a alors, pour tout k compris entre 0 et p :

$$\pi - u_{n,k} \underset{+\infty}{\backsim} \frac{\pi^{2k+3}}{(2k+3)!} \frac{1}{2^{(2n+k)(k+1)}}.$$

On a, par exemple, pour les trois premières suites :

$$\begin{cases} u_n = 2^n \sin\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right), \\ u_{n,1} = \dfrac{4u_{n+1} - u_n}{3}, \\ u_{n,2} = \dfrac{16u_{n+1,1} - u_{n,1}}{15}, \end{cases}$$

avec :

$$\begin{cases} \pi - u_n \underset{+\infty}{\backsim} \dfrac{\pi^3}{6} \dfrac{1}{4^n}, \\ \pi - u_{n,1} \underset{+\infty}{\backsim} \dfrac{\pi^5}{5!} \dfrac{4}{16^{n+1}}, \\ \pi - u_{n,2} \underset{+\infty}{\backsim} \dfrac{\pi^7}{7!} \dfrac{1}{64^{n+1}}. \end{cases}$$

Exemple 5.2 *Si on reprend l'exemple du nombre e approché par la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par :*

$$\forall n \geq 0,\ u_n = \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)^{2^n},$$

On a $u_n = f\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$, où f est la fonction définie sur $]-1, 1[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} \ si\ 0 < |x| < 1, \\ 0 \ si\ x = 0. \end{cases}$$

Cette fonction est indéfiniment dérivable sur $]-1, 1[$ comme composée des fonctions :

$$g : x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x} = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{n}$$

et $t \mapsto e^t$, *elle admet donc des développements limités à tous ordres en* 0. *Par exemple, à l'ordre* 3, *on a :*

$$e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = e - \frac{e}{2}x + \frac{11e}{24}x^2 - \frac{7e}{16}x^3 + o\left(x^3\right).$$

On peut donc utiliser le procédé d'accélération de Richardson avec $r = \frac{1}{2}$, *ce qui donne les suites accélératrices définies par :*

$$\begin{cases} u_{n,0} = u_n = \left(1 + \dfrac{1}{2^n}\right)^{2^n} \ (n \geq 0), \\ u_{n,k} = \dfrac{2^k x_{n+1,k-1} - x_{n,k-1}}{2^k - 1} \ (k \geq 1), \end{cases}$$

et on a :

$$u_{n,k} - e \underset{+\infty}{\backsim} (-1)^k \beta_{k+1} \frac{1}{2^{(2n+k)\frac{k+1}{2}}}.$$

Ce qui donne, par exemple, pour les trois premières suites :

$$\begin{cases} u_n = \left(1 + \dfrac{1}{2^n}\right)^{2^n}, \\ u_{n,1} = 2u_{n+1} - u_n, \\ u_{n,2} = \dfrac{4u_{n+1,1} - u_{n,1}}{3}, \end{cases}$$

avec :

$$\begin{cases} e - u_n \underset{+\infty}{\backsim} \dfrac{e}{2}\dfrac{1}{2^n}, \\ e - u_{n,1} \underset{+\infty}{\backsim} \dfrac{11e}{24}\dfrac{1}{2^{2n+1}}, \\ e - u_{n,2} \underset{+\infty}{\backsim} \dfrac{7e}{16}\dfrac{1}{2^{3[n+1]}}. \end{cases}$$

6

Séries réelles ou complexes

Comme pour le chapitre 3, les suites considérées sont a priori complexes et les résultats classiques sur les fonctions continues ou dérivables d'une variable réelle sont supposés connus de même que les fonctions usuelles exp, ln, sin, $\cdots$

6.1 Généralités sur les séries réelles ou complexes

Soient n_0 un entier naturel et $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite de nombres complexes. Étudier la série de terme général u_n revient à étudier la suite $(S_n)_{n\geq n_0}$ des sommes partielles définie par :

$$\forall n \geq n_0,\ S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k.$$

On peut remarquer que cette suite est aussi définie par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} S_{n_0} = u_{n_0}, \\ \forall n \geq n_0 + 1,\ S_n = S_{n-1} + u_n. \end{cases}$$

On notera plus simplement $\sum u_n$ une telle série et on parlera de série numérique.

Pour tout entier $n \geq n_0$, on dit que u_n est le terme d'indice n et S_n la somme partielle d'indice n de cette série.

On supposera, a priori, que $n_0 = 0$.

6.2 Séries convergentes ou divergentes

On se donne une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (ou plus généralement $(u_n)_{n\geq n_0}$) d'éléments de $\mathbb{C}$ et on désigne par $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de ses sommes partielles.

Définition 6.1 *On dit que la série $\sum u_n$ est convergente si la suite de ses sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Dans le cas contraire, on dit que la série est divergente.*

Dans le cas où la série $\sum u_n$ est convergente, on notera $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, soit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$$

et on dit que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ est la somme de la série de terme général u_n. On peut alors définir la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des restes de cette série convergente par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ R_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n - S_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

On dit, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, que R_n est le reste d'ordre n de la série convergente $\sum u_n$ et on note :

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

On peut remarquer que la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Le reste d'ordre n, R_n nous donne une idée de l'erreur que l'on comment en remplaçant la somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ par la somme partielle d'ordre n, S_n.

La convergence de la série $\sum u_n$ se traduit donc par :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0,\ \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k\right| < \varepsilon.$$

L'étude la suite géométrique $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ (exercice 3.18) nous permet d'étudier la série correspondante.

Exercice 6.1 *Étudier la série géométrique* $\sum a^n$, *où* $a \in \mathbb{C}$.

Solution 6.1 *Pour* $a = 1$, *on a :*

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} a^k = \lim_{n\to+\infty} (n+1) = +\infty$$

et la série diverge.
Pour $a \neq 1$, *les sommes partielles sont données par :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$

et la série géométrique converge si, et seulement si, la suite géométrique $(a^{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ *converge, ce qui équivaut à* $|a| < 1$. *En cas de convergence, on a alors :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-a^{n+1}}{1-a} = \frac{1}{1-a}.$$

Les restes d'ordre n, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *sont donnés par :*

$$R_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n - \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1}{1-a} - \frac{1-a^{n+1}}{1-a} = \frac{a^{n+1}}{1-a}$$

L'exercice qui suit nous montre comment ramener l'étude d'une suite à celle d'une série ou inversement.

Exercice 6.2 *Étant donnée une suite numérique* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *on lui associe la série numérique de terme général* u_n *défini par :*

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{C}, \\ \forall n \geq 1,\ u_n = a_{n-1} - a_n. \end{cases}$$

Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est de même nature que la série* $\sum u_n$, *c'est-à-dire qu'elles convergent ou divergent simultanément.*

Solution 6.2 *Les sommes partielles de la série* $\sum u_n$ *sont données par* $S_0 = u_0$ *et, pour* $n \geq 1$ *:*

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_{k-1} - a_k) = u_0 + \sum_{k=1}^{n} a_{k-1} - \sum_{k=1}^{n} a_k \\ &= u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k = u_0 + a_0 - a_n \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat. En cas de convergence de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *vers* ℓ, *la série* $\sum u_n$ *converge vers* $u_0 + a_0 - \ell$ *et les restes d'ordre* n *de la série* $\sum u_n$ *sont données par :*

$$R_n = u_0 + a_0 - \ell - S_n = a_n - \ell.$$

Les exercices qui suivent nous donne des exemples d'application de ce résultat.

Exercice 6.3 *Étudier les séries* $\sum \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ *et* $\sum \frac{2n+3}{(n+1)^2(n+2)^2}$.

Solution 6.3 *Une décomposition en éléments simples nous donne :*

$$u_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = a_{n-1} - a_n$$

et :

$$v_n = \frac{2n+3}{(n+1)^2(n+2)^2} = \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{(n+2)^2} = b_{n-1} - b_n$$

et en conséquence :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = u_0 + a_0 - \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 1,$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n+3}{(n+1)^2(n+2)^2} = v_0 + b_0 - \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = 1.$$

Exercice 6.4 *Étudier les séries* $\sum \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ *et* $\sum \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.

Solution 6.4 *Avec :*

$$\forall n \geq 1,\ u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln(n) = -(a_{n-1} - a_n)$$

on déduit que la série $\sum \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ *diverge (vers l'infini).*
Pour $n \geq 2$, *on a :*

$$\begin{aligned} v_n = \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) &= \ln\left(\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}\right) \\ = \ln\left(\frac{n-1}{n}\right)+\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) &= \ln\left(\frac{n-1}{n}\right)-\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \\ = \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)-\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right) &= a_{n-1}-a_n \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) &= v_2 + a_2 - \lim_{n\to+\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right) \\ &= \ln\left(\frac{3}{4}\right)+\ln\left(\frac{2}{3}\right) = -\ln(2)\,. \end{aligned}$$

Exercice 6.5 *Étudier la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *définie par la relation de récurrence :*

$$\left\{\begin{array}{l} u_0 \in \mathbb{C}, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + a^n \end{array}\right.$$

où a *est un scalaire donné.*

Solution 6.5 *La suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est de même nature que la série* $\sum (u_{n+1}-u_n) = \sum a^n$. *Elle est donc convergente si, et seulement si,* $|a|<1$. *Pour* $|a|<1$, *on a :*

$$\begin{aligned} u_n = u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1}-u_k) &= u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} a^k \\ = u_0 + \frac{1-a^n}{1-a} &\underset{n\to+\infty}{\to} u_0 + \frac{1}{1-a}. \end{aligned}$$

De manière plus générale, une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par une relation de récurrence du type :

$$\left\{\begin{array}{l} u_0 \in \mathbb{C}, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + v_n \end{array}\right.$$

est convergente si, et seulement si, la série $\sum v_n$ est convergente.

Nous verrons plus loin comment utiliser le résultat de l'exercice 6.2 pour étudier la constante d'Euler γ déjà rencontré à l'exercice 3.58.

L'exercice suivant nous montre comment utiliser la décomposition en éléments simple des fonctions rationnelles de pôles entiers relatifs et les changements d'indices pour calculer la somme de certaines séries numériques.

Exercice 6.6 *Montrer que les séries de terme général* $u_n = \frac{2n-1}{n(n^2-4)}$ $(n \geq 3)$ *et* $v_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ $(n \geq 1)$ *sont convergentes et calculer leurs sommes.*

Solution 6.6 *En utilisant la décomposition en éléments simples :*

$$f(x) = \frac{2x-1}{x(x^2-4)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x+2}$$

avec :

$$a = \lim_{x\to 0} xf(x) = \frac{1}{4},\ b = \lim_{x\to 2}(x-2)f(x) = \frac{3}{8},\ c = \lim_{x\to -2}(x+2)f(x) = -\frac{5}{8}$$

on a :

$$u_n = \frac{1}{8}\left(\frac{2}{n} + \frac{3}{n-2} - \frac{5}{n+2}\right)$$

et :

$$\begin{aligned}
8S_n &= 2\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k} + 3\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k-2} - 5\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k+2} \\
&= 2\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k} + 3\sum_{k=1}^{n-2}\frac{1}{k} - 5\sum_{k=5}^{n+2}\frac{1}{k} \\
&= 2\sum_{k=3}^{4}\frac{1}{k} + 3\sum_{k=1}^{4}\frac{1}{k} + 2\sum_{k=n-1}^{n}\frac{1}{k} - 5\sum_{k=n-1}^{n+2}\frac{1}{k} \\
&= \frac{89}{12} - \frac{3}{n-1} - \frac{3}{n} - \frac{5}{n+1} - \frac{5}{n+2}.
\end{aligned}$$

En conséquence :

$$\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{2n-1}{n(n^2-4)} = \frac{89}{96}.$$

De manière analogue, la décomposition en éléments simples :

$$g(x) = \frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2}$$

avec :

$$a = \lim_{x\to 0} xg(x) = \frac{1}{2},\ b = \lim_{x\to -1}(x+1)g(x) = -1,\ c = \lim_{x\to -2}(x+2)g(x) = \frac{1}{2}$$

on a :

$$v_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right)$$

et :

$$\begin{aligned}
2S_n &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+2} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - 2\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k} + \sum_{k=3}^{n+2}\frac{1}{k} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}.
\end{aligned}$$

En conséquence :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}.$$

Les exercices 3.24 et 3.52 nous donnent le résultat suivant sur les séries de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$.

Théorème 6.1 *Soit α un réel. La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente si, et seulement si $\alpha > 1$.*

Démonstration. Rappelons la démonstration de ce résultat.

Pour $\alpha \leq 1$, on utilise le fait que si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (S_{2n} - S_n) = 0$ et pour $\alpha > 1$, on montre que la suite croissante $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

Pour $\alpha \leq 1$, on a $x\frac{1}{x^\alpha} = x^{1-\alpha} \geq 1$ pour $x \geq 1$ et :

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^\alpha} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

et la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ diverge.

Pour $\alpha > 1$, la fonction $t \to \frac{1}{t^\alpha}$ étant décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, on a :

$$\forall k \geq 2, \quad \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^\alpha} \geq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{k^\alpha} = \frac{1}{k^\alpha}$$

et pour tout $n \geq 2$, on a :

$$\begin{aligned} S_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^\alpha} = 1 + \int_{1}^{n} \frac{dt}{t^\alpha} &= 1 + \frac{1}{\alpha-1}\left(1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right) \\ &\leq \frac{\alpha}{\alpha-1}. \end{aligned}$$

La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante majorée et en conséquence convergente. ∎

Pour $\alpha = 2$, on a $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Voir le problème 27 pour plusieurs démonstrations de ce résultat. De manière plus générale, on peut montrer que pour tout entier $p \geq 1$ on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2p}} = (-1)^{p+1} \frac{b_{2p} (2\pi)^{2p}}{2}$$

où les b_{2p} sont les nombres de Bernoulli (voir le problème 28).

On peut aussi montrer la convergence des séries de Riemann pour $\alpha > 1$ en utilisant les séries géométriques comme suit.

Exercice 6.7 *On désigne par $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ pour $\alpha > 1$.*

1. *Montrer que pour tout entier $p \geq 0$, on a :*

$$\sum_{k=2^p}^{2^{p+1}-1} \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{2^{p(\alpha-1)}}.$$

2. *En déduire que pour tout réel $\alpha > 1$ et tout entier $r \geq 0$, on a :*

$$S_{2^{r+1}-1} < \frac{2^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1}-1}.$$

3. *En déduire que la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente pour $\alpha > 1$.*

Solution 6.7

1. *Pour k compris entre 2^p et $2^{p+1}-1$, on a $k \geq 2^p$, donc $\frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{2^{p\alpha}}$ pour $\alpha > 0$ et :*

$$\sum_{k=2^p}^{2^{p+1}-1} \frac{1}{k^\alpha} \leq \left(2^{p+1}-2^p\right)\frac{1}{2^{p\alpha}} = 2^p \frac{1}{2^{p\alpha}} = \frac{1}{2^{p(\alpha-1)}}.$$

2. *Pour tout entier $r \geq 0$, on a la partition :*

$$\begin{aligned}\left\{1, 2, \cdots, 2^{r+1}-1\right\} &= \{1\} \cup \{2, 3\} \cup \{4, 5, 6, 7\} \cup \cdots \cup \left\{2^r, \cdots, 2^{r+1}-1\right\} \\ &= \bigcup_{p=0}^{r} \left\{2^p, \cdots, 2^{p+1}-1\right\}\end{aligned}$$

et pour $\alpha > 1$, on a :

$$\begin{aligned}S_{2^{r+1}-1} = \sum_{p=0}^{r} \sum_{k=2^p}^{2^{p+1}-1} \frac{1}{k^\alpha} \leq \sum_{p=0}^{r} \left(\frac{1}{2^{(\alpha-1)}}\right)^p &= \frac{1-\frac{1}{2^{(r+1)(\alpha-1)}}}{1-\frac{1}{2^{\alpha-1}}} \\ &< \frac{1}{1-\frac{1}{2^{\alpha-1}}} = \frac{2^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1}-1}\end{aligned}$$

3. *Pour tout entier $n \geq 1$, on peut trouver un entier $r \geq 0$ tel que $n \leq 2^{r+1}-1$ et on a :*

$$S_n \leq S_{2^{r+1}-1} < \frac{2^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1}-1}$$

puisque la série considérée est à termes positives. La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante majoré et en conséquence convergente.

Une condition nécessaire de convergence, élémentaire mais souvent utile pour justifier la divergence d'une série, est donnée par le résultat suivant.

Théorème 6.2 *Si la série $\sum u_n$ est convergente, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.*

Démonstration. Résulte immédiatement de $u_n = S_n - S_{n-1}$ pour $n \geq 1$. ■

Exemple 6.1 *Pour $|a| \geq 1$, la suite $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, en conséquence la série géométrique $\sum a^n$ diverge.*

Remarque 6.1 *La réciproque est fausse comme le montre l'exemple de la série $\sum \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ ou ceux des séries de Riemann divergentes.*

En fait, dans le cas où la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est réelle décroissante, on a le résultat plus précis suivant.

Théorème 6.3 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels positifs. Si la série $\sum u_n$ est convergente, alors la suite $(nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, c'est-à-dire que $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.*

Démonstration. Pour $n > m \geq 1$, on a :

$$\sum_{k=m}^{n} u_k \geq (n-m+1)\, u_n$$

soit :

$$0 \leq nu_n \leq \sum_{k=m}^{n} u_k + (m-1)\, u_n \leq \sum_{k=m}^{+\infty} u_k + mu_n.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sum\limits_{k=m}^{+\infty} u_k\right) = 0$, pour $\varepsilon > 0$ donné, on peut trouver entier $m_0 \geq 1$ tel que $\sum\limits_{k=m_0}^{+\infty} u_k \leq \varepsilon$ et on a :

$$\forall n > m_0,\ 0 \leq nu_n \leq \varepsilon + m_0 u_n.$$

Pour m_0 ainsi fixé, tenant compte de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, on peut trouver un entier $n_0 > m_0$ tel que $m_0 u_n < \varepsilon$ pour $n \geq n_0$. On a donc $nu_n < 2\varepsilon$ pour $n \geq n_0$. Le réel ε étant quelconque, on a bien montré que $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = 0$. ■

Exercice 6.8 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs décroissante telle que la série $\sum u_n$ soit convergente*

1. *Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = 0$ et en déduire la nature de la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{u_n}{1-nu_n}$.*
2. *Montrer que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} n\,(u_n - u_{n+1}) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.*

Solution 6.8

1. *On a déjà vu avec le théorème précédent que $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = 0$. On a alors $1 - nu_n > 0$ pour n assez grand et $\dfrac{u_n}{1-nu_n} \backsim u_n$, ce qui entraîne la convergence de la série $\sum\limits_{n=n_2}^{+\infty} \dfrac{u_n}{1-nu_n}$.*
2. *On a :*

$$\sum_{k=0}^{n} k\,(u_k - u_{k+1}) = \sum_{k=0}^{n} u_k - nu_{n+1},$$

avec $nu_{n+1} = \dfrac{n}{n+1}\,(n+1)\,u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, d'où le résultat.

On peut remarquer que les séries de Riemann sont de la forme $\sum f(n)$ où f est une fonction définie sur $[1, +\infty[$, à valeurs positives, continue et décroissante. De manière plus précise, on a le résultat suivant qui reprend celui de l'exercice 3.53.

Théorème 6.4 *Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ une fonction continue décroissante et F la primitive de f nulle en 1. La suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f(k) - F(n)$ pour tout $n \geq 1$ est convergente et la série $\sum f(n)$ de même nature que la suite $(F(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$. En supposant f non identiquement nulle et en notant ℓ la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a :*

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} F(n) + \ell.$$

Démonstration. La fonction F est définie par :

$$\forall x \geq 1,\ F(x) = \int_1^x f(t)\,dt.$$

Pour $n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= f(n+1) - (F(n+1) - F(n)) \\ = f(n+1) - \int_n^{n+1} f(t)\,dt &= \int_n^{n+1} (f(n+1) - f(t))\,dt \end{aligned}$$

avec f continue et $f(n+1) \leq f(t)$ pour tout $t \in \,]n, n+1[$. On a donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

La fonction f est continue décroissante sur $[1, +\infty[$, donc :

$$\forall k \geq 1,\ \int_k^{k+1} f(t)\,dt \leq \int_k^{k+1} f(k)\,dt = f(k)$$

et pour tout $n \geq 2$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \geq \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} f(t)\,dt = \int_1^{n+1} f(t)\,dt = F(n+1),$$

et $u_n \geq F(n+1) - F(n) = \displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,dt \geq 0$ puisque f est à valeurs positives. La suite u est donc décroissante minorée et en conséquence convergente vers un réel $\ell \geq 0$.

Comme f est à valeurs positives, la suite $(F(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante à valeurs positives et on a deux possibilités. Soit cette suite est majorée et elle converge alors vers un réel $\ell' \geq 0$. Il en résulte alors que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(n) = \ell + \ell'$. Dans le cas contraire, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} F(n) = +\infty$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(n) = +\infty$.

Si f n'est pas la fonction nulle, on aura $F(n) \geq F(n_0) > 0$ pour $n \geq n_0$ avec n_0 assez grand (puisque f est continue) et :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} f(k)}{F(n) + \ell} - 1 \right| &= \frac{\left| \sum\limits_{k=1}^{n} f(k) - F(n) - \ell \right|}{F(n) + \ell} \\ &\leq \frac{\left| \sum\limits_{k=1}^{n} f(k) - F(n) - \ell \right|}{F(n_0) + \ell} \underset{n\to+\infty}{\to} 0 \end{aligned}$$

c'est-à-dire que $\sum\limits_{k=1}^{n} f(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} F(n) + \ell.$ ■

Remarque 6.2 *Dans le cas où* $\lim\limits_{n\to+\infty} F(n) = +\infty$, *on a* $F(n)+\ell \underset{n\to+\infty}{\sim} F(n)$ *et* $\sum\limits_{k=1}^{n} f(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} F(n)$.

Nous verrons, après avoir étudié les intégrales généralisées, que le résultat précédent se traduit en disant que la série $\sum f(n)$ est de même nature que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$.

En utilisant la fonction $f(t) = \dfrac{1}{t^\alpha}$ avec $\alpha > 0$ on retrouve, en les précisant, les résultats sur les séries de Riemann.

Pour $\alpha = 1$, on a $F(x) = \ln(x)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \ln(n)\right) = \gamma$ (la constante d'Euler), $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} \underset{+\infty}{\backsim} \ln(n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} = +\infty$, soit $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n} = +\infty$.

Pour $\alpha \neq 1$, on a $F(x) = \dfrac{1}{1-\alpha}\left(\dfrac{1}{x^{\alpha-1}} - 1\right)$.

Pour $\alpha > 1$, on a $F(n) = \dfrac{1}{\alpha-1}\left(1 - \dfrac{1}{n^{\alpha-1}}\right) \underset{n\to+\infty}{\to} \dfrac{1}{\alpha-1}$ et donc $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^\alpha} = \dfrac{1}{\alpha-1} + \ell$.

Pour $\alpha < 1$, on a $F(n) = \dfrac{1}{1-\alpha}\left(n^{1-\alpha} - 1\right) \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$ et $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^\alpha} \underset{+\infty}{\backsim} F(n) \underset{+\infty}{\backsim} \dfrac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$, soit $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^\alpha} = +\infty$.

Pour $\alpha \leq 0$, la série diverge puisque son terme général ne tend pas vers 0.

Exercice 6.9 *On se propose de montrer de façon élémentaire que* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2)$.
On note, pour tout entier $n \geq 1$ *et tout réel* x :

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k.$$

1. *Montrer que :*
$$f_n(x) = \frac{1 + (-1)^n x^{n+1}}{1+x}$$
pour tout $x \in [0,1]$.
2. *En déduire que, pour tout entier* $n \geq 1$, *on a :*
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2) - (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx.$$
3. *En déduire le résultat annoncé.*

Solution 6.9

1. *Pour* $x \in [0,1]$, *on a* $-x \neq 1$ *et :*
$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-x)^k = \frac{1 - (-x)^{n+1}}{1+x} = \frac{1 + (-1)^n x^{n+1}}{1+x}.$$

2. *En intégrant sur* $[0,1]$, *on a :*

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^1 x^k dx = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$$
$$= \int_0^1 \frac{1-(-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x} dx$$
$$= \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx - (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx$$
$$= \ln(2) - (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx.$$

3. *Avec :*

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx \leq \int_0^1 x^{n+1} dx = \frac{1}{n+2} \underset{n\to+\infty}{\to} 0,$$

on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2)$, *soit* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2)$.

Exercice 6.10 *En s'inspirant de la méthode utilisée à l'exercice précédent, montrer que* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.

Solution 6.10

1. *Pour* $x \in [0,1]$, *on a :*

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(-x^2\right)^k = \frac{1-(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2} = \frac{1+(-1)^n x^{2n+2}}{1+x^2}.$$

2. *En intégrant sur* $[0,1]$, *on a :*

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^1 x^{2k} dx = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$
$$= \int_0^1 \frac{1-(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2} dx$$
$$= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx - (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} dx$$
$$= \frac{\pi}{4} - (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} dx.$$

3. *Avec :*

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} dx \leq \int_0^1 x^{2n+2} dx = \frac{1}{2n+3} \underset{n\to+\infty}{\to} 0,$$

on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$, *soit* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.

Pour ce qui est des opérations sur les séries numériques, on dispose des résultats suivants.

Théorème 6.5 *Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques et λ, μ deux scalaires.*

1. *Si ces deux séries convergent, il en est alors de même de la série de terme général $\lambda u_n + \mu v_n$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mu v_n$.*
2. *Si la série $\sum u_n$ converge et la série $\sum v_n$ diverge, alors la série $\sum (u_n + v_n)$ diverge.*
3. *Si la série $\sum u_n$ converge, il en est de même de la série $\sum \overline{u_n}$, où $\overline{u_n}$ est le complexe conjugué de u_n et $\sum \overline{u_n} = \overline{\sum u_n}$.*

Démonstration. Se déduit immédiatement des résultats relatifs aux opérations algébriques sur les suites numériques. ■

Exercice 6.11 *On se propose d'étudier les séries de termes généraux $u_n = a^n e^{in\theta}$, $s_n = a^n \sin(n\theta)$ et $c_n = a^n \cos(n\theta)$ où a et θ sont deux réels quelconques.*

1. *Montrer que pour $\theta \in \mathbb{R}$ et $|a| < 1$, les trois séries convergent et calculer la somme de chacune ces séries.*
2. *Que dire des séries $\sum c_n$ et $\sum s_n$ pour $\theta \in \pi\mathbb{Z}$ et $a \in \mathbb{R}$?*
3. *On suppose que $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ et $|a| \geq 1$.*
   (a) *Montrer que la suite $(\sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.*
   (b) *Montrer la série $\sum s_n$ est divergente.*
   (c) *Montrer la série $\sum c_n$ est divergente.*

Solution 6.11

1. *On a $u_n = \lambda^n$ avec $\lambda = ae^{i\theta}$ et la série $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $|\lambda| < 1$, ce qui équivaut à $|a| < 1$ et $\theta \in \mathbb{R}$.*
   Pour $|a| < 1$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on a ;

$$\sum_{n\geq 0} u_n = \frac{1}{1 - ae^{i\theta}} = \frac{1}{1 - a\cos(\theta) - ia\sin(\theta)}$$
$$= \frac{1 - a\cos(\theta) + ia\sin(\theta)}{(1 - a\cos(\theta))^2 + a^2\sin^2(\theta)} = \frac{1 - a\cos(\theta) + ia\sin(\theta)}{1 - 2a\cos\theta + a^2}$$

et :

$$\sum_{n\geq 0} \overline{u_n} = \frac{1 - a\cos(\theta) - ia\sin(\theta)}{1 - 2a\cos\theta + a^2}$$

puis :

$$\sum_{n\geq 0} c_n = \frac{1}{2}\left(\sum_{n\geq 0} u_n + \sum_{n\geq 0} \overline{u_n}\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n\geq 0} u_n + \overline{\sum_{n\geq 0} u_n}\right)$$
$$= \Re\left(\sum_{n\geq 0} u_n\right) = \frac{1 - a\cos((\theta))}{1 - 2a\cos((\theta)) + a^2}$$

et :

$$\sum_{n\geq 0} s_n = \Im\left(\sum_{n\geq 0} u_n\right) = \frac{a\sin((\theta))}{1 - 2a\cos((\theta)) + a^2}.$$

2. *Si $\theta = p\pi$ avec $p \in \mathbb{Z}$, on a $s_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $a \in \mathbb{R}$, de sorte que $\sum\limits_{n\geq 0} s_n = 0$.*
   On a aussi $c_n = a^n (-1)^{np} = ((-1)^p a)^n$ et $\sum c_n$ converge si, et seulement si, $|a| < 1$.
3. *On remarque que la condition $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$ équivaut à $\sin(\theta) \neq 0$.*
   (a) *Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} (\sin(n\theta)) = \ell$. Avec :*

$$\sin((n+1)\theta) + \sin((n-1)\theta) = 2\sin(n\theta)\cos(\theta),$$

   on déduit que $2\ell = 2\ell\cos(\theta)$, ce qui impose $\ell = 0$ puisque $\cos(\theta) \neq 1$ si $\sin(\theta) \neq 0$. Avec :

$$\sin((n+1)\theta) = \cos(n\theta)\sin(\theta) + \sin(n\theta)\cos(\theta),$$

   on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} (\cos(n\theta)\sin(\theta)) = 0$, ce qui entraîne $\lim\limits_{n\to+\infty} (\cos(n\theta)) = 0$ puisque $\sin(\theta) \neq 0$, mais ce dernier résultat est incompatible avec $\cos^2(n\theta) + \sin^2(n\theta) = 1$.

   (b) *Supposons que la série $\sum s_n$ soit convergente. On a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (s_n) = 0$ et comme $|\sin(n\theta)| = \left|\dfrac{s_n}{a^n}\right| \leq |s_n|$ pour $|a| \geq 1$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} (\sin(n\theta)) = 0$ ce qui est faux.*

   (c) *Supposons que la série $\sum c_n$ soit convergente. On a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (c_n) = 0$ et comme $|\cos(n\theta)| = \left|\dfrac{c_n}{a^n}\right| \leq |c_n|$ pour $|a| \geq 1$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} (\cos(n\theta)) = 0$ et avec :*

$$\cos((n+1)\theta) = \cos(n\theta)\cos(\theta) - \sin(n\theta)\sin(\theta)$$

   on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} (\sin(n\theta)\sin(\theta)) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (\sin(n\theta)) = 0$ (puisque $\sin(\theta) \neq 0$) ce qui est faux.

6.3 Séries alternées

Définition 6.2 *On dit qu'une série est alternée si son terme général est de la forme $u_n = (-1)^n \alpha_n$, où $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle de signe constant.*

Si $\sum (-1)^n \alpha_n$ est une série alternée, on supposera, a priori, que les α_n sont positifs.
Le théorème relatif aux suites adjacentes nous permet de montrer le résultat fondamental suivant.

Théorème 6.6 *Soit $\sum (-1)^n \alpha_n$ est une série alternée. Si la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 en décroissant, alors la série $\sum (-1)^n \alpha_n$ est convergente et une majoration des restes est donnée par :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |R_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k \alpha_k\right| \leq \alpha_{n+1}.$$

Démonstration. On vérifie que si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite des sommes partielles de cette série, alors les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et en conséquence convergente vers la même limite, ce qui équivaut à la convergence de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
En utilisant la décroissance de la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on déduit que pour tout entier n, on a :

$$\begin{cases} S_{2n+2} - S_{2n} = \alpha_{2n+2} - \alpha_{2n+1} \leq 0, \\ S_{2n+3} - S_{2n+1} = a_{2n+2} - a_{2n+3} \geq 0, \end{cases}$$

ce qui signifie que $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ croissante. De plus avec :

$$S_{2n+1} - S_{2n} = \alpha_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} 0,$$

on déduit que ces suites sont convergentes et la convergence de la série $\sum (-1)^n \alpha_n$ en découle. En notant S la somme de cette séries, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n+2} \leq S_{2n},$$

ce qui entraîne :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left\{ \begin{array}{l} -\alpha_{2n+1} \leq R_{2n} = S - S_{2n} \leq 0, \\ 0 \leq R_{2n+1} = S - S_{2n+1} \leq \alpha_{2n+2} \end{array} \right.$$

ou encore :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |R_n| \leq \alpha_{n+1}.$$

■

Remarque 6.3 *Le fait que $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tende vers 0 en décroissant implique que les α_n sont tous positifs.*

On en déduit le résultat suivant sur les séries de Riemann alternée.

Exercice 6.12 *Soit α un réel. Montrer que la série de Riemann alternée $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est convergente si, et seulement si $\alpha > 0$.*

Solution 6.12 *Pour $\alpha \leq 0$ la série diverge puisque son terme général ne tend pas vers 0. Pour $\alpha > 0$, la suite $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n\geq 1}$ tend vers 0 en décroissant et le théorème des séries alternées nous dit que la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge.*

Exercice 6.13 *Étudier la série de terme général $u_n = \frac{n^3 \cos(n\pi)}{(n+1)^4}$.*

Solution 6.13 *Pour $n \geq 0$, on a $u_n = (-1)^n \frac{n^3}{(n+1)^4} = (-1)^n \alpha_n$ avec $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ qui tend vers 0 en décroissant ($0 \leq \alpha_n \leq \frac{1}{n}$ et $\alpha_n = f(n)$ avec $f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^4}$ et $f'(x) = \frac{x^2(3-4x)}{(x+1)^5} < 0$ pour $x \geq 1$). Le théorème des séries alternées nous dit alors que $\sum u_n$ converge.*

Exercice 6.14

1. *Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\,dx$$

   tend vers 0 en décroissant.

2. *Montrer que la série de terme général :*

$$u_n = (-1)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\,dx$$

   est convergente et calculer sa somme.

Solution 6.14

1. *Pour $n \geq 0$, on a :*

$$0 \leq I_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n (x) \cos (x)\, dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n (x)\, dx = I_n,$$

donc $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
Pour $n \geq 1$ et $\varepsilon \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a :

$$0 \leq I_n = \int_0^{\varepsilon} \cos^n (x)\, dx + \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n (x)\, dx \leq \varepsilon + \cos^n (\varepsilon).$$

Comme $0 < \cos^n(\varepsilon) < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos^n(\varepsilon) = 0$ et il existe un entier n_ε tel que $\cos^n(\varepsilon) < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$, ce qui donne $0 \leq I_n < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$. On a donc ainsi montré que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 (en fait, on peut montrer que $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$).

2. *Le théorème des séries alternées nous dit que cette série converge.*
Pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a :

$$S_n (x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cos^k (x) = \frac{1}{1+\cos(x)} + (-1)^n \frac{\cos^{n+1}(x)}{1+\cos(x)}$$

et :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos(x)} + (-1)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{n+1}(x)}{1+\cos(x)} dx,$$

avec :

$$0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{n+1}(x)}{1+\cos(x)} dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1}(x)\, dx = I_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} 0,$$

ce qui donne :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos(x)} = 2\int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} = 1$$

en effectuant le changement de variable $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

6.4 Séries absolument convergentes

Définition 6.3 *On dit que la série $\sum u_n$ est absolument convergente si la série $\sum |u_n|$ est convergente.*

Le critère de Cauchy pour les suites numériques nous permet de montrer qu'une série absolument convergente est convergente. Nous verrons au paragraphe suivant que l'étude des séries à termes positifs est plus simple que celle des séries réelles de signe quelconque ou que celle des séries complexes.

Remarque 6.4 *En réalité le critère de Cauchy pour les suites numériques est équivalent au fait qu'une série absolument convergente est convergente. Précisément, on peut montrer qu'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est complet si, et seulement si, toute série normalement convergente dans $(E, \|\cdot\|)$ est convergente.*

Théorème 6.7 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite numérique. Si la série* $\sum |u_n|$ *est convergente, alors la série* $\sum u_n$ *est convergente et :*

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

Démonstration. Soit $\sum u_n$ une série numérique absolument convergente.

La suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=0}^{n} |u_k|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ étant convergente, elle vérifie le critère de Cauchy et pour tout réel $\varepsilon > 0$, on peut trouver un entier n_0 tel que :

$$\forall m > n \geq n_0, \sum_{k=n+1}^{m} |u_k| < \varepsilon,$$

ce qui entraîne que :

$$\forall m > n \geq n_0, \left|\sum_{k=n+1}^{m} u_k\right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |u_k| < \varepsilon$$

et signifie que la suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy et en conséquence convergente, encore équivalent à dire que la série $\sum u_n$ est convergente.

En utilisant l'inégalité triangulaire, pour tout entier n :

$$\left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right| \leq \sum_{k=0}^{n} |u_k|$$

et faisant tendre n vers l'infini, on déduit que $\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$. ■

Avec l'exercice 6.20, on montre le résultat précédent sans utiliser le critère de Cauchy, en utilisant uniquement le fait qu'une suite réelle croissante majorée est convergente.

Définition 6.4 *Une série numérique convergente, mais non absolument convergente est dite semi-convergente.*

Exemple 6.2 *Pour* $0 < \alpha \leq 1$, *la série de Riemann alternée* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ *est semi convergente.*

Exemple 6.3 *Pour tout nombre complexe* $z = x + iy$ *tel que* $x = \Re(z) > 1$, *la série* $\sum \frac{1}{n^z}$ *est absolument convergente du fait que* $\left|\frac{1}{n^z}\right| = \frac{1}{n^x}$ *(on rappelle que* $n^z = e^{z\ln(n)}$*). La fonction* ζ *définie sur l'ensemble des nombres complexes de partie réelle strictement supérieur à* 1 *par :*

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z}$$

est la fonction dzéta de Riemann.

Si on effectue une permutation de l'ordre des termes d'une série semi-convergente il peut se produire les phénomènes suivant :

— la nature de cette série est inchangée, mais sa somme est modifiée ;

— la nature et la somme de cette série sont inchangées ;
— la série est transformée en série divergente.
Avec les exercices et le théorème qui suivent, on étudie ces phénomènes.

Exercice 6.15 *On s'intéresse à la série de Riemann alternée* $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$. *On sait que cette série est semi convergente de somme* $\ln(2)$ *(exercice 6.9).*
On désigne par σ *la permutation de* $\mathbb{N}$ *qui ordonne* $\mathbb{N}$ *comme suit :*

$$\sigma(\mathbb{N}) = \{0\} \cup \{1,3\} \cup \{2\} \cup \{5,7\} \cup \{4\} \cup \cdots \cup \{2k\} \cup \{4k+1, 4k+3\} \cup \cdots$$

Une telle permutation σ *peut être définie par :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sigma(n) = \begin{cases} 2k \text{ si } n = 3k \\ 4k + 2r - 1 \text{ si } n = 3k + r \text{ avec } r \in \{1,2\} \end{cases}$$

ou encore par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sigma(n) = \begin{cases} 2k \text{ si } n = 3k \\ 4k+1 \text{ si } n = 3k+1 \\ 4k+3 \text{ si } n = 3k+2 \end{cases}$$

1. *Vérifier que* σ *est bien permutation de* $\mathbb{N}$.
2. *En notant* $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$, *on désigne par* $\sum v_n$ *la série numérique de terme général* $v_n = u_{\sigma(n)}$.
   On se donne un entier $n \geq 3$ *et on écrit* $n = 3k + r$ *sa division euclidienne par* 3 *avec* $k \geq 1$ *et* $0 \leq r \leq 2$.
   (a) *Écrire la somme partielle* $S_n = \sum_{j=0}^{n} v_j$ *sous la forme* $S_n = T_k - \varepsilon_k$ *où* $T_k = S_{3k+2}$ *et* $\lim_{k \to +\infty} \varepsilon_k = 0$.
   (b) *Pour tout entier* $k \geq 1$, *on note* $H_k = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{i+1}$. *Montrer que :*
   $$T_k = \frac{1}{2}(H_{2k+2} - H_{k+1})$$
   (c) *En déduire que* $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \frac{1}{2}\ln(2)$.

Solution 6.15

1. *C'est la division euclidienne par* 3 *qui permet de définir* σ.
   Soient n, m *deux entiers naturels et* $n = 3k + r$, $m = 3k' + r'$ *les divisions euclidiennes de ces entiers par* 3. *Si* $\sigma(n) = \sigma(m)$, *les restes* r *et* r' *sont soit tous les deux nuls, soit tous les deux non nuls, sinon* $\sigma(n)$ *et* $\sigma(m)$ *sont deux entiers de parités différentes. En supposant qu'ils sont tous deux nuls, l'égalité* $\sigma(n) = \sigma(m)$ *se traduit par* $2k = 2k'$, *soit par* $k = k'$ *et* $n = m$.
   En supposant qu'ils sont tous deux non nuls, l'égalité $\sigma(n) = \sigma(m)$ *se traduit par* $4k + 2r - 1 = 4k' + 2r' - 1$ *soit par* $2k + r = 2k' + r'$ *avec* $1 \leq r, r' \leq 2$, *ce qui équivaut à* $r = r'$ *(argument de parité) et* $k = k'$, *ce qui donne* $n = m$.
   L'application σ *est donc injective.*
   Si m *est un entier pair, il s'écrit* $m = 2k = \sigma(n)$ *où* $n = 3k$.
   Si m *est un entier impair, il s'écrit* $m = 4k + 1$ *ou* $4k + 3$, *soit* $m = \sigma(n)$ *où* $n = 3k + 1$ *ou* $3k + 2$
   L'application σ *est donc surjective.*

2. Soit $n = 3k + r$ *un entier avec* $k \geq 1$ *et* $0 \leq r \leq 2$.

(a) *Pour* $r = 2$, *on a* $S_n = T_k$ *et* $\varepsilon_k = 0$, *pour* $r = 0$ *ou* 1, *on a :*

$$S_n = \sum_{j=0}^{3k+2} v_j - \sum_{j=3k+r+1}^{3k+2} v_j = T_k - \varepsilon_k$$

avec $T_k = S_{3k+2}$ *et :*

$$|\varepsilon_k| \leq |v_{3k+1}| + |v_{3k+2}| \leq \frac{1}{4k+1} + \frac{1}{4k+3} \underset{k\to+\infty}{\to} 0.$$

(b) *On a :*

$$\begin{aligned} T_k = \sum_{j=0}^{3k+2} u_{\sigma(j)} &= \sum_{i=0}^{k} u_{\sigma(3i)} + \sum_{i=0}^{k} u_{\sigma(3i+1)} + \sum_{i=0}^{k} u_{\sigma(3i+2)} \\ &= \sum_{i=0}^{k} u_{2i} + \sum_{i=0}^{k} u_{4i+1} + \sum_{i=0}^{k} u_{4i+3} \\ &= \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{2i+1} - \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{4i+2} - \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{4i+4} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{k} \frac{1}{2i+1} - \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{4i+4} \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{j=0}^{2k+1} \frac{1}{j+1} - \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{2i+2}\right) - \frac{1}{4}\sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i+1} \end{aligned}$$

soit :

$$T_k = \frac{1}{2}\left(\sum_{j=0}^{2k+1} \frac{1}{j+1} - \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i+1}\right) = \frac{1}{2}\left(H_{2k+2} - H_{k+1}\right)$$

(c) *On rappelle que* $\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right) = \gamma$ *(exercice 3.49), ce qui s'écrit* $H_n = \ln(n) + \delta_n$ *avec* $\lim_{n\to+\infty} \delta_n = \gamma$. *On en déduit alors que :*

$$T_k = \frac{1}{2}\left(H_{2k+2} - H_{k+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{2k+2}{k+1}\right) + \delta_{2k+2} - \delta_{k+1}\right)$$

et $\lim_{k\to+\infty} T_k = \frac{1}{2}\ln(2)$.
Les trois suites extraites $(S_{3k+r})_{k\geq1}$, *pour* $r = 0, 1, 2$ *convergent alors vers la même limite, ce qui revient à dire que* $(S_n)_{n\geq1}$ *converge vers cette limite, soit :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{\sigma(n)}}{\sigma(n)+1} = \frac{1}{2}\ln(2).$$

Exercice 6.16 *On s'intéresse encore à la série de Riemann alternée* $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$.
On se donne deux entiers naturels non nuls p *et* q *et on désigne par* σ *la permutation de* $\mathbb{N}$ *qui*

ordonne $\mathbb{N}$ *comme suit :*

$$\sigma(\mathbb{N}) = \{0, 2, \cdots, 2(p-1)\} \cup \{1, 3, \cdots, 2q-1\}$$
$$\cup \{2p, \cdots, 2(2p-1)\} \cup \{2q+1, \cdots, 4q-1\} \cup \cdots$$

c'est-à-dire qu'on place les p *premiers entiers pairs, puis les* q *premiers entiers impairs, puis les* p *entiers pairs suivants,* q *entiers impairs suivants, et ainsi de suite. En effectuant la division euclidienne par* $p+q$ *tout entier* n *s'écrit de manière unique* $n = (p+q)k + r$ *avec* $k \in \mathbb{N}$ *et* $0 \leq r \leq p+q-1$ *et une telle permutation* σ *peut être définie par :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sigma(n) = \begin{cases} 2(pk+r) & si\ 0 \leq r \leq p-1 \\ 2(qk+r-p)+1 & si\ p \leq r \leq p+q-1 \end{cases}$$

1. *Montrer que* σ *est bien permutation de* $\mathbb{N}$.
2. *En notant* $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$, *on désigne par* $\sum v_n$ *la série numérique de terme général* $v_n = u_{\sigma(n)}$.
   On se donne un entier $n \geq p+q$ *et on écrit* $n = (p+q)k + r$ *sa division euclidienne par* $p+q$ *avec* $k \geq 1$ *et* $0 \leq r \leq p+q-1$.
   (a) *Écrire la somme partielle* $S_n = \sum\limits_{j=0}^{n} v_j$ *sous la forme* $S_n = T_k - \varepsilon_k$ *où* $T_k = S_{(p+q)k+p+q-1}$ *et* $\lim\limits_{k\to+\infty} \varepsilon_k = 0$.
   (b) *Pour tout entier* $k \geq 1$, *on note* $H_k = \sum\limits_{i=0}^{k-1} \dfrac{1}{i+1}$. *Montrer que :*
   $$T_k = T_k = H_{2p(k+1)} - \frac{1}{2}\left(H_{p(k+1)} + H_{q(k+1)}\right).$$
   (c) *En déduire que* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \ln(2) + \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{p}{q}\right)$.

Solution 6.16

1. *Soient* n, m *deux entiers naturels et* $n = (p+q)k + r$, $m = (p+q)k' + r'$ *les divisions euclidiennes de ces entiers par* $p+q$. *Si* $\sigma(n) = \sigma(m)$, *les restes* r *et* r' *sont tous deux dans* $\{0, 1, \cdots, p-1\}$ *ou* $\{p, \cdots, p+q-1\}$, *sinon* $\sigma(n)$ *et* $\sigma(m)$ *sont deux entiers de parités différente. En supposant qu'ils sont tous deux dans* $\{0, 1, \cdots, p-1\}$ *[resp. dans* $\{p, \cdots, p+q-1\}$*] l'égalité* $\sigma(n) = \sigma(m)$ *se traduit par* $2(pk+r) = 2(pk'+r')$ *[resp. par* $2(qk+r-p)+1 = 2(qk'+r'-p)+1$*] soit par* $pk+r = pk'+r'$ *[resp. par* $qk+r-p = qk'+r'-p$*] avec* $0 \leq r, r' \leq p-1$ *[resp.* $0 \leq r-p, r'-p \leq q-1$*] ce qui équivaut à* $k = k'$ *et* $r = r'$ *du fait de l'unicité du quotient et du reste dans la division euclidienne par* p *[resp. par* q*]. On a donc* $n = m$ *et* σ *est injective.*
   Si m *est un entier pair, il s'écrit* $m = 2s = 2(pk+r)$ *avec* $0 \leq r \leq p-1$ *en effectuant la division euclidienne de* s *par* p, *soit* $m = \sigma(n)$ *où* $n = (p+q)k + r$.
   Si m *est un entier impair, il s'écrit* $m = 2s+1 = 2(qk+r')+1$ *avec* $0 \leq r' \leq q-1$ *en effectuant la division euclidienne de* s *par* q, *soit* $m = \sigma(n)$ *où* $n = (p+q)k + p + r'$.
   L'application σ *est donc surjective.*
2. *Soit* $n = (p+q)k + r$ *un entier avec* $k \geq 1$ *et* $0 \leq r \leq p+q-1$ *(division euclidienne).*

(a) *Pour* $r = p + q - 1$, *on a* $S_n = T_k$ *et* $\varepsilon_k = 0$, *pour* $0 \leq r \leq p + q - 2$, *on a :*

$$S_n = \sum_{j=0}^{(p+q)k+p+q-1} v_j - \sum_{j=(p+q)k+r+1}^{(p+q)k+p+q-1} v_j = T_k - \varepsilon_k$$

avec $T_k = S_{(p+q)k+p+q-1}$ *et :*

$$\begin{aligned} |\varepsilon_k| &\leq \left|v_{(p+q)k+1}\right| + \cdots + \left|v_{(p+q)k+p+q-1}\right| \\ &\leq (p + q - 1) \frac{1}{k} \underset{k \to +\infty}{\to} 0. \end{aligned}$$

(b) *On a :*

$$\begin{aligned} T_k &= \sum_{j=0}^{(p+q)k+p+q-1} u_{\sigma(j)} = \sum_{r=0}^{p+q-1} \sum_{i=0}^{k} u_{\sigma((p+q)i+r)} \\ &= \sum_{r=0}^{p-1} \sum_{i=0}^{k} u_{2(pi+r)} + \sum_{r=p}^{p+q-1} \sum_{i=0}^{k} u_{2(qi+r-p)+1} \\ &= \sum_{r=0}^{p-1} \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{2(pi+r)+1} - \sum_{r=p}^{p+q-1} \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{2(qi+r-p)+2} \\ &= \sum_{r=0}^{p-1} \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{2(pi+r)+1} - \frac{1}{2} \sum_{s=0}^{q-1} \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{qi+s+1} \end{aligned}$$

En utilisant la division euclidienne par q, *on a :*

$$\{qi + s + 1 \mid 0 \leq i \leq k \text{ et } 0 \leq s \leq q - 1\} = \{1, 2, \cdots, qk + q\}$$

et :

$$\sum_{s=0}^{q-1} \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{qi+s+1} = \sum_{j=1}^{q(k+1)} \frac{1}{j} = H_{q(k+1)}$$

En remarquant que les entiers de la forme $2(pi + r) + 1$ *où* $0 \leq i \leq k$ *et* $0 \leq s \leq p - 1$ *sont les entiers impairs compris entre* 1 *et* $2pk + 2p - 1$ *(division euclidienne par* $2p$*), on a :*

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{p-1} \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{2(pi+r)+1} &= \sum_{s=0}^{2p-1} \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{2pi+s+1} - \sum_{r=0}^{p-1} \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{2pi+2r+2} \\ &= \sum_{s=0}^{2p-1} \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{2pi+s+1} - \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{p-1} \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{pi+r+1} \\ &= \sum_{j=1}^{2p(k+1)} \frac{1}{j} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{p(k+1)} \frac{1}{j} = H_{2p(k+1)} - \frac{1}{2} H_{p(k+1)} \end{aligned}$$

On a donc :

$$T_k = H_{2p(k+1)} - \frac{1}{2} \left(H_{p(k+1)} + H_{q(k+1)}\right).$$

(c) On utilisant $H_n = \ln(n) + \delta_n$ *avec* $\lim\limits_{n\to+\infty} \delta_n = \gamma$, *on a :*

$$\begin{aligned} T_k &= H_{2p(k+1)} - \frac{1}{2}\left(H_{p(k+1)} + H_{q(k+1)}\right) \\ &= \ln\left(2\sqrt{\frac{p}{q}}\right) + \delta_{2p(k+1)} - \frac{1}{2}\left(\delta_{p(k+1)} + \delta_{q(k+1)}\right) \end{aligned}$$

et $\lim\limits_{k\to+\infty} T_k = \ln(2) + \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{p}{q}\right)$.

Toutes les suites extraites $\left(S_{(p+q)k+r}\right)_{k\geq 1}$, *pour* $0 \leq r \leq p+q-1$ *convergent alors vers la même limite, ce qui revient à dire que* $(S_n)_{n\geq 1}$ *converge vers cette limite, soit :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{\sigma(n)}}{\sigma(n)+1} = \ln(2) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{p}{q}\right).$$

Exercice 6.17 *Soit* σ *une permutation de* $\mathbb{N}$ *telle que la suite* $(\sigma(n) - n)_{n\in\mathbb{N}}$ *soit bornée. Montrer que pour toute série convergente* $\sum u_n$, *la série* $\sum u_{\sigma(n)}$ *est convergente et* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Solution 6.17 *Si la suite* $(\sigma(n) - n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée, il existe un entier* N *tel que* $|\sigma(n) - n| \leq N$, *ou encore* $n - N \leq \sigma(n) \leq n + N$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
Comme σ *est bijective, pour* $n \in \mathbb{N}$ *et* $0 \leq k \leq n$ *il existe un entier* j *tel que* $k = \sigma(j)$ *et avec* $j - N \leq \sigma(j) = k \leq j + N$, *on déduit que cet entier* j *est compris entre* 0 *et* $k + N$. *Il en résulte que la somme partielle* $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ *est une partie de la somme* $\sum\limits_{j=0}^{n+N} u_{\sigma(j)}$ *et :*

$$\sum_{j=0}^{n+N} u_{\sigma(j)} - \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{\substack{j=0 \\ \sigma(j)\geq n+1}}^{n+N} u_{\sigma(j)}$$

De plus avec $\sigma(j) \leq j + N \leq n + 2N$, *on déduit que :*

$$\{\sigma(j) \mid 0 \leq j \leq n + N \text{ et } \sigma(j) \geq n+1\} \subset \{n+1, \cdots, n+2N\}$$

et :

$$\left|\sum_{j=0}^{n+N} u_{\sigma(j)} - \sum_{k=0}^{n} u_k\right| \leq \sum_{\substack{j=0 \\ \sigma(j)\geq n+1}}^{n+N} \left|u_{\sigma(j)}\right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+2N} |u_k| = \varepsilon_n$$

Comme chacune des suites $(|u_{n+r}|)_{n\in\mathbb{N}}$ *pour* r *compris entre* 1 *et* $2N$ *tend vers* 0, *la suite* $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend aussi vers* 0 *(somme finie de suites qui tendent vers* 0*). Il en résulte que* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{j=0}^{n+N} u_{\sigma(j)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$, *ce qui signifie que la série* $\sum u_{\sigma(n)}$ *est convergente avec* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Théorème 6.8 *Soit* $\sum u_n$ *une série semi-convergente. Pour tout réel* S, *il existe une permutation* σ *de* $\mathbb{N}$ *telle que la série* $\sum u_{\sigma(n)}$ *soit convergente de somme* S.
On peut aussi trouver des permutation σ *et* σ' *de* $\mathbb{N}$ *telles que la série* $\sum u_{\sigma(n)}$ *soit divergente vers* $-\infty$ *et la série* $\sum u_{\sigma(n)}$ *soit divergente vers* $+\infty$.

Démonstration. Voir [8] pages 72 à 75 ou [19] volume 3, pages 37 à 43.
La démonstration rigoureuse de ce théorème est délicate. ∎

6.5 Séries à termes positifs

Dans le cas où la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et à valeurs positives, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles associées est croissante (on a $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0$) et deux cas de figure peuvent se produire :

— soit la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée et en conséquence elle converge ;

— soit cette suite n'est pas majorée et $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$, ce qui peut se noter $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$.

On a donc le résultat suivant.

Théorème 6.9 *Une série à termes positifs $\sum u_n$ est convergente si, et seulement si, la suite de ses sommes partielles est majorée. En cas de divergence, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.*

Dans le cas des séries à termes positifs, on écrira $\sum u_n < +\infty$ pour signifier que cette dernière converge. Cette notation étant justifiée par les considérations précédentes.

Du résultat précédent on déduit les critères de comparaisons suivants valables uniquement pour les séries à termes réels positifs.

Théorème 6.10 *Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes réels positifs.*

1. *S'il existe un entier n_0 tel que :*

$$\forall n \geq n_0,\ u_n \leq v_n$$

alors :

$$\begin{cases} \sum v_n < +\infty \Rightarrow \sum u_n < +\infty \\ \sum u_n = +\infty \Rightarrow \sum v_n = +\infty \end{cases}$$

2. *S'il existe un entier n_0 et des constantes m et M strictement positives tels que :*

$$\forall n \geq n_0,\ v_n > 0 \text{ et } m \leq \frac{u_n}{v_n} \leq M$$

alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

3. *S'il existe un entier n_0 tel que :*

$$\forall n \geq n_0,\ u_n > 0,\ v_n > 0 \text{ et } \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

alors :

$$\begin{cases} \sum v_n < +\infty \Rightarrow \sum u_n < +\infty \\ \sum u_n = +\infty \Rightarrow \sum v_n = +\infty \end{cases}$$

4. *S'il existe un entier n_0 et une constante $\lambda \in]0,1[$ tels que :*

$$\forall n \geq n_0,\ u_n > 0 \text{ et } \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \lambda$$

alors $\sum u_n$ converge.

5. *S'il existe un entier n_0 et une constante $\lambda \geq 1$ tels que :*

$$\forall n \geq n_0,\ u_n > 0 \text{ et } \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \lambda$$

alors $\sum u_n$ diverge.

Démonstration.

1. En notant respectivement $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites des sommes partielles des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$, on a :
$$\forall n \geq n_0,\ S_n - S_{n_0} \leq T_n - T_{n_0}.$$
Le résultat annoncé en découle alors immédiatement.
2. De $0 < u_n \leq M v_n$ on déduit que si $\sum v_n$ converge il en est alors de même de $\sum u_n$ et de $u_n \geq m v_n > 0$, on déduit que si $\sum v_n$ diverge il en est alors de même de $\sum u_n$.
3. On a :
$$u_{n_0+1} \leq u_{n_0} \frac{v_{n_0+1}}{v_{n_0}} = \lambda v_{n_0+1}$$
et par récurrence :
$$\forall n \geq n_0 + 1,\ u_n \leq \lambda v_n.$$
En effet, c'est vrai pour $n_0 + 1$ et en supposant le résultat acquis au rang n :
$$u_{n+1} \leq u_n \frac{v_{n+1}}{v_n} \leq \lambda v_{n+1}.$$
On est donc ramené au premier cas.
4. On a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ pour $n \geq n_0$ avec $v_n = \lambda^n$ et $\sum v_n$ puisque $\lambda \in \left]0,1\right[$, donc $\sum u_n$ converge aussi.
5. On peut là aussi utiliser $v_n = \lambda^n$ ou tout simplement remarque la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est croissante, donc $u_n \geq u_{n_0} > 0$ pour tout $n \geq n_0$ et $(u_n)_{n\geq n_0}$ ne peut tendre vers 0, la série $\sum u_n$ est donc divergente.

■

Remarque 6.5 *Si $0 \leq u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $\sum v_n$ converge, alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n$. Plus généralement, on a pour les restes $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leq R'_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} v_k$.*

Exercice 6.18 *Montrer que la série $\sum \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$ est divergente. En déduire la divergence de la série harmonique.*

Solution 6.18 *Pour $n \geq 1$, on a :*
$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) &= \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k)) \\ &= \ln(n+1) \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty \end{aligned}$$
donc $\sum \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$ diverge.
Avec les inégalités valables pour $n \geq 1$:
$$\frac{1}{n} \geq \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) > 0,$$
on en déduit la divergence de $\sum \dfrac{1}{n}$.

Exercice 6.19 *Montrer que si les séries à termes positifs $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes, il en est alors de même des séries $\sum \sqrt{u_n v_n}$ et $\sum \frac{1}{n}\sqrt{v_n}$.*

Solution 6.19 *Résulte de :*

$$\sqrt{u_n v_n} \leq \frac{1}{2}(u_n + v_n)$$

et $\sum \frac{1}{n}\sqrt{v_n} = \sum \sqrt{\frac{1}{n^2} v_n}$ avec $\sum \frac{1}{n^2}$ convergente.

Le théorème précédent permet de retrouver le fait qu'une série absolument convergente est convergente sans recours au critère de Cauchy.

Exercice 6.20 *Montrer, sans utiliser le critère de Cauchy, qu'une série absolument convergente est convergente.*

Solution 6.20 *On considère tout d'abord le cas d'une série réelle $\sum u_n$ absolument convergente. Pour tout entier n, on a $-|u_n| \leq u_n \leq |u_n|$, soit $0 \leq v_n = u_n + |u_n| \leq 2|u_n|$. On déduit alors du théorème précédent que la série $\sum v_n$ est convergente et avec $u_n = v_n - |u_n|$, on en déduit que $\sum u_n$ est convergente.*
Dans le cas d'une série complexe $\sum u_n$ absolument convergente, on écrit que $u_n = x_n + iy_n$, où $x_n = \Re(u_n)$ et $y_n = \Im(u_n)$ et avec $|x_n| \leq |u_n|$, $|y_n| \leq |u_n|$, on déduit que les séries réelles $\sum x_n$ et $\sum y_n$ sont absolument convergentes, donc convergentes et la convergence de $\sum u_n$ suit.

De ce corollaire, on déduit les critères de comparaison aux séries de Riemann suivant.

Corollaire 6.1 *Soit $\sum u_n$ une série à termes réels positifs.*

1. *S'il existe un réel $\alpha > 1$ tel que la suite $(n^\alpha u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée (encore équivalent à dire que $u_n = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$), alors la série $\sum u_n$ converge.*
2. *S'il existe un réel $\alpha \leq 1$ tel que la suite $\lim\limits_{n\to+\infty} (n^\alpha u_n) = +\infty$, alors la série $\sum u_n$ diverge.*

Démonstration. Dans le premier cas, on a $0 \leq u_n \leq \frac{M}{n^\alpha}$ avec $\alpha > 1$ et dans le second $u_n \geq \frac{1}{n^\alpha}$ à partir d'un certain rang avec $\alpha \leq 1$. ∎

Remarque 6.6 *Si on veut comparer la série à termes positifs à une série de Riemann, on étudie en pratique la convergence de la suite $(n^\alpha u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers un réel positif ou vers l'infini.*

Exercice 6.21 *Montrer que pour tout réel θ et tout réel $\alpha > 1$, la série $\sum \frac{\cos(n\theta)}{n^\alpha}$ est absolument convergente.*

Solution 6.21 *Résulte de $\left|\frac{\cos(n\theta)}{n^\alpha}\right| \leq \frac{1}{n^\alpha}$.*

Exercice 6.22 *Étudier la série de terme général $u_n = \frac{n^2\cos(n^2)}{(n+1)^4}$.*

Solution 6.22 *On a :*

$$\forall n \geq 1,\ |u_n| \leq \frac{1}{n^2},$$

donc la série converge absolument.

Exercice 6.23

1. *Montrer que* $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{n(n-1)} = 1.$
2. *En comparant* $\dfrac{1}{n^2}$ *et* $\dfrac{1}{n(n-1)}$*, en déduire la convergence de la série* $\sum \dfrac{1}{n^2}$ *avec* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} \leq 2.$

Solution 6.23

1. *Pour* $n \geq 2$*, on a :*

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$$
$$= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n} \underset{n \to +\infty}{\to} 1,$$

ce qui signifie que $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{n(n-1)} = 1.$

2. *Avec* $0 < \dfrac{1}{n^2} \leq \dfrac{1}{n(n-1)}$ *pour tout* $n \geq 2$*, on déduit la série* $\sum \dfrac{1}{n^2}$ *est convergente et* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 1 + \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} \leq 2.$

Exercice 6.24 *On étudie à nouveau les séries de Riemann* $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}.$

1. *Montrer que* $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ *diverge pour* $\alpha \leq 0.$
2. *Montrer que* $\sum \dfrac{1}{n}$ *diverge.*
3. *En déduire que la série* $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ *diverge pour* $0 < \alpha \leq 1.$
4. *On suppose que* $\alpha > 1.$
   (a) *Montrer que* $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \left(\dfrac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \dfrac{1}{n^{\alpha-1}} \right) = 1.$
   (b) *Montrer que pour tout réel* $\beta > 0$ *et tout réel* $t \in \left]0, 1\right[$*, on a :*

$$(1-t)^\beta \leq \frac{1}{1+\beta t}.$$

   (c) *Montrer que pour tout entier* $n \geq 2$*, on a :*

$$\frac{\alpha-1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

(d) *Conclure.*

Solution 6.24

1. *Pour* $\alpha \leq 0$, *le terme général de la série* $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ *ne tend pas vers* 0, *donc la série diverge.*
2. *En désignant par* S_n *la somme partielle d'indice* n *de la série* $\sum \frac{1}{n}$, *on a pour tout* $n \geq 1$:

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \geq n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

donc la suite $(S_{2n} - S_n)_{n\geq 1}$ *ne tend pas vers* 0 *et la série diverge.*

3. *Pour* $0 < \alpha \leq 1$ *et* $n \geq 1$, *on a* $0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^\alpha}$ *et en conséquence* $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ *diverge.*
4.
(a) *Pour* $n \geq 2$, *on a :*

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{(k-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{k^{\alpha-1}}\right) &= \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(k-1)^{\alpha-1}} - \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^{\alpha-1}} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^{\alpha-1}} - \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^{\alpha-1}} = 1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}} \underset{n\to+\infty}{\to} 1,\end{aligned}$$

ce qui signifie que $\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right) = 1.$

(b) *On désigne par* f *la fonction définie sur* $]0,1[$ *par* $f(t) = (1+\beta t)(1-t)^\beta$. *Cette fonction est dérivable sur* $[0,1]$ *avec :*

$$\begin{aligned}f'(t) &= \beta(1-t)^{\beta-1}((1-t) - (1+\beta t)) \\ &= -\beta(1-t)^{\beta-1}(t+\beta t) < 0\end{aligned}$$

Elle est donc décroissante et $f(t) \leq f(0) = 1$, *ce qui donne l'inégalité souhaitée.*

(c) *Prenant* $\beta = \alpha - 1$ *et* $t = \frac{1}{n}$ *dans l'inégalité précédente, on a :*

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\alpha-1} \leq \frac{1}{1 + \frac{\alpha-1}{n}}$$

ou encore :

$$1 + \frac{\alpha-1}{n} \leq \frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\alpha-1}} = \frac{n^{\alpha-1}}{(n-1)^{\alpha-1}}$$

encore équivalent à :

$$\frac{\alpha-1}{n} \leq \frac{n^{\alpha-1}}{(n-1)^{\alpha-1}} - 1 = n^{\alpha-1}\left(\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right)$$

qui donne l'inégalité souhaitée.

(d) *On a donc*

$$0 < \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha - 1} \left(\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}} \right)$$

avec $\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}} \right) < +\infty$, *ce qui entraîne la convergence de* $\sum \frac{1}{n^\alpha}$.

L'étude des séries de Bertrand $\frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}$, décrites avec l'exercice qui suit, peut se faire en utilisant celles de Riemann pour $\alpha \neq 1$. Dans le cas où $\alpha = 1$, on utilise le théorème 6.4 pour $\beta \geq 0$ et on compare encore à une série de Riemann pour $\beta < 0$.

Exercice 6.25 *On s'intéresse à la série de Bertrand de terme général* $u_n = \frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}$, *où* α *et* β *sont deux réels donnés.*

1. *Montrer que cette série converge pour* $\alpha > 1$ *et* $\beta \in \mathbb{R}$.
2. *Montrer que cette série diverge pour* $\alpha < 1$ *et* $\beta \in \mathbb{R}$.
3. *On suppose que* $\alpha = 1$. *Montrer que* $\sum u_n$ *converge si, et seulement si,* $\beta > 1$.

Solution 6.25

1. *Si* $\alpha > 1$, *on peut trouver un réel* γ *tel que* $1 < \gamma < \alpha$ *et avec :*

$$\lim_{n\to+\infty} n^\gamma u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{\alpha-\gamma} (\ln(n))^\beta} = 0$$

pour tout réel β, *on déduit que* $\sum u_n$ *converge puisque* $\gamma > 1$.

2. *Si* $\alpha < 1$, *on peut trouver un réel* γ *tel que* $\alpha < \gamma < 1$ *et avec :*

$$\lim_{n\to+\infty} n^\gamma u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{\gamma-\alpha}}{(\ln(n))^\beta} = +\infty$$

pour tout réel β, *on déduit que* $\sum u_n$ *diverge puisque* $\gamma < 1$.

3. *Pour* $\beta \geq 0$, *la fonction* f *définie sur*$[2, +\infty[$ *par* $f(x) = \frac{1}{x(\ln(x))^\beta}$ *est continue et strictement décroissante (produit de deux fonctions strictement décroissantes à valeurs strictement positives), donc* $\sum u_n$ *est de même nature que la suite* $(F(n))_{n\geq 2}$, *où* F *est la primitive de* f *nulle en* 2, *soit :*

$$F(x) = \int_2^x \frac{dt}{t(\ln(t))^\beta} = \int_{\ln(2)}^{\ln(x)} \frac{du}{u^\beta}$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{1-\beta} \left((\ln(x))^{1-\beta} - (\ln(2))^{1-\beta} \right) & si\ \beta \neq 1 \\ \ln(\ln(x)) - \ln(\ln(2)) & si\ \beta = 1 \end{cases}$$

(théorème 6.4).
Pour $0 \leq \beta \leq 1$, *on a* $\lim_{n\to+\infty} F(n) = +\infty$ *et* $\sum u_n$ *diverge.*
Pour $\beta > 1$, *on a* $\lim_{n\to+\infty} F(n) = \frac{(\ln(2))^{1-\beta}}{\beta - 1}$ *et* $\sum u_n$ *converge.*
Pour $\beta < 0$, *on a* $u_n = \frac{(\ln(n))^{-\beta}}{n} \geq \frac{(\ln(2))^{-\beta}}{n} > 0$ *pour tout* $n \geq 2$ *et* $\sum u_n$ *diverge.*

Exercice 6.26 *Étudier la série* $\sum (-1)^n \dfrac{\arctan(n)}{\sqrt{n}(\ln(n))^\beta}$*, où* β *est un réel positif ou nul.*

Solution 6.26 *En utilisant la relation* $\arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ *valable pour tout réel* $x > 0$*, on a :*

$$u_n = (-1)^n \frac{\arctan(n)}{\sqrt{n}(\ln(n))^\beta} = \frac{\pi}{2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}(\ln(n))^\beta} + (-1)^n \frac{\arctan\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n}(\ln(n))^\beta}.$$

Le théorème des séries alternées nous assure la convergence de la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}(\ln(n))^\beta}$ *(la suite* $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}(\ln(n))^\beta}\right)_{n\geq 2}$ *tend vers* 0 *en décroisant pour* $\beta \geq 0$*) et avec :*

$$\left|(-1)^n \frac{\arctan\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n}(\ln(n))^\beta}\right| \backsim \frac{1}{n\sqrt{n}(\ln(n))^\beta}$$

on déduit que la série $\sum (-1)^n \dfrac{\arctan\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n}}$ *est absolument convergente, donc convergente. Il en résulte que* $\sum (-1)^n \dfrac{\arctan(n)}{\sqrt{n}(\ln(n))^\beta}$ *est convergente comme somme de deux séries convergentes. Mais la série* $\sum |u_n| = \sum \dfrac{\arctan(n)}{\sqrt{n}(\ln(n))^\beta}$ *est divergente, donc* $\sum u_n$ *est semi-convergente.*

Exercice 6.27 *Soient* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *des séries à termes positifs telles que* $v_n = o(u_n)$ *[resp.* $v_n = O(u_n)$*] On désigne respectivement par* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *les suites des sommes partielles de ces séries et, en cas de convergence, par* $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(R'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *les suites des restes correspondants.*

1. *Montrer que si* $\sum u_n$ *converge, il en est alors de même de* $\sum v_n$ *et* $R'_n = o(R_n)$ *[resp.* $R'_n = O(R_n)$*].*
2. *Montrer que si* $\sum v_n$ *diverge, il en est alors de même de* $\sum u_n$ *et* $T_n = o(S_n)$ *[resp.* $T_n = O(S_n)$*].*

Solution 6.27 *La condition* $v_n = o(u_n)$ *[resp.* $v_n = O(u_n)$*] signifie qu'il existe une suite* $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *qui tend vers* 0 *[resp. bornée] telle que* $v_n = \varepsilon_n u_n$*. Comme les suites* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont à valeurs positives, on peut trouver une telle suite* $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *à valeurs positives. Dans les deux cas de figure, la suite* $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée et il existe un constante réelle* $\lambda > 0$ *telle que* $v_n \leq \lambda u_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*. Le corollaire précédent nous dit alors que* $\sum v_n$ *converge si* $\sum u_n$ *converge et* $\sum u_n$ *diverge si* $\sum v_n$ *diverge.*

1. *Si les* u_n *sont tous nuls à partir d'un rang* n_0*, il en est alors de même des* v_n *et* $R'_n = R_n = 0$ *pour tout* $n \geq n_0$*. Dans ce cas, on a bien* $R'_n = o(R_n)$ *[resp.* $R'_n = O(R_n)$*].*
   Dans le cas contraire, les suites $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(R'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont à valeurs strictement positives. Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$*, pour tout réel* $\varepsilon > 0$*, on peut trouver un entier* n_ε *tel que* $0 \leq \varepsilon_n \leq \varepsilon$ *pour tout* $n \geq n_\varepsilon$ *et :*
   $$\forall n \geq n_\varepsilon,\ 0 < R'_n \leq \varepsilon R_n.$$

On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{R'_n}{R_n}=0$, *ce qui signifie que* $R'_n=o(R_n)$.
Dans le as où $v_n=O(u_n)$, *la suite* $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée, soit* $\varepsilon_n\leq\lambda$ *où* $\lambda>0$ *et* $0<R'_n\leq\lambda R_n$ *pour tout* n. *La suite* $\left(\dfrac{R'_n}{R_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est donc bornée, ce qui signifie que* $R'_n=O(R_n)$.

2. *Si* $\sum v_n=+\infty$, *on a alors* $\sum u_n=+\infty$ *et les suites* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont croissantes non majorées, donc strictement positives à partir d'un certain rang.*
Si $\lim\limits_{n\to+\infty}\varepsilon_n=0$, *pour tout réel* $\varepsilon>0$, *on peut trouver un entier* n_ε *tel que* $0<\varepsilon_n\leq\varepsilon$ *pour tout* $n\geq n_\varepsilon$ *et comme* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante non majorée, il existe un entier* $n_1\geq n_\varepsilon$ *tel que* $S_n\geq\dfrac{1}{\varepsilon}\sum\limits_{k=0}^{n_\varepsilon}v_k$, *de sorte que :*
$$\forall n\geq n_1,\ T_n=\sum_{k=0}^{n_\varepsilon}v_k+\sum_{k=n_\varepsilon+1}^{n}v_k\leq\varepsilon S_n+\varepsilon\sum_{k=n_\varepsilon+1}^{n}u_k\leq 2\varepsilon S_n.$$
On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{T_n}{S_n}=0$, *ce qui signifie que* $T_n=o(S_n)$.
Dans le as où $v_n=O(u_n)$, *la suite* $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée, soit* $\varepsilon_n\leq\lambda$ *où* $\lambda>0$ *et* $0<T_n\leq\lambda S_n$ *pour tout* n. *La suite* $\left(\dfrac{T_n}{S_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est donc bornée, ce qui signifie que* $T_n=O(S_n)$.

Les résultats de l'exercice précédent peuvent être utilisés en relation avec des développements limités.

Exercice 6.28 *Étudier la série de terme général* $u_n=\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right)$.

Solution 6.28 *Un développement limité à l'ordre* 2 *donne :*
$$u_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}-\frac{1}{2(n+1)}+\frac{(-1)^n}{3(n+1)^{3/2}}+v_n,$$
où $v_n=o\left(\dfrac{1}{(n+1)^{3/2}}\right)$, *ce qui entraîne* $\sum\limits_{0}^{+\infty}u_n=-\infty$ *du fait de la convergence des séries* $\sum\limits_{0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$, $\sum\limits_{0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{(n+1)^{3/2}}$ *(séries alternées, la deuxième étant en fait absolument convergente),* $\sum\limits_{0}^{+\infty}v_n$ *(*$v_n=o\left(\dfrac{1}{(n+1)^{3/2}}\right)$*) et de* $\sum\limits_{0}^{+\infty}\dfrac{1}{2(n+1)}=+\infty$.

Exercice 6.29 *Étudier la série de terme général* $u_n=\left(\cos\left(\dfrac{1}{n^\beta}\right)\right)^{n^\alpha}$ *où* α,β *sont des réels avec* $\beta>0$.

Solution 6.29 *Un développement limité nous donne :*
$$\begin{aligned}\ln(u_n)&=n^\alpha\ln\left(\cos\left(\frac{1}{n^\beta}\right)\right)\\&=n^\alpha\ln\left(1-\frac{1}{2n^{2\beta}}+o\left(\frac{1}{n^{2\beta}}\right)\right)\\&=-\frac{1}{2n^{2\beta-\alpha}}+o\left(\frac{1}{n^{2\beta-\gamma}}\right).\end{aligned}$$

Pour $\alpha < 2\beta$*, on a* $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln(u_n) = 0$*, donc* $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$ *et la série diverge.*
Pour $\alpha = 2\beta$*, on a* $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln(u_n) = -\dfrac{1}{2}$*, donc* $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$ *et la série diverge.*
On suppose donc que $\alpha > 2\beta$*. Pour* γ *réel à préciser, on a :*

$$\begin{aligned} \ln(n^\gamma u_n) &= \gamma \ln(n) - \frac{1}{2n^{2\beta-\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\beta-\alpha}}\right) \\ &= -\frac{n^{\alpha-2\beta}}{2}\left(1 - 2\gamma \frac{\ln(n)}{n^{\alpha-2\beta}} + o(1)\right) \\ &\backsim -\frac{n^{\alpha-2\beta}}{2} \underset{n \to +\infty}{\to} -\infty \end{aligned}$$

et $\lim\limits_{n \to +\infty} (n^\gamma u_n) = 0$*. Choisissant* $\gamma = 2$*, on en déduit que la série* $\sum u_n$ *converge.*

Le théorème qui suit est très utile pour justifier la convergence de certaines séries positives.

Théorème 6.11 *Soient* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries à termes réels positifs telles que* $u_n \backsim v_n$*.*

1. *Si* $\sum u_n$ *est convergente il en est alors de même de* $\sum v_n$ *et les restes de ces séries sont équivalents, soit :*

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \backsim R'_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k.$$

2. *Si* $\sum u_n$ *est divergente il en est alors de même de* $\sum v_n$ *et les sommes partielles de ces séries sont équivalents, soit :*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \backsim T_n = \sum_{k=0}^{n} v_k.$$

Démonstration. Dire que les suites à termes positifs $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont équivalentes signifie qu'il existe une suite $(\varphi)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers 1 telle que $v_n = \varphi_n u_n$, ce qui équivaut encore à dire que pour tout réel $\varepsilon \in]0,1[$ il existe un entier n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0,\ (1-\varepsilon) u_n \leq v_n \leq (1+\varepsilon) u_n.$$

Dans ce qui suit on se donne un tel couple (ε, n_0).

1. Si la série de terme général u_n est convergente, des inégalités $0 \leq v_n \leq (1+\varepsilon) u_n$ pour tout $n \geq n_0$, on déduit qu'il en est de même de la série de terme général v_n. On peut donc définir les restes d'ordre n de ces séries, $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ et $R'_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} v_k$ et on a :

$$\forall n \geq n_0,\ (1-\varepsilon) R_n \leq R'_n \leq (1+\varepsilon) R_n,$$

   ce qui traduit l'équivalence de R_n et R'_n quand n tend vers l'infini.

2. Si la série de terme général u_n est divergente, des inégalités $v_n \geq (1-\varepsilon) u_n$ pour tout $n \geq n_0$ avec $1 - \varepsilon > 0$ et $u_n \geq 0$, on déduit qu'il en est de même de la série de terme général v_n. De plus, on a $S_n > 0$ à partir d'un certain rang $n_1 > n_0$ et :

$$\forall n > n_1,\ (1-\varepsilon)(S_n - S_{n_0-1}) \leq T_n - T_{n_0-1} \leq (1+\varepsilon)(S_n - S_{n_0-1})$$

ce qui entraîne que, pour tout $n > n_1$, on a :

$$(1-\varepsilon)\left(1-\frac{S_{n_0-1}}{S_n}\right)+\frac{T_{n_0-1}}{S_n} \leq \frac{T_n}{S_n} \leq (1+\varepsilon)\left(1-\frac{S_{n_0-1}}{S_n}\right)+\frac{T_{n_0-1}}{S_n}.$$

Avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{S_n} = 0$, on en déduit alors qu'il existe $n_2 \geq n_1$ tel que :

$$\forall n \geq n_0,\ 1-2\varepsilon \leq \frac{T_n}{S_n} \leq 1+2\varepsilon,$$

ce qui traduit l'équivalence de S_n et T_n quand n tend vers l'infini.

■

Remarque 6.7 *L'hypothèse u_n et v_n de mêmes signes (au moins à partir d'un certain rang) est essentielle dans le théorème précédent. Considérons par exemple la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$. Un développement limité nous donne :*

$$\begin{aligned} u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right) \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + v_n \end{aligned}$$

avec $|v_n| \leq \lambda \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$, ce qui implique que la série de terme général u_n est divergente comme somme d'une série divergente (la série $\sum \frac{1}{n}$) avec des séries convergentes (les séries $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $\sum v_n$). Et pourtant u_n est équivalent $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ qui est le terme général d'une série alternée convergente.

Remarque 6.8 *Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes réels positifs telles que $u_n \backsim v_n$ et convergentes, on a seulement l'équivalence des restes, mais pas celle des sommes partielles. Par exemple $\frac{1}{n(n+1)} \backsim \frac{1}{n^2}$ avec :*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \backsim 1$$

et :

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} > 1 + \frac{1}{4}$$

ne peut être équivalent à 1 (en fait $T_n \backsim \frac{\pi^2}{6}$).

Exercice 6.30 *Montrer que, pour $n \geq 2$, on a $\frac{n!}{n^n} \leq \frac{2}{n^2}$, en déduire la nature de la série de terme général $u_n = \frac{n!+n^3}{n^n+\ln(n)}$.*

Solution 6.30 *Pour $n \geq 2$, on a :*

$$\frac{n!}{n^n}n^2 = \frac{n!}{n^{n-2}} = 2\prod_{k=3}^{n}\frac{k}{n} \leq 2$$

donc $0 < \frac{n!}{n^n} \leq \frac{2}{n^2}$ *et* $\sum \frac{n!}{n^n} < +\infty$.
Avec

$$0 < u_n = \frac{n! + n^3}{n^n + \ln(n)} = \frac{n!}{n^n}\left(\frac{1 + \frac{n^3}{n!}}{1 + \frac{\ln(n)}{n^n}}\right) \sim \frac{n!}{n^n},$$

on déduit que $\sum u_n$ *converge.*

Exercice 6.31 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels positifs ou nuls telle que la série réelle $\sum u_n$ soit convergente.*

1. *Montrer que* $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = 0$.
2. *En déduire la nature de la série* $\sum \frac{u_n}{1 - nu_n}$.
3. *Montrer que* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} n(u_n - u_{n+1}) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.
4. *La réciproque du* ***1.*** *est valable ?*

Solution 6.31

1. *En notant, pour tout entier $n \geq 1$, S_n la somme partielle d'indice n de la série $\sum u_n$, on a :*

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} u_k \geq nu_{2n} \geq 0$$

puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante positive. On a donc :

$$0 \leq 2n \cdot u_{2n} \leq \frac{1}{2}(S_{2n} - S_n) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

puisque $\sum u_n$ est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2nu_{2n} = 0$. Puis avec :

$$0 \leq (2n+1)u_{2n+1} \leq 2nu_{2n} + u_{2n}$$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} (2n+1)u_{2n+1} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = 0$.

2. *Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = 0$, il existe un entier n_2 tel que $0 \leq nu_n < 1$ pour tout $n \geq n_2$, ce qui permet de considérer la série $\sum \frac{u_n}{1 - nu_n}$.*
La condition $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = 0$ nous dit aussi que $\frac{u_n}{1 - nu_n} \backsim u_n$, ce qui implique, puisque les séries considérées sont à termes positifs, que $\sum\limits_{n=n_2}^{+\infty} \frac{u_n}{1 - nu_n} < +\infty$.

3. *On a :*

$$\sum_{k=0}^{n} k(u_k - u_{k+1}) = \sum_{k=0}^{n} u_k - nu_{n+1},$$

avec $nu_{n+1} = \frac{n}{n+1}(n+1)u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, d'où le résultat.

4. La condition $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ *n'assure pas la convergence de* $\sum u_n$*, que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *soit décroissante ou non. Par exemple la série de Bertrand* $\sum \frac{1}{n\ln(n)}$ *est divergente et* $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$*.*

Les précisions sur les sommes partielles des séries divergentes ou les restes des séries convergentes dans le théorème précédent peuvent être utilisées pour obtenir des développements asymptotiques de certaines suites.

Considérons par exemple le cas de la série harmonique $(H_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$\forall n \geq 1,\ H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Cette série est divergente et à termes positifs avec $\frac{1}{n} \backsim \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$, ce qui entraîne que :

$$H_n \backsim \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k+1}{k}\right)\right) = \ln(n+1),$$

ou encore $H_n \backsim \ln(n)$.

La suite $(K_n)_{n\geq 1}$ définie par $K_n = H_n - \ln(n)$ est de même nature que la série de terme général :

$$K_{n+1} - K_n = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

elle est donc convergente. Sa limite est la constante d'Euler :

$$\gamma = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n)\right).$$

On considère ensuite la suite $(L_n)_{n\geq 1}$ définie par $L_n = H_n - \ln(n) - \gamma$. Cette suite est convergente vers 0 de même nature que la série de terme général :

$$L_{n+1} - L_n = K_{n+1} - K_n = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right) \backsim -\frac{1}{2n^2}.$$

Cette série est donc convergente à termes négatifs à partir d'un certain rang, ce qui entraîne l'équivalence des restes :

$$\sum_{k=n}^{+\infty}(L_{k+1}-L_k) \backsim -\frac{1}{2}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$$

avec :

$$\sum_{k=n}^{+\infty}(L_{k+1}-L_k) = \lim_{m\to+\infty}\sum_{k=n}^{m}(L_{k+1}-L_k) = \lim_{m\to+\infty} L_{m+1} - L_n = -L_n.$$

On a donc :

$$L_n \backsim \frac{1}{2}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^2}.$$

Enfin avec :

$$\forall k \geq 2,\ \int_k^{k+1}\frac{dt}{t^2} \leq \frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^{k}\frac{dt}{t^2},$$

on déduit que pour $m > n \geq 2$, on a :

$$\sum_{k=n}^{m} \int_{k}^{k+1} \frac{dt}{t^2} = \int_{n}^{m+1} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{n} - \frac{1}{m+1} \leq \sum_{k=n}^{m} \frac{1}{k^2}$$
$$\leq \sum_{k=n}^{m} \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^2} = \int_{n-1}^{m} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{m}$$

et faisant tendre m vers l'infini (à n fixé), on déduit que :

$$\forall n \geq 2,\ \frac{1}{n} \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n-1},$$

ce qui implique que :

$$L_n \backsim \frac{1}{2} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \backsim \frac{1}{2n}.$$

On a donc en définitive le développement asymptotique :

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

En itérant ce procédé on peut obtenir des termes supplémentaires du développement asymptotique.

Toujours dans le cadre des séries à termes positifs, on dispose également des théorèmes de Cauchy et de d'Alembert, souvent utilisés, pour prouver la convergence ou la divergence d'une série. La démonstration de ce théorème repose sur des comparaisons à des séries géométriques.

Théorème 6.12 (Cauchy) *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles positives telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lambda$.*
La série $\sum u_n$ est convergente pour $\lambda < 1$ et divergente pour $\lambda > 1$.

Démonstration. Pour $\lambda < 1$, on peut trouver un réel μ tel que $\lambda < \mu < 1$ et un entier n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0,\ 0 \leq \sqrt[n]{u_n} \leq \mu,$$

ce qui revient à dire que :

$$\forall n \geq n_0,\ 0 \leq u_n \leq \mu^n$$

et le corollaire 6.10 nous dit que la série $\sum u_n$ est convergente comme la série géométrique $\sum \mu^n$.

De même, pour $\lambda > 1$, on peut trouver un réel μ tel que $1 < \mu < \lambda$ et un entier n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0,\ u_n \geq \mu^n$$

et le corollaire 6.10 nous dit que la série $\sum u_n$ est divergente comme la série géométrique $\sum \mu^n$.
■

Remarque 6.9 *Dans le cas où $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lambda > 1$, on peut aussi dire qu'on aura $\sqrt[n]{u_n} > 1$ pour n assez grand, donc aussi $u_n > 1$ et $\sum u_n$ diverge.*

Remarque 6.10 *Pour $\lambda = 1$ le théorème ne permet pas de conclure en général comme le montre l'exemple des séries de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$. En effet, on a :*

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n^\alpha}} = n^{-\frac{\alpha}{n}} = \exp\left(-\alpha\frac{\ln(n)}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\to} 1$$

pour tout réel α, alors que la série $\sum u_n$ diverge pour $\alpha \leq 1$ et converge pour $\alpha > 1$.

Exercice 6.32 *Soient $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $a > 0$. En utilisant la règle de Cauchy, étudier les séries de termes généraux : $\left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^n$; $\left(\frac{n}{4n-1}\right)^{2n}$; $\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$; $\frac{a^n}{n^{\frac{n}{\alpha}}}$; $\frac{n}{n^{\frac{n}{2}}}$; $\frac{(n!)^n}{n^{n!}}$; $\frac{2^n}{n^{\alpha+\frac{1}{n}}}$; $\frac{2^n}{n^2}\sin^{2n}(\alpha)$.*

Solution 6.32 *Toutes les séries considérées sont à termes strictement positifs.*
Pour $u_n = \left(\frac{an+b}{cn+d}\right)^n$, on a :

$$\sqrt[n]{u_n} = \frac{an+b}{cn+d} \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{a}{c}$$

donc $\sum u_n$ converge pour $\frac{a}{c} = \frac{1}{2}$.
Pour $u_n = \left(\frac{n}{4n-1}\right)^{2n}$, on a :

$$\sqrt[n]{u_n} = \left(\frac{n}{4n-1}\right)^2 \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{1}{16} < 1$$

donc $\sum u_n$ converge.
Pour $u_n = \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$, on a :

$$\sqrt[n]{u_n} = \sqrt{\frac{2n+1}{3n+1}} \underset{n\to+\infty}{\to} \sqrt{\frac{2}{3}} < 1$$

donc $\sum u_n$ converge.
Pour $u_n = \frac{a^n}{n^{\frac{n}{\alpha}}}$, on a :

$$\sqrt[n]{u_n} = \frac{a}{n^{\frac{1}{\alpha}}} \underset{n\to+\infty}{\to} \begin{cases} 0 \text{ si } \alpha > 0, \\ +\infty \text{ si } \alpha < 0 \end{cases}$$

donc $\sum u_n$ converge pour $\alpha > 0$ et diverge pour $\alpha < 0$.
Pour $u_n = \frac{n}{n^{\frac{n}{2}}}$, on a :

$$\sqrt[n]{u_n} = \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt{n}} = n^{\frac{1}{n}-\frac{1}{2}} = \exp\left(\frac{\ln(n)}{n} - \frac{\ln(n)}{2}\right) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

donc $\sum u_n$ converge.
Pour $u_n = \frac{(n!)^n}{n^{n!}}$, on a :

$$\sqrt[n]{u_n} = \frac{n!}{n^{(n-1)!}} \leq \frac{n!}{n^n} = \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \leq \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

donc $\sum u_n$ *converge (pour* $n \geq 3$*, on a* $n^{(n-1)!} \geq n^n$ *puisque* $(n-1)! \geq n$*).*
Pour $u_n = \dfrac{2^n}{n^{\alpha+\frac{1}{n}}}$*, on a :*

$$\sqrt[n]{u_n} = \frac{2}{n^{\frac{\alpha}{n}+\frac{1}{n^2}}} = \frac{2}{\exp\left(\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\ln(n)\right)} \underset{n\to+\infty}{\to} 2 > 1$$

donc $\sum u_n$ *diverge.*
Pour $u_n = \dfrac{2^n}{n^2}\sin^{2n}(\alpha)$*, on a :*

$$\sqrt[n]{u_n} = \frac{2}{n^{\frac{2}{n}}}\sin^2(\alpha) = \frac{2\sin^2(\alpha)}{\exp\left(2\frac{\ln(n)}{n}\right)} \underset{n\to+\infty}{\to} 2\sin^2(\alpha)$$

donc $\sum u_n$ *diverge pour* $|\sin(\alpha)| > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$*, converge pour* $|\sin(\alpha)| < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$*. Pour* $|\sin(\alpha)| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$*, on a* $u_n = \dfrac{1}{n^2}$ *et* $\sum u_n$ *converge.*

On dispose aussi de la version suivante du théorème de Cauchy qui utilise la notion de limite supérieure d'une suite réelle bornée $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\limsup_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{p\geq n} v_p\right) = \inf_{n\in\mathbb{N}}\left(\sup_{p\geq n} v_p\right)$$

(la suite $\left(\sup_{p\geq n} v_p\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante).

Cette notion est étudiée avec le problème du chapitre 31.

Théorème 6.13 (Cauchy) *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite à valeurs réelles positives. Si la suite* $\left(\sqrt[n]{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *n'est pas majorée, alors la série* $\sum u_n$ *est divergente, sinon elle est convergente pour* $\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} < 1$ *et divergente pour* $\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} > 1$ *(pour* $\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = 1$*, on ne peut rien dire a priori).*

Démonstration. Voir le problème du chapitre 31. ■

Cette version du théorème de Cauchy sera utilisée pour déterminer le rayon de convergence d'une série entière.

Théorème 6.14 (d'Alembert) *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite à valeurs réelles strictement positives telle que* $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda$*.*
La série $\sum u_n$ *est convergente pour* $\lambda < 1$ *et divergente pour* $\lambda > 1$*.*

Démonstration. Pour $\lambda < 1$, on peut trouver un réel μ tel que $\lambda < \mu < 1$ et un entier n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0,\ 0 < \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \mu = \frac{\mu^{n+1}}{\mu^n}$$

et le corollaire 6.10 nous dit que la série $\sum u_n$ est convergente comme la série géométrique $\sum \mu^n$.

De même, pour $\lambda > 1$, on peut trouver un réel μ tel que $1 < \mu < \lambda$ et un entier n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0,\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \mu = \frac{\mu^{n+1}}{\mu^n}$$

et le corollaire 6.10 nous dit que la série $\sum u_n$ est divergente comme la série géométrique $\sum \mu^n$.
■

Remarque 6.11 *Dans le cas où* $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda > 1$, *on aura* $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ *pour* n *assez grand et en conséquence il existe un entier* n_0 *tel que* $u_n \geq u_{n_0} > 0$ *pour* $n \geq n_0$ *(la suite* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *est croissante) et* $\sum u_n$ *diverge puisque son terme général ne peut tendre vers* 0.

Remarque 6.12 *Pour* $\lambda = 1$ *le théorème ne permet pas de conclure en général comme le montre l'exemple des séries de Riemann* $\sum \frac{1}{n^\alpha}$.

Remarque 6.13 *Le théorème de d'Alembert peut se déduire de celui de Cauchy en utilisant le théorème 3.6 (Si* $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \lambda$, *alors* $\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt[n]{u_n}\right) = \lambda$*) qui est une conséquence du théorème de Césaro (exercice 3.73). Ce résultat peut s'exprimer en disant que la règle de Cauchy est plus générale que celle de d'Alembert. Pratiquement cela signifie que le théorème de Cauchy pourra permettre de conclure (mais pas toujours) si celui de d'Alembert ne le peut pas, c'est-à dire si la suite* $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *ne converge pas.*

Exercice 6.33 *On considère la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $u_n = \frac{2^{(-1)^n}}{2^n}$. *Que donnent les critères de d'Alembert et de Cauchy pour la série* $\sum u_n$ *?*

Solution 6.33 *On a* $u_n > 0$ *pour tout* n *et :*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2^{2(-1)^n+1}} = \begin{cases} \frac{1}{8} \text{ si } n \text{ est impair} \\ 2 \text{ si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

donc la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge et le théorème de d'Alembert ne s'applique pas.*
Par contre, on a :

$$\sqrt[n]{u_n} = \frac{2^{\frac{(-1)^n}{n}}}{2} \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{1}{2}$$

et le théorème de Cauchy nous dit que $\sum u_n$ *converge.*
En fait, on a :

$$\begin{aligned} S_{2p} &= \sum_{k=0}^{2p} \frac{2^{(-1)^k}}{2^k} = 2\sum_{j=0}^{p} \frac{1}{2^{2j}} + \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{p-1} \frac{1}{2^{2j}} \\ &= \frac{9}{4}\sum_{j=0}^{p-1} \frac{1}{4^j} + \frac{1}{2^{2p}} \underset{p\to+\infty}{\to} \frac{9}{4}\frac{4}{3} = 3 \end{aligned}$$

et :

$$S_{2p} = S_{2p} + \frac{1}{2^{2p+2}} \underset{p\to+\infty}{\to} 3$$

donc $\sum u_n$ *converge et* $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 3$.

Exercice 6.34

1. *Montrer que pour tout réel* $x \geq 0$ *la série* $\sum \frac{x^n}{n!}$ *est convergente.*

2. *En déduire que pour tout nombre complexe z la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ est convergente.*

Solution 6.34

1. *Pour $x = 0$ c'est clair et pour $x > 0$, en notant $u_n = \frac{x^n}{n!}$, on a $u_n > 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. On déduit alors du théorème de d'Alembert que la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ est convergente.*

2. *La question précédente nous dit que $\sum \frac{z^n}{n!}$ est absolument convergente, donc convergente.*

Exercice 6.35 *Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $a > 0$. En utilisant la règle de d'Alembert, étudier les séries de termes généraux : $\frac{a^n}{n^\alpha n!}$; $\frac{a^n}{n^\alpha n^n}$; $\frac{n!}{n^\alpha n^n}$; $\frac{a^n n^\alpha}{n! n^n}$; $\frac{a^n n!}{n^n}$ $(a \neq e)$; $\frac{a^n n^n}{n^\alpha n!}$ $(a \neq \frac{1}{e})$; $\frac{(n!)^2}{(2n)!}$; $\frac{3n-1}{(\sqrt{3})^n}$; $\frac{n}{1+a^n}$; $\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-1)}{1\cdot 5\cdot 9\cdots(4n-3)}$; $\frac{1\cdot 4\cdot 9\cdots n^2}{1\cdot 5\cdot 9\cdots(4n-3)}$; $\frac{n^p}{a^n}$ $(p \in \mathbb{Z})$.*

Solution 6.35 *Toutes les séries considérées sont à termes strictement positifs.*
Pour $u_n = \frac{a^n}{n^\alpha n!}$, on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

donc $\sum u_n$ converge.
Pour $u_n = \frac{a^n}{n^\alpha n^n}$, on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\to} 0\cdot 1\cdot \frac{1}{e} = 0$$

(on utilise $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$) donc $\sum u_n$ converge.
Pour $u_n = \frac{n!}{n^\alpha n^n}$, on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{1}{e} < 1$$

donc $\sum u_n$ converge.
Pour $u_n = \frac{a^n n^\alpha}{n! n^n}$ on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = a\left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha \frac{1}{(n+1)^2}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

donc $\sum u_n$ converge.
Pour $u_n = \frac{a^n n!}{n^n}$ avec $a \neq e$, on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = a\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{a}{e}$$

donc $\sum u_n$ *converge pour* $0 < a < e$, *diverge pour* $a > e$.
Pour $u_n = \dfrac{a^n n^n}{n^\alpha n!}(a \neq \dfrac{1}{e})$, *on a :*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = a\left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\to} ae$$

donc $\sum u_n$ *converge pour* $0 < a < \dfrac{1}{e}$, *diverge pour* $a > \dfrac{1}{e}$.
Pour $u_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$, *on a :*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{n+1}{2(2n+1)} \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{1}{4} < 1$$

donc $\sum u_n$ *converge*
Pour $u_n = \dfrac{3n-1}{(\sqrt{3})^n}$, *on a :*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3n+2}{3n-1}\frac{1}{\sqrt{3}} \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{1}{\sqrt{3}} < 1$$

donc $\sum u_n$ *converge*
Pour $u_n = \dfrac{n}{1+a^n}$, *on a :*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{n}\frac{1+a^{n+1}}{1+a^n} \backsim a$$

donc $\sum u_n$ *converge pour* $0 < a < 1$, *diverge pour* $a > 1$. *Pour* $a = 1$, *on a* $u_n = \dfrac{n}{2}$ *et* $\sum u_n$ *diverge.*
Pour $u_n = \dfrac{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-1)}{1\cdot 5\cdot 9\cdots(4n-3)} = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\frac{3k-1}{4k-3}$, *on a :*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3n+2}{4n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{3}{4} < 1$$

donc $\sum u_n$ *converge*
Pour $u_n = \dfrac{1\cdot 4\cdot 9\cdots n^2}{1\cdot 5\cdot 9\cdots(4n-3)} = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\frac{k^2}{4k-3}$, *on a :*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{4n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$$

donc $\sum u_n$ *diverge*
Pour $u_n = \dfrac{n^p}{a^n}(p \in \mathbb{Z})$, *on a :*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{a}\left(\frac{n+1}{n}\right)^p \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{1}{a}$$

donc $\sum u_n$ *diverge pour* $0 < a < 1$, *converge pour* $a > 1$. *Pour* $a = 1$, $u_n = n^p$ *et* $\sum u_n$ *diverge pour* $p \geq -1$, *converge pour* $p < -1$.

Exercice 6.36 *On considère les suites* $(u_n)_{n\geq 1}$ *et* $(v_n)_{n\geq 1}$ *définies par* $u_n = \dfrac{n^n\sqrt{n}}{e^n n!}$ *et* $v_n = \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.

1. *Montrer que la série* $\sum v_n$ *converge.*
2. *En déduire que la suite* $(u_n)_{n\geq 1}$ *converge vers un réel* $\alpha > 0$.
3. *Montrer que* $n! \backsim \lambda \dfrac{\sqrt{n}n^n}{e^n}$ *avec* $\lambda = \dfrac{1}{\alpha}$
4. *En admettant la formule de Wallis :*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot \cdots \cdot (2n-2)\cdot (2n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \cdots \cdot (2n-1)\sqrt{n}} = \sqrt{\pi}$$

et en simplifiant $\dfrac{u_{2n}}{u_n^2}$, *montrer que* $\lambda = \sqrt{2\pi}$ *(formule de Stirling).*

5. *Étudier les série de termes généraux* $\dfrac{e^n n!}{n^n}$, *et* $\dfrac{n^n}{e^n n^\alpha n!}$ *(cas* $a = e$ *et* $a = \dfrac{1}{e}$ *dans l'exercice précédent).*

Solution 6.36

1. *On a :*

$$v_n = \ln\left(\frac{1}{e}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}\right) = -1 + \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

et un développement limité donne :

$$v_n = -1 + \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc la série $\sum v_n$ *converge absolument (puisqu'on a aussi* $|v_n| = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$*).*

2. *Comme* $v_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$, *la série* $\sum v_n$ *est de même nature que la suite* $(\ln(u_n))_{n\geq 1}$ *et cette dernière converge. En notant* ℓ *sa limite, on a* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha = e^\ell > 0$.
3. *Il en résulte que* $n! \backsim \lambda \dfrac{\sqrt{n}n^n}{e^n}$.
4. *On a :*

$$\frac{u_{2n}}{u_n^2} = \frac{(2n)^{2n}\sqrt{2n}}{e^{2n}(2n)!}\frac{(n!)^2 e^{2n}}{n^{2n}n} = \frac{2^{2n}\sqrt{2}}{(2n)!}\frac{(n!)^2}{\sqrt{n}}$$

avec :

$$\begin{aligned}(2n)! &= 1\cdot 2\cdot 3\cdot \cdots \cdot (2n-1)\cdot (2n)\\ &= 1\cdot 3\cdot 5\cdot \cdots \cdot (2n-1)\cdot 2^n (n!)\end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned}\frac{u_{2n}}{u_n^2} &= \frac{2^n\sqrt{2}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \cdots \cdot (2n-1)}\frac{n!}{\sqrt{n}}\\ &= \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot \cdots \cdot (2n-2)\cdot (2n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \cdots \cdot (2n-1)\sqrt{n}}\sqrt{2} \underset{n\to+\infty}{\to} \sqrt{\pi}\sqrt{2}\end{aligned}$$

en utilisant la formule de Wallis. Il en résulte que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{2n}}{u_n^2} = \frac{\alpha}{\alpha^2} = \frac{1}{\alpha} = \lambda = \sqrt{2\pi}$$

soit :

$$n! \backsim \sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}.$$

5. *Pour* $u_n = \dfrac{e^n n!}{n^n}$ *on a :*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = e\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\to} 1$$

et le théorème de d'Alembert ne permet pas de conclure. En utilisant la formule de Stirling, on a :

$$u_n \backsim \lambda \frac{e^n}{n^n}\frac{\sqrt{n}n^n}{e^n} = \lambda\sqrt{n}$$

et $\sum u_n$ *diverge.*

Pour $u_n = \dfrac{n^n}{e^n n^\alpha n!}$, *on a :*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{e}\left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\to} 1$$

et le théorème de d'Alembert ne permet pas de conclure. En utilisant la formule de Stirling, on a :

$$u_n \backsim \frac{1}{\lambda}\frac{n^n}{e^n n^\alpha}\frac{e^n}{\sqrt{n}n^n} = \frac{1}{\lambda}\frac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$$

et $\sum u_n$ *diverge pour* $\alpha \leq \dfrac{1}{2}$, *converge pour* $\alpha > \dfrac{1}{2}$.

Dans le cas où $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ (avec $u_n > 0$), on peut utiliser les théorèmes de Raabe-Duhamel qui suivent. Ces résultats reposent sur la comparaison de la série étudiée à une série de Riemann.

Théorème 6.15 (Raabe-Duhamel) *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite à valeurs réelles strictement positives telle que :*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

où α *est un réel (on a donc en particulier* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$*). Si* $\alpha < 1$, *la série* $\sum u_n$ *est alors divergente et si* $\alpha > 1$, *elle est convergente.*

Démonstration. L'idée est de comparer notre série à une série de Riemann. Si $v_n = \dfrac{1}{n^\beta}$ où β est un réel à préciser, on a :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\beta} = 1 - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

et :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{n}\left(\beta - \alpha + \varepsilon_n\right)$$

où $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ est une suite réelle qui tend vers 0.

Pour $\alpha < 1$, on choisit β tel que $\alpha < \beta < 1$, de sorte que $\lim\limits_{n\to+\infty} (\beta - \alpha + \varepsilon_n) = \beta - \alpha > 0$ et il existe un entier n_0 tel que $\beta - \alpha + \varepsilon_n > 0$ pour tout $n \geq n_0$, ce qui donne $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ pour tout $n \geq n_0$ et $\sum u_n$ diverge comme $\sum v_n$.

Pour $\alpha > 1$, on choisit β tel que $1 < \beta < \alpha$, de sorte que $\lim\limits_{n\to+\infty} (\beta - \alpha + \varepsilon_n) = \beta - \alpha < 0$ et il existe un entier n_0 tel que $\beta - \alpha + \varepsilon_n < 0$ pour tout $n \geq n_0$, ce qui donne $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ pour tout $n \geq n_0$ et $\sum u_n$ converge comme $\sum v_n$. ∎

Exercice 6.37 *Étudier la série* $\sum u_n$*, où* $u_n = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}$ *pour* $n \geq 1$.

Solution 6.37 *On a :*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+1}{2n+2} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$$

et le théorème de d'Alembert ne permet pas de conclure.
Avec :

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{1}{2n+2} &= 1 - \frac{1}{2n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1} \\ &= 1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

et le théorème de Raabe-Duhamel, on déduit que $\sum u_n$ *diverge (*$\alpha = \dfrac{1}{2}$ *avec les notations du théorème qui précède).*

Le cas où $\alpha = 1$ peut être traité avec la version suivante du théorème de Raabe-Duhamel.

Théorème 6.16 (Raabe-Duhamel) *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite à valeurs réelles strictement positives telle que :*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^\gamma}\right)$$

où α, γ *sont des réels avec* $\gamma > 1$ *(on a donc en particulier* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$*). La série* $\sum u_n$ *converge si, et seulement si,* $\alpha > 1$.

Démonstration. Pour $\alpha < 1$ ou $\alpha > 1$, on écrit que $O\left(\dfrac{1}{n^\gamma}\right) = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ et on est ramené au théorème précédent.

Pour $\alpha = 1$, on introduit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = \ln(nu_n)$ qui est de même nature que la série de terme général :

$$\begin{aligned}v_{n+1} - v_n &= \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \\ &= \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^\gamma}\right)\right) \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{2}\frac{1}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) + \left(-\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^\gamma}\right)\right) \\ &= -\frac{1}{2}\frac{1}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^{\min(3,\gamma)}}\right)\end{aligned}$$

donc convergente puisque $\gamma > 1$. En notant $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = \lambda = e^\ell > 0$, ce qui signifie que $u_n \backsim \dfrac{\lambda}{n}$ et $\sum u_n$ est divergente. ∎

Exercice 6.38 *On désigne par* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite réelle définie par :*

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sin(u_n) \end{cases}$$

1. *Montrer que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers* 0 *en décroissant.*
2. *Montrer que* $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2(x)}-\dfrac{1}{x^2}\right)=\dfrac{1}{3}$.
3. *En utilisant le théorème de Césaro, montrer que la série* $\sum u_n$ *diverge.*

Solution 6.38

1. *On vérifie facilement par récurrence que* $0<u_n\leq 1$ *pour tout* $n\geq 0$. *En effet, c'est vrai pour* $n=0$ *et supposant acquis le résultat au rang* $n\geq 0$, *on a :*
$$0<u_{n+1}=\sin(u_n)<1.$$
Tenant compte de l'inégalité $\sin(x)<x$ *pour* $x\in\left]0,1\right]$, *on déduit que cette suite est décroissante et comme elle est minorée par* 0, *elle converge vers un réel* $\ell\in[0,1]$. *Avec la continuité de la fonction* $\sin$, *on déduit que* $\sin(\ell)=\ell$ *avec* $\ell\in[0,1]$ *et* $\ell=0$.
On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sin(u_n)}{u_n}=1$ *et le théorème de d'Alembert ne permet pas de conclure.*
2. *Le développement limité de* $\sin$ *en* 0 *à l'ordre* 3 *nous donne :*
$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin^2(x)}-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-\sin^2(x)}{x^2\sin^2(x)}&=\frac{x^2-\left(x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^4\right)\right)^2}{x^2\left(x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^4\right)\right)^2}\\&=\frac{\frac{x^4}{3}+o\left(x^4\right)}{x^4+o\left(x^4\right)}\underset{x\to 0}{\to}\frac{1}{3}.\end{aligned}$$
3. *Comme* $u_n>0$ *pour tout* n *et* $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$, *on déduit de la question précédente que :*
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{u_{n+1}^2}-\frac{1}{u_n^2}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sin^2(u_n)}-\frac{1}{u_n^2}\right)=\frac{1}{3}$$
et le théorème de Césaro nous dit que :
$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{u_{k+1}^2}-\frac{1}{u_k^2}\right)&=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{u_n^2}-\frac{1}{u_0^2}\right)\\&=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\frac{1}{u_n^2}\right)=\frac{1}{3}\end{aligned}$$
et $u_n\sim\dfrac{1}{\sqrt{3}\sqrt{n}}$ *et la série* $\sum u_n$ *diverge.*

Comme pour le théorème de Cauchy, on dispose d'un version du théorème de d'Alembert qui fait intervenir la notion de limite supérieure et aussi celle de limite inférieure. Précisément, on a le résultat suivant.

Théorème 6.17 (d'Alembert) *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite à valeurs réelles strictement positives. Si* $\limsup\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}<1$, *la série* $\sum u_n$ *est alors convergente et si* $\liminf\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}>1$, *elle est divergente (dans les autres cas, on ne peut rien dire a priori).*

Démonstration. Voir le problème du chapitre 31. ■

6.6 Produit de deux séries

Étant données deux séries numériques $\sum u_n$ et $\sum v_n$, on peut définir naïvement leur produit comme la série produit $\sum u_n v_n$, où on fait le produit terme à terme comme pour la somme. On dit que $\sum u_n v_n$ est le produit de Hadamard des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

Par exemple pour deux séries géométriques convergentes $\sum a^n$ et $\sum b^n$, la série produit $\sum a^n b^n$ est encore une série géométrique convergente, mais en général :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n b^n = \frac{1}{1-ab} \neq \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \sum_{n=0}^{+\infty} b^n = \frac{1}{(1-a)(1-b)}.$$

On préfère définir le produit de deux séries par analogie au produit de deux polynômes comme suit.

Définition 6.5 *Étant données deux séries numériques $\sum u_n$ et $\sum v_n$, le produit de Cauchy de ces deux séries est la série de terme général $w_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$.*

Ce produit de Cauchy est aussi appelé produit de convolution.

Pour l'exemple des séries géométriques convergentes avec $a \neq b$, on a :

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b-a}$$

et :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} w^n &= \frac{1}{b-a}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a^{n+1}\right) = \frac{1}{b-a}\left(\frac{b}{1-b} - \frac{a}{1-a}\right) \\
&= \frac{1}{ab-b-a+1} = \frac{1}{(1-a)(1-b)}.
\end{aligned}$$

On s'intéresse tout d'abord au produit de Cauchy de deux séries à termes positifs.

Théorème 6.18 *Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs non identiquement nulles et $\sum w_n$ leur produit de Cauchy. Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes, il en est alors de même de $\sum w_n$ et :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right).$$

Si l'une des deux séries $\sum u_n$ ou $\sum v_n$ est divergente, il en est alors de même de $\sum w_n$ (l'égalité $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$ est encore vérifiée dans ce cas avec $+\infty$ pour valeur commune).

Démonstration. On note respectivement S_n, S'_n et S''_n les sommes partielles des séries $\sum u_n$, $\sum v_n$ et $\sum w_n$. Pour tout entier n, on a :

$$S_n S'_n = \left(\sum_{i=0}^{n} u_i\right)\left(\sum_{j=0}^{n} v_j\right) = \sum_{0 \leq i,j \leq n} u_i v_j.$$

et :

$$S''_n = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{k} u_i v_{k-i} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i+j=k} u_i v_j = \sum_{i+j \leq n} u_i v_j$$

les indices i, j figurant dans ces sommes étant positifs ou nuls. Il en résulte que :

$$S''_n = \sum_{i+j\leq n} u_i v_j \leq \sum_{0\leq i,j\leq n} u_i v_j = S_n S'_n \leq \sum_{i+j\leq 2n} u_i v_j = S''_{2n}$$

En conséquence si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, les suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont majorées, donc aussi la suite $(S''_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ce qui équivaut à dire que la série à termes positifs $\sum w_n$ converge. Si l'une des deux séries $\sum u_n$ ou $\sum v_n$ diverge, l'une des suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ et il en est de même de $(S''_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ (les u_n, v_n sont positifs non tous nuls, donc S_n et S'_n sont croissantes et strictement positives pour n grand), la série est donc divergente. ■

Le théorème précédent peut aussi s'énoncer en disant que, pour toutes séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ à termes positifs non tous nuls, on a toujours l'égalité dans $\overline{\mathbb{R}^+} = \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$:

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n$$

où $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$.

On en déduit alors le résultat suivant.

Théorème 6.19 *Le produit de Cauchy $\sum w_n$ de deux séries numériques $\sum u_n$ et $\sum v_n$ absolument convergentes est absolument convergent et :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right).$$

Démonstration. Le théorème précédent nous dit que, si on note $w'_n = \sum_{k=0}^{n} |u_k|\,|v_{n-k}|$ pour tout entier naturel n, alors la série $\sum w'_n$ est convergente et avec les inégalités :

$$|w_n| = \left|\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}\right| \leq w'_n,$$

on déduit que la série $\sum w_n$ est absolument convergente.
En notant respectivement S_n, S'_n, S''_n les sommes partielles des séries $\sum u_n$, $\sum v_n$, $\sum w_n$ et T_n, T'_n, T''_n celles des séries $\sum |u_n|$, $\sum |v_n|$, $\sum w'_n$ on a :

$$\begin{aligned} |S_n S'_n - S''_n| &= \left|\sum_{0\leq i,j\leq n} u_i v_j - \sum_{\substack{0\leq i,j\leq n\\ i+j\leq n}} u_i v_j\right| = \left|\sum_{\substack{0\leq i,j\leq n\\ i+j\geq n+1}} u_i v_j\right| \\ &\leq \sum_{\substack{0\leq i,j\leq n\\ i+j\geq n+1}} |u_i|\,|v_j| = \sum_{0\leq i,j\leq n} |u_i|\,|v_j| - \sum_{\substack{0\leq i,j\leq n\\ i+j\leq n}} |u_i|\,|v_j| \\ &\leq T_n T'_n - T''_n \end{aligned}$$

avec $\lim_{n\to+\infty} (T_n T'_n - T''_n) = 0$ puisque $\sum_{n=0}^{+\infty} w'_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} |v_n|\right)$. Il en résulte que $\lim_{n\to+\infty} (S_n S'_n - S''_n) = 0$ et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \lim_{n\to+\infty} S''_n = \lim_{n\to+\infty} S_n \lim_{n\to+\infty} S'_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right).$$

■

Exemple 6.4 *La série* $\sum \lambda^n$ *étant absolument convergente de somme* $\dfrac{1}{1-\lambda}$, *pour tout nombre complexe* λ *tel que* $|\lambda| < 1$, *on déduit que :*

$$\frac{1}{(1-\lambda)^2} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n$$

où :

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} \lambda^k \lambda^{n-k} = (n+1)\,\lambda^n.$$

On a donc :

$$\frac{1}{(1-\lambda)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\,\lambda^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n\lambda^{n-1}.$$

Exemple 6.5 *La série* $\sum \dfrac{\lambda^n}{n!}$ *étant absolument convergente pour tout nombre complexe* λ *(exercice 6.34), en notant* $f(\lambda)$ *sa somme, on a pour tous nombres complexes* λ *et* μ *:*

$$f(\lambda)\, f(\mu) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n$$

où :

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} C_n^k \lambda^k \mu^{n-k} = \frac{(\lambda+\mu)^n}{n!}.$$

On a donc $f(\lambda)\, f(\mu) = f(\lambda+\mu)$ *avec* $f(0) = 1$. *On reconnaît ici l'équation fonctionnelle qui caractérise la fonction exponentielle réelle (avec l'hypothèse de continuité en* 0*). Pour cette raison, on note* e^{λ} *la somme de la série* $\sum \dfrac{\lambda^n}{n!}$ *et on définit ainsi la fonction exponentielle complexe qui prolonge celle que l'on connaît sur* $\mathbb{R}$.

En réalité l'absolue convergence de l'un des deux séries suffit (l'autre série étant bien entendu convergente). Précisément on a le résultat suivant.

Théorème 6.20 (Mertens) *Le produit de Cauchy* $\sum w_n$ *de deux séries numériques* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *convergentes, l'une d'entre elles étant absolument convergente, est convergent et :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right).$$

Exercice 6.39 *Montrer que le produit de Cauchy de la série convergente* $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ *par elle même est divergent.*

Solution 6.39 *Le théorème des séries alternées nous dit que* $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ *est convergente. Le produit de Cauchy de cette série par elle est la série* $\sum w_n$ *définie par :*

$$w_n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}}$$

et avec :

$$(k+1)(n-k+1) \leq (n+1)^2$$

pour k compris entre 0 et n, on déduit que :

$$|w_n| \geq 1$$

et $\sum w_n$ diverge puisque son terme général ne tend pas vers 0.

6.7 Séries doubles

De même que l'on considère des intégrales doubles, on peut définir la notion de série double. L'idée étant donner un sens à une somme du type $\sum\limits_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} u_{n,m}$.

On s'intéresse tout d'abord au cas des séries doubles à termes positifs.

Théorème 6.21 *Soit $(u_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ une suite de réels positifs ou nuls indexée par (n,m) dans $\mathbb{N}^2$. Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série $\sum u_{n,m}$ est convergente de somme S_n et si la série $\sum S_n$ est convergente de somme S, alors pour tout $m \in \mathbb{N}$, la série $\sum u_{n,m}$ est convergente de somme T_n et la série $\sum T_n$ est convergente de somme S. On a donc :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} u_{n,m}\right) = \sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,m}\right)$$

Démonstration. Pour tout entier naturel m, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_{n,m} \leq S_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_{n,k}$$

avec $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} S_n = S < +\infty$, ce qui entraîne la convergence de la série $\sum\limits_{n} u_{n,m}$. En notant T_m la somme de cette série, on a pour tout n :

$$\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} u_{j,k} = \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{m} u_{j,k} \leq \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{+\infty} u_{j,k} = \sum_{j=0}^{n} S_j \leq \sum_{n=0}^{+\infty} S_n = S.$$

Il en résulte que :

$$\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{+\infty} u_{j,k} = \sum_{k=0}^{m} T_k \leq S$$

ce qui signifie que la suite croissante $\left(\sum\limits_{k=0}^{m} T_k\right)_{m\in\mathbb{N}}$ est majorée et donc convergente. La série $\sum T_m$ est donc convergente et $T = \sum\limits_{m=0}^{+\infty} T_m \leq S$. En permutant les rôles de n et m, on aboutit de manière analogue à $S \leq T$ et $T = S$. ■

Remarque 6.14 *Dans le cas où l'une des sommes positives $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\sum\limits_{m=0}^{+\infty} u_{n,m}\right)$ ou $\sum\limits_{m=0}^{+\infty}\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_{n,m}\right)$ est infinie, il en est de même de l'autre, puisque si l'une est finie l'autre l'est. L'égalité $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\sum\limits_{m=0}^{+\infty} u_{n,m}\right) = \sum\limits_{m=0}^{+\infty}\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_{n,m}\right)$ est donc valable pour toute suite double $(u_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ de réels positifs.*

Dans le cas où l'une des sommes $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty}u_{n,m}\right)$ ou $\sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}u_{n,m}\right)$ ($(u_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ étant une suite double de réels positifs) est finie, on dit que la série double $\sum u_{n,m}$ est convergente et on note $\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}u_{n,m}$ la valeur commune de $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty}u_{n,m}\right)$ et $\sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}u_{n,m}\right)$.

Définition 6.6 *Étant donnée une suite double $(u_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ de nombres complexes, on dit que la série double $\sum u_{n,m}$ est absolument convergente si la série double $\sum |u_{n,m}|$ est convergente.*

On a le résultat suivant qui est l'analogue du théorème de Fubini que l'on connaît dans le cadre de la théorie de l'intégration.

Théorème 6.22 *Soit $(u_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ une suite double telle que la série double $\sum u_{n,m}$ soit absolument convergente. Dans ces conditions, pour tout $n\in\mathbb{N}$ [resp. pour tout $m\in\mathbb{N}$], la série $\sum_m u_{n,m}$ [resp. $\sum_n u_{n,m}$] est absolument convergente et en notant S_n [resp. T_m] la somme de cette série, la série $\sum S_n$ [resp. $\sum T_m$] est absolument convergente et on a $\sum_{n=0}^{+\infty}S_n=\sum_{m=0}^{+\infty}T_m$, soit :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty}u_{n,m}\right)=\sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}u_{n,m}\right)$$

Démonstration. La convergence de $\sum |u_{n,m}|$ entraîne par définition celle des séries $\sum_m |u_{n,m}|$ pour tout entier n, ce qui signifie que toutes les séries $\sum_m u_{n,m}$ sont absolument convergentes. Avec :

$$\sum_{k=0}^{m}|S_k|=\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=0}^{+\infty}|u_{n,m}|\leq\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty}|u_{n,m}|\right)=\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}|u_{n,m}|<+\infty$$

on déduit que la série $\sum S_n$ est absolument convergente. Les indices n et m jouant des rôles symétriques, on montre de même que la série $\sum T_m$ est absolument convergente. Faisant tendre m vers l'infini dans l'égalité :

$$\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}u_{j,k}=\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{m}u_{j,k}$$

on obtient :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{n}u_{j,k}=\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{+\infty}u_{j,k}$$

soit :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{n}u_{j,k}=\sum_{j=0}^{n}S_j$$

De même, en faisant tendre n vers l'infini, on aboutit à :

$$\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{+\infty}u_{j,k}=\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{m}u_{j,k}$$

soit :

$$\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{m}u_{j,k}=\sum_{k=0}^{m}T_k$$

Prenant $n = m$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} T_k - \sum_{j=0}^{n} S_j &= \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_{j,k} - \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{n} u_{j,k} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} u_{j,k} - \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} u_{j,k} + \sum_{j=n+1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_{j,k} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \sum_{j=0}^{n} u_{j,k} \\
&= \sum_{j=n+1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_{j,k} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \sum_{j=0}^{n} u_{j,k} \\
&= \sum_{j=n+1}^{+\infty} S_j - \sum_{k=n+1}^{+\infty} T_k \underset{n\to+\infty}{\to} 0 - 0 = 0
\end{aligned}$$

puisque chacune des séries $\sum S_n$ et $\sum T_m$ converge. On a donc bien l'égalité on a $\sum_{n=0}^{+\infty} S_n = \sum_{m=0}^{+\infty} T_m$. ∎

Dans le cas où la série double $\sum u_{n,m}$ est absolument convergente on note $\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} u_{n,m}$ la valeur commune de $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{m=0}^{+\infty} u_{n,m} \right)$ et $\sum_{m=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,m} \right)$.

Remarque 6.15 *Le résultat précédent n'est pas valable a priori sans hypothèse de convergence absolue. Les sommes* $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{m=0}^{+\infty} u_{n,m} \right)$ *et* $\sum_{m=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,m} \right)$ *peuvent être définies et différentes et dans ce cas il n'est pas possible de donner un sens à* $\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} u_{n,m}$.

Exercice 6.40 *Soit* $(u_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$ *la suite double définie par :*

$$\forall (n,m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*,\ u_{n,m} = \begin{cases} 0 \ si\ n = m \\ \dfrac{1}{n^2 - m^2} \ si\ n \neq m \end{cases}$$

Montrer, en les calculant, que les sommes $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{m=1}^{+\infty} u_{n,m} \right)$ *et* $\sum_{m=1}^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_{n,m} \right)$ *sont définies et différentes.*

Solution 6.40 *Pour k entier naturel non nul fixé et $n > k$, on a*

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} u_{j,k} = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} \frac{1}{j^2-k^2} &= \frac{1}{2k}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n}\left(\frac{1}{j-k}-\frac{1}{j+k}\right) \\
&= \frac{1}{2k}\left(\sum_{\substack{j=1-k \\ j\neq 0}}^{n-k}\frac{1}{j}-\sum_{\substack{j=k+1 \\ j\neq 2k}}^{n+k}\frac{1}{j}\right) \\
&= \frac{1}{2k}\left(\sum_{j=1}^{n-k}\frac{1}{j}-\sum_{j=1}^{k-1}\frac{1}{j}-\sum_{j=k+1}^{n+k}\frac{1}{j}+\frac{1}{2k}\right) \\
&= \frac{1}{2k}\left(\sum_{j=1}^{n-k}\frac{1}{j}-\sum_{j=1}^{n+k}\frac{1}{j}+\frac{1}{k}+\frac{1}{2k}\right) \\
&= \frac{1}{2k}\left(\frac{3}{2}\frac{1}{k}-\sum_{j=n-k+1}^{n+k}\frac{1}{j}\right)
\end{aligned}$$

avec :

$$0 < \sum_{j=n-k+1}^{n+k}\frac{1}{j} \leq 2k\frac{1}{n-k+1} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

et donc :

$$\forall k \geq 1,\ \lim_{n\to+\infty}\sum_{j=1}^{n} u_{j,k} = \frac{3}{4}\frac{1}{k^2},$$

ce qui signifie que :

$$\forall k \geq 1,\ T_k = \sum_{n=1}^{+\infty} u_{n,k} = \frac{3}{4}\frac{1}{k^2}.$$

La série $\sum T_m$ est donc convergente avec $\sum\limits_{m=1}^{+\infty} T_m = \dfrac{3}{4}\sum\limits_{m=1}^{+\infty}\dfrac{1}{m^2}$, ce qui signifie que :

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_{n,m}\right) = \frac{3}{4}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{m^2} = \frac{3}{4}\frac{\pi^2}{6}.$$

De manière analogue, on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{m=1}^{+\infty} u_{n,m}\right) = -\frac{3}{4}\frac{\pi^2}{6}$$

et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\sum\limits_{m=1}^{+\infty} u_{n,m}\right) \neq \sum\limits_{m=1}^{+\infty}\left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_{n,m}\right)$.
La série double $\sum u_{n,m}$ n'est donc pas absolument convergente.

6.8 La transformation d'Abel

Cette transformation que l'on peut considérer comme une intégration par parties discrète sera surtout utile lors de l'étude des séries trigonométriques.

Théorème 6.23 *Soient* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites numériques et* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite définie par :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k.$$

Pour tous entiers $q > p \geq 1$, *on a :*

$$\sum_{k=p}^{q} \alpha_k u_k = A_q u_q - A_{p-1} u_p - \sum_{k=p}^{q-1} A_k \left(u_{k+1} - u_k\right).$$

Démonstration. En écrivant que $\alpha_k = A_k - A_{k-1}$, pour tout entier $k \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=p}^{q} \alpha_k u_k = \sum_{k=p}^{q} \left(A_k - A_{k-1}\right) u_k &= \sum_{k=p}^{q} A_k u_k - \sum_{k=p}^{q} A_{k-1} u_k \\ = \sum_{k=p}^{q} A_k u_k - \sum_{k=p-1}^{q-1} A_k u_{k+1} &= A_q u_q - A_{p-1} u_p + \sum_{k=p}^{q-1} A_k \left(u_k - u_{k+1}\right) \\ &= A_q u_q - A_{p-1} u_p - \sum_{k=p}^{q-1} A_k \left(u_{k+1} - u_k\right) \end{aligned}$$

■

L'analogie avec la formule d'intégration par parties :

$$\int_a^b f(t)\, g(t)\, dt = \int_a^b F'(t)\, g(t)\, dt = F(b)\, g(b) - F(a)\, g(a) - \int_a^b F(t)\, g'(t)\, dt$$

où $F(t) = \int_a^t f(t)\, dt$ est la primitive de f nulle en a peut se faire comme suit :

— la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est identifiée à la fonction f ;
— la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est identifiée à la fonction F (intégration discrète) ;
— la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est identifiée à la fonction g ;
— la suite $(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est identifiée à la fonction g' (dérivation discrète) ;
— la somme $\sum\limits_{k=p}^{q} \alpha_k u_k$ est identifiée à l'intégrale $\int_a^b f(t)\, g(t)\, dt$;
— la somme $\sum\limits_{k=p}^{q-1} A_k \left(u_{k+1} - u_k\right)$ est identifiée à l'intégrale $\int_a^b F(t)\, g'(t)\, dt$.

En utilisant cette transformation, on obtient le résultat suivant.

Théorème 6.24 (Abel) *Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle qui tend vers* 0 *en décroissant et* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de nombres complexes telle que la suite* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k.$$

soit bornée. Dans ces conditions la série $\sum u_n \alpha_n$ *est convergente et, en désignant par* $M > 0$ *un majorant de la suite* $(|A_n|)_{n\in\mathbb{N}}$, *on a les majoration des restes :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |R_{n+1}| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_k u_k \right| \leq 2M u_{n+1}.$$

Démonstration. Il s'agit de montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles de la série $\sum u_n\alpha_n$ est convergente. En utilisant, pour $n \geq 2$, la transformation d'Abel :

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k u_k = \alpha_0 u_0 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k = \alpha_0 u_0 + A_n u_n - A_0 u_1 - \sum_{k=1}^{n-1} A_k \left(u_{k+1} - u_k\right) \\ = A_n u_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k \left(u_{k+1} - u_k\right) \end{aligned}$$

$(\alpha_0 = A_0)$ cela revient à montrer que la série $\sum A_n \left(u_{n+1} - u_n\right)$ est convergente (la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, donc $(A_n u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend aussi vers 0). Pour ce faire nous allons montrer qu'elle est absolument convergente, ce qui résulte de :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left|A_n \left(u_{n+1} - u_n\right)\right| \leq M \left(u_n - u_{n+1}\right)$$

(la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante) la série $\sum \left(u_{n+1} - u_n\right)$ étant convergente puisque de même nature que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Pour ce qui est des restes, on utilise encore la transformation d'Abel qui nous permet d'écrire pour $m > n + 1$:

$$\begin{aligned} \left|\sum_{k=n+1}^{m} \alpha_k u_k\right| &= \left|A_m u_m - A_n u_{n+1} - \sum_{k=n+1}^{m-1} A_k \left(u_{k+1} - u_k\right)\right| \\ &\leq \left|A_m u_m - A_n u_{n+1}\right| + \sum_{k=n+1}^{m-1} \left|A_k\right| \left(u_k - u_{k+1}\right) \\ &\leq M \left(u_m + u_{n+1} + \sum_{k=n+1}^{m-1} \left(u_k - u_{k+1}\right)\right) = 2M u_{n+1} \end{aligned}$$

puis, faisant tendre m vers l'infini, on obtient :

$$|R_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_k u_k\right| \leq 2M u_{n+1}.$$

■

Remarque 6.16 *En utilisant la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\alpha_n = (-1)^n$, on retrouve le théorème des séries alternées (on a $|A_n| \leq 1$).*

Une utilisation classique du théorème d'Abel est l'étude des séries trigonométriques.

Théorème 6.25 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs.*

1. *Si la série $\sum u_n$ est convergente, alors la série $\sum u_n e^{int}$ est absolument convergente pour tout réel t.*
2. *Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 en décroissant, alors la série $\sum u_n e^{int}$ est convergente pour tout réel $t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.*

Démonstration.

1. Résulte immédiatement de $\left|u_n e^{it}\right| = u_n$ pour tout réel t.

2. Pour tout réel $t \in \mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}$, on a :

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} e^{ikt} = \frac{1 - e^{i(n+1)t}}{1 - e^{it}} = \frac{e^{i\frac{n+1}{2}t}}{e^{i\frac{t}{2}}} \frac{e^{-i\frac{n+1}{2}t} - e^{i\frac{n+1}{2}t}}{e^{-i\frac{t}{2}} - e^{i\frac{t}{2}}}$$
$$= e^{in\frac{t}{2}} \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

et :

$$|A_n| \leq \frac{1}{\left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right|}.$$

(pour $t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, on a $\sin\left(\dfrac{t}{2}\right) \neq 0$). Le résultat découle alors du théorème d'Abel.

■

Du théorème précédent, on déduit que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 en décroissant, alors la série $\sum u_n e^{-int}$ est convergente pour tout réel $t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ (remplacer t par $-t$) et en conséquence les séries $\sum u_n \cos(nt)$ et $\sum u_n \sin(nt)$ sont également convergentes. Pour $t \in \pi\mathbb{Z}$, on a $\cos(nt) = (-1)^n$ et $\sin(nt) = 0$ pour tout n et les séries $\sum u_n \cos(nt) \sum (-1)^n u_n$ et $\sum u_n \sin(nt)$ sont encore convergentes (la première par le théorème des séries alternées).

Exercice 6.41 *Montrer que pour tout réel $t \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, la série $\sum \dfrac{\sin(nt)}{n}$ est semi-convergente.*

Solution 6.41 *Comme $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ tend vers 0 en décroissant, la série $\sum \dfrac{\sin(nt)}{n}$ est convergente. Avec $|\sin(nt)| \geq \sin^2(nt)$ pour tous n, t et :*

$$\frac{\sin^2(nt)}{n} = \frac{1}{n} - \frac{\cos(2nt)}{n}$$

on déduit que $\sum \dfrac{|\sin(nt)|}{n}$ est divergente comme $\sum \dfrac{\sin^2(nt)}{n}$ (somme d'une divergente et d'une convergente avec $2t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$).

Une petite modification de la transformation d'Abel permet de montrer le résultat suivant.

Théorème 6.26 (Abel) *Soient et $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suite de nombres complexes telles que la série $\sum \alpha_n$ soit convergente et la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ absolument convergente. Dans ces conditions la série $\sum u_n \alpha_n$ est convergente.*

Démonstration. On utilise une transformation d'Abel qui fait intervenir les restes $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_k$ de la série convergente $\sum \alpha_n$ et non pas les sommes partielles A_n de cette série. Pour ce faire, on écrit que $\alpha_k = R_{k-1} - R_k$, pour tout entier $k \geq 1$ et :

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k = \sum_{k=1}^{n} (R_{k-1} - R_k) u_k = \sum_{k=1}^{n} R_{k-1} u_k - \sum_{k=1}^{n} R_k u_k$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} R_k u_{k+1} - \sum_{k=1}^{n} R_k u_k = R_0 u_1 - R_n u_n + \sum_{k=1}^{n-1} R_k (u_{k+1} - u_k)$$

Comme $\sum (u_{n+1} - u_n)$ absolument convergente, elle convergente et cette série étant de même nature que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, cette dernière est convergente. Il en résulte que la suite $(R_n u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 ($(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 puisque $\sum \alpha_n$ converge). Enfin avec $|R_n (u_{n+1} - u_n)| \leq M |u_{n+1} - u_n|$ où M est un majorant de $(|R_n|)_{n\in\mathbb{N}}$, on déduit que la série $\sum R_n (u_{n+1} - u_n)$ est absolument convergente comme $\sum (u_{n+1} - u_n)$. En définitive, $\sum u_n \alpha_n$ est convergente. ■

Exercice 6.42 *Montrer que si la série réelle ou complexe $\sum \alpha_n$ est convergente, alors pour tout nombre complexe z tel que $|z| < 1$, la série $\sum \alpha_n z^n$ est convergente.*

Solution 6.42 *En posant $u_n = z^n$, on a pour $|z| < 1$:*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |u_{n+1} - u_n| = \sum_{n=0}^{+\infty} |z-1| |z|^n = |z-1| \frac{1}{1-|z|}.$$

Le deuxième théorème d'Abel nous dit alors que la série $\sum \alpha_n z^n$ est convergente.

6.9 Exemples de séries approximant π

Pour chacune des séries de somme égale à π, on note S_n la somme partielle d'indice n et $R_n = |\pi - S_n|$ l'erreur d'indice n.

On a déjà vu la série de Grégory :

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

(exercice 6.10). Cette série converge lentement :

$$R_{10} \backsimeq 9.072\,3 \times 10^{-2},\ R_{100} \backsimeq 9.900\,7 \times 10^{-3},\ R_{1000} \backsimeq 9.99 \times 10^{-4}$$

Le théorème des séries alternées nous dit que cette erreur est majorée par $\dfrac{4}{2n+3}$.

Une formule d'Euler :

$$\pi = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!}$$

On a :

$$R_{10} \backsimeq 4.866\,3 \times 10^{-4},\ R_{100} \backsimeq -5.\,048\,7 \times 10^{-29}$$

La série de Machin donne une meilleure approximation :

$$\pi = 16 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{5^{2n+1}} \frac{(-1)^n}{2n+1} - 4 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{239^{2n+1}} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

On a :

$$R_5 \backsimeq 9.744\,8 \times 10^{-10},\ R_{10} \backsimeq 5.628\,5 \times 10^{-17},\ R_{20} \backsimeq 1.514\,6 \times 10^{-28}$$

La formule suivante, de Plouffe converge aussi rapidement :

$$\pi = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{4}{8n+1} - \frac{1}{4n+2} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6} \right) \frac{1}{16^n}$$

(voir le problème 32). On a :

$$R_5 \backsimeq 3.617\,1 \times 10^{-10},\ R_{10} \backsimeq 1.088\,5 \times 10^{-16},\ R_{20} \backsimeq 1.009\,7 \times 10^{-28}$$

La plus belle formule est celle de Ramanujan :

$$\pi = \frac{9801}{2\sqrt{2}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(4n)!}{(n!)^4}\frac{1103+26390n}{396^{4n}}}.$$

Il l'énonça en 1910, mais ne fut démontrée qu'en 1985 par les frères Borwein.

On a :

$$R_2 \backsimeq 5.682\,5 \times 10^{-24},\ R_3 \backsimeq 5.048\,7 \times 10^{-29}$$

6.10 Produits infini

En s'inspirant de la notion de série numérique, on peut définir la notion de produit infini comme suit.

Étant donnés un entier naturel n_0 et une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ de nombres complexes, étudier le produit infini de terme général u_n revient à étudier la suite $(P_n)_{n\geq n_0}$ des produits partiels définie par :

$$\forall n \geq n_0,\ P_n = \prod_{k=n_0}^{n} u_k.$$

On peut remarquer que cette suite est aussi définie par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} P_{n_0} = u_{n_0}, \\ \forall n \geq n_0 + 1,\ P_n = P_{n-1} \cdot u_n. \end{cases}$$

On notera plus simplement $\prod u_n$ un tel produit et on parlera de produit infini.

Pour tout entier $n \geq n_0$, on dit que u_n est le terme d'indice n et P_n le produit partiel d'indice n de ce produit infini.

On supposera, a priori, que $n_0 = 0$.

Définition 6.7 *On dit que le produit infini $\prod u_n$ est convergent si la suite de ses produits partiels $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Dans le cas contraire, on dit que le produit infini est divergent.*

Dans le cas où le produit infini $\prod u_n$ est convergent, on notera $\prod\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ la limite de la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$, soit :

$$\prod_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\prod_{k=0}^{n} u_k$$

Remarque 6.17 *Si l'un des u_n est nul, on aura $P_m = 0$ pour tout $m \geq n$ et le produit infini converge toujours.*

Si $\prod u_n$ est un produit infini, on supposera que tous les u_n sont non nuls.

Exercice 6.43 *Montrer que le produit infini $\prod\left(1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right)$ est convergent et calculer sa valeur.*

Solution 6.43 *On note :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P_n = \prod_{k=0}^{n} \left(1 + \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}\right)$$

On a vu avec l'exercice 6.28 que la série de terme général $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right)$ *est divergente vers* $-\infty$.
La suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est à valeurs strictement positives et on a* $\ln(P_n) = \sum_{k=0}^{n} u_k$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *Il en résulte que* $\lim_{n\to+\infty} \ln(P_n) = -\infty$ *et* $\lim_{n\to+\infty} P_n = 0$, *ce qui signifie que le produit infini* $\prod \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right)$ *converge vers* 0.

L'exercice précédent nous montre qu'un produit infini de termes non nuls peut très bien converger vers 0.

Définition 6.8 *On dit que le produit infini* $\prod u_n$ *est strictement convergent s'il converge vers un complexe non nul.*

Comme pour les séries numériques, on a la condition nécessaire de stricte convergence suivante.

Théorème 6.27 *Si le produit infini* $\prod u_n$ *est strictement convergent, alors la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* 1.

Démonstration. Résulte immédiatement de $u_n = \frac{P_n}{P_{n-1}}$ pour $n \geq 1$ et de $\lim_{n\to+\infty} P_n \neq 0$. ■

Dans ce qui suit, on écrira les u_n sous la forme $u_n = 1 + v_n$ avec $v_n \neq -1$ pour tout n et en cas de stricte convergence de $\prod u_n$, on aura $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$.

Dans le cas où les v_n sont réels positifs, l'utilisation de la fonction logarithme nous donne le résultat suivant.

Théorème 6.28 *Soit* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de réels positifs ou nuls. Le produit infini* $\prod (1 + v_n)$ *est strictement convergent si, et seulement si, la série* $\sum v_n$ *est convergente.*

Démonstration. En notant $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des produits partiels de $\prod (1 + v_n)$, on a :

$$P_{n+1} = P_n (1 + v_n) \geq P_n > 0$$

Cette suite est donc croissante.

Si $\sum v_n$ converge, on a :

$$\ln(P_n) = \sum_{k=0}^{n} \ln(1 + v_k) \leq \sum_{k=0}^{n} v_k \leq S = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

c'est-à-dire que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante majorée à valeurs strictement positives, elle converge donc vers un réel $P > 0$.

Supposons que $\sum v_n$ soit divergente. Si $\sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1 + v_n) < +\infty$, on a alors $\lim_{n\to+\infty} \ln(1 + v_n) = 0$, donc $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$ et $\ln(1 + v_n) \underset{k\to+\infty}{\backsim} v_n$ qui entraîne $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n < +\infty$ en contradiction avec l'hypothèse de départ. On a donc $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \ln(1+v_n) = +\infty$ et il en résulte que $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(P_n) = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = +\infty$, ce qui signifie que le produit infini $\prod(1+v_n)$ est divergent. ∎

Pour les produits infinis de la forme $\prod(1-v_n)$ avec $v_n \geq 0$, la situation est plus simple.

Théorème 6.29 *Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs qui tend vers 0, alors le produit infini $\prod(1-v_n)$ est convergent.*
Dans le cas où les v_n sont tous différents de 1, ce produit infini converge vers 0 si la série $\sum v_n$ diverge et il est strictement convergent si cette série converge.

Démonstration. On note $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des produits partiels de $\prod(1-v_n)$.
Si l'un des v_n vaut 1, alors la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire sur 0.
On suppose donc tous les v_n différents de 1.
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ et il existe un entier n_0 tel que $1-v_n > 0$ pour tout $n \geq n_0$, ce qui permet d'écrire pour $n \geq n_0+1$, $P_n = P_{n_0}Q_n$, avec $Q_n = \prod\limits_{k=n_0+1}^{n}(1-u_k) > 0$.

On a alors pour $n \geq n_0+1$:

$$0 < Q_{n+1} = Q_n(1-v_n) \leq P_n$$

c'est-à-dire que la suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante minorée par 0, elle converge donc vers un réel $Q \geq 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = P_{n_0}Q = P$.

Supposons que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n = +\infty$ (la série $\sum v_n$ est à termes positifs). Si $P > 0$, on a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(P_n) = \ln(P)$, soit $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \ln(1-v_n) = \ln(P)$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(1-v_n) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, ce qui entraîne $\ln(1-v_n) \underset{n\to+\infty}{\backsim} -v_n < 0$ et donne $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n < +\infty$ en contradiction avec l'hypothèse de départ. On a donc $P = \lim\limits_{n\to+\infty} P_n = 0$ si $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n = +\infty$.

Si $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n = S < +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, $\ln(1-v_n) \underset{n\to+\infty}{\backsim} -v_n$ et $\sum \ln(1-v_n)$ converge vers un réel S, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(P_n) = S$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = e^S > 0$. ∎

Par exemple, pour $v_n = \dfrac{1}{n+1}$, on a $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n+1} = +\infty$ et le produit infini $\prod(1-v_n)$ converge vers 0.

Exercice 6.44 *Montrer que le produit infini $\prod\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$ converge strictement et calculer sa valeur (ce produit est considéré à partir de $n=2$).*

Solution 6.44 *La convergence de $\sum \dfrac{1}{n^2}$ nous assure la stricte convergence du produit infini. Pour tout $n \geq 2$, on a :*

$$\begin{aligned} P_n &= \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n}\left(\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}\right) \\ &= \frac{1\cdot 3}{2^2}\frac{2\cdot 4}{3^2}\frac{3\cdot 5}{4^2}\cdots\frac{(n-2)\,n}{(n-1)^2}\frac{(n-1)(n+1)}{n^2} = \frac{n+1}{2n} \end{aligned}$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = \dfrac{1}{2}$, *soit* $\prod\limits_{n=2}^{+\infty}\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right) = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 6.45

1. *Montrer que, pour tout réel* $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, *le produit infini* $\prod\left(1-\dfrac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$ *converge strictement.*
2. *Montrer que, pour tout entier naturel* n, *il existe un polynôme* P_n *de degré* n *tel que* $\sin\left((2n+1)x\right) = \sin(x) P_n\left(\sin^2(x)\right)$ *pour tout réel* x. *On vérifiera que le coefficient dominant de* P_n *est* $\alpha_n = (-1)^n 4^n$ *et que* $P_n(0) = 2n+1$.
On peut utiliser la relation : $\sin\left((2n+1)x\right) = \Im\left(e^{i(2n+1)x}\right)$.
3. *Déterminer les racines du polynôme* P_n, *pour* $n \geq 1$.
4. *Montrer que, pour tout réel* $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ *et tout entier* $n \geq 1$, *on a :*
$$\begin{aligned}\sin\left((2n+1)x\right) &= (2n+1)\sin(x)\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\sin^2(x)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)\\ &= (2n+1)\tan(x)\cos^{2n+1}(x)\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\tan^2(x)}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)\end{aligned}$$
5. *Montrer que pour* $0 < x < y < \dfrac{\pi}{2}$, *on a :*
$$0 < \frac{\tan(x)}{\tan(y)} < \frac{x}{y} < \frac{\sin(x)}{\sin(y)}$$
6. *Montrer que* $\lim\limits_{n\to+\infty}\cos^n\left(\dfrac{x}{n}\right) = 1$ *pour tout réel* $x \in \left]0, \pi\right[$.
7. *Montrer que, pour tout réel* $x \in [-\pi, \pi]$, *on a :*
$$\sin(x) = x\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$

Solution 6.45

1. *Pour* $x \in \mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$, *la suite* $\left(\dfrac{x^2}{n^2\pi^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est formée de réels positifs tous différents de* 1 *et cette suite tend vers* 0, *donc le produit infini* $\prod\left(1-\dfrac{t^2}{n^2\pi^2}\right)$ *est strictement convergent.*
2. *On a :*
$$\begin{aligned}e^{i(2n+1)x} &= \left(\cos(x)+i\sin(x)\right)^{2n+1}\\ &= \sum_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}^{k}\cos^{2n+1-k} i^k \sin^k(x)\\ &= \sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k}\cos^{2n+1-2k}(-1)^k\sin^{2k}(x) + i\sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1}\cos^{2n-2k}(-1)^k\sin^{2k+1}(x)\\ &= \cos(x)\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_{2n+1}^{2k}\left(1-\sin^2(x)\right)^{n-k}\sin^{2k}(x)\\ &+ i\sin(x)\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_{2n+1}^{2k+1}\left(1-\sin^2(x)\right)^{n-k}\sin^{2k}(x)\end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\sin\left(\left(2n+1\right)x\right)=\Im\left(e^{i(2n+1)x}\right)=\sin\left(x\right)P_n\left(\sin^2\left(x\right)\right)$$

où $P_n\left(t\right)=\sum_{k=0}^{n}\left(-1\right)^k C_{2n+1}^{2k+1}\left(1-t\right)^{n-k}t^k$.

Ce polynôme est de degré n *et son coefficient dominant de* P_n *est :*

$$\alpha_n=\left(-1\right)^n\sum_{k=0}^{n}C_{2n+1}^{2k+1}=\left(-1\right)^n\sum_{k=0}^{n}C_{2n+1}^{2k}=4^n$$

cette dernière égalités étant déduite de :

$$2^{2n+1}=\left(1+1\right)^{2n+1}=\sum_{k=0}^{2n+1}C_{2n+1}^{k}=\sum_{k=0}^{n}C_{2n+1}^{2k}+\sum_{k=0}^{n}C_{2n+1}^{2k+1}$$

$$0=\left(1-1\right)^{2n+1}=\sum_{k=0}^{2n+1}C_{2n+1}^{k}\left(-1\right)^k=\sum_{k=0}^{n}C_{2n+1}^{2k}-\sum_{k=0}^{n}C_{2n+1}^{2k+1}$$

qui donne par addition :

$$2^{2n+1}=2\cdot 4^n=2\sum_{k=0}^{n}C_{2n+1}^{2k}$$

On a aussi :

$$P_n\left(0\right)=C_{2n+1}^{1}=2n+1.$$

3. *Pour* k *entier compris entre* 1 *et* n*, on a :*

$$0=\sin\left(\left(2n+1\right)\frac{k\pi}{2n+1}\right)=\sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)P_n\left(\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)$$

avec $\sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\neq 0$ *(pour* $1\leq k\leq n$*, on a* $0<\frac{k\pi}{2n+1}<\frac{\pi}{2}$*), donc* $P_n\left(\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)=0$*. Les* $x_{n,k}=\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$ *nous fournissent donc* n *racines distinctes de* P_n *(la fonction* $\sin$ *est strictement croissante sur* $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$*) et ont les a toutes.*

4. *On a donc :*

$$P_n\left(t\right)=\left(-1\right)^n 4^n\prod_{k=1}^{n}\left(t-\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)$$

et :

$$\begin{aligned}\sin\left(\left(2n+1\right)x\right)&=\left(-1\right)^n 4^n\sin\left(x\right)\prod_{k=1}^{n}\left(\sin^2\left(x\right)-\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)\\&=\left(-1\right)^n 4^n\sin\left(x\right)\prod_{k=1}^{n}\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{\sin^2\left(x\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}-1\right)\end{aligned}$$

avec :

$$2n+1=P_n\left(0\right)=4^n\prod_{k=1}^{n}\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$$

ce qui donne :

$$\sin((2n+1)x) = (2n+1)\sin(x)\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{\sin^2(x)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)$$

pour tout réel x.

En utilisant la relation, $1 = \cos^2(x) + \sin^2(x)$, on a, pour k compris entre 1 et n :

$$\begin{aligned}
1 - \frac{\sin^2(x)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} &= \cos^2(x) + \sin^2(x)\left(1 - \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right) \\
&= \cos^2(x) + \sin^2(x)\left(\frac{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) - 1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right) \\
&= \cos^2(x) - \sin^2(x)\left(\frac{\cos^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right) \\
&= \cos^2(x) - \frac{\sin^2(x)}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}
\end{aligned}$$

ce qui donne pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$:

$$1 - \frac{\sin^2(x)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = \cos^2(x)\left(1 - \frac{\tan^2(x)}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)$$

et :

$$\begin{aligned}
\sin((2n+1)x) &= (2n+1)\sin(x)\prod_{k=1}^{n}\left(\cos^2(x)\left(1 - \frac{\tan^2(x)}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)\right) \\
&= (2n+1)\sin(x)\cos^{2n}(x)\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{\tan^2(x)}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right) \\
&= (2n+1)\tan(x)\cos^{2n+1}(x)\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{\tan^2(x)}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)
\end{aligned}$$

5. *Pour y fixé dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on désigne par f la fonction définie sur $[0, y]$ par $f(x) = y\sin(x) - x\sin(y)$. Cette fonction est indéfiniment dérivable avec $f'(x) = y\cos(x) - \sin(y)$ et $f''(x) = -y\sin(x) < 0$ pour $x \in]0, y]$, donc f' est strictement décroissante sur $[0, y]$. Comme $f(0) = f(y) = 0$, le théorème de Rolle nous dit qu'il existe $c \in]0, y[$ tel que $f'(c) = 0$ et avec la stricte décroissance de f', on déduit que $f'(x) > 0 = f'(c)$ sur $]0, c[$ et $f'(x) < 0$ sur $]c, y[$. La fonction f est donc strictement croissante sur $]0, c[$, strictement décroissante sur $]c, y[$ avec $f(0) = f(y) = 0$ et en conséquence $f(x) > 0$ sur $]0, y[$ (f est strictement concave sur $[0, y]$), ce qui équivaut à $\frac{x}{y} < \frac{\sin(x)}{\sin(y)}$.*

   Une étude analogue donne $\frac{\tan(x)}{\tan(y)} < \frac{x}{y}$.

6. *Si $u_n = \cos^n\left(\frac{x}{n}\right)$, on a*

$$\ln(u_n) = n\ln\left(1 - \frac{x^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = -\frac{x^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(u_n) = 0$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

7. *Pour* $x \in \left]0,\pi\right[$ *et* $n \geq 1$, *on a :*

$$\begin{aligned}\sin(x) &= \sin\left((2n+1)\frac{x}{2n+1}\right)\\ &= (2n+1)\sin\left(\frac{x}{2n+1}\right)\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2n+1}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)\end{aligned}$$

avec :

$$0 < \frac{x}{2n+1} < \frac{k\pi}{2n+1} < \frac{\pi}{2}$$

pour k *compris entre* 1 *et* n, *ce qui donne :*

$$0 < \frac{x}{k\pi} = \frac{\frac{x}{2n+1}}{\frac{k\pi}{2n+1}} < \frac{\sin\left(\frac{x}{2n+1}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} < 1$$

et :

$$0 < 1 - \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2n+1}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} < 1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}$$

Tenant compte de $\sin\left(\frac{x}{2n+1}\right) < \frac{x}{2n+1}$, *il en résulte que :*

$$\begin{aligned}\sin(x) &< (2n+1)\sin\left(\frac{x}{2n+1}\right)\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)\\ &< x\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)\end{aligned}$$

et faisant tendre n *vers l'infini, on en déduit que :*

$$\sin(x) \leq x\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$

(on sait que le produit infini converge).
Pour $x \in \left]0,\pi\right[$ *et* $n \geq 1$, *on a* $\frac{x}{2n+1} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ *et :*

$$\begin{aligned}\sin(x) &= \sin\left((2n+1)\frac{x}{2n+1}\right)\\ &= (2n+1)\tan\left(\frac{x}{2n+1}\right)\cos^{2n+1}\left(\frac{x}{2n+1}\right)\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\tan^2\left(\frac{x}{2n+1}\right)}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)\end{aligned}$$

avec :

$$0 < \frac{\tan\left(\frac{x}{2n+1}\right)}{\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} < \frac{x}{k\pi} < 1$$

pour k *compris entre* 1 *et* n *et :*

$$0 < 1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2} < 1 - \frac{\tan^2\left(\frac{x}{2n+1}\right)}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$$

Tenant compte de $\tan\left(\frac{x}{2n+1}\right) > \frac{x}{2n+1}$*, il en résulte que :*

$$\sin(x) > x\cos^{2n+1}\left(\frac{x}{2n+1}\right)\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$$

et faisant tendre n *vers l'infini, on en déduit que :*

$$\sin(x) \geq x\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$

et $\sin(x) = x\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$ *pour* $x \in \left]0,\pi\right[$.
Ce résultat est valable pour $x \in \{-\pi, 0, \pi\}$ *et par parité, cette identité est encore valable pour* $x \in [-\pi,\pi]$.

Remarque 6.18 *En utilisant le développement précédent en produit infini de* $\sin(x)$, *Euler démontre l'égalité* $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ *comme suit : le coefficient de* x^3 *dans le développement limité à l'ordre* 3 *de ce produit infini est égal* $-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2\pi^2}$*, mais c'est aussi celui de* x^3 *dans le développement de* $\sin(x)$, *soit* $-\frac{1}{6}$*, ce qui donne le résultat. Il faudrait en fait justifier un peu plus sérieusement la première affirmation.*

De manière plus générale la convergence absolue de $\sum v_n$ avec les v_n réels différents de -1 nous assure la stricte convergence $\prod(1+v_n)$.

Théorème 6.30 *Si* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de réels tous différents de* -1 *telle que la série* $\sum v_n$ *soit absolument convergente, alors le produit infini* $\prod(1+v_n)$ *est strictement convergent.*

Démonstration. On note toujours $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des produits partiels de $\prod(1+v_n)$.

Avec $\sum_{n=0}^{+\infty}|v_n| < +\infty$, on déduit que $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$ et il existe un entier n_0 tel que $1+v_n > 0$ pour tout $n \geq n_0$, ce qui permet d'écrire pour $n \geq n_0+1$, $P_n = P_{n_0}Q_n$, avec $Q_n = \prod_{k=n_0+1}^{n}(1+u_k) > 0$.

Avec $\ln(Q_n) = \sum_{k=n_0+1}^{n}\ln(1+v_k)$ et $|\ln(1+v_k)| \underset{k\to+\infty}{\backsim} |v_k|$, on déduit que la série $\sum\ln(1+v_n)$ est absolument convergente. La suite $(\ln(Q_n))_{n\geq n_0+1}$ est donc convergente et en notant S sa limite, on a $\lim_{n\to+\infty} P_n = P_{n_0}e^S \neq 0$. ■

6.11 Exercices supplémentaires

Exercice 6.46 *Le but de cet exercice est de calculer la somme de la série numérique :*

$$\sum\frac{1}{u_n} \text{ où } u_n = \sum_{k=1}^{n}k^2 \text{ pour tout } n \geq 1$$

1. *Montrer que*
$$\forall n \geq 1,\ u_n = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$$
2. *Justifier la convergence de la série* $\sum \dfrac{1}{u_n}$.
   (a) *Montrer que la suite* $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ *définie par* $\gamma_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \ln(n)$ *pour tout* $n \geq 1$ *est décroissante minorée. Sa limite est la constante d'Euler, notée* γ.
   (b) *Montrer que la suite* $\left(\sum\limits_{k=n+1}^{2n+1} \dfrac{1}{k}\right)_{n\geq 1}$ *est convergente et déterminer sa limite.*
3.
   (a) *Déterminer des réels* a, b, c *tels que l'on ait, pour tout* $n \geq 1$ *:*
$$\frac{1}{u_n} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{2n+1}$$
   (b) *Calculer la somme* $S = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{u_n}$.

Solution 6.46

1. *En effectuant le changement d'indice* $k = j+1$, *on a :*
$$v_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{j=0}^{n} (j+1)^3 = \sum_{j=0}^{n} j^3 + 3\sum_{j=0}^{n} j^2 + 3\sum_{j=0}^{n} j + \sum_{j=0}^{n} 1$$
soit :
$$v_{n+1} = v_n + 3u_n + 3w_n + n + 1$$
où $w_n = \sum\limits_{j=0}^{n} j = \dfrac{n\,(n+1)}{2}$ *et :*
$$\begin{aligned} 3u_n = v_{n+1} - v_n - 3w_n - (n+1) &= (n+1)^3 - 3\frac{n\,(n+1)}{2} - (n+1) \\ &= \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{2} \end{aligned}$$
ce qui donne $u_n = \dfrac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$.
On peut aussi procéder par récurrence sur $n \geq 1$.
2. *On a* $0 < \dfrac{1}{u_n} \leq \dfrac{1}{n^2}$, *ce qui entraîne la convergence de la série* $\sum \dfrac{1}{u_n}$.
3.
   (a) *Pour* $n \geq 1$, *on a :*
$$\begin{aligned} \gamma_{n+1} - \gamma_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) &= \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{t}\right) dt \\ &= \int_n^{n+1} \frac{t-(n+1)}{(n+1)\,t} dt < 0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire que $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ *est décroissante.*
La fonction $t \to \dfrac{1}{t}$ *est décroissante sur* $\mathbb{R}^{+*}$, *donc :*

$$\forall k \geq 1, \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{k} = \frac{1}{k}$$

et pour tout $n \geq 2$, *on a :*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} = \int_1^{n+1} \frac{dt}{t} = \ln(n+1),$$

soit $\gamma_n \geq \ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) > 0.$

(b) *On a pour tout* $n \geq 1$ *:*

$$\sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \gamma_{2n+1} + \ln(2n+1) - (\gamma_n + \ln(n))$$
$$= \gamma_{2n+1} - \gamma_n + \ln\left(\frac{2n+1}{n}\right)$$

et avec la convergence de la suite $(\gamma_n)_{n\geq 1}$, *on déduit que :*

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{k} = \ln(2).$$

4. *On note* $(S_n)_{n\geq 1}$ *la suite des sommes partielles de la série* $\sum \dfrac{1}{u_n}$.

(a) *On a la décomposition en éléments simples :*

$$\frac{1}{x(x+1)(2x+1)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} - \frac{4}{2x+1}$$

et :

$$\frac{1}{u_n} = 6\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{4}{2n+1}\right)$$

(b) *On a :*

$$\begin{aligned}
S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k} &= 6\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} - 4\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1}\right) \\
&= 6\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} - 4\left(\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} - 1\right)\right) \\
&= 6\left(4\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 4\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} + 3\right) \\
&= 24\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k}\right) + \frac{6}{n+1} + 18 \\
&= \frac{6}{n+1} + 18 - 24\sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\to} 18 - 24\ln(2),
\end{aligned}$$

soit :

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} k^2} = 6\left(3 - 4\ln(2)\right).$$

Exercice 6.47 *On s'intéresse à la série alternée de Bertrand de terme général* $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}$*, où* α *et* β *sont deux réels donnés. Les résultats sur les séries de Bertrand positives sont supposés connus.*

1. *Donner une condition nécessaire et suffisante, portant sur* α *et* β*, pour que cette série soit absolument convergente.*
2. *On suppose que* $\alpha = 0$*. Donner une condition nécessaire et suffisante, portant sur* β*, pour que cette série soit convergente.*
3. *On suppose que* $\alpha < 0$*. Quelle est la nature de cette série ?*
4. *Montrer que cette série converge pour* $\alpha > 0$ *et* $\beta \in \mathbb{R}$*.*

Solution 6.47

1. *La série* $\sum u_n$ *est absolument convergente si, et seulement si,* $\alpha > 1$ *et* $\beta \in \mathbb{R}$ *ou* $\alpha = 1$ *et* $\beta > 1$*.*
2. *On a* $u_n = \dfrac{(-1)^n}{(\ln(n))^\beta}$*.*
   (a) *Si* $\beta \leq 0$*,* $(|u_n|)_{n\geq 2} = \left((\ln(n))^{-\beta}\right)_{n\geq 2}$ *ne tend pas vers* 0 *et la série diverge.*
   (b) *Si* $\beta > 0$*, le théorème des séries alternées nous dit que* $\sum u_n$ *converge.*
3. *Pour* $\alpha < 0$*, on a* $|u_n| = \dfrac{n^{-\alpha}}{(\ln(n))^\beta} \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$ *et la série diverge.*
4. *Il reste à traiter les cas* $\alpha = 1$ *et* $\beta \leq 1$ *ou* $0 < \alpha < 1$ *et* $\beta \in \mathbb{R}$*.*
   (a) *Supposons* $\alpha = 1$ *et* $\beta \leq 1$*. La fonction* f *définie sur*$[2, +\infty[$ *par* $f(x) = x(\ln(x))^\beta$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *avec :*

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\ln(x))^\beta + \beta(\ln(x))^{\beta-1} \\ &= (\ln(x))^\beta \left(1 + \frac{\beta}{\ln(x)}\right) \end{aligned}$$

   Pour $0 \leq \beta \leq 1$*, on a* $f'(x) > 0$*, donc* f *est croissante sur*$[2, +\infty[$*. Comme* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$*, on en déduit que* $(|u_n|)_{n\geq 2}$ *tend vers* 0 *en décroissant et le théorème des séries alternées nous dit que* $\sum u_n$ *converge.*

   Pour $\beta < 0$*, avec* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\beta}{\ln(x)} = 0$*, on déduit que pour* x *grand* $f'(x) > 0$ *(précisément* $f'(x) > 0$ *pour* $x > e^{-\beta}$*) et comme on a encore* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x(\ln(x))^\beta = +\infty$*, on déduit du théorème des séries alternées que* $\sum u_n$ *converge.*

   (b) *Supposons* $0 < \alpha < 1$ *et* $\beta \in \mathbb{R}$*.. La fonction* f *définie sur*$[2, +\infty[$ *par* $f(x) = x^\alpha (\ln(x))^\beta$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *avec :*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \alpha x^{\alpha-1}(\ln(x))^\beta + \beta x^{\alpha-1}(\ln(x))^{\beta-1} \\ &= x^{\alpha-1}(\ln(x))^\beta \left(\alpha + \frac{\beta}{\ln(x)}\right) \end{aligned}$$

Comme $\lim_{x\to+\infty}\left(\alpha+\frac{\beta}{\ln(x)}\right)=\alpha>0$, *on déduit que pour* x *grand* $f'(x)>0$ *(précisément* $f'(x)>0$ *pour* $x>e^{-\frac{\beta}{\alpha}}$*) et comme on a encore* $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}x^{\alpha}(\ln(x))^{\beta}=+\infty$, *on déduit du théorème des séries alternées que* $\sum u_n$ *converge.*

Exercice 6.48 *À tout réel* $x\geq 0$, *on associe les suites* $(u_n(x))_{n\geq1}$ *et* $(v_n(x))_{n\geq1}$ *définies par :*

$$u_n(x)=\frac{n!x^n}{\prod_{k=1}^{n}(1+kx)}\ \text{ et } v_n(x)=\int_0^x u_n(t)\,dt$$

On désigne par $(h_n)_{n\geq1}$ *la suite définie par :*

$$h_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

1. *Montrer que pour tout réel* $R>0$, *on a :*

$$\forall x\in[0,R],\ \forall n\geq1,\ 0\leq u_n(x)<\frac{R}{h_n}\ \text{ et }\ 0\leq v_n(x)<\frac{R^2}{h_n}$$

En déduire que :

$$\forall x\geq 0,\ \lim_{n\to+\infty}u_n(x)=\lim_{n\to+\infty}v_n(x)=0$$

2. *Montrer que, pour tout réel* $t\geq0$ *et tout entier* $n\geq1$, *on a :*

$$\frac{n!}{\prod_{k=1}^{n}(t+k)}=1+t\sum_{k=1}^{n}C_n^k\frac{(-1)^k}{t+k}$$

3. *Montrer que, pour tout réel* $x\geq0$, *on a :*

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}C_n^k\frac{(-1)^{k+1}}{1+kx}=1$$

et :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}C_n^k\frac{(-1)^{k+1}}{k}\ln(1+kx)=x$$

4. *Montrer que, pour tout entier* k *compris entre* 1 *et* n, *on a :*

$$\frac{C_n^k}{k}=\sum_{j=k}^{n}\frac{C_j^k}{j}$$

5. *Montrer pour tout réel* $x\geq0$, *on a :*

$$x=\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{C_n^k}{n}\ln(1+kx)$$

Solution 6.48

1. *Pour* $x = 0$, *on a* $u_n(x) = v_n(x) = 0 < \dfrac{R}{h_n}$.
   Pour $x > 0$, *on a :*
$$0 < u_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \frac{kx}{1+kx} = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\dfrac{1}{kx}}$$
   avec :
$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{kx}\right) &= \left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{2x}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{nx}\right)\\ &> \frac{1}{x}+\frac{1}{2x}+\cdots+\frac{1}{nx} = \frac{1}{x}h_n\end{aligned}$$
   ce qui donne :
$$0 < u_n(x) < \frac{x}{h_n} \leq \frac{R}{h_n}$$
   et :
$$0 < v_n(x) = \int_0^x u_n(t)\,dt < x\frac{R}{h_n} \leq \frac{R^2}{h_n}$$
   Avec $\lim\limits_{n\to+\infty} h_n = +\infty$, *on en déduit que pour tout rée* $x \geq 0$, *on a :* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n(x) = 0$.

2. *En notant* $P_n(t) = \prod\limits_{k=0}^{n}(t+k)$, *on a la décomposition en éléments simples :*
$$\frac{1}{P_n(t)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_k}{t+k}$$
   avec :
$$\alpha_k = \lim_{t\to-k} \frac{t+k}{P_n(t)} = \frac{1}{P_n'(-k)}$$
   et :
$$P_n'(-k) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}(j-k) = (-1)^k\, k!\,(n-k)!$$
   ce qui donne :
$$\alpha_k = (-1)^k \frac{1}{k!\,(n-k)!} = (-1)^k \frac{C_m^k}{n!}$$
   donc :
$$\frac{1}{\prod\limits_{k=0}^{n}(t+k)} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} C_m^k \frac{(-1)^k}{t+k}$$
   soit :
$$\frac{n!}{t\prod\limits_{k=1}^{n}(t+k)} = \frac{1}{t} + \sum_{k=1}^{n} C_m^k \frac{(-1)^k}{t+k}$$
   et :
$$\frac{n!}{\prod\limits_{k=1}^{n}(t+k)} = 1 + t\sum_{k=1}^{n} C_m^k \frac{(-1)^k}{t+k}$$
   pour $t \geq 0$.

3. *Pour $x = 0$, on a :*

$$\sum_{k=1}^{n} C_n^k \frac{(-1)^{k+1}}{1+kx} = 1 - \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k = 1 - (1-1)^n = 1$$

et :

$$\sum_{k=1}^{n} C_n^k \frac{(-1)^{k+1}}{k} \ln(1+kx) = 0$$

Pour $x > 0$, en posant $t = \frac{1}{x}$, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} C_n^k \frac{(-1)^{k+1}}{1+kx} &= -t \sum_{k=1}^{n} C_n^k \frac{(-1)^k}{t+k} = 1 - \frac{n!}{\prod_{k=1}^{n} (t+k)} \\ &= 1 - \frac{n! x^n}{\prod_{k=1}^{n} (1+kx)} = 1 - u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\to} 1 \end{aligned}$$

En intégrant sur $[0, x]$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} C_n^k \frac{(-1)^{k+1}}{k} \ln(1+kx) = x - v_n(x) \underset{n\to+\infty}{\to} x$$

4. *En identifiant les coefficients de x^{k-1}, pour $1 \leq k \leq n$, dans l'égalité :*

$$\frac{(1+x)^n - 1}{x} = \frac{(1+x)^n - 1}{(1+x) - 1} = 1 + (1+x) + \cdots + (1+x)^{n-1}$$

on obtient :

$$C_n^k = \sum_{i=k-1}^{n-1} C_i^{k-1} = \sum_{j=k}^{n} C_{j-1}^{k-1} = \sum_{j=k}^{n} \frac{k}{j} C_j^k$$

5. *On en déduit que :*

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} C_n^k \frac{(-1)^{k+1}}{k} \ln(1+kx) &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{j=k}^{n} \frac{C_j^k}{j} \ln(1+kx) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{j} (-1)^{k+1} \frac{C_j^k}{j} \ln(1+kx) \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} x &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} C_n^k \frac{(-1)^{k+1}}{k} \ln(1+kx) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{j} (-1)^{k+1} \frac{C_j^k}{j} \ln(1+kx) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{C_n^k}{n} \ln(1+kx) \end{aligned}$$

Exercice 6.49 *Étudier la série de terme général* $u_n = (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

Solution 6.49 *La suite* $|u_n|$ *tend vers* 0 *en décroissant, donc le théorème des séries alternées nous dit que cette série est convergente. On note* S *la somme de cette série.*
En désignant par S_n *la somme partielle d'indice* $n \geq 1$, *on a :*

$$\begin{aligned}
S_{2n} &= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{2k+1}{2k}\right) - \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{2k}{2k-1}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \ln(2k+1) - \sum_{k=1}^{n} \ln(2k) - \sum_{k=1}^{n} \ln(2k) + \sum_{k=1}^{n} \ln(2k-1) \\
&= 2\left(\sum_{k=1}^{n} \ln(2k+1) - \sum_{k=1}^{n} \ln(2k)\right) - \ln(2n+1) \\
&= 2\ln\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{2k}\right) - \ln(2n+1) \\
&= 2\ln \frac{(2n+1)!}{\sqrt{2n+1}\,(2^n n!)^2} = 2\ln(\alpha_n)
\end{aligned}$$

En utilsant la formule de Stirling, $n! \backsim \sqrt{2\pi}\frac{\sqrt{n}n^n}{e^n}$, *on a :*

$$\alpha_n = \frac{(2n+1)!}{\sqrt{2n+1}\,(2^n n!)^2} \backsim \frac{\sqrt{2}}{e\sqrt{\pi}}\left(\frac{2n+1}{2n}\right)^{2n+1}$$

avec :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{2n+1}{2n}\right)^{2n+1} &= \exp\left((2n+1)\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right) \\
&= \exp\left((2n+1)\left(\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\to} e
\end{aligned}$$

ce qui donne :

$$S = \lim_{n\to+\infty} S_{2n} = 2\ln\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)$$

soit :

$$\sum_{n=1}^{100} (-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln\left(\frac{2}{\pi}\right)$$

Troisième partie

Fonctions numériques

7

Généralités sur les fonctions numériques

Une fonction numérique est, de manière générale, une fonction d'une variable réelle et à valeurs réelles.

7.1 Notions de base sur les fonctions

Si I, J sont deux parties non vides de $\mathbb{R}$, on note J^I l'ensemble de toutes les fonctions définies sur I et à valeurs dans J. Les éléments de J^I sont plus simplement appelés fonctions de I dans J.

On notera :

$$f: \begin{array}{ccc} I & \to & J \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

ou $f : I \to J$ ou $f : x \mapsto f(x)$ une fonction de I dans J.

L'ensemble J^I est une $\mathbb{R}$-algèbre commutative et unitaire en le munissant des opérations suivantes :

— pour f, g dans J^I, la somme $f + g$ est définie par :

$$\forall x \in I, \ (f + g)(x) = f(x) + g(x),$$

— pour f, g dans J^I, le produit $f \cdot g$ est définie par :

$$\forall x \in I, \ (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x),$$

— pour f dans J^I et λ dans $\mathbb{R}$, le produit λf est définie par :

$$\forall x \in I, \ \lambda f(x) = \lambda f(x).$$

Pour toute fonction $f \in \mathbb{R}^I$, on note $f(I)$ l'image de I. C'est le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ défini par :

$$y \in f(I) \Leftrightarrow \exists x \in I \mid y = f(x).$$

Si f est une fonction de I dans J et g une fonction définie sur J et à valeurs réelles, alors la composée $g \circ f$ est la fonction définie sur I par :

$$\forall x \in I, \ g \circ f(x) = g(f(x)).$$

On rappelle qu'une fonction f de I dans J est dite :

— injective si :

$$\forall (x, x') \in I^2, \ (f(x) = f(x') \Leftrightarrow x = x'),$$

ou de manière équivalente si :

$$\forall (x, x') \in I^2, \ (x \neq x' \Leftrightarrow f(x) \neq f(x')),$$

— surjective de I sur J :

$$\forall y \in J, \ \exists x \in I \mid y = f(x),$$

ou de manière équivalente si $J = f(I)$,

— bijective de I sur J si elle est injective et surjective de I sur J, ce qui équivaut à dire que :

$$\forall y \in J, \ \exists! x \in I \mid y = f(x).$$

Dans ce cas la fonction réciproque de f est la fonction f^{-1} définie sur J et à valeurs dans I définie par :

$$\left(y \in J \text{ et } x = f^{-1}(y)\right) \Leftrightarrow (x \in I \text{ et } y = f(x)).$$

Dans le cas où I est un intervalle d'extrémités $-a$ et a avec $a > 0$, on dit que $f \in \mathbb{R}^I$ est paire [resp. impaire], si $f(-x) = f(x)$ [resp. $f(-x) = -f(x)$] pour tout $x \in I$.

Une fonction paire n'est jamais injective.

Exercice 7.1 *Montrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s'écrit de manière unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.*

Solution 7.1 *Supposons que $f = g + h$ avec g paire et h impaire. Avec :*

$$\begin{cases} f(x) = g(x) + h(x) \\ f(-x) = g(-x) + h(-x) = g(x) - h(x) \end{cases}$$

pour tout réel x, on déduit que nécessairement g et h sont définies par $g(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ et $h(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$ pour tout réel x, ce qui prouve l'unicité d'une telle décomposition. Et réciproquement, on vérifie que ces deux fonctions conviennent.

Les fonctions usuelles $\sqrt{\cdot}$, exp, ln, x^a, cos, sin, tan, $\cdots$ sont supposés connus. Elles seront définies plus loin.

7.2 Fonctions bornées

Définition 7.1 *On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est majorée [resp. minorée] si l'ensemble $f(I)$ est majorée [resp. minorée] dans $\mathbb{R}$, ce qui signifie qu'il existe un réel M [resp. m] tel que :*

$$\forall x \in I, \ f(x) \leq M \ \text{[resp. } m \leq f(x) \text{]}.$$

Définition 7.2 *On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.*

Du théorème de la borne supérieure, on déduit que si $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction qui est majorée [resp. minorée], alors l'ensemble $f(I)$ admet une borne supérieure [resp. inférieure]. On note $\sup\limits_{x \in I} f(x)$ [resp. $\inf\limits_{x \in I} f(x)$] cette borne supérieure [resp. inférieure]. On rappelle que la borne supérieure est le plus petit des majorants de $f(I)$, ce qui se traduit par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in I,\ f(x) \leq \sup\limits_{x \in I} f(x) \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in I \mid \sup\limits_{x \in I} f(x) - \varepsilon < f(x) \leq \sup\limits_{x \in I} f(x) \end{array} \right.$$

et que la borne inférieure est le plus grand des minorants de $f(I)$, ce qui se traduit par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in I,\ \inf\limits_{x \in I} f(x) \leq f(x) \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in I \mid \inf\limits_{x \in I} f(x) \leq f(x) < \inf\limits_{x \in I} f(x) + \varepsilon \end{array} \right.$$

7.3 Fonctions monotones

Définition 7.3 *On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est croissante [resp. décroissante] si :*

$$\forall (x, x') \in I^2,\ (x \leq x' \Rightarrow f(x) \leq f(x') \ \text{[resp. } f(x) \geq f(x')\text{]}).$$

On définit les notions de fonction strictement croissante ou strictement décroissante en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes.

Définition 7.4 *On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est monotone si elle est croissante ou décroissante.*

Une fonction strictement monotone est une fonction strictement croissante ou strictement décroissante.

On résume avec le théorème suivant quelques résultats utiles relatifs aux opérations sur les fonctions monotones de même sens de variation.

Théorème 7.1 *Soient f, g deux fonctions croissantes [resp. décroissantes] de I dans $\mathbb{R}$.*

1. *La somme $f + g$ est croissante [resp. décroissante] ;*
2. *si f et g sont à valeurs positives, alors le produit $f \cdot g$ est croissant [resp. décroissant] ;*
3. *si f est à valeurs strictement positives, alors l'inverse $\dfrac{1}{f}$ est décroissante [resp. croissante].*

Démonstration. On suppose les fonctions f et g croissantes et on se donne x, x' dans I tels que $x \leq x'$.

1. Résulte de :
$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \leq f(x') + g(x') = (f + g)(x').$$
2. De $f(x) \leq f(x')$ et $g(x) \geq 0$, on déduit que $f(x)g(x) \leq f(x')g(x)$ et de $g(x) \leq g(x')$ et $f(x') \geq 0$, on déduit que $f(x')g(x) \leq f(x')g(x')$, ce qui donne $f(x)g(x) \leq f(x')g(x')$.
3. De $0 < f(x) \leq f(x')$, on déduit que $\dfrac{1}{f(x')} \leq \dfrac{1}{f(x)}$.

■

Théorème 7.2 *Soient f une fonction monotone de I dans $\mathbb{R}$ et g une fonction monotone définie sur une partie J de $\mathbb{R}$ qui contient $f(I)$. La fonction $g \circ f$ est alors monotone sur I. Cette fonction est croissante si f et g sont de même sens de variation et décroissante sinon.*

Démonstration. Soient x, x' dans I tels que $x \leq x'$.
Si f et g sont croissantes, alors $f(x) \leq f(x')$ et $g(f(x)) \leq g(f(x'))$.
Si f et g sont décroissantes, alors $f(x) \geq f(x')$ et $g(f(x)) \leq g(f(x'))$.
Si f est croissante et g décroissante, alors $f(x) \leq f(x')$ et $g(f(x)) \geq g(f(x'))$.
Si f est décroissante et g croissante, alors $f(x) \geq f(x')$ et $g(f(x)) \geq g(f(x'))$. ■

Théorème 7.3 *Si f est une application strictement monotone de I dans $\mathbb{R}$, elle réalise alors une bijection de I sur $f(I)$ d'inverse strictement monotone et de même sens de variation que f.*

Démonstration. En remplaçant éventuellement f par $-f$, on peut supposer que f est strictement croissante. Si $x \neq y$ dans I on a $x < y$ ou $y < x$ (l'ordre de $\mathbb{R}$ est total) ce qui entraîne $f(x) < f(y)$ ou $f(y) < f(x)$, soit $f(x) \neq f(y)$ dans tous les cas. La fonction f est donc injective et elle réalise une bijection de I sur $f(I)$.
Il est facile de vérifier que la fonction réciproque f^{-1} est également strictement croissante. ■

Le théorème de la borne supérieure nous permet de montrer le résultat suivant important dans l'étude des points fixes.

Exercice 7.2 *Montrer que toute fonction croissante f de $I = [a, b]$ dans I, admet au moins un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe un réel α dans I tel que $f(\alpha) = \alpha$.*

Solution 7.2 *L'ensemble :*

$$E = \{x \in [a, b] \mid f(x) \geq x\}$$

est non vide ($f(a) \in [a, b]$ entraîne $f(a) \geq a$) majoré par b, il admet donc une borne supérieure $\alpha \in [a, b]$.
Si $\alpha = a$ alors $f(x) < x$ pour tout $x \in I \setminus \{a\}$ et pour $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $a + \frac{1}{n_0} \leq b$ on a, du fait de la croissance de f sur I :

$$\forall n \geq n_0,\ a \leq f(a) \leq f\left(a + \frac{1}{n}\right) < a + \frac{1}{n}$$

qui par passage à la limite quand n tend vers l'infini donne $a = f(a)$.
Si $\alpha > a$, par définition de la borne supérieure, on peut trouver pour tout entier naturel non nul n un réel $x_n \in \left]\alpha - \frac{1}{n}, \alpha\right] \cap E$ et :

$$\forall n \geq 1,\ f(\alpha) \geq f(x_n) \geq x_n > \alpha - \frac{1}{n}$$

qui par passage à la limite quand n tend vers l'infini donne $f(\alpha) \geq \alpha$, c'est-à-dire que α est dans E.
Si $\alpha = b$ alors $\alpha \leq f(\alpha) \leq b = \alpha$ et $\alpha = f(\alpha)$.
Si $\alpha < b$, pour n assez grand on a $\alpha \leq f(\alpha) \leq f\left(\alpha + \frac{1}{n}\right) < \alpha + \frac{1}{n}$ qui par passage à la limite donne $\alpha = f(\alpha)$.
En définitive α est un point fixe de f dans I.

Remarque 7.1 *Le résultat de l'exercice précédent n'est plus valable pour f décroissante comme le montre l'exemple de la fonction f définie par $f(x) = 1$ si $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ et $f(x) = 0$ si $x \in \left]\frac{1}{2}, 1\right]$.*
Il n'est pas valable non plus sur un intervalle fermé non borné comme le montre l'exemple de $f(x) = x + 1$ sur $[0, +\infty[$.

Dans le cas d'une fonction décroissante on a le résultat suivant.

Exercice 7.3 *Montrer qu'une fonction décroissante f de $I = [a, b]$ dans I admet au plus un point fixe dans I.*

Solution 7.3 *Si $\alpha \leq \beta$ sont deux points fixes de f dans I, on a alors pour f décroissante :*

$$\alpha = f(\alpha) \geq f(\beta) = \beta,$$

et $\alpha = \beta$. La fonction f admet donc au plus un point fixe dans I.

8

Limites finies en un point

Pour ce chapitre, sauf précision contraire, I désigne une partie non vide de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I et à valeurs réelles ou complexes.

Là encore, les fonctions usuelles $\sqrt{\cdot}$, exp, ln, x^a, cos, sin, tan, $\cdots$ sont supposés connus.

8.1 Points adhérents à une partie non vide de $\mathbb{R}$

La notion de limite finie en un point d'une fonction (étudiée au paragraphe qui suit) est intéressante si le point est adhérent à l'ensemble de définition I de la fonction f. En un tel point la fonction f n'est, a priori, pas définie. De manière intuitive, un point adhérent à I est un réel qui « colle » à l'ensemble I. Plus précisément, on peut donner la définition suivante.

Définition 8.1 *On dit qu'un réel a est adhérent à l'ensemble I si :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ ]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\cap I \neq \emptyset.$$

Comme pour tout $a \in I$ et tout $\varepsilon > 0$, on a $a \in]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\cap I$, on déduit que tout point de I est adhérent à I.

On note $\overline{I}$ l'ensemble des points adhérents à I et on dit que $\overline{I}$ est l'adhérence (ou la fermeture) de I.

On a $I \subset \overline{I}$, mais ce sont les points de $\overline{I} \setminus I$ qui vont nous intéresser pour les problèmes de limites.

Par exemple pour $I =]a, b[\cup]b, c[$ avec $a < b < c$, les points a, b et c sont des points adhérents à I qui n'appartiennent pas à I et $\overline{I} = [a, b]$.

Exercice 8.1 *Montrer que si $I \subset J$, alors $\overline{I} \subset \overline{J}$.*

Solution 8.1 *Pour tout $a \in \overline{I}$, on a :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ ]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\cap J \supset]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\cap I \neq \emptyset$$

et donc $a \in \overline{J}$.

Exercice 8.2 *Montrer que si $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite réelle qui converge vers un réel ℓ, alors ℓ est adhérent à l'ensemble $I = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.*

Solution 8.2 *Par définition de la limite d'une suite, on a :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0,\ u_n \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[\cap I,$$

et en conséquence, ℓ est adhérent à I.

On peut donner la caractérisation séquentielle suivante de la notion de point adhérent. Cette caractérisation est souvent utilisée.

Théorème 8.1 *Un réel a est adhérent à I si, et seulement si, il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de I qui converge vers a.*

Démonstration. Si a est adhérent à I, pour tout entier $n \geq 1$ l'ensemble $\left]a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right[\cap I$ est non vide, il existe donc un réel $u_n \in I$ tel que $|u_n - a| < \frac{1}{n}$ et faisant tendre n vers l'infini, on déduit que $a = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
Réciproquement si a est limite d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de I, on a alors :

$$a \in \overline{\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}} \subset \overline{I}.$$

■

8.2 Limite finie en un point d'une fonction réelle

Pour ce paragraphe et les suivants, a est un point adhérent à I et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 8.2 *On dit que la fonction f admet une limite finie quand x tend vers a dans I, s'il existe un réel ℓ tel que :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \mid (x \in I \text{ et } |x - a| < \eta) \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon \tag{8.1}$$

(on dit aussi que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a dans I).

Comme dans le cas de la définition de la convergence d'une suite, les deux dernières inégalités dans (8.1) peuvent être strictes ou larges et il est parfois commode de se limiter à $\varepsilon \in]0,1[$ sans que cela ne soit restrictif.

Dire que f n'a pas de limite en a équivaut à dire que pour tout scalaire ℓ il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\forall \eta > 0,\ \exists x \in I \mid |x - a| < \eta \text{ et } |f(x) - \ell| \geq \varepsilon.$$

Il est parfois commode de traduire (8.1) sous la forme :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \mid \forall x \in]a - \eta, a + \eta[\cap I,\ |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

ou encore, dans le cas d'une fonction à valeurs réelles :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \mid \forall x \in]a - \eta, a + \eta[\cap I,\ f(x) \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[\,.$$

Le fait que a soit adhérent à I nous assure que $]a - \eta, a + \eta[\cap I$ n'est pas vide.

En utilisant l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on montre, comme pour les suites convergentes, que si f admet une limite ℓ en a, alors cette limite est unique. En effet, s'il existe deux réels ℓ et ℓ' vérifiant (8.1), on peut alors trouver pour tout réel $\varepsilon > 0$ un réel $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in I$ tel que $|x - a| < \eta$ on ait :

$$|\ell - \ell'| = |(\ell - f(x)) + (f(x) - \ell')| \leq |\ell - f(x)| + |f(x) - \ell'| < 2\varepsilon,$$

ce qui équivaut à $\ell - \ell' = 0$.

On note alors $\ell = \lim\limits_{\substack{x\to a \\ x\in I}} f(x)$ ou plus simplement $\ell = \lim\limits_{x\to a} f(x)$, le domaine de définition de la fonction f étant sous-entendu, cette limite. On écrira aussi $f(x) \underset{x\to a}{\to} \ell$.

Exercice 8.3 *Montrer que si $a \in I$ et si f a une limite finie en a, cette limite ne peut être que $f(a)$ (dans ce cas la fonction f est continue en a, comme nous le verrons au chapitre suivant).*

Solution 8.3 *En notant $\ell = \lim\limits_{x \to a} f(x)$, on a :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \mid \forall x \in \left]a - \eta, a + \eta\right[\cap I,\ |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

ce qui donne pour $x = a \in \left]a - \eta, a + \eta\right[\cap I$, $|f(a) - \ell| < \varepsilon$. Le réel $\varepsilon > 0$ étant quelconque, il en résulte que $\ell = f(a)$.

Exercice 8.4 *Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ admet une limite en 0, mais que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(0) = 1$ et $g(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ n'a pas de limite en 0.*

Solution 8.4 *Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $\eta > 0$, on a :*

$$\forall x \in \left]-\eta, \eta\right[\cap \mathbb{R}^*,\ |f(x)| = 0 < \varepsilon,$$

ce qui signifie que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.
Supposons que g admette une limite ℓ en 0. Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe alors un réel $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in \left]-\eta, \eta\right[,\ |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

et prenant $x \neq 0$ dans $\left]-\eta, \eta\right[$, on a $|\ell| < \varepsilon$, le réel $\varepsilon > 0$ étant quelconque, ce qui impose $\ell = 0$. Mais prenant $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ et $x = 0$ dans $\left]-\eta, \eta\right[$, on aboutit à $|f(0) - \ell| = 1 < \dfrac{1}{2}$, ce qui est absurde. La fonction g n'a donc pas de limite en 0.

Comme dans le cas des suites convergentes, les résultats qui suivent sont souvent utilisés pour justifier le calcul d'une limite.

Théorème 8.2 *S'il existe un réel ℓ, un réel $\delta > 0$ et une fonction φ de $J = \left]a - \delta, a + \delta\right[\cap I$ dans $\mathbb{R}^+$ tels que :*

$$\begin{cases} \forall x \in J,\ |f(x) - \ell| \leq \varphi(x) \\ \lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = 0 \end{cases}$$

alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$.

Démonstration. Pour tout réel $\varepsilon > 0$ il existe un réel $\eta > 0$ tel que :

$$x \in J \subset I \text{ et } |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varphi(x) < \varepsilon$$

ce qui donne le résultat annoncé. ■

Par exemple, avec $|\sin(x)| \leq |x|$ pour tout réel x, on déduit que $\lim\limits_{x \to 0} \sin(x) = 0$ et avec $|\cos(x) - 1| = 2\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right) \leq \dfrac{x^2}{2}$, on déduit que $\lim\limits_{x \to 0} \cos(x) = 1$.

Théorème 8.3 *Si f est à valeurs réelles et s'il existe un réel $\delta > 0$ et deux fonction φ et ψ définies sur $J = \left]a - \delta, a + \delta\right[\cap I$ et à valeurs réelles tels que :*

$$\begin{cases} \forall x \in J,\ \psi(x) \leq f(x) \leq \varphi(x) \\ \lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to a} \psi(x) = \ell \end{cases}$$

alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$.

Démonstration. Pour tout réel $\varepsilon > 0$ il existe un réel $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in J \subset I$ tel que $|x - a| < \eta$, on ait :

$$\ell - \varepsilon < \psi(x) \leq f(x) \leq \varphi(x) < \ell + \varepsilon$$

ce qui donne le résultat annoncé. ∎

Exercice 8.5 *Montrer que* $\lim\limits_{x \to 0} x \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$.

Solution 8.5 *Se déduit de* $\left| x \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) \right| \leq |x|$ *pour* $x \in \mathbb{R}^*$.

Exercice 8.6 *Montrer que, pour tous réels* $a > 0$ *et* $b > 0$, *on* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{a}\left[\dfrac{b}{x}\right] = \dfrac{b}{a}$, *où* $[\cdot]$ *désigne la fonction partie entière.*

Solution 8.6 *Pour tout réel* $x \neq 0$, *on a* $\left[\dfrac{b}{x}\right] \leq \dfrac{b}{x} < \left[\dfrac{b}{x}\right] + 1$, *de sorte que pour* $x > 0$ *on a :*

$$\frac{x}{a}\left[\frac{b}{x}\right] \leq \frac{b}{a} < \frac{x}{a}\left[\frac{b}{x}\right] + \frac{x}{a}$$

soit :

$$\frac{b}{a} - \frac{x}{a} < \frac{x}{a}\left[\frac{b}{x}\right] \leq \frac{b}{a} < \frac{b}{a} + \frac{x}{a}$$

et pour $x < 0$, *on a :*

$$\frac{x}{a}\left[\frac{b}{x}\right] \geq \frac{b}{a} > \frac{x}{a}\left[\frac{b}{x}\right] + \frac{x}{a}.$$

soit :

$$\frac{b}{a} + \frac{x}{a} < \frac{b}{a} \leq \frac{x}{a}\left[\frac{b}{x}\right] < \frac{b}{a} - \frac{x}{a}$$

Il en résulte que :

$$\frac{b}{a} - \frac{|x|}{a} < \frac{x}{a}\left[\frac{b}{x}\right] < \frac{b}{a} + \frac{|x|}{a}$$

pour tout $x \neq 0$ *et* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{a}\left[\dfrac{b}{x}\right] = \dfrac{b}{a}$.

Exercice 8.7 *Soit* $f :]-\alpha, \alpha[\setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, *avec* $\alpha > 0$. *Montrer que* $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \ell$ *si, et seulement si,* $\lim\limits_{x \to 0} f(\sin(x)) = \ell$.

Solution 8.7 *Supposons que* $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \ell$. *Soient* $\varepsilon > 0$ *et* $\eta \in \left]0, \min\left(\alpha, \dfrac{\pi}{2}\right)\right[$ *tel que* $|f(y) - \ell| < \varepsilon$ *pour tout* $y \in]-\eta, \eta[\setminus \{0\}$. *Pour tout* $x \in]-\eta, \eta[\setminus \{0\}$ *on a alors* $0 < |\sin(x)| \leq |x| < \eta$ *et* $|f(\sin(x)) - \ell| < \varepsilon$.
Réciproquement, supposons que $\lim\limits_{x \to 0} f(\sin(x)) = \ell$. *Soient* $\varepsilon > 0$ *et* $\delta \in \left]0, \min\left(\alpha, \dfrac{\pi}{2}\right)\right[$ *tel que* $|f(\sin(t)) - \ell| < \varepsilon$ *pour tout* $t \in]-\delta, \delta[\setminus \{0\}$. *En posant* $\eta = \sin(\delta)$, *pour* $0 < |x| < \eta$, *on a* $0 < |\arcsin(x)| < \arcsin(\eta) = \delta$ *et* $|f(x) - \ell| = |f(\sin(\arcsin(x))) - \ell| < \varepsilon$.

Comme pour les suites convergentes, l'inégalité triangulaire nous donne le résultat suivant.

Théorème 8.4 *Si f admet une limite finie quand x tend vers a dans I, il existe alors un réel $\eta > 0$ tel que la restriction de f à $J =]a - \eta, a + \eta[\cap I$ soit bornée (on dit que f est bornée au voisinage de a).*

Démonstration. Si $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$, il existe alors un réel $\eta > 0$ tel que, pour tout x dans $]a - \eta, a + \eta[\cap I$, on ait :

$$|f(x)| = |(f(x) - \ell) + \ell| \leq |f(x) - \ell| + |\ell| < 1 + |\ell|.$$

■

Le résultat qui suit se déduit immédiatement de la définition de la limite en a.

Théorème 8.5 *Supposons que $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$, la fonction f étant à valeurs réelles.*

1. *Si $\ell > 0$ [resp. $\ell < 0$] il existe alors un réel $\eta > 0$ tel que $f(x) > 0$ [resp. $f(x) < 0$] pour tout $x \in]a - \eta, a + \eta[\cap I$ (f est de signe constant au voisinage de a).*
2. *S'il existe un réel $\eta > 0$ tel que $f(x) \geq 0$ [resp. $f(x) \leq 0$] pour tout $x \in]a - \eta, a + \eta[\cap I$ on a alors $\ell \geq 0$ [resp. $\ell \leq 0$].*

Démonstration.

1. Pour $\varepsilon = \frac{\ell}{2} > 0$ il existe un réel $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in]a - \eta, a + \eta[\cap I$, on ait $|f(x) - \ell| < \frac{\ell}{2}$ et on a alors :
$$\forall x \in]a - \eta, a + \eta[\cap I, \ f(x) > \ell - \frac{\ell}{2} > \frac{\ell}{2} > 0.$$
Pour $\ell < 0$, on travaille avec $-f$.
2. Se déduit facilement du premier point.

■

Une définition séquentielle de la notion de limite finie en un point est donnée par le résultat suivant.

Théorème 8.6 *La fonction f admet la limite ℓ quand x tend vers a dans I si, et seulement si, pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de I qui converge vers a, la suite $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ.*

Démonstration. Si $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$, alors pour tout réel $\varepsilon > 0$ il existe un réel $\eta > 0$ tel que $|x - a| < \eta$ dans I entraîne $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ et si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de points de I qui converge vers a, il existe alors un entier n_0 tel que $|u_n - a| < \eta$ pour tout $n \geq n_0$, ce qui implique $|f(u_n) - \ell| < \varepsilon$. On a donc bien $\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = \ell$.

Pour la réciproque, on raisonne par l'absurde. Si f n'a pas de limite finie en a, pour tout réel ℓ, il existe alors un réel $\varepsilon > 0$ tel que pour tout entier $n \geq 1$ on peut trouver $u_n \in I$ tel que $|u_n - a| < \frac{1}{n}$ et $|f(u_n) - \ell| \geq \varepsilon$. On a donc ainsi une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de I qui converge vers a pour laquelle la suite $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas. ■

Cette caractérisation de la notion de limite peut être utilisée pour montrer qu'une fonction n'a pas de limite en un point.

Exercice 8.8 *Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ n'a pas de limite en 0.*

Solution 8.8 *Si $(u_n)_{n \geq 1}$ est la suite définie dans $\mathbb{R}^*$ par $u_n = \frac{1}{n\pi}$ pour $n \geq 1$, on a $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$ et la suite $(f(u_n))_{n \geq 1} = ((-1)^n)_{n \geq 1}$ est divergente, ce qui prouve que f n'a pas de limite en 0.*

8.3 Limites à gauche ou à droite des fonctions réelles

En prenant en considération la structure d'ordre sur $\mathbb{R}$, on peut définir les notions de limite à gauche ou à droite en un point.

On suppose toujours que α est réel dans l'adhérence de I.

Définition 8.3 *On dit que la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ a pour limite à gauche [resp. à droite] ℓ en α si pour tout réel $\varepsilon > 0$ il existe un réel $\eta > 0$ tel que :*

$$x \in I,\ \alpha - \eta < x < \alpha \ \Rightarrow\ |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

$$[\text{resp. } x \in I,\ \alpha < x < \alpha + \eta \ \Rightarrow\ |f(x) - \ell| < \varepsilon]$$

Il est facile de vérifier que si f admet une limite à gauche [resp. à droite] en α, alors cette limite est unique et on la note $f(\alpha^-) = \lim\limits_{x \to \alpha^-} f(x)$ [resp. $f(\alpha^+) = \lim\limits_{x \to \alpha^+} f(x)$].

De manière équivalente on peut dire que f a une limite à gauche [resp. à droite] en α si la restriction de f à $I \cap]-\infty, \alpha[$ [resp. à $I \cap]\alpha, +\infty[$] a une limite en α.

Si I est un intervalle de borne inférieure α [resp. de borne supérieure α], seule la notion de limite à droite [resp. à gauche] a un sens.

Des définitions précédentes, on déduit facilement le résultat suivant.

Théorème 8.7 *Si I est un intervalle ouvert, alors la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ a pour limite ℓ en α si, et seulement si, elle a une limite à gauche et à droite en α, ces limites étant égales à ℓ.*

Le cas des fonctions monotones définies sur un intervalle ouvert (pour simplifier) est particulièrement intéressant.

Théorème 8.8 *Si f est une fonction monotone de l'intervalle ouvert I dans $\mathbb{R}$, alors f admet une limite à gauche et droite en tout point. Dans le cas où f est croissante, on a pour tout $x \in I$:*

$$f\left(x^-\right) = \sup_{a<t<x} f(t) \leq f(x) \leq f\left(x^+\right) = \inf_{x<t<b} f(t).$$

De plus pour $x < y$ dans I, on a $f(x^+) \leq f(y^-)$.

Démonstration. Quitte à remplacer f par $-f$, on peut supposer f croissante.

Pour $x \in I$, l'ensemble $A = \{f(t) \mid a < t < x\}$ est non vide majoré par $f(x)$, il admet donc une borne supérieure $\mu = \sup\limits_{a<t<x} f(t) \leq f(x)$. Par définition de la borne supérieure, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $x_0 \in]a, x[$ tel que $\mu - \varepsilon < f(x_0) \leq \mu$ et avec la croissance de f, on a :

$$\forall t \in]x_0, x[,\ \mu - \varepsilon < f(x_0) \leq f(t) \leq \mu.$$

On a donc ainsi montré que $\mu = \lim\limits_{t \to x^-} f(t) = f(x^-)$.

On procède de même pour l'existence de la limite à droite $f(x^+)$.

Pour $x < y$ dans I, on a :

$$f\left(x^+\right) = \inf_{x<t<b} f(t) = \inf_{x<t<y} f(t),\ f\left(y^-\right) = \sup_{a<t<y} f(t) = \sup_{x<t<y} f(t),$$

ce qui entraîne $f(x^+) \leq f(y^-)$. ∎

8.4 Opérations algébriques sur les limites finies

Des théorèmes 8.6 et 8.5, on déduit immédiatement le résultat suivant.

Théorème 8.9 *Soient f, g deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ telles que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell'$.*
On a alors :

1. $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = |\ell|$, $\lim\limits_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \ell + \ell'$, $\lim\limits_{x \to a} (f(x) g(x)) = \ell\ell'$, *pour f, g à valeurs réelles,* $\lim\limits_{x \to a} \min(f(x), g(x)) \min(\ell, \ell')$ *et* $\lim\limits_{x \to a} \max(f(x), g(x)) = \max(\ell, \ell')$ *;*
2. *si $\ell' \neq 0$, il existe alors un réel $\eta > 0$ tel que la fonction $\dfrac{1}{g}$ soit définie sur $J =]a - \eta, a + \eta[\cap I$ et $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\ell}{\ell'}$;*
3. *si f est à valeurs réelles et $\ell > 0$, il existe alors un réel $\eta > 0$ tel que la fonction $\sqrt{f}$ soit définie sur $J =]a - \eta, a + \eta[\cap I$ et $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\ell}$.*

Exercice 8.9 *Montrer le résultat précédent en partant de la définition d'une limite finie en a.*

Solution 8.9 *C'est comme pour les suites.*

Exercice 8.10 *Soit $P : x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ une fonction polynomiale de degré $n \geq 0$ (on a donc $P \neq 0$ et $a_n \neq 0$). Montrer que, pour tout réel a, on a $\lim\limits_{x \to a} P(x) = P(a)$.*

Solution 8.10 *Le résultat est évident pour $P = 1$ et $P = x$ et le théorème précédent nous permet de conclure.*

Exercice 8.11 *Soit $f : x \mapsto \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{\sum\limits_{k=p}^{n} a_k x^k}{\sum\limits_{k=q}^{m} b_k x^k}$ une fonction rationnelle, où P, Q sont des fonctions rationnelles non nulles de valuations respectives p et q (i. e. $a_p \neq 0$ et $b_q \neq 0$).*
Montrer que :

1. *si $p = q$, alors $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{a_p}{b_p}$;*
2. *si $p > q$, alors $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = 0$;*
3. *si $p < q$, alors f n'a pas de limite finie en 0.*

Solution 8.11 *La fonction f est définie sur un voisinage épointé de 0 de la forme $I =]a - \eta, a + \eta[\setminus \{0\}$, puisque Q n'a qu'un nombre fini de racines réelles possibles.*

1. *Si $p = q$, on a pour tout $x \in I$:*

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_p x^p + a_{p+1} x^{p+1} + \cdots + a_n x^n}{b_p x^p + b_{p+1} x^{p+1} + \cdots + b_m x^m} \\ &= \frac{a_p + a_{p+1} x^1 + \cdots + a_n x^{n-p}}{b_p + b_{p+1} x^1 + \cdots + b_m x^{m-p}} \end{aligned}$$

et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{a_p}{b_p}$.

2. *Si $p > q$, on a pour tout $x \in I$:*

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_p x^p + a_{p+1} x^{p+1} + \cdots + a_n x^n}{b_q x^q + b_{q+1} x^{q+1} + \cdots + b_m x^m} \\ &= x^{p-q} \frac{a_p + a_{p+1} x^1 + \cdots + a_n x^{n-p}}{b_p + b_{p+1} x^1 + \cdots + b_m x^{m-p}} \end{aligned}$$

et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = 0 \cdot \dfrac{a_p}{b_p} = 0.$

3. *Si $p < q$, on a pour tout $x \in I$:*

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_p x^p + a_{p+1} x^{p+1} + \cdots + a_n x^n}{b_q x^q + b_{q+1} x^{q+1} + \cdots + b_m x^m} \\ &= \frac{1}{x^{q-p}} \frac{a_p + a_{p+1} x^1 + \cdots + a_n x^{n-p}}{b_p + b_{p+1} x^1 + \cdots + b_m x^{m-p}} \end{aligned}$$

soit $x^{q-p} f(x) = g(x)$ *avec* $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = \dfrac{a_p}{b_p} \neq 0$. *Si* $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \ell$, *on a alors* $\dfrac{a_p}{b_p} = \lim\limits_{x \to 0} x^{q-p} f(x) = 0 \cdot \ell = 0$, *ce qui est impossible. Donc f n'a pas de limite finie en* 0.

Exercice 8.12 *Soient m, n deux entiers naturels. Étudier la limite en 0 de la fonction f définie sur $I =]-1, 1[\setminus \{0\}$ par* $f(x) = \dfrac{\sqrt{1 + x^n} - \sqrt{1 - x^n}}{x^m}$.

Solution 8.12 *Pour tout $x \in I$, on a :*

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\left(\sqrt{1 + x^n} - \sqrt{1 - x^n}\right)\left(\sqrt{1 + x^n} + \sqrt{1 - x^n}\right)}{x^m \left(\sqrt{1 + x^n} + \sqrt{1 - x^n}\right)} \\ &= \frac{2x^n}{x^m \left(\sqrt{1 + x^n} + \sqrt{1 - x^n}\right)} = 2x^{n-m} \frac{1}{\sqrt{1 + x^n} + \sqrt{1 - x^n}}. \end{aligned}$$

Il en résulte que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$ *pour $n = m$,* $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ *pour $n > m$ et f n'a pas de limite finie en 0 pour $n < m$.*

Le théorème précédent et le théorème 8.5 nous donnent le résultat suivant.

Théorème 8.10 *Soient f, g deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$ telles que* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ *et* $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell'$.

1. *Si $\ell > \ell'$, il existe alors un réel $\eta > 0$ tel que $f(x) > g(x)$ pour tout $x \in]a - \eta, a + \eta[\cap I$.*
2. *S'il existe un réel $\eta > 0$ tel que $f(x) \geq g(x)$ pour tout $x \in]a - \eta, a + \eta[\cap I$ on a alors $\ell \geq \ell'$.*
3. *Si M est un majorant [resp. m un minorant] de f sur I (ou sur un voisinage de a), alors $\ell \leq M$ [resp. $m \leq \ell$].*

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème 8.5 aux fonctions $f - g$, $f - M$ et $f - m$. ∎

8.5 Limite en un point d'une composée de fonctions

Théorème 8.11 *Soient f une fonction de I dans $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ et g une fonction définie sur une partie J de $\mathbb{R}$ qui contient $f(I)$. Dans ces condition, ℓ est adhérent à J et si, de plus, $\lim\limits_{y\to\ell} g(x) = \ell'$, alors $\lim\limits_{x\to a} g \circ f(x) = \ell'$.*

Démonstration. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de points de I qui converge vers a, alors $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de points de J (puisque $f(I) \subset J$) qui converge vers ℓ, ce qui prouve que ℓ est adhérent à J.

Pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe un réel $\delta > 0$ tel que $y \in J$ et $|y - \ell| < \delta$ entraîne $|g(y) - \ell'| < \varepsilon$ et en désignant par $\eta > 0$ un réel tel que $x \in I$ et $|x - a| < \eta$ entraîne $|f(x) - \ell| < \delta$, on a :

$$\begin{aligned}(x \in I \text{ et } |x - a| < \eta) &\Rightarrow (f(x) \in f(I) \subset J \text{ et } |f(x) - \ell| < \delta)\\ &\Rightarrow |g(f(x)) - \ell'| < \varepsilon.\end{aligned}$$

Ce qui donne le résultat annoncé. ■

Avec $\lim\limits_{y\to\ell} \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{\ell}$ pour $\ell \neq 0$ et $\lim\limits_{y\to\ell} \sqrt{y} = \sqrt{\ell}$ pour $\ell > 0$, on retrouve que $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{\ell}$ si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \neq 0$ (on a $f(x) \neq 0$ sur un ensemble $J =]a - \eta, a + \eta[\cap I$ et $\dfrac{1}{f}$ est la composée la restriction de f à J avec la fonction $y \mapsto \dfrac{1}{y}$) et que $\lim\limits_{x\to a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\ell}$ si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell > 0$ (on a $f(x) > 0$ sur un ensemble $J =]a - \eta, a + \eta[\cap I$ et $\sqrt{f}$ est la composée la restriction de f à J avec la fonction $y \mapsto \sqrt{y}$).

Remarque 8.1 *Une définition possible de la notion de limite en a est la suivante :*

$$(x \in I,\ 0 < |x - \alpha| < \eta) \ \Rightarrow\ |f(x) - \ell| < \varepsilon,$$

c'est-à-dire qu'on s'intéresse à la limite en a par valeurs différentes (on prend $x \in I \setminus \{a\}$). On dit qu'on travaille sur des voisinages épointés de a et on note $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x) = \ell$. Avec cette définition, la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ à l'exercice 8.4 par $g(0) = 1$ et $g(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ a une limite nulle en 0, mais si on la compose avec la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(0) = 0$ et $f(x) = x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ puisque $0 \leq |f(x)| \leq |x|$ pour tout réel x et la fonction $g \circ f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g \circ f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x = 0 \text{ ou } x = \dfrac{1}{k\pi} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}^* \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

n'a pas de limite en 0 puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(\dfrac{1}{n\pi}\right) = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(\dfrac{1}{n}\right) = 0$.
En conclusion, le théorème sur la composition des limites tel qu'on l'a énoncé n'est plus valable avec cette définition. On dispose quand même, avec cette définition, d'un théorème sur la composition des limites en affinant les hypothèses sur f et g.
Mais il est préférable d'opter pour la définition choisie dans ce cours en étant conscient qu'une fonction telle que la fonction g n'a alors pas de limite en 0, ce qui est contraire à l'intuition.

8.6 Limites en un point des fonctions monotones

Le résultat qui suit est analogue a celui obtenu pour les suites monotones bornées.

Théorème 8.12 *Si $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ [resp. $f :]a, b] \to \mathbb{R}$] est une fonction croissante [resp. décroissante] et majorée [resp. minorée], elle admet alors une limite finie en b [resp. en a]. Cette limite est la borne supérieure [resp. inférieure] de f sur $[a, b[$ [resp. sur $]a, b]$] soit :*

$$\lim_{x \to b} f(x) = \sup_{x \in [a,b[} f(x) \quad \left[\text{resp. } \lim_{x \to a} f(x) = \inf_{x \in]a,b]} f(x) \right].$$

Démonstration. On suppose que $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ est croissante majorée (l'autre cas se traite de manière analogue).

Comme f est majorée sur $I = [a, b[$, elle admet une borne supérieure $\ell = \sup\limits_{x \in [a,b[} f(x)$ sur cet intervalle ($f(I)$ est non vide majorée, donc admet une borne supérieure). Pour $\varepsilon > 0$, on peut trouver, par définition de la borne supérieure, un réel $x_0 \in I$ tel que $\ell - \varepsilon < f(x_0) \leq \ell$ et comme f est croissante, on en déduit que :

$$\forall x \in [x_0, b[, \ \ell - \varepsilon < f(x_0) \leq f(x) \leq \ell < \ell + \varepsilon,$$

soit en posant $\eta = b - x_0 > 0$:

$$\forall x \in]x_0, b[=]b - \eta, b + \eta[\cap I, \ |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

■

Remarque 8.2 *Si f est croissante [resp. décroissante] et non majorée [resp. non minorée], elle n'a pas de limite finie en b [resp. en a] puisqu'une fonction admettant une limite finie en un point est bornée au voisinage de ce point. Nous verrons plus loin que pour f croissante et non majorée sur $[a, b[$, on a $\lim\limits_{x \to b} f(x) = +\infty$.*

De manière plus générale, on peut montrer qu'une fonction monotone sur un intervalle I admet une limite à gauche et à droite en tout point de I.

8.7 Le critère de Cauchy

Comme pour les suites numériques, on dispose du critère de Cauchy qui permet de montrer qu'une fonction admet une limite finie en un point sans connaître nécessairement cette limite.

Théorème 8.13 *La fonction f admet une limite finie quand x tend vers a dans I si, et seulement si pour tout réel $\varepsilon > 0$ il existe un réel $\eta > 0$ tel que :*

$$\forall (x, y) \in (]a - \eta, a + \eta[\cap I)^2, \ |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \tag{8.2}$$

Démonstration. Supposons que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$. Pour tout réel $\varepsilon > 0$ il existe alors un réel $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in J =]a - \eta, a + \eta[\cap I, \ |f(x) - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$$

et en conséquence :

$$\forall (x, y) \in J^2, \ |f(x) - f(y)| \leq |f(x) - \ell| + |f(y) - \ell| < \varepsilon$$

Réciproquement, supposons (8.2) vérifié pour tout $\varepsilon > 0$ donné. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de points de I qui converge vers a, pour $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$ tel que (8.2) soit satisfait, il existe un entier n_0 tel que $u_n \in]a-\eta, a+\eta[\cap I$ pour tout $n \geq n_0$, ce qui implique que $|f(u_n) - f(u_m)| < \varepsilon$ pour tout couple (n, m) d'entiers tels que $n \geq n_0$ et $m \geq n_0$. La suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est donc de Cauchy et en conséquence convergente. En désignant par $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de points de I qui convergent vers a et en notant $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n)$, $\ell' = \lim\limits_{n\to+\infty} f(v_n)$, pour $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$ tel que (8.2) soit satisfait, il existe un entier n_0 tel que u_n v_n soient dans $]a-\eta, a+\eta[\cap I$ pour tout $n \geq n_0$, et en conséquence :

$$|\ell - \ell'| = \lim_{\substack{n\to+\infty \\ n\geq n_0}} |f(u_n) - f(v_n)| \leq \varepsilon.$$

Le réel $\varepsilon > 0$ étant quelconque, on nécessairement $\ell = \ell'$. C'est-à-dire que pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de I qui converge vers a, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ, ce qui équivaut à dire que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$. ■

9

Limites à l'infini d'une fonction

On garde les notations du chapitre précédent en supposant ici que $a = -\infty$ ou $a = +\infty$ est adhérent à l'ensemble I, ce qui signifie que :

$$\forall m \in \mathbb{R},\ ]-\infty, m[\cap I \neq \emptyset$$

ou :

$$\forall M \in \mathbb{R},\ ]M, +\infty[\cap I \neq \emptyset$$

ce qui équivaut à dire que I est non minorée ou non majorée.

Dans la pratique I est un intervalle de la forme $]-\infty, m[$ ou $]M, +\infty[$.

9.1 Limite finie en $-\infty$ ou $+\infty$ d'une fonction

La définition d'une limite à l'infini prend alors la forme suivante.

Définition 9.1 *On dit que la fonction f admet une limite finie quand x tend vers $-\infty$ [resp. $+\infty$] dans I, s'il existe un réel ℓ tel que :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists m \in \mathbb{R} \mid (x \in I \text{ et } x < m) \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

$$\text{[resp. } \forall \varepsilon > 0,\ \exists M \in \mathbb{R} \mid (x \in I \text{ et } x > M) \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon]$$

(on dit aussi que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers $-\infty$ [resp. $+\infty$] dans I).

Les deux dernières inégalités peuvent être strictes ou larges et il est parfois commode de se limiter à $m < 0$ [resp. $M > 0$] sans que cela ne soit restrictif.

Pour $a = +\infty$ et f définie sur $\mathbb{N}$, on retrouve la définition de la convergence d'une suite numérique.

Dire que f n'a pas de limite finie en $-\infty$ [resp. $+\infty$] équivaut à dire que pour tout scalaire ℓ il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\forall m \in \mathbb{R},\ \exists x \in I \mid x < m \text{ et } |f(x) - \ell| \geq \varepsilon$$

$$\text{[resp. } \forall M \in \mathbb{R},\ \exists x \in I \mid x > M \text{ et } |f(x) - \ell| \geq \varepsilon].$$

Il est parfois commode de traduire la définition précédente, par exemple dans le cas où $a = +\infty$, sous la forme :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M \in \mathbb{R} \mid \forall x \in]M, +\infty[\cap I,\ |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

ou encore, pour f à valeurs réelles :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M \in \mathbb{R} \mid \forall x \in \left]M, +\infty\right[\cap I,\ f(x) \in \left]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon\right[.$$

Comme dans le cas des limites finies, en utilisant l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on montre que si f admet une limite ℓ en $-\infty$ [resp. $+\infty$], alors cette limite est unique.

On note alors $\ell = \lim\limits_{\substack{x \to -\infty \\ x \in I}} f(x)$ [resp. $\ell = \lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ x \in I}} f(x)$] ou plus simplement $\ell = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ [resp. $\ell = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$], le domaine de définition de la fonction f étant sous-entendu, cette limite. On écrira aussi $f(x) \underset{x \to -\infty}{\to} \ell$ [resp. $f(x) \underset{x \to +\infty}{\to} \ell$].

Exercice 9.1 *Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$.*

Solution 9.1 *Pour $\varepsilon > 0$ donné il existe un entier $M > \dfrac{1}{\sqrt[n]{\varepsilon}}$ ($\mathbb{R}$ est archimédien), ce qui implique que pour tout $x \geq M$, on a $\left|\dfrac{1}{x^n}\right| \leq \dfrac{1}{M^n} < \varepsilon$. On a donc bien $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$.*

Exercice 9.2 *En utilisant $\lim\limits_{\substack{n \to +\infty \\ n \in \mathbb{N}^*}} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$, montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$.*

Solution 9.2 *De $\lim\limits_{\substack{n \to +\infty \\ n \in \mathbb{N}^*}} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$, on déduit que :*

$$\lim_{\substack{n \to +\infty \\ n \in \mathbb{N}^*}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{\substack{n \to +\infty \\ n \in \mathbb{N}^*}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e$$

et :

$$\lim_{\substack{n \to +\infty \\ n \in \mathbb{N}^*}} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{\substack{n \to +\infty \\ n \in \mathbb{N}^*}} \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1 + \frac{1}{n+1}} = e$$

donc pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe un entier n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0,\ \left|\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - e\right| < \varepsilon,\ \left|\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n - e\right| .$$

Pour $x > n_0 + 1$, en notant $n = [x]$ la partie entière de x, on a :

$$n_0 < n \leq x < n + 1$$

et :

$$e - \varepsilon < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} < e + \varepsilon$$

soit :

$$\forall x > M = n_0 + 1,\ e - \varepsilon < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e + \varepsilon.$$

D'où le résultat.

Quitte à remplacer la fonction f par la fonction $x \mapsto f(-x)$, on peut se contenter d'étudier les limites en $+\infty$.

On peut aussi se limiter à $I =]a, +\infty[$ avec $a > 0$ et on a alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ si, et seulement si, $\lim\limits_{x \to 0} f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \ell$.

Les résultats obtenus sur les limites finies en un point sont encore valables pour les limites finies à l'infini.

Théorème 9.1 *S'il existe un réel ℓ, un réel δ et une fonction $\varphi : J =]\delta, +\infty[\cap I \to \mathbb{R}^+$ tels que :*

$$\begin{cases} \forall x \in J, \ |f(x) - \ell| \leq \varphi(x) \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0 \end{cases}$$

alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$.

Démonstration. Pour tout réel $\varepsilon > 0$ il existe un réel M tel que :

$$x \in J \subset I \text{ et } x > M \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varphi(x) < \varepsilon$$

ce qui donne le résultat annoncé. ■

Théorème 9.2 *Si f, g sont à valeurs réelles et s'il existe un réel $\delta > 0$ et deux fonction φ et ψ définies sur $J =]\delta, +\infty[\cap I$ et à valeurs réelles tels que :*

$$\begin{cases} \forall x \in J, \ \psi(x) \leq f(x) \leq \varphi(x) \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \psi(x) = \ell \end{cases}$$

alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$.

Démonstration. Pour tout réel $\varepsilon > 0$ il existe un réel M tel que pour tout $x \in J \subset I$ tel que $x > M$, on ait :

$$\ell - \varepsilon < \psi(x) \leq f(x) \leq \varphi(x) < \ell + \varepsilon$$

ce qui donne le résultat annoncé. ■

Exercice 9.3 *Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin(x)}{x} = 0$.*

Solution 9.3 *Se déduit de $\left|\dfrac{\sin(x)}{x}\right| \leq \dfrac{1}{|x|}$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.*

Théorème 9.3 *Si f admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$, il existe alors un réel M tel que la restriction de f à $J =]M, +\infty[\cap I$ soit bornée.*

Démonstration. Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$, il existe alors un réel M tel que, pour tout x dans $]M, +\infty[\cap I$, on ait :

$$|f(x)| = |(f(x) - \ell) + \ell| \leq |f(x) - \ell| + |\ell| < 1 + |\ell|.$$

■

Théorème 9.4 *Supposons f à valeurs réelles et que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$.*

1. *Si $\ell > 0$ [resp. $\ell < 0$] il existe alors un réel M tel que $f(x) > 0$ [resp. $f(x) < 0$] pour tout $x \in \left]M, +\infty\right[\cap I$.*
2. *S'il existe un réel M tel que $f(x) \geq 0$ [resp. $f(x) \leq 0$] pour tout $x \in \left]M, +\infty\right[\cap I$ on a alors $\ell \geq 0$ [resp. $\ell \leq 0$].*

Démonstration.

1. Pour $\varepsilon = \dfrac{\ell}{2} > 0$ il existe un réel M tel que, pour tout $x \in \left]M, +\infty\right[\cap I$, on ait $|f(x) - \ell| < \dfrac{\ell}{2}$ et on a alors :
$$\forall x \in \left]M, +\infty\right[\cap I,\ f(x) > \ell - \frac{\ell}{2} > \frac{\ell}{2} > 0.$$
Pour $\ell < 0$, on travaille avec $-f$.
2. Se déduit facilement du premier point.

■

Théorème 9.5 *La fonction f admet la limite ℓ quand x tend vers $+\infty$ si, et seulement si, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de I qui converge vers $+\infty$, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.*

Démonstration. Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$, alors pour tout réel $\varepsilon > 0$ il existe un réel M tel que $x > M$ dans I entraîne $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ et si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de points de I qui converge vers $+\infty$, il existe alors un entier n_0 tel que $u_n > M$ pour tout $n \geq n_0$, ce qui implique $|f(u_n) - \ell| < \varepsilon$. On a donc bien $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell$.

Pour la réciproque, on raisonne par l'absurde. Si f n'a pas de limite finie en $+\infty$, pour tout réel ℓ, il existe alors un réel $\varepsilon > 0$ tel que pour tout entier $n \geq 1$ on peut trouver $u_n \in I$ tel que $u_n > n$ et $|f(u_n) - \ell| \geq \varepsilon$. On a donc ainsi une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de I qui converge vers $+\infty$ pour laquelle la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas. ■

Exercice 9.4 *Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ n'a pas de limite en $+\infty$.*

Solution 9.4 *Si $(u_n)_{n\geq 1}$ est la suite définie dans $\mathbb{R}$ par $u_n = n\pi$ pour tout $n \geq 1$, on a alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et la suite $(f(u_n))_{n\geq 1} = ((-1)^n)_{n\geq 1}$ est divergente, ce qui prouve que f n'a pas de limite en $+\infty$.*

Exercice 9.5 *Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - [x]$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ n'a pas de limite en $+\infty$.*

Solution 9.5 *Pour tout réel $\lambda \in \left]0, 1\right[$, la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie dans $\mathbb{R}$ par $u_n = n + \lambda$ pour $n \geq 0$ est telle que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et la suite $(f(u_n))_{n\geq 1}$ est stationnaire sur λ, ce qui prouve que f n'a pas de limite en $+\infty$.*

9.2 Opérations algébriques

En utilisant la caractérisation séquentielle de la limite à l'infini, on a le résultat suivant relatif aux opérations algébriques.

Théorème 9.6 *Soient f, g deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ telles que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \ell'$.*
On a alors :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} |f(x)| = |\ell|$, $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)+g(x)) = \ell+\ell'$, $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)g(x)) = \ell\ell'$, *pour f, g à valeurs réelles,* $\lim\limits_{x\to+\infty} \min(f(x), g(x)) \min(\ell,\ell')$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} \max(f(x), g(x)) = \max(\ell,\ell')$ *;*
2. *si $\ell' \neq 0$, il existe alors un réel M tel que la fonction $\dfrac{1}{g}$ soit définie sur $J =]M,+\infty[\cap I$ et* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\ell}{\ell'}$ *;*
3. *si f est à valeurs réelles et $\ell > 0$, il existe alors un réel M tel que la fonction $\sqrt{f}$ soit définie sur $J =]M,+\infty[\cap I$ et* $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\ell}$.

Exercice 9.6 *Soit* $f : x \mapsto \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{\sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k}{\sum\limits_{k=0}^{m} b_k x^k}$ *une fonction rationnelle, où P, Q sont des fonctions rationnelles non nulles de degrés respectifs n et m (i. e. $a_n \neq 0$ et $b_m \neq 0$).*
Montrer que :

1. *si $n = m$, alors* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{a_n}{b_n}$ *;*
2. *si $n < m$, alors* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = 0$ *;*
3. *si $n > m$, alors f n'a pas de limite finie en $+\infty$.*

Solution 9.6 *La fonction f est définie sur un intervalle de la forme $I =]M,+\infty[$ puisque Q n'a qu'un nombre fini de racines réelles possibles.*

1. *Si $n = m$, on a pour tout $x \in I$:*
$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0 + a_1 x^1 + \cdots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x^1 + \cdots + b_n x^n} \\ &= \frac{\frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{x} + a_n}{\frac{b_0}{x^n} + \frac{b_1}{x^{n-1}} + \cdots + \frac{b_{n-1}}{x} + b_n} \end{aligned}$$
et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{a_n}{b_n}$.
2. *Si $n < m$, on a pour tout $x \in I$:*
$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0 + a_1 x^1 + \cdots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x^1 + \cdots + b_m x^m} \\ &= \frac{1}{x^{m-n}} \frac{\frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{x} + a_n}{\frac{b_0}{x^n} + \frac{b_1}{x^{n-1}} + \cdots + \frac{b_{m-1}}{x} + b_m} \end{aligned}$$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = 0 \cdot \dfrac{a_n}{b_m} = 0.$

3. *Si $n > m$, on a pour tout $x \in I$:*

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0 + a_1 x^1 + \cdots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x^1 + \cdots + b_m x^m} \\ &= x^{n-m} \frac{\frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{x} + a_n}{\frac{b_0}{x^n} + \frac{b_1}{x^{n-1}} + \cdots + \frac{b_{m-1}}{x} + b_m} \end{aligned}$$

soit $\dfrac{1}{x^{n-m}} f(x) = g(x)$ *avec* $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \dfrac{a_n}{b_m} \neq 0$. *Si* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$, *on a alors* $\dfrac{a_n}{b_m} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^{n-m}} f(x) = 0 \cdot \ell = 0$, *ce qui est impossible. Donc f n'a pas de limite finie en $+\infty$.*

Exercice 9.7 *Soient m, n deux entiers naturels. Étudier la limite en $+\infty$ de la fonction f définie sur $I =]1, +\infty[$ par* $f(x) = x^m \sqrt{1 + \dfrac{1}{x^n}} - \sqrt{1 - \dfrac{1}{x^n}}$.

Solution 9.7 *Pour tout $x \in I$, on a :*

$$\begin{aligned} f(x) &= x^m \frac{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^n}} - \sqrt{1-\frac{1}{x^n}}\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^n}} + \sqrt{1-\frac{1}{x^n}}\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{x^n}} + \sqrt{1-\frac{1}{x^n}}} \\ &= x^m \frac{\frac{2}{x^n}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^n}} + \sqrt{1-\frac{1}{x^n}}} = 2x^{m-n} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^n}} + \sqrt{1-\frac{1}{x^n}}}. \end{aligned}$$

Il en résulte que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ *pour $n = m$,* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ *pour $n > m$ et f n'a pas de limite finie en $+\infty$ pour $n < m$.*

Théorème 9.7 *Soient f, g deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$ telles que* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \ell'$.

1. *Si $\ell > \ell'$, il existe alors un réel M tel que $f(x) > g(x)$ pour tout $x \in]M, +\infty[\cap I$.*
2. *S'il existe un réel M tel que $f(x) \geq g(x)$ pour tout $x \in]M, +\infty[\cap I$ on a alors $\ell \geq \ell'$.*
3. *Si M est un majorant [resp. m un minorant] de f sur I, alors $\ell \leq M$ [resp. $m \leq \ell$].*

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème 9.4 aux fonctions $f - g$, $f - M$ et $f - m$.
■

9.3 Limite à l'infini d'une composée de fonctions

On se contente ici de la limite à l'infini d'une composée $g \circ f$ avec f de limite finie ℓ en $+\infty$ et g de limite finie en ℓ. Le cas où $\ell = +\infty$ ou $\ell = -\infty$ sera étudié au chapitre suivant.

Théorème 9.8 *Soient f une fonction de I dans $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ et g une fonction définie sur une partie J de $\mathbb{R}$ qui contient $f(I)$. Dans ces condition, ℓ est adhérent à J et si, de plus, $\lim\limits_{y\to\ell} g(y) = \ell'$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g \circ f(x) = \ell'$.*

Démonstration. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de points de I qui converge vers $+\infty$, alors $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de points de J (puisque $f(I) \subset J$) qui converge vers ℓ, ce qui prouve que ℓ est adhérent à J.

Pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe un réel $\delta > 0$ tel que $y \in J$ et $|y - \ell| < \delta$ entraîne $|g(y) - \ell'| < \varepsilon$ et en désignant par M un réel tel que $x \in I$ et $x > M$ entraîne $|f(x) - \ell| < \delta$, on a :

$$\begin{aligned}(x \in I \text{ et } x > M) &\Rightarrow (f(x) \in f(I) \subset J \text{ et } |f(x) - \ell| < \delta) \\ &\Rightarrow |g(f(x)) - \ell'| < \varepsilon.\end{aligned}$$

Ce qui donne le résultat annoncé. ∎

Avec $\lim\limits_{y\to\ell} \frac{1}{y} = \frac{1}{\ell}$ pour $\ell \neq 0$ et $\lim\limits_{y\to\ell} \sqrt{y} = \sqrt{\ell}$ pour $\ell > 0$, on retrouve que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\ell}$ si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell \neq 0$ (on a $f(x) \neq 0$ sur un ensemble $J =]M, +\infty[\cap I$ et $\frac{1}{f}$ est la composée la restriction de f à J avec la fonction $y \mapsto \frac{1}{y}$) et que $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\ell}$ si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell > 0$ (on a $f(x) > 0$ sur un ensemble $J =]M, +\infty[\cap I$ et $\sqrt{f}$ est la composée la restriction de f à J avec la fonction $y \mapsto \sqrt{y}$).

9.4 Limites à l'infini des fonctions monotones

Le résultat qui suit est analogue a celui obtenu pour les suites monotones bornées.

On se limite aux cas où $I = [a, +\infty[$ ou $I =]-\infty, b]$

Théorème 9.9 *Si $f : I = [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ [resp. $f : I =]-\infty, b] \to \mathbb{R}$] est une fonction croissante et majorée [resp. décroissante et minorée], elle admet alors une limite finie en $+\infty$ [resp. en $-\infty$] Cette limite est la borne supérieure [resp. inférieure] de f sur I. soit :*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \sup_{x\in I} f(x) \quad \left[\textit{resp.} \ \lim_{x\to-\infty} f(x) = \inf_{x\in I} f(x)\right]$$

Démonstration. On suppose que $f : I = [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ est croissante et majorée. L'autre cas se traite de manière analogue.

Comme f est majorée sur I, elle admet une borne supérieure $\ell = \sup\limits_{x\in I} f(x)$ sur cet intervalle ($f(I)$ est non vide majorée, donc admet une borne supérieure). Pour $\varepsilon > 0$, on peut trouver, par définition de la borne supérieure, un réel $x_0 > a$ tel que $\ell - \varepsilon < f(x_0) \leq \ell$ et comme f est croissante, on en déduit que :

$$\forall x \in [x_0, +\infty[\,,\ \ell - \varepsilon < f(x_0) \leq f(x) \leq \ell < \ell + \varepsilon.$$

∎

Remarque 9.1 *Si f est croissante et non majorée sur $[a, +\infty[$, elle n'a pas de limite finie en $+\infty$ puisqu'une fonction admettant une limite finie en $+\infty$ est bornée au voisinage de $+\infty$. On verra plus loin que dans ce cas, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.*

Dans le cas où $I = \mathbb{N}$, f définit une suite numérique et on retrouve le théorème sur les suites croissantes majorées.

9.5 Le critère de Cauchy

Comme pour les suites numériques, on dispose du critère de Cauchy qui permet de montrer qu'une fonction admet une limite finie à l'infini sans connaître nécessairement cette limite.

Théorème 9.10 *La fonction f admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$ dans I si, et seulement si pour tout réel $\varepsilon > 0$ il existe un réel M tel que :*

$$\forall (x,y) \in (]M,+\infty[\cap I)^2, \ |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \tag{9.1}$$

Démonstration. Supposons que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$. Pour tout réel $\varepsilon > 0$ il existe alors un réel M tel que :

$$\forall x \in J =]M,+\infty[\cap I, \ |f(x) - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$$

et en conséquence :

$$\forall (x,y) \in J^2, \ |f(x) - f(y)| \leq |f(x) - \ell| + |f(y) - \ell| < \varepsilon$$

Réciproquement, supposons (9.1) vérifié pour tout $\varepsilon > 0$ donné. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de points de I qui converge vers $+\infty$, pour $\varepsilon > 0$ et M tel que (9.1) soit satisfait, il existe un entier n_0 tel que $u_n \in]M,+\infty[\cap I$ pour tout $n \geq n_0$, ce qui implique que $|f(u_n) - f(u_m)| < \varepsilon$ pour tout couple (n,m) d'entiers tels que $n \geq n_0$ et $m \geq n_0$. La suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est donc de Cauchy et en conséquence convergente. En désignant par $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de points de I qui convergent vers $+\infty$ et en notant $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n)$, $\ell' = \lim\limits_{n\to+\infty} f(v_n)$, pour $\varepsilon > 0$ et M tel que (9.1) soit satisfait, il existe un entier n_0 tel que u_n v_n soient dans $]M,+\infty[\cap I$ pour tout $n \geq n_0$, et en conséquence :

$$|\ell - \ell'| = \lim_{\substack{n\to+\infty \\ n \geq n_0}} |f(u_n) - f(v_n)| \leq \varepsilon.$$

Le réel $\varepsilon > 0$ étant quelconque, on nécessairement $\ell = \ell'$. C'est-à-dire que pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de I qui converge vers $+\infty$, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ, ce qui équivaut à dire que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$. ■

10

Limites infinis

11

Continuité des fonctions d'une variable réelle

Pour ce chapitre I désigne a priori un intervalle réel et f une fonction définie sur I et à valeurs réelles ou complexes.

Si l'intervalle I a pour extrémités a et b, avec $-\infty \leq a < b \leq b$, l'intérieur de I est l'intervalle ouvert $]a, b[$.

11.1 Continuité en un point

Intuitivement, on peut dire que f est continue en un point a de I si $f(x)$ est aussi proche que l'on veut de $f(a)$ dès que x est assez proche de a dans I. On peut aussi traduire géométriquement cette idée en disant (dans le cas d'une fonction à valeurs réelles) que le graphe de f ne présente pas de sauts au voisinage de a.

De manière plus rigoureuse, on donne la définition suivante.

Définition 11.1 *On dit que la fonction f est continue au point $a \in I$ si :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \mid (x \in I,\ |x - a| < \eta) \ \Rightarrow\ |f(x) - f(a)| < \varepsilon. \tag{11.1}$$

Si f n'est pas continue en a, on dira qu'elle est discontinue en ce point, ce qui se traduit par l'existence d'un réel $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\forall \eta > 0,\ \exists x \in I \mid |x - a| < \eta \text{ et } |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon.$$

Il est parfois plus commode d'exprimer l'assertion (11.1) sous la forme suivante :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \mid \forall x \in I \cap]a - \eta, a + \eta[\,,\ |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

ou encore, pour f à valeurs réelles :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \mid \forall x \in I \cap]a - \eta, a + \eta[\,,\ f(x) \in]f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon[$$

ce qui traduit mieux l'idée que $f(x)$ est aussi proche que l'on veut de $f(a)$ dès que x est assez proche de a dans I.

Comme dans le cas de la définition de la convergence d'une suite, les deux dernières inégalités dans (11.1) peuvent être strictes ou larges.

Là encore, il est parfois commode de se limiter à $\varepsilon \in]0, 1[$ sans que cela ne soit restrictif.

Dans le cas d'une fonction paire ou impaire, la continuité en a est équivalente à la continuité en $-a$.

Remarque 11.1 *La définition 11.1 est en fait valable sur une partie I non vide de $\mathbb{R}$. Dans la pratique I sera un intervalle ou une réunion d'intervalles disjoints.*

Des définitions, on déduit immédiatement le résultat suivant.

Théorème 11.1 *La fonction f est continue au point $a \in I$ si, et seulement si, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.*

On en déduit alors le résultat suivant.

Théorème 11.2 *Si f est continue en $a \in I$, elle est alors bornée dans un voisinage de ce point.*

Démonstration. C'est vrai pour une fonction qui a une limite finie en $a \in I \subset \overline{I}$. ■

Le résultat précédent peut être utilisé pour montrer la discontinuité d'une fonction en un point. Par exemple la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(0) = 0$ et $f(x) = \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$ n'est pas continue en 0, puisque pour tout réel $M > 0$, il existe un entier $n \geq 1$ tel que $f\left(\frac{1}{n}\right) = n > M$.

Définition 11.2 *On dit que la fonction f est continue sur I si elle est continue en tout point de I.*

Exemple 11.1 *Une fonction constante est continue en tout point de $\mathbb{R}$.*

Exercice 11.1 *Montrer que la fonction $f : x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$.*

Solution 11.1 *Résulte immédiatement de l'inégalité :*

$$\forall (x, a) \in \mathbb{R}^2, \ ||x| - |a|| \leq |x - a|$$

(on prend $\eta = \varepsilon$ dans (11.1)).

Exercice 11.2 *Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.*

Solution 11.2 *Soient $a \in \mathbb{R}^+$ et $\varepsilon > 0$.*
Pour $a = 0$, étant donné $x \in \mathbb{R}^+$, on aura $|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \sqrt{x} < \varepsilon$ dès que $|x - a| = x < \eta = \varepsilon^2$, ce qui prouve la continuité de f en 0.
Pour $a > 0$, en écrivant que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a :

$$\left|\sqrt{x} - \sqrt{a}\right| = \frac{|x - a|}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \leq \frac{1}{\sqrt{a}} |x - a|,$$

on déduit que l'on aura $|\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \varepsilon$ dès que $|x - a| < \eta = \sqrt{a}\varepsilon$, ce qui prouve la continuité de f en a.

Exercice 11.3 *Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ (i. e. continue sur les intervalles $\mathbb{R}^{+,*}$ et $\mathbb{R}^{-,*}$).*

Solution 11.3 *Comme f est impaire, il suffit de prouver la continuité sur $\mathbb{R}^{+,*}$.*
Soient $a > 0$ et $\varepsilon > 0$.
Pour tout $x > 0$, on a :

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| = \frac{|x-a|}{ax}$$

et pour $x \in I_a = \left]a - \frac{a}{2}, a + \frac{a}{2}\right[= \left]\frac{a}{2}, \frac{3a}{2}\right[$, on a :

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| < 2\frac{|x-a|}{a^2},$$

de sorte que l'on aura $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| < \varepsilon$ dès que $|x-a| < \frac{a^2}{2}\varepsilon$ et $x \in I_a$. En posant $\eta = \min\left(\frac{a}{2}, \frac{a^2}{2}\varepsilon\right)$, on a donc $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| < \varepsilon$ pour tout x tel que $|x-a| < \eta$, ce qui prouve la continuité de f en a.

Exercice 11.4 *Montrer que, pour tout entier naturel n, la fonction $f : x \mapsto x^n$ est continue sur $\mathbb{R}$.*

Solution 11.4 *Pour $n = 0$, f est la fonction constante égale à 1. La continuité d'une fonction constante se vérifiant facilement (pour $\varepsilon > 0$ donné tout réel $\eta > 0$ convient).*
Pour $n \geq 1$, $a \in \mathbb{R}$, on peut trouver un réel $R > 0$ tel que $a \in \left]-R, R\right[$ et pour tout $x \in \left]-R, R\right[$, on a :

$$|x^n - a^n| = |x-a| \left|\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} a^k\right| \leq nR^{n-1} |x-a|$$

et pour $\varepsilon > 0$ donné, on aura $|x^n - a^n| < \varepsilon$ dès que $|x-a| < \eta = \frac{\varepsilon}{nR^{n-1}}$.

Exercice 11.5 *On admet l'existence des fonctions trigonométriques* sin *et* cos *définies sur $\mathbb{R}$ avec pour seules connaissances les formules usuelles de trigonométrie et l'inégalité $|\sin(x)| \leq |x|$ valable pour tout réel x.*

1. *Montrer que la fonction* sin *est continue sur $\mathbb{R}$.*
2. *Montrer que la fonction* cos *est continue sur $\mathbb{R}$.*

Solution 11.5 *Soit $a \in \mathbb{R}$.*

1. *Avec :*
$$|\sin(x) - \sin(a)| = 2\left|\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)\right|\left|\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)\right| \leq |x-a|,$$
on déduit que l'on aura $|\sin(x) - \sin(a)| < \varepsilon$ dès que $|x-a| < \eta = \varepsilon$, ce qui prouve la continuité de sin *en a.*
2. *Avec :*
$$|\cos(x) - \cos(a)| = 2\left|\sin\left(\frac{x+a}{2}\right)\right|\left|\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)\right| \leq |x-a|,$$
on déduit que l'on aura $|\cos(x) - \cos(a)| < \varepsilon$ dès que $|x-a| < \eta = \varepsilon$, ce qui prouve la continuité de cos *en a.*

Exercice 11.6 *Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(0) = 0$ et $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$, n'est pas continue en 0.*

Solution 11.6 *Pour tout réel $\eta > 0$, on peut trouver un entier $n \geq 1$ tel que $x = \dfrac{1}{n\pi} \in \left]-\eta, \eta\right[$ et on a $|f(x) - f(0)| = 1$, ce qui prouve la discontinuité de f en 0.*

Exercice 11.7 *Montrer que la fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$ définie par $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $f(x) = 0$ sinon est discontinue en tout point de $\mathbb{R}$.*

Solution 11.7 *Soit a un nombre rationnel [resp. irrationnel]. Pour tout réel $\eta > 0$, on peut trouver un nombre irrationnel [resp. rationnel] x dans $\left]a - \eta, a + \eta\right[$ et on a $|f(x) - f(a)| = 1$, ce qui prouve la discontinuité de f en a.*

Exercice 11.8 *Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $f(x) = 0$ sinon est continue en 0 et discontinue en tout point de $\mathbb{R}^*$.*

Solution 11.8 *Soit a un nombre rationnel [resp. irrationnel] non nul. Pour tout réel $\eta > 0$, on peut trouver un nombre irrationnel [resp. rationnel] x dans $\left]a - \eta, a + \eta\right[$ [resp. dans $\left]a - \eta, a + \eta\right[\cap \left]a - \dfrac{|a|}{2}, a + \dfrac{|a|}{2}\right[$] et on a $|f(x) - f(a)| = |a|$ [resp. $|f(x) - f(a)| = |x| > \dfrac{|a|}{2}$] ce qui prouve la discontinuité de f en a.*
Pour ce qui est de la continuité en 0, il suffit de remarquer que pour tout $\varepsilon > 0$ la condition $|x| < \eta = \varepsilon$ entraîne $|f(x) - f(0)| = |f(x)| < \varepsilon$ puisque $f(x)$ vaut x ou 0.

Exercice 11.9 *Soit n un entier naturel non nul. Étudier la continuité de la fonction a_n qui à tout réel x appartenant à $[0, 1]$ associe la n-ème décimale dans le développement décimal propre si $x \in [0, 1[$ (voir le paragraphe 4.2, page 80) et 9 si $x = 1$ (pour $x = 1$ on utilise le développement décimal illimité impropre).*

Solution 11.9 *On rappelle que pour $x \in [0, 1[$, on a $a_n(x) = [10^n x] - 10\,[10^{n-1}x]$. Pour tout entier k compris entre 0 et $10^n - 1$ et $x \in \left[\dfrac{k}{10^n}, \dfrac{k+1}{10^n}\right[$, on a $a_n(x) = k - 10\,[10^{n-1}x]$. De plus avec :*

$$10\left[10^{n-1}x\right] \leq 10^n x < k + 1$$

on déduit que

$$\left[10^{n-1}x\right] \leq \frac{k}{10} \leq 10^{n-1}x < \left[10^{n-1}x\right] + 1$$

et $\left[\dfrac{k}{10}\right] = [10^{n-1}x]$. La fonction a_n est donc constante (et en conséquence continue) sur $\left[\dfrac{k}{10^n}, \dfrac{k+1}{10^n}\right[$ égale à $k - 10\left[\dfrac{k}{10}\right]$. Et avec

$$a_n\left(\frac{k+1}{10^n}\right) = k + 1 - 10\left[\frac{k+1}{10}\right] \neq \lim_{x \to \left(\frac{k+1}{10^n}\right)^-} a_n(x) = k - 10\left[\frac{k}{10}\right],$$

on déduit que a_n est discontinue en tout point $\dfrac{k+1}{10^n}$ où k est compris entre 0 et $10^n - 2$. Sur le dernier intervalle $\left[\dfrac{10^n - 1}{10^n}, 1\right[$, on a $a_n(x) = 9$ et a_n est continue en 1.

11.2 Définition séquentielle de la continuité

Une définition équivalente de la continuité en un point est donnée par le résultat suivant.

Théorème 11.3 *Une fonction $f : I \to \mathbb{C}$ est continue en $a \in I$ si, et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de I qui converge vers a, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$.*

Démonstration. Si f est continue en $a \in I$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que $|x - a| < \eta$ dans I entraîne $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ et si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de points de I qui converge vers a, il existe alors un entier n_0 tel que $|x_n - a| < \eta$ pour tout $n \geq n_0$, ce qui implique $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$. On a donc bien $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a)$.

Pour la réciproque, on raisonne par l'absurde. Si f n'est pas continue en a, il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que pour tout entier $n \geq 1$ on peut trouver $x_n \in I$ tel que $|x_n - a| < \dfrac{1}{n}$ et $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$. On a donc ainsi une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de I qui converge vers a pour laquelle la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers $f(a)$. ∎

En fait on a le résultat plus fin suivant.

Exercice 11.10 *Montrer que $f : I \to \mathbb{C}$ est continue en $a \in I$ si, et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de I qui converge vers a, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente (sans préciser que c'est vers $f(a)$).*

Solution 11.10 *On sait déjà que si f est continue en a alors pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de I qui converge vers a, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$.*
Réciproquement supposons que pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de I qui converge vers a, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente. Pour montrer que f est continue en a, il suffit de montrer que, dans ces conditions, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de points de I qui converge vers a, on définit la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de I par $y_{2n} = x_{2n}$, $y_{2n+1} = a$, cette suite converge vers a, donc la suite $(f(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et on a :

$$f(a) = \lim_{n\to+\infty} f(y_{2n+1}) = \lim_{n\to+\infty} f(y_{2n}) = \lim_{n\to+\infty} f(x_{2n}) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n).$$

Le théorème 11.3 peut être utilisé pour montrer qu'une fonction n'est pas continue en un point.

Exercice 11.11 *Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(0) = 0$ et $f(x) = \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$, n'est pas continue en 0.*

Solution 11.11 *Si $(x_n)_{n\geq 1}$ est la suite définie par $x_n = \dfrac{1}{n\pi}$ pour $n \geq 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$ et la suite $(f(x_n))_{n\geq 1} = ((-1)^n)_{n\geq 1}$ est divergente.*

En utilisant la suite définie par $x_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + n\pi}$ pour $n \geq 1$, on vérifie de même la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(0) = 0$ et $f(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$, n'est pas continue en 0.

Exercice 11.12 *Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(0) = 0$ et $f(x) = \cos(\ln(|x|))$ si $x \neq 0$, n'est pas continue en 0.*

Solution 11.12 *Si* $(x_n)_{n\geq 1}$ *est la suite définie par* $x_n = e^{-n\pi}$ *pour* $n \geq 1$, *on a* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$ *et la suite* $(f(x_n))_{n\geq 1} = (\cos(n\pi))_{n\geq 1} = ((-1)^n)_{n\geq 1}$ *est divergente.*

Exercice 11.13 *Montrer que la fonction caractéristique de* $\mathbb{Q}$ *définie par* $f(x) = 1$ *si* $x \in \mathbb{Q}$ *et* $f(x) = 0$ *sinon est discontinue en tout point de* $\mathbb{R}$.

Solution 11.13 *Un rationnel* $r \in \mathbb{Q}$ *est limite de la suite d'irrationnels* $(x_n)_{n\geq 1} = \left(r + \dfrac{\sqrt{2}}{n}\right)_{n\geq 1}$ *avec* $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = 0 \neq f(r) = 1$, *et un irrationnel* $x \notin \mathbb{Q}$ *étant limite d'une suite* $(r_n)_{n\geq 1}$ *de rationnels, on a* $\lim\limits_{n\to+\infty} f(r_n) = 1 \neq f(x) = 0$.

Exercice 11.14 *Soit* $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ *la fonction définie par* $f(x) = 0$ *si* x *est irrationnel et par* $f(x) = \dfrac{1}{q}$ *si* $x = \dfrac{p}{q}$ *est rationnel où* p, q *sont entiers naturels non nuls premiers entre eux. Montrer que* f *est continue en tout point irrationnel et discontinue en tout point rationnel de* $]0,1[$.

Solution 11.14 *Un rationnel* $r = \dfrac{p}{q} \in]0,1[\cap \mathbb{Q}$ *est limite de la suite d'irrationnels* $(x_n)_{n\geq n_0} = \left(r + \dfrac{\sqrt{2}}{n}\right)_{n\geq n_0}$, *où* n_0 *est choisi assez grand pour que cette suite soit à valeurs dans* $]0,1[$, *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = 0 \neq f(r) = \dfrac{1}{q}$. *La fonction* f *n'est donc pas continue en ce point.*

Soit $\varepsilon > 0$. *Si* $\alpha \in]0,1[\cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ *et* $\eta > 0$ *est tel que* $]\alpha - \eta, \alpha + \eta[\subset]0,1[$, *on note :*

$$E = \{x \in]\alpha - \eta, \alpha + \eta[\mid f(x) > \varepsilon\}.$$

Un élément de E *est nécessairement rationnel (sinon* $f(x) = 0 < \varepsilon$*), il s'écrit donc* $r = \dfrac{p}{q}$ *avec* p, q *premiers entre eux et* $f(r) = \dfrac{1}{q} > \varepsilon$ *entraîne que* E *est vide ou que* $1 \leq q < \dfrac{1}{\varepsilon}$ *et* $1 \leq p < q < \dfrac{1}{\varepsilon}$ *(*r *est strictement compris entre* 0 *et* 1*). L'ensemble* E *est donc vide ou fini. Pour* $0 < \eta' < \eta$ *assez petit on aura alors* $E \cap]\alpha - \eta', \alpha + \eta'[= \emptyset$, *ce qui signifie que* $0 \leq f(x) \leq \varepsilon$ *pour tout* $x \in]\alpha - \eta', \alpha + \eta'[$. *On a donc ainsi montré que* f *est continue en* α.

Exercice 11.15 *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction continue telle que* $f(ax + b) = f(x)$ *pour tout réel* x, *où* a, b *sont deux constantes réelles avec* $|a| \neq 1$. *Montrer que* f *est nécessairement constante.*

Solution 11.15 *De* $f(ax + b) = f(x)$, *on déduit que :*

$$f(a(ax + b) + b) = f(ax + b) = f(x),$$

soit :

$$f\left(a^2 x + b(a + 1)\right) = f(x).$$

Par récurrence, on montre alors que pour tout entier $n \geq 1$ *on a :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f\left(a^n x + b \sum_{k=0}^{n-1} a^k\right) = f(x).$$

Le résultat est vrai pour $n = 1$ et en le supposant vrai au rang $n \geq 1$, on a :

$$f\left(a\left(a^n x + b\sum_{k=0}^{n-1} a^k\right) + b\right) = f\left(a^n x + b\sum_{k=0}^{n-1} a^k\right) = f(x)$$

avec :

$$a\left(a^n x + b\sum_{k=0}^{n-1} a^k\right) + b = a^{n+1} x + b\sum_{k=0}^{n} a^k.$$

Comme $|a| \neq 1$, on peut écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f\left(a^n x + b\frac{a^n - 1}{a - 1}\right) = f(x)$$

et pour $|a| < 1$, avec la continuité de f, on déduit que pour tout réel x on a :

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} f\left(a^n x + b\frac{a^n - 1}{a - 1}\right) = f\left(\frac{b}{1 - a}\right),$$

c'est-à-dire que f est constante.

Pour traiter le cas où $|a| > 1$, on peut remarquer, en faisant le changement de variable $t = ax + b$, que la condition $f(ax + b) = f(x)$ est équivalente à $f(t) = f\left(\frac{1}{a}t - \frac{b}{a}\right)$ pour tout réel t avec $\left|\frac{1}{a}\right| < 1$, ce qui entraîne que f est constante.

Une autre application importante du théorème 11.3 est le principe de prolongement des identités [resp. des inégalités] : si f, g sont deux fonctions continues en tout point d'un intervalle I qui coïncident [resp. telles que $f(x) \leq g(x)$] en tout point d'une partie D dense dans I (par exemple les nombres rationnels ou les nombres décimaux), alors elle sont égales [resp. $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in I$].

Un exemple d'utilisation de ce principe est donné par le résultat suivant.

Théorème 11.4 *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifie l'équation fonctionnelle de Cauchy :*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R},\ f(x + y) = f(x) + f(y)$$

et est continue en un point, alors elle est continue en tout point et on a $f(x) = f(1)x$ pour tout réel x.

Démonstration. Si f est continue en α, en écrivant, pour tout réel x_0, que :

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f(h) = f(h + \alpha) - f(\alpha),$$

on déduit que f est continue en x_0.

On vérifie ensuite facilement que $f(r) = f(1)r$ pour tout $r \in \mathbb{Q}$ et la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ permet de conclure. ∎

11.3 Prolongement par continuité

Si a est un réel adhérent à I et si f a une limite finie en ce point on peut alors prolonger f par continuité en ce point. Précisément on a le résultat suivant.

Théorème 11.5 *Si a est un réel adhérent à I n'appartenant pas à I (un point frontière) et si la fonction $f : I \to \mathbb{C}$ a une limite ℓ en a, il existe alors un unique prolongement de f à $I \cup \{a\}$ qui est continu en a, ce prolongement est défini par $\widetilde{f}(x) = f(x)$ si $x \in I$ et $\widetilde{f}(a) = \ell$.*

Démonstration. Il est clair que la fonction $\widetilde{f}$ est un prolongement de f continu en a.

Réciproquement si g est un tel prolongement, on a $g = f$ sur I et par continuité en a, $g(a) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) = \ell = \widetilde{f}(a)$. D'où l'unicité. ∎

La fonction f définie par le théorème précédent est appelée le prolongement par continuité de f en a. On le note souvent f au lieu de $\widetilde{f}$.

Exemple 11.2 *La fonction $f : x \mapsto x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ définie sur $\mathbb{R}^*$ se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.*

Exemple 11.3 *La fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$.*

Exemple 11.4 *La fonction $f : x \mapsto \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ définie sur $\mathbb{R}^*$ ne peut pas se prolonger par continuité en 0 du fait qu'elle n'a pas de limite en ce point.*

11.4 Continuité et opérations sur les fonctions

Les résultats relatifs à la continuité et les opérations usuelles sur les fonctions sont résumés par le théorème qui suit.

Théorème 11.6 *Soient f, g deux fonctions définies sur I, à valeurs réelles ou complexes et continues en $a \in I$. Les fonctions $|f|$, $f + g$, fg, $\min(f, g)$ et $\max(f, g)$ (pour f, g à valeurs réelles) sont continues en a.*

Démonstration. La continuité de $|f|$ résulte de :

$$||f(x)| - |f(a)|| \leq |f(x) - f(a)| \underset{x \to \alpha}{\to} 0.$$

Pour la somme, la continuité se déduit de l'inégalité triangulaire :

$$|(f + g)(x) - (f + g)(a)| \leq |f(x) - f(a)| + |g(x) - g(a)| \underset{x \to \alpha}{\to} 0.$$

Pour le produit, la continuité se déduit de l'inégalité triangulaire et du fait que f (ou g) est bornée au voisinage de a :

$$\begin{aligned} |(fg)(x) - (fg)(a)| &\leq |f(x)| \, |g(x) - g(a)| + |g(a)| \, |f(x) - f(a)| \\ &\leq M \, |g(x) - g(a)| + |g(a)| \, |f(x) - f(a)| \underset{x \to \alpha}{\to} 0, \end{aligned}$$

où M est un majorant de $|f|$ au voisinage de a.

Enfin la continuité de $\min(f,g)$ et $\max(f,g)$, pour f,g réelles, se déduit de :

$$\begin{cases} \min(f,g) = \dfrac{1}{2}(f+g-|f-g|), \\ \max(f,g) = \dfrac{1}{2}(f+g+|f-g|), \end{cases}$$

($\dfrac{f+g}{2}$ est le milieu de l'intervalle $[\min(f,g), \max(f,g)]$ et $|f-g|$ est sa longueur). ■

Avec la continuité de la fonction constante égale à 1 et de la fonction $x \mapsto x$ en tout point de $\mathbb{R}$, on en déduit la continuité des fonctions polynomiales.

Pour les quotients de fonctions continues, on a besoin du résultat suivant.

Lemme 11.1 *Si $f : I \to \mathbb{C}$ est continue en $a \in I$ avec $f(a) \neq 0$, il existe alors un voisinage $\mathcal{V}$ de a dans I tel que $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathcal{V}$.*

Démonstration. Comme $f(a) \neq 0$, on a $|f(a)| > 0$ et pour $\varepsilon \in]0, |f(a)|[$ on peut trouver un réel $\eta > 0$ tel que $|x-a| < \eta$ dans I entraîne

$$||f(x)| - |f(a)|| \leq |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

ce qui implique $|f(x)| > |f(a)| - \varepsilon > 0$ pour tout x dans ce voisinage. ■

Dans le cas des fonctions à valeurs réelles, on a le résultat plus précis suivant qui est souvent utilisé.

Lemme 11.2 *Si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue en $a \in I$ avec $f(a) > 0$ [resp. $f(a) < 0$], il existe alors un voisinage $\mathcal{V}$ de a dans I tel que $f(x) > 0$ [resp. $f(x) < 0$] pour tout $x \in \mathcal{V}$.*

Démonstration. Supposons $f(a) > 0$. Pour $\varepsilon \in]0, f(a)[$ on peut trouver un réel $\eta > 0$ tel que $|x-a| < \eta$ dans I entraîne $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, ce qui implique $f(x) > f(a) - \varepsilon > 0$ pour tout x dans ce voisinage. ■

En supposant connue la notion d'intégrale de Riemann d'une fonction continue sur un segment, on déduit du lemme précédent que la forme linéaire positive $\varphi \mapsto \displaystyle\int_a^b \varphi(t)\,dt$, définie sur l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})$ des applications continues sur l'intervalle $[a,b]$ ($a < b$) et à valeurs dans $\mathbb{R}$, est telle que l'égalité $\displaystyle\int_a^b \varphi(t)\,dt = 0$ équivaut à $\varphi = 0$ si $\varphi \in E$ est à valeurs positives ou nulles, ce qui permet de montrer que l'application $f \mapsto \|f\|_1 = \displaystyle\int_a^b |f(t)|\,dt$ définit une norme sur E (norme de la convergence en moyenne).

Théorème 11.7 *Si $f : I \to \mathbb{C}$ est continue en $a \in I$ avec $f(a) \neq 0$, alors la fonction $\dfrac{1}{f}$ est définie dans un voisinage de a et est continue en ce point.*

Démonstration. En gardant les notations de la démonstration du lemme 11.1, on a $|f(x)| > |f(a)| - \varepsilon > 0$ pour x voisin de a et :

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(a)}\right| = \left|\frac{f(x) - f(a)}{f(x)\,f(a)}\right| \leq \frac{|f(x) - f(a)|}{(|f(a)| - \varepsilon)\,|f(a)|} \underset{x \to \alpha}{\to} 0.$$

■

De ce résultat on déduit la continuité de $\frac{f}{g}$ en a si f, g sont continues en ce point avec $g(a) \neq 0$.

De la continuité des fonctions polynomiales, on déduit la continuité des fonctions rationnelles en tout point de leur domaine de définition.

De la continuité des fonctions sin et cos sur $\mathbb{R}$, on déduit la continuité de la fonction tan sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Pour la composition des applications, on a le résultat suivant.

Théorème 11.8 *Si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue en $a \in I$, J est un intervalle réel contenant $f(I)$ et $g : J \to \mathbb{C}$ est continue en $b = f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a.*

Démonstration. Pour $\varepsilon > 0$ donné, on peut trouver un réel $\eta > 0$ tel que $|y - b| < \eta$ dans l'intervalle J entraîne $|g(y) - g(b)| < \varepsilon$ et il existe $\eta' > 0$ tel que $|x - a| < \eta'$ dans l'intervalle I entraîne $|f(x) - f(a)| < \eta$, ce qui implique $|(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)| < \varepsilon$ pour tout x dans I tel que $|x - a| < \eta'$. ■

La continuité de $\frac{1}{f}$ peut se retrouver en composant la fonction f dans un voisinage de α où elle est non nulle avec $y \mapsto \frac{1}{y}$.

11.5 Continuité uniforme

Une notion importante est celle d'uniforme continuité.

Définition 11.3 *On dit que $f : I \to \mathbb{C}$ est uniformément continue sur I si :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \mid \left((x, y) \in I^2,\ |x - y| \leq \eta\right) \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Remarque 11.2 *La notion de continuité est une notion ponctuelle (on dit que f est continue en α) alors que celle de continuité uniforme est globale.*

Une fonction uniformément continue sur I est évidemment continue en tout point de I, la nuance est, dans le cas de l'uniforme continuité, qu'un réel η associé à ε ne dépend que de f, I et ε.

Exemple 11.5 *Une fonction lipschitzienne (c'est-à-dire telle qu'il existe un réel $\lambda \geq 0$ avec $|f(x) - f(y)| \leq \lambda |x - y|$ pour tous x, y dans I) est uniformément continue sur I.*

Exercice 11.16 *La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.*

Solution 11.16 *Ce résultat se déduit de :*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+,\ \left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \leq \sqrt{|x - y|}.$$

Cette inégalité est triviale pour $x = y$ et pour $y > x \geq 0$ (x, y jouent des rôles symétriques), on a :

$$\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right|^2 = y - 2\sqrt{xy} + x < y - x.$$

On peut utiliser les suites pour traduire l'uniforme continuité.

Théorème 11.9 *Si $f : I \to \mathbb{R}$ est uniformément continue et si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites d'éléments de I telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (f(u_n) - f(v_n)) = 0$.*

Démonstration. Résulte de la définition. ■

Ce résultat peut être utilisé pour montrer qu'une fonction n'est pas uniformément continue sur I.

Exercice 11.17 *Montrer que la fonction $f : x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.*

Solution 11.17 *En considérant les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_n = \sqrt{n+1}$ et $v_n = \sqrt{n}$, on a $u_n - v_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$ et avec $f(u_n) - f(v_n) = 1$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} (f(u_n) - f(v_n)) = 1 \neq 0$, donc la fonction f n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.*
Une démonstration directe de cette non uniforme continuité peut se faire comme suit : pour $\eta > 0$, $x = \dfrac{1}{\eta}$, $y = x + \dfrac{\eta}{2}$, on a $|x-y| < \eta$ et $|y^2 - x^2| = 1 + \dfrac{\eta^2}{4} > 1$.

Exercice 11.18 *Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sin(x^2)$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.*

Solution 11.18 *En considérant les suites introduites avec l'exercice précédent, on a :*

$$f(u_n) - f(v_n) = \sin(n+1) - \sin(n) = 2\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\sin\left(\frac{1}{2}\right)$$

et cette suite est divergente.

Ces exercices nous montrent qu'une fonction continue n'est pas nécessairement uniformément continue.

Exercice 11.19 *Montrer qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ peut très bien être uniformément continue sur tout intervalle strictement contenu dans I sans être uniformément continue sur I tout entier.*

Solution 11.19 *C'est le cas, par exemple, pour la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $I =]0,1]$. Elle est lipschitzienne sur tout $[a,1]$ où $0 < a < 1$, donc uniformément continue sur ces intervalles. Mais pour tout réel $\eta \in \left]0, \dfrac{1}{2}\right[$, $x = \eta$, $y = x + \dfrac{\eta}{2}$, on a $|y-x| < \eta$ avec $\left|\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}\right| = \dfrac{1}{3\eta} > \dfrac{2}{3}$.*

Dans le cas où I est un intervalle fermé borné, nous verrons que les notions de continuité et d'uniforme continuité sont équivalentes.

11.6 Continuité à gauche et à droite. Discontinuités de première et deuxième espèce

Définition 11.4 *On dit que la fonction $f : I \to \mathbb{C}$ est continue à gauche [resp. à droite] au point $a \in I$ si pour tout réel $\varepsilon > 0$ il existe un réel $\eta > 0$ tel que :*

$$x \in I,\ a - \eta < x < a \ \Rightarrow\ |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

$$[\textit{resp. } x \in I,\ a < x < a + \eta \ \Rightarrow\ |f(x) - f(a)| < \varepsilon]$$

Dire que f est continue à gauche [resp. à droite] équivaut à dire que $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$ [resp. $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$].

Si a est l'extrémité gauche [resp. droite] de I, on ne s'intéresse qu'à la continuité à droite [resp. à gauche].

Théorème 11.10 *Si a est un point intérieur à l'intervalle I, alors la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est continue en a si, et seulement si, elle est continue à gauche et à droite en a.*

Si $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \ell$, en général, on convient de prolonger f par continuité en posant $f(a) = \ell$.

Dans le cadre des séries de Fourier, si ces limites existent et sont distinctes, on définit alors la fonction f en a en posant $f(a) = \dfrac{f(a^-) + f(a^+)}{2}$.

La fonction $f : I \to \mathbb{C}$ est discontinue en $a \in I$ si, et seulement si, l'une des deux situations suivantes se produit :

— soit f n'a pas de limite à gauche ou à droite en a ;

— soit ces deux limites existent et l'une d'elles est distincte de $f(a)$.

Définition 11.5 *Si a est intérieur à I et si la fonction $f : I \to \mathbb{C}$ est discontinue en a avec des limites à droite et à gauche en ce point, on dit alors que f a une discontinuité de première espèce en a.*

Si f est discontinue en a et que cette discontinuité n'est pas de première espèce, on dit alors qu'elle est de deuxième espèce.

Théorème 11.11 *Si I est un intervalle ouvert, l'ensemble des points de discontinuité de première espèce de f est au plus dénombrable.*

Démonstration. Voir [45], chapitre 4, exercice 17. ∎

Dans le cas des fonctions à valeurs réelles monotones définies sur un intervalle ouvert I, on déduit du théorème 8.8 le résultat suivant.

Corollaire 11.1 *Une fonction monotone d'un intervalle ouvert I dans $\mathbb{R}$ ne peut avoir que des discontinuités de première espèce.*

De ce résultat et du théorème 11.11 on déduit que l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction monotone est au plus dénombrable. Ce résultat peut aussi se démontrer directement comme suit.

Théorème 11.12 *Si f est une fonction monotone d'un intervalle ouvert I dans $\mathbb{R}$, alors l'ensemble de ses points de discontinuité est au plus dénombrable.*

Démonstration. Supposons f croissante et l'ensemble D des points de discontinuité de f non vide. Pour tout $x \in D$ on a alors $f(x^-) < f(x^+)$ et on peut trouver un rationnel $r(x) \in]f(x^-), f(x^+)[$. De plus pour $x < y$ dans I avec $f(x^+) \leq f(y^-)$, on déduit que $r(x) < r(y)$. L'application r définit donc une injection de D dans $\mathbb{Q}$, il en résulte que D est dénombrable. ∎

En général une fonction monotone f définie sur un intervalle I n'est pas nécessairement continue, mais nous verrons plus loin que si de plus $f(I)$ est un intervalle, alors elle est continue (théorème 11.16).

Exemple 11.6 *La fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(0) = 0$ et $f(x) = \dfrac{1}{\left[\frac{1}{x}\right]}$ est croissante avec une infinité de points de discontinuité.*

11.7 Le théorème des valeurs intermédiaires

Nous avons déjà rencontré le théorème des valeurs intermédiaires (théorème 3.25) comme application du théorème des segments emboîtés (ou des suites adjacentes). La démonstration que nous en avons donnée est constructive dans le sens où elle fournit un algorithme de calcul approché d'une solution de l'équation $f(x) = 0$

Nous donnons ici une deuxième démonstration de ce théorème que nous interpréterons en disant que l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle. Cette démonstration est une conséquence du théorème de la borne supérieure sur $\mathbb{R}$ (théorème 1.4).

Théorème 11.13 *Si $a < b$ sont deux points de I et f est une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$ telle que $f(a) f(b) < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution $\alpha \in \left]a, b\right[$.*

Démonstration. Supposons que $f(a) < 0 < f(b)$ (quitte à remplacer f par $-f$, on s'y ramène).

Soit :

$$\mathcal{A} = \{x \in [a, b] \mid f(x) \leq 0\}.$$

$\mathcal{A}$ est une partie non vide ($a \in \mathcal{A}$) majorée (par b) de $\mathbb{R}$, elle admet donc une borne supérieure $\alpha \in [a, b]$.

La fonction f étant continue sur $[a, b]$, on peut trouver un réel $\eta > 0$ tel que :

$$\begin{gathered}\forall x \in [a, a+\eta] \subset [a, b], \ f(x) < 0, \\ \forall x \in [b-\eta, b] \subset [a, b], \ f(x) > 0.\end{gathered}$$

On a alors $a < a + \eta \leq \alpha \leq b - \eta < b$ et $\alpha \in \left]a, b\right[$. Il existe donc un entier n_0 strictement positif tel que $\left[\alpha - \dfrac{1}{n_0}, \alpha + \dfrac{1}{n_0}\right] \subset \left]a, b\right[$ et par définition de la borne supérieure α, pour tout entier $n \geq n_0$ il existe $x_n \in \mathcal{A}$ tels que :

$$\alpha - \frac{1}{n} < x_n \leq \alpha.$$

En posant $y_n = \alpha + \dfrac{1}{n}$, on a $y_n \in [a, b] - \mathcal{A}$ et :

$$x_n \leq \alpha < y_n.$$

On a alors $\alpha = \lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \lim\limits_{n \to +\infty} y_n$ avec, pour tout entier $n \geq n_0$, $f(x_n) \leq 0$ ($x_n \in \mathcal{A}$) et $f(y_n) > 0$ ($y_n \in [a, b] - \mathcal{A}$). Avec la continuité de f on déduit alors que :

$$f(\alpha) = \lim_{n \to +\infty} f(x_n) \leq 0, \quad f(\alpha) = \lim_{n \to +\infty} f(y_n) \geq 0$$

et $f(\alpha) = 0$. ∎

Si, avec les hypothèses du théorème précédent, la fonction f est de plus strictement monotone, elle est alors injective et la solution α de l'équation $f(x) = 0$ dans l'intervalle $[a, b]$ est unique.

Le théorème des valeurs intermédiaires et le principe de dichotomie permettent de construire deux suites adjacentes qui convergent vers la solution $\alpha \in \left]a, b\right[$ de l'équation $f(x) = 0$ dans le cas où cette dernière est unique dans $[a, b]$.

L'idée est de découper l'intervalle en deux parties égales et de conserver la moitié $[u, v]$ qui contient la solution de $f(x) = 0$. On détermine cette partie en étudiant le signe de $f(u) f(v)$ où $[u, v] \subset [a, b]$. On répète ensuite le processus.

On construit donc une suite $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ d'intervalles emboîtés dans $[a, b]$ de la manière suivante.

$[a_0, b_0] = [a, b]$.

En supposant construit un intervalle $[a_n, b_n] \subset [a, b]$ de longueur $\frac{b-a}{2^n}$ qui contient la racine α de $f(x) = 0$, on note $c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$ (milieu de $[a_n, b_n]$) et on fait le test suivant :

si $f(a_n) f(c_n) \leq 0$
alors $[a_{n+1}, b_{n+1}] = [a_n, c_n]$;
sinon $[a_{n+1}, b_{n+1}] = [c_n, b_n]$.

Dans tous les cas on a $\alpha \in [a_{n+1}, b_{n+1}]$ et $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b-a}{2^{n+1}}$.

On donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} &a_n \leq a_{n+1} \leq \alpha \leq b_{n+1} \leq b_n, \\ &b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

C'est-à-dire que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et convergent vers la solution α de $f(x) = 0$.

Remarque 11.3 *La suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge également vers α.*

Pour chacune des trois suites, on la majoration de l'erreur d'approximation :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |\alpha - x_n| \leq \frac{b-a}{2^n},$$

ce qui permet de déterminer un nombre suffisant d'itérations pour atteindre une précision $\varepsilon > 0$ donnée. On peut prendre $n_0 = \log_2\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)$.

En pratique on préfère utiliser le test d'arrêt $|b_n - a_n| < \varepsilon$.

Avec les hypothèses ci-dessus la méthode converge toujours, mais cette convergence peut être lente. De plus cette méthode ne se généralise pas au cas des systèmes non linéaires d'équations.

Théorème 11.14 *Si I est un intervalle réel et f une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$, alors $f(I)$ est un intervalle.*

Remarque 11.4 *Si la fonction f n'est pas continue en tout point de I, alors $f(I)$ n'est pas nécessairement un intervalle comme le montre l'exemple de la fonction f définie sur $I = [0, 2]$ par $f(x) = 1$ si $0 \leq x \leq 1$ et $f(x) = 2$ si $1 < x \leq 2$ (cette fonction est continue sur $I \setminus \{1\}$ avec $f(I) = \{1, 2\}$).*

La réciproque du théorème des valeurs intermédiaires n'est pas vraie, c'est-à-dire qu'une fonction peut vérifier la propriété des valeurs intermédiaires sans être continue. Par exemple le théorème de Darboux (théorème **??**, page **??**) nous dit qu'une fonction dérivée vérifie la propriété des valeurs intermédiaires et il existe des fonctions dérivables de dérivée non continue. On peut aussi considérer l'exemple de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ (exercice 11.28).

Précisément, on dira qu'une fonction f définie sur un intervalle réel I et à valeurs réelles vérifie la propriété des valeurs intermédiaires si pour tout intervalle J contenu dans I, $f(J)$ est un intervalle.

Ce qu'il manque à une fonction vérifiant la propriété des valeurs intermédiaires sur un intervalle compact $[a, b]$ pour être continue est donné par le résultat suivant.

Théorème 11.15 *Si f est une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle I vérifiant la propriété des valeurs intermédiaires alors f est continue si, et seulement si, pour tout réel y, l'ensemble $f^{-1}\{y\}$ est fermé dans I.*

Démonstration. Si f est continue, on sait qu'elle vérifie la propriété des valeurs intermédiaires et l'image réciproque du fermé $\{y\}$ par f est fermé.

Réciproquement supposons que $f : I \to \mathbb{R}$ vérifie la propriété des valeurs intermédiaires et que $f^{-1}\{y\}$ est fermé dans I pour tout $y \in \mathbb{R}$. On se donne $x_0 \in I$ et $\varepsilon > 0$. Les ensembles $F_1 = f^{-1}\{f(x_0) - \varepsilon\}$ et $F_2 = f^{-1}\{f(x_0) + \varepsilon\}$ sont des fermés (éventuellement vides) de I qui ne contiennent pas x_0, donc x_0 est dans l'ouvert $\mathcal{O} = (I \setminus F_1) \cap (I \setminus F_2)$ et il existe $\eta > 0$ tel que $J = I \cap]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\subset \mathcal{O}$. Pour tout $x \in J$ on a $f(x) \neq f(x_0) \pm \varepsilon$ et $f(J)$ est un intervalle qui contient $f(x_0)$, nécessairement $f(J) \subset]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[$, c'est-à-dire que $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ pour tout $x \in I \cap]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$. On a donc ainsi montré que f est continue en tout point de I. ∎

Remarque 11.5 *On peut affaiblir les hypothèses dans le théorème précédent en remplaçant l'hypothèse, $f^{-1}\{y\}$ est fermé dans I pour tout réel y, par $f^{-1}\{y\}$ est fermé dans I pour tout rationnel y (voir [17], exercice 4.1).*

Dans le cas des fonctions monotones, on a le résultat suivant, où $I =]a, b[$ est un intervalle ouvert avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

Théorème 11.16 *Si f est une fonction monotone de I dans $\mathbb{R}$ telle que $f(I)$ soit un intervalle, alors elle est continue sur I.*

Démonstration. On suppose que f est croissante.

Il s'agit de montrer que pour tout $x \in I$ on a $\lim\limits_{t \to x} f(t) = f(x)$. On sait déjà que f admet une limite à gauche et à droite en x avec $f(x^-) \leq f(x) \leq f(x^+)$. Il s'agit donc de montrer que $f(x^-) = f(x^+) = f(x)$.

Supposons que $f(x^-) < f(x)$, pour $\varepsilon > 0$ donné, on peut alors trouver $x_0 \in]a, x[$ tel que :

$$f\left(x^-\right) - \varepsilon < f(x_0) \leq f\left(x^-\right) < f(x).$$

Mais si de plus $f(I)$ est un intervalle alors tout $\lambda \in]f(x^-), f(x)[$ étant dans $]f(x_0), f(x)[$ s'écrit $\lambda = f(x_1)$ avec $x_1 \in]x_0, x[$ et on a alors $\lambda = f(x_1) \leq f(x^-)$ en contradiction avec $\lambda > f(x^-)$. On a donc $f(x^-) = f(x)$.

On montre de manière analogue que $f(x) = f(x^+)$.

Les limites à droite et à gauche en x sont donc égales à $f(x)$, ce qui prouve la continuité de f en x. ∎

11.8 Propriétés globales des fonctions continues

Dans la mesure où les raisonnements ne sont pas plus compliqués, on se place dans le cadre plus général des espaces vectoriels normés.

On se donne deux espaces vectoriels normés $(E, \|\cdot\|)$ et $(F, \|\cdot\|)$ que l'on peut remplacer par $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

La notion de continuité se définie comme dans le cas réel.

Une définition topologique de la continuité est donnée par le résultat suivant.

Théorème 11.17 *Une fonction $f : \mathcal{A} \to F$ est continue sur $\mathcal{A}$ si, et seulement si, l'image réciproque par f de tout ouvert [resp. fermé] de F est un ouvert [resp. fermé] de $\mathcal{A}$.*

Démonstration. On rappelle qu'une partie X de $\mathcal{A}$ est ouverte [resp. fermée] dans $\mathcal{A}$ si elle s'écrit $X = \mathcal{A} \cap \mathcal{U}$ où $\mathcal{U}$ est un ouvert [resp. fermé] de E.

Supposons f continue de $\mathcal{A}$ dans F et soit $\mathcal{O}$ un ouvert de F. Pour tout $a \in f^{-1}(\mathcal{O})$, $f(a)$ est dans l'ouvert $\mathcal{O}$, il existe donc un réel $\varepsilon > 0$ tel que la boule ouverte $B(f(a), \varepsilon)$ soit contenue dans $\mathcal{O}$ et avec la continuité de f, on peut trouver un réel $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in B(a, \eta) \cap \mathcal{A}$ on ait $f(x) \in B(f(a), \varepsilon) \subset \mathcal{O}$. On a donc $B(a, \eta) \cap \mathcal{A} \subset f^{-1}(\mathcal{O})$ et en posant $\mathcal{U} = \bigcup_{a \in f^{-1}(\mathcal{O})} B(a, \eta)$, on définit un ouvert de E tel que $f^{-1}(\mathcal{O}) = \mathcal{A} \cap \mathcal{U}$, ce qui prouve que $f^{-1}(\mathcal{O})$ est ouvert dans E.

Réciproquement, supposons que l'image réciproque par f de tout ouvert de F est un ouvert de $\mathcal{A}$. Pour $a \in \mathcal{A}$ et $\varepsilon > 0$, $f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$ est un ouvert de $\mathcal{A}$, il existe donc un réel $\eta > 0$ tel que $B(a, \eta) \cap \mathcal{A} \subset f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$, ce qui signifie que $\|f(x) - f(\alpha)\| \leq \varepsilon$ pour tout $x \in B(a, \eta) \cap \mathcal{A}$. La fonction f est donc continue en tout point de $\mathcal{A}$.

Pour ce qui est de l'image réciproque des fermés, on utilise le fait qu'un fermé est le complémentaire d'un ouvert et l'image réciproque du complémentaire est le complémentaire de l'image réciproque. ∎

Dans le cadre des espaces topologiques, la notion de continuité en un point se définit comme suit.

Définition 11.6 *Soient E, F deux espaces topologiques et f une fonction de E dans F. On dit que f est continue en $x \in E$ si pour tout voisinage $\mathcal{V}$ de $f(x)$ il existe un ouvert $\mathcal{O}$ dans E tel que $f(\mathcal{O}) \subset \mathcal{V}$ et on dit que f est continue sur E si elle est continue en tout point de E.*

Dire que f est continue sur E équivaut aussi à dire que pour tout ouvert $\mathcal{O}'$ dans F, l'image réciproque par f, $f^{-1}(\mathcal{O}')$ est un ouvert de E.

Remarque 11.6 *Dans le cas des espaces vectoriels normés de dimension infinie, la notion de continuité dépend du choix des normes sur E et F. Par exemple, la fonction $f \mapsto f(0)$ est continue de $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$ dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, mais non continue sur $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_1$. La continuité de cette application linéaire, pour la norme $\|\cdot\|_\infty$, résulte de l'inégalité $|f(0)| \leq \|f\|_\infty$ vérifiée par toute fonction f dans $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. En considérant la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ définie sur $[0,1]$ par :*

$$f_n(x) = \begin{cases} -nx + 1 \text{ si } 0 \leq x \leq \dfrac{1}{n}, \\ 0 \text{ si } \dfrac{1}{n} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

on vérifie que $\lim_{n \to +\infty} \|f_n\|_1 = 0$ et $\lim_{n \to +\infty} f_n(0) = 1$. L'application $f \mapsto f(0)$ n'est pas continue pour $\|\cdot\|_1$.

11.8.1 Continuité et compacité

On rappelle qu'une partie non vide K d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est compacte si de toute suite de points de K on peut extraire une sous-suite qui converge vers un élément de K (propriété de Bolzano-Weierstrass).

Sur $\mathbb{R}$ on a le résultat suivant.

Théorème 11.18 (Bolzano-Weierstrass) *De toute suite bornée de nombres réels on peut extraire une sous-suite convergente.*

Démonstration. On utilise le principe de dichotomie.

Si $[a_0, b_0]$ est un intervalle réel qui contient tous les éléments de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on le coupe en deux parties égales et on garde une de ces parties qui contient des x_n pour une infinité d'indices n. En réitérant ce procédé on construit deux suites adjacentes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une application φ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telles que chaque intervalle $[a_n, b_n]$ contient un terme $x_{\varphi(n)}$. La suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors convergente. ■

De ce théorème on déduit immédiatement le corollaire suivant.

Corollaire 11.2 *Les compacts de* $\mathbb{R}$ *sont les fermés bornés.*

Ce corollaire s'exprime en disant que $\mathbb{R}$ est localement compact.

De manière générale dans un espace vectoriel normé un compact est fermé borné. La réciproque est vraie si, et seulement si, E est de dimension finie.

Théorème 11.19 *Soient* K *un compact d'un espace vectoriel normé* $(E, \|\cdot\|)$ *et* f *une fonction définie sur* K *à valeurs dans* $\mathbb{R}$. *Si* f *est continue alors* f *est bornée et atteint ses bornes. C'est-à-dire qu'il existe* a *et* b *dans* K *tels que :*

$$f(a) = \inf_{x\in K} f(x)\,,\ f(b) = \sup_{x\in K} f(x)\,.$$

Démonstration. Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $f(K)$ avec $y_n = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans le compact K on peut extraire une suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un élément x de K. Avec la continuité de f on a alors :

$$\lim_{n\to+\infty} y_{\varphi(n)} = \lim_{n\to+\infty} f\left(x_{\varphi(n)}\right) = f(x)\,.$$

En conséquence $f(K)$ est compact. En particulier $f(K)$ est une partie non vide bornée de $\mathbb{R}$ et donc admet une borne inférieure et une borne supérieure. Notons :

$$m = \inf_{x\in K} f(x)\,,\ M = \sup_{x\in K} f(x)\,.$$

Il reste à montrer que m et M sont dans $f(K)$.

Par définition de la borne inférieure m, pour tout entier $n > 0$ on peut trouver x_n dans K tel que :

$$m \leq f(x_n) < m + \frac{1}{n}.$$

De la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi définie dans le compact K on peut extraire une sous-suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un élément a de K. On a donc pour tout entier $n > 0$:

$$m \leq f\left(x_{\varphi(n)}\right) < m + \frac{1}{\varphi(n)},$$

avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi(n) = +\infty$. On a donc, avec la continuité de f :

$$f(a) = \lim_{n\to+\infty} f\left(x_{\varphi(n)}\right) = m.$$

On procède de manière analogue pour la borne supérieure. ■

La version réelle de ce théorème est la suivante.

Théorème 11.20 *Toute fonction définie sur un intervalle réel fermé borné $[a,b]$ à valeurs réelles et continue est bornée et atteint ses bornes.*

Ce résultat permet de définir sur $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ la norme de la convergence uniforme par :

$$\forall f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}),\ \|f\|_\infty = \sup_{x[a,b]} |f(x)|.$$

En utilisant le théorème **??** et le théorème des valeurs intermédiaires, on obtient le résultat suivant.

Théorème 11.21 (Première formule de la moyenne) *Soient f, g deux fonctions à valeurs réelles définies et continues sur $I = [a,b]$, la fonction g étant de signe constant. Il existe un réel $c \in [a,b]$ tel que :*

$$\int_a^b f(x) g(x)\, dx = f(c) \int_a^b g(x)\, dx.$$

Démonstration. La fonction f étant continue sur le compact I est bornée et atteint ses bornes, il existe donc deux réels α, β dans I tels que $m = \inf_{x\in I} f(x) = f(\alpha)$ et $M = \sup_{x\in I} f(x) = f(\beta)$. En supposant g à valeurs positives ou nulles, on a $mg(x) \leq f(x) g(x) \leq Mg(x)$ pour tout $x \in I$ et :

$$m\int_a^b g(x)\, dx \leq \int_a^b f(x) g(x)\, dx \leq M\int_a^b g(x)\, dx.$$

Si $\displaystyle\int_a^b g(x)\, dx = 0$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x) g(x)\, dx = 0$ et n'importe quel point c convient.

Si $\gamma = \displaystyle\int_a^b g(x)\, dx \neq 0$ alors $\gamma > 0$, $\delta = \dfrac{1}{\gamma}\displaystyle\int_a^b f(x) g(x)\, dx \in [f(\alpha), f(\beta)]$ et le théorème des valeurs intermédiaires nous dit qu'il existe un réel c compris entre α et β tel que $\delta = f(c)$, ce qui donne la formule de la moyenne. ∎

En utilisant le théorème d'intégration par parties et le théorème des valeurs intermédiaires, on peut montrer la seconde formule de la moyenne qui suit.

Théorème 11.22 (Seconde formule de la moyenne) *Soient f une fonction à valeurs réelles positives de classe $\mathcal{C}^1$ et décroissante sur $I = [a,b]$ et g une fonction continue sur I. Il existe un réel $c \in I$ tel que :*

$$\int_a^b f(x) g(x)\, dx = f(a) \int_a^c g(x)\, dx.$$

Démonstration. Soit G la primitive de g nulle en a. Une intégration par parties nous donne :

$$\int_a^b f(x) g(x)\, dx = f(b) G(b) - \int_a^b f'(x) G(x)\, dx$$

La fonction G étant continue sur le compact I est bornée et on peut noter $m = \inf_{x\in I} f(x)$ et $M = \sup_{x\in I} f(x)$. Comme f est à valeurs positives, on a :

$$mf(b) \leq f(b) G(b) \leq Mf(b)$$

Si de plus f est de classe $\mathcal{C}^1$ et décroissante, on a alors $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$ et :

$$Mf'(x) \leq f'(x) G(x) \leq mf'(x)$$

qui donne par intégration :

$$M\left(f\left(b\right)-f\left(a\right)\right)\leq\int_{a}^{b}f'\left(x\right)G\left(x\right)dx\leq m\left(f\left(b\right)-f\left(a\right)\right)$$

Il en résulte que :

$$mf\left(b\right)-m\left(f\left(b\right)-f\left(a\right)\right)\leq\int_{a}^{b}f\left(x\right)g\left(x\right)dx\leq Mf\left(b\right)-M\left(f\left(b\right)-f\left(a\right)\right)$$

soit :

$$mf\left(a\right)\leq\int_{a}^{b}f\left(x\right)g\left(x\right)dx\leq Mf\left(a\right).$$

Si $f\left(a\right)=0$, on a alors $\int_{a}^{b}f\left(x\right)g\left(x\right)dx=0$ et la formule est vérifiée pour tout $c\in I$, sinon on a $f\left(a\right)>0$ et $m\leq\frac{1}{f\left(a\right)}\int_{a}^{b}f\left(x\right)g\left(x\right)dx\leq M$, ce qui entraîne l'existence de $c\in I$ tel que $\frac{1}{f\left(a\right)}\int_{a}^{b}f\left(x\right)g\left(x\right)dx=G\left(c\right)$ (théorème des valeurs intermédiaires pour la fonction continue G). ■

Remarque 11.7 *Cette seconde formule de la moyenne est encore valable pour f,g continues par morceaux sur I, la fonction f étant décroissante à valeurs positives (voir [38]).*

Un autre résultat important relatif aux fonctions continues sur un compact est le suivant.

Théorème 11.23 *Si K est un compact de E, alors toute fonction f continue de K dans F est uniformément continue sur K.*

Démonstration. Supposons la fonction f non uniformément continue sur K. Il existe alors un réel $\varepsilon>0$ et des suites $\left(x_n\right)_{n\geq1}$, $\left(y_n\right)_{n\geq1}$ dans K telles que $\left\|x_n-y_n\right\|<\frac{1}{n}$ et $\left\|f\left(x_n\right)-f\left(y_n\right)\right\|>\varepsilon$ pour tout $n\geq1$. Avec la compacité de K, on peut extraire deux suites $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\geq1}$ et $\left(y_{\varphi(n)}\right)_{n\geq1}$ qui convergent respectivement vers x et y dans K. Mais avec $\left\|x_n-y_n\right\|<\frac{1}{\varphi\left(n\right)}\leq\frac{1}{n}$, on déduit que $\left\|x-y\right\|=\lim\limits_{n\to+\infty}\left\|x_{\varphi(n)}-y_{\varphi(n)}\right\|=0$, soit $x=y$ et avec la continuité de f on a alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left\|f\left(x_{\varphi(n)}\right)-f\left(y_{\varphi(n)}\right)\right\|=0$ en contradiction avec $\left\|f\left(x_{\varphi(n)}\right)-f\left(y_{\varphi(n)}\right)\right\|>\varepsilon$ pour tout $n\geq1$. ■

Comme première application de ce résultat, on peut montrer que toute fonction f continue sur un segment $[a,b]$ est limite uniforme d'une suite de fonctions continues affines par morceaux.

De manière plus précise, soit f continue sur $[a,b]$. Pour tout entier $n\geq1$ on définit une subdivision de $[a,b]$ en notant :

$$x_k=a+k\frac{b-a}{n}\ \ (0\leq k\leq n)$$

et à cette subdivision on associe la fonction f_n définie par :

$$f_n\left(x\right)=f\left(x_k\right)+\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\left(f\left(x_{k+1}\right)-f\left(x_k\right)\right)$$

(f_n coïncide avec f aux x_k et est affine sur $[x_k,x_{k+1}]$). Cette fonction est affine par morceaux et continue sur $[a,b]$.

Lemme 11.3 *La suite* $(f_n)_{n\geq 1}$ *converge uniformément vers* f *sur* $[a,b]$.

Démonstration. La fonction f continue sur le compact $[a,b]$ y est uniformément continue, donc pour $\varepsilon > 0$ donné on peut trouver un réel $\eta > 0$ tel que si x, y dans $[a,b]$ sont tels que $|x-y| \leq \eta$ alors $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Pour tout entier $n \geq \dfrac{b-a}{\eta}$ et tout entier k compris entre 0 et $n-1$ on a alors $x_{k+1} - x_k = \dfrac{b-a}{n} \leq \eta$. Sachant qu'un réel $x \in [a,b]$ est dans l'un des intervalles $[x_k, x_{k+1}]$, on obtient pour $n \geq \dfrac{b-a}{\eta}$:

$$\begin{aligned} |f(x) - f_n(x)| &= \left| f(x) - f(x_k) - \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} \left(f(x_{k+1}) - f(x_k) \right) \right| \\ &\leq |f(x) - f(x_k)| + \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \\ &\leq \varepsilon + \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} \varepsilon \leq 2\varepsilon, \end{aligned}$$

ce qui prouve la convergence uniforme sur $[a,b]$ de $(f_n)_{n\geq 1}$ vers f. ■

Ce résultat peut être utilisé pour prouver, sans théorie de l'intégration, que toute fonction f continue sur un intervalle compact admet une primitive.

On vérifie tout d'abord qu'une fonction affine par morceaux et continue sur $[a,b]$ admet une primitive, ce qui n'est pas difficile.

Si, avec les notations qui précèdent, on désigne pour tout $n \geq 1$ par F_n la primitive de f_n nulle en a, on constate que la suite $(F'_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers f et que la suite $(F_n(a))_{n\geq 1}$ converge vers 0. On déduit alors que la suite $(F_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction dérivable F et que $F' = f$, c'est-à-dire que F est une primitive de f sur $[a,b]$.

On peut alors définir l'intégrale d'une fonction f continue sur $[a,b]$ par :

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

où F est une primitive de f sur cet intervalle.

Une deuxième application est relative aux fonctions périodiques.

Théorème 11.24 *Toute fonction continue sur* $\mathbb{R}$ *périodique de période* $2T > 0$ *et à valeurs réelles est uniformément continue.*

Démonstration. Toute fonction f continue sur $\mathbb{R}$ périodique de période $2T$ est uniformément continue sur le compact $J = [-T-1, T+1]$. Donc pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un réel $\eta \in]0,1[$ tel que :

$$(t,x) \in J^2,\ |t-x| \leq \eta \implies |f(t) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Pour $x \in [-T, T]$ et $t \in \mathbb{R}$ tels que $|t-x| \leq \eta$ on a nécessairement $t \in [-T-1, T+1]$ ($\eta \in]0,1[$) et $|f(t) - f(x)| \leq \varepsilon$.

Pour $(t,x) \in \mathbb{R}^2$ tels que $|t-x| \leq \eta$ et $n \in \mathbb{Z}$ tel que $x - 2nT \in [-T, T]$ ($n = E\left(\dfrac{x+T}{2T}\right)$) on a $|(t-2nT) - (x-2nT)| \leq \eta$ et :

$$|f(t) - f(x)| = |f(t-2nT) - f(x-2nT)| \leq \varepsilon.$$

On a donc ainsi prouvé que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$. ■

Une troisième application importante est le résultat suivant de continuité d'une fonction définie par une intégrale sur un segment.

Théorème 11.25 *Soit f une fonction à valeurs réelles définie et continue sur $I \times [a,b]$, où I est un intervalle réel non réduit à un point et $a < b$ dans $\mathbb{R}$. La fonction φ définie sur I par :*

$$\forall x \in I,\ \varphi(x) = \int_a^b f(x,t)\,dt$$

est continue sur I.

Démonstration. On se fixe un réel x_0 dans I et un intervalle $[\alpha, \beta]$ contenu dans I, contenant x_0, avec $\alpha < \beta$. La fonction f étant continue sur le compact $K = [\alpha,\beta] \times [a,b]$ y est uniformément continue, donc pour tout réel $\varepsilon > 0$ on peut trouver un réel $\eta > 0$ tel que $|f(x,t) - f(u,v)| < \varepsilon$ pour tous (x,t) et (u,v) dans K tels que $\|(x,t) - (u,v)\|_\infty < \eta$. Pour x dans I tel que $|x - x_0| < \eta$, on a $\|(x,t) - (x_0,t)\|_\infty < \eta$ pour tout $t \in [a,b]$ et :

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| \leq \int_a^b |f(x,t) - f(x_0,t)|\,dt < (b-a)\,\varepsilon,$$

ce qui prouve la continuité de φ en x_0. ■

11.8.2 Continuité et connexité

On rappelle tout d'abord quelques résultats de base sur la connexité.

Définition 11.7 *Une partie $\mathcal{A}$ de $(E, \|\cdot\|)$ est connexe si la condition $\mathcal{A} \subset \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ avec $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ ouverts de E tels que $\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$ entraîne $\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_1 = \emptyset$ (et donc $\mathcal{A} \subset \mathcal{O}_2$) ou $\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$ (et donc $\mathcal{A} \subset \mathcal{O}_1$), c'est-à-dire que $\mathcal{A}$ ne peut s'écrire comme réunion disjointe de deux ouverts de $\mathcal{A}$ (pour la topologie induite).*

Lemme 11.4 *L'intervalle $[0,1]$ est connexe.*

Démonstration. Supposons qu'il existe deux ouverts $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ dans $\mathbb{R}$ tels que $[0,1] \subset \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ et $[0,1] \cap \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$. On peut supposer que $0 \in \mathcal{O}_1$. Il existe alors un réel $\varepsilon \in]0,1[$ tel que $[-\varepsilon, \varepsilon] \subset \mathcal{O}_1$ et l'ensemble $I = \{x \in]0,1] \mid [0,x] \subset \mathcal{O}_1\}$ est non vide. On peut donc poser $\alpha = \sup(I)$ et on a $0 < \alpha \leq 1$.

Par définition de la borne supérieure, pour tout $x \in [0, \alpha[$ on peut trouver $y \in]x, \alpha] \cap I$ et on a $x \in [0,y] \subset \mathcal{O}_1$. On a donc ainsi montré que $[0, \alpha[\subset I$.

Si $\alpha \in \mathcal{O}_2$, il existe alors $\varepsilon \in]0, \alpha[$ tel que $[\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon] \subset \mathcal{O}_2$ et $[\alpha - \varepsilon, \alpha[\subset [0,1] \cap \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2$ ce qui est impossible. On a donc $\alpha \in \mathcal{O}_1$ et $[0, \alpha] \subset \mathcal{O}_1$.

Si $\alpha < 1$, il existe alors $\varepsilon \in]0, 1 - \alpha[$ tel que $[0, \alpha + \varepsilon] \subset \mathcal{O}_1$ et $\alpha + \varepsilon \in I$ en contradiction avec $\alpha = \sup(I)$. On a donc $\alpha = 1$ et $[0,1] \subset \mathcal{O}_1$, ce qui entraîne $[0,1] \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$.

On a donc montré que $[0,1]$ est connexe. ■

Le résultat qui suit ainsi que son corollaire sont souvent utiles pour montrer qu'un ensemble est connexe.

Théorème 11.26 *Si E, F sont deux espaces vectoriels normés et f une application continue de E dans F, alors pour tout connexe $\mathcal{A}$ de E l'image $f(\mathcal{A})$ est connexe dans F.*

Démonstration. Soit $\mathcal{A}$ une partie connexe de E et $\mathcal{A}' = f(\mathcal{A})$. Supposons qu'il existe deux ouverts de F, $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$, tels que $\mathcal{A}' \subset \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ et $\mathcal{A}' \cap \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$. On a alors :

$$\mathcal{A} \subset f^{-1}(\mathcal{A}') \subset f^{-1}(\mathcal{O}_1) \cup f^{-1}(\mathcal{O}_2)$$

avec $f^{-1}(\mathcal{O}_1), f^{-1}(\mathcal{O}_2)$ ouverts dans E et $\mathcal{A} \cap f^{-1}(\mathcal{O}_1) \cap f^{-1}(\mathcal{O}_2) = \emptyset$, ce qui entraîne $\mathcal{A} \cap f^{-1}(\mathcal{O}_1) = \emptyset$ ou $\mathcal{A} \cap f^{-1}(\mathcal{O}_2) = \emptyset$ et donc $\mathcal{A}' \cap \mathcal{O}_1 = \emptyset$ ou $\mathcal{A}' \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$. L'ensemble $\mathcal{A}'$ est donc connexe dans F. ∎

Corollaire 11.3 *Une partie $\mathcal{A}$ de E est connexe si, et seulement si, toute application continue de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\{0,1\}$ est constante.*

Démonstration. Soit $\mathcal{A}$ connexe dans E et $f : \mathcal{A} \to \{0,1\}$ une application continue. L'ensemble $f(\mathcal{A})$ est alors connexe dans $\mathbb{R}$ contenu dans $\{0,1\}$ et c'est nécessairement $\{0\}$ ou $\{1\}$ puisque $\{0,1\}$ n'est pas connexe (en effet $\{0,1\} \subset \left]-1, \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right[$) ce qui signifie que f est constante.

Réciproquement si $\mathcal{A}$ n'est pas connexe il existe deux ouverts $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ de E tels que $\mathcal{A} \subset \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ avec $\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$, $\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_1 \neq \emptyset$ et $\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_2 \neq \emptyset$. La fonction caractéristique de $\mathcal{O}_1$, définie par $f(x) = 1$ si $x \in \mathcal{O}_1$ et $f(x) = 0$ sinon est alors continue de E dans $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\{0,1\}$ (si $\mathcal{O}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$, on a $f^{-1}(\mathcal{O}) = \mathcal{O}_1$ si $1 \in \mathcal{O}$ et $f^{-1}(\mathcal{O}) = \emptyset$ ou $f^{-1}(\mathcal{O}) = \mathcal{O}_2$ sinon) et non constante sur $\mathcal{A}$ (pour $x \in \mathcal{A} \cap \mathcal{O}_1 \neq \emptyset$ on a $f(x) = 1$ et pour $x \in \mathcal{A} \cap \mathcal{O}_2 \neq \emptyset$ on a $f(x) = 0$). ∎

Corollaire 11.4 *Si $\mathcal{A}$ est une partie connexe de E, alors son adhérence $\overline{\mathcal{A}}$ est connexe.*

Démonstration. Si f est une application continue de $\overline{\mathcal{A}}$ dans $\{0,1\}$, alors sa restriction au connexe $\mathcal{A}$ est constante (puisque également continue) et par densité la fonction f est également constante sur $\overline{\mathcal{A}}$. ∎

En général l'intérieur d'un connexe n'est pas nécessairement connexe. Par exemple l'intérieur du connexe $\mathcal{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\} \cup \{(0,0)\}$ (cet ensemble est connexe par arcs, donc connexe) est l'ensemble non connexe $\overset{\circ}{\mathcal{A}} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\}$.

Théorème 11.27 *Une réunion de connexes de E d'intersection non vide est connexe.*

Démonstration. Soit $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ une famille de connexes de E et $\mathcal{A} = \bigcup_{i\in I} \mathcal{A}_i$. Si $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ est une application continue à valeurs dans $\{0,1\}$, alors pour tout $i \in I$ la restriction de f à $\mathcal{A}_i$ qui est également continue est constante égale à γ_i puisque $\mathcal{A}_i$ est connexe. Pour $x \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$ on a $f(x) = \gamma_i$ pour tout $i \in I$, les γ_i sont donc tous égaux et f est constante sur $\mathcal{A}$. L'ensemble $\mathcal{A}$ est donc connexe. ∎

On rappelle qu'une partie $\mathcal{A}$ de E est convexe, si pour tout couple (a,b) d'éléments de $\mathcal{A}$, le segment $[a,b] = \{(1-\lambda)a + \lambda b \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}$ est contenu dans $\mathcal{A}$.

Théorème 11.28 *Un convexe dans un espace vectoriel normé est connexe.*

Démonstration. Si $\mathcal{A}$ est convexe dans E, pour a fixé dans $\mathcal{A}$, on peut écrire que $\mathcal{A} = \bigcup_{b\in\mathcal{A}} [a,b]$, avec $[a,b]$ connexe, pour tout $b \in \mathcal{A}$, comme image du connexe $[0,1]$ par l'application continue $t \mapsto (1-t)a + tb$. L'ensemble $\mathcal{A}$ est donc connexe comme réunion de connexes d'intersection non vide. ∎

Corollaire 11.5 *Les connexes (et convexes) de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.*

Démonstration. Soit I un connexe de $\mathbb{R}$ non réduit à un point. Si I n'est pas un intervalle, il existe $a < b$ dans I et $c \in]a, b[$ tel que $c \notin I$ et l'application f définie sur I par $f(x) = 1$ si $x < c$ dans I, $f(x) = 0$ si $x > c$ dans I est continue (l'image réciproque par f d'un ouvert de $\mathbb{R}$ est $]-\infty, c[\cap I$, $]c, +\infty[\cap I$ ou $\emptyset$) non constante, ce qui contredit la connexité de I. L'ensemble I est donc un intervalle, il est donc convexe.

Si I est un intervalle, il est convexe et donc connexe. ■

Les convexes sont des cas particuliers d'ensembles connexes par arcs.

Définition 11.8 *On dit qu'une partie $\mathcal{A}$ de E est connexe par arcs, si pour tout couple (a, b) d'éléments de $\mathcal{A}$ il existe une application continue γ de $[0, 1]$ dans $\mathcal{A}$ telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$ (deux points quelconques de $\mathcal{A}$ peuvent être joints par un arc continu dans $\mathcal{A}$).*

Théorème 11.29 *Un ensemble connexe par arcs dans E est connexe.*

Démonstration. Si $\mathcal{A}$ est connexe par arcs dans E, pour a fixé dans $\mathcal{A}$ en désignant pour tout $x \in \mathcal{A}$ par γ_x un arc continu joignant a et x dans $\mathcal{A}$, on a alors $\mathcal{A} = \bigcup\limits_{x \in \mathcal{A}} \gamma_x([0, 1])$, avec $\gamma_x([0, 1])$ connexe pour tout $x \in \mathcal{A}$, comme image du connexe $[0, 1]$ par l'application continue γ_x. L'ensemble $\mathcal{A}$ est donc connexe comme réunion de connexes ayant tous en commun le point $a = \gamma_x([0, 1])$. ■

11.9 Fonctions réciproques

On désigne par I un intervalle réel non réduit à un point.

Si f est une application injective de I dans $\mathbb{R}$, elle définit alors une bijection de I sur $f(I)$ et on peut définir sa fonction réciproque notée f^{-1} par :

$$\left(y \in f(I) \text{ et } x = f^{-1}(y)\right) \Leftrightarrow (x \in I \text{ et } y = f(x)).$$

Un cas particulièrement intéressant est celui des fonctions strictement monotones.

Théorème 11.30 *Si f est une application strictement monotone de I dans $\mathbb{R}$, elle réalise alors une bijection de I sur $f(I)$ d'inverse strictement monotone et de même sens de variation que f.*

Démonstration. En remplaçant éventuellement f par $-f$, on peut supposer que f est strictement croissante. Si $x \neq y$ dans I on a $x < y$ ou $y < x$ (l'ordre de $\mathbb{R}$ est total) ce qui entraîne $f(x) < f(y)$ ou $f(y) < f(x)$, soit $f(x) \neq f(y)$ dans tous les cas. La fonction f est donc injective et elle réalise une bijection de I sur $f(I)$.
Il est facile de vérifier que la fonction réciproque f^{-1} est également strictement croissante. ■

Sans hypothèse de continuité pour f, l'image $f(I)$ n'est pas nécessairement un intervalle comme le montre l'exemple de la fonction f définie sur $[0, 2]$ par $f(x) = x$ pour $0 \leq x \leq 1$ et $f(x) = x + 1$ pour $1 < x \leq 2$.

En réalité si f est strictement monotone et $f(I)$ est un intervalle, alors la fonction f est nécessairement continue ainsi que la fonction f^{-1}.

Le théorème qui suit est à la base des définitions de fonctions réciproques classiques comme les fonctions racines n-ème, la fonction exponentielle, les fonctions trigonométriques et hyperboliques inverses.

Théorème 11.31 *Si f est une application continue et strictement monotone de I dans $\mathbb{R}$, alors $f(I)$ est un intervalle de même nature que I et f est une bijection de I sur $f(I)$ d'inverse f^{-1} continue strictement monotone de même sens de variation que f.*

Démonstration. Si f est strictement monotone, elle est alors injective. Si de plus elle est continue alors $J = f(I)$ est un intervalle (théorème des valeurs intermédiaires). La fonction réciproque f^{-1} est alors strictement monotone de J sur $I = f^{-1}(J)$ qui est un intervalle, elle est donc continue.
Il nous reste à montrer que $J = f(I)$ est de même nature que I. En notant $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ les extrémités de I et en supposant f strictement croissante, J est un intervalle d'extrémités :

$$\alpha = \inf(f(I)) = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x), \ \beta = \sup(f(I)) = \lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x).$$

Si $a \in I$ alors $\alpha = f(a) \in J$ et de même pour b.

Si $a \notin I$ alors $\alpha \notin J$ (il suffit de raisonner avec f^{-1} qui a les mêmes propriétés que f) et $\alpha < f(x)$ pour tout $x \in J$. De même pour b.

Les intervalles I et J sont donc de même nature. ■

Remarque 11.8 *Sans hypothèse de stricte monotonie, l'intervalle $f(I)$ n'est pas nécessairement de même nature que I comme le montre l'exemple de la fonction f définie par $f(x) = |x|$ sur l'intervalle $I =]-1, 1[$ ($f(I) = [0, 1[$).*

Une application continue, bijective de I sur J et d'inverse continu est appelée homéomorphisme.

Ce résultat nous permet de définir la fonction exponentielle comme l'inverse de la fonction logarithme définie comme la primitive sur $\mathbb{R}^{+,*}$ nulle en 1 de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$. De $\ln'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}^{+,*}$ on déduit que ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+,*}$, puis avec $\ln(2) > \ln(1) = 0$, $\ln(2^n) = n\ln(2)$ que cette fonction n'est pas bornée et $\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$. Enfin avec $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$, on déduit que $\lim_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$. La fonction ln est donc continue strictement croissante de $\mathbb{R}^{+,*}$ sur $\mathbb{R}$, c'est donc un homéomorphisme de $\mathbb{R}^{+,*}$ sur $\mathbb{R}$ et sa fonction réciproque est la fonction exponentielle $x \mapsto e^x$. Cette fonction est donc définie par :

$$(x \in \mathbb{R} \text{ et } y = e^x) \Leftrightarrow \left(y \in \mathbb{R}^{+,*} \text{ et } x = \ln(y)\right).$$

Pour tout entier naturel non nul n, avec la continuité et la stricte croissance de la fonction $x \mapsto x^n$ de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$, on aboutit à la définition de la fonction racine n-ème :

$$\left(x \in \mathbb{R}^+ \text{ et } y = \sqrt[n]{x}\right) \Leftrightarrow \left(y \in \mathbb{R}^+ \text{ et } x = y^n\right).$$

Avec les mêmes arguments, on définit les fonctions trigonométriques inverses :

$$\begin{cases} (x \in [-1,1] \text{ et } y = \arcsin(x)) \Leftrightarrow \left(y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ et } x = \sin(y)\right), \\ (x \in [-1,1] \text{ et } y = \arccos(x)) \Leftrightarrow (y \in [0,\pi] \text{ et } x = \cos(y)), \\ (x \in \mathbb{R} \text{ et } y = \arctan(x)) \Leftrightarrow \left(y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\text{ et } x = \tan(y)\right), \end{cases}$$

et les fonctions hyperboliques inverses :

$$\begin{cases} (x \in \mathbb{R} \text{ et } y = \operatorname{argsh}(x)) \Leftrightarrow (y \in \mathbb{R} \text{ et } x = \operatorname{sh}(y)), \\ (x \in [1, +\infty[\text{ et } y = \operatorname{argch}(x)) \Leftrightarrow (y \in \mathbb{R}^+ \text{ et } x = \operatorname{ch}(y)), \\ (x \in \mathbb{R} \text{ et } y = \operatorname{argth}(x)) \Leftrightarrow (y \in \mathbb{R} \text{ et } x = \operatorname{th}(y)). \end{cases}$$

On a vu qu'une fonction strictement monotone est injective, mais en général la réciproque est fausse comme le montre l'exemple de la fonction f définie sur $[0,2]$ par $f(x) = x$ pour $0 \leq x \leq 1$ et $f(x) = 1 - \dfrac{x}{2}$ pour $1 < x \leq 2$ (faire un graphique). Mais dans le cas où f est continue, il y a équivalence. De manière précise, on a le résultat suivant.

Théorème 11.32 *Soit f une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$. Cette fonction f est injective si, et seulement si, elle est strictement monotone.*

Démonstration. Si f est strictement monotone, on a déjà vu qu'elle est injective (qu'elle soit continue ou non).

Pour la réciproque, on propose trois démonstrations.

Supposons f continue et injective de I dans $\mathbb{R}$.

Première démonstration. S'il existe $x < y < z$ dans I tels que $\varphi(x) < \varphi(z) < \varphi(y)$ alors tout réel u dans $]\varphi(z), \varphi(y)[\subset]\varphi(x), \varphi(y)[$ va s'écrire $u = \varphi(c) = \varphi(d)$ avec $c \in]y,z[$ et $d \in]x,y[$, donc $c \neq d$, ce qui contredit l'injectivité de φ. La fonction f est donc strictement monotone.

Deuxième démonstration. Pour $a < b$ dans I, on a $f(a) \neq f(b)$. Supposons que $f(a) < f(b)$. Nous allons alors montrer que f est strictement croissante. Pour $x < y$ dans I, l'application :

$$\varphi : t \mapsto \varphi(t) = f(ta + (1-t)x) - f(tb + (1-t)y)$$

est continue sur $[0,1]$ et ne s'annule jamais sur cet intervalle (comme f est injective, $\varphi(t) = 0$ équivaut à $t(b-a) + (1-t)(y-x) = 0$ encore équivalent à $t(b-a) = (1-t)(y-x) = 0$ qui est impossible). Cette fonction garde donc un signe constant sur $[0,1]$ et en particulier $\varphi(0) = f(x) - f(y)$ est de même signe que $\varphi(1) = f(a) - f(b)$, c'est-à-dire que $f(x) < f(y)$.

Troisième démonstration. On utilise la fonction g définie par $g(x,y) = f(x) - f(y)$ sur la partie Δ de $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$\Delta = \left\{(x,y) \in I^2 \mid x < y\right\}.$$

Cette fonction est continue sur Δ qui est convexe donc connexe, ce qui implique que $g(\Delta)$ est connexe dans $\mathbb{R}^*$ (f est injective), c'est donc un intervalle de $\mathbb{R}^*$ et on a soit $g(\Delta) \subset \mathbb{R}^{+,*}$ et f est strictement croissante, soit $g(\Delta) \subset \mathbb{R}^{-,*}$ et f est strictement décroissante. ■

Remarque 11.9 *Si f est une fonction continue bijective de I (intervalle réel) sur $f(I)$, elle est alors strictement monotone et f^{-1} est continue. Mais de manière plus générale si f est une application continue bijective d'un espace métrique E sur un espace métrique F, son application réciproque f^{-1} n'est pas nécessairement continue. Par exemple l'application $f : x \mapsto e^{ix}$ est continue bijective de $[0,2\pi[$ sur le cercle unité $\Gamma = \{s \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ et $f^{-1} : z \mapsto \arg(z)$ n'est pas continue puisque l'image du compact Γ égale à $[0,2\pi[$ n'est pas compacte. On peut aussi considérer l'application identité de l'espace $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme de la convergence uniforme $f \mapsto \|f\|_\infty = \sup\limits_{[0,1]} |f(x)|$, dans l'espace $F = E$ muni de la norme de la convergence en moyenne $f \mapsto \|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(x)|\,dx$, qui est bijective continue d'inverse non continue (ces deux normes ne sont pas équivalentes).*

11.10 Exercices

Exercice 11.20 *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^{+,*}$, à valeurs réelles, croissante et telle que la fonction $g : x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ soit décroissante. Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^{+,*}$.*

Solution 11.20 *La fonction f étant croissante admet une limite à gauche et à droite en tout point de $\mathbb{R}^{+,*}$ avec $f(x^-) \leq f(x) \leq f(x^+)$. De même, la fonction g étant décroissante admet une limite à gauche et à droite en tout point avec $g(x^-) \geq g(x) \geq g(x^+)$ et tenant compte de :*

$$g\left(x^-\right) = \lim_{\substack{t \to x \\ t < x}} \frac{f(t)}{t} = \frac{\displaystyle\lim_{t \to x,\, t<x} f(t)}{x} = \frac{f(x^-)}{x},$$

$$g\left(x^+\right) = \lim_{\substack{t \to x \\ t > x}} \frac{f(t)}{t} = \frac{\displaystyle\lim_{t \to x,\, t>x} f(t)}{x} = \frac{f(x^+)}{x},$$

avec $x > 0$, on déduit que $f(x^-) \geq f(x) \geq f(x^+)$. On a donc en définitive $f(x^-) = f(x) = f(x^+)$, ce qui équivaut à la continuité de f en x.

Exercice 11.21 *Montrer que si f, g sont deux fonctions continues périodiques non constantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de périodes respectives T_1 et T_2 avec $\dfrac{T_2}{T_1}$ irrationnel alors la fonction $f + g$ n'est pas périodique.*

Solution 11.21 *Supposons que la fonction $h = f + g$ soit périodique de plus petite période $T > 0$. On a alors :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T) - f(x) = g(x) - g(x+T)$$

et la fonction $k : x \mapsto f(x+T) - f(x)$ admet T_1 et T_2 comme périodes. Le groupe des périodes $\mathcal{P}(k)$ de la fonction k contient donc le groupe $\mathbb{Z}T_1 + \mathbb{Z}T_2$ qui est dense dans $\mathbb{R}$ si $\dfrac{T_2}{T_1}$ est irrationnel, ce groupe $\mathcal{P}(k)$ est donc dense dans $\mathbb{R}$ et la fonction continue k est constante. On a alors :

$$T_1 k = \int_0^{T_1} \left(f(x+T) - f(x)\right) dx = 0$$

(en effet, $\displaystyle\int_0^{T_1} f(x+T)\,dx = \int_T^{T+T_1} f(t)\,dt = \int_0^{T_1} f(t)\,dt$ par T_1-périodicité), c'est-à-dire que $k = 0$ et $f(x+T) = f(x)$ pour tout réel x. Comme f et g jouent des rôles analogues, on a aussi $g(x+T) = g(x)$ pour tout réel x. On a donc en définitive :

$$T \in \mathcal{P}(f) \cap \mathcal{P}(f) = \mathbb{Z}T_1 \cap \mathbb{Z}T_2 = \{0\},$$

soit $T = 0$, ce qui n'est pas vrai. La fonction $f + g$ ne peut donc être périodique.
Dans le cas où $\dfrac{T_2}{T_1} = \dfrac{p}{q}$ avec p, q premiers entre eux dans $\mathbb{N}$, on a :

$$\mathcal{P}(f) \cap \mathcal{P}(f) = \mathbb{Z}T_1 \cap \mathbb{Z}T_2 = \mathbb{Z}(pT_1) = \mathbb{Z}(qT_2) \subset \mathcal{P}(f+g).$$

Exercice 11.22 *Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction périodique continue et non constante, alors l'équation différentielle $y'' + 2y' + 2y = f$ ne peut avoir deux solutions périodiques linéairement indépendantes.*

Solution 11.22 *La fonction f étant continue périodique non constante, son groupe des périodes est discret, soit $\mathcal{P}(f) = \mathbb{Z}T$ avec $T > 0$. Si y_1, y_2 sont deux solutions périodiques linéairement indépendantes de l'équation différentielle $y'' + 2y' + 2y = f$, alors aucune de ces solutions ne peut être constante (sinon $f = 2y_j$ serait constante) et leurs groupes de périodes sont discrets engendrés respectivement par $T_1 > 0$ et $T_2 > 0$. Les réels T_1, T_2 sont alors également des* *périodes de f. Il existe donc des entiers naturels non nuls n_1, n_2 tels que $T_1 = n_1 T$ et $T_2 = n_2 T$ et $n_2 T_1 = n_1 T_2$ est une période commune à y_1 et y_2. La fonction $y = y_1 - y_2$ est alors une solution périodique de l'équation homogène $y'' + 2y' + 2y = 0$, le réel $n_1 n_2 T$ étant une période de cette fonction. Mais la forme générale des solutions de cette équation différentielle est donnée par :*

$$y(x) = e^{-t}(a\cos(x) + b\sin(x)) = \lambda e^{-t}\cos(x+\varphi)$$

et seule la fonction nulle est périodique. On a donc $y_1 = y_2$.

Exercice 11.23 *Montrer que si f, g sont deux fonctions continues périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - g(x)) = 0$, alors $f = g$.*

Solution 11.23 *Si f est constante égale à λ, alors la condition $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - g(x)) = 0$ équivaut à $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lambda$ et pour toute période $T > 0$ de g, pour tout réel x, on a :*

$$\lambda = \lim_{n\to+\infty} g(x+nT) = \lim_{n\to+\infty} g(x) = g(x),$$

c'est-à-dire que g est constante égale à λ.
On suppose donc que f et g sont non constantes de périodes respectives $T_1 > 0$ et $T_2 > 0$.
On suppose que $f \neq g$, on se donne a tel que $f(a) \neq g(a)$ et un réel $\varepsilon > 0$.
Avec $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - g(x)) = 0$ on déduit qu'il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall x \geq a + n_0 T_1,\ |f(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

On a donc en particulier :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ |f(a + kn_0T_1) - g(a + kn_0T_1)| < \varepsilon.$$

Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} |f(a) - g(a)| &= |f(a + kn_0T_1) - g(a)| \\ &\leq |f(a + kn_0T_1) - g(a + kn_0T_1)| + |g(a + kn_0T_1) - g(a)| \\ &< \varepsilon + |g(a + kn_0T_1) - g(a)|. \end{aligned}$$

D'autre part, avec l'uniforme continuité de g sur $\mathbb{R}$, on peut trouver un réel $\eta > 0$ tel que :

$$|x - y| < \eta \Rightarrow |g(x) - g(y)| < \varepsilon$$

et en écrivant que :

$$|g(a + kn_0T_1) - g(a)| = |g(a + kn_0T_1) - g(a - mT_2)|$$

où m est un entier relatif quelconque, on aura :

$$|g(a + kn_0T_1) - g(a)| < \varepsilon$$

si on peut trouver $k \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{Z}$ tels que $|kn_0T_1 - mT_2| < \eta$.
Si $\dfrac{T_1}{T_2}$ est rationnel égal à $\dfrac{p}{q}$ avec p, q dans $\mathbb{N}^*$, on a $qT_1 - pT_2 = 0$ et $|qn_0T_1 - pn_0T_2| = 0 < \eta$.
Si $\dfrac{T_1}{T_2}$ est irrationnel, il en est alors de même de $\dfrac{n_0T_1}{T_2}$ et on sait que le groupe $\mathbb{Z}T_1 + \mathbb{Z}T_2$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe donc des entiers relatifs p et q tels que $0 < |pn_0T_1 - qT_2| < \eta$. On peut supposer que $p \in \mathbb{N}^*$ en réduisant au besoin η.

En définitive, on a montré que $|f(a) - g(a)| < 2\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, ce qui contredit $f(a) \neq g(a)$.
La seule possibilité est donc $f = g$.

Exercice 11.24 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue. Montrer qu'il existe deux constantes réelles a, b telles que $|f(x)| \leq a|x| + b$ pour tout réel x. En déduire que la fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.*

Solution 11.24 *Avec l'uniforme continuité de f sur $\mathbb{R}$ on peut trouver un réel $\alpha > 0$ tel que $|f(x) - f(y)| \leq 1$ pour tout couple (x, y) de réels tels que $|x - y| \leq \alpha$. On en déduit alors par récurrence que :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [n\alpha, (n+1)\alpha],\ |f(x) - f(0)| \leq n + 1.$$

Le résultat est vrai pour $n = 0$ et en le supposant acquis pour $n \geq 0$, on a pour tout $x \in [(n+1)\alpha, (n+2)\alpha]$:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(0)| &\leq |f(x) - f((n+1)\alpha)| + |f((n+1)\alpha) - f(0)| \\ &\leq 1 + (n+1) = n + 2. \end{aligned}$$

Si x est un réel positif ou nul, on peut alors trouver un entier naturel n tel que $x \in [n\alpha, (n+1)\alpha]$ et avec $n \leq \dfrac{x}{\alpha}$, on déduit que :

$$|f(x)| \leq |f(x) - f(0)| + |f(0)| \leq n + 1 + |f(0)| \leq \frac{x}{\alpha} + (1 + |f(0)|).$$

En raisonnant avec la fonction g définie par $g(x) = f(-x)$, on a un résultat analogue pour les réels négatifs.

Du fait qu'il n'est pas possible de trouver des réels a, b tels que $x^2 \leq ax + b$ pour tout réel positif, on déduit que la fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11.25 *Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue telle que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ soit convergente. Montrer que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.*
Ce résultat est-il encore valable si on suppose seulement f continue sur $\mathbb{R}^+$.

Solution 11.25 *Avec l'uniforme continuité de f sur $\mathbb{R}^+$, on déduit que pour tout réel $\varepsilon > 0$ on peut trouver un réel $\eta > 0$ tel que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ pour tous x, y dans $\mathbb{R}^+$ tels que $|x - y| < \eta$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a :*

$$\begin{aligned} |f(x)| = \frac{1}{\eta}\left|\int_x^{x+\eta} f(x)\,dt\right| &\leq \frac{1}{\eta}\int_x^{x+\eta} |f(x) - f(t)|\,dt + \frac{1}{\eta}\left|\int_x^{x+\eta} f(t)\,dt\right| \\ &\leq \varepsilon + \frac{1}{\eta}\left|\int_x^{x+\eta} f(t)\,dt\right|. \end{aligned}$$

D'autre part, avec la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$, on déduit qu'il existe un réel $\lambda > 0$ tel que $\left|\displaystyle\int_x^y f(t)\,dt\right| < \varepsilon\eta$ pour tous x, y dans $[\lambda, +\infty[$ et de l'inégalité précédente, on déduit que $|f(x)| < 2\varepsilon$ pour tout $x \geq \lambda$. On a donc montré que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
Ce résultat n'est plus valable si on suppose seulement f continue sur $\mathbb{R}^+$ comme le montre l'exemple de la fonction f définie par $f(x) = \sin(x^2)$. La convergence de l'intégrale peut se montrer en faisant le changement de variable $t = x^2$ qui donne :

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\,dx = \int_0^1 \sin(x^2)\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{2\sqrt{t}}dt,$$

la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{2\sqrt{t}} dt$ *se vérifiant en utilisant le critère d'Abel (ou en intégrant par parties).*

Exercice 11.26 *Soit* f *une application continue de* $[0,1]$ *dans* $\mathbb{R}$ *telle que* $f(0) = f(1)$. *Montrer que pour tout entier naturel non nul* n *il existe un réel* x_n *dans* $\left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$ *tel que* $f(x_n) = f\left(x_n + \frac{1}{n}\right)$. *Ce résultat est-il valable si on remplace* $\frac{1}{n}$ *par un réel* $\alpha \in]0,1[$ *qui n'est pas l'inverse d'un entier.*

Solution 11.26 *Pour tout* $n \geq 1$ *on désigne par* f_n *la fonction définie sur* $I_n = \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$ *par* $f_n(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)$. *Si cette fonction ne s'annule jamais sur* I_n, *du fait de sa continuité, on déduit du théorème des valeurs intermédiaires qu'elle garde un signe constant sur cet intervalle. Supposons que* $f_n(x) > 0$ *pour tout* $x \in I_n$. *On a alors :*

$$f(1) - f(0) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) = \sum_{k=0}^{n-1} f_n\left(\frac{k}{n}\right) > 0,$$

ce qui contredit $f(0) = f(1)$. *La fonction* f_n *s'annule donc au moins une fois sur* I_n.

De ce résultat on peut déduire que si une voiture parcourt 100 *km en une heure, il existe alors un intervalle de temps égal à une demi-heure pendant lequel la voiture a parcouru* 50 *km. Pour ce faire on considère la fonction* f *définie sur* $[0,1]$ *par* $f(x) = d(x) - 100x$ *où* $d(x)$ *est le nombre de kilomètres parcourus en* x *heures. Cette application est continue avec* $f(0) = f(1) = 0$. *Le résultat précédent, pour* $n = 2$, *nous dit qu'il existe* $x_2 \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ *tel que* $f(x_2) = f\left(x_2 + \frac{1}{2}\right)$, *soit* $d\left(x_2 + \frac{1}{2}\right) - d(x_2) = 50$ *et l'intervalle de temps* $\left[x_2, x_2 + \frac{1}{2}\right]$ *répond à la question.*

Ce résultat n'est plus valable si on remplace $\frac{1}{n}$ *par un réel* $\alpha \in]0,1[$ *qui n'est pas l'inverse d'un entier. En effet, si* f *est la fonction définie et continue sur* $[0,1]$ *par* $f(x) = \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right) - \lambda x$, *où* λ *est choisi tel que* $f(0) = f(1)$ *(prendre* $\lambda = \cos\left(\frac{2\pi}{a}\right) - 1$*), alors pour tout réel* $x \in [0, 1-a]$, *on a :*

$$f(x+a) - f(x) = -\lambda a = a\left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{a}\right)\right) \neq 0$$

puisque $\frac{1}{a}$ *n'est pas entier.*

Exercice 11.27 *Montrer que si* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est une fonction périodique continue et non constante de période* $T > 0$, *il existe alors un réel* a *tel que* $f\left(a + \frac{T}{2}\right) = f(a)$.

Solution 11.27 *La fonction* g *définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $g(x) = f\left(x + \frac{T}{2}\right) - f(x)$ *est continue avec :*

$$\begin{cases} g(0) = f\left(\frac{T}{2}\right) - f(0) \\ g\left(\frac{T}{2}\right) = f(T) - f\left(\frac{T}{2}\right) = f(0) - f\left(\frac{T}{2}\right) = -g(0) \end{cases}$$

on déduit alors du théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe un réel a *compris entre* 0 *et* $\frac{T}{2}$ *tel que* $g(a) = 0$.

Exercice 11.28 *Montrer que la fonction* f *définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ *si* $x \neq 0$ *et* $f(0) = 0$ *vérifie la propriété des valeurs intermédiaires sans être continue.*

Solution 11.28 *En considérant la suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $x_n = \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2}}$, *on a* $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$ *et la suite* $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *n'a pas de limite, ce qui prouve que* f *n'est pas continue en* 0.
Si J *est un intervalle réel ne contenant pas* 0, *alors* f *est continue sur* J *et* $f(J)$ *est un intervalle.*
Si J *est un intervalle contenant* 0 *non réduit à un point (sinon* $J = f(J) = \{0\}$*), on considère les suites* $(x_n)_{n\geq n_0}$, $(y_n)_{n\geq n_0}$, *définies par* $x_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$, $y_n = \frac{1}{(2n+1)\pi + \frac{\pi}{2}}$, *où* n_0 *est un entier assez grand pour que ces suites soient à valeurs dans* J, *et on a* $f(x_n) = 1$, $f(y_n) = -1$ *pour tout* $n \geq n_0$ *et :*

$$[-1, 1] \supset f(J) \supset f([y_n, x_n]) \supset [-1, 1],$$

c'est-à-dire que $f(J) = [-1, 1]$.
En définitive, la fonction f *vérifie la propriété des valeurs intermédiaires.*

Quatrième partie

Intégration

12

Intégrale de Riemann

13

Intégrales généralisées

Pour ce chapitre, les fonctions considérées sont a priori définies sur un intervalle réel I non réduit à un point, à valeurs réelles ou complexes et continues par morceaux.

La définition et les propriétés de l'intégrale de Riemann sur un segment sont supposées acquises. Ces intégrales de Riemann sur un segment sont aussi appelées intégrales définies.

13.1 Définitions et exemples d'intégrales généralisées

Dans un premier temps, on se donne un intervalle réel $I = [a, b[$ avec $-\infty < a < b \leq +\infty$ et une fonction $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) continue par morceaux.

On rappelle tout d'abord la définition d'une fonction continue par morceaux sur l'intervalle I.

Définition 13.1 *On dit qu'une fonction f définie sur l'intervalle I est continue par morceaux sur cet intervalle s'il existe une subdivision*

$$a_0 = a < a_1 < \cdots < a_p < a_{p+1} = b$$

telle que la fonction f soit continue chacun des intervalle $]a_k, a_{k+1}[$ $(0 \leq k \leq p)$ et admette une limite à droite en a et des limites à droite et à gauche en chacun des points a_k $(1 \leq k \leq p)$.

Avec les notations de cette définition, la restriction de la fonction f à l'intervalle $]a_p, b[$ se prolonge en une fonction continue sur $[a_p, b[$ et pour tout entier k compris entre 0 et $p-1$, la restriction de la fonction f à l'intervalle $]a_k, a_{k+1}[$ se prolonge en une fonction continue sur $[a_k, a_{k+1}]$.

Une fonction continue par morceaux sur I est donc en particulier localement intégrable sur cet intervalle, ce qui signifie qu'elle est intégrable sur tout segment $[\alpha, \beta] \subset I$.

Si f est continue par morceaux sur I, on peut définir sa primitive F nulle en a, c'est-à-dire la fonction définie sur $[a, b[$ par :

$$\forall x \in [a, b[, \ F(x) = \int_a^x f(t)\, dt.$$

Précisément, pour $x \in [a_0, a_1[$, on a :

$$F(x) = \int_{a_0}^x f(t)\, dt$$

et pour $x \in [a_k, a_{k+1}[$ avec k compris entre 1 et p, on a :

$$F(x) = \sum_{j=0}^{k-1} \int_{a_j}^{a_{j+1}} f(t)\,dt + \int_{a_k}^{x} f(t)\,dt.$$

Définition 13.2 *Avec les notations qui précèdent on dit que l'intégrale de f sur $[a, b[$ est convergente, si la fonction F admet une limite finie quand x tend vers b dans I. Dans ce cas on note $\int_a^b f(t)\,dt$ cette limite.*
Le scalaire ainsi défini est appelé l'intégrale généralisée (ou impropre) de f sur $[a, b[$.
Dans le cas où F n'a pas de limite finie en b on dit que l'intégrale de f sur $[a, b[$ est divergente.

On a donc, en cas de convergence :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{x \to b} \int_a^x f(t)\,dt.$$

Remarque 13.1 *Si $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) est une fonction continue par morceaux et si $c \in [a, b[$ alors l'intégrale de f est convergente sur $[a, b[$ si, et seulement si, l'intégrale de f est convergente sur $[c, b[$ (le problème de la convergence se pose en b) et dans ce cas, on a :*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt.$$

Cela résulte immédiatement de la relation de Chasles pour les intégrales définies :

$$\forall x \in]a, b[,\ \int_a^x f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^x f(t)\,dt.$$

On définit de manière analogue l'intégrale d'une fonction f à valeurs réelles ou complexes définie sur un intervalle $]a, b]$ avec $-\infty \leq a < b < +\infty$ et continue par morceaux sur cet intervalle par :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{x \to a} \int_x^b f(t)\,dt$$

quand cette dernière limite existe.

Dans le cas d'une fonction f définie sur un intervalle $]a, b[$ avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ (et toujours continue par morceaux), on dit que l'intégrale de f est convergente sur $]a, b[$ si pour tout c dans $]a, b[$ chacune des intégrales $\int_a^c f(t)\,dt$ et $\int_c^b f(t)\,dt$ est convergente. Dans ce cas la somme de ces intégrales impropres ne dépend pas de c, ce qui permet de définir l'intégrale généralisée de f sur $]a, b[$ par :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t)\,dt &= \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt \\ &= \lim_{x \to a} \int_x^b f(t)\,dt + \lim_{y \to b} \int_a^y f(t)\,dt. \end{aligned}$$

Le lemme qui suit justifie l'affirmation précédente et nous dit aussi qu'il suffit de vérifier la convergence des intégrales $\int_a^c f(t)\,dt$ et $\int_c^b f(t)\,dt$ pour une valeur de c.

Lemme 13.1 *Si, avec les notations qui précèdent, il existe un réel $c \in]a,b[$ tel que les intégrales $\int_a^c f(t)\,dt$ et $\int_c^b f(t)\,dt$ soient convergentes, alors l'intégrale de f sur $]a,b[$ est convergente et pour tout réel $d \in]a,b[$, on a :*

$$\int_a^d f(t)\,dt + \int_d^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt.$$

Démonstration. Il suffit d'utiliser la relation de Chasles pour les intégrales définies. ■

Par abus de langage, l'expression « étudier la nature de $\int_a^b f(t)\,dt$ », sans savoir si cette intégrale converge ou non est un raccourci pour « étudier la convergence de l'intégrale de f sur $]a,b[$ ».

Remarque 13.2 *Il faut bien noter que la divergence de l'une des deux intégrales $\int_a^c f(t)\,dt$ et $\int_c^b f(t)\,dt$ équivaut à la divergence de $\int_a^b f(t)\,dt$.*

Remarque 13.3 *Dans le cas où $a = -\infty$ et $b = +\infty$ l'existence de $\lim_{x\to+\infty} \int_{-x}^x f(t)\,dt$ ne prouve pas la convergence de l'intégrale de f sur $]-\infty,+\infty[$. Par exemple pour $f(t) = t$ on a $\int_{-x}^x f(t)\,dt = 0$ pour tout $x > 0$ et pourtant l'intégrale diverge. En effet $\lim_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)\,dt = +\infty$. Pour prouver la convergence de l'intégrale de f sur $]-\infty,+\infty[$ on doit prouver indépendamment la convergence de $\lim_{x\to+\infty} \int_{-x}^0 f(t)\,dt$ et $\lim_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)\,dt$.*

Exercice 13.1 *Montrer que l'intégrale de $f : t \mapsto e^{-t}$ est convergente sur $[0,+\infty[$ et que $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1$.*

Solution 13.1 *Pour tout $x > 0$ on a :*

$$F(x) = \int_0^x e^{-t}dt = 1 - e^{-x} \underset{x\to+\infty}{\to} 1.$$

Exercice 13.2 *Montrer que l'intégrale de $f : t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est convergente sur $[0,+\infty[$ et $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$.*

Solution 13.2 *Pour tout $x > 0$ on a :*

$$F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \arctan(x) \underset{x\to+\infty}{\to} \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 13.3 *Montrer que l'intégrale de $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est convergente sur $]0,1]$ et $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2$.*

Solution 13.3 *Pour tout $x \in]0,1]$ on a :*

$$F(x) = \int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2 - 2\sqrt{x} \underset{x\to 0}{\to} 2.$$

Exercice 13.4 *Montrer que l'intégrale de* $f : t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ *est divergente sur* $]0,1]$.

Solution 13.4 *Pour tout* $x \in]0,1]$ *on a :*

$$F(x) = \int_x^1 \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{x} - 1 \underset{x\to 0^+}{\to} +\infty.$$

Exercice 13.5 *Montrer que l'intégrale de* $f : t \mapsto \sin(t)$ *est divergente sur* $[0,+\infty[$.

Solution 13.5 *Pour tout* $x > 0$ *on a :*

$$F(x) = \int_0^x \sin(t)\,dt = 1 - \cos(x)$$

et la fonction $\cos$ *n'a pas de limite à l'infini.*

Exercice 13.6 *Montrer que l'intégrale de* $f : t \mapsto \ln(t)$ *est convergente sur* $]0,1]$ *et* $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,dt = -1$.

Solution 13.6 *On a :*

$$\int_x^1 \ln(t)\,dt = -1 - x\ln(t) + x \underset{x\to 0}{\to} -1.$$

Exercice 13.7 *Montrer que l'intégrale de* $f : t \mapsto \left(\dfrac{1}{1-e^{-t}} + \ln(t) - \dfrac{1}{t}\right)e^{-t}$ *est convergente sur* $]0,+\infty[$ *et* $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = 0$.

Solution 13.7 *Une primitive de* $f(t) = \dfrac{e^{-t}}{1-e^{-t}} - \left(-e^{-t}\ln(t) + e^{-t}\dfrac{1}{t}\right)$ *est :*

$$F(t) = \ln\left(1-e^{-t}\right) - e^{-t}\ln(t) = \ln\left(\frac{1-e^{-t}}{t}\right) + \ln(t)\left(1-e^{-t}\right)$$

et on a :

$$\lim_{t\to+\infty} F(t) = 0 \text{ et } \lim_{t\to 0} F(t) = 0$$

ce qui donne $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = 0$.

Exercice 13.8 *Montrer que l'intégrale de* $f : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ *est convergente sur* $]-1,1[$ *et* $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \pi$.

Solution 13.8 *Pour tout* $x \in [0,1[$ *on a :*

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \arcsin(x) \underset{x\to 1}{\to} \frac{\pi}{2}$$

et par parité, pour $y \in]-1,0]$ *:*

$$G(y) = \int_y^0 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \int_0^{-y} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du = \arcsin(-y) \underset{y\to -1}{\to} \frac{\pi}{2}$$

ce qui donne le résultat annoncé.

L'argument de parité utilisé avec l'exercice précédent est général. Précisément, on a le résultat suivant.

Théorème 13.1 *Soit f une fonction à valeurs réelles ou complexes définie et continue par morceaux sur un intervalle $]-a,a[$ avec $0 < a \leq +\infty$. Si f est paire [resp. impaire], alors $\int_{-a}^{a} f(t)\,dt$ est convergente si, et seulement si, $\int_{0}^{a} f(t)\,dt$ l'est. En cas de convergence, on a pour f paire :*

$$\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 2\int_{0}^{a} f(t)\,dt.$$

et pour f est impaire :

$$\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 0.$$

Démonstration. Supposons tout d'abord f paire.

La condition nécessaire est une conséquence immédiate des définitions.

Si $\int_{0}^{a} f(t)\,dt$ converge, alors la fonction F définie sur $]0,a[$ par $F(x) = \int_{0}^{x} f(t)\,dt$ a une limite finie en a. Notons ℓ cette limite. Pour $y \in \,]-a,0[$, le changement de variable $u = -t$ donne :

$$G(y) = \int_{y}^{0} f(t)\,dt = \int_{0}^{-y} f(u)\,dt = F(-y) \underset{y\to -a}{\to} \ell$$

et le résultat annoncé.

Pour f impaire, on a $G(y) = -F(-y) \underset{y\to -a}{\to} -\ell$ et $\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 0.$ ■

Dans le cas où la fonction f, définie sur $[a,b[$ avec b fini, admet une limite finie ℓ en b, le problème de convergence de l'intégrale est un faux problème. En effet, en posant $f(b) = \ell$ la fonction f se prolonge par continuité en b et désignant par F la primitive nulle en a de la fonction continue par morceaux f sur $[a,b]$, la fonction F est continue en b et on a :

$$\lim_{x\to b} \int_{a}^{x} f(t)\,dt = \lim_{x\to b} F(x) - F(a) = F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(t)\,dt$$

la dernière intégrale étant une intégrale de Riemann.

Exercice 13.9 *Soit λ un nombre complexe. Étudier la nature de l'intégrale $\int_{0}^{+\infty} e^{\lambda x}dx$ en précisant sa valeur en cas de convergence.*

Solution 13.9 *Soit F la primitive de f définie sur $]0,+\infty[$ par :*

$$F(x) = \int_{0}^{x} e^{\lambda t}dt = \begin{cases} x \text{ si } \lambda = 0 \\ \dfrac{e^{\lambda x} - 1}{\lambda} \text{ si } \lambda \neq 0 \end{cases}$$

Pour $\lambda = 0$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$ et l'intégrale diverge.

Pour $\Re(\lambda) > 0$, on a :

$$|F(x)| = \left|\frac{e^{\lambda x}}{\lambda}\right| \left|1 - e^{-\lambda x}\right|$$

$$\geq \left|\frac{e^{\lambda x}}{\lambda}\right| \left|1 - \left|e^{-\lambda x}\right|\right| = \frac{e^{\Re(\lambda)x}}{|\lambda|}\left(1 - e^{-\Re(\lambda)x}\right) \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty$$

et l'intégrale diverge.
Pour $\Re(\lambda) < 0$, *on a :*

$$\left|\frac{e^{\lambda x}}{\lambda}\right| = \frac{e^{\Re(\lambda)x}}{|\lambda|} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$$

et l'intégrale converge vers $-\frac{1}{\lambda}$.
Il reste à considérer le cas où $\Re(\lambda) = 0$, *soit le cas où* $\lambda = iy$ *avec* $y \in \mathbb{R}^*$ ($\lambda = 0$ *est déjà étudié). Dans ce cas l'intégrale diverge puisque la fonction* $\varphi : x \mapsto e^{iyx}$ *n'a pas de limite à l'infini (la suite* $\left(\varphi\left(\frac{n\pi}{y}\right)\right)_{n\geq 1} = \left(e^{in\pi}\right)_{n\geq 1} = \left((-1)^n\right)_{n\geq 1}$ *est divergente).*

Exercice 13.10 *Soit* $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R};\mathbb{R})$ *telle que* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell'$.

1. *Existence et calcul de* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (f(t+1) - f(t))\,dt$.
2. *Calcul de* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (\arctan(t+1) - \arctan(t))\,dt$.

Solution 13.10

1. *En notant* $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ *pour* $x > 0$ *et en utilisant le théorème des accroissements finis, on a :*

$$\begin{aligned}\int_0^x (f(t+1) - f(t))\,dt &= [F(t+1) - F(t)]_0^x \\ &= F(x+1) - F(x) - F(1) \\ &= f(c_x) - F(1)\end{aligned}$$

où $c_x \in\,]x, x+1[$. *Et faisant tendre* x *vers* $+\infty$, *on en déduit que :*

$$\int_0^{+\infty} (f(t+1) - f(t))\,dt = \ell - F(1).$$

De manière analogue, on vérifie que :

$$\int_{-\infty}^{0} (f(t+1) - f(t))\,dt = F(1) - \ell'$$

et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (f(t+1) - f(t))\,dt = \ell - \ell'.$$

2. *Avec* $f(t) = \arctan(t) \underset{t\to\pm\infty}{\to} \pm\frac{\pi}{2}$, *on déduit que :*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\arctan(t+1) - \arctan(t))\,dt = \pi.$$

13.2 Les intégrales de Riemann

Une famille importante d'intégrales généralisées est donnée par celle des intégrales de Riemann.

Théorème 13.2 *Soient α un réel et f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :*

$$f : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}.$$

1. *L'intégrale de f sur $[1,+\infty[$ est convergente si, et seulement si, $\alpha > 1$ avec :*

$$\forall \alpha > 1, \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}.$$

2. *L'intégrale de f sur $]0,1]$ est convergente si, et seulement si, $\alpha < 1$ avec :*

$$\forall \alpha < 1, \int_0^{1} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{1 - \alpha}.$$

Démonstration.

1. Pour $x > 1$ on a :

$$\int_1^x \frac{dt}{t^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{x^{\alpha-1}} - 1\right) & \text{si } \alpha \neq 1, \\ \ln(x) & \text{si } \alpha = 1. \end{cases}$$

et en conséquence :

$$\lim_{x \to +\infty} \int_1^x \frac{dt}{t^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha - 1} & \text{si } \alpha > 1, \\ +\infty & \text{si } \alpha \leq 1. \end{cases}$$

2. De même pour $0 < x < 1$ on a :

$$\int_x^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}\left(1 - \frac{1}{x^{\alpha-1}}\right) & \text{si } \alpha \neq 1, \\ -\ln(x) & \text{si } \alpha = 1. \end{cases}$$

et :

$$\lim_{x \to +\infty} \int_x^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{1 - \alpha} & \text{si } \alpha < 1, \\ +\infty & \text{si } \alpha \geq 1. \end{cases}$$

■

Remarque 13.4 *On pourra noter l'analogie entre les intégrales de Riemann sur $[1,+\infty[$ et les séries de Riemann.*

Remarque 13.5 *L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ est divergente quel que soit le réel α.*

On peut montrer de manière analogue (ou en effectuant le changement de variable $u = b - t$ [resp. $u = t - a$]) que pour $a < b$ et α dans $\mathbb{R}$ l'intégrale de $f : t \mapsto \frac{1}{(b-t)^\alpha}$ [resp. $f : t \mapsto \frac{1}{(t-a)^\alpha}$] sur $[a, b[$ est convergente si, et seulement si, $\alpha < 1$ avec :

$$\forall \alpha < 1, \int_a^b \frac{dt}{(b-t)^\alpha} = \int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{(b-a)^{\alpha-1}}.$$

Par exemple, pour $a = 0$, $b = 1$ et $\alpha = \dfrac{1}{2}$, on a :

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}} = 2.$$

13.3 Opérations sur les intégrales généralisées

On se place sur $I = [a, b[$ et se donne deux fonctions f et g continues par morceaux sur cet intervalle.

Théorème 13.3 *Si les intégrales de f et g sur I sont convergentes, il en est alors de même de l'intégrale des fonction $\overline{f}$ et $f + \lambda g$ pour tout nombre complexe λ et on a :*

$$\int_a^b \overline{f}(x)\,dx = \overline{\int_a^b f(x)\,dx}$$

$$\int_a^b (f(x) + \lambda g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \lambda \int_a^b g(x)\,dx.$$

Si $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ converge et $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ diverge, alors $\displaystyle\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx$ diverge.

Démonstration. Résulte immédiatement des résultats relatifs aux opérations sur les limites. ■

Pour ce qui est de la somme de deux intégrales divergentes, on ne peut rien dire a priori comme le montre l'exemple des fonctions $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ et $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ sur $]0, 1]$.

Pour ce qui est du produit des deux fonctions f et g d'intégrales convergentes, on ne peut rien dire a priori comme le montre l'exemple des fonctions $f(x) = 1$, $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ et $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ sur $]0, 1]$.

Corollaire 13.1 *Si f est à valeurs complexes, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ est convergente si, et seulement si, les intégrales $\displaystyle\int_a^b \Re(f)(x)\,dx$ et $\displaystyle\int_a^b \Im(f)(x)\,dx$ sont convergentes et en cas de convergence, on a :*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \Re(f)(x)\,dx + i\int_a^b \Im(f)(x)\,dx.$$

Démonstration. Résulte de $f = \Re(f) + i\Im(f)$ et de $\Re(f) = \dfrac{f + \overline{f}}{2}$, $\Im(f) = \dfrac{f - \overline{f}}{2i}$. ■

Exercice 13.11 *Soient a, b deux nombres réels. Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{at}\cos(bt)\,dt$ en précisant sa valeur en cas de convergence.*

Solution 13.11 *Pour $b = 0$, l'exercice 13.9 nous dit que cette intégrale converge si, et seulement si $a < 0$.*
Pour $b \neq 0$, le changement de variable $t = u - \dfrac{\pi}{2b}$ nous dit que cette intégrale converge si, et seulement l'intégrale $e^{-a\frac{\pi}{2b}} \displaystyle\int_{\frac{\pi}{2b}}^{+\infty} e^{a} \cos\left(bu - \frac{\pi}{2}\right) du$ converge, ce qui est encore équivalent à dire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{at} \sin(bt)\, dt$ converge.
En notant $\lambda = a + ib$, on a :

$$e^{at} \cos(bt) = \Re\left(e^{\lambda t}\right),\ e^{at} \sin(bt) = \Im\left(e^{\lambda t}\right)$$

et utilisant le résultat de l'exercice 13.9, on déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{at} \cos(bt)\, dt$ converge si, et seulement si $a < 0$.
Pour $a < 0$ et $b \in \mathbb{R}$, on a alors :

$$\int_0^{+\infty} e^{at} \cos(bt)\, dt = \Re\left(\int_0^{+\infty} e^{\lambda t} dt\right) = \Re\left(-\frac{1}{\lambda}\right) = -\frac{a}{a^2 + b^2}.$$

L'utilisation du théorème d'intégration par parties ou du théorème de changement de variable pour les intégrales définies est parfois utile pour justifier la convergence d'une intégrale.

Théorème 13.4 (Intégration par parties) *Si f, g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et si $\lim\limits_{x \to b} f(x) g(x)$ existe, alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b f'(x) g(x)\, dx$ et $\displaystyle\int_a^b f(x) g'(x)\, dx$ sont de même nature et en cas de convergence, on a :*

$$\int_a^b f(x) g'(x)\, dx = \lim_{x \to b} f(x) g(x) - f(a) g(a) - \int_a^b f'(x) g(x)\, dx.$$

Démonstration. Le théorème usuel d'intégration par parties nous permet d'écrire pour tout $x \in I$:

$$\int_a^x f(t) g'(t)\, dt = f(x) g(x) - f(a) g(a) - \int_a^x f'(t) g(t)\, dt$$

et avec l'hypothèse $\lim\limits_{x \to b} f(x) g(x) = \ell$, on déduit le résultat annoncé. ■

Dans la pratique il est préférable de reprendre la démonstration de ce théorème sur l'intégrale étudiée en effectuant une intégration parties sur $[a, x]$ puis en passant à la limite.

Exercice 13.12 *Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ est convergente et calculer sa valeur I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Solution 13.12 *On a*

$$I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1.$$

et une intégration par parties nous montre que $I_{n+1} = (n+1) I_n$, ce qui donne $I_n = n!$.

Exercice 13.13 *Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{(1+t)^2} dt$ converge et calculer sa valeur.*

Solution 13.13 *Une intégration par parties nous donne pour $x \in \left]0,1\right]$:*

$$\begin{aligned}F(x) = \int_x^1 \frac{\ln(t)}{(1+t)^2}dt &= \left[-\frac{\ln(t)}{1+t}\right]_x^1 + \int_x^1 \frac{dt}{t(1+t)} \\ &= \left[\ln\left(\frac{t}{1+t}\right) - \frac{\ln(t)}{1+t}\right]_x^1 \\ = -\ln(2) - \ln\left(\frac{x}{1+x}\right) &+ \frac{\ln(x)}{1+x} \underset{x\to 0}{\to} -\ln(2).\end{aligned}$$

Exercice 13.14 *Montrer que l'intégrale* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(t^2)}{t^2}dt$ *converge et calculer sa valeur.*

Solution 13.14 *Avec* $\displaystyle\lim_{1\to 0} \frac{\arctan(t^2)}{t^2} = 1$*, on prolonge par continuité en* 0 *la fonction à intégrer et le seul problème de convergence est à l'infini.*
Une intégration par parties nous donne pour $x > 0$:

$$\begin{aligned}F(x) = \int_0^x \frac{\arctan(t^2)}{t^2}dt &= \left[-\frac{\arctan(t^2)}{t}\right]_0^x + 2\int_0^x \frac{dt}{1+t^4} \\ &= -\frac{\arctan(x^2)}{x} + 2\int_0^x \frac{dt}{1+t^4}\end{aligned}$$

(la fonction $g : t \mapsto \dfrac{\arctan(t^2)}{t}$ *se prolonge aussi par continuité en* 0 *avec* $g(0) = 0$*) et la décomposition en éléments simples de* $\dfrac{1}{1+t^4} = \dfrac{1}{(1+t^2)^2 - 2t^2}$ *donne* $I = \dfrac{1}{2}\sqrt{2}\pi$ *(les détails sont laissés au lecteur).*

Théorème 13.5 (Changement de variable) *Soient φ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme croissant de $J = [\alpha, \beta[$ sur $I = [a, b[$ et f une application continue sur l'intervalle I à valeurs réelles ou complexes. Les intégrales* $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$ *et* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ *sont de même nature et en cas de convergence, on a :*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

Démonstration. On désigne respectivement par F et G, la primitive de f sur I nulle en a et la primitive de $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ sur J nulle en α.

Avec $(F \circ \varphi)' = (f \circ \varphi) \cdot \varphi' = G'$ et $F \circ \varphi(\alpha) = F(a) = 0 = G(\alpha)$, on déduit que $G = F \circ \varphi$.

Dire que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ converge équivaut à dire que F a une limite finie en b et avec $\displaystyle\lim_{t\to\beta} \varphi(t) = b$, on déduit que :

$$G(t) = F \circ \varphi(t) = F(\varphi(t)) \underset{t\to\beta}{\to} \int_a^b f(x)\,dx$$

ce qui signifie que $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$ converge vers $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

Réciproquement si $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$ converge, alors G a une limite finie en β et avec $\displaystyle\lim_{x\to b} \varphi^{-1}(x) = \beta$ (φ est un homéomorphisme), on déduit que :

$$F(x) = G \circ \varphi^{-1}(x) = G\left(\varphi^{-1}(x)\right) \underset{x\to b}{\to} \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

ce qui signifie que $\int_a^b f(x)\,dx$ converge vers $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$. ■

Dans la pratique, on effectue le changement de variable sur l'intégrale définie $\int_a^x f(t)\,dt$ et on passe à la limite ensuite.

Exercice 13.15 *Montrer que l'intégrale* $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}+t^2}dt$ *converge et calculer sa valeur.*

Solution 13.15 *Le changement de variable* $t = u^2$ *donne* $I = 2\int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^3}$ *et une décomposition en éléments simples donne* $I = \frac{4}{9}\sqrt{3}\pi$.

Exercice 13.16 *Prouver la convergence et calculer* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\,dt$.

Solution 13.16 *Pour* $t > 0$, *on a :*

$$f(t) = \ln(\sin(t)) = \ln\left(\frac{\sin(t)}{t}\right) + \ln(t)$$

avec $\lim_{t\to 0^+} \ln\left(\frac{\sin(t)}{t}\right) = \ln(1) = 0$, *donc* $t \mapsto \ln\left(\frac{\sin(t)}{t}\right)$ *se prolonge par continuité en* 0 *et comme* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(t)\,dt$ *est convergente (exercice 13.6), on en déduit que* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\,dt$ *est convergente. Notons* I *la valeur de cette intégrale.*
Le changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - t$ *nous donne pour* $0 < x < \frac{\pi}{2}$ *:*

$$\int_x^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}-x} \ln(\cos(t))\,dt \underset{x\to 0^+}{\to} I$$

ce qui signifie que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(t))\,dt = I$.
On peut alors écrire que :

$$\begin{aligned} 2I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\,dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(t))\,dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\sin(2t)}{2}\right)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2t))\,dt - \frac{\pi}{2}\ln(2). \end{aligned}$$

Le changement de variable $u = 2t$ *nous dit que* $\int_0^{\pi} \ln(\sin(t))\,dt$ *est convergente et :*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2t))\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin(t))\,dt$$

De même, le changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - t$ *nous donne :*

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin(2t))\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(t))\,dt = I.$$

On a donc en définitive :

$$2I = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin(t))\, dt - \frac{\pi}{2}\ln(2) = I - \frac{\pi}{2}\ln(2)$$

et $I = -\frac{\pi}{2}\ln(2)$.

Exercice 13.17 *Soit* $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *continue telle que l'intégrale* $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ *converge. Pour* $0 < a < b$ *et* $0 < x < y$ *on pose :*

$$F(x,y) = \int_x^y \frac{f(at) - f(bt)}{t} dt$$

1. *Montrer que :*
$$F(x,y) = \int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t} dt - \int_{ay}^{by} \frac{f(t)}{t} dt$$
On note $G(x) = \int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t} dt$ *et* $H(y) = \int_{ay}^{by} \frac{f(t)}{t} dt$.
2. *Montrer que* $\lim_{y \to +\infty} H(y) = 0$.
3. *Montrer que*
$$G(x) = \int_{ax}^{bx} \frac{f(t) - f(0)}{t} dt + f(0)\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$
4. *Montrer que* $\lim_{x \to 0} G(x) = f(0)\ln\left(\frac{b}{a}\right)$.
5. *Montrer que :*
$$\int_0^{+\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t} dt = f(0)\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Solution 13.17

1. *Les changement de variables* $u = at$ *et* $v = bt$ *avec* $a > 0$ *et* $b > 0$ *donnent :*
$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int_x^y \frac{f(at)}{t} dt - \int_x^y \frac{f(bt)}{t} dt = \int_{ax}^{ay} \frac{f(u)}{u} du - \int_{bx}^{by} \frac{f(v)}{v} dv \\ &= \int_{ax}^{bx} \frac{f(u)}{u} du + \int_{bx}^{ay} \frac{f(u)}{u} du - \int_{bx}^{ay} \frac{f(v)}{v} dv - \int_{ay}^{by} \frac{f(v)}{v} dv \\ &= \int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t} dt - \int_{ay}^{by} \frac{f(t)}{t} dt = G(x) - H(y) \end{aligned}$$
2. *Avec la convergence de* $I = \int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$*, on a :*
$$H(y) = \int_1^{by} \frac{f(t)}{t} dt - \int_1^{ay} \frac{f(t)}{t} dt \underset{y \to +\infty}{\to} I - I = 0.$$

3. *On a pour* $a > 0$, $b > 0$ *et* $x > 0$ *:*

$$\begin{aligned} G(x) = \int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t} dt &= \int_{ax}^{bx} \frac{f(t) - f(0) + f(0)}{t} dt \\ &= \int_{ax}^{bx} \frac{f(t) - f(0)}{t} dt + f(0) [\ln(t)]_{ax}^{bx} \\ &= \int_{ax}^{bx} \frac{f(t) - f(0)}{t} dt + f(0) \ln\left(\frac{b}{a}\right) \end{aligned}$$

4. *Comme* f *est continue en* 0, *pour tout réel* $\varepsilon > 0$, *on peut trouver un réel* $\eta > 0$ *tel que :*

$$(0 < t < \eta) \Rightarrow (|f(t) - f(0)| < \varepsilon)$$

et pour $0 < x < \dfrac{\eta}{b}$, *on a* $[ax, bx] \subset]0, \eta[$ *de sorte que :*

$$\left| \int_{ax}^{bx} \frac{f(t) - f(0)}{t} dt \right| \leq \int_{ax}^{bx} \frac{|f(t) - f(0)|}{t} dt \leq \varepsilon \int_{ax}^{bx} \frac{dt}{t} = \varepsilon \ln\left(\frac{b}{a}\right),$$

ce qui prouve que $\displaystyle\lim_{x \to 0} \int_{ax}^{bx} \frac{f(t) - f(0)}{t} dt = 0$ *et* $\displaystyle\lim_{x \to 0} G(x) = f(0) \ln\left(\frac{b}{a}\right)$.

5. *Prenant* $x = 1$ *et* $y > 1$, *on a :*

$$F(1, y) = \int_1^y \frac{f(at) - f(bt)}{t} dt = G(1) - H(y) \underset{y \to +\infty}{\to} G(1)$$

ce qui prouve que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t} dt$ *converge vers* $G(1)$.
Puis prenant $y = 1$ *et* $0 < x < 1$, *on a :*

$$F(1, y) = \int_x^1 \frac{f(at) - f(bt)}{t} dt = G(x) - H(1) \underset{x \to 0}{\to} f(0) \ln\left(\frac{b}{a}\right) - H(1)$$

ce qui prouve que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(at) - f(bt)}{t} dt$ *converge vers* $f(0) \ln\left(\dfrac{b}{a}\right) - H(1)$.
Il en résulte que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t} dt$ *converge vers :*

$$f(0) \ln\left(\frac{b}{a}\right) + G(1) - H(1)$$

avec :

$$G(1) - H(1) = F(1, 1) = 0.$$

On a donc bien :

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t} dt = f(0) \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Par exemple pour $f(t) = \dfrac{\sin(t)}{t}$ *qui est bien continue en* 0 *avec* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2} dt$ *convergente, on a en prenant* $a = 1$ *et* $b = 2$ *:*

$$\int_0^{+\infty} \frac{2 \sin(t) - \sin(2t)}{2t^2} dt = \ln(2)$$

ou encore :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)(1 - \cos(t))}{t^2} dt = \ln(2)$$

Exercice 13.18 *Soit* $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ *continue telle que* $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \alpha$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \beta$*. En s'inspirant de l'exercice précédent, montrer que pour* $0 < a < b$ *on a :*

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t} dt = (\alpha - \beta) \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Solution 13.18 *Pour* $0 < x < y$ *on pose :*

$$F(x, y) = \int_x^y \frac{f(at) - f(bt)}{t} dt$$

et on a :

$$F(x, y) = \int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t} dt - \int_{ay}^{by} \frac{f(t)}{t} dt = G(x) - H(y)$$

Avec $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \alpha$*, on déduit que :*

$$\lim_{x \to 0} G(x) = \alpha \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

et avec $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \beta$*, on déduit que :*

$$\lim_{y \to +\infty} H(y) = \beta \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Faisons le pour la deuxième limite : pour tout réel $\varepsilon > 0$*, on peut trouver un réel* $M > 0$ *tel que :*

$$(t > M) \Rightarrow (|f(t) - \beta| < \varepsilon)$$

et pour $y > \dfrac{M}{a}$*, on a* $[ay, by] \subset]M, +\infty[$ *de sorte que :*

$$\left| \int_{ay}^{by} \frac{f(t) - \beta}{t} dt \right| \leq \int_{ay}^{by} \frac{|f(t) - \beta|}{t} dt \leq \varepsilon \int_{ay}^{by} \frac{dt}{t} = \varepsilon \ln\left(\frac{b}{a}\right),$$

ce qui prouve que $\lim\limits_{y \to +\infty} \displaystyle\int_{ay}^{by} \frac{f(t) - \beta}{t} dt = 0$ *et avec :*

$$H(y) = \int_{ay}^{by} \frac{f(t) - \beta}{t} dt + \beta \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

on en déduit que $\lim\limits_{y \to +\infty} H(y) = \beta \ln\left(\dfrac{b}{a}\right)$.
On conclut alors comme pour l'exercice précédent.
Prenant $f(t) = \arctan(t)$, $a = 1$, $b = 2$, *on obtient :*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(2t) - \arctan(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2} \ln(2).$$

Exercice 13.19 *On considère pour* $(r, s) \in \mathbb{R}^2$*, l'intégrale :*

$$I_a(r, s) = \int_a^1 x^r \left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)^s dx, \text{ où } a \in]0, 1[.$$

1. *Calculer la limite* $\lim\limits_{x\to 0^+} x^r \left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)^s$ *suivant les valeurs de* r *et* s.
2. *Montrer que l'intégrale* $\int_0^1 x^r \left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)^s dx$ *si, et seulement si,* $r > -1$ *et* $s > -1$.
   On notera $I(r,s)$ *cette intégrale généralisée pour* $r > -1$ *et* $s > -1$.
3. *Si* $r > -1$ *et* $s > -1$, *montrer que :*
$$I(r,s) = \int_0^{+\infty} e^{-(r+1)x} x^s dx = \frac{1}{(r+1)^{s+1}} I(0,s).$$
4. *Montrer que pour* $s > 0$, $I(0,s) = sI(0,s-1)$.
5. *En déduire la valeur de* $I(r,n)$ *pour tout* $r > -1$ *et* $n \in \mathbb{N}$.

Solution 13.19

1. *Le changement de variable* $x = \frac{1}{t}$ *nous donne :*
$$\lim_{x\to 0} x^r \left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)^s = \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln(t)^s}{t^r} = \left\{\begin{array}{c} 0 \text{ si } r > 0 \text{ et } s \in \mathbb{R} \\ 0 \text{ si } r = 0 \text{ et } s < 0 \\ 1 \text{ si } r = s = 0 \\ +\infty \text{ si } r = 0 \text{ et } s > 0 \\ +\infty \text{ si } r < 0 \text{ et } s \in \mathbb{R} \end{array}\right.$$
2. *L'intégrale*
$$\int_0^{\frac{1}{e}} x^r \left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)^s dx = \int_0^{\frac{1}{e}} \frac{dx}{x^{-r} |\ln(x)|^{-s}}$$
   est une intégrale de Bertrand et on sait qu'elle converge si, et seulement si $-r < 1$ *et* $s \in \mathbb{R}$ *ou* $-r = 1$ *et* $-s > 1$.
   Le changement de variable $t = -\ln(x)$ *nous montre que l'intégrale* $\int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{dx}{x^{-r} |\ln(x)|^{-s}}$ *est de même nature que l'intégrale* $\int_0^1 \frac{dt}{e^{(r+1)t} t^{-s}}$, *cette dernière étant de même nature que l'intégrale de Riemann* $\int_0^1 \frac{dt}{t^{-s}}$, *donc convergente uniquement pour* $-s < 1$.
   En conclusion, l'intégrale $\int_0^1 x^r \left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)^s dx$ *converge si, et seulement si,* $r > -1$ *et* $s > -1$.
3. *En effectuant le changement de variable* $t = -\ln(x)$, *on a, pour* $r > -1$ *et* $s > -1$ *:*
$$I(r,s) = \int_0^1 x^r \left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)^s dx = \int_0^{+\infty} e^{-(r+1)t} t^s dt$$
   et le changement de variable $u = (r+1)t$, *nous donne :*
$$I(r,s) = \int_0^{+\infty} e^{-u} \frac{u^s}{(r+1)^s} \frac{du}{r+1} = \frac{1}{(r+1)^{s+1}} I(0,s).$$
4. *Pour* $s > 0$, *une intégration par parties donne :*
$$I(0,s) = \left[-t^s e^{-t}\right]_0^{+\infty} + s\int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} dt = sI(0,s-1)$$

5. *Avec* $I(0,n) = nI(0,n-1)$ *pour tout entier* $n \geq 1$*, on déduit par récurrence que* $I(0,n) = n!I(0,0) = n!$*. Il en résulte que :*

$$I(r,n) = \frac{1}{(r+1)^{n+1}} I(0,n) = \frac{n!}{(r+1)^{n+1}}$$

pour tout entier naturel n *et tout réel* $r > -1$*.*

13.4 Une condition nécessaire de convergence de $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$

On sait qu'une condition nécessaire de convergence d'une série numérique est que son terme général tende vers 0.

Dans le cas des fonctions continues, la convergence de $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ n'implique pas nécessairement que f soit nulle à l'infini comme le montre l'exemple de l'exercice qui suit.

Exercice 13.20 *Soit* f *la fonction* f *affine par morceaux et continue sur* $[1,+\infty[$ *telle que :*

$$\forall n \geq 1,\ f\left(n+\frac{1}{2}\right) = n$$

et :

$$\forall n \geq 1,\ f(n) = f\left(n+\frac{1}{2}-\frac{1}{n2^n}\right) = f\left(n+\frac{1}{2}+\frac{1}{n2^n}\right) = f(n+1) = 0.$$

Montrer que $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ *est convergente et que* f *n'est pas nulle à l'infini.*

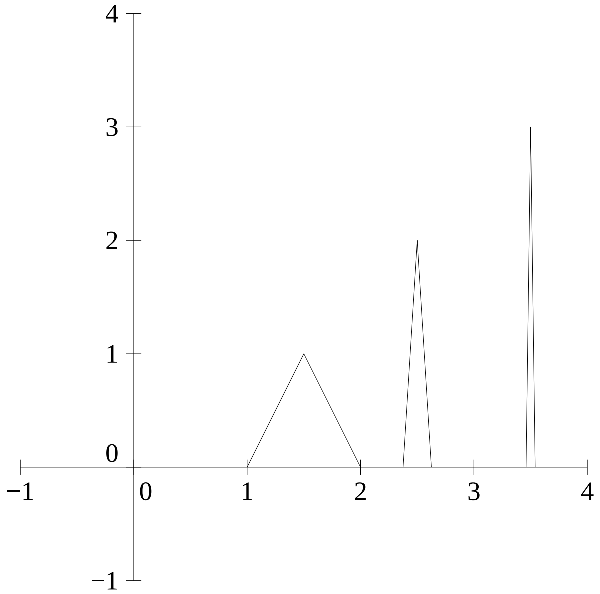

Figure 13.1 – $y = f(x)$

Solution 13.20 *Pour tout réel $x \geq 2$, on a, en notant $[x]$ la partie entière de x :*

$$F(x) = \int_1^x f(x)\,dx \leq \int_1^{[x]+1} f(t)\,dt = \sum_{k=1}^{[x]} \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^{[x]}} \leq 1.$$

La fonction F est donc croissante majoré sur $\mathbb{R}^+$ et en conséquence admet une limite finie en $+\infty$, ce qui signifie que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ est convergente.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(n + \frac{1}{2}\right) = +\infty$, la fonction f n'a pas de limite finie en $+\infty$.

Avec l'exercice 13.30, on donne un autre exemple de telle situation.

Dans le cas où la fonction f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$, la condition $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ est une condition nécessaire de convergence de l'intégrale.

Théorème 13.6 *Soit f une fonction uniformément continue sur $I = [a, +\infty[$. Si l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge, on a alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.*

Démonstration. Il suffit de considérer le cas d'une fonction f à valeurs réelles.

Dire que f ne tend pas vers 0 à l'infini signifie qu'on peut trouver un réel $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\forall n \geq a,\ \exists x_n \geq n \mid |f(x_n)| \geq \varepsilon.$$

Si on suppose de plus que f est uniformément continue sur I, il existe un réel $\eta > 0$ tel que :

$$\big((x, y) \in I^2 \text{ et } |x - y| \leq \eta\big) \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

En particulier, on a pour tout $n \geq a$:

$$t \in [x_n, x_n + \eta] \Rightarrow -\frac{\varepsilon}{2} \leq f(t) - f(x_n) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pour $f(x_n) > 0$ (comme $|f(x_n)| \geq \varepsilon$, $f(x_n)$ est non nul), on a :

$$t \in [x_n, x_n + \eta] \Rightarrow f(t) \geq f(x_n) - \frac{\varepsilon}{2} \geq \frac{\varepsilon}{2} > 0$$

et pour $f(x_n) < 0$, on a :

$$t \in [x_n, x_n + \eta] \Rightarrow f(t) \leq f(x_n) + \frac{\varepsilon}{2} \leq -\frac{\varepsilon}{2} < 0$$

soit $|f(t)| \geq \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $t \in [x_n, x_n + \eta]$ avec f de signe constant sur $[x_n, x_n + \eta]$ dans tous les cas et :

$$\left|\int_{x_n}^{x_n+\eta} f(t)\,dt\right| = \int_{x_n}^{x_n+\eta} |f(t)|\,dt \geq \frac{\eta\varepsilon}{2}$$

de sorte que $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ ne peut avoir de limite finie à l'infini et l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge. ∎

13.5 Cas des fonctions à valeurs positives. Intégrales absolument convergentes

On se place sur $I = [a, b[$ (avec $-\infty < a < b \leq +\infty$) et se donne une fonction f continue par morceaux sur cet intervalle. On désigne toujours par $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\, dt$ la primitive de f nulle en a.

Théorème 13.7 *Si f est à valeurs positives et si $\int_a^b f(x)\, dx$ converge, alors $\int_a^b f(x)\, dx \geq 0$. Dans le cas où f est continue sur I, l'égalité $\int_a^b f(x)\, dx = 0$ est réalisée si, et seulement si, f est identiquement nulle.*

Démonstration. Se déduit de la définition, des propriétés des limites et du résultat analogue sur les intégrales de Riemann des fonctions continues. ∎

On rappelle que si F est une fonction croissante de $I = [a, b[$ dans $\mathbb{R}$, elle admet alors une limite finie en b si, et seulement si, elle est majorée. Dans le cas où elle est majorée, on a :

$$\lim_{x \to b} F(x) = \sup_{x \in [a,b[} F(x)$$

et dans le cas contraire, on a $\lim_{x \to b} F(x) = +\infty$.

Comme conséquence de ce résultat, on a le suivant.

Théorème 13.8 *Si f est à valeurs positives, alors l'intégrale de f sur $[a, b[$ est convergente si, et seulement si, la fonction F est majorée.*

Démonstration. Comme f est positive, la primitive F est une fonction croissante et elle a une limite finie en b si, et seulement si, elle est majorée.

Si F n'est pas majorée, on a alors $\lim_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$. ∎

Pour f à valeurs positives : en cas de divergence on a $\int_a^b f(t)\, dt = \lim_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$ et en cas de convergence, on notera naturellement $\int_a^b f(t)\, dt < +\infty$.

Le cas d'une fonction f à valeurs positives se ramène à celui d'une fonction positive en étudiant $g = -f$.

On déduit du résultat précédent un théorème de comparaison analogue à celui obtenu pour les séries numériques.

Théorème 13.9 *Soient f, g deux fonctions définies, continues par morceaux sur $[a, b[$, à valeurs réelles positives et telles que :*

$$\forall t \in [a, b[,\ f(t) \leq g(t).$$

1. *La convergence de l'intégrale de g sur $[a, b[$ entraîne la convergence de l'intégrale de f sur $[a, b[$ avec :*

$$\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx.$$

2. *La divergence de l'intégrale de f sur $[a, b[$ entraîne la divergence de l'intégrale de g sur $[a, b[$.*

Démonstration. En notant $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ et $G(x) = \int_a^x g(t)\,dt$ pour tout x dans $[a, b[$, on a $F(x) \leq G(x)$ pour tout x dans $[a, b[$.

Si l'intégrale de g sur $[a, b[$ est convergente la fonction G est alors bornée et il en est de même de la fonction F de sorte que l'intégrale de f sur $[a, b[$ est convergente.

Si l'intégrale de f sur $[a, b[$ diverge alors $\lim_{x \to b} F(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to b} G(x) = +\infty$ de sorte que l'intégrale de g sur $[a, b[$ est aussi divergente. ∎

Exercice 13.21 *Étudier la nature de l'intégrale* $\int_1^2 \frac{1}{t^n - 1} dt.$

Solution 13.21 *Pour $t \in]1, 2]$, on a :*

$$t^n - 1 = (t - 1) \sum_{k=0}^{n-1} t^k \leq (t - 1) \sum_{k=0}^{n-1} 2^k = (t - 1)(2^n - 1)$$

donc $0 < \frac{1}{t^n - 1} \geq \frac{1}{2^n - 1} \frac{1}{t - 1}$ *et l'intégrale diverge comme* $\int_1^2 \frac{1}{t - 1} dt.$

Exercice 13.22 *Montrer que l'intégrale de $f : x \mapsto e^{-x^2}$ est convergente sur $]-\infty, +\infty[$.*

Solution 13.22 *La fonction étant paire, il suffit d'étudier la convergence en $+\infty$.*
Pour tout $t \geq 1$ on a $t^2 \geq t$ et :

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x e^{-t^2} dt = \int_0^1 e^{-t^2} dt + \int_1^x e^{-t^2} dt \\ &\leq \int_0^1 e^{-t^2} dt + \int_1^x e^{-t} dt \leq \int_0^1 e^{-t^2} dt + 1. \end{aligned}$$

La fonction f étant positive, il en résulte que F est croissante et majorée, elle admet donc une limite en $+\infty$.
On montrera plus loin que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}.$$

Définition 13.3 *On dit que l'intégrale de f sur $[a, b[$ (à valeurs réelles ou complexes) est absolument convergente si* $\int_a^b |f(t)|\,dt < +\infty.$

Comme pour les séries numérique, on dispose du résultat suivant.

Théorème 13.10 *Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b[$ avec $-\infty < a < b \leq +\infty$. Si l'intégrale de f sur $[a, b[$ est absolument convergente elle est alors convergente et on a :*

$$\left| \int_a^b f(t)\,dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt.$$

Démonstration. On considère tout d'abord le cas d'une fonction f à valeurs réelles d'intégrale absolument convergente.

De $-|f| \leq f \leq |f|$, on déduit que $0 \leq g = f + |f| \leq 2|f|$, ce qui implique la convergence de $\int_a^b g(t)\,dt$ et celle de $\int_a^b f(t)\,dt$ puisque $f = g - |f|$.

Dans le cas d'une fonction f à valeurs complexes d'intégrale généralisée absolument convergente, on écrit que $f = u + iv$, où $u = \Re(f)$, $v = \Im(f)$ et avec $|u| \leq |f|$, $|v| \leq |f|$, on déduit que les intégrales de u et v sont absolument convergentes, donc convergentes et la convergence de $\int_a^b f(t)\,dt$ suit. ∎

Ce résultat peut aussi se montrer en utilisant le critère de Cauchy pour les limites de fonctions à valeurs réelles ou complexes.

Tout d'abord voyons comment le critère de Cauchy pour les fonctions nous fournit un critère de convergence des intégrales généralisées.

Théorème 13.11 *Soient $-\infty < a < b \leq +\infty$ et f une fonction continue par morceaux sur $[a,b[$. L'intégrale de f est convergente sur $[a,b[$ si et seulement si pour tout réel $\varepsilon > 0$ il existe un réel $c \in\,]a,b[$ tel que :*

$$c < x < y < b \Rightarrow \left| \int_x^y f(t)\,dt \right| < \varepsilon.$$

Démonstration. Il s'agit simplement du critère de Cauchy pour la fonction F qui nous assure de l'existence de la limite en b. ∎

Le théorème 13.10 peut alors se montrer comme suit.

Pour tous $x < y$ dans $[a,b[$ on a :

$$\left| \int_x^y f(t)\,dt \right| \leq \int_x^y |f(t)|\,dt.$$

De la convergence de $\int_a^b |f(t)|\,dt$ on déduit que pour tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver un réel c_ε dans $[a,b[$ tel que pour $c_\varepsilon < x < y < b$ on ait $\int_x^y |f(t)|\,dt < \varepsilon$ ce qui entraîne $\left| \int_x^y f(t)\,dt \right| < \varepsilon$. Le critère de Cauchy permet alors de conclure.

Exercice 13.23 *Montrer que les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{2t\ln(t)}{(1+t^2)^2}dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\mathrm{ch}(t)}$ convergent et calculer leur valeur.*

Solution 13.23 *Au voisinage de l'infini, on a $|f(t)| \leq \frac{2\ln(t)}{t^3} \leq \frac{2}{t^2}$, donc la première intégrale converge converge. Une intégration par parties nous donne pour $x > 1$:*

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_1^x \frac{2t\ln(t)}{(1+t^2)^2}dt = \left[-\frac{\ln(t)}{1+t^2} \right]_1^x + \int_1^x \frac{dt}{t(1+t^2)} \\
&= \left[-\frac{\ln(t)}{1+t^2} \right]_1^x + \int_1^x \left(\frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2} \right) dt \\
&= \left[\ln\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \right) - \frac{\ln(t)}{1+t^2} \right]_1^x
\end{aligned}$$

et :

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = -\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\ln(2)}{2}.$$

Au voisinage de l'infini, on a $|f(t)| \leq \dfrac{2}{e^t}$, *donc la deuxième intégrale converge. Le changement de variable* $u = e^t$ *nous donne :*

$$I = 2\int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 13.24 *Montrer que pour tout réel* $\alpha > 1$ *les intégrales* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^\alpha} dt$ *et* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt$ *sont absolument convergentes.*

Solution 13.24 *Résulte immédiatement de la convergence des intégrales de Riemann à l'infini pour* $\alpha > 1$ *et de :*

$$\forall t \geq 1, \ \left|\frac{\cos(t)}{t^\alpha}\right| \leq \frac{1}{t^\alpha} \text{ et } \left|\frac{\sin(t)}{t^\alpha}\right| \leq \frac{1}{t^\alpha}.$$

Exercice 13.25 *Montrer que pour tout réel* $\alpha > 0$ *les intégrales* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^\alpha} dt$ *et* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt$ *sont convergentes.*

Solution 13.25 *On traite le cas de* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt$.
Une intégration par parties donne, pour tout réel $x > 1$ *:*

$$\int_1^x \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt = \cos(1) - \frac{\cos(x)}{x^\alpha} + \alpha \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^{\alpha+1}} dt.$$

On conclut alors avec l'absolue convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^{\alpha+1}} dt$ *et avec :*

$$\left|\frac{\cos(x)}{x^\alpha}\right| \leq \frac{1}{x^\alpha} \underset{x \to +\infty}{\to} 0$$

(on a $\alpha + 1 > 1$*).*

Exercice 13.26 *Nature de* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\cos(t) + \sqrt{t}} dt$.

Solution 13.26 *La fonction* f *est continue sur* $[0, +\infty[$.
Un développement limité nous donne pour $t \geq 1$ *:*

$$f(t) = \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} \left(\frac{1}{1 + \dfrac{\cos(t)}{\sqrt{t}}}\right)$$

$$= \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} \left(1 - \frac{\cos(t)}{\sqrt{t}} + \frac{1}{2}\frac{\cos^2(t)}{t}(1 + \varepsilon(t))\right)$$

avec $\lim_{t \to +\infty} \varepsilon(t) = 0$. *Soit :*

$$f(t) = \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} - \frac{1}{2}\frac{\sin(2t)}{t} + \frac{1}{2}\frac{\sin(t)\cos^2(t)}{t\sqrt{t}}(1+\varepsilon(t))$$

avec $\left|\frac{\sin(t)\cos^2(t)}{t\sqrt{t}}(1+\varepsilon(t))\right| \leq \frac{2}{t\sqrt{t}}$ *pour* t *assez grand. Il en résulte que* $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ *est convergente.*

Exercice 13.27 *Soit* f *une fonction continue sur* $[1, +\infty[$ *telle que la fonction* $F : x \mapsto \int_1^x f(t)\,dt$ *soit bornée. Étudier la convergence de* $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}dt$.

Solution 13.27 *On désigne par* M *est un majorant de* $|F|$.
Une intégration par parties donne pour tout réel $x > 0$ *:*

$$\int_1^x \frac{f(t)}{t}dt = \left[\frac{F(t)}{t}\right]_1^x + \int_1^x \frac{F(t)}{t^2}dt$$

avec :

$$\left|\frac{F(x)}{x}\right| \leq \frac{M}{x} \underset{x \to +\infty}{\to} 0$$

et $\left|\frac{F(t)}{t^2}\right| \leq \frac{M}{t^2}$, *ce qui entraîne la convergence absolue de* $\int_1^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2}dt$ *et :*

$$\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}dt = \int_1^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2}dt - F(1).$$

Définition 13.4 *On dit que l'intégrale de* f *sur* $[a, b[$ *est semi-convergente si elle est convergente et non absolument convergente.*

Nous verrons plus loin (exercice 13.35) que pour $0 < \alpha \leq 1$ l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}dt$ est semi-convergente.

Exercice 13.28 *Montrer que les intégrales généralisées* $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ *et* $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}dt$ *sont convergentes et que :*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}dt.$$

Solution 13.28 *Comme* $\lim_{t \to 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$, *il n'y a pas de problème de convergence en* 0 *et l'exercice précédent nous dit que* $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ *est convergente.*
Avec $0 \leq \frac{\sin^2(t)}{t^2} \leq \frac{1}{t^2}$, *on déduit que* $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}dt$ *est convergente.*
Pour tous réel $x > \varepsilon > 0$, *une intégration par parties faite en posant :*

$$\begin{cases} u(t) = \frac{1}{t}, \ u'(t) = -\frac{1}{t^2} \\ v'(t) = \sin(t), \ v(t) = 1 - \cos(t) \end{cases}$$

donne :

$$\int_{\varepsilon}^{x} \frac{\sin(t)}{t} dt = \left[\frac{1-\cos(t)}{t}\right]_{\varepsilon}^{x} + \int_{\varepsilon}^{x} \frac{1-\cos(t)}{t^2} dt$$

et en utilisant la relation $1-\cos(t) = 2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)$*, on obtient :*

$$\int_{\varepsilon}^{x} \frac{\sin(t)}{t} dt = 2\left[\frac{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}{t}\right]_{\varepsilon}^{x} + 2\int_{\varepsilon}^{x} \frac{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}{t^2} dt.$$

Le changement de variable $y = \dfrac{t}{2}$ *nous donne :*

$$\int_{\varepsilon}^{x} \frac{\sin(t)}{t} dt = 2\left[\frac{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}{t}\right]_{\varepsilon}^{x} + \int_{\varepsilon}^{x} \frac{\sin^2(y)}{y^2} dy$$

Enfin avec $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0} \sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\varepsilon} = 0$ *et* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x}$*, on déduit que :*

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_{0}^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt.$$

L'exercice qui suit décrit une méthode de calcul de $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$.

Exercice 13.29

1. *Montrer que si f est une fonction de classe $\mathbb{C}^1$ de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, alors* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{a}^{b} f(x)\sin(nx)\,dx = 0$.
2. *Montrer que l'application f définie sur* $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ *par* $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin(x)}$ *se prolonge en une fonction de classe $\mathbb{C}^1$ sur* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
3. *Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$,* $J_n = \displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin(x)} dx$.
4. *On pose* $K_n = \displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)x)}{x} dx$*. Montrer que* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} K_n = \int_{0}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$.
5. *Déduire de ce qui précède que* $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

Solution 13.29

1. *Une intégration par parties nous donne pour tout $n \geq 1$:*

$$I_n = \int_{a}^{b} f(x)\sin(nx)\,dx = \left[-f(x)\frac{\cos(nx)}{n}\right]_{a}^{b} + \int_{a}^{b} f'(x)\frac{\cos(nx)}{n} dx$$

et en posant $M_0 = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$, $M_1 = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f'(x)|$ *(ces fonctions sont continues sur le segment $[a,b]$), on en déduit que :*

$$|I_n| \leq \frac{2M_0}{n} + \frac{(b-a)M_1}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

2. *Un développement limité au voisinage de* 0 *nous donne :*

$$f(x) = \frac{\sin(x) - x}{x\sin(x)} = \frac{-\dfrac{x^3}{3!} + o(x^4)}{x\left(x - \dfrac{x^3}{3!} + o(x^4)\right)} = \frac{-\dfrac{x}{3!} + o(x^2)}{1 - \dfrac{x^2}{3!} + o(x^2)} \underset{x\to 0}{\to} 0$$

ce qui permet de prolonger f *par continuité en* 0 *en posant* $f(0) = 0$.
On a alors :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} \frac{-\dfrac{1}{3!} + o(x)}{1 - \dfrac{x^2}{3!} + o(x^2)} \underset{x\to 0}{\to} -\frac{1}{3!}$$

ce qui prouve que f *est dérivable en* 0 *de dérivée* $f'(0) = -\dfrac{1}{6}$.
Par ailleurs f *est de classe* $\mathbb{C}^1$ *sur* $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ *avec :*

$$f'(x) = \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2\cos(x) - \sin^2(x)}{x^2\sin^2(x)}$$
$$= \frac{x^2\left(1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^3)\right) - \left(x - \dfrac{x^3}{3!} + o(x^4)\right)^2}{x^2\left(x - \dfrac{x^3}{3!} + o(x^4)\right)^2}$$
$$= \frac{\left(1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^3)\right) - \left(1 - \dfrac{x^2}{3!} + o(x^3)\right)^2}{\left(x - \dfrac{x^3}{3!} + o(x^4)\right)^2}$$
$$= \frac{\left(1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^3)\right) - \left(1 - \dfrac{x^2}{3} + o(x^3)\right)}{x^2\left(1 - \dfrac{x^2}{3} + o(x^3)\right)}$$
$$= \frac{-\dfrac{x^2}{6} + o(x^3)}{x^2\left(1 - \dfrac{x^2}{3} + o(x^3)\right)} = \frac{-\dfrac{1}{6} + o(x)}{1 + o(x)} \underset{x\to 0}{\to} -\frac{1}{6}$$

ce qui prouve que f' *est continue en* 0.
En définitive, f *se prolonge en une fonction de classe* $\mathbb{C}^1$ *sur* $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

3. *Avec :*

$$\sin((2n+1)x) = \sin(2nx)\cos(x) + \cos(2nx)\sin(x)$$

et :

$$\sin((2n+1)x) + \sin((2n-1)x) = 2\sin(2nx)\cos(x)$$

on déduit que pour $n \geq 1$, *on a :*

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2nx)}{\sin(x)} \cos(x)\, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2nx)\, dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2nx)}{\sin(x)} \cos(x)\, dx$$

et :

$$J_n + J_{n-1} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2nx)}{\sin(x)} \cos(x)\, dx = 2J_n$$

soit $J_n = J_{n-1}$ *et par récurrence* $J_n = J_0 = \dfrac{\pi}{2}$ *pour tout* $n \geq 0$.

4. *On sait déjà que* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$ *(en utilisant une intégration par parties).*
Le changement de variable $t = (2n+1)\, x$ *nous donne :*

$$K_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)\,x)}{x} dx$$
$$= \int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{t} dt \underset{n\to+\infty}{\to} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$$

5. *En remarquant que :*

$$K_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin((2n+1)\,x) \left(f(x) + \frac{1}{\sin(x)} \right) dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin((2n+1)\,x)\, f(x)\, dx + J_n$$

avec $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin((2n+1)\,x)\, f(x)\, dx$ *(questions* ***2.*** *et* ***1.****) et* $J_n = \dfrac{\pi}{2}$, *on déduit que :*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \lim_{n\to+\infty} K_n = \frac{\pi}{2}.$$

L'exercice qui suit nous donne un exemple de fonction telle que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} |f(x)| = +\infty$ avec $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$ convergente (voir le paragraphe 13.4).

Exercice 13.30 *On considère la fonction* f *définie sur* $[1, +\infty[$ *par :*

$$\forall x \in [1, +\infty[\,,\ f(x) = x e^{ix^n}$$

où $n \geq 3$ *est un entier.*
Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$ *est convergente avec* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} |f(x)| = +\infty$.

Solution 13.30 *Avec* $|f(x)| = x$, *on déduit que* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} |f(x)| = +\infty$.
On peut écrire que $f = u'v$ *avec* $u(x) = \dfrac{1}{ni} e^{ix^n}$ *et* $v(x) = \dfrac{1}{x^{n-2}}$. *Comme :*

$$|u(x)\, v(x)| = \frac{1}{n} \frac{1}{x^{n-2}} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$$

(on a $n \geq 3$), on déduit du théorème d'intégration par parties que les intégrales $\int_1^{+\infty} u'(x)\, v(x)\, dx = \int_1^{+\infty} xe^{ix^n} dx$ *et* $\int_1^{+\infty} u(x)\, v'(x)\, dx = \frac{2-n}{ni} \int_1^{+\infty} \frac{e^{ix^n}}{x^{n-1}} dx$ *sont de même nature.*
Comme $\left| \frac{e^{ix^n}}{x^{n-1}} \right| = \frac{1}{x^{n-1}}$ *avec* $n-1 \geq 2$, *l'intégrale* $\int_1^{+\infty} \frac{e^{ix^n}}{x^{n-1}} dx$ *est absolument convergente et on en déduit alors que l'intégrale* $\int_1^{+\infty} xe^{ix^n} dx$ *est convergente.*

Du théorème 13.9, on déduit un premier résultat sur la comparaison d'une intégrale généralisée à une intégrale de Riemann.

Théorème 13.12 *Soit f une fonction définie et continue par morceaux sur $[a, +\infty[$. S'il existe un réel $\alpha > 1$ et un réel positif λ tels que pour t assez grand, on ait $|f(t)| \leq \frac{\lambda}{t^\alpha}$, alors l'intégrale généralisée* $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ *est convergente.*

Démonstration. Du théorème 13.9, on déduit qu'il existe un réel $c > a$ tel que $\int_c^{+\infty} f(x)\, dx$ est absolument convergente, elle est donc convergente et aussi $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$. ■

De même si f définie sur $]0, b]$ avec $b > 0$ est telle que $|f(t)| \leq \frac{\lambda}{t^\alpha}$ pour $t > 0$ voisin de 0 avec $0 < \alpha < 1$, alors l'intégrale généralisée $\int_0^b f(x)\, dx$ est convergente.

Pratiquement, on peut utiliser les résultats suivant.

Théorème 13.13 *Soit f une fonction définie et continue par morceaux sur $[a, +\infty[$. S'il existe un réel $\alpha > 1$ tels que $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha f(t) = 0$, alors l'intégrale généralisée* $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ *est absolument convergente.*

Démonstration. Si $\lim\limits_{x \to +\infty} t^\alpha f(t) = 0$, il existe un réel $c > a$ tel que $|f(t)| \leq \frac{1}{t^\alpha}$ pour $t \geq c$ et la conclusion suit. ■

Exemple 13.1 *De $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 P(x)\, e^{-x^2} = 0$ pour tout polynôme P, on déduit que l'intégrale généralisée* $\int_0^{+\infty} P(x)\, e^{-x^2} dx$ *est absolument convergente.*

Théorème 13.14 *Soit f une fonction à valeurs réels définie et continue par morceaux sur $[a, +\infty[$. S'il existe un réel $\alpha \leq 1$ tels que $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha f(t) = \ell > 0$, alors l'intégrale généralisée* $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ *est divergente.*

Démonstration. Si $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha f(t) = \ell > 0$, il existe un réel $c > a$ tel que $f(t) \geq \frac{\ell}{2} \frac{1}{t^\alpha}$ pour $t \geq c$ et la conclusion suit. ■

De même si f définie sur $]0,b]$ avec $b>0$ est telle que $\lim\limits_{t\to 0} t^{\alpha} f(t)=0$ avec $\alpha<1$ [resp. $\lim\limits_{t\to 0} t^{\alpha} f(t)=\ell>0$ avec $\alpha\geq 1$] alors l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^b f(x)\,dx$ est absolument convergente [resp. divergente].

On rappelle qu'on dit que f est négligeable devant g [resp. dominée par g] au voisinage de b s'il existe une fonction ε définie sur un intervalle $[\alpha,b[\subset[a,b[$ telle que :

$$\lim_{x\to b}\varepsilon(x)=0$$

[resp. une fonction ε définie et bornée au voisinage de b] et :

$$\forall x\in[\alpha,b[,\ f(x)=\varepsilon(x)\,g(x),$$

On note alors $f=\underset{x\to b}{o}(g)$ [resp. $f=\underset{x\to b}{O}(g)$].

Dans le cas où la fonction g ne s'annule pas au voisinage de b, un critère pratique pour montrer que $f=\underset{x\to b}{o}(g)$ est donné par $\lim\limits_{x\to b}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$.

Le résultat qui suit est analogue à celui obtenu pour les séries à termes positifs.

Théorème 13.15 *Soient f,g deux fonctions définies, continue par morceaux sur $[a,b[$, à valeurs réelles positives et telles que $f=\underset{x\to b}{O}(g)$ [resp. $f=\underset{x\to b}{o}(g)$].*

1. *Si l'intégrale de g sur $[a,b[$ est convergente, il en est alors de même de celle de f et :*

$$\int_x^b f(t)\,dt=\underset{x\to b}{O}\left(\int_x^b g(t)\,dt\right)$$

$$\textit{[resp. }\int_x^b f(t)\,dt=\underset{x\to b}{o}\left(\int_x^b g(t)\,dt\right)\textit{]}$$

2. *Si l'intégrale de f sur $[a,b[$ est divergente, il en est alors de même de celle de g et :*

$$\int_a^x f(t)\,dt=\underset{x\to b}{O}\left(\int_a^x g(t)\,dt\right)$$

$$\textit{[resp. }\int_a^x f(t)\,dt=\underset{x\to b}{o}\left(\int_a^x g(t)\,dt\right)\textit{]}$$

Démonstration. Si $f=\underset{x\to b}{O}(g)$, on peut alors trouver un réel $\alpha\in[a,b[$ et un réel $M>0$ tels que :

$$\forall t\in[\alpha,b[,\ 0\leq f(t)\leq M\cdot g(t).$$

1. Si l'intégrale de g sur $[a,b[$ est convergente, il en est alors de même de $\displaystyle\int_x^b M\cdot g(t)\,dt$ et de $\displaystyle\int_x^b f(t)\,dt$ pour tout $x\in[\alpha,b[$, donc $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ converge. De plus, on a pour tout $x\in[\alpha,b[$:

$$\int_x^b f(t)\,dt\leq M\int_x^b g(t)\,dt$$

ce qui signifie que $\displaystyle\int_x^b f(t)\,dt=\underset{x\to b}{O}\left(\int_x^b g(t)\,dt\right)$.

2. Si l'intégrale de f sur $[a,b[$ est divergente, il en est alors de même de $\int_x^b f(t)\,dt$ et de $\int_x^b M\cdot g(t)\,dt$ pour tout $x\in[\alpha,b[$, donc $\int_a^b g(t)\,dt$ diverge. De plus, on a pour tout $x\in[\alpha,b[$:

$$\int_a^x f(t)\,dt=\int_a^\alpha f(t)\,dt+\int_\alpha^x f(t)\,dt\leq\int_a^\alpha f(t)\,dt+M\int_\alpha^x g(t)\,dt$$

et comme $\lim\limits_{x\to b}\int_\alpha^x g(t)\,dt=+\infty$, on aura $\int_a^\alpha f(t)\,dt\leq\int_\alpha^x g(t)\,dt$ pour x voisin de b et :

$$\int_a^x f(t)\,dt\leq(M+1)\int_\alpha^x g(t)\,dt$$

ce qui signifie que $\int_a^x f(t)\,dt=\underset{x\to b}{o}\left(\int_a^x g(t)\,dt\right)$.
Le cas où $f=\underset{x\to b}{o}(g)$ se traite de façon analogue.

■

On rappelle qu'on dit que les fonctions f et g, définies sur $[a,b[$, sont équivalentes quand x tend vers b s'il existe une fonction ε définie sur un intervalle $[\alpha,b[\subset[a,b[$ telle que :

$$\forall x\in[\alpha,b[,\ f(x)=(1+\varepsilon(x))\,g(x),$$

$$\lim_{x\to b}\varepsilon(x)=0.$$

On note alors $f\underset{x\to b}{\backsim}g$.

On peut remarque que $f\underset{x\to b}{\backsim}g$ est équivalent à dire que $f-g=\underset{x\to b}{o}(g)$.

Dans le cas où la fonction g ne s'annule pas au voisinage de b, un critère pratique d'équivalence est donné par $\lim\limits_{x\to b}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$.

L'utilisation de développements limités permet parfois d'obtenir des équivalents.

Théorème 13.16 *Soient f,g deux fonctions définies, continue par morceaux sur $[a,b[$, à valeurs réelles positives et telles que $f\underset{t\to b}{\backsim}g$. Les intégrales de f et g sur $[a,b[$ sont de même nature, c'est-à-dire que l'intégrale de f sur $[a,b[$ est convergente si, et seulement si, l'intégrale de g sur $[a,b[$ est convergente.*
En cas de convergence, on a :

$$\int_x^b f(t)\,dt\underset{x\to b}{\backsim}\int_x^b g(t)\,dt$$

et en cas de divergence :

$$\int_a^x f(t)\,dt\underset{x\to b}{\backsim}\int_a^x g(t)\,dt$$

Démonstration. Comme $f\underset{t\to b}{\backsim}g$ il existe une fonction ε définie sur un intervalle $[\alpha,b[\subset[a,b[$ telle que $\lim\limits_{t\to b}\varepsilon(t)=0$ et $f(t)=(1+\varepsilon(t))\,g(t)$ pour tout t dans $[\alpha,b[$. On peut alors trouver un réel β dans $[\alpha,b[$ tel que :

$$\forall t\in[\beta,b[,\ -\frac{1}{2}<\varepsilon(t)<\frac{1}{2}.$$

Il en résulte alors, puisque f et g sont à valeurs positives, que :

$$\forall t \in [\beta, b[\,,\ \frac{1}{2} g(t) < f(t) < \frac{3}{2} g(t).$$

On conclut, pour ce qui est de la nature des intégrales, avec le théorème 13.9.

On peut aussi dire que si $f \underset{t\to b}{\backsim} g$, on a alors $f = \underset{x\to b}{O}(g)$ et $g = \underset{x\to b}{O}(f)$, ce qui permet de retrouver le fait que les intégrales sont de même nature. De plus avec $f - g = \underset{x\to b}{o}(g)$, on déduit que $|f-g| = \underset{x\to b}{o}(g)$ et en cas de convergence des intégrales :

$$\int_x^b |f-g|(t)\,dt = \underset{x\to b}{o}\left(\int_x^b g(t)\,dt\right)$$

soit au voisinage de b :

$$\int_x^b |f-g|(t)\,dt = \varepsilon(t)\left(\int_x^b g(t)\,dt\right)$$

avec $\lim\limits_{t\to b} \varepsilon(t) = 0$. Puis avec :

$$0 \leq \left|\int_x^b (f-g)(t)\,dt\right| \leq \int_x^b |f-g|(t)\,dt$$

on déduit que $\displaystyle\int_x^b (f-g)(t)\,dt = \underset{x\to b}{o}\left(\int_x^b g(t)\,dt\right)$, ce qui équivaut à $\displaystyle\int_x^b f(t)\,dt \underset{x\to b}{\backsim} \int_x^b g(t)\,dt$.

Le cas où les deux intégrales divergent se traite de manière analogue. ■

Remarque 13.6 *Si $f \underset{t\to b}{\backsim} g$ avec g de signe constant au voisinage de b (i. e. strictement positif ou strictement négatif), alors la fonction f est également de signe constant au voisinage de b, ce signe étant celui de g.*

Exemple 13.2 *Si $f = \dfrac{P}{Q}$, où P et Q sont des fonctions polynomiales non nulles, il existe un réel a tel que $Q(x) \neq 0$ pour tout $x \geq a > 0$ et on a :*

$$\left|\frac{P(x)}{Q(x)}\right| \underset{x\to+\infty}{\backsim} \frac{|a_p|}{|b_q|}\frac{1}{x^{q-p}}$$

où p, q sont les degrés et a_p, b_q les coefficients dominants de P et Q respectivement. Il en résulte que la fonction f a un signe constant sur $[a, +\infty[$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge si, et seulement si, $q \geq p+2$.

Exercice 13.31 *Étudier la nature des intégrales* $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t^2}dt$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{t}\right) dt$ *et* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\Bigg(e^{-\frac{1}{t}} - \cos\Bigg(\frac{1}{t}$

Solution 13.31 *On a* $\dfrac{\sin(t)}{t^2} > 0$ *pour* $t \in \,]0,1]$ *et* $\dfrac{\sin(t)}{t^2} \underset{t\to0^+}{\backsim} \dfrac{1}{t}$, *donc l'intégrale diverge.*

On a $\arctan\left(\dfrac{1}{t}\right) > 0$ *pour* $t \geq 1$ *et* $\arctan\left(\dfrac{1}{t}\right) \underset{t\to+\infty}{\backsim} \dfrac{1}{t}$, *donc l'intégrale diverge.*

Un développement limité nous donne :

$$\begin{aligned}\frac{1}{t}\left(e^{-\frac{1}{t}} - \cos\left(\frac{1}{t}\right)\right) &= \frac{1}{t}\left(1 - \frac{1}{t} + o\left(\frac{1}{t}\right) - 1 + o\left(\frac{1}{t}\right)\right)\\ &= \frac{1}{t^2}\left(-1 + o\left(\frac{1}{t}\right)\right) \underset{t\to+\infty}{\backsim} -\frac{1}{t^2}\end{aligned}$$

donc l'intégrale converge.

Exercice 13.32 *Justifier la convergence puis calculer :*

$$I = \int_2^{+\infty} \frac{1}{(t-1)\sqrt{t}} dt$$

Solution 13.32 *On a* $f(t) = \dfrac{1}{(t-1)\sqrt{t}} > 0$ *pour tout réel* $t \geq 2$ *et* $f(t) \underset{+\infty}{\backsim} \dfrac{1}{t\sqrt{t}}$, *d'où la convergence de* I.
Le changement de variable $t = u^2$ *donne :*

$$I = \lim_{x\to+\infty} \int_2^x \frac{1}{(t-1)\sqrt{t}} dt = \lim_{x\to+\infty} \int_{\sqrt{2}}^x \frac{2}{u^2-1} du$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\int_{\sqrt{2}}^x \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1} du \right) = \lim_{x\to+\infty} \left[\ln\left(\frac{u-1}{u+1}\right) \right]_{\sqrt{2}}^x = \ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right).$$

On déduit du théorème précédent un critère supplémentaire de comparaison aux intégrales de Riemann.

Théorème 13.17 *Soit* f *une fonction définie et continue par morceaux sur* $[a, +\infty[$. *S'il existe un réel* α *et un réel non nul* λ *tels que* $f(x) \underset{x\to+\infty}{\backsim} \dfrac{\lambda}{x^\alpha}$, *alors l'intégrale généralisée* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *est convergente pour* $\alpha > 1$ *et divergente pour* $\alpha \leq 1$.

Démonstration. Supposons que $\lambda > 0$. On a alors $f(t) > 0$ pour t assez grand, disons $t \geq c > a$. Le théorème précédent nous dit alors que $\displaystyle\int_c^{+\infty} f(x)\,dx$ est de même nature que $\displaystyle\int_c^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$, ce qui donne le résultat annoncé. ■

De même si f définie sur $]0, b]$ avec $b > 0$ est telle que $f(x) \underset{x\to+0}{\backsim} \dfrac{\lambda}{x^\alpha}$, alors l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^b f(x)\,dx$ est convergente si, et seulement si $\alpha < 1$.

A titre d'application on peut considérer le cas des intégrales de Bertrand.

Exercice 13.33 *Soit* α *et* β *deux réel et* f *la fonction définie sur* $]0, +\infty[- \{1\}$ *par :*

$$f : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha |\ln(t)|^\beta}.$$

1. *Montrer que l'intégrale de* f *sur* $[e, +\infty[$ *est convergente si et seulement si* $\alpha > 1$ *ou* $\alpha = 1$ *et* $\beta > 1$.
2. *Montrer que l'intégrale de* f *sur* $\left]0, \dfrac{1}{e}\right]$ *est convergente si et seulement si* $\alpha < 1$ *ou* $\alpha = 1$ *et* $\beta > 1$.

Solution 13.33 *Pour* $\alpha > 1$ *on se donne une réel* $\gamma \in]1, \alpha[$ *et on écrit :*

$$f(t) = \frac{1}{t^\gamma} \frac{1}{t^{\alpha-\gamma} (\ln(t))^\beta} = \frac{1}{t^\gamma} g(t)$$

avec $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = 0$*.pour tout réel* β*. Donc pour* t *assez grand on aura* $f(t) < \dfrac{1}{t^\gamma}$ *et avec* $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t^\gamma} < +\infty$ *on déduit la convergence de l'intégrale de* f *sur* $[e, +\infty[$.
Pour $\alpha > 1$ *on se donne une réel* $\gamma \in]\alpha, 1[$ *et on écrit :*

$$f(t) = \frac{1}{t^\gamma} \frac{t^{\gamma-\alpha}}{(\ln(t))^\beta} = \frac{1}{t^\gamma} h(t)$$

avec $\lim\limits_{t\to+\infty} h(t) = +\infty$*.pour tout réel* β*. Donc pour* t *assez grand on aura* $f(t) > \dfrac{1}{t^\gamma}$ *et avec* $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t^\gamma} = +\infty$ *on déduit la divergence de l'intégrale de* f *sur* $[e, +\infty[$.
Pour $\alpha = 1$ *on fait le changement de variable* $u = \ln(t)$ *et pour* $x > e$ *on a :*

$$\int_e^x \frac{dt}{t(\ln(t))^\beta} = \int_1^{\ln(x)} \frac{du}{u^\beta}$$

et l'intégrale de f *sur* $[e, +\infty[$ *converge si et seulement si* $\beta > 1$.
Enfin le changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$ *donne pour* $0 < x < \dfrac{1}{e}$ *:*

$$\int_x^{\frac{1}{e}} \frac{dt}{t^\alpha |\ln(t)|^\beta} = \int_e^{\frac{1}{x}} \frac{du}{u^{2-\alpha}(\ln(u))^\beta}$$

ce qui ramène au cas précédent.

L'étude de la fonction Γ d'Euler est aussi un exemple typique.

Exercice 13.34 *On s'intéresse ici au domaine de convergence de l'intégrale* $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$, *où* x *est un nombre réel.*
On rappelle que pour $t > 0$, *on a* $t^{x-1} = e^{(x-1)\ln(t)}$.

1. *Montrer que* $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ *est convergente pour tout* $x \in \mathbb{R}$.
2. *Montrer que* $\displaystyle\int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt$ *est convergente si et seulement si* $x > 0$.
3. *En déduire le domaine de définition de la fonction :*

$$\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

4. *Soit* $x > 0$ *fixé. On note, pour tout réel* $t > 0$, $f(t) = e^{-t}$, $g(t) = \dfrac{t^x}{x}$*. Montrer que :*

$$\lim_{t\to 0^+} f(t) g(t) = 0 \text{ et } \lim_{t\to+\infty} f(t) g(t) = 0.$$

5. *Montrer, par une intégration par parties, que pour tout réel* $x > 0$, *on a :*

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} \Gamma(x+1).$$

6. *Montrer que* $\Gamma(1) = 1$, *puis que* $\Gamma(n) = (n-1)!$ *pour tout entier* $n \geq 1$.

Solution 13.34 *Soit* $f(t) = e^{-t}t^{x-1}$ *pour* $t > 0$ *et* $x \in \mathbb{R}$ *fixé. On a* $f(t) > 0$ *pour tout* $t > 0$.

1. *Avec* $\lim\limits_{t \to +\infty} t^2 f(t) = 0$ *on déduit que* $0 < f(t) < \dfrac{1}{t^2}$ *pour* t *grand et* $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$ *converge absolument pour tout* $x \in \mathbb{R}$.
2. *Avec* $f(t) > 0$ *et* $f(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{t^{1-x}}$, *on déduit que* $\displaystyle\int_0^1 e^{-t}t^{x-1}dt$ *est convergente si et seulement si* $x > 0$.
3. *Le domaine de définition de la fonction* Γ *est donc* $\mathbb{R}^{+,*}$.
4. *Comme* $x > 0$, *on a* $\lim\limits_{t \to 0^+} f(t)g(t) = \lim\limits_{t \to 0^+} e^{-t}\dfrac{t^x}{x} = 0$ *et comme l'exponentielle domine les puissances à l'infini, on a* $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t)g(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} e^{-t}\dfrac{t^x}{x} = 0$.
5. *Une intégration par parties, la convergence de* $\Gamma(x)$ *et la question précédente donnent :*
$$\begin{aligned}\Gamma(x) &= \lim_{(u,v)\to(0,+\infty)} \left(\left[e^{-t}\frac{t^x}{x} \right]_u^v + \frac{1}{x}\int_u^v e^{-t}t^x dt \right) \\ &= \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} e^{-t}t^x dt = \frac{1}{x}\Gamma(x+1).\end{aligned}$$
6. *On a* $\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1$ *et la relation de récurrence* $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$, *donc* $\Gamma(n) = (n-1)!$ *par récurrence.*

13.6 Comparaison entre série et intégrale généralisée

Dans le chapitre sur les séries numériques nous avons déjà montré un résultat de comparaison entre série et intégrale généralisée, c'est le théorème 6.4 qui peut aussi se traduire comme suit.

Théorème 13.18 *Si* $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ *est une fonction continue décroissante, alors la série* $\sum f(n)$ *est de même nature que l'intégrale généralisée* $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$.

L'exemple de $f : t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ avec $\alpha > 0$ nous montre que les séries de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ et les intégrales de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ sont de même nature.

Le résultat qui suit peut être utilisé pour montrer la divergence d'une intégrale.

Théorème 13.19 *Soient* $-\infty < a < b \leq +\infty$ *et* f *une fonction continue par morceaux sur* $[a, b[$. *L'intégrale de* f *sur* $[a, b[$ *est convergente si, et seulement si, pour toute suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de points de* $[a, b[$ *qui converge vers* b, *la série* $\sum \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)\,dt$ *est convergente.*

Démonstration. On note toujours $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$.

Dire que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ converge équivaut à dire que F a une limite finie ℓ en b, ce qui équivaut encore à dire que pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $[a,b[$ qui converge vers b, la suite $(F(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ. On conclut alors en écrivant que :

$$F(x_n)=\int_a^{x_n} f(t)\,dt=\int_a^{x_0} f(t)\,dt+\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,dt.$$

■

Pour montrer la divergence de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ il suffit alors de trouver une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $[a,b[$ qui converge vers b telle que la série $\sum\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)\,dt$ soit divergente.

On peut par exemple montrer ainsi la divergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{|\sin(t)|}{t^\alpha}dt$ pour $0<\alpha\leq 1$.

Exercice 13.35 *Montrer que pour $0<\alpha\leq 1$ l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t^\alpha}dt$ est semi-convergente.*

Solution 13.35 *On sait déjà que les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t^\alpha}dt$ sont convergentes pour $\alpha>0$ (exercice 13.25).*
Comme pour $t\geq 1$ et $0<\alpha\leq 1$, on a $\displaystyle\left|\frac{\sin(t)}{t^\alpha}\right|\geq\left|\frac{\sin(t)}{t}\right|$ (qui résulte de $t\geq t^\alpha$ ou encore $t^{1-\alpha}\geq 1$), il nous suffit de montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}dt$ est semi-convergente.
Pour ce faire, on utilise la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n\geq 1,\ x_n=n\pi$$

Pour $n\geq 1$, le changement de variable $t=n\pi+u$ nous donne :

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\left|\frac{\sin(t)}{t}\right|dt=\int_0^\pi\frac{\sin(u)}{n\pi+u}du\geq\frac{1}{(n+1)\pi}\int_0^\pi\sin(u)\,du=\frac{2}{(n+1)\pi}$$

et en conséquence $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\left|\frac{\sin(t)}{t}\right|dt=+\infty$, ce qui entraîne la divergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin(t)}{t}\right|dt.$

Remarque 13.7 *L'inégalité $\displaystyle\left|\frac{\sin(t)}{t^\alpha}\right|\geq\left|\frac{\sin(t)}{t}\right|$ pour $t\geq 1$ étant encore valable pour $\alpha\leq 0$, on déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin(t)}{t^\alpha}\right|dt$ diverge aussi pour $\alpha\leq 0$.*

Dans le cas d'une fonction à valeurs réelles positives, on a le résultat suivant qui permet parfois de justifier la convergence d'une intégrale en utilisant la série $\sum\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)\,dt$ où $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite particulière de points de $[a,b[$ qui converge vers b.

Théorème 13.20 *Soient $-\infty<a<b\leq+\infty$ et f une fonction continue par morceaux sur $[a,b[$ à valeurs réelles positives. L'intégrale de f sur $[a,b[$ est convergente si, et seulement si, il existe une suite croissante $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $[a,b[$ qui converge vers b, telle que la série $\sum\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)\,dt$ soit convergente.*

Démonstration. Le théorème précédent nous dit que si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ converge alors $\sum \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)\,dt$ est convergente pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $[a,b[$ qui converge vers b.

Supposons qu'il existe une suite croissante $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $[a,b[$ qui converge vers b, telle que la série $\sum \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)\,dt$ soit convergente vers un réel S.

On note $F : x \mapsto \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ et pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,dt = \int_{x_0}^{x_n} f(t)\,dt = F(x_n) \leq S$$

du fait que f est à valeurs positives (ce qui entraîne que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ et la fonction F sont croissantes). Comme pour tout réel $x \in [a,b[$, on peut trouver un entier n tel que $x_n \leq x < b$ (puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = b$), on en déduit que :

$$F(x) \leq F(x_n) \leq S$$

et la fonction F est croissante majorée, donc convergente, ce qui revient à dire que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ converge. ■

Exercice 13.36 *On se donne un réel α et un réel $\beta > 0$.*

1. *Pour quelles valeurs de α l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{t^\alpha}{1+t^\beta \sin^2(t)}dt$ est-elle convergente ?*
2. *On suppose pour cette question que $\alpha = 0$.*
   (a) *Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\beta \sin^2(t)}$ est divergente pour $0 < \beta \leq 2$.*
   (b) *Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\beta \sin^2(t)}$ est convergente pour $\beta > 2$.*
3. *On suppose pour cette question que $\alpha > -1$.*
   (a) *Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t^\beta \sin^2(t)}dt$ est divergente pour $\beta - 2\alpha \leq 2$.*
   (b) *Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t^\beta \sin^2(t)}dt$ est convergente pour $\beta - 2\alpha > 2$.*

Solution 13.36 *Pour tout réel $t > 0$, on note $f(t) = \dfrac{t^\alpha}{1+t^\beta \sin^2(t)}$ et on note que cette fonction est à valeurs positives.*

1. *Avec $f(t) \underset{t\to 0}{\backsim} \dfrac{1}{t^{-\alpha}}$, on déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\,dt$ est convergente si, et seulement si, $\alpha > -1$.*
2. *On note pour tout entier $n \geq 1$:*

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dx}{1+x^\beta \sin^2(x)}.$$

(a) *Le changement de variable $x = n\pi + t$ nous donne :*

$$u_n = \int_0^{\pi} \frac{dt}{1 + (n\pi + t)^{\beta} \sin^2(t)}$$

et tenant compte de :

$$\forall t \in [0, \pi], \begin{cases} n\pi + t \leq (n+1)\pi \\ \sin^2(t) \leq t^2 \end{cases}$$

on obtient :

$$u_n \geq v_n = \int_0^{\pi} \frac{dt}{1 + ((n+1)\pi)^{\beta} t^2} = \int_0^{\pi} \frac{dt}{1 + \lambda_n^2 t^2} = \frac{\arctan(\lambda_n \pi)}{\lambda_n},$$

où on a posé $\lambda_n = ((n+1)\pi)^{\frac{\beta}{2}}$. Comme $\lambda_n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \arctan(\lambda_n \pi) = \dfrac{\pi}{2}$ et :

$$v_n = \frac{\arctan(\lambda_n \pi)}{\lambda_n} \underset{n\to+\infty}{\backsim} \frac{\pi}{2}\frac{1}{\lambda_n} = \frac{\gamma}{(n+1)^{\frac{\beta}{2}}}$$

de sorte que $\sum v_n$ converge si, et seulement si, $\beta > 2$. En particulier $\sum v_n$ diverge pour $0 < \beta \leq 2$ et il en est de même de $\sum u_n$.

(b) *On écrit que $u_n = v_n + w_n$, avec :*

$$v_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 + (n\pi + t)^{\beta} \sin^2(t)}, \; w_n = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dt}{1 + (n\pi + t)^{\beta} \sin^2(t)}.$$

En tenant compte de :

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \begin{cases} n\pi + t \geq n\pi \\ \sin^2(t) \geq \left(\dfrac{2}{\pi} t\right)^2 \end{cases}$$

on obtient :

$$v_n \leq r_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 + (n\pi)^{\beta} \left(\frac{2}{\pi} t\right)^2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 + \mu_n^2 t^2} = \frac{\arctan\left(\mu_n \frac{\pi}{2}\right)}{\mu_n},$$

où on a posé $\mu_n = \dfrac{2}{\pi}(n\pi)^{\frac{\beta}{2}}$. On a alors :

$$r_n = \frac{\arctan\left(\mu_n \frac{\pi}{2}\right)}{\mu_n} \underset{n\to+\infty}{\backsim} \frac{\pi}{2}\frac{1}{\mu_n} = \frac{\delta}{n^{\frac{\beta}{2}}}$$

avec $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^{\frac{\beta}{2}}} < +\infty$ pour $\beta > 2$, ce qui entraîne la convergence de $\sum r_n$ et de $\sum v_n$.
Pour ce qui est de w_n, le changement de variable $t = \pi - \theta$ donne :

$$w_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{1 + (n\pi + \pi - \theta)^{\beta} \sin^2(\theta)}$$

ce qui nous ramène, à peu de chose près, à la situation précédente et donc $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} w_n$ converge.
En définitive $\sum u_n$ converge pour $\alpha = 0$ et $\beta > 2$.

3. *On note pour tout entier* $n \geq 1$ *:*

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{x^\alpha}{1 + x^\beta \sin^2(x)} dx.$$

(a) *On a :*

$$u_n = \int_0^\pi \frac{(n\pi + t)^\alpha}{1 + (n\pi + t)^\beta \sin^2(t)} dt.$$

et tenant compte de :

$$\forall t \in [0, \pi], \begin{cases} n\pi \leq n\pi + t \leq (n+1)\pi \\ \sin^2(t) \leq t^2 \end{cases}$$

on obtient pour $\alpha \geq 0$ *:*

$$u_n \geq v_n = (n\pi)^\alpha \int_0^\pi \frac{1}{1 + ((n+1)\pi)^\beta t^2} dt = (n\pi)^\alpha \int_0^\pi \frac{1}{1 + \lambda_n^2 t^2} dt$$
$$\geq (n\pi)^\alpha \frac{\arctan(\lambda_n \pi)}{\lambda_n},$$

où on a posé $\lambda_n = ((n+1)\pi)^{\frac{\beta}{2}}$. *On a alors :*

$$v_n = (n\pi)^\alpha \frac{\arctan(\lambda_n \pi)}{\lambda_n} \underset{n\to+\infty}{\backsim} \frac{\pi}{2} \frac{(n\pi)^\alpha}{((n+1)\pi)^{\frac{\beta}{2}}} \underset{n\to+\infty}{\backsim} \frac{\gamma}{n^{\frac{\beta}{2}-\alpha}}$$

de sorte que $\sum v_n$ *converge si, et seulement si,* $\dfrac{\beta}{2} - \alpha > 1$. *En particulier* $\sum v_n$ *diverge pour* $\alpha \geq 0$, $\beta > 0$, $\beta - 2\alpha \leq 2$ *et il en est de même de* $\sum u_n$.
Pour $-1 < \alpha < 0$, *on a* $(n\pi + t)^\alpha \geq ((n+1)\pi)^\alpha \underset{n\to+\infty}{\backsim} (n\pi)^\alpha$ *et ce qui précède est encore valable.*

(b) *On écrit que* $u_n = v_n + w_n$, *avec :*

$$v_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(n\pi + t)^\alpha}{1 + (n\pi + t)^\beta \sin^2(t)} dt, \ w_n = \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{(n\pi + t)^\alpha}{1 + (n\pi + t)^\beta \sin^2(t)} dt.$$

En tenant compte de :

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \begin{cases} n\pi \leq n\pi + t \leq (n+1) \\ \sin^2(t) \geq \left(\dfrac{2}{\pi} t\right)^2 \end{cases}$$

on obtient pour $\alpha \geq 0$ *:*

$$v_n \leq r_n = ((n+1)\pi)^\alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 + (n\pi)^\beta \left(\frac{2}{\pi} t\right)^2}$$
$$\leq ((n+1)\pi)^\alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 + \mu_n^2 t^2} = ((n+1)\pi)^\alpha \frac{\arctan\left(\mu_n \frac{\pi}{2}\right)}{\mu_n},$$

où on a posé $\mu_n = \dfrac{2}{\pi} (n\pi)^{\frac{\beta}{2}}$. *On a alors :*

$$r_n = ((n+1)\pi)^\alpha \frac{\arctan\left(\mu_n \frac{\pi}{2}\right)}{\mu_n} \underset{n\to+\infty}{\backsim} \frac{\delta}{n^{\frac{\beta}{2}-\alpha}}$$

avec $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{\beta}{2}-\alpha}} < +\infty$ *pour* $\frac{\beta}{2} - \alpha > 1$, *ce qui entraîne la convergence de* $\sum r_n$ *et de* $\sum v_n$.
Pour $-1 < \alpha < 0$, *on a* $(n\pi + t)^\alpha \leq (n\pi)^\alpha$ *et ce qui précède est encore valable.*
Pour ce qui est de w_n, *le changement de variable* $t = \pi - \theta$ *donne :*

$$w_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(n\pi + \pi - \theta)^\alpha}{1 + (n\pi + \pi - \theta)^\beta \sin^2(\theta)} d\theta$$

ce qui nous ramène, à peu de chose près, à la situation précédente et donc $\sum_{n=1}^{+\infty} w_n$ *converge.*
En définitive $\sum u_n$ *converge pour* $\beta - 2\alpha > 2$.

4. *En définitive,* $\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1 + t^\beta \sin^2(t)} dt$ *est convergente pour* $\alpha > -1$, $\beta > 0$ *et* $\beta - 2\alpha > 2$.
Pour $\alpha \leq -1$ *et* $\beta > 0$, *elle est divergente.*
Pour $\alpha > -1$, $\beta > 0$, $\beta - 2\alpha \leq 2$, *elle est divergente.*

Exercice 13.37

1. *Montrer que pour tout réel* $\alpha > 1$, *les intégrales* $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(\ln(t))}{t^\alpha} dt$ *et* $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(\ln(t))}{t^\alpha} dt$ *sont absolument convergentes.*
2. *Pour tout réel* α, *on désigne par* f_α *et* g_α *les fonctions définies sur* $[1, +\infty[$ *par :*

$$\forall t \geq 1,\ f_\alpha(t) = \frac{\cos(\ln(t))}{t^\alpha} \text{ et } g_\alpha(t) = \frac{\sin(\ln(t))}{t^\alpha}.$$

   (a) *Calculer les dérivées des fonctions* $f_{\alpha-1}$ *et* $g_{\alpha-1}$ *sur* $[1, +\infty[$.
   (b) *Calculer* $\int_1^x \frac{\cos(\ln(t))}{t^\alpha} dt$ *et* $\int_1^x \frac{\sin(\ln(t))}{t^\alpha} dt$ *pour tout réel* $x > 1$.
   (c) *Montrer que, pour tout réel* $\alpha > 0$, *les fonctions* f_α *et* g_α *ont une limite finie en* $+\infty$ *et la calculer.*
   (d) *Montrer que, pour tout réel* $\alpha \leq 0$, *les fonctions* f_α *et* g_α *n'ont pas de limite en* $+\infty$.
   (e) *Calculer les intégrales* $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(\ln(t))}{t^\alpha} dt$ *et* $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(\ln(t))}{t^\alpha} dt$ *pour* $\alpha > 1$.
   (f) *Montrer que, pour tout réel* $\alpha \leq 1$, *les intégrales* $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(\ln(t))}{t^\alpha} dt$ *et* $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(\ln(t))}{t^\alpha} dt$ *sont divergentes.*
3. *Soit* f *une fonction de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur l'intervalle* $[1, +\infty[$ *à valeurs réelles ou complexes. On dira que la fonction* f *vérifie l'hypothèse* $(\mathcal{H})$ *si l'intégrale* $\int_1^{+\infty} f'(t)\, dt$ *est absolument convergente.*
On se donne une fonction f *qui vérifie l'hypothèse* $(\mathcal{H})$ *et on associe à cette fonction la suite* $(u_n)_{n\geq 1}$ *définie par :*

$$\forall n \geq 1,\ u_n = \int_n^{n+1} (n + 1 - t) f'(t)\, dt$$

   (a) *Montrer que la série* $\sum u_n$ *est absolument convergente.*

(b) *Montrer que pour tout entier* $n \geq 1$ *et tout réel* $x \in]n, n+1]$, *on a :*

$$\int_n^x (x-t) f'(t)\,dt = \int_n^x f(t)\,dt - (x-n) f(n).$$

(c) *En déduire que :*

$$\forall n \geq 1,\ u_n = \int_n^{n+1} f(t)\,dt - f(n).$$

(d) *Montrer que les séries* $\sum f(n)$ *et* $\sum \int_n^{n+1} f(t)\,dt$ *sont de même nature.*

(e) *Montrer que si l'intégrale* $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ *converge, il en est alors de même de la série* $\sum f(n)$.

(f) *Montrer que si la série* $\sum f(n)$ *converge, il en est alors de même de l'intégrale* $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$.

En définitive la série $\sum f(n)$ *est de même nature que l'intégrale* $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$.

4.

(a) *Montrer que, pour tout réel* $\alpha > 0$, *la fonction* f_α *vérifie l'hypothèse* $(\mathcal{H})$.

(b) *Étudier la série* $\dfrac{\cos(\ln(n))}{n^\alpha}$ *pour tout réel* $\alpha > 0$.

5. *Étudier la série* $\sum \dfrac{\cos(\sqrt{n})}{n}$.

Solution 13.37

1. *Résulte de* $\left|\dfrac{\varphi(\ln(t))}{t^\alpha}\right| \leq \dfrac{1}{t^\alpha}$ *où* $\varphi \in \{\cos, \sin\}$ *avec* $\alpha > 1$.

2.

(a) *On a, pour tout réel* α *:*

$$\begin{aligned} f'_{\alpha-1}(t) &= \frac{d}{dt}\left(t^{1-\alpha}\cos(\ln(t))\right) = -\frac{\sin(\ln(t))}{t^\alpha} + (1-\alpha)\frac{\cos(\ln(t))}{t^\alpha} \\ &= -g_\alpha(t) + (1-\alpha) f_\alpha(t) \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} g'_{\alpha-1}(t) &= \frac{d}{dt}\left(t^{1-\alpha}\sin(\ln(t))\right) = \frac{\cos(\ln(t))}{t^\alpha} + (1-\alpha)\frac{\sin(\ln(t))}{t^\alpha} \\ &= f_\alpha(t) + (1-\alpha) g_\alpha(t) \end{aligned}$$

(b) *Il en résulte que :*

$$(1-\alpha) f'_{\alpha-1}(t) + g'_{\alpha-1}(t) = \left(1 + (1-\alpha)^2\right) f_\alpha(t)$$

et :

$$(1-\alpha) g'_{\alpha-1}(t) - f'_{\alpha-1}(t) = \left(1 + (1-\alpha)^2\right) g_\alpha(t)$$

On obtient alors par intégration :

$$\begin{aligned}\left(1+(1-\alpha)^2\right)\int_1^x f_\alpha(t)\,dt &= \int_1^x \left((1-\alpha)\,f'_{\alpha-1}(t)+g'_{\alpha-1}(t)\right)dt\\ &= (1-\alpha)\left(f_{\alpha-1}(x)-f_{\alpha-1}(1)\right)+g_{\alpha-1}(x)-g_{\alpha-1}(1)\\ &= (1-\alpha)\left(f_{\alpha-1}(x)-1\right)+g_{\alpha-1}(x)\end{aligned}$$

soit :

$$\int_1^x \frac{\cos(\ln(t))}{t^\alpha}dt = \frac{1}{1+(1-\alpha)^2}\left(\frac{\sin(\ln(x))+(1-\alpha)\cos(\ln(x))}{x^{\alpha-1}}+\alpha-1\right)$$

et :

$$\begin{aligned}\left(1+(1-\alpha)^2\right)\int_1^x g_\alpha(t)\,dt &= \int_1^x \left((1-\alpha)\,g'_{\alpha-1}(t)-f'_{\alpha-1}(t)\right)dt\\ &= (1-\alpha)\left(g_{\alpha-1}(x)-g_{\alpha-1}(1)\right)-\left(f_{\alpha-1}(x)-f_{\alpha-1}(1)\right)\\ &= (1-\alpha)\,g_{\alpha-1}(x)+1-f_{\alpha-1}(x)\end{aligned}$$

soit :

$$\int_1^x \frac{\sin(\ln(t))}{t^\alpha}dt = \frac{1}{1+(1-\alpha)^2}\left(1+\frac{(1-\alpha)\sin(\ln(x))-\cos(\ln(x))}{x^{\alpha-1}}\right)$$

(c) *Avec* $|f_\alpha(x)| \leq \dfrac{1}{x^\alpha}$ *et* $|g_\alpha(x)| \leq \dfrac{1}{x^\alpha}$, *on déduit que* $\lim\limits_{x\to+\infty} f_\alpha(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g_\alpha(x) = 0$ *pour* $\alpha > 0$.

(d) *La suite* $(f_0(e^{n\pi}))_{n\geq 0} = ((-1)^n)_{n\geq 0}$ *étant divergente avec* $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{n\pi} = +\infty$, *on en déduit que* f_0 *n'a pas de limite à l'infini.*
De même, pour $\alpha < 0$, *la divergence de la suite* $(f_\alpha(e^{2n\pi}))_{n\geq 0} = (e^{-2\alpha n\pi})_{n\geq 0}$ *nous dit que* f_α *n'a pas de limite à l'infini.*
Pour g_α, *on utilise le même argument avec les suites* $\left(e^{\frac{\pi}{2}+n\pi}\right)_{n\geq 0}$ *pour* $\alpha = 0$ *et* $\left(e^{\frac{\pi}{2}+2n\pi}\right)_{n\geq 0}$ *pour* $\alpha < 0$.

(e) *Pour* $\alpha > 1$, $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos(\ln(t))}{t^\alpha}dt$ *et* $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin(\ln(t))}{t^\alpha}dt$ *sont absolument convergentes et :*

$$\int_1^{+\infty}\frac{\cos(\ln(t))}{t^\alpha}dt = \frac{\alpha-1}{1+(\alpha-1)^2} = \frac{\alpha-1}{\alpha^2-2\alpha+2}$$

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin(\ln(t))}{t^\alpha}dt = \frac{1}{1+(\alpha-1)^2} = \frac{1}{\alpha^2-2\alpha+2}$$

(f) *Pour* $\alpha \leq 1$, *la fonction*

$$\varphi_\alpha(x) = \frac{\sin(\ln(x))+(1-\alpha)\cos(\ln(x))}{x^{\alpha-1}} = g_{\alpha-1}(x)+(1-\alpha)\,f_{\alpha-1}(x)$$

n'a pas de limite à l'infini puisque la suite $\left(\varphi\left(e^{\frac{\pi}{2}+n\pi}\right)\right)_{n\geq 0} = \left((-1)^n e^{(1-\alpha)\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)}\right)_{n\geq 0}$ *est divergente, donc l'intégrale* $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos(\ln(t))}{t^\alpha}dt$ *est divergente.*
On vérifie de manière analogue que $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin(\ln(t))}{t^\alpha}dt$ *est divergente.*

3.

(a) *Pour* $n \geq 1$, *on a :*

$$|u_n| \leq \int_n^{n+1} (n+1-t) |f'(t)| \, dt \leq \int_n^{n+1} |f'(t)| \, dt$$

avec :

$$\sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} |f'(t)| \, dt = \int_1^{n+1} |f'(t)| \, dt \underset{n \to +\infty}{\to} \int_1^{+\infty} |f'(t)| \, dt < +\infty.$$

Il en résulte que la série $\sum \int_n^{n+1} |f'(t)| \, dt$ *est convergente et la série* $\sum u_n$ *est absolument convergente.*

(b) *Pour* $n \geq 1$ *et* $x \in \left]n, n+1\right]$, *une intégration par parties donne :*

$$\begin{aligned}\int_n^x (x-t) f'(t) \, dt &= [(x-t) f(t)]_n^x + \int_n^x f(t) \, dt \\ &= \int_n^x f(t) \, dt - (x-n) f(n)\end{aligned}$$

(c) *Il suffit de prendre* $x = n+1$.

(d) *Avec :*

$$f(n) = \int_n^{n+1} f(t) \, dt - u_n$$

et la convergence de $\sum u_n$, *on déduit que les séries* $\sum f(n)$ *et* $\sum \int_n^{n+1} f(t) \, dt$ *sont de même nature.*

(e) *Si l'intégrale* $\int_1^{+\infty} f(t) \, dt$ *converge, il en est alors de même de la série* $\sum \int_n^{n+1} f(t) \, dt$. *En effet, en posant* $F(x) = \int_1^x f(t) \, dt$, *cela se déduit de :*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} f(t) \, dt = F(n+1).$$

Il en résulte que $\sum f(n)$ *converge.*

(f) *Supposons que* $\sum f(n)$ *converge.*
Pour $x > 2$ *et* $n = [x]$, *on a* $2 \leq n \leq x < n+1$ *et :*

$$\begin{aligned}F(x) = \int_1^x f(t) \, dt &= F(n) + \int_n^x f(t) \, dt \\ &= S_{n-1} + \int_n^x (x-t) f'(t) \, dt + (x-n) f(n)\end{aligned}$$

avec :

$$\left| \int_n^x (x-t) f'(t) \, dt \right| \leq \int_n^x (x-t) |f'(t)| \, dt \leq \int_n^{n+1} |f'(t)| \, dt \underset{x \to +\infty}{\to} 0$$

($x \to +\infty$ entraîne $n = [x] \to +\infty$) puisque $\displaystyle\int_1^{+\infty} |f'(t)|\,dt$ *et* $\displaystyle\sum \int_n^{n+1} |f'(t)|\,dt$ *convergent (elles sont de même nature) et :*

$$|(x-n)\,f(n)| \leq |f(n)| \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

puisque $\sum f(n)$ *converge.*
La convergence de $\sum f(n)$ *nous assure celle de* $\displaystyle\sum \int_n^{n+1} f(t)\,dt$, *donc celle de la suite* $(S_n)_{n\geq 1}$ *et notant* S *la limite de cette suite, on déduit de ce qui précède que* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = S$, *ce qui signifie que* $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ *converge.*

4.
   (a) *On a vu que pour tout réel* α, *la fonction* f_α *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $[1,+\infty[$ *avec :*

$$f'_\alpha = -g_{\alpha+1}(t) - \alpha f_{\alpha+1}(t)$$

   et pour $\alpha > 0$, *la convergence absolue des intégrales* $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_{\alpha+1}(t)\,dt$ *et* $\displaystyle\int_1^{+\infty} g_{\alpha+1}(t)\,dt$ *entraîne celle de* $\displaystyle\int_1^{+\infty} f'_\alpha(t)\,dt$.

   (b) *Pour* $\alpha > 0$, *les séries* $\displaystyle\sum \frac{\cos(\ln(n))}{n^\alpha}$ *et* $\displaystyle\sum \frac{\sin(\ln(n))}{n^\alpha}$ *sont de même nature que les intégrales* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(\ln(t))}{t^\alpha}dt$ *et* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(\ln(t))}{t^\alpha}dt$, *c'est-à-dire divergentes pour* $0 < \alpha \leq 1$ *et convergentes pour* $\alpha > 1$ *(en fait pour* $\alpha > 1$, *on vérifie directement que ces séries sont absolument convergentes).*

5. *On désigne par* f *la fonction définie sur* $[1,+\infty[$ *par :*

$$\forall t \geq 1,\ f(t) = \frac{\cos\left(\sqrt{t}\right)}{t}.$$

On a :

$$\forall t \geq 1,\ |f'(t)| = \left| -\frac{\sin\left(\sqrt{t}\right)}{2t^{\frac{3}{2}}} - \frac{\cos\left(\sqrt{t}\right)}{t^2} \right| \leq \frac{1}{2t^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{t^2}$$

d'où la convergence absolue de $\displaystyle\int_1^{+\infty} f'(t)\,dt$.

L'hypothèse $(\mathcal{H})$ *est donc vérifiée pour* f *et la série* $\displaystyle\sum \frac{\cos\left(\sqrt{n}\right)}{n}$ *est de même nature que l'intégrale* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos\left(\sqrt{t}\right)}{t}dt$.
Pour $x > 1$, *le changement de variable* $t = u^2$ *nous donne :*

$$F(x) = \int_1^x \frac{\cos\left(\sqrt{t}\right)}{t}dt = 2\int_1^{\sqrt{x}} \frac{\cos(u)}{u}du \underset{x\to+\infty}{\to} 2\int_1^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u}du$$

(on sait que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u}du$ *est semi-convergente), ce qui signifie que l'intégrale* $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ *converge. Il en résulte que* $\displaystyle\sum \frac{\cos\left(\sqrt{n}\right)}{n}$ *est convergente.*

13.7 Un théorème d'Abel

Le théorème de Cauchy pour les intégrales généralisées (théorème 13.11) et la deuxième formule de la moyenne pour les intégrales définies (théorème 11.22 et la remarque qui suit ce théorème) nous permettent de montrer les résultats suivants.

Théorème 13.21 (Abel) *Soient f, g des fonctions continues par morceaux sur $[a, b[$ telles que :*

1. *f est décroissante à valeurs positives sur $[a, b[$;*
2. *l'intégrale $\int_a^b g(t)\,dt$ est convergente.*

Dans ces condition, l'intégrale $\int_a^b f(t)\,g(t)\,dt$ est convergente.

Démonstration. La seconde formule de la moyenne nous permet d'écrire pour $u < v$ dans $[a, b[$:

$$\int_u^v f(t)\,g(t)\,dt = f(u)\int_u^w g(t)\,dt$$

où $w \in [u, v]$. Comme f est décroissante positive, on en déduit que :

$$\left|\int_u^v f(t)\,g(t)\,dt\right| \leq f(a)\left|\int_u^w g(t)\,dt\right|$$

et comme $\int_a^b g(t)\,dt$ est convergente, pour tout réel $\varepsilon > 0$, on peut trouver un réel $c \in [a, b[$ tel que :

$$(c < u < w < b) \Rightarrow \left|\int_u^w g(t)\,dt\right| \leq \varepsilon$$

ce qui entraîne :

$$\left|\int_u^v f(t)\,g(t)\,dt\right| \leq \varepsilon$$

pour $c < u < v < b$ et la convergence de $\int_a^b f(t)\,g(t)\,dt$ d'après le théorème de Cauchy. ■

Théorème 13.22 (Abel) *Soient f, g des fonctions continues par morceaux sur $[a, b[$ telles que :*

1. *f est décroissante à valeurs positives sur $[a, b[$ avec $\lim_{x\to b} f(x) = 0$;*
2. *il existe un réel $M > 0$ tel que :*

$$\forall x \in [a, b[\,, \quad \left|\int_a^x g(t)\,dt\right| \leq M$$

Dans ces condition, l'intégrale $\int_a^b f(t)\,g(t)\,dt$ est convergente.

Démonstration. La seconde formule de la moyenne nous permet d'écrire pour $u < v$ dans $[a, b[$:

$$\int_u^v f(t) g(t) dt = f(u) \int_u^w g(t) dt$$

où $w \in [u, v]$. Comme f est positive et $\lim\limits_{x \to b} f(x) = 0$, pour tout réel $\varepsilon > 0$, on peut trouver un réel $c \in [a, b[$ tel que :

$$(c < u < b) \Rightarrow 0 \leq f(u) \leq \varepsilon$$

ce qui entraîne pour $c < u < v < b$:

$$\left| \int_u^v f(t) g(t) dt \right| \leq \varepsilon \left| \int_u^w g(t) dt \right|$$

avec :

$$\left| \int_u^w g(t) dt \right| = \left| \int_a^w g(t) dt - \int_a^u g(t) dt \right| \leq 2M.$$

On a donc $\left| \int_u^v f(t) g(t) dt \right| \leq 2M\varepsilon$ pour $c < u < v < b$ et la convergence de $\int_a^b f(t) g(t) dt$ s'en déduit du théorème de Cauchy. ∎

Remarque 13.8 *En reprenant les notations de la démonstration du théorème d'Abel qui précède, on a pour tout $x \in [a, b[$:*

$$\left| \int_x^v f(t) g(t) dt \right| = f(x) \left| \int_x^w g(t) dt \right| \leq 2M f(x)$$

et faisant tendre v vers b, on en déduit que :

$$\forall x \in [a, b[, \ \left| \int_x^b f(t) g(t) dt \right| \leq 2M f(x)$$

Exercice 13.38 *Montrer que si $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est une fonction continue par morceaux, décroissante et telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, alors pour tout réel λ non nul, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) e^{i\lambda t} dt$ est convergente.*

Solution 13.38 *Pour tout réel $x > 0$, on a :*

$$\left| \int_0^x e^{i\lambda t} dt \right| = \frac{1}{|\lambda|} \left| e^{i\lambda x} - 1 \right| \leq \frac{2}{|\lambda|}$$

La fonction f étant décroissante sur $\mathbb{R}^+$, on déduit du théorème d'Abel que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) e^{i\lambda t} dt$ est convergente pour tout réel $\alpha > 0$ et tout réel $\lambda \neq 0$.

Exercice 13.39 *Le but de l'exercice est de déterminer la nature de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{e^{i\lambda t}}{t^\alpha} dt$ suivant les valeurs des nombres réels α et λ.*

1. *Traiter le cas $\lambda = 0$.*
   On suppose, dans les questions suivantes, que $\lambda \neq 0$.
2. *Montrer que, si $\alpha > 1$, alors $\int_1^{+\infty} \frac{e^{i\lambda t}}{t^\alpha} dt$ est absolument convergente.*

3. *Montrer que, si* $0 < \alpha \leq 1$, *alors* $\int_1^{+\infty} \frac{e^{i\lambda t}}{t^\alpha} dt$ *est semi-convergente.*
4. *Montrer que, si* $\alpha \leq 0$, *alors* $\int_1^{+\infty} \frac{e^{i\lambda t}}{t^\alpha} dt$ *est divergente.*
5. *Montrer que, si* $0 < \alpha \leq 1$, *alors les intégrales* $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(\lambda t)}{t^\alpha} dt$ *et* $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(\lambda t)}{t^\alpha} dt$ *sont semi-convergentes.*
6. *Montrer que* $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t} dt$ *est divergente.*
7. *Montrer que les deux fonctions* f *et* g *définies sur* $[1, +\infty[$ *par* $f(t) = \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}$ *et* $g(t) = \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} + \frac{\sin^2(t)}{t}$ *sont équivalentes au voisinage de* $+\infty$. *À quelle propriété, cette question fournit-elle un contre-exemple ?*

Solution 13.39

1. *Pour* $\lambda = 0$, *l'intégrale* $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ *converge si, et seulement si,* $\alpha > 1$. *Pour* $\alpha > 1$, *on a alors :*
$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}.$$
2. *Pour tout réel* $t \geq 1$, *on a* $\left|\frac{e^{i\lambda t}}{t^\alpha}\right| = \frac{1}{t^\alpha}$, *donc* $\int_1^{+\infty} \frac{e^{i\lambda t}}{t^\alpha} dt$ *est absolument convergente pour* $\alpha > 1$.
3. *Pour tout réel* $x > 1$, *on a :*
$$\left|\int_1^x e^{i\lambda t} dt\right| = \frac{1}{|\lambda|} \left|e^{i\lambda x} - e^{i\lambda}\right| \leq \frac{2}{|\lambda|}$$
La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ *étant décroissante sur* $[1, +\infty[$ *pour* $\alpha > 0$, *on déduit du théorème d'Abel que l'intégrale* $\int_1^{+\infty} \frac{e^{i\lambda t}}{t^\alpha} dt$ *est convergente pour tout réel* $\alpha > 0$ *et tout réel* $\lambda \neq 0$.
Pour $0 < \alpha \leq 1$, *on a* $\int_1^{+\infty} \left|\frac{e^{i\lambda t}}{t^\alpha}\right| dt = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = +\infty$, *donc l'intégrale est semi-convergente dans ce cas.*
4. *Par conjugaison complexe, on voit que* $\int_1^{+\infty} \frac{e^{i\lambda t}}{t^\alpha} dt$ *est convergente si, et seulement si,* $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-i\lambda t}}{t^\alpha} dt$ *l'est. Il en résulte que* $\int_1^{+\infty} \frac{e^{i\lambda t}}{t^\alpha} dt$ *est convergente si, et seulement si, les intégrales* $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(\lambda t)}{t^\alpha} dt$ *et* $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(\lambda t)}{t^\alpha} dt$ *le sont.*
Pour montrer la divergence de $\int_1^{+\infty} \frac{e^{i\lambda t}}{t^\alpha} dt$ *pour* $\alpha \leq 0$, *il suffit donc de montrer celle de* $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(\lambda t)}{t^\alpha} dt$. *Tenant compte de la parité de la fonction* cos, *on peut supposer que* $\lambda > 0$.

Soit donc $\alpha = -\beta$ *un réel négatif ou nul,* λ *un réel strictement positif et* F *la fonction définie sur* $[1, +\infty[$ *par :*

$$F(x) = \int_1^x \frac{\cos(\lambda t)}{t^\alpha} dt = \int_1^x t^\beta \cos(\lambda t)\, dt$$

En désignant par $(x_n)_{n\geq 1}$ *la suite définie par* $x_n = \dfrac{2n\pi}{\lambda}$*, on a :*

$$F\left(x_n + \frac{\pi}{2\lambda}\right) - F(x_n) = \int_{x_n}^{x_n + \frac{\pi}{2\lambda}} t^\beta \cos(\lambda t)\, dt$$

et le changement de variable $t = x_n + u$*, nous donne :*

$$\begin{aligned} F\left(x_n + \frac{\pi}{2\lambda}\right) - F(x_n) &= \int_0^{\frac{\pi}{2\lambda}} (x_n + u)^\beta \cos(\lambda(x_n + u))\, du \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2\lambda}} (x_n + u)^\beta \cos(\lambda u)\, du \end{aligned}$$

Mais pour $0 \leq u \leq \dfrac{\pi}{2\lambda}$*, on a* $0 \leq \lambda u \leq \dfrac{\pi}{\lambda}$ *et* $\cos(\lambda u) \geq 0$*, de sorte que :*

$$F\left(x_n + \frac{\pi}{2\lambda}\right) - F(x_n) \geq x_n^\beta \int_0^{\frac{\pi}{2\lambda}} \cos(\lambda u)\, du = \frac{x_n^\beta}{\lambda} \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$$

et F *ne peut avoir de limite finie en* $+\infty$*, ce qui signifie que* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(\lambda t)}{t^\alpha} dt$*. diverge.*

5. *On sait déjà que les intégrales* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(\lambda t)}{t^\alpha} dt$ *et* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(\lambda t)}{t^\alpha} dt$ *sont convergentes pour tout réel* $\alpha > 0$ *et tout réel* λ*. Par parité, on peut supposer que* $\lambda > 0$*.*
On note F *la fonction définie sur* $[1, +\infty[$ *par :*

$$F(x) = \int_1^x \frac{|\cos(\lambda t)|}{t^\alpha} dt$$

et $(x_n)_{n\geq 1}$ *est la suite définie par* $x_n = \dfrac{2n\pi}{\lambda}$*. Pour* $\alpha > 0$*, on a :*

$$\begin{aligned} F\left(x_n + \frac{\pi}{2\lambda}\right) - F(x_n) &= \int_0^{\frac{\pi}{2\lambda}} \frac{|\cos(\lambda(x_n + u))|}{(x_n + u)^\alpha} du = \int_0^{\frac{\pi}{2\lambda}} \frac{\cos(\lambda u)}{(x_n + u)^\alpha} du \\ &\geq \frac{1}{\left(x_n + \frac{\pi}{2\lambda}\right)^\alpha} \int_0^{\frac{\pi}{2\lambda}} \cos(\lambda u)\, du = \frac{1}{\lambda\left(\frac{2n\pi}{\lambda} + \frac{\pi}{2\lambda}\right)^\alpha} \end{aligned}$$

Pour $0 < \alpha \leq 1$*, on a* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\left(2n\pi + \frac{\pi}{2\lambda}\right)^\alpha} = +\infty$ *et donc :*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(F\left(x_n + \frac{\pi}{2\lambda}\right) - F(x_n)\right) = +\infty$$

Avec :

$$\sum_{k=1}^{n}\left(F\left(x_k+\frac{\pi}{2\lambda}\right)-F\left(x_k\right)\right)=\sum_{k=1}^{n}\int_{x_k}^{x_k+\frac{\pi}{2\lambda}}\frac{\left|\cos\left(\lambda t\right)\right|}{t^{\alpha}}dt$$
$$\leq\int_{1}^{x_n+\frac{\pi}{2\lambda}}\frac{\left|\cos\left(\lambda t\right)\right|}{t^{\alpha}}dt=F\left(x_n+\frac{\pi}{2\lambda}\right)$$

on déduit que $\lim_{n\to+\infty}F\left(x_n+\frac{\pi}{2\lambda}\right)=+\infty$ *et l'intégrale* $\int_1^{+\infty}\frac{\left|\cos\left(\lambda t\right)\right|}{t^{\alpha}}dt$ *est divergente pour* $0<\alpha\leq 1$.

On procède de manière analogue pour $\int_1^{+\infty}\frac{\left|\cos\left(\lambda t\right)\right|}{t^{\alpha}}dt$.

6. *Pour tout réel* t, *on a :*

$$\frac{\sin^2 t}{t}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t}-\frac{\cos\left(2t\right)}{t}\right)$$

Comme $\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2t}{t}dt$ *est convergente et* $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t}dt$ *est divergente, on en déduit que* $\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 t}{t}dt$ *est divergente.*

7. *Avec :*

$$g\left(t\right)=\frac{\sin\left(t\right)}{\sqrt{t}}\left(1+\frac{\sin\left(t\right)}{\sqrt{t}}\right)$$

et $\lim_{t\to+\infty}\frac{\sin\left(t\right)}{\sqrt{t}}=0$, *on déduit que* $f\left(t\right)\underset{+\infty}{\backsim}g\left(t\right)$. *Et on a ici* $\int_1^{+\infty}f\left(t\right)dt$ *convergente et* $\int_1^{+\infty}g\left(t\right)dt$ *divergente.*

Exercice 13.40 *Soient* a *et* α *deux nombres réels strictement positifs et* f *une fonction continue,* α*-périodique. Posons* $I(\lambda)=\int_a^{+\infty}\frac{\lambda-f\left(t\right)}{t}dt$ *lorsqu'elle existe. Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe un unique* λ *tel que* $I\left(\lambda\right)$ *est une intégrale convergente.*

1. *Montrer qu'il existe, au plus, un* λ *tel que* $I\left(\lambda\right)$ *converge.*
2. *À l'aide d'une intégration par parties, exprimer* $\int_a^{x}\frac{\lambda-f\left(t\right)}{t}dt$ *en fonction de* $G_\lambda(x)=\int_a^x(\lambda-f\left(t\right))dt$.
3. *Montrer que, si* G_λ *est borné, alors* $I\left(\lambda\right)$ *est convergente.*
4. *Pour tout nombre entier* n, *calculer* $G_\lambda\left(n\alpha+a\right)$ *en fonction de* $\int_0^{\alpha}f\left(t\right)dt$. *En déduire la valeur de* λ *pour laquelle* G_λ *est bornée.*
5. *Retrouver, à l'aide d'une transformation d'Abel, que, si* G_λ *est borné, alors* $I\left(\lambda\right)$ *est convergente.*

Solution 13.40 *Laissée au lecteur.*

13.8 Exercices supplémentaires

Exercice 13.41 *Soit a un réel strictement positif.*

1. *Justifier la convergence de* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{a^2+x^2}dx$.
2. *Exprimer* $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\ln(x)}{a^2+x^2}dx$ *en fonction de* $\displaystyle\int_0^{a} \frac{\ln(x)}{a^2+x^2}dx$ *(on peut utiliser le changement de variable* $x=\dfrac{a^2}{t}$*).*
3. *En déduire la valeur de* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{a^2+x^2}dx$.

Solution 13.41

1. *Au voisinage de* 0, *on a* $\dfrac{\ln(t)}{a^2+t^2} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{\ln(t)}{a^2} < 0$, *l'intégrale* $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,dt$ *étant convergente, il en résulte que* $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{a^2+t^2}dt$ *converge.*

   Avec $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^{\frac{3}{2}}\frac{\ln(t)}{a^2+t^2} = 0$ *et la positivité de la fonction pour* $t>1$, *on déduit que* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{a^2+t^2}dt$ *converge.*
2. *Le changement de variable* $x=\dfrac{a^2}{t}$ *donne :*

$$\int_a^{+\infty} \frac{\ln(x)}{a^2+x^2}dx = \int_a^0 \frac{\ln(a^2)-\ln(t)}{a^2+\dfrac{a^4}{t^2}}\left(-\frac{a^2}{t^2}\right)dt$$

$$= \int_0^a \frac{\ln(a^2)-\ln(t)}{t^2+a^2}dt = \ln\left(a^2\right)\int_0^a \frac{dt}{t^2+a^2} - \int_0^a \frac{\ln(t)}{t^2+a^2}dt$$

$$= \frac{\ln(a^2)}{a^2}\int_0^a \frac{dt}{1+\frac{t^2}{a^2}} - \int_0^a \frac{\ln(t)}{t^2+a^2}dt$$

$$= \frac{\ln(a^2)}{a}\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} - \int_0^a \frac{\ln(t)}{t^2+a^2}dt = \frac{\pi}{2}\frac{\ln(a)}{a} - \int_0^a \frac{\ln(t)}{t^2+a^2}dt$$

3. *On a :*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{a^2+x^2}dx = \int_0^a \frac{\ln(x)}{a^2+x^2}dx + \int_a^{+\infty} \frac{\ln(x)}{a^2+x^2}dx = \frac{\pi}{2}\frac{\ln(a)}{a}.$$

Cinquième partie

Suites et séries de fonctions

14

Séries entières

Nous faisons ici l'étude des séries entières réelles ou complexes sans référence aux séries de fonctions qui seront étudiées plus loin. Avec les exercices 3.32 et 6.34 nous avons déjà rencontré la fonction exponentielle complexe définie comme somme d'une série entière.

14.1 Rayon de convergence d'une série entière

On appelle série entière toute série numérique de la forme $\sum a_n z^n$, où $(a_n)_{n \geq n_0}$ est une suite donnée de nombres complexes.

Comme pour l'étude des séries numériques, on supposera, a priori, que $n_0 = 0$.

On peut remarquer qu'une série entière converge pour $z = 0$.

En désignant par D l'ensemble des nombres complexes z pour lesquels la série $\sum a_n z^n$ est convergente, on note pour tout z dans D, $f(z)$ la somme de cette série, soit :

$$\forall z \in D,\ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

et on définit ainsi une fonction de D dans $\mathbb{C}$.

L'ensemble D est appelé domaine de convergence de la séries entière. Cet ensemble est non vide puisqu'il contient toujours 0.

Dans le cas où les coefficients a_n sont tous nuls à partir d'un rang $p+1$, la série est convergente pour tout nombre complexe z et sa somme est la fonction polynomiale définie par :

$$f(z) = \sum_{k=0}^{p} a_k z^k.$$

On peut donc voir une série entière comme un polynôme de degré au plus infini.

Exercice 14.1 *Déterminer les domaines de convergence des séries entières* $\sum n! z^n$, $\sum n^n z^n$, $\sum z^n$, $\sum \frac{z^n}{n}$ *et* $\sum \frac{z^n}{n!}$.

Solution 14.1 *Pour* $a_n = n!$ *et* $z \neq 0$ *on a :*

$$\frac{|a_{n+1} z^{n+1}|}{|a_n z^n|} = (n+1)|z| \underset{n \to +\infty}{\to} +\infty$$

ce qui entraîne $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n z^n| = +\infty$ *et la divergence de* $\sum a_n z^n$ *(son terme général ne tend pas vers* 0*). Il en résulte que le domaine de convergence de* $\sum n! z^n$ *est* $D = \{0\}$*.*
Pour $a_n = n^n$ *et* $z \neq 0$ *on a :*

$$\frac{|a_{n+1} z^{n+1}|}{|a_n z^n|} = (n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n |z| \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$$

ce qui entraîne $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n z^n| = +\infty$ *(exercice 3.19) et la divergence de* $\sum a_n z^n$ *(son terme général ne tend pas vers* 0*). Il en résulte que le domaine de convergence de* $\sum n! z^n$ *est* $D = \{0\}$*.*
On sait que la série géométrique $\sum z^n$ *est convergente si, et seulement si,* $|z| < 1$ *(exercice 6.1), ce qui signifie que son domaine de convergence est le disque unité ouvert* $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$*.*
Pour $a_n = \dfrac{1}{n}$ *et* $z \neq 0$ *on a :*

$$\frac{|a_{n+1} z^{n+1}|}{|a_n z^n|} = \frac{n}{n+1} |z| \underset{n\to+\infty}{\to} |z|.$$

Si $|z| < 1$ *le théorème de d'Alembert nous dit alors que la série* $\sum \dfrac{z^n}{n}$ *converge absolument. Si* $|z| > 1$*, on a* $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n z^n| = +\infty$ *et la série* $\sum \dfrac{z^n}{n}$ *diverge. Si* $|z| = 1$*, on a alors* $z = e^{it}$ *avec* $t \in [0, 2\pi[$ *et le théorème d'Abel nous dit que la série* $\sum \dfrac{z^n}{n} = \sum \dfrac{e^{int}}{n}$ *diverge uniquement pour* $t = 0$*, soit pour* $z = 1$ *(exercice 6.25). En définitive, le domaine de convergence de* $\sum \dfrac{z^n}{n}$ *est le disque unité fermé privé de* 1*, soit* $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\} \setminus \{1\}$*.*
La série $\sum \dfrac{z^n}{n!}$ *étant absolument convergente pour tout nombre complexe* z *(exercice 6.34), son domaine de convergence est* $D = \mathbb{C}$*.*

Exercice 14.2 *Déterminer les domaines de convergence des séries entières* $\sum \dfrac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$ *et* $\sum \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$.

Solution 14.2 *En posant* $u_n = \left|\dfrac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}\right|$*, on a pour* $z \neq 0$ *:*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|z|^2}{(2n+2)(2n+1)} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

et le théorème de d'Alembert nous dit alors que la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$ *est absolument convergente. Son domaine de convergence est* $D = \mathbb{C}$*.*
Le résultat est le même pour la deuxième série.

Nous allons voir que de manière générale, que le domaine de convergence d'une série entière est $\mathbb{C}$ tout entier ou un disque ouvert de rayon $R \geq 0$ éventuellement complété par des points du bord de ce disque.

Pour tout réel $R > 0$, on note respectivement $D(0,R)$ et $\overline{D(0,R)}$ les disques ouvert et fermé de centre 0 et de rayon R, soit :

$$D(0,R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\} \text{ et } \overline{D(0,R)} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R\}$$

Théorème 14.1 (Abel) *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. S'il existe un scalaire non nul z_0 tel que la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée, alors la série entière $\sum a_n z^n$ converge absolument pour tout nombre complexe z tel que $|z| < |z_0|$.*

Démonstration. Il suffit d'écrire que pour tout entier naturel n et tout nombre complexe z tel que $|z| < |z_0|$, on a :

$$|a_n z^n| = |a_n z^n| \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \leq M \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$$

où M est un majorant de la suite $(|a_n z_0^n|)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left|\frac{z}{z_0}\right| < 1$. La série géométrique $\sum \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$ étant convergente puisque $\left|\frac{z}{z_0}\right| < 1$, on en déduit la convergence de $\sum |a_n z^n|$. ■

Comme conséquence de ce théorème, on déduit que si une série entière converge en un point z_0, elle converge alors absolument sur tout le disque ouvert de centre 0 et de rayon $|z_0|$.

En fait ce théorème peut aussi s'interpréter comme suit.

Théorème 14.2 *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et I l'ensemble de réels défini par :*

$$I = \left\{r \in \mathbb{R}^+ \mid (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\right\}.$$

Cet ensemble I est un intervalle qui est soit réduit à $\{0\}$, soit de la forme $[0, R]$ ou $[0, R[$ avec $R > 0$, soit égal à $\mathbb{R}^+$ tout entier.

Démonstration. Comme une série entière converge pour $z = 0$, I est non vide du fait qu'il contient 0. S'il est réduit à $\{0\}$ c'est terminé. On suppose donc que $I \neq \{0\}$.

Le théorème précédent nous dit que si $r > 0$ est dans I, alors I contient le segment $[0, r]$. En effet dire que $r \in I$ signifie que la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et le théorème d'Abel nous dit alors que pour tout réel $s \in [0, r[$, la série $\sum a_n s^n$ est convergente et la suite $(a_n s^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors vers 0, ce qui implique qu'elle est bornée et signifie que $s \in I$. L'ensemble I est donc un intervalle de $\mathbb{R}^+$ qui contient 0, il est donc nécessairement de la forme $[0, R]$ avec $R > 0$, ou $[0, R[$ avec $0 < R \leq +\infty$. ■

On peut donc poser :

$$R = \sup\left\{r \in \mathbb{R}^+ \mid (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\right\}$$

dans $\overline{\mathbb{R}^+} = \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ et I est un intervalle de $\mathbb{R}^+$ d'extrémité droite R.

Définition 14.1 *Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est l'élément de $\overline{\mathbb{R}^+}$ défini par :*

$$R = \sup\left\{r \in \mathbb{R}^+ \mid (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\right\}.$$

Remarque 14.1 *Si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, on aura $1 \in I$ et $R \geq 1$, dans le cas contraire $1 \notin I$ et $R \leq 1$.*

Théorème 14.3 *Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ de rayons de convergence respectifs R et R'.*

1. *Si $|a_n| \leq |b_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $R \geq R'$.*
2. *Si $a_n = O(b_n)$, alors $R \geq R'$.*
3. *Si $a_n \sim b_n$, alors $R = R'$.*

Démonstration.

1. Comme $|a_n| \leq |b_n|$ pour tout n, on a :
$$I' = \left\{r \in \mathbb{R}^+ \mid (b_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ bornée}\right\} \subset I = \left\{r \in \mathbb{R}^+ \mid (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ bornée}\right\}$$
et en conséquence $R' = \sup(I') \leq R = \sup(I)$.
2. Dire que $a_n = O(b_n)$ signifie que l'on a $a_n = \varphi_n b_n$ où $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée. Il existe donc un réel $M > 0$ tel que $|a_n| \leq M|b_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et en conséquence $R \geq R'$.
3. Dire que $a_n \sim b_n$ signifie que l'on a $a_n = \varphi_n b_n$ où $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de limite égale à 1, ce qui entraîne que $a_n = O(b_n)$ et $b_n = O(a_n)$ et $R = R'$.

■

Corollaire 14.1 *Si $\sum a_n z^n$ est une série entière telle qu'il existe deux réels strictement positifs m et M avec :*
$$\forall n \in \mathbb{N},\ m \leq |a_n| \leq M$$
alors le rayon de convergence de cette série vaut 1.

Démonstration. La série $\sum z^n$ étant de rayon de convergence égal à 1, il en est de même des séries $\sum mz^n$ et $\sum Mz^n$. Le premier point du théorème précédent nous dit alors que le rayon de convergence R de $\sum a_n z^n$ est tel que $R \leq 1$ et $R \geq 1$, il vaut donc 1. ■

Exercice 14.3 *Quel est le rayon de convergence de la série $\sum e^{\sin(n)} z^n$?*

Solution 14.3 *Avec $\frac{1}{e} \leq e^{\sin(n)} \leq e$, on déduit du corollaire précédent que le rayon de convergence de $\sum e^{\sin(n)} z^n$ vaut* 1.

Théorème 14.4 *En utilisant les notations qui précèdent :*

1. *dans le cas où $R > 0$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente pour tout z tel que $|z| < R$;*
2. *dans le cas où R est fini, les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum |a_n z^n|$ sont divergentes pour tout z tel que $|z| > R$*

Démonstration.

1. Pour $|z| < R$, tout réel r tel que $|z| < r < R$ est dans I et le théorème d'Abel nous dit que $\sum a_n z^n$ converge absolument.
2. Si $|z| > R$, alors $|z| \notin I$, alors la suite $(a_n |z|^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée, donc les suites $(a_n |z|^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne convergent pas vers 0 et les séries correspondantes divergent.

■

Remarque 14.2 *Réciproquement, si $R' \in \overline{\mathbb{R}^+}$ est tel que la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente pour tout z tel que $|z| < R'$ (dans le cas où $R' > 0$) et divergente pour $|z| > R'$ [resp. $\sum |a_n z^n|$ est divergente pour $|z| > R'$], alors R' est le rayon de convergence R de cette série. En effet, si $0 \leq r < R'$, alors $\sum a_n r^n$ est convergente et $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée car elle converge vers 0, donc $r \in I$. On a donc $[0, R'[\subset I$ et $R' \leq R$. Si $R' = +\infty$, nécessairement $R = +\infty$. Sinon, si $0 \leq r < R$, alors $\sum |a_n r^n|$ est convergente et r ne peut être strictement supérieur à R', donc $r \leq R'$, on a donc $[0, R[\subset [0, R']$ et $R \leq R'$. On a donc bien $R = R'$.*

Remarque 14.3 *Dans le cas où $R = 0$, le domaine de convergence D de la série est réduit à $\{0\}$, dans le cas où $R = +\infty$, c'est $\mathbb{C}$ tout entier et dans le cas où R est fini, tout ce que l'on peut dire est que $D(0,R) \subset D \subset \overline{D(0,R)}$.*

Exercice 14.4 *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Montrer que, pour tout entier $p \geq 2$, le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^{pn}$ est $+\infty$ si $R = +\infty$ ou $\sqrt[p]{R}$ si R est fini (on dit que la série $\sum a_n z^{pn}$ est lacunaire).*

Solution 14.4 *Si $R = +\infty$, alors $\sum a_n t^n$ converge pour tout nombre complexe t et donc pour tout les nombres complexes de la forme z^p.*
Si R est fini. Pour $|z| < \sqrt[p]{R}$, on a $|z|^p < R$ et $\sum a_n z^{pn}$ converge absolument. Pour $|z| > \sqrt[p]{R}$, on a $|z|^p > R$ et $\sum a_n z^{pn}$ diverge. Il en résulte que $\sqrt[p]{R}$ est le rayon de convergence de $\sum a_n z^{pn}$.

Exercice 14.5 *Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum (-1)^n z^{2n}$ et étudier la série pour $|z| = R$. Quelle est la somme de cette série ?*

Solution 14.5 *Le rayon de convergence de la série géométrique $\sum (-1)^n z^n$ valant 1, celui de $\sum (-1)^n z^{2n}$ est aussi 1 et pour $|z| < 1$, on a :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-1z^2\right)^n = \frac{1}{1+z^2}.$$

Pour $|z| = 1$, la série diverge car son terme général ne tend pas vers 0.

Exercice 14.6 *Montrer que si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres complexes telle qu'il existe un nombre complexe z_0 tel que la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée, alors la série entière $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$ a un rayon de convergence infini.*

Solution 14.6 *En désignant par M un majorant de la suite $(|a_n z_0^n|)_{n\in\mathbb{N}}$, on a pour tout nombre complexe z :*

$$\left|\frac{a_n}{n!} z^n\right| = |a_n z_0^n| \frac{1}{n!} \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \leq M \frac{1}{n!} \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$$

avec $\sum \frac{1}{n!} \left|\frac{z}{z_0}\right|^n < +\infty$ ($\sum \frac{t^n}{n!}$ converge pour tout t), ce qui entraîne la convergence absolue de $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$.

Exercice 14.7 *On désigne par $(p_n)_{n\geq 1}$ la suite strictement croissante des nombres premiers. Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum \frac{1}{p_n} z^{p_n}$.*

Solution 14.7 *Pour $z = 1$, cette série diverge, donc $R \leq 1$.*
Les coefficients de cette série sont définis par $a_n = \frac{1}{n}$ si n est premier et $a_n = 0$ sinon, donc, pour $r \geq 0$, la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée si, et seulement si la suite $\left(\frac{1}{p_n} r^{p_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée, ce qui est réalisé pour tout $r \in [0,1]$, donc $R \geq 1$ et $R = 1$.

Exercice 14.8 *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe bornée.*

1. *Que peut-on dire des rayons de convergence des séries* $\sum a_n z^n$ *et* $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$. *On note respectivement* $f(z)$ *et* $g(z)$ *les sommes de ces séries entières.*
2. *Montrer que pour tout réel* $x \in \left]0,1\right[$, *l'intégrale* $\int_0^{+\infty} g(t)\, e^{-\frac{t}{x}} dt$ *est convergente.*
3. *Montrer que* $\int_0^{+\infty} g(t)\, e^{-\frac{t}{x}} dt = x f(x)$ *pour tout réel* $x \in \left]0,1\right[$.

Solution 14.8 *On note* $M = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$.

1. *Comme la suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée, la série* $\sum a_n z^n$ *à un rayon de convergence* $R \geq 1$. *Par exemple pour* $a_n = \frac{1}{\rho^n}$ *avec* $\rho > 1$ *ce rayon de convergence est* $R = \rho$. *Avec* $\left|\frac{a_n}{n!}\right| \leq \frac{M}{n!}$, *on déduit que le rayon de convergence de la deuxième série est infini.*
2. *Pour* $x \in \left]0,1\right[$ *et* $t > 0$, *on a :*
$$\left|g(t)\, e^{-\frac{t}{x}}\right| = \left|\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} t^n e^{-\frac{t}{x}}\right| \leq M \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}\right) e^{-\frac{t}{x}} = M e^{t\left(1-\frac{1}{x}\right)}$$
et avec $\int_0^{+\infty} e^{t\left(1-\frac{1}{x}\right)} dt < +\infty$ *(on a* $1 - \frac{1}{x} < 0$*), on déduit que l'intégrale* $\int_0^{+\infty} g(t)\, e^{-\frac{t}{x}} dt$ *est absolument convergente.*
3. *Le changement de variable* $t = xu$ *donne :*
$$\int_0^{+\infty} g(t)\, e^{-\frac{t}{x}} dt = x \int_0^{+\infty} g(xu)\, e^{-u} du$$
et en notant :
$$R_n(z) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{a_k}{k!} z^k$$
on a :
$$\int_0^{+\infty} g(xu)\, e^{-u} du = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!} x^k \int_0^{+\infty} u^k e^{-u} du + \int_0^{+\infty} R_n(xu)\, e^{-u} du$$
avec $\Gamma(k+1) = \int_0^{+\infty} u^k e^{-u} du = k!$. *Donc :*
$$\int_0^{+\infty} g(xu)\, e^{-u} du = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \int_0^{+\infty} R_n(xu)\, e^{-u} du$$
et il s'agit de montrer que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} R_n(xu)\, e^{-u} du = 0$. *Pour ce faire, on écrit que :*
$$\begin{aligned}\left|\int_0^{+\infty} R_n(xu)\, e^{-u} du\right| &\leq M \int_0^{+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^k u^k}{k!} e^{-u} du \\ &\leq M \int_0^{+\infty} \left(e^{xu} - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k u^k}{k!}\right) e^{-u} du \\ &\leq M \left(\int_0^{+\infty} e^{(x-1)u} du - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \int_0^{+\infty} u^k e^{-u} du\right) \\ &\leq M \left(\frac{1}{1-x} - \sum_{k=0}^{n} x^k\right) \underset{n\to+\infty}{\to} 0.\end{aligned}$$

14.2 Calcul pratique du rayon de convergence

Les théorème de d'Alembert et de Cauchy relatifs aux séries numériques nous fournissent deux critères pratiques pour calculer le rayon de convergence d'une série entière.

Théorème 14.5 *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière telle que $a_n \neq 0$ à partir d'un certain rang. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell \in \overline{\mathbb{R}^+}$, alors le rayon de convergence de cette série est $R = \dfrac{1}{\ell}$ avec les conventions $\dfrac{1}{0} = +\infty$ et $\dfrac{1}{+\infty} = 0$.*

Démonstration. Pour tout nombre complexe non nul z, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \ell\,|z|$$

et le théorème de d'Alembert nous dit que si $|z| < \dfrac{1}{\ell}$, alors la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente et si $|z| > \dfrac{1}{\ell}$, alors la série $\sum |a_n z^n|$ est divergente. Il en résulte que $\dfrac{1}{\ell}$ est le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$. ■

Remarque 14.4 *La réciproque du théorème précédent est fausse, c'est-à-dire que si R est le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$, rien ne permet d'affirmer que la suite $\left(\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente.*
Par exemple la série $\sum a_n z^n$ où $a_n = \dfrac{1+(-1)^n}{2}$ pour tout $n \geq 0$, a un rayon de convergence égal à 1 ($\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} z^{2n} = \dfrac{1}{1-z^2}$ pour $|z| < 1$) et $\left(\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas définie puisque $a_n = 1$ pour n pair et $a_n = 0$ pour n impair.

L'exercice suivant nous fournit un autre contre-exemple.

Exercice 14.9 *Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ où $a_n = (2+(-1)^n)^n$ pour tout $n \geq 0$. Que dire de la suite $\left(\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}$?*

Solution 14.9 *On a $a_n = 3^n$ pour n pair et $a_n = 1$ pour n impair. Pour $r > \dfrac{1}{3}$, on a $|a_{2n}r^{2n}| = |3r|^{2n} \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} +\infty$ et $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée, donc $R \leq \dfrac{1}{3}$. Pour $0 \leq r \leq \dfrac{1}{3}$, on a :*

$$|a_n r^n| = \left\{\begin{array}{l} (3r)^n \text{ si } n \text{ est pair} \\ r^n \text{ si } n \text{ est impair} \end{array}\right. \leq 1$$

et donc $R \geq \dfrac{1}{3}$. On a donc $R = \dfrac{1}{3}$.
On a :

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{3^n} \text{ si } n \text{ est pair} \\ \dfrac{3^{n+1}}{1} \text{ si } n \text{ est impair} \end{array}\right.$$

et la suite $\left(\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.

Corollaire 14.2 *Si $\sum a_n z^n$ est une série entière telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \ell \neq 0$, alors son rayon de convergence vaut* 1.

Démonstration. Comme $\ell \neq 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$ et $R = 1$. ■

L'exemple de la série $\sum \dfrac{z^n}{n!}$ nous montre que ce résultat est faux pour $\ell = 0$.

Corollaire 14.3 *Si $\sum a_n z^n$ est une série entière telle que a_n soit une fonction rationnelle non nulle de n, alors son rayon de convergence vaut* 1.

Démonstration. On a $a_n = \dfrac{P(n)}{Q(n)}$ où P et Q sont des fonctions polynomiales de degrés respectifs p et q (le polynôme Q n'ayant qu'un nombre fini de racines réelles, on aura $Q(n) \neq 0$ pour n assez grand). Avec $a_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{a_p n^p}{b_q n^q}$, on déduit $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \underset{+\infty}{\sim} \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^p \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^q$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$, donc $R = 1$. ■

Exercice 14.10 *Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum \dfrac{n!}{n^n} z^n$.*

Solution 14.10 *En posant $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$, on a :*

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}$$

et $R = e$.

Exercice 14.11 *Pour tout entier naturel non nul n, on désigne par a_n le nombre de diviseurs de n. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^n$.*

Solution 14.11 *Pour $n \geq 1$, on a $1 \leq a_n \leq n$, les séries entières $\sum z^n$ et $\sum n z^n$ ayant un rayon de convergence égal à 1. Il en résulte que $R = 1$.*

Exercice 14.12 *Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum \arctan(n^\alpha) z^n$ où α est un réel et étudier la série pour $|z| = R$.*

Solution 14.12 *On note $a_n = \arctan(n^\alpha)$ pour tout $n \geq 1$.*
Pour $\alpha > 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \dfrac{\pi}{2} \neq 0$, donc $R = 1$. Pour $|z| = 1$, la série diverge car son terme général ne tend pas vers 0.
Pour $\alpha = 0$, on a $a_n = \arctan(1) = \dfrac{\pi}{4}$ et $R = 1$. Pour $|z| = 1$, la série diverge car son terme général ne tend pas vers 0.
Pour $\alpha = -\beta < 0$, on a $a_n \underset{+\infty}{\sim} n^\alpha$ et :

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha = 1$$

donc $R = 1$. Pour $z = 1$, $a_n z^n = a_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^\beta}$ avec $a_n > 0$ pour tout $n \geq 1$, il en résulte que $\sum a_n z^n$ converge si, et seulement si $\beta > 1$ (soit $\alpha < -1$). Pour $|z| = 1$ et $z \neq 1$, on *a* $z = e^{it}$ *avec* $t \in \left]0, 2\pi\right[$, *donc* $a_n z^n = \arctan\left(\frac{1}{n^\beta}\right) e^{int}$ *avec* $\left(\arctan\left(\frac{1}{n^\beta}\right)\right)_{n\geq 1}$ *qui tend vers* 0 *en décroissant et le théorème d'Abel nous dit alors que la série* $\sum \arctan\left(\frac{1}{n^\beta}\right) e^{int}$ *est convergente (exercice 6.25).*

Théorème 14.6 *Soit* $\sum a_n z^n$ *une série entière. Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell \in \overline{\mathbb{R}^+}$, *alors le rayon de convergence de cette série est* $R = \frac{1}{\ell}$.

Démonstration. Pour tout nombre complexe non nul z, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n z^n|} = \ell\, |z|$$

et le théorème de Cauchy nous dit que si $|z| < \frac{1}{\ell}$, alors la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente et si $|z| > \frac{1}{\ell}$, alors la série $\sum |a_n z^n|$ est divergente. Il en résulte que $\frac{1}{\ell}$ est le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$. ■

Remarque 14.5 *Là encore la réciproque est fausse. Par exemple, pour* $a_n = \frac{1 + (-1)^n}{2}$ *on a* $\sqrt[n]{|a_n|} = 1$ *pour n pair et* $\sqrt[n]{|a_n|} = 0$ *pour n impair, donc la suite* $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est divergente et pourtant le rayon de convergence de* $\sum a_n z^n = \sum z^{2n}$ *vaut* 1.*En utilisant la notion de limite supérieure, on peut montrer le résultat suivant.*

Théorème 14.7 (Hadamard) *Le rayon de convergence de la série entière* $\sum a_n z^n$ *est :*

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Démonstration. Voir le problème 31. ■

Exercice 14.13 *Déterminer le rayon de convergence R de la série entière* $\sum \frac{1}{n^{\ln(n)}} z^n$.

Solution 14.13 *En posant* $a_n = \frac{1}{n^{\ln(n)}}$, *on a :*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{\frac{\ln(n)}{n}}} = \lim_{n\to+\infty} \exp\left(\frac{\ln^2(n)}{n}\right) = 1$$

et $R = 1$.

Exercice 14.14 *Déterminer le rayon de convergence R de la série entière* $\sum\limits_{n\geq 1} \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^\alpha} z^n$, *où α est un réel donné.*

Solution 14.14 *En posant pour $n \geq 1$, $a_n = \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^\alpha}$, on a :*

$$u_n = \sqrt[n]{|a_n|} = \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^{\alpha-1}}$$

Un développement limité nous donne :

$$\begin{aligned}\ln(u_n) &= n^{\alpha-1}\ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\ &= n^{\alpha-1}\ln\left(1-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\ &= n^{\alpha-1}\left(-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\ &= -\frac{1}{n^{3-\alpha}}\left(\frac{1}{2}+o(1)\right).\end{aligned}$$

Pour $\alpha < 3$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(u_n) = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = 1$ et $R = 1$.
Pour $\alpha = 3$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(u_n) = -\frac{1}{2}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\sqrt{e}}$ et $R = \sqrt{e}$.
Pour $\alpha > 3$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(u_n) = -\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = 0$ et $R = +\infty$.

14.3 Opérations sur les séries entières

Comme pour les fonctions polynomiales, on peut définir sur l'ensemble des séries entières les opérations suivantes.

— la somme des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ est la série entière $\sum(a_n+b_n)z^n$;
— le produit des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ est la série entière $\sum c_n z^n$, où les coefficients c_n sont définis pour tout entier naturel n par :

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

Cette définition est donnée par analogie avec le produit de deux polynômes et on reconnaît là le produit de Cauchy des deux séries numériques $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$;
— la série dérivée de la série entière $\sum a_n z^n$ est la série entière $\sum n a_n z^{n-1}$;
— la série primitive de la série entière $\sum a_n z^n$ est la série entière $\sum \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$.

Théorème 14.8 *Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R et R'. On désigne par R'' le rayon de convergence de la série entière somme $\sum(a_n+b_n)z^n$.*

1. *Si $R \neq R'$, alors $R'' = \min(R, R')$.*
2. *Si $R = R'$, alors $R'' \geq \min(R, R')$.*
3. *Dans tous les cas, on a pour $|z| < \min(R, R')$:*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n+b_n)z^n = \sum_{n=0}^{+\infty}a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty}b_n z^n$$

Démonstration. Pour tout nombre complexe z tel que $|z| < \min(R, R')$, la série $\sum (a_n + b_n) z^n$ est absolument convergente comme somme des séries absolument convergentes $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ et on a $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$. On a donc $R'' \geq \min(R, R')$.

Supposons que $0 \leq R < R'$. On peut alors trouver un réel r tel que $R < r < R'$ et $\sum (a_n + b_n) r^n$ est divergente comme somme de la série divergente $\sum a_n r^n$ et de la série convergente $\sum b_n r^n$. On a donc $R'' \leq R$ et $R'' = R$ dans ce cas. ∎

Remarque 14.6 *Dans le cas où $R = R'$, l'égalité $R'' = R$ n'est pas assurée en général comme le montre l'exemple de $b_n = -a_n$ avec R fini.*

Théorème 14.9 *Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R et R'. On désigne par R'' le rayon de convergence de la série entière produit $\sum \left(\sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) z^n$. On a $R'' \geq \min(R, R')$ et pour $|z| < \min(R, R')$:*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \right) \tag{14.1}$$

Démonstration. On suppose que R et R' sont strictement positifs et on note, pour tout entier naturel n, $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

Pour $0 \leq r < \min(R, R')$, on a pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} |c_n r^n| = \left| \sum_{k=0}^{n} a_k r^k b_{n-k} r^{n-k} \right| &\leq \sum_{k=0}^{n} \left| a_k r^k \right| \left| b_{n-k} r^{n-k} \right| \\ &\leq \left(\sum_{k=0}^{n} \left| a_k r^k \right| \right) \left(\sum_{k=0}^{n} \left| b_{n-k} r^{n-k} \right| \right) \\ &\leq \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \left| a_k r^k \right| \right) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \left| b_k r^k \right| \right) < +\infty \end{aligned}$$

ce qui signifie que la suite $(|c_n r^n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. On a donc $R'' \geq \min(R, R')$.

Pour $|z| < \min(R, R')$, les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ sont absolument convergentes et le théorème 6.19 nous donne l'égalité (14.1) (ce théorème nous permet aussi d'aboutir à la minoration $R'' \geq \min(R, R')$ puisqu'il nous dit que le produit de Cauchy des séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ est absolument convergent). ∎

Remarque 14.7 *L'égalité $R'' = \min(R, R')$ n'est pas assurée en général comme le montre l'exemple des séries $\sum z^n$ et $1 - z$ de rayons de convergence respectifs 1 et $+\infty$. On a $c_n = a_n b_0 + a_{n-1} b_1 = 0$ pour $n \geq 1$ et $c_0 = a_0 b_0$. La série produit est de rayon de convergence infini de somme $\dfrac{1}{1-z}(1 - z) = 1$.*

Théorème 14.10 *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. La série dérivée $\sum n a_n z^{n-1}$ et la série primitive $\sum \dfrac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ ont le même rayon de convergence R.*

Démonstration. Comme $\sum a_n z^n$ est la série dérivée de $\sum \dfrac{a_n}{n+1} z^{n+1}$, il suffit de montrer qu'une série et sa série dérivée ont même rayon de convergence.

Notons :

$$I = \left\{ r \in \mathbb{R}^+ \mid (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée} \right\}$$

et :

$$I' = \left\{ r \in \mathbb{R}^+ \mid \left(n a_n r^{n-1}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est bornée} \right\}$$

Ce sont deux intervalles réels contenant 0 et de bornes supérieures respectives R et R', les rayons de convergence des séries $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^{n-1}$. Avec les inégalités :

$$\forall n \geq 1,\ |a_n r^n| \leq |n a_n r^n| = r \left| n a_n r^{n-1} \right|$$

on déduit que $I' \subset I$ et $R' \leq R$.

Si $R = 0$, on a alors $R' = 0$.

Si $R > 0$, pour tout réel $r \in \left]0, R\right[$, on peut trouver un réel $s \in \left]r, R\right[$ et posant $s = r + h$ avec $h > 0$, on a pour tout entier $n \geq 1$:

$$s^n = (r+h)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k r^{n-k} h^k \geq n r^{n-1} h$$

et :

$$\left| n a_n r^{n-1} \right| \leq \frac{1}{h} |a_n s^n|$$

la suite $(a_n s^n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornée puisque $s \in \left[0, r\right[\subset I$ et en conséquence $r \in I'$. On a donc $\left]0, R\right[\subset I'$, ce qui entraîne $R \leq R'$ et $R = R'$. ■

Corollaire 14.4 *Une série entière* $\sum a_n z^n$ *et toutes ses séries dérivées* $\sum n(n-1)\cdots(n-p+1)\, a_n z^{n-p}$ *ont toutes le même rayon de convergence.*

Démonstration. Se déduit immédiatement du théorème précédent par récurrence sur $p \geq 1$. ■

Exemple 14.1 *La série géométrique* $\sum z^n$ *et toutes ses séries dérivées* $\sum n(n-1)\cdots(n-p+1)\, z^{n-p}$, *pour* $p \geq 1$, *ont toutes le même rayon de convergence* 1. *La série primitive* $\sum \dfrac{z^{n+1}}{n+1}$ *a également son rayon de convergence égal à* 1.

14.4 Fonctions développables en série entière

Si $\sum a_n z^n$ est une série entière de domaine de convergence D, on définit une fonction sur D en posant :

$$\forall z \in D,\ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

et on rappelle que, dans le cas où le rayon de convergence R de cette série entière est non nul, D contient le disque ouvert $D(0, R)$ de centre 0 et de rayon R.

Réciproquement, on s'intéresse ici aux fonctions définies sur un voisinage ouvert de 0 dans le plan complexe qui peuvent s'écrire comme somme d'une série entière.

Définition 14.2 *On dit qu'une fonction f définie sur un disque ouvert $D(0, \alpha)$ de centre* 0 *et de rayon $\alpha > 0$ du plan complexe est développable en série entière au voisinage de* 0 *s'il existe une série entière $\sum a_n z^n$ et un réel $r \in \left]0, \alpha\right]$ tels que :*

$$\forall z \in D(0, r),\ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

Dans un premier temps, on constate que si une fonction est développable en série entière sur un disque ouvert $D(0,r)$ elle est alors continue sur ce disque. En réalité elle est même indéfiniment dérivable (on peut définir la notion de dérivabilité au sens complexe, mais dans ce chapitre nous nous limiterons au cas réel).

Théorème 14.11 *Une fonction f développable en série entière sur un disque ouvert $D(0,r)$ du plan complexe est continue sur ce disque.*

Démonstration. On se donne un point $z_0 \in D(0,r)$. Pour tout $z \in D(0,r)$, on a :

$$f(z) - f(z_0) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n (z^n - z_0^n)$$

avec, pour $n \geq 1$:

$$z^n - z_0^n = (z - z_0) \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k} z_0^k = (z - z_0) P_n(z)$$

ce qui donne :

$$f(z) - f(z_0) = (z - z_0) \sum_{n=1}^{+\infty} a_n P_n(z)$$

Comme $|z| < r$ et $|z_0| < r$, il existe un réel $t \in]0, r[$ tel que $|z| < t$ et $|z_0| < t$ et pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$|a_n P_n(z)| \leq |a_n| \sum_{k=0}^{n-1} |z|^{n-1-k} |z_0|^k < n |a_n| t^n$$

Une série et sa série dérivée ayant même rayon de convergence, la série $\sum n |a_n| t^n$ est convergente, donc $\sum a_n P_n(z)$ est absolument convergente et :

$$|f(z) - f(z_0)| \leq |z - z_0| \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n P_n(z)| \leq \left(\sum_{n=1}^{+\infty} n |a_n| t^n \right) |z - z_0|$$

ce qui entraîne la continuité de f en z_0. ■

Cette continuité de la somme d'une série entière nous permet de montrer l'unicité d'un développement en série entière.

Théorème 14.12 *Si une fonction est développable en série entière au voisinage de* 0, *alors ce développement est uniquement déterminé.*

Démonstration. Supposons qu'il existe deux suites complexes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et un réel $r > 0$ tels que $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ pour tout $z \in D(0,r)$. En évaluant f en 0, on déduit que $f(0) = a_0 = b_0$. On termine alors le raisonnement par récurrence sur $n \geq 0$. Supposant que $a_k = b_k$ pour tout k compris entre 0 et n, de :

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{k=0}^{n} a_k z^k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k z^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} b_k z^k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k z^k \end{aligned}$$

sur $D(0,r)$, on déduit que $z^{n+1}\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} a_k z^{k-n-1} = z^{n+1}\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} b_k z^{k-n-1}$ pour tout $z \in D(0,r)$ et $g(z) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} a_k z^{k-n-1} = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} b_k z^{k-n-1}$ pour tout $z \in D(0,r) \setminus \{0\}$. Avec la continuité en 0 de la somme d'une série entière, on déduit alors que $a_{n+1} = \lim\limits_{z\to 0} g(z) = g(0) = b_{n+1}$. On a donc bien montré que $a_n = b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. ■

Corollaire 14.5 *Si une fonction paire [resp. impaire] f est développable en série entière au voisinage de* 0, *alors ce développement est nécessairement de la forme :*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} z^{2n}$$

[resp. :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} z^{2n+1} \ ]$$

Pour la suite de ce paragraphe, on se limite aux séries entières et fonctions de la variable réelle, les coefficients des séries entières considérées pouvant être complexes.

Dans le cas où une série entière réelle $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence fini $R > 0$ converge pour $x = R$, on peut la prolonger par continuité en R. La démonstration de ce résultat se fait en utilisant une transformation d'Abel.

Théorème 14.13 (Abel) *Soit $\sum a_n x^n$ une série entière réelle de rayon de convergence fini $R > 0$ telle que la série $\sum a_n R^n$ soit convergente. En notant $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour $x \in \left]-R, R\right[$, on a :*

$$\lim_{x\to R^-} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$$

et f peut être prolongée par continuité en R en posant $f(R) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$.

Démonstration. On note $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$ et pour tout $x \in \left]0, R\right]$, tout entier naturel n, $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$. On a alors $a_n R^n = S_n(R) - S_{n-1}(R)$ pour tout $n \geq 1$ et pour $x \in \left]0, R\right[$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} S_n(x) &= a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k R^k \left(\frac{x}{R}\right)^k \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(S_k(R) - S_{k-1}(R)\right) \left(\frac{x}{R}\right)^k \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{n} S_k(R) \left(\frac{x}{R}\right)^k - \sum_{k=1}^{n} S_{k-1}(R) \left(\frac{x}{R}\right)^k \\ &= S_0(R) + \sum_{k=1}^{n} S_k(R) \left(\frac{x}{R}\right)^k - \sum_{k=0}^{n-1} S_k(R) \left(\frac{x}{R}\right)^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} S_k(R) \left(\left(\frac{x}{R}\right)^k - \left(\frac{x}{R}\right)^{k+1}\right) + S_n(R) \left(\frac{x}{R}\right)^n \\ &= \left(1 - \frac{x}{R}\right) \sum_{k=0}^{n-1} S_k(R) \left(\frac{x}{R}\right)^k + S_n(R) \left(\frac{x}{R}\right)^n \end{aligned}$$

et tenant compte de :

$$S_n(R) \left(\frac{x}{R}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\to} S \cdot 0 = 0$$

pour $|x| < R$, on déduit que la série $\sum S_n(R) \left(\frac{x}{R}\right)^n$ converge et :

$$f(x) = \left(1 - \frac{x}{R}\right) \sum_{n=0}^{+\infty} S_n(R) \left(\frac{x}{R}\right)^n.$$

Tenant compte de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{R}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{x}{R}}$, on en déduit que :

$$\begin{aligned} f(x) - S &= \left(1 - \frac{x}{R}\right) \sum_{n=0}^{+\infty} S_n(R) \left(\frac{x}{R}\right)^n - S\left(1 - \frac{x}{R}\right) \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{R}\right)^n \\ &= \left(1 - \frac{x}{R}\right) \sum_{n=0}^{+\infty} \left(S_n(R) - S\right) \left(\frac{x}{R}\right)^n. \end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(R) = S$, pour tout réel $\varepsilon > 0$ on peut trouver un entier n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0,\ |S_n(R) - S| < \varepsilon$$

et pour $n \geq n_0$, on a :

$$\begin{aligned} |f(x) - S| &\leq \left(1 - \frac{x}{R}\right) \left(\sum_{k=0}^{n_0} |S_k(R) - S| \left(\frac{x}{R}\right)^k + \varepsilon \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} \left(\frac{x}{R}\right)^k\right) \\ &\leq A(R - x) + \varepsilon \end{aligned}$$

où :

$$\sum_{k=0}^{n_0} |S_k(R) - S| \left(\frac{x}{R}\right)^k \leq \sum_{k=0}^{n_0} |S_k(R) - S| = R \cdot A$$

et :

$$\sum_{k=n_0+1}^{+\infty}\left(\frac{x}{R}\right)^k \leq \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{R}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{x}{R}}$$

Pour x voisin de R, on aura alors $|f(x)-S| \leq 2\varepsilon$. On a donc bien prouvé le résultat annoncé. ∎

Théorème 14.14 *Soit f une fonction de la variable réelle développable en série entière sur un intervalle $]-r,r[$ où $r>0$ avec :*

$$\forall x \in \left]-r,r\right[,\ f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres complexes. La fonction f est alors continûment dérivable sur $]-r,r[$ avec :

$$\forall x \in \left]-r,r\right[,\ f'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

Démonstration. On se fixe un réel x_0 dans $]-r,r[$ et nous allons montrer dans un premier temps que f est dérivable en x_0, la dérivée $f'(x_0)$ ayant la forme annoncée.

Sachant qu'une série et sa série dérivée ont même rayon de convergence, on peut définir la fonction g sur $]-r,r[$ par :

$$\forall x \in \left]-r,r\right[,\ g(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

et pour $x \neq x_0$, on a :

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-g(x_0)=\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\left(P_n(x)-n x_0^{n-1}\right)$$

où on a posé pour $n \geq 1$:

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} x_0^k.$$

Pour $n=1$, on a :

$$P_n(x)-n x_0^{n-1}=1-1=0$$

et donc :

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-g(x_0)=\sum_{n=2}^{+\infty} a_n\left(P_n(x)-n x_0^{n-1}\right)$$

Comme $|x|<r$ et $|x_0|<r$, il existe un réel $t \in \left]0,r\right[$ tel que $|x|<t$ et $|x_0|<t$ et pour tout entier $n \geq 2$, on a :

$$\begin{aligned} a_n\left(P_n(x)-n x_0^{n-1}\right) &= a_n \sum_{k=0}^{n-1} x_0^k\left(x^{n-1-k}-x_0^{n-1-k}\right) \\ &= a_n \sum_{k=0}^{n-2} x_0^k\left(x^{n-1-k}-x_0^{n-1-k}\right) \end{aligned}$$

avec, pour $p = n - 1 - k$:

$$\begin{aligned}\left|x^p - x_0^p\right| &= \left|x - x_0\right| \left|\sum_{j=0}^{p-1} x^{p-1-j} x_0^j\right| \\ &< \left|x - x_0\right| \sum_{j=0}^{p-1} t^{p-1-j} t^j = \left|x - x_0\right| p t^{p-1}\end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned}\left|a_n \left(P_n(x) - n x_0^{n-1}\right)\right| &\leq \left|a_n\right| \sum_{k=0}^{n-2} \left|x_0^k\right| \left|x^{n-1-k} - x_0^{n-1-k}\right| \\ &< \left|a_n\right| \left|x - x_0\right| \sum_{k=0}^{n-2} t^k (n-1-k) t^{n-2-k} \\ &< \left|a_n\right| \left|x - x_0\right| t^{n-2} \sum_{p=1}^{n-1} p = \frac{n(n-1)}{2} \left|a_n\right| t^{n-2} \left|x - x_0\right|\end{aligned}$$

La série dérivée seconde $\sum n(n-1) a_n z^{n-2}$ ayant même rayon de convergence que la série $\sum a_n z^n$, on déduit que la série $\sum n(n-1)\left|a_n\right| t^{n-2}$ est convergente, donc que la série $\sum a_n \left(P_n(x) - n x_0^{n-1}\right)$ est absolument convergente et :

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - g(x_0)\right| &\leq \sum_{n=2}^{+\infty} \left|a_n \left(P_n(x) - n x_0^{n-1}\right)\right| \\ &\leq \frac{\left|x - x_0\right|}{2} \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\left|a_n\right| t^{n-2}\end{aligned}$$

On en déduit alors que $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = g(x_0)$.

La fonction f est donc dérivable de dérivée égale à g et cette dérivée est continue d'après le théorème 14.11. ■

Par récurrence, on déduit le résultat suivant.

Corollaire 14.6 *Soit f une fonction de la variable réelle développable en série entière sur un intervalle $]-r, r[$ où $r > 0$ avec :*

$$\forall x \in]-r, r[, \ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

où $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de nombres complexes. La fonction f est alors indéfiniment dérivable sur $]-r, r[$ avec, pour tout entier $p \geq 1$ et tout réel $x \in]-r, r[$:

$$f^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-p+1) a_n x^{n-p} = \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{n!}{(n-p)!} a_n x^{n-p}.$$

En évaluant $f^{(p)}$ en 0, on retrouve l'unicité du développement en série entière de la fonction f avec :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Le théorème précédent nous permet également de donner le développement en série entière de la primitive nulle en 0 d'une fonction développable en série entière.

Corollaire 14.7 *Soit f une fonction de la variable réelle développable en série entière sur un intervalle $]-r,r[$ où $r>0$ avec :*

$$\forall x \in \left]-r,r\right[,\ f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres complexes. La primitive de f nulle en 0 est la fonction F définie par :

$$\forall x \in \left]-r,r\right[,\ F(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

Exemple 14.2 *À partir du développement :*

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

on déduit par dérivation et intégration, les développements :

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}$$

et :

$$\ln(1-x)=-\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

chacune de ces séries étant de rayon de convergence égal à 1.
Prenant $x=\frac{1}{2}$, on obtient :

$$\ln(2)=\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)\,2^{n+1}}$$

la convergence de cette série étant plus rapide que celle de la série classique $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}=\ln(2)$ (exercice 6.9). Pour $N=10$, on obtient :

$$\ln(2)-\sum_{n=0}^{10} \frac{1}{(n+1)\,2^{n+1}} \approx 3.793\cdot 10^{-5}$$

La primitive nulle en 0 de $-\ln(1-x)$ est :

$$x+(1-x)\ln(1-x)=\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)},$$

ce qui donne le développement en série entière :

$$(1-x)\ln(1-x)=-x+\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}$$

le rayon de convergence étant égal à 1. Pour $x=\frac{1}{2}$, on obtient :

$$\ln(2)=1-2\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)\,2^n}.$$

Exercice 14.15 *En utilisant la série entière* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$, *calculer* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+1}$.

Solution 14.15 *Le rayon de convergence de cette série entière est* 1 *(en utilisant le théorème de d'Alembert) et cette série converge pour* $x = 1$ *(théorème des séries alternées). Pour tout* $x \in \left]-1, 1\right[$, *on note* $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$ *et la fonction* f *ainsi définie est dérivable sur* $\left]-1, 1\right[$ *avec :*

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$$

et donc $f(x) = \ln(1+x)$. *En utilisant le théorème 14.13 d'Abel, on a :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \lim_{x \to 1^-} f(x) = \ln(2).$$

Exercice 14.16 *En utilisant la série entière* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$, *calculer* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$.

Solution 14.16 *Le rayon de convergence de cette série entière est* 1 *(en utilisant le théorème de d'Alembert) et cette série converge pour* $x = 1$ *(théorème des séries alternées). Pour tout* $x \in \left]-1, 1\right[$, *on note* $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ *et la fonction* f *ainsi définie est dérivable sur* $\left]-1, 1\right[$ *avec :*

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}$$

et donc $f(x) = \arctan(x)$. *En utilisant le théorème 14.13 d'Abel, on a :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \lim_{x \to 1^-} f(x) = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 14.17

1. *Donner le développement en série entière, en précisant son rayon de convergence, de la fonction* arctan.
2. *En déduire la valeur de* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\dfrac{-1}{3}\right)^n \dfrac{1}{2n+1}$.
3. *Calculer la primitive qui s'annule en* 0 *de la fonction* arctan *et donner le développement en série entière de cette fonction, en précisant son rayon de convergence,*
4. *En déduire la valeur de* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$.

Solution 14.17

1. *À partir du développement :*

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$$

on déduit par intégration le développement :

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

chacune de ces séries étant de rayon de convergence égal à 1.

2. *La valeur* $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ *donne :*

$$\frac{\pi}{6} = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{3}3^n (2n+1)}$$

et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{-1}{3}\right)^n \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{6}\sqrt{3}.$$

3. *Une intégration par parties donne :*

$$\begin{aligned}\int \arctan(x)\,dx = \int \arctan(x)(x)'\,dx &= x\arctan(x) - \int \frac{x}{1+x^2}dx \\ &= x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + c \\ &= x\arctan(x) - \ln\left(\sqrt{1+x^2}\right) + c\end{aligned}$$

la primitive nulle en 0 *étant obtenue pour* $c = 0$. *Il en résulte que :*

$$x\arctan(x) - \ln\left(\sqrt{1+x^2}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)}$$

le rayon de convergence valant 1.

4. *Comme la série* $\sum (-1)^n \dfrac{1}{(2n+1)(2n+2)}$ *est convergente, en utilisant le théorème 14.13 d'Abel, on a :*

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} &= \lim_{x\to 1}\left(x\arctan(x) - \ln\left(\sqrt{1+x^2}\right)\right) \\ &= \frac{\pi}{4} - \ln(2).\end{aligned}$$

Exercice 14.18 *Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière réelle :*

$$\sum \frac{1}{n(n+1)} x^{n+1}.$$

Solution 14.18 *Le coefficient de cette série entière étant une fonction rationnelle, son rayon de convergence vaut* 1. *Notons* $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n(n+1)} x^{n+1}$ *sa somme pour tout* $x \in]-1,1[$. *Cette fonction est* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $]-1,1[$ *avec :*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n \text{ et } f''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x},$$

ce qui donne $f'(x) = -\ln(1-x)$ *et en effectuant une intégration par parties :*

$$\begin{aligned} f(x) = \int \ln(1-x)(-1)\,dx &= \int \ln(1-tx)(1-x)'\,dx \\ &= (1-x)\ln(1-x) - \int \frac{-1}{1-x}(1-x)\,dx \\ &= (1-x)\ln(1-x) + x + c \end{aligned}$$

avec $c = f(0) = 0$.

Exercice 14.19 *Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière réelle :*

$$\sum \frac{n^2-1}{n+2} x^n.$$

Solution 14.19 *Le coefficient de cette série entière étant une fonction rationnelle, son rayon de convergence vaut* 1*. Notons* $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2-1}{n+2} x^n$ *sa somme pour tout* $x \in]-1,1[$*. La fonction* $g : x \mapsto x^2 f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2-1}{n+2} x^{n+2}$ *est* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $]-1,1[$ *avec :*

$$\begin{aligned} g'(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n-1)\,x^{n+1} \\ &= x^3 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\,x^{n-2} + x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} - x \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \\ &= x^3 \left(\frac{1}{1-x}\right)'' + x^2 \left(\frac{1}{1-x}\right)' - x\frac{1}{1-x} \\ &= \frac{2x^3}{(1-x)^3} + \frac{x^2}{(1-x)^2} - \frac{x}{1-x} \\ &= \frac{2x^3 + x^2(1-x) - x(1-x)^2}{(1-x)^3} = \frac{3x^2 - x}{(1-x)^3} \end{aligned}$$

En écrivant que :

$$\begin{aligned} 3x^2 - x &= 3(1-x)^2 + 5x - 3 \\ &= 3(1-x)^2 - 5(1-x) + 2 \end{aligned}$$

on a :

$$g'(x) = \frac{3}{1-x} - \frac{5}{(1-x)^2} + \frac{2}{(1-x)^3}$$

et :

$$g(x) = -3\ln(1-x) - \frac{5}{1-x} + \frac{1}{(1-x)^2} + c$$

avec $g(0) = 0 = -4 + c$*. On a donc :*

$$\begin{aligned} x^2 f(x) &= -3\ln(1-x) - \frac{5}{1-x} + \frac{1}{(1-x)^2} + 4 \\ &= \frac{x(4x-3)}{(1-x)^2} - 3\ln(1-x) \end{aligned}$$

et :

$$f(x) = \frac{4x-3}{x(1-x)^2} - 3\frac{\ln(1-x)}{x^2}$$

la fonction du second membre se prolongeant par continuité en 0 *comme le montre un développement limité en* 0 *de* $\ln(1-x)$ *et* $\dfrac{1}{(1-x)^2}$.

On a vu que si une fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0 est développable en série entière, alors ce développement est nécessairement donné par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$. Mais il ne faut pas croire que de manière générale toute fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0 est développable en série entière. Par exemple, la fonction f définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ pour $x \neq 0$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ avec toutes ses dérivées en 0 qui sont nulles et pourtant elle n'est pas développable en série entière puisque $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0 \neq f(x)$ pour $x \neq 0$.

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage de 0 soit développable en série entière est donnée par le théorème qui suit.

Théorème 14.15 *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage ouvert I de* 0 *et à valeurs complexes. Cette fonction est développable en série entière au voisinage de* 0 *si, et seulement si, il existe un réel $r > 0$ tel que $]-r, r[\subset I$ et pour tout $x \in I$ la suite $(R_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :*

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

converge vers 0 *sur $]-r, r[$. Dans ce cas, on a $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ pour tout $x \in \,]-r, r[$ et le rayon de convergence de cette série entière est supérieur ou égal à r.*

Démonstration. Si f est développable en série entière en 0, ce développement est nécessairement $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ sur un intervalle $]-r, r[\subset I$ et pour tout $x \in \,]-r, r[$, la suite des restes $(R_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de limite nulle.

Réciproquement dire que pour tout $x \in \,]-r, r[$, la suite $(R_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de limite nulle signifie exactement que la série numérique $\sum \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ converge et que sa somme est $f(x)$. ∎

Pour montrer que la suite $(R_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, on peut utiliser l'expression de Lagrange du reste $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\theta_{n,x} x)}{(n+1)!} x^{n+1}$ avec $0 < \theta_{n,x} < 1$ ou sa représentation intégrale :

$$R_n(x) = \int_0^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n \, dt = \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 f^{(n+1)}(\theta x)(1-\theta)^n \, d\theta.$$

Exemple 14.3 *Dans le cas de la fonction exponentielle réelle, on a pour tout réel x :*

$$|R_n(x)| = \frac{e^{\theta_{n,x} x}}{(n+1)!} |x|^{n+1} \leq \frac{e^{|x|}}{(n+1)!} |x|^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

Il en résulte que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

et le rayon de convergence de cette série est infini.

Ce exemple est un cas particulier du résultat suivant.

Théorème 14.16 *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage ouvert I de 0 et à valeurs complexes. S'il existe un réel $r > 0$ tel que $]-r, r[\subset I$ et pour tout x dans $]-r, r[$ on peut trouver une constante M_x avec :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left|f^{(n)}(x)\right| \leq M_x,$$

alors f est développable en série entière dans $]-r, r[$ avec $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

Démonstration. La formule de Taylor-Lagrange nous permet d'écrire pour tout réel $x \in]-r, r[$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n+1)}(\theta_{n,x} x)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

où $\theta_{n,x}$ est un réel (dépendant de n et de x) compris entre 0 et 1 et on a :

$$|R_n(x)| = \left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k\right| \leq M_x \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

■

En utilisant ce résultat, on déduit les développements classiques suivants où le rayon de convergence est indiqué entre parenthèses.

—
$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\ \ (R = +\infty)$$

ce qui se déduit de :

$$f^{(n)}(0) = \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^p \text{ si } n = 2p \\ 0 \text{ si } n = 2p+1 \end{cases}$$

et de :

$$\left|f^{(n)}(x)\right| = \left|\cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)\right| \leq M_x = 1$$

—
$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\ \ (R = +\infty)$$

ce qui se déduit de :

$$f^{(n)}(0) = \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^p \text{ si } n = 2p+1 \\ 0 \text{ si } n = 2p \end{cases}$$

et de :

$$\left|f^{(n)}(x)\right| = \left|\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)\right| \leq M_x = 1$$

—
$$\operatorname{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}\ \ (R = +\infty)$$

ce qui se déduit de :

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} \operatorname{ch}(0) = 1 \text{ si } n \text{ est pair} \\ \operatorname{sh}(0) = 0 \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

et de :

$$\left|f^{(n)}(x)\right| = \begin{cases} \mathrm{ch}(x) & \text{si } n \text{ est pair} \\ |\mathrm{sh}(x)| & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \leq M_x = \max(\mathrm{ch}(x), |\mathrm{sh}(x)|)$$

—

$$\mathrm{sh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \ \ (R = +\infty)$$

ce qui se déduit de :

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} \mathrm{sh}(0) = 0 \text{ si } n \text{ est pair} \\ \mathrm{ch}(0) = 1 \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

et de :

$$\left|f^{(n)}(x)\right| = \begin{cases} |\mathrm{sh}(x)| & \text{si } n \text{ est pair} \\ \mathrm{ch}(x) & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \leq M_x = \max(\mathrm{ch}(x), |\mathrm{sh}(x)|)$$

—

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n \ \ (R = 1)$$

où α est un réel non entier naturel, ce qui se déduit de :

$$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)$$

et de :

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n!}\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)\int_0^1 (1+\theta x)^{\alpha-n-1}(1-\theta)^n \, d\theta.$$

avec :

$$0 \leq \frac{1-\theta}{1+\theta x} \leq 1$$

pour $0 \leq \theta \leq 1$ et $-1 < x < 1$ (on a alors $-\theta < \theta x < \theta$ et $0 \leq 1-\theta < 1+\theta x$), ce qui donne :

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{n!}\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)\int_0^1 (1+\theta x)^{\alpha-1} \, d\theta \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

puisque la série $\sum \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}|x|^{n+1}$ converge pour $|x| < 1$ (en utilisant le théorème de d'Alembert). Le théorème de d'Alembert nous dit aussi que le rayon de convergence de cette série entière vaut 1.

Pour $\alpha = -1$, on retrouve le développement de $\frac{1}{1+x}$ et pour les valeurs particulières $\alpha = \frac{1}{2}$, $\alpha = -\frac{1}{2}$, on a :

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x} &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1.3\cdots(2n-3)}{2.4\cdots(2n)} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n)!}{(2n-1)2^{2n}(n!)^2} x^n \ \ (R = 1) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1.3\cdots(2n-1)}{2.4\cdots(2n)} x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{C_{2n}^n}{2^{2n}} x^n \ \ (R = 1)$$

Exercice 14.20 *Développer en série entière la fonction $f : x \mapsto \arcsin(x)$ en précisant le rayon de convergence.*

Solution 14.20 *On a, pour $x \in \left]-1,1\right[$:*

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{C_{2n}^n}{2^{2n}} x^{2n}$$

et :

$$\arcsin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{C_{2n}^n}{(2n+1)\,2^{2n}} x^{2n+1}$$

le rayon de convergence étant égal à 1.

Exercice 14.21 *Développer en série entière la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}\sin\left(\dfrac{\arcsin(x)}{2}\right)$ en précisant le rayon de convergence.*

Solution 14.21 *La fonction f est définie et continue sur $[-1,1] \setminus \{0\}$. Un développement limité nous donne en tenant compte de $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin(x)}{x} = 1$:*

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x}\left(\frac{\arcsin(x)}{2} + o(\arcsin(x))\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{\arcsin(x)}{x} + o(1) \underset{x\to 0}{\to} \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

On prolonge donc f par continuité en 0 en posant $f(0) = \dfrac{1}{2}$.
Pour $x \in [-1,1] \setminus \{0\}$, on a $\arcsin(x) \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$, donc $\cos(\arcsin(x)) \geq 0$ et :

$$\begin{aligned} \sin^2\left(\frac{\arcsin(x)}{2}\right) &= \frac{1}{2}(1 - \cos(\arcsin(x))) \\ = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1-x^2}\right) &= \left(\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

les quantités $\sin\left(\dfrac{\arcsin(x)}{2}\right)$ et $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$ étant de même signe. On a donc :

$$f(x) = \frac{1}{x}\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{2}$$

sur $[-1,1] \setminus \{0\}$, le résultat étant encore valable en 0 par continuité.
Utilisant les développements en série entière de $\sqrt{1+x}$ et $\sqrt{1-x}$ sur $\left]-1,1\right[$, on en déduit que :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(4n)!}{2^{4n+1}(2n+1)!\,(2n)!} x^{2n}.$$

Exercice 14.22 *On se fixe un réel θ dans $\left]0,\pi\right[$ et on s'intéresse à la série entière $\sum \dfrac{\sin(n\theta)}{n} z^n$.*

1. *Montrer que le rayon de convergence de cette série vaut* 1.

2. *Étudier la série* $\sum \dfrac{\sin(n\theta)}{n} z^n$ *pour* $z = 1$ *et* $z = -1$.
3. *On désigne par* f *la fonction définie sur* $[-1, 1]$ *par :*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n} x^n.$$

Justifier le fait que f *est indéfiniment dérivable sur* $]-1, 1[$ *et expliciter sa dérivée.*

4. *En déduire que :*

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x - \cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right) + \arctan\left(\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right)$$

pour $\theta \in]0, \pi[$ *et* $x \in]-1, 1[$.

5. *Montrer que pour tous réels* x, y *tels que* $xy < 1$, *on a :*

$$\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x + y}{1 - xy}\right)$$

6. *En déduire que :*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n} x^n = \arctan\left(\frac{x \sin(\theta)}{1 - x\cos(\theta)}\right)$$

pour $\theta \in]0, \pi[$ *et* $x \in]-1, 1[$.

7. *Montrer que :*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n} = \frac{\pi - \theta}{2}$$

pour $\theta \in]0, \pi[$.

Solution 14.22

1. *Comme la suite* $\left(\dfrac{\sin(n\theta)}{n}\right)_{n \geq 1}$ *est bornée (on a* $\left|\dfrac{\sin(n\theta)}{n}\right| \leq \dfrac{1}{n} \leq 1$*), on déduit que si* R *est le rayon de convergence de cette série entière, alors* $R \geq 1$.
La série $\sum \dfrac{\sin(n\theta)}{n}$ *étant semi-convergente (exercice 6.41), on a* $R \leq 1$ *(si* $R > 1$ *la série* $\sum \dfrac{\sin(n\theta)}{n}$ *est absolument convergente, ce qui n'est pas). On a donc* $R = 1$.
2. *Pour* $z = 1$, *on sait déjà que* $\sum \dfrac{\sin(n\theta)}{n}$ *est semi-convergente. Avec le théorème 6.25, on a vu que si la suite réelle* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers* 0 *en décroissant, alors la série* $\sum u_n e^{int}$ *est convergente pour tout réel* $t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. *Prenant* $u_n = \dfrac{1}{n}$, *on en déduit que la série* $\sum \dfrac{1}{n} e^{in(\theta+\pi)}$ *est convergente (on a* $\theta + \pi \in]\pi, 2\pi[$*) et il en est de même de la partie imaginaire* $\sum \dfrac{\sin(n\theta)}{n} (-1)^n$.
3. *La somme d'une série entière de rayon de convergence* R *est* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $]-R, R[$ *et sa dérivée s'obtient en dérivant terme à terme, ce qui donne pour* f *sur* $]-1, 1[$ *:*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(n\theta) x^{n-1} = \Im(g(x))$$

où :

$$g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{in\theta} x^{n-1} = e^{i\theta} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(xe^{i\theta}\right)^n = \frac{e^{i\theta}}{1 - xe^{i\theta}}$$
$$= \frac{e^{i\theta}\left(1 - xe^{-i\theta}\right)}{\left(1 - x\cos(\theta)^2 + x^2\sin^2(\theta)\right)} = \frac{e^{i\theta} - x}{(1 - x\cos(\theta))^2 + x^2\sin^2(\theta)}$$

(on a $\left|xe^{i\theta}\right| = |x| < 1$*), ce qui donne :*

$$f'(x) = \frac{\sin(\theta)}{x^2 - 2x\cos(\theta) + 1}$$

4. *Il s'agit de calculer une primitive de* $f'(x)$*. On a :*

$$F(x) = \int \frac{dx}{x^2 - 2x\cos(\theta) + 1} = \int \frac{dx}{(x - \cos(\theta))^2 + \sin^2(\theta)}$$
$$= \frac{1}{\sin^2(\theta)} \int \frac{dx}{1 + \left(\dfrac{x - \cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right)^2}$$

(on a $\sin(\theta)$ *pour* $\theta \in]0, \pi[$*) et en effectuant le changement de variable* $u = \dfrac{x - \cos(\theta)}{\sin(\theta)}$ *:*

$$F(x) = \frac{1}{\sin(\theta)} \int \frac{du}{1 + u^2} = \frac{1}{\sin(\theta)} \arctan(u)$$
$$= \frac{1}{\sin(\theta)} \arctan\left(\frac{x - \cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right)$$

et tenant compte de $f(0) = 0$ *:*

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x - \cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right) + \arctan\left(\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right)$$

pour $\theta \in]0, \pi[$ *et* $x \in]-1, 1[$.

5. *Pour* y *fixé, on définit* $\varphi(x) = \arctan\left(\dfrac{x + y}{1 - xy}\right) - \arctan(x)$ *pour* $xy < 1$*. Pour* $y = 0$ *c'est la fonction nulle définie sur* $\mathbb{R}$*, pour* $y > 0$*, elle est définie sur l'intervalle* $\left]-\infty, \dfrac{1}{y}\right[$ *et pour* $y < 0$*, elle est définie sur l'intervalle* $\left]\dfrac{1}{y}, +\infty\right[$*. Cette fonction est dérivable avec :*

$$\varphi'(x) = \frac{\dfrac{(1 - xy) + (x + y)y}{(1 - xy)^2}}{1 + \left(\dfrac{x + y}{1 - xy}\right)^2} - \frac{1}{1 + x^2} = \frac{1 + y^2}{(1 - xy)^2 + (x + y)^2} - \frac{1}{1 + x^2}$$
$$= \frac{1 + y^2}{1 + x^2y^2 + x^2 + y^2} - \frac{1}{1 + x^2} = \frac{(1 + y^2)(1 + x^2) - (1 + x^2y^2 + x^2 + y^2)}{(1 + x^2y^2 + x^2 + y^2)(1 + x^2)}$$
$$= 0.$$

Il en résulte que φ *est constante égale à* $\varphi(0) = \arctan(y)$ *(*0 *est toujours dans l'intervalle de définition de* φ*).*

6. *Constatant que :*

$$\frac{x-\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}=\frac{x\cos(\theta)-\cos^2(\theta)}{\sin^2(\theta)}<1$$

(c'est équivalent à $x\cos(\theta)-\cos^2(\theta)<\sin^2(\theta)$, *soit à* $x\cos(\theta)<\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)=1$ *qui est vrai pour* $\theta\in\,]0,\pi[$ *et* $x\in\,]-1,1[$*), on déduit que :*

$$\begin{aligned}f(x)=\arctan\left(\frac{\frac{x-\cos(\theta)}{\sin(\theta)}+\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}}{1-\frac{x-\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}}\right)&=\arctan\left(\frac{x\sin(\theta)}{\sin^2(\theta)-(x-\cos(\theta))\cos(\theta)}\right)\\&=\arctan\left(\frac{x\sin(\theta)}{1-x\cos(\theta)}\right)\end{aligned}$$

7. *Utilisant le théorème d'Abel 14.13, on déduit de la convergence de* $\sum\frac{\sin(n\theta)}{n}$ *que :*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(n\theta)}{n}=\lim_{x\to1^-}\arctan\left(\frac{x\sin(\theta)}{1-x\cos(\theta)}\right)=\arctan\left(\frac{\sin(\theta)}{1-\cos(\theta)}\right)$$

avec :

$$\frac{\sin(\theta)}{1-\cos(\theta)}=\frac{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}=\frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}=\frac{1}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

ce qui donne :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(n\theta)}{n}=\arctan\left(\frac{1}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right)=\frac{\pi}{2}-\arctan\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)=\frac{\pi-\theta}{2}$$

Exercice 14.23 *Développer en série entière la fonction :*

$$f:x\mapsto\int_0^\pi\cos(x\cos(t))\,dt.$$

Solution 14.23 *Pour tout réels* x *et* t, *on a :*

$$\cos(x\cos(t))=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}\cos^{2n}(t)}{(2n)!}.$$

Notant respectivement $S_n(x,t)$ *et* $R_n(x,t)$ *la somme partielle et le reste d'indice* n *de cette série, on a pour tout réel* x *:*

$$\begin{aligned}f(x)&=\int_0^\pi S_n(x,t)\,dt+\int_0^\pi R_n(x,t)\,dt\\&=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left(\int_0^\pi\cos^{2k}(t)\,dt\right)\frac{x^{2k}}{(2k)!}+\int_0^\pi R_n(x,t)\,dt\end{aligned}$$

avec :

$$\left|\int_0^\pi R_n(x,t)\,dt\right|\leq\int_0^\pi\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{|x|^{2k}}{(2k)!}dt=\pi\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{|x|^{2k}}{(2k)!}\underset{n\to+\infty}{\to}0$$

puisque la série $\sum \frac{|x|^{2n}}{(2n)!}$ *est convergente. Il en résulte que :*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n I_n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

en notant $I_n = \int_0^\pi \cos^{2n}(t)\, dt$ *pour tout entier naturel* n.
En intégrant par parties, on obtient la relation de récurrence

$$2nI_n = (2n-1) I_{n-1},$$

avec $I_0 = \pi$, *ce qui donne* $I_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\pi$ *et :*

$$f(x) = \pi \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}$$

le rayon de convergence de cette série entière étant infini.

14.5 Un théorème de Bernstein

On a vu avec l'exemple de la fonction f définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ pour $x \neq 0$ qu'une fonction indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ n'est pas nécessairement développable en série entière. Le théorème de Bernstein qui suit nous dit qu'avec l'hypothèse supplémentaire de positivité des dérivées d'ordres pairs de la fonction f, on est assuré du développement en série entière.

Lemme 14.1 *Soit* f *une fonction à valeurs réelles de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $]-a, a[$ *avec* $a > 0$. *Si* f *est paire et* $f^{(2k)}(x) \geq 0$ *pour tout entier naturel* k *et tout* $x \in]-a, a[$ *alors* f *est développable en série entière sur* $]-a, a[$.

Démonstration. Pour tout entier naturel n et tout $x \in]-a, a[$ on note :

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k, \quad R_n(x) = f(x) - P_n(x).$$

Il s'agit alors de montrer que $\lim_{n \to +\infty} R_n(x) = 0$ pour tout $x \in]-a, a[$.

Avec la parité de la fonction f on déduit que $f^{(2k+1)}(0) = 0$ pour tout $k \geq 0$ et avec la positivité des $f^{(2k)}$ que :

$$\forall x \in]-a, a[,\ P_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k} \geq 0, \quad R_{2n}(x) \leq f(x).$$

D'autre part, avec la formule de Taylor avec reste intégral on peut écrire pour tout $x \in]0, a[$:

$$R_{2n}(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} f^{(2n+1)}(t)\, dt = \frac{x^{2n+1}}{(2n)!} \int_0^1 (1-u)^{2n} f^{(2n+1)}(xu)\, du$$

et avec la croissance de $f^{(2n+1)}$ (du fait que $f^{(2n)} \geq 0$) on a pour tous $r \in \left]0,a\right[$, $x \in \left]0,r\right[$, $u \in [0,1]$:

$$0 = f^{(2n+1)}(0) \leq f^{(2n+1)}(xu) \leq f^{(2n+1)}(ru)$$

ce qui entraîne :

$$0 \leq R_{2n}(x) \leq \frac{x^{2n+1}}{(2n)!}\int_0^1 (1-u)^{2n} f^{(2n+1)}(ru)\,du = \frac{x^{2n+1}}{r^{2n+1}}R_{2n}(r) \leq \frac{x^{2n+1}}{r^{2n+1}}f(r).$$

Il en résulte que $\lim\limits_{n\to+\infty} R_{2n}(x) = 0$ pour tout $x \in \left]0,a\right[$ et par parité le résultat est également vrai sur $\left]-a,a\right[$. Enfin avec $P_{2n}(x) = P_{2n+1}(x)$, on déduit que $R_{2n}(x) = R_{2n+1}(x)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$ pour tout $x \in \left]-a,a\right[$. ∎

Théorème 14.17 (Bernstein) *Soit f une fonction à valeurs réelles de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left]-a,a\right[$ avec $a > 0$. Si $f^{(2k)}(x) \geq 0$ pour tout entier naturel k et tout $x \in \left]-a,a\right[$ alors f est développable en série entière sur $\left]-a,a\right[$.*

Démonstration. On se ramène aux hypothèses du lemme précédent en introduisant la fonction g définie sur $\left]-a,a\right[$ par $g(x) = f(x) + f(-x)$. Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$, paire avec $g^{(2k)}(x) = f^{(2k)}(x) + f^{(2k)}(-x) \geq 0$ sur $\left]-a,a\right[$.

En notant $R_{n,f}$ [resp. $R_{n,g}$] le reste intégral dans la formule de Taylor à l'ordre n pour f [resp. g], on a pour tous $x \in \left]-a,a\right[$, $u \in [0,1]$:

$$0 \leq f^{(2n)}(xu) \leq g^{(2n)}(xu) = g^{(2n)}(|x|\,u)$$

et :

$$0 \leq |R_{2n-1,f}(x)| = \frac{x^{2n}}{(2n-1)!}\int_0^1 (1-u)^{2n-1} f^{(2n)}(xu)\,du \leq R_{2n-1,g}(x).$$

En utilisant le lemme précédent, on déduit donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} R_{2n-1,f}(x) = 0$ pour tout $x \in \left]-a,a\right[$, puis avec :

$$f(x) = P_{2n,f}(x) + R_{2n,f}(x) = P_{2n-1,f}(x) + R_{2n-1,f}(x)$$

on déduit que :

$$R_{2n,f}(x) = -\frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!}x^{2n} + R_{2n-1,f}(x) = -\frac{1}{2}\frac{g^{(2n)}(0)}{(2n)!}x^{2n} + R_{2n-1,f}(x)$$

et avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{g^{(2n)}(0)}{(2n)!}x^{2n} = 0$ (convergence de la série de Taylor de la fonction paire g), on a $\lim\limits_{n\to+\infty} R_{2n,f}(x) = 0$ pour tout $x \in \left]-a,a\right[$. D'où le résultat. ∎

Dans le cas particulier où toutes les dérivées de f sont positives, on peut donner une démonstration plus simple du théorème de Bernstein.

Théorème 14.18 (Bernstein) *Soit f une fonction à valeurs réelles de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left]-a,a\right[$ avec $a > 0$. Si $f^{(k)}(x) \geq 0$ pour tout entier naturel k et tout $x \in \left]-a,a\right[$ alors f est développable en série entière sur $\left]-a,a\right[$.*

Démonstration. Pour $r \in \left]0,a\right[$ fixé et $x \in \left]0,r\right[$ on a pour tout entier naturel n, en gardant les notations qui précèdent :

$$R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt = \int_0^x \frac{(r-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\left(\frac{x-t}{r-t}\right)^n dt.$$

La fonction $\varphi : t \mapsto \dfrac{x-t}{r-t}$ étant décroissante sur $[0, x]$, on en déduit que :

$$\forall t \in [0, x], \quad 0 = \varphi(x) \leq \varphi(t) \leq \varphi(0) = \frac{x}{r}$$

et :

$$0 \leq R_n(x) \leq \left(\frac{x}{r}\right)^n \int_0^r \frac{(r-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt = \left(\frac{x}{r}\right)^n R_n(r)$$

avec $R_n(r) = f(r) - P_n(r) \leq f(r)$. Avec $0 < \dfrac{x}{r} < 1$, on en déduit alors que $\lim\limits_{n \to +\infty} R_n(x) = 0$.

Pour $x \in]-a, 0[$, en écrivant $x = -x'$ avec $x \in]0, a[$, le changement de variable $u = -t$ donne, en tenant compte de $0 \leq f^{(n+1)}(-u) \leq f^{(n+1)}(u)$ ($f^{(n+2)} \geq 0$ entraîne $f^{(n+1)}$ croissante) :

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= \int_0^{x'} \frac{(x'-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(-u)\, du \\ &\leq \int_0^{x'} \frac{(x'-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(u)\, du = R_n(x') \end{aligned}$$

et $\lim\limits_{n \to +\infty} R_n(x) = 0$.

Pour $x = 0$, on a $R_n(0) = 0$. ■

14.6 Séries entières et équations différentielles

Le théorème 14.10 peut être utilisé pour déterminer des solutions d'une équation différentielle linéaire à coefficients non constants développables en série entière.

Cette méthode est illustrée par les exercice qui suivent.

Exercice 14.24 *Déterminer une solution développable en série entière de l'équation différentielle :*

$$2x(1+x)y'' + (5x+3)y' + y = 0.$$

Solution 14.24 *Supposons qu'il existe une solution f de cette équation qui soit non identiquement nulle et développable en série entière sur un intervalle $]-R, R[$ où $R \in \overline{\mathbb{R}^+}$ est à déterminer. Notons, pour tout $x \in]-R, R[$:*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Sur $]-R, R[$, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \\ f''(x) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n(n+1) a_{n+1} x^{n-1} \\ x f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n \\ x f''(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n(n+1) a_{n+1} x^n \\ x^2 f''(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n \end{array} \right.$$

et :

$$a_0 + 3a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(2n\left(n+1\right)a_{n+1} + 2n\left(n-1\right)a_n + 5na_n + 3\left(n+1\right)a_{n+1} + a_n\right)x^n = 0$$

soit :

$$a_0 + 3a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\left(n+1\right)\left(2n+3\right)a_{n+1} + \left(n+1\right)\left(2n+1\right)a_n\right)x^n = 0$$

encore équivalent à dire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est solution de l'équation de récurrence suivante :*

$$\begin{cases} a_0 + 3a_1 = 0, \\ \forall n \geq 1,\ \left(2n+3\right)a_{n+1} + \left(2n+1\right)a_n = 0. \end{cases}$$

(unicité du développement en série entière d'une fonction).
Par récurrence, on en déduit que :

$$\left\{ \forall n \geq 0,\ a_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}a_0 \right.$$

soit :

$$f\left(x\right) = a_0 \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}x^n = \frac{a_0}{\sqrt{x}} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{x}^{2n+1}}{2n+1} = a_0 \frac{\arctan\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}.$$

Exercice 14.25 *Déterminer, en précisant leur rayon de convergence, les solutions développables en série entière de l'équation différentielle :*

$$xy'' + \left(x-2\right)y' - 2y = 0. \tag{14.2}$$

Solution 14.25 *Supposons qu'il existe une solution f de* (14.2) *non identiquement nulle et développable en série entière sur un intervalle* $]-R,R[$ *où* $R \in \overline{\mathbb{R}^+}$ *est à déterminer. Notons, pour tout* $x \in \left]-R,R\right[$ *:*

$$f\left(x\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

En utilisant le théorème 14.10, on peut écrire que, sur $\left]-R,R\right[$*, on a :*

$$\begin{cases} f'\left(x\right) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n-1} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(n+1\right)a_{n+1}x^n \\ xf'\left(x\right) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} na_nx^n \\ xf''\left(x\right) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\left(n+1\right)a_{n+1}x^n \end{cases}$$

et f est solution de (14.2) *si, et seulement si :*

$$-2\left(a_0 + a_1\right) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(n\left(n+1\right)a_{n+1} + na_n - 2\left(n+1\right)a_{n+1} - 2a_n\right)x^n = 0.$$

encore équivalent à dire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est solution de l'équation de récurrence suivante :*

$$\begin{cases} a_1 + a_0 = 0, \\ \forall n \geq 1,\ \left(n-2\right)\left(\left(n+1\right)a_{n+1} + a_n\right) = 0. \end{cases}$$

(unicité du développement en série entière d'une fonction). Cette équation est encore équivalente à :

$$\begin{cases} a_1 + a_0 = 0, \\ 2a_2 + a_1 = 0, \\ \forall n \geq 3, \ a_{n+1} = -\dfrac{1}{(n+1)} a_n. \end{cases}$$

Par récurrence, on en déduit que :

$$\begin{cases} a_1 = -a_0 \\ a_2 = \dfrac{a_0}{2} \\ \forall n \geq 3, \ a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n!} 6a_3 \end{cases}$$

soit :

$$f(x) = a_0 \left(1 - x + \frac{x^2}{2}\right) - 6a_3 \left(\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n!}\right)$$

où a_0 et a_3 sont deux constantes réelles. Le rayon de convergence de cette série étant égal à $+\infty$. On peut aussi écrire ces solutions sous la forme :

$$\begin{aligned} f(x) &= (a_0 + 6a_3) \left(1 - x + \frac{x^2}{2}\right) - 6a_3 e^{-x} \\ &= \alpha \left(1 - x + \frac{x^2}{2}\right) + \beta e^{-x} \end{aligned}$$

où α et β sont deux constantes réelles.

Inversement, on peut trouver le développement en série entière d'une fonction en écrivant cette fonction comme solution d'une équation différentielle.

Exercice 14.26 *Soit f la fonction définie sur $]-1, 1[$ par $f(x) = (1 + x)^\alpha$ où α est un réel non entier naturel.*

1. *Montrer que f est l'unique solution sur $]-1, 1[$ de l'équation différentielle avec condition initiale suivante :*

$$\begin{cases} (1 + x) y' - \alpha y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

2. *Retrouver le développement en série entière de f ainsi que son rayon de convergence.*

Solution 14.26

1. *On a bien $f(0) = 1$ et pour tout $x \in]-1, 1[$:*

$$(1 + x) f'(x) - \alpha f(x) = (1 + x) \alpha (1 + x)^{\alpha - 1} - \alpha (1 + x)^\alpha = 0$$

Le théorème de Cauchy-Lipschitz nous assure de l'unicité de cette solution.

2. *Supposons qu'il existe une solution g de cette équation différentielle développable en série entière sur un intervalle $]-R, R[$ où $R \in \overline{\mathbb{R}^+}$ est à déterminer. Notons, pour tout $x \in]-R, R[$:*

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

On a :

$$\begin{cases} g'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \\ x g'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n \end{cases}$$

et g est solution de cette équation différentielle si, et seulement si :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} ((n+1) a_{n+1} + n a_n - \alpha a_n) x^n = 0$$

encore équivalent à :

$$\forall n \geq 0,\ a_{n+1} = \frac{\alpha - n}{n+1} a_n$$

avec $a_0 = g(0) = 1$, ce qui donne par récurrence :

$$\forall n \geq 1,\ a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!},$$

soit :

$$g(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$

Le théorème de d'Alembert nous dit que le rayon de convergence de série entière est égal à 1. Enfin $f = g$ du fait de l'unicité de la solution d'un problème de Cauchy. On retrouve ainsi le développement en série entière de $(1+x)^\alpha$ sur $]-1,1[$.

Exercice 14.27 *Montrer que la fonction f définie sur $]-1,1[$ par $f(x) = \dfrac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre. En déduire le développement en série entière de cette fonction.*

Solution 14.27 *Les fonctions $x \mapsto \arcsin(x)$ et $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ étant développable en série entière sur $]-1,1[$, il en est de même du produit f. De la relation $\sqrt{1-x^2} f(x) = \arcsin(x)$, on déduit par dérivation (les fonctions considérées sont $\mathcal{C}^\infty$) que :*

$$-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} f(x) + \sqrt{1-x^2} f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

ce qui se traduit en disant que f est solution sur $]-1,1[$ de l'équation différentielle avec condition initiale :

$$\begin{cases} -xy + (1-x^2) y' = 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

En écrivant, pour tout $x \in]-1,1[$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

on a :

$$\begin{cases} x f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n \\ f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \\ x^2 f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+1} = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} (n-1) a_{n-1} x^n \end{cases}$$

et f est solution de cette équation différentielle si, et seulement si :

$$a_1 + (2a_2 - a_0)\,x + \sum_{n=2}^{+\infty} (-a_{n-1} + (n+1)\,a_{n+1} - (n-1)\,a_{n-1})\,x^n = 1$$

soit :

$$a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} ((n+1)\,a_{n+1} - na_{n-1})\,x^n = 1$$

ce qui donne :

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ \forall n \geq 1,\ (n+1)\,a_{n+1} - na_{n-1} = 0 \end{cases}$$

avec $a_0 = f(0) = 0$. On a donc :

$$\forall p \geq 1,\ 2pa_{2p} = (2p-1)\,a_{2(p-1)}$$

avec $a_0 = 0$, ce donne $a_{2p} = 0$ pour tout $p \geq 0$ (récurrence immédiate) et :

$$\forall n \geq 1,\ (2p+1)\,a_{2p+1} = 2pa_{2p-1}$$

qui donne par récurrence :

$$a_{2p+1} = \frac{(2p)\cdot(2p-2)\cdot\cdots\cdot 2}{(2p+1)\cdot(2p-1)\cdot\cdots\cdot 3}a_1$$

avec $a_1 = 1$, soit :

$$a_{2p+1} = \frac{((2p)\cdot(2p-2)\cdot\cdots\cdot 2)^2}{(2p+1)!} = \frac{2^{2p}\,(p!)^2}{(2p+1)!}$$

pour tout $p \geq 0$. Le développement en série entière de f sur $]-1,1[$ est donc :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n}\,(n!)^2}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

Le fait que les coefficients a_{2n} sont tous nuls était prévisible puisque la fonction f est impaire.

Exercice 14.28 *Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{ch}\,(x)\cos(x)$ est solution d'une équation différentielle linéaire du quatrième ordre à coefficients constants. En déduire le développement en série entière de cette fonction.*

Solution 14.28 *Les fonctions* ch *et* cos *étant développable en série entière sur $\mathbb{R}$, il en est de même du produit f. On peut écrire que :*

$$f(x) = \Re\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}e^{ix}\right) = \frac{1}{2}\Re\left(e^{(1+i)x} + e^{(-1+i)x}\right)$$

et la dérivée quatrième de f est donnée par :

$$\begin{aligned} f^{(4)}(x) &= \frac{1}{2}\Re\left((1+i)^4\,e^{(1+i)x} + (-1+i)^4\,e^{(-1+i)x}\right) \\ &= \frac{1}{2}\Re\left((1+i)^4\,e^{(1+i)x} + (1-i)^4\,e^{(-1+i)x}\right) \end{aligned}$$

avec :

$$(1 \pm i)^4 = \left(\sqrt{2}e^{\pm i\frac{\pi}{4}}\right)^4 = 4e^{\pm i\pi} = -4$$

ce qui donne :

$$f^{(4)}(x) = -4\frac{1}{2}\Re\left(e^{(1+i)x} + e^{(-1+i)x}\right) = -4f(x)$$

ce qui se traduit en disant que f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle avec conditions initiales :

$$\begin{cases} y^{(4)} + 4y = 0 \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 0,\ y'''(0) = 0 \end{cases}$$

En écrivant, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

on a $a_{2n+1} = 0$ pour tout $n \geq 0$ puisque f est paire, donc :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} x^{2n}$$

et :

$$\begin{aligned} f^{(4)}(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty} (2n)(2n-1)(2n-2)(2n-3)\, a_{2n} x^{2n-4} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+4)(2n+3)(2n+2)(2n+1)\, a_{2n+4} x^{2n} \end{aligned}$$

et f est solution de cette équation différentielle si, et seulement si :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left((2n+4)(2n+3)(2n+2)(2n+1)\, a_{2n+4} + 4a_{2n}\right) x^{2n} = 0$$

ce qui donne :

$$\forall n \geq 0,\ a_{2n+4} = -\frac{4}{(2n+4)(2n+3)(2n+2)(2n+1)} a_{2n} \tag{14.3}$$

Pour $n = 2p+1$, avec $p \geq 0$, on a :

$$a_{4p+6} = -\alpha_p a_{4p+2}$$

avec $a_2 = \dfrac{f''(0)}{2} = 0$, ce qui donne $a_{4p+2} = 0$ pour tout $p \geq 0$ par une récurrence immédiate. Sachant déjà que les a_{4p+1} et a_{4p+3}, sont tous nuls, il reste à déterminer les a_{4p} pour tout $p \geq 0$. Notant $b_p = a_{4p}$, on a en prenant $n = 2p$ dans (14.3) :

$$\forall p \geq 0,\ b_{p+1} = -\frac{4}{(4p+4)(4p+3)(4p+2)(4p+1)} b_p$$

avec $b_0 = a_0 = 1$, et par récurrence :

$$\forall p \geq 0,\ b_p = \frac{(-1)^p 4^p}{(4p)!}$$

Le développement en série entière de f sur $\mathbb{R}$ est donc :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 4^n}{(4n)!} x^{4n}$$

On peut aussi calculer les dérivées successives de f :

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \frac{1}{2}\Re\left((1+i)^n e^{(1+i)x} + (-1+i)^n e^{(-1+i)x}\right) \\ &= \frac{1}{2}\Re\left((1+i)^n e^{(1+i)x} + (-1)^n (1-i)^n e^{(-1+i)x}\right) \end{aligned}$$

ce qui donne $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ avec :

$$\begin{aligned} f^{(n)}(0) &= \frac{1}{2}\Re\left((1+i)^n + (-1)^n (1-i)^n\right) \\ &= \frac{\left(\sqrt{2}\right)^n}{2}\Re\left(e^{in\frac{\pi}{4}} + (-1)^n e^{-in-i\frac{\pi}{4}}\right) \\ &= \frac{\left(\sqrt{2}\right)^n}{2}\left(1+(-1)^n\right)\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

Pour $n = 2p+1$, on a bien $a_{2n+1} = 0$. Pour $n = 4p+2$, on a :

$$f^{(n)}(0) = 2^{2p+1}\cos\left((2p+1)\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

et pour $n = 4p$:

$$f^{(n)}(0) = 4^p \cos(p\pi) = 4^p (-1)^p.$$

Exercice 14.29 *On définit les fonctions f et g par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n^2}, \\ g(x) = e^{f(x)}. \end{cases}$$

Montrer que g est développable en série entière sur un intervalle à préciser.

Solution 14.29 *Le rayon de convergence de la série $\sum \dfrac{x^n}{n^2}$ est $R_1 = 1$ (règle de d'Alembert), la série étant absolument convergente pour $x = -1$ et $x = 1$ (série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^2}$). Les fonctions f et g sont alors $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ avec $g' = f'e^f = f'g$. La fonction g est donc solution de l'équation différentielle $y' = f'y$ avec la condition initiale $g(0) = 1$. Supposons que cette équation différentielle avec condition initiale admette une solution h développable en série entière sur un intervalle $]-R,R[$, soit $h(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. On a alors pour $|x| < \min(R,1)$:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

ce qui donne :

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n-k}}{k+1}$$

avec $a_0 = 1$. Par récurrence, on voit que $0 < a_n \leq 1$, ce qui entraîne $R \geq 1$.
Les fonctions g et h étant solutions de la même équation différentielle linéaire d'ordre 1 avec condition initiale, on déduit que $g = h$ et g est développable en série entière sur $]-1, 1[$. Si le rayon de convergence de g est strictement supérieur à 1, la fonction g est $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage ouvert de 1, mais $g' = fg$ avec $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = e^{f(1)} = e^{\frac{\pi^2}{6}} > 0$ donne $g'' = f'g + fg' = (f' + f^2) g$ et $\lim\limits_{x \to 1} f'(x) = \lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{g''(x)}{g(x)} - f^2(x) \right)$ avec $f'(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n+1} = -\dfrac{\ln(1-x)}{x}$ qui n'a pas de limite quand x tend vers 1. On aboutit donc à une impossibilité. Le rayon de convergence de cette série est donc $R = 1$.

14.7 Exercices supplémentaires

Exercice 14.30 *Le but de cet exercice est de calculer la somme de la série numérique :*

$$\sum \frac{1}{u_n} \text{ où } u_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 \text{ pour tout } n \geq 1$$

en utilisant la série entière $\sum \dfrac{x^{2n+1}}{u_n}$. La convergence de $\sum \dfrac{1}{u_n}$ est justifiée avec l'exercice 6.46, question 1.

1. *Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière.*
2. *Calculer la somme des séries entières $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n}$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n+1}$ sur leur domaine de convergence. On notera respectivement $f_1(x)$ et $f_2(x)$ ces sommes.*
3. *Calculer les primitives de $\ln(1 - x^2)$ sur $]-1, 1[$.*
4. *Calculer les primitives de $\dfrac{\ln(1 - x^2)}{x^2}$ sur $]-1, 1[$.*
5. *En déduire la somme $f(x)$ de la série entière $\sum \dfrac{x^{2n+1}}{u_n}$ sur son domaine de convergence.*
6. *En déduire la somme de la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{u_n}$.*

Solution 14.30

1. *Avec $\left| \dfrac{x^{2n+1}}{u_n} \right| < \dfrac{1}{u_n}$ pour $|x| < 1$ et la convergence de $\sum \dfrac{1}{u_n}$, on déduit que $\sum \dfrac{x^{2n+1}}{u_n}$ converge absolument.*
   Pour $|x| > 1$, on a $\left| \dfrac{x^{2n+1}}{u_n} \right| > \dfrac{x^{2n}}{(2n+1)^3} \underset{n \to +\infty}{\to} +\infty$ et $\sum \dfrac{x^{2n+1}}{u_n}$ diverge. Donc $R = 1$.
2. *Le rayon de convergence de ces séries entières est $R = 1$. Par dérivation, on a :*

$$f_1'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$$

et $f_1(x) = -\ln(1-x)$ (on a $f_1(0) = 0$). Puis pour $x \in]-1, 1[\setminus \{0\}$:

$$f_2(x) = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{x} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = \frac{f_1(x) - x}{x}$$
$$= -\frac{\ln(1-x)}{x} - 1$$

le résultat étant encore valable en 0 *puisque* f_2 *est continue sur* $]-1,1[$ *(on a* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x)}{x} = -1$*).*

3. *On a :*

$$\begin{aligned}\int \ln\left(1-x^2\right)dx &= \int \ln(1-x)\,dx + \int \ln(1+x)\,dx \\ &= -(1-x)\ln(1-x) - x + (1+x)\ln(1+x) - x + c \\ &= (1+x)\ln(1+x) - (1-x)\ln(1-x) - 2x + c \\ &= \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + x\ln\left(1-x^2\right) - 2x + c\end{aligned}$$

4. *Une intégration par parties avec :*

$$\begin{cases} u(x) = \ln(1-x^2),\ u'(x) = \dfrac{-2x}{1-x^2} \\ v'(x) = \dfrac{1}{x^2},\ v(x) = -\dfrac{1}{x}\end{cases}$$

et :

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}dx &= -\frac{\ln(1-x^2)}{x} - 2\int \frac{1}{1-x^2}dx \\ &= -\frac{\ln(1-x^2)}{x} - \int\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right)dx \\ &= -\frac{\ln(1-x^2)}{x} - \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + c\end{aligned}$$

5. *En utilisant* $u_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$*, on a par dérivation :*

$$f'(x) = 6\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{n(n+1)}$$

puis avec $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$*, on a :*

$$\begin{aligned}f'(x) &= 6\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{n+1}\right) = 6\left(f_1\left(x^2\right) - f_2\left(x^2\right)\right) \\ &= 6\left(-\ln\left(1-x^2\right) + \frac{\ln(1-x^2)}{x^2} + 1\right)\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}f(x) &= 6\left(-\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - x\ln\left(1-x^2\right) + 2x - \frac{\ln(1-x^2)}{x} - \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + x\right) \\ &= -6\left(2\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + x\ln\left(1-x^2\right) + \frac{\ln(1-x^2)}{x} - 3x\right) \\ &= -6\left(\ln(1+x)\left(2 + x + \frac{1}{x}\right) + \ln(1-x)\left(-2 + x + \frac{1}{x}\right) - 3x\right) \\ &= -6\left(\frac{\ln(1+x)}{x}(x+1)^2 + \frac{\ln(1-x)}{x}(1-x)^2 - 3x\right)\end{aligned}$$

la fonction obtenue étant bien continue en 0*.*

6. *Comme la série entière converge pour $x = 1$, on a (théorème d'Abel) :*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{u_n} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = 6(3 - 4\ln(2))$$

On peut aussi écrire, pour $x \in]0, 1[$:

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{u_n} - f(x) \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - x^{2n+1}}{u_n}$$

avec :

$$0 \leq 1 - x^{2n+1} = (1 - x) \sum_{k=0}^{2n} x^{2k} \leq (2n+1)(1-x)$$

et $u_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, ce qui donne :

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{u_n} - f(x) \right| \leq 6(1-x) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \pi^2 (1-x) \underset{x \to 1}{\to} 0$$

Exercice 14.31 *Le but de cet exercice est d'étudier la série entière :*

$$\sum \frac{x^n}{u_n} \text{ où } u_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 \text{ pour tout } n \geq 1$$

On utilise les fonctions $f_1(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n}$ et $f_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n+1}$ de l'exercice précédent.

1. *Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière.*
2. *Calculer la somme $f_3(x)$ de la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$ sur son domaine de convergence.*
3. *Calculer la somme $f_4(x)$ de la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ sur son domaine de convergence.*
4. *Calculer la somme $f_5(x)$ de la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{2n+1}$ sur son domaine de convergence.*
5. *En déduire la somme $g(x)$ de la série entière $\sum \dfrac{x^n}{u_n}$ sur son domaine de convergence.*
6. *En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{u_n}$.*

Solution 14.31

1. *Avec $u_n > 0$ et $\dfrac{u_n}{u_{n+1}} = \dfrac{u_n}{u_n + (n+1)^2} = \dfrac{1}{1 + \frac{(n+1)^2}{u_n}} = \dfrac{1}{1 + \frac{6(n+1)}{n(2n+1)}} \underset{n \to +\infty}{\to} 1$, on déduit que $R = 1$.*

2. *Le rayon de convergence de ce série entière est* $R = 1$*. Par dérivation, on a :*

$$f_3'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2} - 1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right) - 1$$

et

$$\begin{aligned} f_3(x) &= \frac{1}{2}\left(\ln(1+x) - \ln(1-x)\right) - x \\ &= \ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) - x = \operatorname{argth}(x) - x \end{aligned}$$

(on a $f_3(0) = 0$*).*

3. *Le rayon de convergence de ce série entière est* $R = 1$*. Par dérivation, on a :*

$$f_4'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2} - 1$$

et $f_4(x) = \arctan(x) - x$ *(on a* $f_3(0) = 0$*).*

4. *Le rayon de convergence de ce série entière est* $R = 1$*.*
On a $f_5(0) = 0$*.*
Pour $x \in \left]0, 1\right[$*, on a :*

$$f_5(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{x}} f_3\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{\sqrt{x}} \ln\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}}\right) - 1$$

Pour $x \in \left]-1, 0\right[$*, on a :*

$$f_5(x) = \frac{1}{\sqrt{-x}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{-x}^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{-x}} f_4\left(\sqrt{-x}\right) = \frac{\arctan\left(\sqrt{-x}\right)}{\sqrt{-x}} - 1$$

la fonction f_5 *étant continue en* 0*.*

5. *On a pour* $x \in \left]-1, 1\right[$ *:*

$$\begin{aligned} g(x) &= 6\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1} - 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1}\right) \\ &= 6\left(f_1(x) + f_2(x) - 4 f_5(x)\right) \end{aligned}$$

soit :

$$\begin{aligned} g(x) &= -6\left(\ln(1-x) + \frac{\ln(1-x) + x}{x} + 4\left(\frac{1}{\sqrt{x}} \ln\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}}\right) - 1\right)\right) \\ &= -6\left(-3 + \ln(1-x) + \frac{\ln(1-x)}{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} \ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)\right) \end{aligned}$$

pour $x \in \left]0, 1\right[$ *et :*

$$\begin{aligned} g(x) &= -6\left(\ln(1-x) + \frac{\ln(1-x) + x}{x} + 4\left(\frac{\arctan\left(\sqrt{-x}\right)}{\sqrt{-x}} - 1\right)\right) \\ &= -6\left(-3 + \ln(1-x) + \frac{\ln(1-x)}{x} + 4\frac{\arctan\left(\sqrt{-x}\right)}{\sqrt{-x}}\right) \end{aligned}$$

pour $x \in \left]-1, 0\right[$*. Pour* $x = 0$*, on a* $f(0) = 0$*.*

6. *Comme la série entière converge pour $x = 1$, on a (théorème d'Abel) :*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{u_n} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} g(x)$$

En écrivant, pour $x \in]0,1[$, que $g(x) = -6(-3 + h(x))$ avec :

$$\begin{aligned}
h(x) &= \ln(1-x)\frac{x+1}{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}\ln\left(1-\sqrt{x}\right) + \frac{2}{\sqrt{x}}\ln\left(1+\sqrt{x}\right) \\
&= \ln\left(1-\sqrt{x}\right)\frac{x+1}{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}\ln\left(1-\sqrt{x}\right) + \ln\left(1+\sqrt{x}\right)\frac{x+1}{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}\ln\left(1+\sqrt{x}\right) \\
&= \ln\left(1-\sqrt{x}\right)\left(\frac{x+1}{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}\right) + \ln\left(1+\sqrt{x}\right)\frac{x+1}{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}\ln\left(1+\sqrt{x}\right) \\
&= \ln\left(1-\sqrt{x}\right)\frac{1}{x}\left(x+1-2\sqrt{x}\right) + \ln\left(1+\sqrt{x}\right)\frac{x+1}{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}\ln\left(1+\sqrt{x}\right) \\
&= \left(1-\sqrt{x}\right)^2\ln\left(1-\sqrt{x}\right)\frac{1}{x} + \ln\left(1+\sqrt{x}\right)\frac{x+1}{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}\ln\left(1+\sqrt{x}\right)
\end{aligned}$$

on a $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} h(x) = 4\ln(2)$ *et* $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} g(x) = 6(3 - 4\ln(2))$.

On peut aussi écrire, pour $x \in]0,1[$:

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{u_n} - g(x)\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-x^n}{u_n}$$

avec :

$$0 \leq 1 - x^n = (1-x)\sum_{k=0}^{n-1} x^{2k} \leq n(1-x)$$

et $u_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} > n^3$, *ce qui donne :*

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{u_n} - g(x)\right| \leq 6(1-x)\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \pi^2(1-x) \underset{x \to 1}{\to} 0.$$

Exercice 14.32 *Déterminer le rayon de convergence et la somme des séries entières* $\sum \dfrac{\cos(n\theta)}{n!} z^n$ *et* $\sum \dfrac{\sin(n\theta)}{n!} z^n$, *où θ est un réel fixé.*

Solution 14.32 *Considérons la série entière $\sum a_n z^n$, où* $a_n = \dfrac{e^{in\theta}}{n!}$ *pour $n \geq 0$. Avec* $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \dfrac{1}{n+1} \underset{n \to +\infty}{\to} 0$, *on déduit que le rayon de convergence de cette série est $+\infty$ pour tout réel θ.*
Puis avec $\cos(n\theta) = \dfrac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2}$ *et* $\sin(n\theta) = \dfrac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i}$, *on déduit que les séries entières* $\sum \dfrac{\cos(n\theta)}{n!} z^n$ *et* $\sum \dfrac{\sin(n\theta)}{n!} z^n$ *ont aussi un rayon de convergence infini.*
Pour tout nombre complexe z, on a :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{in\theta}}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(e^{i\theta} z\right)^n}{n!} = e^{e^{i\theta} z}$$

et :

$$\begin{aligned} g(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n!} z^n = \frac{e^{e^{i\theta}z} + e^{e^{-i\theta}z}}{2} \\ &= e^{z\cos(\theta)} \frac{e^{iz\sin(\theta)} + e^{-iz\sin(\theta)}}{2} = e^{z\cos(\theta)} \cos(z\sin(\theta)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n!} z^n = \frac{e^{e^{i\theta}z} - e^{e^{-i\theta}z}}{2i} \\ &= e^{z\cos(\theta)} \frac{e^{iz\sin(\theta)} - e^{-iz\sin(\theta)}}{2i} = e^{z\cos(\theta)} \sin(z\sin(\theta)) \end{aligned}$$

15

Exponentielle complexe, fonctions trigonométriques, nombre π

15.1 Rappels sur la fonction exponentielle réelle

Si on suppose connue la fonction logarithme ln définie sur $]0,+\infty[$ comme la primitive nulle en 1 de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, on vérifie alors que cette fonction ln vérifie l'équation fonctionnelle $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ pour tous réels strictement positifs x, y, que c'est un homéomorphisme de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$ et sa fonction réciproque est appelée fonction exponentielle réelle. On note $x \mapsto \exp(x)$ ou $x \mapsto e^x$ cette fonction réciproque. Cette fonction est indéfiniment dérivable de $\mathbb{R}$ sur $]0,+\infty[$, égale à sa dérivée et vérifie l'équation fonctionnelle $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ pour tous réels x, y.

Rappelons comment se montrent ces résultats.

1. On a $\ln(1) = 0$ et, pour tout $y > 0$ fixé, la dérivée de la fonction $x \mapsto \ln(xy)$ est égale à $\dfrac{y}{xy} = \dfrac{1}{x} = \ln'(x)$, ce qui donne $\ln(xy) = \ln(x) + C_y$, la constante C_y étant égale à $\ln(y) - \ln(1) = \ln(y)$, ce qui donne bien $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(x)$.
2. La fonction ln étant dérivable sur $]0,+\infty[$ de dérivée $\ln'(x) = \dfrac{1}{x} > 0$, elle est strictement croissante sur cet intervalle. Avec $\ln(2) > \ln(1) = 0$, $\ln(2^n) = n\ln(2)$ on déduit que cette fonction n'est pas bornée et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$. Enfin avec $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ln(x)$, on déduit que $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$. La fonction ln est donc continue strictement croissante de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$, c'est donc un homéomorphisme de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$. On peut alors définir sa fonction réciproque exp par :
$$(x \in \mathbb{R} \text{ et } y = \exp(x)) \Leftrightarrow \left(y \in \mathbb{R}^{+,*} \text{ et } x = \ln(y)\right).$$
Cette fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée donnée par :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exp'(x) = \frac{1}{\ln'(y)} = y = \exp(x)$$
Il en résulte que exp est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.
3. Pour tous réels x, y, on a :
$$\ln(\exp(x+y)) = x + y = \ln(\exp(x)) + \ln(\exp(y)) = \ln(\exp(x)\exp(y))$$
et donc $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$.

Réciproquement, on peut montrer que si f est une fonction dérivable [resp. monotone] de $\mathbb{R}$ dans $]0,+\infty[$ telle que $f'(x) = f(x)$ pour tout réel x [resp. $f(x+y) = f(x)f(y)$ pour tous réels x, y], il existe alors un réel α tel que $f(x) = \alpha e^x$ [resp. $f(x) = e^{\alpha x}$] pour tout $x \in \mathbb{R}$, la constante α étant définie par $\alpha = f(0)$ [resp. $\alpha = \ln(f(1))$].

Rappelons comment se montrent ces résultats.

1. Pour f dérivable de $\mathbb{R}$ dans $]0,+\infty[$, la fonction g définie par $g(x) = f(x)e^{-x}$ est également dérivable avec $g'(x) = e^{-x}(f'(x) - f(x))$. Si $f' = f$, on a alors $g' = 0$ sur $\mathbb{R}$ et $g(x) = \alpha$, soit $f(x) = \alpha e^x$ avec $\alpha = g(0) = f(0)$.
2. Supposons que f soit monotone telle que $f(x+y) = f(x)f(y)$ pour tous réels x, y. La fonction $g = \ln \circ f$ vérifie alors l'équation fonctionnelle de Cauchy $g(x+y) = g(x)+g(y)$ et il est alors facile de vérifier que $g(x) = \alpha x$ pour tout réel x, ce qui entraîne $f(x) = e^{\alpha x}$ avec $\alpha = g(1) = \ln(f(1))$.

L'utilisation de la formule de Taylor-Lagrange permet de montrer que la fonction exponentielle est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

Cette formule s'écrit pour $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\exp^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_n(x)$$

avec $R_n(x) = \dfrac{e^{\theta_{n,x}x}}{(n+1)!} x^{n+1}$ où $\theta_{n,x}x \in]0,1[$. Pour tout réel x, on a :

$$|R_n(x)| \leq \frac{e^{|x|}}{(n+1)!} |x|^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

ce qui entraîne :

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

15.2 La fonction exponentielle complexe

Sans connaissance préalable de la fonction exponentielle réelle, la définition de la fonction exponentielle complexe est basée sur le résultat suivant.

Lemme 15.1 *Pour tout réel $x \geq 0$ la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ est convergente.*

Démonstration. Pour $x = 0$ c'est clair et pour $x > 0$, en notant $u_n = \dfrac{x^n}{n!}$, on a $u_n > 0$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{x}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. On déduit alors du théorème de d'Alembert que la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ est convergente. ■

Théorème 15.1 *Pour tout nombre complexe z la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ est convergente.*

Démonstration. Le lemme précédent nous dit que la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ est absolument convergente et donc convergente pour tout nombre complexe z. ■

On note $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ la somme de cette série pour tout nombre complexe z.

Le rayon de convergence de cette série étant infini, la fonction f ainsi définie est continue sur $\mathbb{C}$.

On rappelle que le produit de Cauchy $\sum w_n$ de deux séries numériques $\sum u_n$ et $\sum v_n$ absolument convergentes est absolument convergent et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right)$$

où $w_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$.

Théorème 15.2 *Pour tous nombres complexes λ et μ on a $f(\lambda) f(\mu) = f(\lambda + \mu)$.*

Démonstration. Les séries $\sum \frac{\lambda^n}{n!}$ et $\sum \frac{\mu^n}{n!}$ étant absolument convergentes on a :

$$f(\lambda) f(\mu) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n$$

où :

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} C_n^k \lambda^k \mu^{n-k} = \frac{(\lambda + \mu)^n}{n!}$$

ce qui donne $f(\lambda) f(\mu) = f(\lambda + \mu)$. ■

Si maintenant on se souvient de la fonction exponentielle réelle, on a le résultat suivant.

Théorème 15.3 *La restriction de f à $\mathbb{R}$ coïncide avec la fonction exponentielle réelle.*

Démonstration. La restriction de f à $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x) f(y)$, on a $f(x) = e^{\alpha x}$ pour tout réel x où $\alpha = \ln(f(1))$. Comme $f(1) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$, on a $\alpha = \ln(e) = 1$ et $f(x) = e^x$.

On peut aussi dire que cette restriction est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n \frac{x^{n-1}}{n!} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = f(x)$ (la somme d'une série entière réelle est dérivable sur son domaine réel de convergence et la dérivée s'obtient en dérivant terme à terme), donc $f(x) = \alpha e^x$ avec $\alpha = f(0) = 1$ ■

Les résultats précédents nous conduisent à noter, pour tout nombre complexe z, e^z ou $\exp(z)$ la somme de la série $\sum \frac{z^n}{n!}$, ce qui définit ainsi la fonction exponentielle complexe.

Remarque 15.1 *Avec l'égalité $1 = e^0 = e^{z-z} = e^z e^{-z}$, on déduit que $e^z \neq 0$ pour tout nombre complexe z et $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$.*

Remarque 15.2 *La continuité de la fonction exponentielle et relation fonctionnelle $e^{\lambda+\mu} = e^\lambda e^\mu$ pour tous nombres complexes λ, μ se traduisent en disant que la fonction exponentielle est un morphisme de groupes continu de $(\mathbb{C}, +)$ dans $(\mathbb{C}^*, \cdot)$. Nous verrons plus loin que ce morphisme est surjectif de noyau $2i\pi\mathbb{Z}$ une fois défini le nombre π.*

En fait, on peut retrouver les propriétés de la fonction exponentielle réelle avec cette définition de l'exponentielle complexe.

1. Avec $e^x \neq 0$ et $e^x = \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 \geq 0$, on déduit que $e^x > 0$ pour tout réel x.
2. Avec $(e^x)' = e^x > 0$ pour tout réel x, on déduit que la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
3. Avec $e^x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!} > 1 + x$ pour $x > 0$, on déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et avec $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$, on déduit que $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.
4. La fonction exponentielle est donc continue strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty[$ et en conséquence, c'est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty[$. La fonction réciproque est notée ln et on l'appelle fonction logarithme népérien. On a l'équation fonctionnelle :

$$\ln(xy) = \ln(e^u e^v) = \ln\left(e^{u+v}\right) = u + v = \ln(x) + \ln(y)$$

valable pour tous réels $x = e^u > 0$ et $y = e^v > 0$ (les réels u et v sont uniquement déterminés) et en particulier $\ln(1) = 0$. Cette fonction ln est dérivable de dérivée donnée par :

$$\ln'(x) = \frac{1}{(e^u)'} = \frac{1}{e^u} = \frac{1}{x}.$$

Avec $\ln'(1+x) = \dfrac{1}{1+x} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$ pour $x \in]-1, 1[$, on déduit que :

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

pour $x \in]-1, 1[$ (intégration des développements en série entière), le rayon de convergence de cette série entière étant égal à 1.

Théorème 15.4

1. *Pour tout nombre complexe z, on a $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$.*
2. *Pour tout nombre réel t, on a $|e^{it}| = 1$.*

Démonstration. Le premier point se déduit de la continuité de la fonction $z \mapsto \overline{z}$ sur $\mathbb{C}$ (qui résulte de $|\overline{z_1} - \overline{z_2}| = |z_1 - z_2|$) :

$$\left(e^z = \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}\right)\right) \Rightarrow \left(\overline{e^z} = \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\overline{z}^k}{k!}\right) = e^{\overline{z}}\right)$$

Pour tout nombre complexe z on a alors :

$$|e^z|^2 = e^z \overline{e^z} = e^z e^{\overline{z}} = e^{z+\overline{z}} = e^{2\Re(z)}$$

et en particulier, pour tout réel t :

$$\left|e^{it}\right|^2 = e^0 = 1.$$

■

15.3 Les fonctions ch, sh, cos et sin

On définit les fonctions cosinus et sinus réels par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \cos(t) = \Re\left(e^{it}\right) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \text{ et } \sin(t) = \Im\left(e^{it}\right) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}.$$

L'égalité $|e^{it}| = 1$ se traduit alors par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$$

et ces fonctions sont donc à valeurs dans $[-1, 1]$.

De la définition de l'exponentielle complexe et de la continuité des fonction partie réelle et partie imaginaire, on déduit que ces fonctions sont développables en séries entières sur $\mathbb{R}$ avec :

$$\cos(t) = \Re\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n t^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Re\left(\frac{i^n t^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} t^{2n}$$

et :

$$\sin(t) = \Im\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n t^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Im\left(\frac{i^n t^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n+1}$$

On déduit également que ces fonctions sont indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$ avec :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \cos'(t) = \Re\left(ie^{it}\right) = -\sin(t) \text{ et } \sin'(t) = \Im\left(ie^{it}\right) = \cos(t).$$

En fait, on définit plus généralement les fonctions cos, sin, ch et sh sur $\mathbb{C}$ par :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \begin{cases} \operatorname{ch}(z) = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} z^{2n} \\ \operatorname{sh}(z) = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1} \\ \cos(z) = \operatorname{ch}(iz) = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \\ \sin(z) = -i\operatorname{sh}(iz) = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \end{cases}$$

On a donc :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \begin{cases} \operatorname{ch}^2(z) - \operatorname{sh}^2(z) = 1 \\ \cos^2(z) + \sin^2(z) = 1 \end{cases}$$

Les fonctions $\cos, \operatorname{ch}$ sont paires et les fonctions $\sin, \operatorname{sh}$ sont impaires.

En se limitant à l'ensemble des réels, les fonctions ch et sh sont indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{ch}'(x) = \operatorname{sh}(x) \text{ et } \operatorname{sh}'(x) = \operatorname{ch}(x).$$

De la définition $\operatorname{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, on déduit que $\operatorname{ch}(x) > 0$ et avec $\operatorname{ch}^2(x) = \operatorname{sh}^2(x) + 1$, que $\operatorname{ch}(x) \geq 1$ pour tout réel x, la valeur 1 étant atteinte pour $x = 0$. Il en résulte que sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc $\operatorname{sh}(x) > \operatorname{sh}(0) = 0$ pour $x > 0$ et ch est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. Enfin avec $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{ch}(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{sh}(x) = +\infty$ et l'argument de parité, on peut tracer les graphes de ces fonctions (figure 15.1).

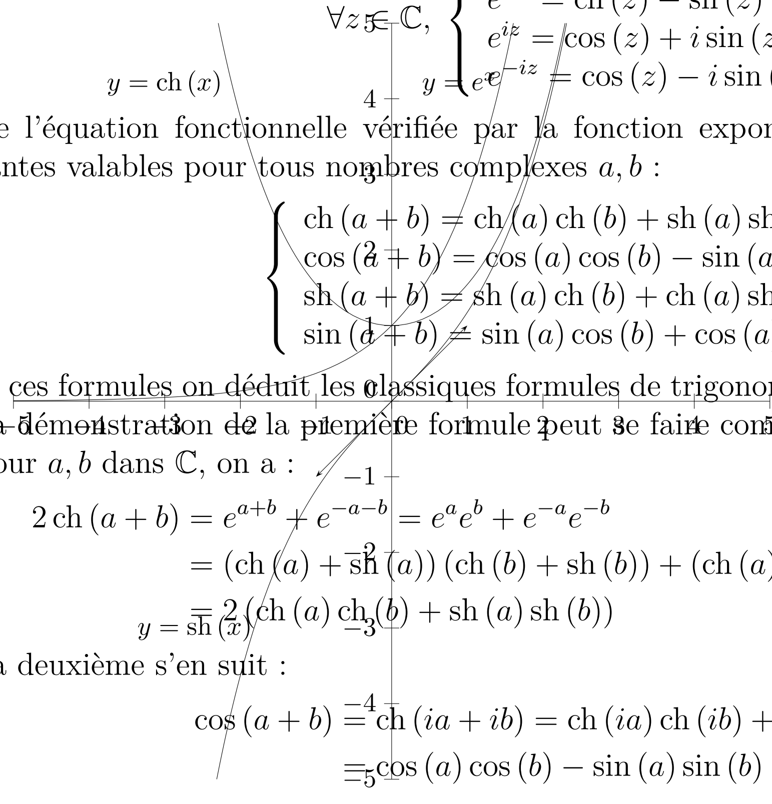

Figure 15.1 – fonctions e^x, $\operatorname{ch}(x)$ et $\operatorname{sh}(x)$

On vérifie facilement que :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \begin{cases} e^{z} = \operatorname{ch}(z) + \operatorname{sh}(z) \\ e^{-z} = \operatorname{ch}(z) - \operatorname{sh}(z) \\ e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z) \\ e^{-iz} = \cos(z) - i\sin(z) \end{cases}$$

De l'équation fonctionnelle vérifiée par la fonction exponentielle, on déduit les relations suivantes valables pour tous nombres complexes a, b :

$$\begin{cases} \operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b) \\ \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\ \operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{ch}(a)\operatorname{sh}(b) \\ \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) \end{cases}$$

et de ces formules on déduit les classiques formules de trigonométrie circulaire et hyperbolique.

La démonstration de la première formule peut se faire comme suit.

Pour a, b dans $\mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned} 2\operatorname{ch}(a+b) &= e^{a+b} + e^{-a-b} = e^{a}e^{b} + e^{-a}e^{-b} \\ &= (\operatorname{ch}(a) + \operatorname{sh}(a))(\operatorname{ch}(b) + \operatorname{sh}(b)) + (\operatorname{ch}(a) - \operatorname{sh}(a))(\operatorname{ch}(b) - \operatorname{sh}(b)) \\ &= 2(\operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b)) \end{aligned}$$

La deuxième s'en suit :

$$\begin{aligned} \cos(a+b) &= \operatorname{ch}(ia+ib) = \operatorname{ch}(ia)\operatorname{ch}(ib) + \operatorname{sh}(ia)\operatorname{sh}(ib) \\ &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \end{aligned}$$

Les deux dernières formules se montrent de manière analogue.

Avec les arguments de parité, on déduit alors les formules suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l} \operatorname{ch}(a-b)=\operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b)-\operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b) \\ \cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b) \\ \operatorname{sh}(a-b)=\operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(b)-\operatorname{ch}(a)\operatorname{sh}(b) \\ \sin(a-b)=\sin(a)\cos(b)-\cos(a)\sin(b) \end{array}\right.$$

Prenant $a=b$, on a :

$$\left\{\begin{array}{l} \operatorname{ch}(2a)=\operatorname{ch}^2(a)+\operatorname{sh}^2(a)=1+2\operatorname{sh}^2(a)=2\operatorname{ch}^2(a)-1 \\ \cos(2a)=\cos^2(a)-\sin^2(a)=2\cos^2(a)-1=1-2\sin^2(a) \\ \operatorname{sh}(2a)=2\operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(b) \\ \sin(2a)=2\sin(a)\cos(b) \end{array}\right.$$

Si les fonctions cos et sin restreintes à $\mathbb{R}$ bornées, il n'en n'est pas de même pour ces fonctions définies sur $\mathbb{C}$. Précisément pour $z=x+iy\in\mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned} \cos(z) &= \cos(x)\cos(iy)-\sin(x)\sin(iy) \\ &= \cos(x)\operatorname{ch}(y)+i\sin(x)\operatorname{sh}(y) \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} |\cos(z)|^2 &= \cos^2(x)\operatorname{ch}^2(y)+\sin^2(x)\operatorname{sh}^2(y) \\ &= \cos^2(x)\operatorname{ch}^2(y)+\left(1-\cos^2(x)\right)\operatorname{sh}^2(y) \\ &= \cos^2(x)\left(\operatorname{ch}^2(y)-\operatorname{sh}^2(y)\right)+\operatorname{sh}^2(y) \\ &= \cos^2(x)+\operatorname{sh}^2(y)\geq\operatorname{sh}^2(y) \end{aligned}$$

la fonction sh étant non majorée sur $\mathbb{R}$.

15.4 Le nombre π

On désigne par Γ l'ensemble des nombres complexes de module égal à 1. C'est un sous-groupe du groupe multiplicatif $(\mathbb{C}^*,\cdot)$.

De l'équation fonctionnelle vérifiée par la fonction exponentielle, on déduit le résultat suivant.

Théorème 15.5 *L'application $\varphi : t\mapsto e^{it}$ réalise un morphisme de groupes de $(\mathbb{R},+)$ dans $(\Gamma,\cdot)$.*

Nous allons voir que ce morphisme φ est surjectif et que son noyau n'est pas réduit à $\{0\}$, comme c'est un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$, il est dense ou discret. Nous allons voir qu'il est discret, c'est-à-dire de la forme $\mathbb{Z}\alpha$, où α est un réel strictement positif.

Lemme 15.2 *On a* $\cos(2)<0$.

Démonstration. $\cos(2)$ est la somme de la série alternée $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}2^{2n}$, donc en notant S_n la somme partielle d'indice n de cette série, on a pour tout entier $n\geq 0$:

$$S_{2n+1}\leq\cos(2)\leq S_{2n}$$

et en particulier :

$$\cos(2)\leq S_4=1-\frac{2^2}{2}+\frac{2^4}{24}=-\frac{1}{3}<0$$

■

Lemme 15.3 *L'ensemble* $E = \{t \in [0,2] \mid \cos(t) = 0\}$ *est non vide et admet une borne inférieure* $\alpha \in \left]0,2\right[\cap E$.

Démonstration. Comme E est contenu dans $[0,2]$, il est borné. Il reste à montrer qu'il est non vide.

Comme la fonction cos est continue sur $\mathbb{R}$ avec $\cos(0) = 1 > 0$ et $\cos(2) < 0$ le théorème des valeurs intermédiaires nous dit qu'il existe un réel $t \in \left]0,2\right[$ tel que $\cos(t) = 0$.

L'ensemble E étant non vide et minoré admet une borne inférieure α et cette borne inférieure est dans E puisque cet ensemble est fermé ($E = [0,2] \cap \cos^{-1}\{0\}$ avec cos continue). On a donc $\cos(\alpha) = 0$ et $\alpha \in \left]0,2\right[$ puisque $\cos(0) \neq 0$ et $\cos(2) \neq 0$ (on peut aussi dire, par définition de la borne inférieure, qu'il existe une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans E qui converge vers α, donc $\cos(\alpha) = \lim\limits_{n\to+\infty} \cos(t_n) = 0$ et $\alpha \in E$). ■

On définit le nombre π par $\pi = 2\alpha$.

$\dfrac{\pi}{2}$ est donc le plus petit réel positif qui vérifie $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.

Lemme 15.4 *On a* $\cos(t) > 0$ *pour tout* $t \in \left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$, *la fonction* sin *est strictement croissante de* $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ *sur* $[-1,1]$, $\sin(t) > 0$ *pour tout* $t \in \left]0,\pi\right[$ *et la fonction* cos *est strictement décroissante de* $[0,\pi]$ *sur* $[-1,1]$.

Démonstration. Par définition de α, on a $\cos(t) > 0$ pour tout $t \in \left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$. En effet, on a $\cos(t) \neq 0$ pour tout $t \in \left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ par définition de $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ comme borne inférieure de E. La fonction continue cos est donc de signe constant sur cet intervalle et avec $\cos(0) = 1 > 0$, on déduit que $\cos(t) > 0$ pour $t > 0$ voisin de 0 et $\cos(t) > 0$ pour tout $t \in \left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$. Comme la fonction cos est paire avec $\cos(0) = 1 > 0$, on déduit que $\cos(t) > 0$ pour tout $t \in \left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$.

Comme $\sin'(t) = \cos(t) > 0$ pour tout $t \in \left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$, la fonction sin est strictement croissante sur $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Avec $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + \sin^2\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$ et $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$, on déduit que $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \pm 1$ et avec $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) > \sin(0) = 0$, que $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$. La fonction sin étant impaire, on a $\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = -1$ et l'image de $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ par sin est bien $[-1,1]$.

Pour $t \in \left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, on a $\sin(t) > \sin(0) = 0$ et pour $t = \dfrac{\pi}{2} + t' \in \left]\dfrac{\pi}{2},\pi\right[$, $\sin(t) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\cos(t') + \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\sin(t') = \cos(t') > 0$.

Comme $\cos'(t) = -\sin(t) < 0$ pour tout $t \in \left]0,\pi\right[$, la fonction cos est strictement décroissante sur $[0,\pi]$.

Avec $\cos(0) = 1$, $\cos(\pi) = \cos\left(2\dfrac{\pi}{2}\right) = \cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}\right) - \sin^2\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -1$, on déduit que l'image de $[0,\pi]$ par cos est bien $[-1,1]$. ■

Remarque 15.3 *La fonction* cos *[resp.* sin*] est continue strictement décroissante [resp. croissante] de* $[0,\pi]$ *[resp.* $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$*] sur* $[-1,1]$, *elle réalise donc un homéomorphisme de* $[0,\pi]$ *[resp.* $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$*] sur* $[-1,1]$. *Sa fonction réciproque est notée* arccos *[resp.* arcsin*]. Comme* cos *[resp.*

$\sin]$ *est dérivable de dérivée non nulle sur* $]0,\pi[$ *[resp.* $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$*] la fonction* $\arccos$ *[resp.* $\arcsin]$ *est dérivable sur* $]-1,1[$ *de dérivée* $\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ *[resp.* $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$*].*

Lemme 15.5 *Pour tout* $t \in\ ]0,2\pi[$*, on a* $e^{it} \neq 1$*.*

Démonstration. Soient $t \in\ ]0,2\pi[$ et $z = e^{i\frac{t}{4}} = \cos\left(\frac{t}{4}\right) + i\sin\left(\frac{t}{4}\right)$. Comme $\frac{t}{4} \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, on a $\cos\left(\frac{t}{4}\right) > 0$ et $\sin\left(\frac{t}{4}\right) > 0$.

En écrivant que :

$$\begin{aligned} e^{it} = \left(e^{i\frac{t}{4}}\right)^4 &= \cos^4\left(\frac{t}{4}\right) - 6\cos^2\left(\frac{t}{4}\right)\sin^2\left(\frac{t}{4}\right) + \sin^4\left(\frac{t}{4}\right) \\ &\quad +4i\cos\left(\frac{t}{4}\right)\sin\left(\frac{t}{4}\right)\left(\cos^2\left(\frac{t}{4}\right) - \sin^2\left(\frac{t}{4}\right)\right) \end{aligned}$$

on déduit que l'égalité $e^{it} = 1$ entraîne $\cos^2\left(\frac{t}{4}\right) = \sin^2\left(\frac{t}{4}\right)$ et avec $\cos^2\left(\frac{t}{4}\right) + \sin^2\left(\frac{t}{4}\right) = 1$, cela impose $\cos^2\left(\frac{t}{4}\right) = \sin^2\left(\frac{t}{4}\right) = \frac{1}{2}$ et :

$$\begin{aligned} e^{it} &= \cos^4\left(\frac{t}{4}\right) - 6\cos^2\left(\frac{t}{4}\right)\sin^2\left(\frac{t}{4}\right) + \sin^4\left(\frac{t}{4}\right) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{6}{4} = -1 \end{aligned}$$

ce qui est une contradiction. ■

On en déduit immédiatement le résultat suivant.

Lemme 15.6 *On a :*

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = i,\ e^{i\pi} = -1 \text{ et } e^{2i\pi} = 1$$

et pour tout réel t *:*

$$\left\{\begin{array}{c} \cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin(t) \\ \sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right) = \cos(t) \\ \cos(t+\pi) = -\cos(t) \\ \sin(t+\pi) = -\sin(t) \end{array}\right.$$

Les fonctions $\cos$ *et* $\sin$ *sont périodiques de plus petite période* 2π*.*

Démonstration. Les deux premières égalités se déduisent de (et sont même équivalentes à) :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,\ \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,\ \cos(\pi) = -1,\ \sin(\pi) = 0$$

($\cos(\pi) = -1$ a été montré avec le lemme précédent et $\sin^2(\pi) = 1 - \cos^2(\pi) = 0$).

Il en résulte que $e^{2i\pi} = \left(e^{i\pi}\right)^2 = 1$, ce qui équivaut à $\cos(2\pi) = 1$ et $\sin(2\pi) = 0$.

Les formules de trigonométries nous donnent les dernières égalité et la 2π-périodicité de $\cos$ et $\sin$.

Si $T \in\ ]0,2\pi[$ est une période plus petite, on a alors $\cos(T) = 1, \sin(T) = 0$, soit $e^{iT} = 1$ avec $T \in\ ]0,2\pi[$, ce qui est impossible. ■

Théorème 15.6 *Le noyau du morphisme de groupes* $\exp : z \mapsto e^z$, *de* $(\mathbb{C}, +)$ *dans* $(\mathbb{C}^*, \cdot)$, *est* $2i\pi\mathbb{Z}$.

Démonstration. Pour tout entier naturel k, on a $e^{2ik\pi} = (e^{2i\pi})^k = 1$ et avec $e^{-2ik\pi} = \dfrac{1}{e^{2ik\pi}}$, on déduit que le résultat est valable pour tout entier relatif k. La fonction ψ s'annule donc sur $2i\pi\mathbb{Z}$.

Si $e^z = 1$ avec $z = x + iy$, on a $|e^z| = e^x |e^{iy}| = e^x = 1$ et $x = 0$, donc $z = iy$ et $e^{iy} = 1$. Si $y \notin 2\pi\mathbb{Z}$, il existe un entier relatif k tel que $2k\pi < y < 2(k+1)\pi$ ($k = E\left(\dfrac{y}{2\pi}\right)$) donc $y - 2k\pi \in]0, 2\pi[$ et $e^{iy} = e^{i(y-2k\pi)} \neq 1$ d'après le lemme précédent. On a donc $y \in 2\pi\mathbb{Z}$ et $z = iy \in 2i\pi\mathbb{Z}$. ∎

Le théorème précédent se traduit en disant que la fonction $z \mapsto e^z$ est périodique de période $2i\pi$. Il se traduit aussi en disant que l'égalité $e^z = 1$ est réalisée si, et seulement si, il existe un entier relatif k tel que $z = 2ik\pi$.

Remarque 15.4 *L'égalité* $(e^{2i\pi})^k = 1$ *pour* k *non entier n'est pas vraiment valable, sans quoi on montrerait que* $-1 = 1$ *comme suit :*

$$\left(1 = e^{2i\pi}\right) \Rightarrow \left(1 = 1^{\frac{1}{2}} = \left(e^{2i\pi}\right)^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}2i\pi} = e^{i\pi} = -1\right)$$

Corollaire 15.1 *L'application* $\varphi : t \mapsto e^{it}$ *réalise un morphisme continu de groupes de* $(\mathbb{R}, +)$ *dans* $(\Gamma, \cdot)$ *de noyau* $\ker(\varphi) = 2\pi\mathbb{Z}$.

On peut aussi montrer directement qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $\ker(\varphi) = \alpha\mathbb{Z}$ et définir π par $\alpha = 2\pi$ (voir [?] ou [?]).

Montrons enfin que φ est surjectif.

Théorème 15.7 *L'application* $\varphi : t \mapsto e^{it}$ *réalise un morphisme continu de groupes surjectif de* $(\mathbb{R}, +)$ *sur* $(\Gamma, \cdot)$ *de noyau* $\ker(\varphi) = 2\pi\mathbb{Z}$.

Démonstration. Soit $z = x + iy$ dans Γ. On distingue les cas de figure suivants.

1. Si $x \geq 0$ et $y \geq 0$, alors avec $|z|^2 = x^2 + y^2 = 1$, on déduit que x et y sont dans $[0, 1]$. Comme la fonction cos est strictement décroissante sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ avec $\cos(0) = 1$ et $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$, elle réalise une bijection de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ sur $[0, 1]$ et il existe un unique réel $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ tel que $x = \cos(t)$. On a alors $y^2 = 1 - x^2 = 1 - \cos^2(t) = \sin^2(t)$ et $y = \sin(t)$ puisque ces deux quantités sont positives. Il en résulte que $z = e^{it}$.
2. Si $x < 0$ et $y \geq 0$, alors $-iz = y - ix$ se trouve dans le premier cas de figure, il s'écrit donc $-iz = e^{it}$ et $z = ie^{it} = e^{i\left(t + \frac{\pi}{2}\right)}$.
3. Si $y < 0$ et x est réel quelconque, alors $-z$ se trouve dans le premier ou deuxième cas de figure, il s'écrit donc $-z = e^{it}$ et $z = -e^{it} = e^{i(t+\pi)}$.

∎

Le résultat précédent nous dit en fait que pour tout nombre complexe $z \in \Gamma$ il existe un unique réel $t \in [0, 2\pi[$ tel que $z = e^{it}$. En effet, il existe un réel y tel que $z = e^{iy}$ et désignant par k l'entier relatif tel que $2k\pi \leq y < 2(k+1)\pi$ ($k = E\left(\dfrac{y}{2\pi}\right)$), on a $t = y - 2k\pi \in [0, 2\pi[$ et $e^{it} = e^{i(y-2k\pi)} = e^{iy} = z$. Si $t_1 \leq t_2$ sont deux tels réels, alors $t_2 - t_1 \in [0, 2\pi[$ est dans $\ker(\varphi) = 2\pi\mathbb{Z}$, donc nécessairement nul.

En notant, pour $z \in \Gamma$, t_0 le réel dans $[0, 2\pi[$ tel que $z = e^{it_0}$, on a $e^{it} = z$ avec z réel si, et seulement si, $t = t_0 + 2k\pi$ avec k entier relatif.

On peut aussi résumer cela en disant que le groupe multiplicatif Γ est isomorphe au groupe additif $\dfrac{\mathbb{R}}{\ker(\varphi)} = \dfrac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}$.

Corollaire 15.2 *L'application* $\exp : z \mapsto e^z$ *réalise un morphisme de groupes surjectif de* $(\mathbb{C}, +)$ *sur* $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ *de noyau* $\ker(\exp) = 2i\pi\mathbb{Z}$.

Démonstration. On sait déjà que exp un morphisme de groupes de $(\mathbb{C}, +)$ dans $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ de noyau $2i\pi\mathbb{Z}$.

Pour tout nombre complexe non nul, on a $\dfrac{z}{|z|} \in \Gamma$ et il existe un réel y tel que $\dfrac{z}{|z|} = e^{iy}$, soit $z = |z|\, e^{iy}$ où $\rho = |z|$ est un réel strictement positif. Mais on a vu que l'exponentielle réelle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^{+,*}$, il existe donc un unique réel x tel que $|z| = e^x$ et $z = e^{x+iy}$. ■

15.5 Les fonctions complexes tan et th

Pour z dans $\mathbb{C}$, l'égalité $\cos(z) = 0$ équivaut à $e^{iz} = -e^{-iz} = e^{i(\pi - z)}$, soit à $e^{i(2z-\pi)} = 1$, ce qui revient à dire qu'il existe un entier relatif k tel que $2z = (2k+1)\pi$, ou encore $z = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$. On a donc ainsi toutes les racines complexes de cos.

On définit alors la fonction tangente sur $\mathbb{C} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ par $\tan(z) = \dfrac{\sin(z)}{\cos(z)}$.

De même $\operatorname{ch}(z) = 0$ équivaut à $e^z = -e^{-z} = e^{i\pi - z}$, soit à $e^{2z - i\pi} = 1$, ce qui revient à dire qu'il existe un entier relatif k tel que $2z = (2k+i)\pi$, ou encore $z = k\pi + i\dfrac{\pi}{2}$. On a donc ainsi toutes les racines complexes de ch.

On définit alors la fonction tangente hyperbolique sur $\mathbb{C} \setminus \left\{k\pi + i\dfrac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ par $\operatorname{th}(z) = \dfrac{\operatorname{sh}(z)}{\operatorname{ch}(z)}$.

On peut remarque que la fonction ch ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et $\operatorname{th}(x)$ est défini pour tout réel x.

On peut aussi remarquer que $\tan(z) = \dfrac{\sin(z)}{\cos(z)} = -i\dfrac{\operatorname{sh}(iz)}{\operatorname{ch}(iz)} = -i \operatorname{th}(iz)$.

15.6 Les fonctions réelles arctan et argth

La fonction tan est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ de dérivée $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$.

Cette fonction est impaire, strictement croissante sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ (dérivée strictement positive) avec $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty$. Elle définit donc un homéomorphisme de $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$. Sa fonction réciproque est notée arctan, c'est la fonction arc-tangente. Elle est dérivable de dérivé $\dfrac{1}{1+x^2}$.

De même, la fonction th est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $\operatorname{th}'(x) = 1 - \operatorname{th}^2(x) = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2(x)}$.

Cette fonction est impaire, strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (dérivée strictement positive) avec $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{th}(x) = 1$. Elle définit donc un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$. Sa fonction réciproque est notée argth, c'est la fonction argument-tangente. Elle est dérivable de dérivé $\dfrac{1}{1-x^2}$.

15.7 Le lien avec le nombre π des géomètres

Le cercle unité du plan affine euclidien, identifié à Γ, peut être paramétré par :

$$\gamma : t \in [0, 2\pi] \mapsto (\cos(t), \sin(t))$$

Théorème 15.8 *Le périmètre du cercle unité du plan euclidien vaut* 2π.

Démonstration. On rappelle que la longueur d'un arc géométrique paramétré par une application γ de classe $\mathcal{C}^1$ de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}^2$ est $\ell(\gamma) = \displaystyle\int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt$, où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne usuelle, ce qui donne pour le cercle :

$$\ell(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t)} dt = 2\pi.$$

$\blacksquare$

15.8 Les fonctions argument principal et logarithme

On a en fait montré que tout nombre complexe non nul z s'écrit de manière unique $z = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ ($\rho = |z|$) et $\theta \in [0, 2\pi[$. Le réel ρ est le module de z.

Avec ces notations, on aura $z = \rho e^{it}$ si, et seulement si, $\rho e^{it} = \rho e^{i\theta}$, ce équivaut à $e^{i(t-\theta)} = 1$ ou encore à $t = \theta + 2k\pi$ avec k entier relatif. On dit alors que t est un argument de z. En se fixant k un tel argument est unique dans $[2k\pi, 2(k+1)\pi[$.

En utilisant les arguments, on peut montrer que les application $t \mapsto e^{i\alpha t}$ sont les seuls morphismes de groupes continus de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\Gamma, \cdot)$.

Lemme 15.7 *Les seuls morphismes de groupes continus de* $(\mathbb{R}, +)$ *dans* $(\Gamma, \cdot)$ *sont les applications* $x \mapsto e^{i\alpha x}$ *avec* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Avec ce qui précède, on voit que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ l'application $x \mapsto e^{i\alpha x}$ est un morphisme de groupes continu de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\Gamma, \cdot)$.

Réciproquement si $f : \mathbb{R} \to \Gamma$ est un morphisme de groupes, il existe alors un unique réel $\alpha \in [0, 2\pi[$ tel que $f(1) = e^{i\alpha}$. Par récurrence on vérifie facilement que $f(n) = e^{in\alpha}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis avec $e^{i\alpha} = f\left(n\dfrac{1}{n}\right) = f\left(\dfrac{1}{n}\right)^n$ on déduit que $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = e^{i\frac{\alpha}{n}}$ pour tout $n \geq 1$. Il en résulte que $f(r) = e^{ir\alpha}$ pour tout $r \in \mathbb{Q}$. Si de plus f est continue, avec la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, on déduit que $f(x) = e^{i\alpha x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.

Enfin avec $1 = f(x - x) = f(x) f(-x)$ (le neutre est transformé en neutre), on déduit que $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)} = \overline{f(x)}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Il en résulte que $f(x) = e^{i\alpha x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. $\blacksquare$

Connaissant tous les morphismes de groupes continus de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ (ce sont les $x \mapsto e^{ax}$ avec a réel), on déduit le résultat suivant.

Théorème 15.9 *Les seuls morphismes de groupes continus de* $(\mathbb{R},+)$ *dans* $(\mathbb{C}^*,\cdot)$ *sont les applications* $x \mapsto e^{\alpha x}$ *avec* $\alpha \in \mathbb{C}$.

Démonstration. Si f est un morphisme de groupes continu de $(\mathbb{R},+)$ dans $(\mathbb{C}^*,\cdot)$, alors $|f|$ est un morphisme de groupes continu de $(\mathbb{R},+)$ dans $(\mathbb{R}^*,\cdot)$, il existe donc un réel a tel que $|f(x)| = e^{ax}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction $g : x \mapsto f(x)e^{-ax}$ est alors un morphisme de groupes continu de $(\mathbb{R},+)$ dans $(\Gamma,\cdot)$, il existe donc un réel b tel que $f(x)e^{-ax} = e^{ibx}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a donc $f(x) = e^{\alpha x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ avec $\alpha = a + ib \in \mathbb{C}$.

La réciproque est évidente. ■

En fait un tel argument peut être uniquement déterminé dans tout intervalle de longueur 2π, $[\theta_0, \theta_0 + 2\pi[$ où θ_0 est un réel fixé. En effet en désignant par θ l'argument de $z \in \mathbb{C}^*$ dans $[0, 2\pi[$, il existe un entier k tel que $t = \theta - 2k\pi \in [\theta_0, \theta_0 + 2\pi[$ (il s'agit de réaliser $\theta_0 \leq \theta - 2k\pi < \theta_0 + 2\pi$, soit $2k\pi \leq \theta - \theta_0 < 2(k+1)\pi$ ou encore $k \leq \dfrac{\theta - \theta_0}{2\pi} < k + 1$, ce qui définit $k = E\left(\dfrac{\theta - \theta_0}{2\pi}\right)$) et $z = \rho e^{i\theta} = \rho e^{it}$. Si $t \leq t'$ sont deux tels arguments, on a $0 \leq t' - t < 2\pi$ et $t' - t = 2k\pi$ avec k entier, ce qui impose $k = 0$.

Le choix de $\theta_0 = -\pi$ définit l'argument principal dans $[-\pi, \pi[$ d'un nombre complexe non nul z.

En résumé tout nombre complexe non nul s'écrit de manière unique $z = \rho e^{i\theta}$ où ρ est un réel strictement positif et θ un réel dans $[-\pi, \pi[$. On note $\theta = \arg(z)$ cet argument principal.

On aura $\arg(z) = -\pi$ si, et seulement si, z est un réel strictement négatif.

Tout nombre complexe $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ s'écrit donc $z = x + iy = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta \in]-\pi, \pi[$ et $x = \rho\cos(\theta)$, $y = \rho\sin(\theta)$, ce qui donne :

$$\begin{cases} 2\cos^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = \cos(\theta) + 1 = \dfrac{x}{\rho} + 1 \\ 2\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = \sin(\theta) = \dfrac{y}{\rho} \end{cases}$$

Comme $\dfrac{\theta}{2} \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, on a $\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) > 0$ et divisant la première égalité par la seconde, on obtient :

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\frac{y}{\rho}}{\frac{x}{\rho} + 1} = \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}$$

soit :

$$\theta = \arg(z) = 2\arctan\left(\frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}\right) = 2\arctan\left(\frac{\Im(z)}{\Re(z) + |z|}\right)$$

On peut donc définir la fonction argument principal par :

$$\begin{array}{rccc} \arg : & \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^- & \to &]-\pi, \pi[\\ & z & \mapsto & 2\arctan\left(\frac{\Im(z)}{\Re(z) + |z|}\right) \end{array}$$

et cette fonction est continue sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$.

Cette fonction est donc définie par $\arg(z) \in]-\pi, \pi[$ et $z = |z| e^{i\arg(z)}$ pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$.

Remarque 15.5 *Une telle fonction argument principal ne peut pas être prolongée en une fonction continue sur un ouvert contenant strictement* $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$.
En effet, supposons que cette fonction arg *se prolonge en une fonction continue* φ *sur une partie* Ω *de* $\mathbb{C}$ *contenant strictement* $\mathbb{C} - \mathbb{R}_-$. *L'ensemble* Ω *contient alors un réel* $x < 0$ *et le*

cercle $\mathcal{C}(0,|x|)$ est tout entier contenu dans Ω (les points autres que x sont dans $\mathbb{C}-\mathbb{R}_- \subset \Omega$). Considérant les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ de $\mathcal{C}(0,|x|)\setminus\{x\}$ définies par :

$$u_n = |x|\, e^{i\pi\left(1-\frac{1}{n}\right)},\ v_n = |x|\, e^{-i\pi\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -|x| = x$ (la fonction $\exp$ *est continue sur $\mathbb{C}$) avec :*

$$\varphi(u_n) = \arg(u_n) = \pi\left(1-\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\to} \pi$$

et :

$$\varphi(v_n) = \arg(v_n) = -\pi\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\to} -\pi$$

(on a $u_n = |u_n|\, e^{i\arg(u_n)} = |x|\, e^{i\pi\left(1-\frac{1}{n}\right)}$ avec $\arg(u_n)$ *et* $\pi\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$ *dans* $]-\pi,\pi[$*, donc* $\arg(u_n) = \pi\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$*, de même pour v_n), ce qui est incompatible avec la continuité de φ.*

On est maintenant en mesure de définir une fonction logarithme complexe sur $\mathbb{C}-\mathbb{R}_-$. Précisément, on va définir une fonction notée ln sur $\mathbb{C}-\mathbb{R}_-$ telle que $e^{\ln(z)} = z$ pour tout $z\in\mathbb{C}-\mathbb{R}_-$.

Supposons le résultat acquis. En notant respectivement P et Q les parties réelle et imaginaire de ln, on doit avoir $z = e^{\ln(z)} = e^{P(z)+iQ(z)}$, donc $|z| = \left|e^{P(z)+iQ(z)}\right| = e^{P(z)}$ et $P(z) = \ln(|z|)$ où ln est la fonction logarithme réel réciproque de l'exponentielle réelle. En écrivant que $z = |z|\, e^{i\arg(z)}$, on a $e^{P(z)}e^{iQ(z)} = |z|\, e^{i\arg(z)}$ avec $|z| = e^{P(z)}$, donc $e^{iQ(z)} = e^{i\arg(z)}$ et $Q(z) = \arg(z) + 2k\pi$ avec $k = k(z)$ entier. Si on souhaite la fonction ln continue sur $\mathbb{C}-\mathbb{R}_-$, il doit en être de même des fonctions $Q = \Im(\ln)$ et $k = \dfrac{Q-\arg}{2\pi}$. En définitive, k est une fonction continue à valeurs entières sur le connexe $\mathbb{C}-\mathbb{R}_-$, elle est nécessairement constante.

On définit donc, au vu de cette analyse la détermination principale du logarithme par :

$$\begin{array}{rccc} \ln : & \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^- & \to & \mathbb{C} \\ & z & \mapsto & \ln(|z|) + i\arg(z) = \ln(|z|) + 2i\arctan\left(\frac{\Im(z)}{\Re(z)+|z|}\right) \end{array}$$

et cette fonction est continue sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-$ avec :

$$\forall z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-,\ e^{\ln(z)} = z.$$

Par exemple, on a $\ln(i) = i\dfrac{\pi}{2}$.

15.9 Mesure des angles

On note $\mathcal{P}$ le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$ et $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ est le plan vectoriel associé à $\mathcal{P}$.

Théorème 15.10 *Si θ est un argument de $z\in\mathbb{C}^*$ affixe d'un vecteur non nul $\overrightarrow{v}$, c'est alors une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{v}})$.*

Démonstration. Par définition d'une mesure θ' de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{v}})$, il existe un unique automorphisme orthogonal direct u tel que $u(\overrightarrow{e_1}) = \frac{1}{\|\overrightarrow{v}\|}\overrightarrow{v}$. Dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ la matrice de u est $\begin{pmatrix} \cos(\theta') & -\sin(\theta') \\ \sin(\theta') & \cos(\theta') \end{pmatrix}$ et si $z = x + iy$ est l'affixe de $\overrightarrow{v}$, on a alors :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{v} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} = \|\overrightarrow{v}\| \, u(\overrightarrow{e_1}) \\ = |z| \left(a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2}\right) = |z| \left(\cos(\theta') \overrightarrow{e_1} + \sin(\theta') \overrightarrow{e_2}\right) \end{aligned}$$

ce qui entraîne $x = |z|\cos(\theta')$, $y = |z|\sin(\theta')$ et $\theta' \equiv \theta \ (2\pi)$. ■

Remarque 15.6 *Le choix d'une orientation de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ nous permet de définir sans ambiguïté la mesure principale dans $[-\pi, \pi[$ d'un angle de vecteurs. Ce choix d'une orientation correspond au choix d'une racine carrée i de -1 dans $\mathbb{C}$.*

Plus généralement on a le résultat suivant.

Théorème 15.11 *Si $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ sont deux vecteurs non nuls d'affixes respectives z_1 et z_2 alors un argument de $\frac{z_2}{z_1}$ est une mesure de l'angle orienté $\theta = (\widehat{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}})$ et on a :*

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2}}{\|\overrightarrow{v_1}\| \, \|\overrightarrow{v_2}\|} \\ \sin(\theta) = \dfrac{\det(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})}{\|\overrightarrow{v_1}\| \, \|\overrightarrow{v_2}\|} \end{cases}$$

Démonstration. On a $\frac{1}{\|\overrightarrow{v_2}\|}\overrightarrow{v_2} = u\left(\frac{1}{\|\overrightarrow{v_1}\|}\overrightarrow{v_1}\right)$ où l'automorphisme orthogonal direct u a pour matrice $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, ce qui donne :

$$\begin{cases} x_2 = \dfrac{\|\overrightarrow{v_2}\|}{\|\overrightarrow{v_2}\|}\left(\cos(\theta) x_1 - \sin(\theta) y_1\right) \\ \quad = \dfrac{|z_2|}{|z_1|}\left(\cos(\theta) x_1 - \sin(\theta) y_1\right) \\ y_2 = \dfrac{\|\overrightarrow{v_2}\|}{\|\overrightarrow{v_2}\|}\left(\sin(\theta) x_1 + \cos(\theta) y_1\right) \\ \quad = \dfrac{|z_2|}{|z_1|}\left(\sin(\theta) x_1 + \cos(\theta) y_1\right) \end{cases}$$

et :

$$\begin{aligned} z_2 = x_2 + iy_2 \\ = \frac{|z_2|}{|z_1|}\left(\left(\cos(\theta) x_1 - \sin(\theta) y_1\right) + i\left(\sin(\theta) x_1 + \cos(\theta) y_2\right)\right) \\ = \frac{|z_2|}{|z_1|}\left(x_1 + iy_1\right)\left(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right) \\ = \frac{|z_2|}{|z_1|} z_1 \left(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right) \end{aligned}$$

soit :

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{|z_2|}{|z_1|} \left(\cos(\theta) + i \sin(\theta)\right),$$

ce qui signifie que θ est un argument de $\frac{z_2}{z_1}$.

On rappelle que :

$$\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} = \Re\left(\overline{z_1} z_2\right) = |z_1|^2 \Re\left(\frac{z_2}{z_1}\right)$$

et :

$$\det\left(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\right) = \Im\left(\overline{z_1} z_2\right) = |z_1|^2 \Im\left(\frac{z_2}{z_1}\right)$$

avec $\Re\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = \left|\frac{z_2}{z_1}\right| \cos(\theta)$ et $\Im\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = \left|\frac{z_2}{z_1}\right| \sin(\theta)$, ce qui donne compte tenu de $|z_1| = \left\|\overrightarrow{v_1}\right\|$ et $|z_2| = \left\|\overrightarrow{v_2}\right\|$:

$$\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} = \left\|\overrightarrow{v_1}\right\| \left\|\overrightarrow{v_2}\right\| \cos(\theta) \text{ et } \det\left(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\right) = \left\|\overrightarrow{v_1}\right\| \left\|\overrightarrow{v_2}\right\| \sin(\theta)$$

■

On déduit de ce théorème que $\left(\lambda\overrightarrow{v_2}, \lambda\overrightarrow{v_1}\right) \equiv \left(\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_1}\right)$ modulo 2π pour tout réel non nul et en particulier $\left(-\overrightarrow{v_2}, -\overrightarrow{v_1}\right) \equiv \left(\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_1}\right)$ modulo 2π.

Corollaire 15.3 *Si les points A, B, C sont deux à deux distincts alors un argument de $\frac{c-a}{b-a}$ est une mesure de l'angle orienté $\theta_A = \left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right)$ et on a :*

$$\begin{cases} \cos(\theta_A) = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \cdot AC} \\ \sin(\theta_A) = \dfrac{\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)}{AB \cdot AC} \end{cases}$$

En particulier, on a $\arg(b-a) = \left(\widehat{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{AB}}\right)$ (modulo 2π).

15.10 Une définition de l'exponentielle complexe à partir de la suite de fonctions $\left(\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n\right)_{n \geq 1}$

On se place tout d'abord dans le cas réel.

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ la suite de fonctions définie par :

$$\forall n \geq 1,\ \forall x \in \mathbb{R},\ u_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Pour $x = 0$, cette suite est stationnaire sur 1.

Lemme 15.8 *Pour tout réel x, on a :*

$$\lim_{n \to +\infty} u_n(x)\, u_n(-x) = 1.$$

Démonstration. Pour tout $n \geq 1$, on a :

$$1 - u_n(x)\, u_n(-x) = 1 - \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n = \frac{x^2}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^k.$$

Pour tout $n > |x|$, on a $0 < 1 - \dfrac{x^2}{n^2} \leq 1$ et :

$$|1 - u_n(x)\, u_n(-x)| \leq \frac{x^2}{n^2} n = \frac{x^2}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

■

En notant E la fonction partie entière, on associe à tout réel x l'entier n_x défini par :

$$n_x = \begin{cases} 1 \text{ pour } x \geq 0, \\ E(|x|) + 1 \text{ pour } x < 0 \end{cases}$$

et on a $u_n(x) > 0$ pour tout $n \geq n_x$.

Nous allons montrer dans ce qui suit que pour tout réel x, la suite $(u_n(x))_{n\geq 1}$ converge vers un réel $f(x) > 0$. En utilisant le lemme précédent on voit qu'il suffit de montrer ce résultat pour $x > 0$ ou pour $x < 0$.

Lemme 15.9 *Pour tout entier $n_0 \geq 1$ et tout entier $n \geq n_0$, la fonction $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et strictement décroissante sur $]-n_0, 0]$.*

Démonstration. On se fixe un entier $n_0 \geq 1$.

Pour tout $n \geq n_0$ et tout $x \in \,]-n_0, 0]$, on a $n \geq n_0 > -x$ et $u_n(x) > 0$, cette inégalité étant également vérifiée pour $x > 0$ et $n \geq 1$.

Pour $n \geq n_0$ la restriction de la fonction u_n à $]-n_0, +\infty[$ est dérivable à valeurs strictement positives avec $\dfrac{u_n'(x)}{u_n(x)} = \dfrac{n}{n+x}$ et :

$$\forall x \in \,]-n_0, +\infty[\,, \ \frac{u_{n+1}'(x)}{u_{n+1}(x)} - \frac{u_n'(x)}{u_n(x)} = \frac{x}{(n+x)(n+1+x)}.$$

En utilisant $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)' = \dfrac{u_{n+1}' u_n - u_{n+1} u_n'}{u_n^2}$, on en déduit que :

$$\begin{cases} \forall x > 0, \ \left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)'(x) > 0, \\ \forall x \in \,]-n_0, 0[\,, \ \left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)'(x) < 0, \end{cases}$$

c'est-à-dire que pour $n \geq n_0$, la fonction $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et strictement décroissante sur $]-n_0, 0]$. ■

Lemme 15.10 *Pour tout réel x la suite $(u_n(x))_{n\geq n_x}$ est à valeurs strictement positives et pour tout entier $n_0 \geq 1$, tout réel non nul x dans $]-n_0, +\infty[$, la suite $(u_n(x))_{n\geq n_0}$ est strictement croissante.*

Démonstration. Par définition de n_x, on a $u_n(x) > 0$ pour tout réel x et tout entier $n \geq n_x$.

Pour x non nul dans $]-n_0, +\infty[$ le lemme précédent nous dit que :

$$\forall n \geq n_0, \ \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} > \frac{u_{n+1}(0)}{u_n(0)} = 1,$$

c'est-à-dire que la suite $(u_n(x))_{n \geq n_0}$ est strictement croissante. ■

Théorème 15.12 *Pour tout réel x, la suite $(u_n(x))_{n \geq 1}$ converge vers un réel $f(x)$. De plus on a $f(0) = 1$, $f(x) > 0$ et $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$ pour tout réel x.*

Démonstration. Pour $x = 0$ on a $u_n(0) = 1$ pour tout $n \geq 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n(0) = 1 = f(0)$.

Pour $x < 0$, on a $0 < 1 + \dfrac{x}{n} < 1$ et $0 < u_n(x) < 1$ pour tout $n \geq n_x$, c'est-à-dire que la suite $(u_n(x))_{n \geq n_x}$ est bornée et comme par ailleurs elle est croissante à partir d'un certain rang n_0, on en déduit qu'elle est convergente. On note $f(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n(x)$. De la stricte croissance de $(u_n(x))_{n \geq n_0}$, on déduit que $f(x) > u_{n_0}(x) > 0$.

Enfin pour $x > 0$, on a :

$$u_n(x) = \frac{u_n(x) u_n(-x)}{u_n(-x)} \underset{n \to +\infty}{\to} \frac{1}{f(-x)}$$

(lemme 15.8), soit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n(x) = \dfrac{1}{f(-x)} = f(x)$. ■

Remarque 15.7 *Avec :*

$$f(x) = \frac{1}{f(-x)} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{u_n(-x)},$$

on déduit que $f(x)$ est aussi limite de la suite $(v_n(x))_{n \geq n_{-x}}$ définie par :

$$\forall n \geq n_{-x}, \ v_n(x) = \frac{1}{u_n(-x)} = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n}.$$

Pour x non nul, il existe un entier n_0 tel que $(u_n(x))_{n \geq n_0}$ est strictement croissante, $(v_n(x))_{n \geq n_0}$ est strictement décroissante et en conséquence :

$$\forall n \geq n_0, \ u_n(x) < f(x) < v_n(x).$$

Lemme 15.11 *Pour tout $x \in]-1, 1[$, on a :*

$$1 + x \leq f(x) \leq \frac{1}{1-x}.$$

Démonstration. Pour $n_0 = 1$ et $x \in]-1, +\infty[$ on a vu précédemment que la suite $(u_n(x))_{n \geq 1}$ est strictement croissante et donc $u_1(x) = 1 + x \leq f(x)$.

Pour $x \in]-1, 1[$, $-x$ est aussi dans $]-1, 1[$ et on a $u_1(-x) = 1 - x \leq f(-x)$, ce qui donne $f(x) = \dfrac{1}{f(-x)} \leq \dfrac{1}{1-x}$. ■

Lemme 15.12 *La fonction f est continue en* 0.

Démonstration. Du lemme précédent on déduit immédiatement que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0)$, ce qui signifie que f est continue en 0. ■

Lemme 15.13 *Pour tout suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente vers un réel x, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x_n) = f(x)$.*

Démonstration. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n(x_n) = \frac{u_n(x_n)\,u_n(-x)}{u_n(-x)}$$

avec :

$$u_n(x_n)\,u_n(-x) = \left(\left(1+\frac{x_n}{n}\right)\left(1-\frac{x}{n}\right)\right)^n = \left(1+\frac{\varepsilon_n}{n}\right)^n = u_n(\varepsilon_n)$$

où :

$$\varepsilon_n = x_n - x - \frac{xx_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

Pour n assez grand, on a $\varepsilon_n \in \left]-1,+\infty\right[$ de sorte que la suite $(u_m(\varepsilon_n))_{m\geq 1}$ est croissante et donc :

$$u_1(\varepsilon_n) = 1+\varepsilon_n \leq u_n(\varepsilon_n) \leq f(\varepsilon_n)$$

avec $\lim\limits_{n\to+\infty} u_1(\varepsilon_n) = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(\varepsilon_n) = 1$ (continuité de f en 0), ce qui implique $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x_n) = 1$.

On a donc en définitive $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x_n)\,u_n(-x) = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x_n) = \dfrac{1}{f(-x)} = f(x)$. ■

Théorème 15.13 *Pour tous x, y dans $\mathbb{R}$ on a $f(x+y) = f(x)\,f(y)$.*

Démonstration. Pour x, y dans $\mathbb{R}$ et $n \geq 1$, on a :

$$u_n(x)\,u_n(y) = \left(\left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1+\frac{y}{n}\right)\right)^n = \left(1+\frac{z_n}{n}\right)^n = u_n(z_n)$$

avec $z_n = x+y+\dfrac{xy}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} x+y$. On déduit alors du lemme précédent que :

$$f(x)\,f(y) = \lim_{n\to+\infty} u_n(x)\,u_n(y) = \lim_{n\to+\infty} u_n(z_n) = f(x+y).$$

■

Corollaire 15.4 *La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Pour x, y dans $\mathbb{R}$ on a :

$$f(y) - f(x) = f(x+y-x) - f(x) = f(x)\,(f(y-x)-1) \underset{y\to x}{\to} 0$$

en utilisant la continuité en 0 de f. ■

En utilisant le lemme de Dini, on peut montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers f sur tout intervalle compact $[a,b]$.

Théorème 15.14 *Si $I = [a,b]$ est un intervalle réel compact, alors la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers f sur I.*

Démonstration. On peut trouver un entier n_0 tel que $I = [a, b] \subset]-n_0, +\infty[$ et pour tout x dans I la suite $(u_n(x))_{n \geq n_0}$ est croissante. En se restreignant à I, on a donc une suite croissante $(u_n)_{n \geq n_0}$ de fonctions continues sur I qui converge simplement sur I vers une fonction continue f, le théorème de Dini nous dit alors que la convergence est uniforme sur I. ■

Théorème 15.15 *La fonction f est l'unique solution sur $\mathbb{R}$ du problème de Cauchy $y' = y$ avec la condition initiale $y(0) = 1$.*

Démonstration. Avec le lemme 15.11 on a pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$1 \leq \frac{f(x) - 1}{x} \leq \frac{1}{1 - x}$$

et donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - 1}{x} = 1$, ce qui signifie que f est dérivable en 0 de dérivée égale à 1. Puis avec :

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = f(x) \frac{f(h) - 1}{h}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $h \in \mathbb{R}^*$, on déduit que $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h} = f(x)$, ce qui signifie que f est dérivable en x avec $f'(x) = f(x)$. Comme $f(0) = 1$, la fonction f est bien solution du problème de Cauchy.

Si y est une autre solution, la fonction z définie sur $\mathbb{R}$ par $z(x) = y(x) f(-x)$ est telle que $z' = 0$ avec $z(0) = 0$, c'est donc la fonction nulle et nécessairement $y(x) = \dfrac{1}{f(-x)} = f(x)$ pour tout réel x. ■

De ce résultat on déduit que la fonction f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f^{(n)} = f$ pour tout entier naturel n.

De l'équation fonctionnelle vérifiée par la fonction f, on déduit facilement par récurrence que, pour tout réel non nul a, on a $f(n \cdot a) = (f(a))^n$ pour tout entier naturel n, puis avec $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$, on déduit que cette relation est valable pour tout entier relatif n. Si $r = \dfrac{p}{q}$ est un entier relatif, on a alors $f(r) = f\left(p\dfrac{1}{q}\right) = \left(f\left(\dfrac{1}{q}\right)\right)^p$ et avec $f(1) = f\left(q\dfrac{1}{q}\right) = \left(f\left(\dfrac{1}{q}\right)\right)^q$, on déduit que $f\left(\dfrac{1}{q}\right) = (f(1))^{\frac{1}{q}}$ et $f(r) = (f(1))^{\frac{p}{q}} = (f(1))^r$.

En notant $e = f(1)$, on a donc $f(r) = e^r$ pour tout rationnel r, ce qui nous conduit à noter $f(x) = e^x$ pour tout réel x et la fonction ainsi définie est appelée fonction exponentielle réelle. On la note aussi $f(x) = \exp(x)$.

La définition précédente de la fonction exponentielle peut être étendue à $\mathbb{C}$ (ou de manière plus générale aux algèbres de Banach).

Pour tout z dans $\mathbb{C}$ et tout n dans $\mathbb{N}^*$, on note $u_n(z) = \left(1 + \dfrac{1}{n} z\right)^n$.

Pour $z \in E$ et $m > n$, on a :

$$\begin{aligned} |u_m(z) - u_n(z)| &= \left| \sum_{k=0}^{n} \left(C_m^k \frac{1}{m^k} - C_n^k \frac{1}{n^k} \right) z^k - \sum_{k=n+1}^{m} C_m^k \frac{1}{m^k} z^k \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n} \left| C_m^k \frac{1}{m^k} - C_n^k \frac{1}{n^k} \right| |z|^k + \sum_{k=n+1}^{m} C_m^k \frac{1}{m^k} |z|^k \end{aligned}$$

Pour k compris entre 2 et n, on a :

$$\begin{aligned} C_m^k \frac{1}{m^k} &= \frac{m(m-1)\dots(m-(k-1))}{k!m^k} = \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{m}\right) \\ &\geq \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) = C_n^k \frac{1}{n^k}, \end{aligned}$$

et pour $k=0$ ou 1, ces deux quantités valent 1. On a donc :

$$\begin{aligned} |u_m(z) - u_n(z)| &\leq \sum_{k=0}^{n}\left(C_m^k\frac{1}{m^k} - C_n^k\frac{1}{n^k}\right)|z|^k + \sum_{k=n+1}^{m} C_m^k \frac{1}{m^k}|z|^k \\ &\leq u_m(|z|) - u_n(|z|) \end{aligned}$$

et il en résulte que la suite $(u_n(z))_{n\geq 1}$ est de Cauchy dans $\mathbb{C}$, elle est donc convergente. On note e^z sa limite dans $\mathbb{C}$.

Faisant tendre m vers l'infini dans l'inégalité précédente, on a :

$$\forall n \geq 1,\ |e^z - u_n(z)| \leq e^{|z|} - u_n(|z|)$$

et on en déduit que la convergence est uniforme sur tout compact de $\mathbb{C}$.

Si $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathbb{C}$ qui converge vers z, on en déduit que la suite $(u_n(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers e^z.

En écrivant que :

$$u_n(z)\,u_n(-z) = \left(1-\frac{1}{n^2}z^2\right)^n = u_n\left(-\frac{1}{n}z^2\right)$$

on en déduit par passage à la limite que $e^z e^{-z} = 1$, c'est-à-dire que pour tout $z \in \mathbb{C}$, e^z est inversible d'inverse e^{-z}.

Pour z, z' dans $\mathbb{C}$, on a :

$$u_n(z)\,u_n(z') = \left(\left(1+\frac{1}{n}z\right)\left(1+\frac{1}{n}z'\right)\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}z_n\right)^n = u_n(z_n)$$

avec $z_n = z + z' + \frac{1}{n}zz' \underset{n\to+\infty}{\to} z+z'$. Il en résulte que :

$$e^z e^{z'} = \lim_{n\to+\infty} u_n(z)\,u_n(z') = \lim_{n\to+\infty} u_n(z_n) = e^{z+z'}.$$

Il reste à faire le lien avec la suite de fonctions $\left(\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Si y est solution de $y' = y$ avec la condition initiale $y(0) = 1$, elle est alors de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ avec $y^{(n)}(0) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour tout réel non nul x, la formule de Taylor à l'ordre n nous donne alors :

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}y^{(n+1)}(\theta x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}y(\theta x)$$

avec $\theta \in]0,1[$. Avec $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$, on en déduit alors que $y(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$, c'est-à-dire que y est limite de la suite de fonctions $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ w_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}.$$

Le lien entre cette suite et la suite $\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right)_{n\geq 1}$ peut être précisé comme suit.

Lemme 15.14 *Pour tous $x > 0$ et n, p dans $\mathbb{N}^*$ on a :*

$$u_n(x) \leq w_n(x) \leq u_{n+p}(x).$$

Démonstration. Avec $C_n^k = 0$ et $\dfrac{C_n^k}{n^k} = \dfrac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}\left(1 - \dfrac{j}{n}\right) \leq \dfrac{1}{k!}$ pour $1 \leq k \leq n$, on déduit que $u_n(x) \leq w_n(x)$ et avec $C_{n+p}^0 = 1$, $C_{n+p}^k = \dfrac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}(n+p-j) > \dfrac{1}{k!}$ pour $1 \leq k \leq n$, on déduit que $w_n(x) \leq u_{n+p}(x)$. ■

En particulier, pour $p = n^2$, on a :

$$u_{n+n^2}(x) < \left(1 + \frac{x}{n^2}\right)^{n^2}\left(1 + \frac{x}{n^2}\right)^n = u_{n^2}(x)\, u_n\left(\frac{x}{n}\right)$$

et de $u_n(x) \leq w_n(x) \leq u_{n^2}(x)\, u_n\left(\dfrac{x}{n}\right)$, on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n(x) = e^x$ (on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\left(\dfrac{x}{n}\right) = e^0 = 1$), c'est-à-dire que $e^x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n!}$ pour tout réel $x > 0$, ce résultat étant encore vrai pour $x = 0$.

Si on se place maintenant sur $\mathbb{C}$, on a pour tout $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}|w_n(z) - u_n(z)| &= \left|\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k!} - \frac{C_n^k}{n^k}\right) z^k\right| \leq \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k!} - \frac{C_n^k}{n^k}\right)|z|^k \\ &\leq w_n(|z|) - u_n(|z|) \underset{n\to+\infty}{\to} 0\end{aligned}$$

et donc $e^z = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{n!}z^n$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ (ce qui montre au passage, en prenant $E = \mathbb{R}$, que ce résultat est vrai pour les réel négatifs).

16

Suites de fonctions

Sauf précision contraire, I est un intervalle réel non réduit à un point et les fonctions considérées sont définies sur I à valeurs réelles ou complexes.

16.1 Convergence simple et convergence uniforme

On désigne par $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 16.1 *On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f sur I si, pour tout réel $x \in I$ la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.*

La convergence simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f sur I se traduit donc par :

$$(\forall x \in I,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_{x,\varepsilon} \in \mathbb{N}) \mid (\forall n \geq n_{x,\varepsilon},\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$$

la notation $n_{x,\varepsilon}$ signifiant que l'entier $n_{x,\varepsilon}$ dépend de x et de ε.

En utilisant les résultats relatifs aux suites numériques, on montre facilement les résultats énoncés avec le théorème qui suit.

Théorème 16.1 *Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de fonctions qui convergent simplement sur I vers f et g respectivement.*

1. *La suite $(|f_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $|f|$.*
2. *Pour tous scalaires λ, μ, la suite $(\lambda f_n + \mu g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $\lambda f + \mu g$.*
3. *Si les fonctions f_n et g_n sont à valeurs positives avec $f_n \leq g_n$ à partir d'un certain rang, alors $f \leq g$.*
4. *Si les f_n sont à valeurs positives et croissantes à partir d'un certain rang, alors f est croissante.*
5. *Si les f_n sont à valeurs positives et convexes à partir d'un certain rang, alors f est convexe.*

Exemple 16.1 *Considérons la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $I = \mathbb{R}^+$ par $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx}$. On vérifie facilement que cette suite converge simplement vers la fonction f définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} 1 \ si\ x > 0 \\ 0 \ si\ x = 0 \end{cases}$$

Pour $\varepsilon \in]0,1[$ *donné et* $x > 0$*, on aura*

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{1+nx} < \varepsilon$$

pour $nx > \dfrac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$*, soit pour* $n \geq n_{x,\varepsilon} = E\left(\dfrac{1-\varepsilon}{\varepsilon x}\right) + 1.$
Supposons qu'il existe un entier n_ε *indépendant de* $x \in I$ *tel que* $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ *pour tout* $n \geq n_\varepsilon$*. On aura alors pour tout* $x > 0$ *et* $n \geq n_\varepsilon$*,* $\dfrac{1}{1+nx} < \varepsilon$ *et faisant tendre* x *vers* 0 *pour* n *fixé, on aboutit à* $1 \leq \varepsilon$*, ce qui n'est pas.*
Il est donc impossible de trouver un tel n_ε *valable pour tout* $x \in I$ *ou même pour tout* $x > 0$*.*
On dit dans ce cas que la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}^+$ *(ou* $\mathbb{R}^{+,*}$*).*

L'exemple précédent nous conduit à la définition suivante.

Définition 16.2 *On dit que la suite de fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers* f *sur* I *si la suite* $\left(\sup\limits_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente vers* 0*.*

Remarque 16.1 *La borne supérieure* $\sup\limits_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|$ *est un élément de* $\overline{\mathbb{R}^+} = \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$*.*

La convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f sur I se traduit donc par :

$$(\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}) \mid (\forall n \geq n_\varepsilon,\ \forall x \in I,\ \mid\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$$

La convergence uniforme se traduit aussi graphiquement en disant que pour $n \geq n_\varepsilon$ le graphe de f_n est dans une bande de largeur 2ε symétrique par rapport au graphe de f (faire un dessin).

Avec les inégalités $|f_n(x) - f(x)| \leq \sup\limits_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|$, on déduit que la convergence uniforme entraîne la convergence simple.

Exemple 16.2 *En reprenant l'exemple précédent, on a pour* $x > 0$*,* $|f_n(x) - f(x)| = \varphi(nx)$ *où* $\varphi(y) = \dfrac{1}{1+y}$ *pour* $y > 0$ *avec* $\sup\limits_{y>0} \varphi(y) = 1$*, ce qui donne* $\sup\limits_{x>0} |f_n(x) - f(x)| = 1$ *et la convergence n'est pas uniforme sur* $\mathbb{R}^{+,*}$ *(et en conséquence elle n'est pas uniforme sur* $\mathbb{R}^+$*).*
Mais sur $J = [a, +\infty[$ *avec* $a > 0$*, on a :*

$$\sup_{x\geq a} |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{1+na}$$

du fait de la décroissante de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+nx}$ *sur* $\mathbb{R}^+$*. Avec* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{1+na} = 0$*, on déduit que la convergence est uniforme sur* J*.*

Remarque 16.2 *Si* I *est une réunion d'intervalle,* $I = \bigcup\limits_{k=1}^{p} I_k$ *la convergence uniforme de* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sur* I *est équivalente à la convergence uniforme sur chacun des* I_k*. En effet si* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers* f *sur* I*, avec :*

$$\sup_{x\in I_k} |f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|$$

on déduit la convergence uniforme sur I_k. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur chacun des I_k, avec :

$$\sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)| \leq \sup_{1\leq k\leq p}\left(\sup_{x\in I_k}|f_n(x)-f(x)|\right) \leq \sum_{k=1}^{p}\sup_{x\in I_k}|f_n(x)-f(x)|$$

on déduit la convergence uniforme sur I.

Pour montrer qu'une suite de fonctions convergence uniformément, on peut procéder comme suit :

— étudier la suite numérique $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ pour prouver une éventuelle convergence simple vers une fonction f ;

— étudier les variations sur l'intervalle I de chaque fonction $f_n - f$ en vue de déterminer sa borne inférieure et sa borne supérieure, ce qui permet d'obtenir $\sup\limits_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|$, cette étude est facilitée si les fonctions en questions sont dérivables, dans la mesure où les racines de $f_n' - f'$ se calculent facilement ;

— ou alors essayer de déterminer une suite de réels positifs $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite nulle telle que $|f_n(x)-f(x)| \leq \varepsilon_n$ pour n assez grand et tout $x \in I$, ce qui entraînera $\sup\limits_{x\in I}|f_n(x)-f(x)| \leq \varepsilon_n$ pour n assez grand. En pratique, il vaut mieux opter pour ce type de méthode de travail.

Exercice 16.1 *Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions uniformément convergente vers une fonction f sur un intervalle I, alors la suite de fonctions $(\sin(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\sin(f)$ sur I.*

Solution 16.1 *Résulte de :*

$$|\sin(f_n(x)) - \sin(f(x))| \leq |f_n(x)-f(x)| \leq \sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|.$$

Le résultat qui suit nous donne un critère permettant de prouver la non convergence uniforme.

Théorème 16.2 *Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est suite de fonctions qui converge uniformément vers une fonction f sur I, alors pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de I, la suite $(f_n(x_n) - f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers* 0.

Démonstration. Résulte des inégalités :

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| \leq \sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|$$

valables pour tout n. ∎

Pour montrer la non convergence uniforme, il suffit donc de trouver une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de I telle que la suite $(f_n(x_n) - f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 (en supposant bien sur que la convergence simple vers f a été prouvée).

Si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x, avec :

$$|f_n(x_n) - f(x)| \leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)|$$

on aura $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x_n) = f(x)$ si la convergence est uniforme avec f continue.

Exercice 16.2 *On définit la suite de fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = n\sin\left(\frac{x}{n}\right).$$

1. *La suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge-t-elle simplement sur* $\mathbb{R}$, *et si oui, vers quelle fonction ?*
2. *La convergence de la suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est-t-elle uniforme sur* $\mathbb{R}$ *?*
3. *La convergence de la suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est-t-elle uniforme sur* $[-1,1]$ *?*

Solution 16.2

1. *Pour* $x = 0$, *on a* $f_n(0) = 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *et la suite réelle* $(f_n(0))_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est constante égale à* 0.
   Pour $x \neq 0$, *on a* $f_n(x) = n\sin\left(\frac{x}{n}\right) \underset{+\infty}{\backsim} x$ *et la suite réelle* $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge vers* x.
   En définitive, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge simplement sur* $\mathbb{R}$ *vers la fonction* $f : x \mapsto x$.
2. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *la fonction* g_n *définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$g_n(x) = f_n(x) - f(x) = n\sin\left(\frac{x}{n}\right) - x$$

   est impaire et dérivable de dérivée $g_n'(x) = \cos\left(\frac{x}{n}\right) - 1 \leq 0$, *cette dérivée s'annulant aux points* $x_{n,k} = 2nk\pi$ *où* $k \in \mathbb{Z}$ *avec* $g_n(x_{n,k}) = 2nk\pi$. *On a donc* $\sup\limits_{x\in[-2nk\pi,2nk\pi]} |g_n(x)| = 2n|k|\pi$ *pour tout* $k \in \mathbb{Z}$ *et* $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |g_n(x)| = +\infty$.
   La convergence n'est donc pas uniforme sur $\mathbb{R}$.
3. *Sur* $[-1,1]$, *pour* $n \in \mathbb{N}^*$ *la fonction* g_n *est décroissante et* $\sup\limits_{x\in[-1,1]} |g_n(x)| = |g_n(1)| \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. *La convergence est donc uniforme.*

Exercice 16.3 *Soit* k *un entier positif ou nul et* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *définie par* $f_n(x) = \dfrac{x^k}{x^2+n}$.

1. *Pour quelles valeurs de* k *cette suite converge-t'elle uniformément sur* $\mathbb{R}$ *?*
2. *Pour quelles valeurs de* k *cette suite converge–t'elle uniformément sur toute partie bornée* $\mathbb{R}$ *?*

Solution 16.3

1. *Pour tout réel* x, *on a* $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$, *donc* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement vers la fonction nulle.*
   Pour $k = 0$, *et* x *dans* $\mathbb{R}$, *on a* $0 \leq f_n(x) = \dfrac{1}{x^2+n} \leq \dfrac{1}{n}$ *et la suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers* 0 *sur* $\mathbb{R}$ *et sur toute partie bornée* $\mathbb{R}$.
   Pour tout entier strictement positif k, *on a* $f_n'(x) = \dfrac{x^{k-1}}{(x^2+n)^2}\left((k-2)x^2 + kn\right)$ *et*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{n}} \text{ si } k = 1, \\ 1 \text{ si } k = 2, \\ +\infty \text{ si } k > 2. \end{cases}$$

   On déduit donc que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers* 0 *sur* $\mathbb{R}$ *uniquement pour* $k = 0$ *et* $k = 1$.

2. *Soit $a > 0$. Pour tout $x \in [-a, a]$, on a :*

$$|f_n(x)| \leq \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{n}} \text{ si } k = 1, \\ |f_n(a)| \text{ si } k \geq 2. \end{cases}$$

On en déduit alors que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur tout partie borné $\mathbb{R}$ pour tout entier positif ou nul k.

Exercice 16.4 *Soit $\alpha > 0$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx}$.*

1. *Donner une condition nécessaire et suffisante pour que cette suite converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.*
2. *Étudier la convergence uniforme sur tout intervalle $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.*

Solution 16.4 *La fonction f_n est dérivable avec :*

$$f_n'(x) = n^\alpha e^{-nx}(1 - nx)$$

$f_n(0) = 0$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ *et f à valeurs positives.*

1. *Pour $n \geq 1$, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction nulle pour tout $\alpha > 0$.*
   Avec $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n| = f_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{n^{\alpha-1}}{e}$ pour $n \geq 1$, on déduit que la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}^+$ si et seulement si $\alpha \in]0, 1[$.
2. *Pour tout $a > 0$, il existe un entier n_a tel que $\dfrac{1}{n} < a$ pour tout $n \geq n_a$ et $\sup_{x\in[a,+\infty[} |f_n(x)| = f_n(a)$. On en déduit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout intervalle $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.*

Exercice 16.5 *Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(1) = 0$. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $I = [0, 1]$ par $f_n(x) = x^n f(x)$ converge uniformément vers 0 sur I.*

Solution 16.5 *Laissée au lecteur.*

Exercice 16.6 *On désigne par $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}^+,\ f_n(x) = nx\sin(x)\, e^{-nx}.$$

1. *Montrer que cette suite converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction nulle.*
2. *Montrer que la fonction $\varphi : t \mapsto \varphi(t) = te^{-t}$ est décroissante sur $[1, +\infty[$.*
3. *Montrer que la convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers 0 est uniforme sur l'intervalle $\left[\dfrac{\pi}{2}, +\infty\right[$.*
4. *On se propose maintenant de montrer que la convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers 0 est encore uniforme sur l'intervalle $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.*
   (a) *Calculer, pour tout $n \geq 1$, la dérivée de la fonction f_n.*

(b) *Montrer que :*

$$\forall x \in \left]0, \frac{1}{n}\right], \ f_n'(x) > 0.$$

(c) *Montrer que, sur l'intervalle* $\left]\frac{1}{n}, \frac{\pi}{2}\right]$, f_n' *s'annule en un unique point* $x_n \in \left]\frac{1}{n}, \frac{\pi}{2}\right[$.

(d) *En déduire les variations de* f_n *sur l'intervalle* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

(e) *Montrer que la suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers* 0 *sur* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ *et sur* $\mathbb{R}^+$.

Solution 16.6

1. *Pour* $x = 0$, *on a* $f_n(0) = 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(0) = f(0) = 0$.
   Pour $x > 0$, *on a* $|f_n(x)| \leq x\dfrac{n}{e^{nx}}$ *avec* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{e^{nx}} = 0$ *et donc* $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x) = 0$.
2. *La fonction* φ *est indéfiniment dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et pour tout* $t \geq 1$, *on a :*

$$\varphi'(t) = e^{-t}(1-t) \leq 0.$$

   Cette fonction est donc décroissante sur $[1, +\infty[$.
3. *Pour tout* $n \geq 1$ *et* $x \geq \dfrac{\pi}{2}$, *on a :*

$$|f_n(x)| \leq nxe^{-nx} = \varphi(nx) \leq \varphi(n) = \frac{n}{e^n}$$

   puisque $nx \geq n \geq 1$ *et* φ *est décroissante sur* $[1, +\infty[$. *Comme* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{e^n} = 0$, *on déduit que* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers* 0 *sur* $\left[\frac{\pi}{2}, +\infty\right[$.
4.
   (a) *On a :*

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= ne^{-nx}(-nx\sin(x) + \sin(x) + x\cos(x)) \\ &= ne^{-nx}((1-nx)\sin(x) + x\cos(x)). \end{aligned}$$

   (b) *Pour* $x \in \left]0, \frac{1}{n}\right[$, *les quantités* $(1-nx)$, $\sin(x)$, x, $\cos(x)$ *et* ne^{-nx} *sont strictement positives, donc* $f_n'(x) > 0$.

   (c) *Pour* $x \in \left]\frac{1}{n}, \frac{\pi}{2}\right[$, *on a :*

$$f_n'(x) = ne^{-nx}\cos(x)(1-nx)\left(\tan(x) - \frac{x}{nx-1}\right)$$

   avec $ne^{-nx}\cos(x)(1-nx) < 0$. *Le signe de* $f_n'(x)$ *sur* $\left]\frac{1}{n}, \frac{\pi}{2}\right[$ *dépend donc de celui de* $g_n(x) = \tan(x) - \dfrac{x}{nx-1}$. *Avec* $g_n'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)} + \dfrac{1}{(nx-1)^2} > 0$, *on déduit que* g_n *est strictement croissante et avec* $\lim\limits_{x\to\frac{1}{n}^+} g_n(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} g_n(x) = +\infty$, *on* *déduit que, sur* $\left]\frac{1}{n}, \frac{\pi}{2}\right[$, g_n *s'annule en un unique point* x_n *et on a* $g_n(x) < 0$ *pour* $x \in \left]\frac{1}{n}, x_n\right[$, $g_n(x) > 0$ *pour* $x \in \left]x_n, \frac{\pi}{2}\right[$. *Tenant compte de :*

$$f_n'\left(\frac{\pi}{2}\right) = ne^{-n\frac{\pi}{2}}\left(1 - n\frac{\pi}{2}\right) < 0,$$

on déduit que sur $\left]\frac{1}{n}, \frac{\pi}{2}\right]$, f_n' *s'annule uniquement en* x_n *avec* $f_n'(x) > 0$ *pour* $x \in \left]\frac{1}{n}, x_n\right[$ *et* $f_n'(x) < 0$ *pour* $x \in \left]x_n, \frac{\pi}{2}\right]$.

(d) *De l'étude précédente, on déduit que* f_n *est strictement croissante sur* $[0, x_n]$ *et strictement décroissante sur* $\left[x_n, \frac{\pi}{2}\right]$ *avec* $f_n(0) = 0$ *et* $f_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = n\frac{\pi}{2}e^{-n\frac{\pi}{2}} > 0$. *On a donc :*

$$\sup_{x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]} |f_n(x)| = f_n(x_n).$$

(e) *Avec* $f_n'\left(\frac{1}{n}\right) > 0$ *et :*

$$f_n'\left(\frac{2}{n}\right) = -ne^{-2}\cos\left(\frac{2}{n}\right)\left(\tan\left(\frac{2}{n}\right) - \frac{1}{n}\right) < 0$$

(on a $\tan(x) > x$ *pour tout* $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$*), on déduit que* $x_n \in \left]\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right[$ *et*

$$0 < f_n(x_n) \leq 2\sin\left(\frac{2}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

D'où la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sur* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Avec $\sup_{\mathbb{R}^+} |f_n| = \max\left(\sup_{\left[0,\frac{\pi}{2}\right]} |f_n|, \sup_{\left[\frac{\pi}{2},+\infty\right[} |f_n|\right)$, *on en déduit la convergence uniforme de* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sur* $\mathbb{R}^+$.

16.2 Le critère de Cauchy uniforme

On rappelle qu'une suite réelle ou complexe est convergente si, et seulement si, elle vérifie le critère de Cauchy. Pour ce qui est de la convergence uniforme, on donne la définition suivante.

Définition 16.3 *On dit que la suite de fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *vérifie le critère de Cauchy uniforme sur* I *si :*

$$(\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}) \mid \forall n \geq n_\varepsilon,\ \forall m \geq n_\varepsilon,\ \forall x \in I,\ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

Dire que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie le critère de Cauchy uniforme sur I revient encore à dire que :

$$(\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}) \mid \forall n \geq n_\varepsilon,\ \forall m \geq n_\varepsilon,\ \sup_{x\in I} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

Théorème 16.3 *La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément convergente sur I si, et seulement si, elle vérifie le critère de Cauchy uniforme sur I.*

Démonstration. La condition nécessaire se déduit de :

$$\sup_{x\in I}|f_n(x)-f_m(x)|\leq\sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|+\sup_{x\in I}|f(x)-f_m(x)|$$

où f est la limite uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Réciproquement, supposons que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit uniformément de Cauchy sur I. Pour tout réel $\varepsilon>0$, il existe un entier n_ε tel que :

$$\forall n\geq n_\varepsilon,\forall m\geq n_\varepsilon,\forall x\in I,\ |f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon. \tag{16.1}$$

Pour x fixé dans I, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est alors de Cauchy dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, elle converge donc vers un scalaire $f(x)$. En faisant tendre m vers l'infini dans (16.1), on déduit que :

$$\forall x\in I,\ \forall n\geq n_\varepsilon,\ |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon,$$

c'est-à-dire que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I. ■

16.3 Propriétés des fonctions stables par convergence uniforme

La notion de convergence uniforme est intéressante relativement à la continuité et l'intégration de Riemann, pour ce qui est de la dérivation il faut être un peu plus prudent.

Théorème 16.4 *Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est suite de fonctions continues qui converge uniformément vers une fonction f sur l'intervalle I, alors la limite f est continue sur cet intervalle.*

Démonstration. Soit ε un réel strictement positif. On peut trouver un entier n tel que :

$$\forall x\in I,\ |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

Avec la continuité de f_n en $x_0\in I$, on peut trouver un réel $\eta_n>0$ tel que :

$$\forall x\in\,]x_0-\eta_n,x_0+\eta_n[\,\cap I,\ |f_n(x)-f_n(x_0)|<\varepsilon$$

et en conséquence, pour $x\in\,]x_0-\eta_n,x_0+\eta_n[\,\cap I$, on a :

$$\begin{aligned}|f(x)-f(x_0)|&\leq|f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-f_n(x_0)|+|f_n(x_0)-f(x_0)|\\&<3\varepsilon\end{aligned}$$

ce qui prouve la continuité de f en x_0, le point x_0 étant quelconque dans I. La fonction f est donc continue sur I. ■

Remarque 16.3 *On a en fait montré que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est suite de fonctions continues en $x_0\in I$ qui converge uniformément vers une fonction f sur l'intervalle I, alors f est continue en x_0.*

Remarque 16.4 *Ce résultat peut être utilisé pour justifier une non convergence uniforme. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est suite de fonctions continues qui converge uniformément vers une fonction f non continue sur I, alors la convergence ne peut être uniforme.*

Exemple 16.3 *La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $I = [0,1]$ par $f_n(x) = x^n$ qui converge simplement vers f définie par $f(x) = 0$ pour $0 \leq x < 1$ et $f(1) = 1$ ne peut converger uniformément vers cette fonction sur I.*

L'uniforme continuité est aussi conservée par convergence uniforme.

Théorème 16.5 *Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est suite de fonctions uniformément continues qui converge uniformément vers une fonction f sur l'intervalle I, alors la limite f est uniformément continue sur cet intervalle.*

Démonstration. Soit ε un réel strictement positif. On peut trouver un entier n tel que :

$$\forall x \in I,\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Avec l'uniforme continuité de f_n sur I, on peut trouver un réel $\eta_n > 0$ tel que :

$$\big((x,y) \in I^2 \text{ et } |x-y| < \eta_n\big) \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$$

et en conséquence, pour $(x,y) \in I^2$ tel que $|x-y| < \eta_n$, on a :

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| \\ < 3\varepsilon \end{aligned}$$

ce qui prouve l'uniforme continuité de f sur I. ■

Le théorème qui suit nous donne un exemple de situation où la convergence simple d'une suite de fonctions continues vers une fonction continue entraîne la convergence uniforme.

Théorème 16.6 (Dini) *Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de fonctions continues du segment $I = [a,b]$ (ou plus généralement d'un compact I de $\mathbb{R}$) dans $\mathbb{R}$ qui converge simplement vers une fonction f continue sur I, alors la convergence est uniforme.*

Démonstration. Pour tout $x \in I$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge en croissant vers $f(x)$. On a donc $f(x) - f_n(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$ et tout $n \in \mathbb{N}$. De la continuité des f_n, on déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists x_n \in I \mid \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = f(x_n) - f_n(x_n)$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \sup_{x\in I} |f_{n+1}(x) - f(x)| &= f(x_{n+1}) - f_{n+1}(x_{n+1}) \\ &\leq f(x_{n+1}) - f_n(x_{n+1}) \leq \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|, \end{aligned}$$

c'est-à-dire que la suite $\left(\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée. Elle converge donc vers un réel $\lambda \geq 0$. Il s'agit alors de montrer que $\lambda = 0$.

Dans le compact I, on peut extraire de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $x \in I$. Soit p un entier positif. La fonction φ étant strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, on peut trouver un entier n_p tel que $\varphi(n) \geq p$ pour tout $n \geq n_p$. On a alors pour tout $n \geq n_p$:

$$\begin{aligned} 0 \leq \lambda \leq \sup_{x\in I} \left|f_{\varphi(n)}(x) - f(x)\right| &= f\left(x_{\varphi(n)}\right) - f_{\varphi(n)}\left(x_{\varphi(n)}\right) \\ &\leq f\left(x_{\varphi(n)}\right) - f_p\left(x_{\varphi(n)}\right). \end{aligned}$$

En faisant tendre n vers l'infini (à p fixé) et en utilisant la continuité de f, on déduit que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \lambda \leq f(x) - f_p(x).$$

Enfin, en faisant tendre p vers l'infini, en utilisant la convergence de $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ vers $f(x)$, on déduit que $\lambda = 0$. ■

Remarque 16.5 *Le résultat précédent n'est pas vrai si on ne suppose plus I compact. Par exemple, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $]0,1[$ par $f_n(x) = \dfrac{-1}{1+nx}$ converge en croissant vers la fonction nulle et la convergence n'est pas uniforme sur $]0,1[$ puisque $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{-1}{2}$.*

Pour ce qui est de l'intégration des fonctions continues, on déduit du théorème précédent le résultat suivant.

Théorème 16.7 *Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est suite de fonctions continues qui converge uniformément vers une fonction f sur l'intervalle I, on a alors pour tout segment $[a,b] \subset I$:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Démonstration. Le théorème précédent nous dit que f est continue, elle est donc intégrable sur $[a,b]$ et avec :

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b f_n(x)\,dx\right| &= \left|\int_a^b (f(x) - f_n(x))\,dx\right| \\
&\leq \int_a^b (f(x) - f_n(x))\,dx \\
&\leq (b-a) \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|
\end{aligned}$$

on a le résultat annoncé. ■

Exercice 16.7 *Montrer que la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \cos(nx)$ n'admet aucune sous suite uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.*

Solution 16.7 *Supposons que l'on puisse extraire une sous suite $\left(f_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f. La fonction f est alors continue et pour tous réels $a < b$, on a :*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_{\varphi(n)}(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\varphi(n)} \left[\sin(\varphi(n)\,b) - \sin(\varphi(n)\,a)\right] = 0$$

et f est nécessairement la fonction nulle, ce qui est en contradiction avec $\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|f_{\varphi(n)}\right| = 1$ (ou avec $f(0) = \lim_{n\to+\infty} f_{\varphi(n)}(0) = 1$).

En fait le théorème précédent est encore valable dans le cadre de l'intégrale de Riemann. Le point délicat dans la démonstration est la preuve de l'intégrabilité au sens de Riemann de la fonction f.

On rappelle qu'une fonction f est Riemann intégrable sur $[a,b]$ si, et seulement si, elle est bornée et pour tout réel $\varepsilon > 0$ on peut trouver deux fonctions en escaliers g, h telles que $g \leq f \leq h$ et $\displaystyle\int_a^b (h(x) - g(x))\,dx < \varepsilon$.

Théorème 16.8 *Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est suite de fonctions Riemann-intégrables qui converge uniformément vers f sur $I = [a,b]$, alors la fonction f est Riemann intégrable sur I et on a :*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Démonstration. Soit ε un réel strictement positif. On peut trouver un entier n tel que :

$$\forall x \in I,\ |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Comme f_n est Riemann intégrable sur $[a,b]$, elle est bornée et il existe deux fonctions en escaliers g_n, h_n telles que $g_n \leq f_n \leq h_n$ et $\int_a^b (h_n(x) - g_n(x))\,dx < \varepsilon$. Avec $f_n(x)-\varepsilon < f(x) < \varepsilon + f_n(x)$, on déduit que f est bornée sur I et en désignant par g, h les fonctions en escaliers définies par $g = g_n - \varepsilon$, $h = h_n + \varepsilon$, on a $g \leq f \leq h$ avec :

$$\int_a^b (h(x) - g(x))\,dx = \int_a^b (h_n(x) - g_n(x))\,dx + 2\varepsilon(b-a) < (1 + 2(b-a))\,\varepsilon$$

ce qui prouve que f est Riemann intégrable sur I.

Puis avec :

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b f_n(x)\,dx\right| &= \left|\int_a^b (f(x) - f_n(x))\,dx\right| \\ &\leq \int_a^b (f(x) - f_n(x))\,dx \\ &\leq (b-a) \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|\end{aligned}$$

on a le résultat annoncé. ■

Remarque 16.6 *Le théorème précédent n'est pas vrai dans le cadre des intégrales généralisées. Par exemple la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f_n(x) = \frac{1}{n}$ sur $[0,n]$ et $f_n(x) = 0$ pour $x > n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$ vers $f = 0$ et la suite $\left(\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui est constante égale à 1 ne converge pas vers 0.*
Au chapitre suivant nous montrerons un théorème de convergence dominé pour les suites de fonctions continues par morceaux sur un intervalle. Avec ce théorème on dispose de conditions suffisantes permettant de justifier l'égalité :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right) dx$$

On déduit du théorème précédent le résultat suivant relatif aux primitives des fonctions continues.

Théorème 16.9 *Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est suite de fonctions Riemann-intégrables sur I qui converge uniformément vers une fonction f sur I, alors la suite de fonctions $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur I par $F_n(x) = \int_{x_0}^x f_n(t)\,dt$, où x_0 est donné dans I, converge simplement sur I vers la fonction F définie sur I par $F(x) = \int_{x_0}^x f(t)\,dt$ et la convergence est uniforme sur tout segment $[a,b] \subset I$.*

Démonstration. Pour la convergence simple de $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on utilise le théorème précédent et la convergence uniforme sur $[a,b]$ se déduit de :

$$\forall x \in [a,b]\,,\ |F_n(x) - F(x)| \leq (\beta - \alpha) \sup_{t\in[\alpha,\beta]} |f_n(t) - f(t)|$$

où $[\alpha,\beta]$ contient x_0, a, b. ■

La dérivabilité n'est pas stable par convergence uniforme. Nous verrons plus loin qu'une fonction continue sur un segment $[a,b]$ est limite uniforme d'une suite de polynômes qui sont des fonctions indéfiniment dérivables et il existe des fonctions continues non dérivables. Il existe même des fonctions continues nulle part dérivables.

Exercice 16.8 *Étudier la convergence simple puis uniforme sur $\mathbb{R}$ des suites de fonctions définie par $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$ et $g_n(x) = f_n'(x)$.*

Solution 16.8

1. *Pour tout réel x, on a :*

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} = \sqrt{x^2} = |x|$$

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $f : x \mapsto |x|$.

2. *Pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel x, on a :*

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - \sqrt{x^2} \\ &= \frac{1}{n^2} \frac{1}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{x^2}} \end{aligned}$$

et avec :

$$\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{x^2} \geq \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} \geq \frac{1}{n},$$

on déduit que :

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n}$$

et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

3. *Pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel x, on a :*

$$g_n(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}}$$

et :

$$\lim_{n\to+\infty} g_n(x) = g(x) = \begin{cases} 0 \ \text{si } x = 0 \\ \dfrac{x}{|x|} = \operatorname{sgn}(x) \ \ \text{si } x \neq 0. \end{cases}$$

Les fonctions g_n étant continues sur $\mathbb{R}$, la convergence n'est pas uniforme puisque la limite g n'est pas continue en 0.

On peut aussi vérifier ce résultat en évaluant $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |g_n(x) - g(x)|$.

Pour $x \neq 0$ *et* $n \geq 1$, *on a :*

$$\begin{aligned}
|g_n(x) - g(x)| &= \left| \frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}} - \frac{x}{|x|} \right| = |x| \left| \frac{1}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}} - \frac{1}{\sqrt{x^2}} \right| \\
&= |x| \left| \frac{\sqrt{x^2} - \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}}{\sqrt{x^2}\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}} \right| \\
&= \frac{1}{n^2} \frac{1}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} \left(\sqrt{x^2} + \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} \right)}
\end{aligned}$$

Avec :

$$\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} \left(\sqrt{x^2} + \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} \right) \geq \frac{1}{n^2}$$

on déduit que $|g_n(x) - g(x)| \leq 1$. *Puis avec* $|g_n(0) - g(0)| = 0$ *et :*

$$\lim_{x\to 0} |g_n(x) - g(x)| = 1$$

on déduit que $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |g_n(x) - g(x)| = 1$ *et* $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ne converge pas uniformément vers* g *sur* $\mathbb{R}$.

On dispose quand même du résultat suivant conséquence du critère de Cauchy uniforme et du théorème des accroissements finis.

Théorème 16.10 *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions dérivables sur* I *telle que la suite* $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément sur* I *vers une fonction* g. *S'il existe un point* $x_0 \in I$ *tel que la suite* $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ *soit convergente alors la suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement vers une fonction dérivable* f *telle* $f' = g$ *et la convergence est uniforme sur tout segment* $[a, b] \subset I$.

Démonstration. Avec le théorème des accroissements finis, on peut écrire pour n, m entiers naturels et $x \in I$:

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f_m(x)| &\leq |(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(x_0)| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)| \\
&\leq \sup_{t\in I} |f'_n(t) - f'_m(t)| \, |x - x_0| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)|,
\end{aligned}$$

Il en résulte que pour $[a, b] \subset I$ et $[\alpha, \beta]$ contenant $[a, b]$ et x_0 on a :

$$\sup_{x\in[\alpha,\beta]} |f_n(x) - f_m(x)| \leq (\beta - \alpha) \sup_{t\in I} |f'_n(t) - f'_m(t)| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)|,$$

ce qui permet de conclure que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie le critère de Cauchy uniforme sur $[\alpha, \beta]$ et donc qu'elle converge uniformément vers une fonction f sur cet intervalle et sur $[a, b]$. On définit ainsi une fonction f sur I limite simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Pour $x \neq y$ dans $[a,b]$ et $n \in \mathbb{N}$ on peut écrire :

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}-g(x)\right| \leq &\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}-\frac{f_n(x)-f_n(y)}{x-y}\right| \\ &+\left|\frac{f_n(x)-f_n(y)}{x-y}-f_n'(x)\right| \\ &+\left|f_n'(x)-g(x)\right|.\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}\left|f(x)-f(y)-(f_n(x)-f_n(y))\right| &= \lim_{m\to+\infty}\left|(f_m-f_n)(x)-(f_m-f_n)(y)\right| \\ &\leq \lim_{m\to+\infty}\sup_{t\in[a,b]}\left|f_m'(t)-f_n'(t)\right||x-y| \\ &\leq \sup_{t\in[a,b]}\left|g(t)-f_n'(t)\right||x-y|\end{aligned}$$

et :

$$\left|f_n'(x)-g(x)\right| \leq \sup_{t\in[a,b]}\left|g(t)-f_n'(t)\right|,$$

ce qui donne :

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}-g(x)\right| \leq 2\sup_{t\in[a,b]}\left|g(t)-f_n'(t)\right|+\left|\frac{f_n(x)-f_n(y)}{x-y}-f_n'(x)\right|.$$

Pour $\varepsilon>0$ donné, on peut trouver un entier n tel que $\sup_{t\in[a,b]}\left|g(t)-f_n'(t)\right|<\varepsilon$ et pour cet entier, par définition du nombre dérivé, on peut trouver un réel $\eta>0$ tel que pour $x\neq y$ dans $[a,b]$ vérifiant $|x-y|<\eta$ on ait $\left|\frac{f_n(x)-f_n(y)}{x-y}-f_n'(x)\right|<\varepsilon$. On a donc $\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}-g(x)\right|\leq 3\varepsilon$ pour $x\neq y$ dans $[a,b]$ tels que $|x-y|<\eta$, ce qui signifie que f est dérivable en x avec $f'(x)=g(x)$. ∎

16.4 Approximation uniforme des fonctions continues sur un segment

Le fait qu'une fonction continue sur un segment y est en fait uniformément continue nous donne la possibilité de construire des suites de fonctions élémentaires (en escaliers, affines par morceaux ou polynomiales) qui convergent uniformément vers cette fonction.

16.4.1 Approximation uniforme par des fonctions en escaliers

Théorème 16.11 *Toute fonction f continue sur un segment $[a,b]$ est limite uniforme d'une suite de fonctions en escaliers.*

Démonstration. Pour tout entier $n\geq 1$ on définit une subdivision de $[a,b]$ en notant :

$$x_k=a+k\frac{b-a}{n}\quad(0\leq k\leq n)$$

et à cette subdivision on associe la fonction en escaliers f_n définie par $f_n(a)=f(a)$ et pour k compris entre 0 et $n-1$:

$$\forall x\in\left]x_k,x_{k+1}\right],\ f_n(x)=f(x_k)$$

La fonction f qui est continue sur le compact $[a,b]$ y est uniformément continue, donc pour $\varepsilon > 0$ donné on peut trouver un réel $\eta > 0$ tel que si x, y dans $[a,b]$ sont tels que $|x-y| \leq \eta$ alors $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Pour tout entier $n \geq \dfrac{b-a}{\eta}$ et tout entier k compris entre 0 et $n-1$ on a alors $x_{k+1} - x_k = \dfrac{b-a}{n} \leq \eta$. Sachant qu'un réel $x \in [a,b]$ est dans l'un des intervalles $[x_k, x_{k+1}]$, on obtient pour $n \geq \dfrac{b-a}{\eta}$:

$$|f(x) - f_n(x)| = |f(x) - f(x_k)| \leq \varepsilon$$

ce qui prouve la convergence uniforme sur $[a,b]$ de $(f_n)_{n\geq 1}$ vers f. ■

Ce théorème peut être utilisé pour montrer qu'une fonction continue sur un segment y est Riemann intégrable.

Théorème 16.12 *Toute fonction f continue sur un segment $[a,b]$ est Riemann intégrable.*

Démonstration. On sait déjà qu'une fonction continue sur $[a,b]$ est bornée.

En reprenant la démonstration précédente, on peut trouver pour $\varepsilon > 0$ une fonction en escaliers f_n telle que $g = f_n - \varepsilon < f < f_n + \varepsilon = h$, les fonctions g, h étant en escaliers avec $\displaystyle\int_a^b (h(x) - g(x))\,dx = 2\varepsilon$. Il en résulte que f est Riemann intégrable sur $[a,b]$. ■

De ce résultat, on déduit que toute fonction continue par morceaux sur un segment $[a,b]$ est Riemann intégrable.

Exercice 16.9 *Montrer que pour toute fonction f continue par morceaux sur un segment $[a,b]$, on a :*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(x)\sin(nx)\,dx = 0$$

(lemme de Riemann-Lebesgue).

Démonstration. Il suffit de considérer le cas où f est continue sur $[a,b]$.

Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions en escaliers sur $[a,b]$ qui converge uniformément vers f, pour tout réel $\varepsilon > 0$, on peut trouver un entier n tel que $\sup\limits_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ et pour tout entier $m \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(x)\sin(mx)\,dx\right| &\leq \left|\int_a^b (f(x) - f_n(x))\sin(mx)\,dx\right| + \left|\int_a^b f_n(x)\sin(mx)\,dx\right| \\
&\leq (b-a)\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| + \left|\int_a^b f_n(x)\sin(mx)\,dx\right| \\
&\leq (b-a)\varepsilon + \left|\int_a^b f_n(x)\sin(mx)\,dx\right|.
\end{aligned}$$

En désignant par $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_{p+1} = b$ une subdivision de $[a,b]$ telle que sur chaque intervalle $[x_k, x_{k+1}]$ f_n soit constante égale à y_k, on a :

$$\begin{aligned}
\int_a^b f_n(x)\sin(mx)\,dx &= \sum_{k=0}^{p} y_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} \sin(mx)\,dx \\
&= \sum_{k=0}^{p} y_k \left(\frac{\cos(mx_k)}{m} - \frac{\cos(mx_{k+1})}{m}\right)
\end{aligned}$$

et :

$$\left|\int_a^b f(x)\sin(mx)\,dx\right| \leq (b-a)\varepsilon + \frac{C}{m}$$

où $C = \dfrac{2}{m}\sum\limits_{k=0}^{p}|y_k|$. On en déduit que $\left|\int_a^b f(x)\sin(mx)\,dx\right| \leq (b-a+1)\varepsilon$ pour m assez grand.
■

De manière analogue, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos(nx)\,dx = 0$ pour f continue par morceaux.

Exercice 16.10 *Soit f une fonction continue par morceaux sur un segment $[a,b]$. Calculer la limite suivante :*

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin^2(nx)\,dx$$

Solution 16.9 *En écrivant que* $\sin^2(nx) = \dfrac{1-\cos(2nx)}{2}$, *on a :*

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin^2(nx)\,dx &= \frac{1}{2}\int_a^b f(x)\,dx - \lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos(2nx)\,dx\\ &= \frac{1}{2}\int_a^b f(x)\,dx.\end{aligned}$$

16.4.2 Approximation uniforme par des fonctions affines par morceaux et continues

Théorème 16.13 *Toute fonction f continue sur un segment $[a,b]$ est limite uniforme d'une suite de fonctions continues affines par morceaux.*

Démonstration. En utilisant les subdivisions introduites avec la démonstration du théorème précédent, on leur associe les fonctions f_n définies pour k compris entre 0 et $n-1$ par :

$$\forall x \in [x_k, x_{k+1}],\ f_n(x) = f(x_k) + \frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\left(f(x_{k+1}) - f(x_k)\right)$$

(f_n coïncide avec f aux x_k et est affine sur $[x_k, x_{k+1}]$). Ces fonctions sont affines par morceaux et continues sur $[a,b]$.

En utilisant l'uniforme continuité de f sur $[a,b]$, pour $\varepsilon > 0$ donné, on peut trouver un réel $\eta > 0$ tel que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ pour tous x, y dans $[a,b]$ tels que $|x-y| \leq \eta$. Pour tout entier $n \geq \dfrac{b-a}{\eta}$ et tout entier k compris entre 0 et $n-1$ on a alors $x_{k+1} - x_k = \dfrac{b-a}{n} \leq \eta$ et sachant qu'un réel $x \in [a,b]$ est dans l'un des intervalles $[x_k, x_{k+1}]$, on obtient pour $n \geq \dfrac{b-a}{\eta}$:

$$\begin{aligned}|f(x) - f_n(x)| &= \left|f(x) - f(x_k) - \frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\left(f(x_{k+1}) - f(x_k)\right)\right|\\ &\leq |f(x) - f(x_k)| + \frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\left|f(x_{k+1}) - f(x_k)\right|\\ &\leq \varepsilon + \frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\varepsilon \leq 2\varepsilon,\end{aligned}$$

ce qui prouve la convergence uniforme sur $[a,b]$ de $(f_n)_{n\geq 1}$ vers f. ■

Ce résultat et le théorème 16.10 peuvent être utilisés pour prouver, sans théorie de l'intégration, que toute fonction f continue sur un intervalle compact admet une primitive.

On commence par vérifier le résultat pour les fonctions affines par morceaux et continues.

Théorème 16.14 *Toute fonction affine par morceaux et continue sur un segment $[a, b]$ admet des primitives.*

Démonstration. Si φ est affine par morceaux et continue définie par une subdivision $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ et :

$$\varphi(x) = y_k + \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}(y_{k+1} - y_k)$$

sur $[x_k, x_{k+1}]$ pour $0 \leq k \leq n-1$, la fonction ϕ définie par :

$$\phi(x) = y_0(x - x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2(x_1 - x_0)}(y_1 - y_0) + \gamma_0$$

avec $\gamma_0 = 0$ sur $[x_0, x_1]$ et :

$$\phi(x) = y_{k+1}(x - x_{k+1}) + \frac{(x - x_{k+1})^2}{2(x_{k+2} - x_{k+1})}(y_{k+2} - y_{k+1}) + \gamma_{k+1}$$

sur $[x_{k+1}, x_{k+2}]$ pour $0 \leq k \leq n-2$ où γ_{k+1} est tel que :

$$\lim_{x \to x_{k+1}^-} \phi(x) = (x_{k+1} - x_k)\frac{y_{k+1} + y_k}{2} + \gamma_k = \lim_{x \to x_{k+1}^+} \phi(x) = \gamma_{k+1}$$

pour $0 \leq k \leq n-2$, est une primitive de ϕ. En effet, sur $]x_k, x_{k+1}[$, on a :

$$\phi'(x) = y_k + \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}(y_{k+1} - y_k) = \varphi(x)$$

et pour $x \in]x_0, x_1[$:

$$\frac{\phi(x) - \phi(x_0)}{x - x_0} = \frac{\phi(x)}{x - x_0} = y_0 + \frac{x - x_0}{2(x_1 - x_0)}(y_1 - y_0) \underset{x \to x_0^+}{\rightarrow} y_0 = \varphi(x_0)$$

ce qui signifie que $\phi'(x_0) = \varphi(x_0)$.
Pour $0 \leq k \leq n-2$ et $x \in]x_{k+1}, x_{k+2}[$, on a :

$$\frac{\phi(x) - \phi(x_{k+1})}{x - x_{k+1}} = y_{k+1} + \frac{x - x_{k+1}}{2(x_{k+2} - x_{k+1})}(y_{k+2} - y_{k+1}) \underset{x \to x_0^+}{\rightarrow} y_{k+1} = \varphi(x_{k+1})$$

et pour $0 \leq k \leq n-1$, $x \in]x_k, x_{k+1}[$, on a :

$$\begin{aligned}
\phi(x) - \phi(x_{k+1}) &= y_k(x - x_k) + \frac{(x - x_k)^2}{2(x_{k+1} - x_k)}(y_{k+1} - y_k) + \gamma_k - \gamma_{k+1} \\
&= (x - x_k)\left(y_k + \frac{x - x_k}{2(x_{k+1} - x_k)}(y_{k+1} - y_k)\right) - (x_{k+1} - x_k)\frac{y_{k+1} + y_k}{2} \\
&= (x - x_{k+1})\left(y_k + \frac{x - x_k}{2(x_{k+1} - x_k)}(y_{k+1} - y_k)\right) \\
&\quad + (x_{k+1} - x_k)\left(y_k + \frac{x - x_k}{2(x_{k+1} - x_k)}(y_{k+1} - y_k) - \frac{y_{k+1} + y_k}{2}\right) \\
&= (x - x_{k+1})\left(y_k + \frac{x - x_k}{2(x_{k+1} - x_k)}(y_{k+1} - y_k)\right) \\
&\quad + (x - x_{k+1})\frac{y_{k+1} - y_k}{2} \\
&= (x - x_{k+1})\left(\frac{x - x_k}{2(x_{k+1} - x_k)}(y_{k+1} - y_k) + \frac{y_{k+1} + y_k}{2}\right)
\end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\lim_{x \to x_{k+1}^-} \frac{\phi(x) - \phi(x_{k+1})}{x - x_{k+1}} = \frac{y_{k+1} - y_k}{2} + \frac{y_{k+1} + y_k}{2} = y_{k+1} = \varphi(x_{k+1})$$

■

Théorème 16.15 *Toute fonction f continue sur un segment $[a,b]$ admet des primitives.*

Démonstration. En utilisant les notations introduites avec la démonstration du théorème 16.13, on désigne pour tout $n \geq 1$ par F_n la primitive de f_n nulle en a. La suite $(F'_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers f et que la suite $(F_n(a))_{n\geq 1}$ converge vers 0. On déduit alors que la suite $(F_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction dérivable F et que $F' = f$, c'est-à-dire que F est une primitive de f sur $[a,b]$. ■

On peut alors définir l'intégrale d'une fonction f continue sur $[a,b]$ par :

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

où F est une primitive de f sur cet intervalle.

16.4.3 Approximation uniforme de la fonction $x \mapsto |x|$ sur $[-1,1]$ par des fonctions polynomiales

L'approximation uniforme de la fonction $x \mapsto |x|$ sur $[-1,1]$ par des fonctions polynomiales nous sera utile pour approcher uniformément toute fonction continue et affine par morceaux par des polynôme sur un segment $[a,b]$.

On introduit la suite de fonctions $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{R}$ par $P_0(x) = 0$ et

$$\forall n \geq 1,\ P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}\left(x^2 - (P_n(x))^2\right). \tag{16.2}$$

On vérifie facilement par récurrence sur $n \geq 0$ que chaque fonction P_n est polynomiale.

Exercice 16.11 *Déterminer le degré et le coefficient dominant de chaque fonction P_n.*

Solution 16.10 *En désignant par p_n le degré de P_n et par α_n le coefficient dominant de P_n, on a $p_1 = 2$ et $\alpha_1 = \frac{1}{2}$ ($P_1(x) = \frac{x^2}{2}$) et par récurrence, on vérifie que $p_n = 2^n$ et $\alpha_n = -\frac{1}{2^{2^n-1}}$. En effet, le résultat est vrai pour $n = 1$ et le supposant acquis au rang $n \geq 1$, en utilisant (16.2), on a $p_{n+1} = 2p_n = 2^{n+1}$ et $\alpha_{n+1} = -\frac{1}{2}\alpha_n^2 = -\frac{1}{2}\frac{1}{2^{2(2^n-1)}} = -\frac{1}{2^{2^{n+1}-1}}$.*

Lemme 16.1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [-1,1]$, on a :*

$$|x| - P_{n+1}(x) = (|x| - P_n(x))\left(1 - \frac{|x| + P_n(x)}{2}\right)$$

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned} |x| - P_{n+1}(x) &= |x| - P_n(x) - \frac{1}{2}(|x| - P_n(x))(|x| + P_n(x)) \\ &= (|x| - P_n(x))\left(1 - \frac{|x| + P_n(x)}{2}\right) \end{aligned}$$

■

Lemme 16.2 *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et tout* $x \in [-1, 1]$ *, on a :*

$$0 \leq P_n(x) \leq P_{n+1}(x) \leq |x| \leq 1$$

et la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement sur* $[-1, 1]$ *vers* $|x|$ *.*

Démonstration. Pour le premier point, on procède par récurrence sur $n \geq 0$.
Pour $n = 0$, on a pour tout $x \in [-1, 1]$:

$$0 = P_0(x) \leq P_1(x) = \frac{x^2}{2} \leq |x| \leq 1$$

$$0 \leq P_n(x) \leq P_{n+1}(x) \leq |x| \leq 1$$

Supposant le résultat acquis au rang $n \geq 0$, on a $P_{n+1}(x) \geq P_n(x) \geq 0$. Puis de $P_{n+1}(x) \leq |x|$, on déduit que $x^2 \geq (P_{n+1}(x))^2$ et $P_{n+2}(x) \geq P_{n+1}(x)$. Enfin avec

$$|x| - P_{n+2}(x) = (|x| - P_{n+1}(x)) \left(1 - \frac{|x| + P_{n+1}(x)}{2}\right)$$

$|x| \geq P_{n+1}(x)$ et $\dfrac{|x| + P_{n+1}(x)}{2}$ milieu de $[P_{n+1}(x), |x|] \subset [0, 1]$, on déduit que $|x| - P_{n+2}(x) \geq 0$.

L'encadrement précédent nous dit que pour tout $x \in [-1, 1]$ la suite $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs positive, croissante et majorée (par $|x|$) donc convergente vers $\ell(x) \geq 0$. En passant à la limite dans (16.2), on déduit que $\ell(x)^2 = x^2$ et $\ell(x) = |x|$. ■

Lemme 16.3 *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et tout* $x \in [-1, 1]$ *, on a :*

$$0 \leq |x| - P_n(x) \leq |x| \left(1 - \frac{|x|}{2}\right)^n \leq \frac{2}{n+1}$$

Démonstration. On montre tout d'abord par récurrence sur $n \geq 0$ l'encadrement :

$$0 \leq |x| - P_n(x) \leq |x| \left(1 - \frac{|x|}{2}\right)^n.$$

Pour $n = 0$, on a :

$$0 \leq |x| - P_0(x) = |x|.$$

En supposant le résultat acquis pour $n \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned} |x| - P_{n+1}(x) &= (|x| - P_n(x)) \left(1 - \frac{|x| + P_n(x)}{2}\right) \\ &\leq |x| \left(1 - \frac{|x|}{2}\right)^n \left(1 - \frac{|x| + P_n(x)}{2}\right) \\ &\leq |x| \left(1 - \frac{|x|}{2}\right)^n \left(1 - \frac{|x|}{2}\right) = |x| \left(1 - \frac{|x|}{2}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

$(P_n(x) \geq 0)$.

Ensuite on étudie la fonction φ définie sur $[0,1]$ par $\varphi(t) = t\left(1-\dfrac{t}{2}\right)^n$ pour $n \geq 1$ (pour $n = 0$, on a bien $|x|\left(1-\dfrac{|x|}{2}\right)^n = |x| \leq 1 < 2$). Cette fonction est dérivable avec $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = \dfrac{1}{2^n}$, :

$$\varphi'(t) = \left(1-\frac{t}{2}\right)^{n-1}\left(1-\frac{n+1}{2}t\right)$$

et $\varphi\left(\dfrac{2}{n+1}\right) = \dfrac{2}{n+1}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)^n \leq \dfrac{2}{n+1}$. Il en résulte que $\varphi(t) \leq \dfrac{2}{n+1}$ pour tout $t \in [0,1]$ (variations de φ). ∎

En conclusion, on a le résultat suivant.

Théorème 16.16 *La suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par (16.2) converge uniformément sur $[-1,1]$ vers la fonction $x \mapsto |x|$.*

Remarque 16.7 *On peut aussi déduire cette convergence uniforme du théorème de Dini.*

L'exercice qui suit nous fournit une autre façon d'approximer la fonction $x \mapsto |x|$ sur $[-1,1]$.

Exercice 16.12 *On désigne par $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des coefficients qui interviennent dans le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \sqrt{1-x}$ sur l'intervalle $]-1,1[$, soit :*

$$\forall x \in \left]-1,1\right[,\ \sqrt{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

1. *Montrer que la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ est convergente.*
2. *En déduire que :*
   (a) *la fonction $x \mapsto \sqrt{1-x}$ est limite uniforme d'une suite de polynômes sur l'intervalle $[-1,1]$;*
   (b) *la fonction $x \mapsto |x|$ est limite uniforme d'une suite de polynômes sur l'intervalle $[-1,1]$.*

Solution 16.11 *Les coefficients a_n sont donnés par $a_0 = 1$ et pour $n \geq 1$, $a_n = -b_n$ avec :*

$$b_n = \frac{(2n)!}{(2n-1)\left(2^n n!\right)^2}.$$

En particuliers, les b_n sont positifs pour tout $n \geq 1$.

1. *Pour tout x dans $[0,1[$ et tout $n \geq 1$, on a :*

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n} b_k x^k \leq \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n = 1-\sqrt{1-x}.$$

En faisant tendre x vers 1, on en déduit que pour tout $n \geq 1$, on a :

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n} b_k \leq 1,$$

ce qui implique la convergence de la série à termes positifs $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n$ *et celle de la série* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Si on tente le théorème de d'Alembert pour montrer la convergence de $\sum b_n$ *(tous les* b_n *sont strictement positifs), on a :*$b_n = \dfrac{(2n)!}{(2n-1)(2^n n!)^2}$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n-1)}{(2n+1)4(n+1)^2} = \frac{2n-1}{2n+2} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$$

et on ne peut pas conclure. En utilisant le développement limité :

$$\begin{aligned}\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{1-\frac{1}{2n}}{1+\frac{1}{n}} &= \left(1-\frac{1}{2n}\right)\left(1-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\ &= 1-\frac{3}{2}\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

le théorème de Raabe-Duhamel nous permet de conclure à la convergence de $\sum b_n$ *(on a* $\frac{3}{2} > 1$*).*

2. *On note* $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite de polynômes définie par* $P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$.

   (a) *Pour tout* $n \geq 0$ *et tout* $x \in [-1,1]$, *on a :*

   $$\left|\sqrt{1-x} - P_n(x)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k\right| \leq R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k \underset{n\to+\infty}{\to} 0,$$

   ce qui implique la convergence uniforme sur $[-1,1]$ *de la suite de polynômes* $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *vers la fonction* $x \mapsto \sqrt{1-x}$.

   (b) *Pour tout* x *dans* $[-1,1]$, *on peut écrire que* $|x| = \sqrt{1-u(x)}$ *avec* $u(x) = 1-x^2$ *dans* $[0,1]$ *et on a :*

   $$|x| = \lim_{n\to+\infty} P_n(u(x))$$

   cette convergence étant uniforme.

16.5 Le théorème de Weierstrass

On propose dans ce paragraphe plusieurs démonstrations du théorème de Weierstrass qui nous dit que toute fonction continue sur un segment $I = [a,b]$ est limite uniforme sur cet intervalle d'une suite de fonctions polynomiales.

16.5.1 Première démonstration

On a déjà vu que toute fonction continue sur un segment $I = [a,b]$ est limite uniforme d'une suite de fonctions continues et affines par morceaux. Il nous suffit donc d'approcher uniformément ces fonctions continues et affines par morceaux par des polynômes.

Pour tout réel $\alpha \in [0,1]$, on désigne par h_α la fonction affine par morceaux définie par $x \mapsto h_\alpha(x) = \max(0, x-\alpha)$.

Lemme 16.4 *Pour tout réel* $\alpha \in [0,1]$, *la fonction* h_α *est limite uniforme d'une suite de polynômes sur* $[0,1]$.

Démonstration. En écrivant que :

$$h_\alpha(x) = \max(0, x-\alpha) = \frac{1}{2}(|x-\alpha| + x - \alpha),$$

on déduit du théorème 16.16 que h_α est limite uniforme d'une suite de polynômes sur $[0,1]$. Précisément, en reprenant les notations du théorème 16.16, la suite de fonctions polynomiales $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $[0,1]$ par :

$$\forall x \in [0,1], \; Q_n(x) = \frac{1}{2}(P_n(x-\alpha) + x - \alpha)$$

converge uniformément sur $[0,1]$ vers $\frac{1}{2}(|x-\alpha| + x - \alpha) = h_\alpha(x)$. ■

Lemme 16.5 *Toute fonction affine par morceaux et continue sur un segment* $[a,b]$ *est combinaison linéaire de fonctions du type* $h_\alpha : x \mapsto \max(0, x-\alpha)$.

Démonstration. Soit φ affine par morceaux et continue définie par une subdivision $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ et :

$$\varphi(x) = y_k + \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}(y_{k+1} - y_k)$$

sur $[x_k, x_{k+1}]$ pour $0 \leq k \leq n-1$ ($n \geq 1$). On a donc $\varphi(x_k) = y_k$ pour tout k et on dit que φ a $n-1$ points anguleux $x_1 < \cdots < x_{n-1}$ (il n'y en a pas si $n = 1$).

Il existe alors une suite réelle $(\lambda_k)_{0\leq k\leq n}$ telle que :

$$\varphi = z_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k h_{x_k}.$$

En effet une telle égalité est réalisée si, et seulement si, elle est réalisée sur chaque intervalle $[x_k, x_{k+1}]$, ce qui s'écrit :

$$\begin{cases} z_0 + \lambda_0(x - x_0) = y_0 + \dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0}(y_1 - y_0) \text{ sur } [x_0, x_1] \\ z_0 + \lambda_0(x - x_0) + \lambda_1(x - x_1) = y_1 + \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}(y_2 - y_1) \text{ sur } [x_1, x_2] \\ \vdots \\ z_0 + \sum\limits_{k=0}^{n-1} \lambda_k(x - x_k) = y_{n-1} + \dfrac{x - x_{n-1}}{b - x_{n-1}}(y_n - y_{n-1}) \text{ sur } [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

ce qui équivaut, en faisant $x = x_k$ et $x = x_{k+1}$ dans chacun de ces intervalles au système d'équations :

$$\begin{cases} z_0 = y_0 \text{ et } z_0 + \lambda_0(x_1 - x_0) = y_1 \\ z_0 + \lambda_0(x_2 - x_0) + \lambda_1(x_2 - x_1) = y_2 \\ \vdots \\ z_0 + \sum\limits_{k=0}^{n-1} \lambda_k(x_{n-1} - x_k) = y_{n-1} \end{cases}$$

(deux fonctions affines sur un intervalle coïncident si, et seulement si, elles coïncident en deux points distincts), ce qui détermine y_0 et les λ_k de manière unique (les λ_k sont solutions d'un système triangulaire à coefficients diagonaux non nuls). ■

Théorème 16.17 *Toute fonction continue et affine par morceaux sur* $[0,1]$ *est limite uniforme d'une suite de polynômes sur cet intervalle.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate des deux lemmes qui précèdent. ∎

Théorème 16.18 (Weierstrass) *Toute fonction continue sur un segment* $[a,b]$ *est limite uniforme d'une suite de polynômes.*

Démonstration. Si f est une fonction continue sur $I=[a,b]$, la fonction g définie par :

$$g(t)=f((1-t)a+tb)$$

est continue sur $[0,1]$, elle est donc limite uniforme sur $[0,1]$ d'une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions polynomiales et f est limite uniforme sur $[a,b]$ de la suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions polynomiales définie par :

$$Q_n(x)=P_n\left(\frac{x-a}{b-a}\right).$$

∎

16.5.2 Deuxième démonstration

Cette démonstration utilise les polynômes de Bernstein.

On se place d'abord sur l'intervalle $I=[0,1]$.

Pour tout entier k compris entre 0 et n, on désigne par $B_{n,k}$ la fonction polynomiale définie par :

$$\forall x\in I,\ B_{n,k}(x)=C_n^k x^k(1-x)^{n-k}$$

et B_n est l'opérateur de Bernstein défini par :

$$\forall f\in\mathcal{C}(I),\ B_n(f)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)B_{n,k}.$$

On peut remarquer que $B_{n,k}(x)\geq 0$ pour tout $x\in I=[0,1]$.

Les résultats préliminaires qui suivent nous seront utiles pour montrer le théorème de Weierstrass en utilisant les polynômes de Bernstein $B_n(f)$.

Lemme 16.6 *Si pour tout réel* y *on désigne par* f_y *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f_y(x)=e^{xy}.$$

on a alors :

$$\forall x\in I,\ B_n(f_y)(x)=\left(xe^{\frac{y}{n}}+1-x\right)^n=\varphi_n(x,y).$$

Démonstration. Résulte de :

$$B_n(f_y)(x)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(xe^{\frac{y}{n}}\right)^k(1-x)^{n-k}=\left(xe^{\frac{y}{n}}+1-x\right)^n.$$

∎

En notant $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la base canonique de $\mathbb{R}[x]$, où les polynômes e_k sont définis par :

$$\forall k\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R},\ e_k(x)=x^k$$

on déduit le résultat suivant.

Lemme 16.7 *Pour tout entier naturel non nul n et pour tout entier naturel j, on a :*

$$B_n(e_j)(x) = \frac{\partial^j \varphi_n}{\partial y^j}(x,0).$$

Démonstration. Pour tout entier naturel j on a :

$$\frac{\partial^j \varphi_n}{\partial y^j}(x,y) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^j e^{\frac{ky}{n}} B_{n,k}(x)$$

et pour $y=0$ on obtient :

$$\frac{\partial^j \varphi_n}{\partial y^j}(x,0) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^j B_{n,k}(x) = B_n(e_j).$$

■

En particulier, pour $n \geq 1$, on a :

$$\begin{cases} \varphi_n(x,y) = \left(xe^{\frac{y}{n}} + 1 - x\right)^n, \\ \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial y}(x,y) = xe^{\frac{y}{n}} \left(xe^{\frac{y}{n}} + 1 - x\right)^{n-1}, \\ \dfrac{\partial^2 \varphi_n}{\partial y^2}(x,y) = \dfrac{x}{n} e^{\frac{y}{n}} \left(xe^{\frac{y}{n}} + 1 - x\right)^{n-1} + \dfrac{n-1}{n} x^2 e^{\frac{2y}{n}} \left(xe^{\frac{y}{n}} + 1 - x\right)^{n-2}. \end{cases}$$

Et en faisant $y=0$, on obtient :

$$\begin{cases} B_n(e_0) = e_0 : x \mapsto 1, \\ B_n(e_1) = e_1 : x \mapsto x, \\ B_n(e_2) = e_2 + \dfrac{1}{n}(e_1 - e_2) : x \mapsto x^2 + \dfrac{1}{n} x(1-x). \end{cases}$$

Lemme 16.8 *Pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in I$, on a :*

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - n\right)^2 B_{n,k}(x) \leq \frac{1}{4n}.$$

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 B_{n,k}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 B_{n,k}(x) - 2x \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} B_{n,k}(x) + x^2 \sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(x) \\ &= B_n(e_2)(x) - 2x B_n(e_1)(x) + x^2 B_n(e_0)(x) \\ &= x^2 + \frac{1}{n} x(1-x) - 2x^2 + x^2 \\ &= \frac{1}{n} x(1-x) \leq \frac{1}{4n} \end{aligned}$$

(en étudiant les variations de $x \mapsto x(1-x)$ sur I). ■

Du fait qu'une fonction continue sur un segment y est uniformément continue, on déduit le résultat suivant.

Lemme 16.9 *Si f est une fonction continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, alors pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que :*

$$\forall (x,y) \in [a,b]^2, \ |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon + \frac{2\|f\|_\infty}{\eta^2}(x-y)^2. \tag{16.3}$$

Démonstration. La fonction f qui est continue sur le compact $[a,b]$ y est uniformément continue, donc pour $\varepsilon > 0$ donné on peut trouver un réel $\eta > 0$ tel que si x, y dans $[a,b]$ sont tels que $|x-y| < \eta$, on a alors $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Pour x, y dans $[a,b]$, on a soit $|x-y| < \eta$ et dans ce cas $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, soit $|x-y| \geq \eta$, ce qui équivaut à $1 \leq \dfrac{(x-y)^2}{\eta^2}$ et dans ce cas :

$$|f(x) - f(y)| \leq 2\|f\|_\infty \leq 2\|f\|_\infty \frac{(x-y)^2}{\eta^2}.$$

On a donc dans tous les cas :

$$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon + \frac{2\|f\|_\infty}{\eta^2}(x-y)^2$$

■

Théorème 16.19 (Bernstein) *Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(I)$ la suite $(B_n(f))_{n\geq 1}$ converge uniformément vers f sur $I = [0,1]$.*

Démonstration. Avec $B_n(e_0) = \sum\limits_{k=0}^{n} B_{n,k} = e_0$, on déduit que pour $n \geq 1$, on a :

$$B_n(f)(x) - f(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) B_{n,k}(x).$$

On se donne un réel $\varepsilon > 0$ et en utilisant le lemme précédent, on a pour tout $x \in I$ et tout $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}
|B_n(f)(x) - f(x)| &\leq \sum_{k=0}^{n} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| B_{n,k}(x) \\
&\leq \sum_{k=0}^{n} \left(\varepsilon + \frac{2\|f\|_\infty}{\eta^2}\left(\frac{k}{n} - x\right)^2 \right) B_{n,k}(x) \\
&\leq \varepsilon \sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(x) + \frac{2\|f\|_\infty}{\eta^2} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - n\right)^2 B_{n,k}(x) \\
&\leq \varepsilon + \frac{2\|f\|_\infty}{\eta^2}\frac{1}{4n}
\end{aligned}$$

et donc :

$$\sup_{x\in I} |B_n(f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon + \frac{2\|f\|_\infty}{\eta^2}\frac{1}{4n} \leq 2\varepsilon$$

pour n assez grand. On a donc ainsi montré que la suite $(B_n(f))_{n\geq 1}$ converge uniformément vers f sur $I = [0,1]$. ■

Comme au paragraphe précédent, le changement de variable $x = (1-t)a + tb$ ramène un intervalle $[a,b]$ à $[0,1]$ et le théorème de Weierstrass s'en déduit.

16.5.3 Troisième démonstration

Le lemme 16.9 qui est à la base de la démonstration du théorème de Bernstein permet en fait de montrer un résultat plus général. C'est le théorème de Korovkin qui suit qui a pour corollaire ceux de Bernstein et de Weierstrass.

On désigne par $I = [a, b]$ un intervalle fermé borné avec $a < b$ et par $\mathcal{C}(I)$ l'espace vectoriel des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$.

On appelle opérateur linéaire sur $\mathcal{C}(I)$ tout endomorphisme de cet espace vectoriel et on dit qu'un opérateur linéaire sur $\mathcal{C}(I)$ est positif (ou monotone) s'il transforme toute fonction positive appartenant à $\mathcal{C}(I)$ en une fonction positive.

Lemme 16.10 *Si u est un opérateur linéaire positif sur $\mathcal{C}(I)$, on a alors :*

$$\forall f \in \mathcal{C}(I),\ |u(f)| \leq u(|f|).$$

Démonstration. Avec $-|f| \leq f \leq |f|$ et u linéaire et positif, on déduit que $-u(|f|) \leq u(f) \leq u(|f|)$, soit, $|u(f)| \leq u(|f|)$. ■

On note toujours $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la base canonique de $\mathbb{R}[x]$ et pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(I)$, tout entier naturel k et pour tout réel x fixé dans I, $f - f(x)e_k$ désigne la fonction de I dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$t \mapsto g(t) - g(x)t^k.$$

Du lemme 16.9, on déduit alors le résultat suivant.

Lemme 16.11 *Si u est un opérateur linéaire positif sur $\mathcal{C}(I)$, alors pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(I)$ et tout réel $\varepsilon > 0$, on peut trouver un réel $\eta > 0$ tel que :*

$$\forall x \in I,\ |u(f) - f(x)u(e_0)| \leq \varepsilon u(e_0) + 2\frac{\|f\|_\infty}{\eta^2}\left(u(e_2) - 2xu(e_1) + x^2u(e_0)\right).$$

Démonstration. L'inégalité (16.3) à x fixé dans I se traduit par :

$$|f - f(x)e_0| \leq \varepsilon e_0 + \frac{2\|f\|_\infty}{\eta^2}\left(e_2 - 2xe_1 + x^2e_0\right)$$

et pour u linéaire positif, on en déduit que :

$$\begin{aligned}|u(f) - f(x)u(e_0)| &= |u(f - f(x)e_0)| \leq u(|f - f(x)e_0|)\\ &\leq \varepsilon u(e_0) + 2\frac{\|f\|_\infty}{\eta^2}\left(u(e_2) - 2xu(e_1) + x^2u(e_0)\right).\end{aligned}$$

■

Lemme 16.12 *Si u est un opérateur linéaire positif sur $\mathcal{C}(I)$, alors pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(I)$ et tout réel $\varepsilon > 0$, on peut trouver des réels positifs α, β et γ tels que pour tout $x \in I$, on ait :*

$$|u(f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon + \alpha\|u(e_0) - e_0\|_\infty + \beta\|u(e_1) - e_1\|_\infty + \gamma\|u(e_2) - e_2\|_\infty$$

Démonstration. En écrivant, que :

$$u(f) - f(x)e_0 = (u(f) - f(x)u(e_0)) + f(x)(u(e_0) - e_0)$$

on a :

$$\begin{aligned}|u(f) - f(x)e_0| &\leq |u(f) - f(x)u(e_0)| + |f(x)| |u(e_0) - e_0| \\ &\leq |u(f) - f(x)u(e_0)| + \|f\|_\infty \|u(e_0) - e_0\|_\infty\end{aligned}$$

et en écrivant que :

$$\begin{aligned}u(e_2) - 2xu(e_1) + x^2u(e_0) = (u(e_2) - e_2) - 2x(u(e_1) - e_1) + x^2(u(e_0) - e_0) \\ + \left(e_2 - 2xe_1 + x^2e_0\right)\end{aligned}$$

le lemme précédent nous donne en posant $M = 2\dfrac{\|f\|_\infty}{\eta^2}$, pour u linéaire positif :

$$\begin{aligned}|u(f) - f(x)u(e_0)| \leq \varepsilon(u(e_0) - e_0) + \varepsilon \\ +M\left((u(e_2) - e_2) - 2x(u(e_1) - e_1) + x^2(u(e_0) - e_0)\right) \\ +M\left(e_2 - 2xe_1 + x^2e_0\right) \\ \leq \varepsilon\|u(e_0) - e_0\|_\infty + \varepsilon \\ +M\left(\|u(e_2) - e_2\|_\infty + 2\|e_1\|_\infty\|u(e_1) - e_1\|_\infty + \|e_2\|_\infty\|u(e_0) - e_0\|_\infty\right) \\ +M\left|e_2 - 2xe_1 + x^2e_0\right|\end{aligned}$$

et l'évaluation en x nous donne, compte tenu de :

$$e_2(x) - 2xe_1(x) + x^2e_0(x) = x^2 + 2x^2 + x^2 = 0$$

$$\begin{aligned}|u(f)(x) - f(x)u(e_0)(x)| \leq \varepsilon\|u(e_0) - e_0\|_\infty + \varepsilon \\ +M\left(\|u(e_2) - e_2\|_\infty + 2\|e_1\|_\infty\|u(e_1) - e_1\|_\infty + \|e_2\|_\infty\|u(e_0) - e_0\|_\infty\right)\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}|u(f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon + \left(\|f\|_\infty + \varepsilon + M\|e_2\|_\infty\right)\|u(e_0) - e_0\|_\infty \\ +2M\|e_1\|_\infty\|u(e_1) - e_1\|_\infty + M\|u(e_2) - e_2\|_\infty\end{aligned}$$

■

Ce lemme est à la base de la démonstration du théorème de Korovkin qui suit.

Théorème 16.20 *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'opérateurs linéaires positifs sur $\mathcal{C}(I)$ telle que pour toute fonction f appartenant à $\{e_0, e_1, e_2\}$ la suite $(u_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I, alors pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(I)$ la suite de fonctions $(u_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I.*

Démonstration. Le lemme précédent appliqué à chaque u_n nous donne pour $f \in \mathcal{C}(I)$ et $\varepsilon > 0$:

$$\|u_n(f) - f\|_\infty \leq \varepsilon + \alpha\|u_n(e_0) - e_0\|_\infty + \beta\|u_n(e_1) - e_1\|_\infty + \gamma\|u_n(e_2) - e_2\|_\infty$$

les constantes α, β, γ ne dépendant que de I, f et ε. Avec la convergence uniforme sur I de $(u_n(e_k))_{n\in\mathbb{N}}$ vers e_k pour $k = 0, 1, 2$, on peut trouver un entier n_0 tel que $\|u_n(f) - f\|_\infty \leq 4\varepsilon$ pour tout $n \geq n_1$. Comme $\varepsilon > 0$ est quelconque, on a ainsi prouvé la convergence uniforme sur I de $(u_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ vers f. ■

Prenant pour u_n les opérateurs de Bernstein sur $[0, 1]$, on retrouve le théorème de Bernstein.

16.5.4 Quatrième démonstration

On donne ici une démonstration qui utilise un opérateur de convolution.

On se donne une fonction δ dans $\mathcal{C}([-1,1])$ telle que :

$$\begin{cases} \delta(0) = 1, \\ \forall x \in [-1,1] - \{0\}, \ 0 \leq \delta(x) < 1. \end{cases}$$

Par exemple, la fonction δ définie sur $[-1,1]$ par $\delta(x) = (1-x^2)$ convient.

À une telle fonction, on associe la suite de fonctions $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $P_n = \dfrac{1}{a_n}\delta^n$, où le réel a_n est défini par $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_n(x)\,dx = 1$, soit $a_n = \dfrac{1}{I_n}$, où $I_n = \displaystyle\int_{-1}^{1} \delta^n(x)\,dx$.

Si δ est un polynôme alors les P_n sont des fonctions polynomiales.

Pour tout entier naturel n, on pose :

$$\forall \alpha \in \left]0,1\right], \ I_n(\alpha) = \int_{-\alpha}^{\alpha} \delta^n(x)\,dx.$$

Lemme 16.13 *On a :*

$$\forall \alpha \in \left]0,1\right], \ I_n \underset{n\to+\infty}{\backsim} I_n(\alpha).$$

Démonstration. Le résultat est évident pour $\alpha = 1$. On se fixe donc α dans $\left]0,1\right[$.

La fonction δ étant à valeurs positives, on a :

$$\forall \alpha \in \left]0,1\right[, \ 0 \leq I_n(\alpha) \leq I_n.$$

En écrivant que :

$$I_n = I_n(\alpha) + \int_{-1}^{-\alpha} \delta^n(x)\,dx + \int_{\alpha}^{1} \delta^n(x)\,dx$$

et en posant $M_\alpha = \sup\limits_{\alpha\leq|x|\leq 1} \delta(x)$, on a $0 \leq M_\alpha < 1$ (la borne supérieure sur un compact de la fonction continue δ est atteinte et $0 \leq \delta(x) < 1$ pour $\alpha \leq |x| \leq 1$) et :

$$0 \leq I_n(\alpha) \leq I_n \leq I_n(\alpha) + 2(1-\alpha) M_\alpha^n \leq I_n(\alpha) + 2M_\alpha^n$$

ce qui donne :

$$1 \leq \frac{I_n}{I_n(\alpha)} \leq 1 + 2\frac{M_\alpha^n}{I_n(\alpha)}.$$

(comme δ est continue avec $\delta(0) > 0$, on a $I_n(\alpha) > 0$).

La fonction δ étant continue en 0 avec $\delta(0) = 1$, pour tout réel $\varepsilon \in \left]0,1\right[$ on peut trouver un réel $\eta \in \left]0,\alpha\right[$ tel que :

$$\forall x \in [-\eta,\eta], \ 0 \leq 1 - \delta(x) < \varepsilon$$

soit :

$$\forall x \in [-\eta,\eta], \ \delta(x) > 1 - \varepsilon$$

et :

$$I_n(\alpha) \geq \int_{-\eta}^{\eta} \delta^n(x)\,dx \geq 2\eta(1-\varepsilon)^n.$$

On a donc :

$$\forall n \geq 1, \ 1 \leq \frac{I_n}{I_n(\alpha)} \leq 1 + \frac{1}{\eta}\left(\frac{M_\alpha}{1-\varepsilon}\right)^n.$$

En prenant $\varepsilon \in]0, 1 - M_\alpha[$ (ce qui est possible puisque $0 \leq M_\alpha < 1$), on a $0 \leq \dfrac{M_\alpha}{1-\varepsilon} < 1$ et de l'inégalité précédente on déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{I_n}{I_n(\alpha)} = 1$$

soit $I_n \underset{n\to+\infty}{\backsim} I_n(\alpha)$.. ■

Lemme 16.14 *Pour tout réel* $\alpha \in]0, 1[$, *on a :*

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\int_{\alpha \leq |x| \leq 1} P_n(x)\,dx \right) = 0.$$

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned}
\int_{\alpha \leq |x| \leq 1} P_n(x)\,dx &= \int_{-1}^{1} P_n(x)\,dx - \int_{-\alpha}^{\alpha} P_n(x)\,dx \\
&= 1 - a_n I_n(\alpha) = 1 - \frac{I_n}{I_n(\alpha)} \underset{n\to+\infty}{\to} 0
\end{aligned}$$

■

Si f est une fonction continue sur l'intervalle $[0, 1]$ telle que $f(0) = f(1) = 0$, on peut la prolonger par 0 en une fonction continue sur $\mathbb{R}$ (on pose donc $f(x) = 0$ pour $x \notin [0, 1]$ et f est continue sur $\mathbb{R}$). À une telle fonction f, on associe la suite de fonctions $(Q_n)_{n\geq 1}$ définie sur $[0, 1]$ par :

$$Q_n(x) = \int_{-1}^{1} f(x+t)\,P_n(t)\,dt.$$

Lemme 16.15 *Avec ces notations, la suite* $(Q_n)_{n\geq 1}$ *converge uniformément vers* f *sur* $[0, 1]$.

Démonstration. Tenant compte de $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_n(t)\,dt = 1$, on peut écrire pour tout $x \in [0, 1]$:

$$Q_n(x) - f(x) = \int_{-1}^{1} (f(x+t) - f(x))\,P_n(t)\,dt.$$

La fonction f qui est continue sur le compact $[-1, 2]$ y est uniformément continue et pour tout réel $\varepsilon > 0$ on peut trouver un réel $\alpha \in]0, 1[$ tel que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ dès que $|x - y| < \alpha$ dans $[-1, 2]$. Pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in [0, 1]$, on a alors :

$$\begin{aligned}
|Q_n(x) - f(x)| &\leq \int_{-1}^{1} |f(x+t) - f(x)|\,P_n(t)\,dt \\
&\leq \varepsilon \int_{-\alpha}^{\alpha} P_n(t)\,dt + 2\,\|f\|_\infty^2 \int_{\alpha\leq|t|\leq 1} P_n(t)\,dt \\
&\leq \varepsilon + 2\,\|f\|_\infty^2 \int_{\alpha\leq|t|\leq 1} P_n(t)\,dt
\end{aligned}$$

ce qui signifie que pour tout $n \geq 1$, on a :

$$\sup_{x\in[0,1]} |Q_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon + 2\,\|f\|_\infty^2 \int_{\alpha\leq|t|\leq 1} P_n(t)\,dt$$

Comme la suite $\left(\int_{\alpha\leq|t|\leq 1} P_n(t)\,dt\right)_{n\geq 1}$ converge vers 0, on en déduit qu'il existe un entier n_0 tel que $\sup_{x\in[0,1]} |Q_n(x) - f(x)| \leq \left(2\|f\|_\infty^2 + 1\right)\varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$.

On a ainsi prouvé la convergence uniforme sur $[0,1]$ de $(Q_n)_{n\geq 1}$ vers f. ■

En prenant pour δ une fonction polynomiale, les fonctions Q_n sont également polynomiales. En effet, comme f est nulle en dehors de $[0,1]$, on a pour tout $x \in [0,1]$:

$$Q_n(x) = \int_{-x}^{1-x} f(x+t)\,P_n(t)\,dt = \int_0^1 f(u)\,P_n(u-x)\,du,$$

et Q_n est une fonction polynomiale.

Le théorème de Weierstrass s'en déduit alors comme suit. Si f est une fonction continue sur $[a,b]$, la fonction g définie par :

$$g(t) = f((1-t)a + tb)$$

est continue sur $[0,1]$ et la fonction h définie par :

$$h(t) = g(t) - g(0) - (g(1) - g(0))\,t$$

est également continue sur $[0,1]$ avec $h(0) = h(1) = 0$.

Il nous suffit alors d'appliquer le lemme précédent à la fonction h pour conclure.

Précisément, on a $h = \lim_{n\to+\infty} Q_n$, où $Q_n(t) = \int_0^1 f(u)\,P_n(u-t)\,du$ est polynomiale, la convergence étant uniforme sur $[0,1]$ et pour $x = (1-t)a + tb \in [a,b]$ avec $t \in [0,1]$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= g(t) = h(t) + g(0) + (g(1) - g(0))\,t \\ &= \lim_{n\to+\infty} (Q_n(t) + g(0) + (g(1) - g(0))\,t) = \lim_{n\to+\infty} R_n(x) \end{aligned}$$

avec :

$$R_n(x) = Q_n\left(\frac{x-a}{b-a}\right) + f(a) + (f(b) - f(a))\frac{x-a}{b-a}$$

fonction polynomiale, la convergence étant uniforme sur $[a,b]$.

Le choix de $\delta(x) = 1 - x^2$ nous fournit une telle démonstration (due à Landau).

Le choix de δ non polynomiale, mais développable en série entière permet également de montrer le théorème de Weierstrass.

Par exemple le choix de $\delta(x) = e^{-x^2}$ nous fournit une telle démonstration (due à Weierstrass lui même en 1885).

On a bien $\delta(0) = 1$ et $0 \leq \delta(x) < 1$ pour tout réel non nul.

Comme on vient de le voir il suffit de considérer le cas d'une fonction continue sur $[0,1]$ telle que $f(0) = f(1) = 0$. Pour une telle fonctions, la suite $(Q_n)_{n\geq 1}$ qui converge uniformément vers f sur $[0,1]$ est définie par :

$$\begin{aligned} Q_n(x) &= \int_0^1 f(t)\,P_n(t-x)\,dt = \frac{1}{I_n}\int_0^1 f(t)\,e^{-(xt-)^2}dt \\ &= \frac{1}{I_n}\int_0^1 f(t)\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} n^k (t-x)^{2k}\,dt \end{aligned}$$

la convergence de la série étant uniforme en $t \in [0,1]$ pour tout x fixé dans $[0,1]$ puisque la série entière $\sum \frac{z^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini (voir le chapitre suivant pour les séries de fonctions), on peut donc intégrer terme à terme et on a :

$$Q_n(x) = \frac{1}{I_n} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} n^k \int_0^1 f(t)(t-x)^{2k}\, dt,$$

la convergence de cette série étant uniforme sur $[0,1]$. Enfin en écrivant que :

$$\int_0^1 f(t)(t-x)^{2k}\, dt = \sum_{j=0}^{2k} C_{2k}^j (-1)^j \left(\int_0^1 f(t)\, t^{2k-j} dt \right) x^j,$$

on déduit que Q_n est limite uniforme d'une suite de polynômes sur $[0,1]$. Il existe donc pour tout réel $\varepsilon > 0$ un entier n tel que $\|f - Q_n\|_\infty$ et un polynôme P_n tel que $\|Q_n - P_n\|_\infty < \varepsilon$ et on a :

$$\|f - P_n\|_\infty \leq \|f - Q_n\|_\infty + \|Q_n - P_n\|_\infty < 2\varepsilon.$$

Le théorème de Weierstrass s'en déduit.

17

Séries de fonctions

17.1 Un théorème de permutation des signes $\sum$ et $\int$

17.1.1 Cas des fonctions continues

Le résultat suivant nous sera utile.

Lemme 17.1 *Si $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de compacts non vides dans $\mathbb{R}$, alors l'intersection $F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est un compact non vide.*

Démonstration. F est fermé comme intersection de fermés de $\mathbb{R}$. Comme la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, on a $F \subset F_0$ et F est borné comme F_0. L'ensemble F est donc compact.

Comme tous les F_n sont non vides, il existe une suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $x_n \in F_n \subset F_0$ pour tout n et de cette suite dans le compact F_0, on peut extraire une sous-suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un réel x.

Pour $m \in \mathbb{N}$ et $n \geq m$, on a $\varphi(n) \geq n \geq m$, donc $x_{\varphi(n)} \in F_{\varphi(n)} \subset F_m$ et $x = \lim\limits_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)} \in F_m$ puisque F_m est fermé. On a donc $x \in F = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} F_m$ et F est non vide. ■

Remarque 17.1 *Le résultat précédent est faux pour une intersection de fermés comme le montre l'exemple des fermés $F_n =]-\infty, n]$ avec $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \emptyset$.*

Nous aurons aussi besoin de ce deuxième lemme technique.

Lemme 17.2 *Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues sur $I = [a,b]$ à valeurs réelles positives et f une fonction continue sur I à valeurs réelles positives telles que :*

$$\forall x \in I,\ f(x) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

on a alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$$

(les sommes des séries numériques considérées valant $+\infty$ en cas de divergence du fait qu'elles sont à termes positifs.).

Démonstration. Si $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = +\infty$, l'inégalité $\int_a^b f(x)\,dx \leq \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$ est alors vérifiée.

On suppose donc que la série $\sum \int_a^b f_n(x)\,dx$ converge.

On se donne un réel $\varepsilon > 0$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$F_n = \left\{ x \in I \mid \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \leq f(x) - \varepsilon \right\}.$$

Chaque F_n est fermé comme image réciproque du fermé $]-\infty, -\varepsilon]$ par la fonction continue $\sum\limits_{k=0}^{n} f_k - f$ et comme les fonctions f_k sont à valeurs positives, on a $F_{n+1} \subset F_n \subset I$ pour tout n.

Supposons que $F = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$ soit non vide. Il existe alors un réel $x \in I$ tel que $\sum\limits_{k=0}^{n} f_k(x) \leq f(x) - \varepsilon$ pour tout n, ce qui entraîne la convergence de la série à termes positifs $\sum f_n(x)$ avec $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \leq f(x) - \varepsilon$, ce qui est en contradiction avec $f(x) \leq \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ et $\varepsilon > 0$.

L'ensemble F est donc vide et le lemme précédent nous dit alors qu'il existe un entier m tel que F_m soit vide, ce qui signifie que :

$$\forall x \in I,\ \sum_{k=0}^{m} f_k(x) > f(x) - \varepsilon$$

et en conséquence :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,dx &\leq \sum_{k=0}^{m} \int_a^b f_k(x)\,dx + \varepsilon(b-a) \\ &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx + \varepsilon(b-a) \end{aligned}$$

Comme le réel $\varepsilon > 0$ est quelconque, on en déduit que $\int_a^b f(x)\,dx \leq \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$. ■

Nous sommes maintenant en mesure de montrer un premier théorème de permutation des signes $\sum$ et $\int$ pour les fonctions continues sur un segment.

Théorème 17.1 *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur $I = [a,b]$ à valeurs réelles ou complexes telle que :*

1. *la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I vers une fonction continue f ;*
2. *la série numérique $\sum \int_a^b |f_n(x)|\,dx$ est convergente.*

Dans ces conditions, la série numérique $\sum \int_a^b f_n(x)\,dx$ est convergente et :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Démonstration. Pour tout entier $n \geq 0$, on note $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k$ la somme partielle d'indice n et $R_n = f - S_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_k$ le reste d'indice n. On a alors :

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\,dx - \sum_{k=0}^{n}\int_a^b f_k(x)\,dx\right| &= \left|\int_a^b \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} f_k(x)\right)dx\right| \\ &= \left|\int_a^b R_n(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |R_n(x)|\,dx\end{aligned}$$

avec $|R_n| = |f - S_n|$ continue sur I telle que :

$$\forall x \in I,\ |R_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |f_k(x)| \tag{17.1}$$

En effet, dans le cas où $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} |f_k(x)| = +\infty$, on a automatiquement l'inégalité et dans le cas où $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} |f_k(x)|$ converge, la série $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$ est convergente et :

$$|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |f_k(x)|\,.$$

Le lemme 17.2 nous dit alors que :

$$\int_a^b |R_n(x)|\,dx \leq R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\int_a^b |f_k(x)|\,dx$$

avec $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n = 0$ puisque la série $\sum\int_a^b |f_n(x)|\,dx$ est convergente.

On a donc :

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\int_a^b f(x)\,dx - \sum_{k=0}^{n}\int_a^b f_k(x)\,dx\right| = 0$$

soit $\int_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\int_a^b f_k(x)\,dx$, c'est-à-dire l'égalité annoncée. ■

Un résultat analogue pour les fonctions continues et absolument intégrables sur un intervalle quelconque s'en déduit.

Théorème 17.2 *Soient $I = [a, b[$ un intervalle réel avec $-\infty < a < b \leq +\infty$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur I à valeurs réelles ou complexes telle que :*

1. *la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I vers une fonction continue f ;*
2. *pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'intégrale $\int_a^b f_n(x)\,dx$ est absolument convergente ;*
3. *la série numérique $\sum\int_a^b |f_n(x)|\,dx$ est convergente.*

Dans ces conditions, l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ *est absolument convergente, la série numérique* $\sum \int_a^b f_n(x)\,dx$ *est convergente et :*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Démonstration. Les fonctions $|f_n|$ et $|f|$ sont continues à valeurs positives sur tout segment $[a,x] \subset I$ (où $a < x < b$) avec :

$$\forall t \in [a,x],\ |f(t)| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |f_n(t)|$$

(la justification est analogue à celle de (17.1)), ce qui entraîne :

$$\int_a^x |f(t)|\,dt \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^x |f_n(t)|\,dt \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b |f_n(x)|\,dx < +\infty$$

La fonction $x \mapsto \int_a^x |f(t)|\,dt$ est donc croissante majorée et en conséquence $\int_a^b |f(t)|\,dt = \lim_{x\to b} \int_a^x |f(t)|\,dt$ est bien définie, ce qui signifie que l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ est absolument convergente (on dit aussi que la fonction f est sommable ou absolument intégrable sur I).

Pour tout entier $n \geq 0$, on note $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$ la somme partielle d'indice n et $R_n = f - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$ le reste d'indice n. On a alors :

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{k=0}^{n} \int_a^b f_k(x)\,dx \right| &= \left| \int_a^b \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \right) dx \right| \\ &= \left| \int_a^b R_n(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |R_n(x)|\,dx \end{aligned}$$

avec $\int_a^b |R_n(x)|\,dx \leq +\infty$ et $|R_n| = |f - S_n|$ continue sur I telle que :

$$\forall x \in I,\ |R_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |f_k(x)|$$

Le lemme 17.2 nous dit alors que pour tout $x \in]a,b[$, on a :

$$\begin{aligned} \int_a^x |R_n(x)|\,dx &\leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_a^x |f_k(x)|\,dx \\ &\leq R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_a^b |f_k(x)|\,dx \end{aligned}$$

et en conséquence :

$$\int_a^b |R_n(x)|\, dx \leq R_n$$

avec $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n = 0$ puisque la série $\sum \int_a^b |f_n(x)|\, dx$ est convergente.

On a donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \int_a^b f(x)\, dx - \sum_{k=0}^n \int_a^b f_k(x)\, dx \right| = 0$$

soit $\int_a^b f(x)\, dx = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^n \int_a^b f_k(x)\, dx$, c'est-à-dire l'égalité annoncée. ■

Le cas des fonctions continues et absolument intégrables sur un intervalle I quelconque s'en déduit facilement.

Remarque 17.2 *Dans la démonstration précédente, on a en fait prouvé que :*

$$\|f - S_n\|_1 = \int_a^b \left| f(x) - \sum_{k=0}^n f_k(x) \right| dx = \int_a^b |R_n(x)|\, dx \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

ce qui traduit le fait que la série $\sum f_n$ converge en moyenne vers la fonction f.

Exercice 17.1 *Montrer que pour tout nombre complexe α tel que $\Re(\alpha) > 0$, on a :*

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{e^x - 1} dx = \Gamma(\alpha+1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}}$$

où $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} x^{z-1} e^{-x} dx$ pour $\Re(z) > 0$.

Solution 17.1 *Pour tout réel $x > 0$, on a :*

$$f(x) = \frac{x^\alpha}{e^x - 1} = \frac{x^\alpha e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^\alpha e^{-(n+1)x} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

avec f et les f_n continues sur $]0, +\infty[$ et :

$$\int_0^{+\infty} |f_n(x)|\, dx = \int_0^{+\infty} x^{\Re(\alpha)} e^{-(n+1)x} dx < +\infty.$$

Le changement de variable $t = (n+1)x$ donne :

$$\int_0^{+\infty} |f_n(x)|\, dx = \frac{1}{(n+1)^{\Re(\alpha)+1}} \int_0^{+\infty} t^{\Re(\alpha)} e^{-t} dt = \frac{\lambda}{(n+1)^{\Re(\alpha)+1}}$$

avec $\sum \frac{1}{(n+1)^{\Re(\alpha)+1}} < +\infty$ pour $\Re(\alpha) > 0$.

Le théorème précédent nous dit alors que :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{e^x - 1} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-(n+1)x} dx &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^{\alpha+1}} \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t} dt \\ &= \Gamma(\alpha+1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}}\end{aligned}$$

Par exemple, pour $\alpha = 1,$ *on a* $\Gamma(\alpha+1) = \Gamma(2) = 1$ *et :*

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

17.1.2 Cas des fonctions continues par morceaux

On rappelle tout d'abord la définition d'une fonction continue par morceaux sur un segment $I = [a, b]$.

Définition 17.1 *On dit qu'une fonction* f *définie sur* $I = [a, b]$ *est continue par morceaux sur cet intervalle s'il existe une subdivision :*

$$x_0 = a < x_1 < \cdots < x_p < x_{p+1} = b$$

telle que la fonction f *soit continue chacun des intervalle* $]x_k, x_{k+1}[$ $(0 \leq k \leq p)$*, admette une limite à droite en* a*, une limite à gauche en* b *et des limites à droite et à gauche en chacun des points* x_k $(1 \leq k \leq p)$*.*

Avec les notations de cette définition, pour tout entier k compris entre 0 et p, la restriction de la fonction f à l'intervalle $]x_k, x_{k+1}[$ se prolonge en une fonction continue sur $[x_k, x_{k+1}]$.

Une fonction continue par morceaux sur I est donc en particulier intégrable sur cet intervalle.

Les résultats qui suivent vont nous permettre de nous ramener aux cas des fonctions continues sur un segment.

Lemme 17.3 *Si* f *est continue par morceaux sur* $I = [a, b]$ *et à valeurs positives, on peut alors trouver, pour tout réel* $\varepsilon > 0$*, une fonction* g *continue sur* I *telle que* $0 \leq g \leq f$ *et* $\displaystyle\int_a^b (f(x) - g(x))\, dx < \varepsilon.$

Démonstration. Si f est continue, la fonction $g = f$ convient.

Sinon on note $x_1 < x_2 < \cdots < x_p$ les points de discontinuité de f dans $]a, b[$ et on désigne par $\eta > 0$ un réel tel que $[x_k - \eta, x_k + \eta] \subset]a, b[$ pour tout k compris entre 1 et p. Le choix de η sera affiné plus loin en fonction de $\varepsilon > 0$.

On désigne par φ la fonction continue qui coïncide avec f sur $I \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{p}]x_k - \eta, x_k + \eta[$, qui est affine par morceaux sur chaque intervalle $[x_k - \eta, x_k + \eta]$ et vaut 0 en chaque x_k, soit :

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in I \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{p}]x_k - \eta, x_k + \eta[\\ \dfrac{f(x_k - \eta)}{\eta} (x_k - x) \text{ si } x \in [x_k - \eta, x_k] \\ \dfrac{f(x_k + \eta)}{\eta} (x - x_k) \text{ si } x \in [x_k, x_k + \eta] \end{cases}$$

(faire un dessin). Cette fonction est à valeurs positives, continue sur $I \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{p} \{x_k - \eta, x_k, x_k + \eta\}$ et on vérifie facilement qu'elle est continue en chacun des points $x_k - \eta, x_k, x_k + \eta$.

On définit alors la fonction g par $g = \min(f, \varphi)$. Cette fonction est continue sur $I \setminus \{x_1, \cdots, x_p\}$ comme minimum de deux fonctions continues sur cet ensemble et pour chaque x_k, on a :

$$\begin{aligned}\lim_{x \to x_k^-} g(x) = \lim_{x \to x_k^-} \min(f(x), \varphi(x)) &= \min\left(\lim_{x \to x_k^-} f(x), \lim_{x \to x_k^-} \varphi(x)\right) \\ &= \min\left(\lim_{x \to x_k^-} f(x), 0\right) = 0 = g(x_k)\end{aligned}$$

puisque $\lim\limits_{x \to x_k^-} f(x) \geq 0$ (f est à valeurs positives) et $\lim\limits_{x \to x_k^+} g(x) = 0 = g(x_k)$ (même démonstration). La fonction g est donc continue sur I.

Par construction, on a $0 \leq g(x) \leq f(x)$ pour tout $x \in I$ et :

$$\begin{aligned}\int_a^b (f(x) - f(x))\, dx &= \sum_{k=1}^{p} \int_{x_k - \eta}^{x_k + \eta} (f(x) - g(x))\, dx \\ &\leq \sum_{k=1}^{p} \int_{x_k - \eta}^{x_k + \eta} f(x)\, dx \leq 2p\eta \|f\|_\infty < \varepsilon\end{aligned}$$

pour $0 < \eta < \dfrac{\varepsilon}{2p\|f\|_\infty}$. ■

Remarque 17.3 *Le lemme précédent est encore vrai pour f de signe quelconque, avec g non nécessairement positive, comme on le voit en remplaçant f par $f - \inf\limits_{x \in I} f(x)$ (f continue par morceaux sur $[a, b]$ est minorée).*

Lemme 17.4 *Si f est continue par morceaux sur $I = [a, b]$ et à valeurs positives, on peut alors trouver, pour tout réel $\varepsilon > 0$, une fonction h continue sur I telle que $0 \leq f \leq h$ et $\displaystyle\int_a^b (h(x) - f(x))\, dx < \varepsilon$.*

Démonstration. Comme f est continue par morceaux sur I, elle est majorée et $f_1 = \sup\limits_{x \in I} f(x) - f$ est continue par morceaux positives, on peut donc trouver, pour tout réel $\varepsilon > 0$, une fonction g_1 continue sur I telle que $0 \leq g_1 \leq f_1$ et $\displaystyle\int_a^b (f_1(x) - g_1(x))\, dx < \varepsilon$. La fonction $h = \sup\limits_{x \in I} f(x) - g_1$ convient alors. ■

De ces lemmes, on déduit que le lemme 17.2 est encore valable pour les fonctions continues par morceaux.

Lemme 17.5 *Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues par morceaux sur $I = [a, b]$ à valeurs réelles positives et f une fonction continue par morceaux sur I à valeurs réelles positives telles que :*

$$\forall x \in I,\ f(x) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

on a alors :

$$\int_a^b f(x)\, dx \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx$$

Démonstration. On se donne un réel $\varepsilon > 0$ et on désigne par g et h_n, pour $n \in \mathbb{N}$, des fonctions continues sur I telles que :

$$0 \leq g \leq f,\ 0 \leq f_n \leq h_n \text{ et } \int_\alpha^\beta (f(x) - g(x))\,dx < \varepsilon,\ \int_\alpha^\beta (h_n(x) - f_n(x))\,dx < \frac{\varepsilon}{2^n}$$

On a alors :

$$0 \leq g \leq f \leq \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} h_n$$

les fonctions g et h_n étant continues positives. Le lemme 17.2 nous dit alors que :

$$0 \leq \int_a^b g(x)\,dx \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b h_n(x)\,dx$$

et en conséquence :

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \varepsilon + \int_a^b g(x)\,dx &\leq \varepsilon + \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b h_n(x)\,dx \\ &\leq \varepsilon + \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx + \varepsilon \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \\ &\leq 3\varepsilon + \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx \end{aligned}$$

Et comme $\varepsilon > 0$ est quelconque, on a bien l'inégalité annoncée. ■

En reprenant la démonstration faite dans le cas des fonctions continues, on déduit alors le résultat suivant.

Théorème 17.3 *Soient $I = [a, b[$ un intervalle réel avec $-\infty < a < b \leq +\infty$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux sur I à valeurs réelles ou complexes telle que :*

1. *la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I vers une fonction continue par morceaux f ;*
2. *pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'intégrale $\int_a^b f_n(x)\,dx$ est absolument convergente ;*
3. *la série numérique $\sum \int_a^b |f_n(x)|\,dx$ est convergente.*

Dans ces conditions, l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ est absolument convergente, la série numérique $\sum \int_a^b f_n(x)\,dx$ est convergente et :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Remarque 17.4 *Là encore, on a :*

$$\|f - S_n\|_1 = \int_a^b \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \right| dx \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

c'est-à-dire que la série $\sum f_n$ converge en moyenne vers la fonction f.

17.2 Un théorème de convergence dominée

Théorème 17.4 *Soit $I = [a, b[$ un intervalle réel avec $-\infty < a < b \leq +\infty$. On se donne une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues par morceaux sur I à valeurs réelles positives telle que :*

1. *la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers la fonction nulle ;*
2. *il existe une fonction φ continue par morceaux sur I à valeurs réelles positives telle l'intégrale $\displaystyle\int_a^b \varphi(x)\,dx$ est convergente et $0 \leq f_n \leq \varphi$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Dans ces conditions, on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = 0$.

Démonstration. L'idée de la démonstration est d'utiliser une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la série $\sum (g_n - g_{n+1})$ vérifie les conditions du théorème 17.3 avec $0 \leq f_n \leq g_n$, la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant simplement vers 0 (cette suite est de même nature que la série $\sum (g_n - g_{n+1})$).

Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, on définit la suite de fonctions $(f_{n,p})_{p\geq n}$ par :

$$\forall p \geq n,\ f_{n,p} = \max_{n\leq k\leq p} (f_k)$$

Les fonctions $f_{n,p}$ sont continues par morceaux à valeurs positives comme max d'une suite finie de fonctions continues par morceaux à valeurs positives et avec $\{f_n, \cdots, f_p\} \subset \{f_n, \cdots, f_p, f_{p+1}\}$, on déduit que la suite $(f_{n,p})_{p\geq n}$ est croissante.

Avec $\{f_{n+1}, \cdots, f_p\} \subset \{f_n, f_{n+1}, \cdots, f_p\}$, on déduit que $f_{n+1,p} \leq f_{n,p}$ pour tout $p \geq n+1$.

Avec $0 \leq f_{n,p} \leq f_{n,p+1} \leq \varphi$ pour tout $p \geq n$, on déduit que les intégrales $I_{n,p} = \displaystyle\int_a^b f_{n,p}(x)\,dx$ sont convergentes et que la suite $(I_{n,p})_{p\geq n}$ est croissante majorée par $\displaystyle\int_a^b \varphi(x)\,dx$, donc convergente. En notant $I_n = \displaystyle\lim_{p\to+\infty} I_{n,p}$, on peut construire une suite strictement croissante d'entiers $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n - \frac{1}{2^n} \leq I_{n,p_n} \leq I_n$$

On définit alors la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ g_n = f_{n,p_n} = \max\{f_n, f_{n+1}, \cdots, f_{p_n}\}$$

et on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n - \frac{1}{2^n} \leq I_{n,p_n} = \int_a^b g_n(x)\,dx \leq I_n$$

Comme la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers 0, pour tout $x \in I$ et tout réel $\varepsilon > 0$, on peut trouver un entier $n_{x,\varepsilon}$ tel que :

$$\forall k \geq n_{x,\varepsilon},\ 0 \leq f_k(x) \leq \varepsilon$$

ce qui entraîne que :

$$\forall n \geq n_{x,\varepsilon},\ 0 \leq g_n(x) = \max\{f_n(x), \cdots, f_{p_n}(x)\} \leq \varepsilon$$

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc simplement vers 0 et la série $\sum (g_n - g_{n+1})$ qui est de même nature que cette suite converge simplement vers g_0.

Avec :

$$|g_n - g_{n+1}| \leq g_n + g_{n+1} \leq 2\varphi$$

on déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'intégrale $\displaystyle\int_a^b (g_n - g_{n+1})(x)\,dx$ est absolument convergente.

Il nous reste à montrer que la série $\sum \displaystyle\int_a^b |(g_n - g_{n+1})(x)|\,dx$ est convergente.

On a :

$$g_{n+1} - g_n = f_{n+1,p_{n+1}} - f_{n,p_n} \leq f_{n,p_{n+1}} - f_{n,p_n}$$

avec $f_{n,p_{n+1}} - f_{n,p_n} \geq 0$ (les suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f_{n,p})_{p\geq n}$ sont croissantes), donc :

$$\max(0, g_{n+1} - g_n) \leq f_{n,p_{n+1}} - f_{n,p_n}$$

et avec $\max(0,u) = \dfrac{u}{2} + \dfrac{|u|}{2}$, soit $|u| = 2\max(0,u) - u$, on déduit que :

$$|g_{n+1} - g_n| \leq 2\left(f_{n,p_{n+1}} - f_{n,p_n}\right) - (g_{n+1} - g_n)$$

avec :

$$\begin{aligned}\int_a^b \left(f_{n,p_{n+1}}(x) - f_{n,p_n}(x)\right) dx &= \int_a^b f_{n,p_{n+1}}(x)\,dx - \int_a^b f_{n,p_n}(x)\,dx \\ &= I_{n,p_n+1} - I_{n,p_n} \leq I_n - \left(I_n - \frac{1}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n}\end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\int_a^b |g_n(x) - g_{n+1}(x)|\,dx \leq 2\frac{1}{2^n} + \int_a^b g_n(x)\,dx - \int_a^b g_{n+1}(x)\,dx.$$

On en déduit alors que :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \int_a^b |g_k(x) - g_{k+1}(x)|\,dx &\leq 2\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} + \sum_{k=0}^{n} \int_a^b g_k(x)\,dx - \sum_{k=0}^{n} \int_a^b g_{k+1}(x)\,dx \\ &\leq 2\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} + \int_a^b g_0(x)\,dx - \int_a^b g_{n+1}(x)\,dx \\ &\leq 2\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} + \int_a^b g_0(x)\,dx \leq 4 + \int_a^b g_0(x)\,dx\end{aligned}$$

ce qui signifie que la série $\sum \displaystyle\int_a^b |(g_n - g_{n+1})(x)|\,dx$ converge.

Enfin avec $0 \leq f_n \leq g_n$, on obtient :

$$0 \leq \int_a^b f_n(x)\,dx \leq \int_a^b g_n(x)\,dx = \int_a^b \sum_{k=n}^{+\infty} (g_k(x) - g_{k+1}(x))\,dx$$

avec :

$$R_n = \int_a^b \sum_{k=n}^{+\infty} (g_n(x) - g_{n+1}(x))\,dx = \sum_{k=n}^{+\infty} \int_a^b (g_k(x) - g_{k+1}(x))\,dx$$

et tenant compte de la convergence de $\sum \int_a^b |(g_n - g_{n+1})(x)|\, dx$ et de :

$$\left| \int_a^b (g_n(x) - g_{n+1}(x))\, dx \right| \leq \int_a^b |g_n(x) - g_{n+1}(x)|\, dx$$

on déduit que la série $\sum \int_a^b (g_n(x) - g_{n+1}(x))\, dx$ est absolument convergente et en conséquence $\lim\limits_{n \to +\infty} R_n = 0$.

On a bien, en définitive : $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = 0$. ■

La restriction aux fonctions à valeurs réelles positives est seulement technique. On a en fait le résultat suivant.

Théorème 17.5 (Convergence dominée) *Soit $I = [a, b[$ un intervalle réel avec $-\infty < a < b \leq +\infty$. On se donne une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues par morceaux sur I à valeurs réelles ou complexes telle que :*

1. *la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux ;*
2. *il existe une fonction φ continue par morceaux sur I à valeurs réelles positives telle l'intégrale $\int_a^b \varphi(x)\, dx$ est convergente et $0 \leq |f_n| \leq \varphi$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Dans ces conditions les fonctions f_n et f sont absolument intégrables et on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Démonstration. Avec $0 \leq |f_n| \leq \varphi$ et $0 \leq |f| = \lim\limits_{n \to +\infty} |f_n| \leq \varphi$, on déduit que les fonctions f_n et f sont absolument intégrables sur I.

Des hypothèse, on déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} |f_n - f| = 0$, les fonction $|f_n - f|$ étant continues par morceaux positives avec $|f_n - f| \leq 2\varphi$. Le théorème précédent nous dit alors que :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\, dx = 0$$

et avec $\left| \int_a^b (f_n(x) - f(x))\, dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\, dx$, on déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_a^b (f_n(x) - f(x))\, dx = 0$, soit $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx$. ■

Exercice 17.2 *Calculer*

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 n^2 x (1-x)^n\, dx$$

et conclure.

Solution 17.2 *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $f_n(x) = n^2 x (1-x)^n$ sur $I = [0, 1]$. Cette suite de fonctions converge simplement vers la fonction nulle et :*

$$\int_0^1 f_n(x)\, dx = \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} \underset{n \to +\infty}{\to} 1.$$

On peut conclure qu'il est impossible de dominer la convergence.

Exercice 17.3 *Calculer* $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n(\alpha)$, *où* $\alpha > 0$ *et :*

$$I_n(\alpha) = \int_0^{n^{\frac{1}{\alpha}}} \left(1 - \frac{x^\alpha}{n}\right)^n dx.$$

Solution 17.3 *On désigne par* $(f_n)_{n\geq 1}$ *la suite de fonctions définies sur* $]0,+\infty[$ *par :*

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x^\alpha}{n}\right)^n \ si\ x \in \left]0, n^{\frac{1}{\alpha}}\right[, \\ 0 \ si\ x \geq n^{\frac{1}{\alpha}}. \end{cases}$$

Chaque fonction f_n *est continue et intégrable sur* $]0,+\infty[$ *avec :*

$$\forall x \in]0,+\infty[, \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = e^{-x^\alpha}, \\ \forall n \geq 1, \quad |f_n(x)| \leq e^{-x^\alpha} \end{cases}$$

et :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^\alpha} dx = \int_0^{+\infty} e^{-t} \frac{t^{\frac{1}{\alpha}-1}}{\alpha} dt = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\alpha}.$$

On déduit alors du théorème de la convergence dominée que :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n(\alpha) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\alpha}.$$

Exercice 17.4 *Calculer* $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n(a)$, *où* $a > 0$ *et :*

$$I_n(a) = \int_1^{+\infty} n^a \sin\left(\frac{x}{n}\right) e^{-n^2x^2} dx.$$

Solution 17.4 *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $f_n(x) = n^a \sin\left(\frac{x}{n}\right) e^{-n^2x^2}$ *sur* $I = [1,+\infty[$. *On a :*

$$\forall x \geq 1,\ |f_n(x)| \leq n^a e^{-n^2} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

avec :

$$\forall x \geq 1,\ |f_n(x)| \leq n^a e^{-\frac{n}{2}^2} e^{-\frac{x^2}{2}} \leq \lambda e^{-\frac{x^2}{2}}$$

(la suite $\left(n^a e^{-\frac{n}{2}^2}\right)_{n\geq 1}$ *est majorée puisque convergente vers* 0*). On déduit alors du théorème de la convergence dominée que :*

$$\lim_{n\to+\infty} I_n(a) = 0.$$

Exercice 17.5

1. *Montrer que :*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t)\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} \ln(t)\, dt.$$

2. *Montrer que :*

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t)\, dt = \frac{n}{n+1}\left(\ln(n) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}\right).$$

En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t} \ln(t)\, dt$.

Solution 17.5 *1. On désigne par* $(f_n)_{n\geq 1}$ *la suite de fonctions définies sur* $]0,+\infty[$ *par :*

$$f_n(t) = \begin{cases} \left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n \ln(t) \ \ si\ t \in]0,n[\,, \\ 0 \ si\ t \geq n. \end{cases}$$

Chaque fonction f_n *est continue et intégrable sur* $]0,+\infty[$ *avec :*

$$\forall t \in]0,+\infty[\,,\ \lim_{n\to+\infty} f_n(t) = f(t) = e^{-t}\ln(t)$$

et :

$$\forall t \in]0,n[\,,\ |f_n(t)| = \left(1-\frac{t}{n}\right)^n |\ln(t)| \leq \varphi(t) = e^{-t}|\ln(t)|$$
$$\forall t \geq n,\ |f_n(t)| = 0 \leq \varphi(t)$$

(pour $0 < x < 1$*, on a* $\ln(1-x) \leq -x$*, donc* $\ln\left(1-\dfrac{t}{n}\right) \leq -\dfrac{t}{n}$ *pour* $t \in]0,n[$ *et* $\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}$*) la fonction* φ *étant continue et intégrable sur* $]0,+\infty[$*. On déduit alors du théorème de la convergence dominée que :*

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \ln(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}\ln(t)\,dt.$$

2. On a :

$$I_n = \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \ln(t)\,dt = \int_0^1 (1-x)^n \ln(nx)\,n dx = \frac{n\ln(n)}{n+1} + nJ_n$$

et une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} J_{n+1} &= \int_0^1 (1-x)^{n+1}\ln(x)\,dx = (n+1)\int_0^1 (1-x)^n (x\ln(x) - x)\,dx \\ &= -(n+1)J_{n+1} + (n+1)J_n - (n+1)\int_0^1 x(1-x)^n\,dx. \end{aligned}$$

On a donc la relation de récurrence $(n+2)J_{n+2} = (n+1)J_n - \dfrac{1}{n+2}$*, avec* $J_0 = \displaystyle\int_0^1 \ln(x)\,dx = -1$*, ce qui donne* $(n+1)J_n = -\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}$ *et* $I_n = \dfrac{n}{n+1}\left(\ln(n) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}\right)$*. On a alors :*

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-t}\ln(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} I_n &= \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}\left(\ln(n) - \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}\right) \\ &= -\gamma \simeq -0.577215664. \end{aligned}$$

Exercice 17.6 *Montrer que :*

$$\forall x > 0,\ \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt = \lim_{n\to+\infty}\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}dt.$$

Puis que :

$$\forall x > 0,\ \Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty}\frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

Solution 17.6 *On désigne par* $(f_n)_{n\geq 1}$ *la suite de fonctions définies sur* $]0,+\infty[$ *par :*

$$f_n(t) = \begin{cases} \left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n t^{x-1} \text{ si } t \in\,]0,n[\,, \\ 0 \text{ si } x \geq n. \end{cases}$$

Chaque fonction f_n *est continue et intégrable sur* $]0,+\infty[$ *avec :*

$$\forall t \in\,]0,+\infty[\,, \quad \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t) = e^{-t}t^{x-1}, \\ \forall n \geq 1,\ |f_n(t)| \leq e^{-t}t^{x-1} = f(t) \end{cases}$$

la fonction f *étant continue et intégrable sur* $]0,+\infty[$. *On déduit alors du théorème de la convergence dominée que :*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt = \Gamma(x).$$

On a :

$$I_n(x) = \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}dt = \int_0^1 (1-t)^n t^{x-1}n^x dx = n^x J_n(x).$$

Une intégration par parties donne :

$$J_{n+1}(x) = \int_0^1 (1-t)^{n+1} t^{x-1}dt = \frac{n+1}{x}\int_0^1 (1-x)^n t^x dx = \frac{n+1}{x} J_n(x+1)$$

et par récurrence :

$$J_n(x) = \frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)} J_0(x+n)$$

$$= \frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}\int_0^1 t^{x+n-1}dt = \frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)(x+n)}.$$

Donc :

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} I_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

17.3 Exercices supplémentaires

Exercice 17.7 *On considère la série de fonctions de terme général* $u_n(x) = \dfrac{2x}{n^2+x^2}$ *pour* $n \geq 1$.

1. *Montrer que cette série converge uniformément sur tout intervalle* $[a,b]$. *On notera* f *sa somme.*
2. *Exprimer sous forme d'une série de fonctions* $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ *pour* $x \in [-1,1]$.
3. *Étudier la convergence uniforme sur* $[-1,1]$ *de la série de fonctions de terme général* $v_n(x) = \ln\left(1+\dfrac{x^2}{n^2}\right)$.
4. *Étudier la convergence uniforme sur* $[-1,1]$ *de la série de fonctions de terme général* $w_n(x) = \dfrac{2(n^2-x^2)}{(n^2+x^2)^2}$.

5. *En déduire f' sous forme d'une série de fonctions et que f est croissante sur $[-1,1]$.*

Solution 17.7

1. $|u_n(x)| \leq \dfrac{2\max(|a|,|b|)}{n^2}$, *donc convergence normale et uniforme sur $[-1,1]$.*
2. *Avec le théorème du cours :*
$$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^x \frac{2t}{n^2+t^2}dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{x^2}{n^2}\right)$$
3. $|v_n(x)| \leq \dfrac{x^2}{n^2} \leq \dfrac{1}{n^2}$, *donc convergence normale et uniforme sur $[-1,1]$.*
4. $|w_n(x)| \leq \dfrac{2n^2}{(n^2)^2} = \dfrac{2}{n^2}$, *donc convergence normale et uniforme sur $[-1,1]$.*
5. $w_n(x) = u_n'(x)$ *et théorème du cours donne :*
$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n'(x) = \frac{2(n^2-x^2)}{(n^2+x^2)^2} \geq 0$$
et f croissante sur $[-1,1]$.

Exercice 17.8 *Étudier la série de fonctions de terme général $u_n(x) = x^\alpha e^{-nx}$ où $\alpha > 0$ et $x \geq 0$.*

Solution 17.8 *Pour $x = 0$, on a $u_n(0) = 0$ pour tout $n \geq 0$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(0) = 0$.*

Pour $x > 0$ il s'agit d'une série géométrique de raison $e^{-x} \in \,]0,1[$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \dfrac{x^\alpha}{1-e^{-x}}$. En définitive, la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction f définie par :
$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = 0, \\ \dfrac{x^\alpha}{1-e^{-x}} \text{ si } x > 0. \end{cases}$$
La convergence est normale, donc uniforme, sur tout intervalle $[a,b]$ où $0 < a < b$. En effet, pour tout $n \geq 0$ et tout $x \in [a,b]$, on a $|u_n(x)| \leq \alpha_n = b^\alpha e^{-na}$, la série numérique $\sum \alpha_n$ étant convergente.
En remarquant que $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^\alpha}{x} = x^{\alpha-1}$, on déduit que pour $0 < \alpha \leq 1$ la fonction f est discontinue en 0 (puisque $\lim\limits_{x\to 0} f(x) \neq 0 = f(0)$), les fonctions u_n étant toutes continues en 0, il en résulte que la convergence ne peut pas être uniforme sur $\mathbb{R}^+$ dans ce cas là.
Étudions la convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$ pour $\alpha > 1$.
Les sommes partielles de la série géométrique $\sum u_n$ sont définies par :
$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = 0, \\ x^\alpha \dfrac{1-e^{-(n+1)x}}{1-e^{-x}} \text{ si } x > 0 \end{cases}$$
et les restes par :
$$R_n(x) = f(x) - S_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = 0, \\ x^\alpha \dfrac{e^{-(n+1)x}}{1-e^{-x}} = x^\alpha \dfrac{e^{-nx}}{e^x - 1} \text{ si } x > 0. \end{cases}$$

Pour tout $x > 0$, on a :

$$R_n'(x) = \frac{x^{\alpha-1}e^{-nx}}{(e^x-1)^2}\left((\alpha-(n+1)x)e^x + \alpha - nx\right)$$

et $R_n'(x)$ est du signe de $\varphi_n(x) = (\alpha-(n+1)x)e^x + \alpha - nx$.
Pour $x \geq \dfrac{\alpha}{n}$, on a $\alpha - nx \leq 0$ et $\alpha - nx - x < 0$, de sorte que $\varphi_n(x) < 0$.
Pour $x \leq \dfrac{\alpha}{n+1} < \dfrac{\alpha}{n}$, on a $\alpha - nx > 0$ et $\alpha-(n+1)x \geq 0$, de sorte que $\varphi_n(x) > 0$.
Sur $\left]\dfrac{\alpha}{n+1}, \dfrac{\alpha}{n}\right[$, on a $\alpha-(n+1)x < 0$ et :

$$\varphi_n'(x) = -(n+1)e^x + (\alpha-(n+1)x)e^x - n < 0,$$

c'est-à-dire que φ_n est strictement décroissante sur cet intervalle avec $\varphi_n\left(\dfrac{\alpha}{n+1}\right) > 0$ et $\varphi_n\left(\dfrac{\alpha}{n}\right) < 0$, elle s'annule donc en un unique point $x_n \in \left]\dfrac{\alpha}{n+1}, \dfrac{\alpha}{n}\right[$.
Il résulte de cette étude que $R_n'(x) > 0$ sur $]0, x_n[$, $R_n'(x) < 0$ sur $]x_n, +\infty[$ et $R_n'(x_n) = 0$ avec $R_n(0) = 0$ et $R_n(x) > 0$ pour $x > 0$. En conséquence :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^+} |R_n(x)| = R_n(x_n) = x_n^\alpha \frac{e^{-nx_n}}{e^{x_n}-1}$$

avec $x_n \in \left]\dfrac{\alpha}{n+1}, \dfrac{\alpha}{n}\right[$. On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} nx_n = \alpha$ et :

$$\lim_{n\to+\infty} R_n(x_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{e^{x_n}-1}e^{-nx_n}x_n^{\alpha-1} = 1\cdot e^{-\alpha}\cdot 0 = 0$$

pour $\alpha > 1$ et la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 17.9 *Une fonction peut très bien être continue et nulle part dérivable sur un intervalle réel I. Pour construire un exemple de telle fonction, on désigne par φ la fonction 2-périodique sur $\mathbb{R}$ définie par :*

$$\forall x \in [-1,1],\ \varphi(x) = |x|.$$

1. *Montrer que pour tous réels x, y on a :*

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq |x-y|.$$

   (on pourra distinguer les cas $|x-y| \geq 1$ et $|x-y| < 1$).

2. *Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que si l'intervalle $\left[x, x+\dfrac{1}{2}\right[$ ne contient pas d'entiers, alors :*

$$\left|\varphi\left(x+\frac{1}{2}\right) - \varphi(x)\right| = \frac{1}{2}.$$

   On définit la fonction de Van der Waerden par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n \varphi(4^n x).$$

3. *Montrer que cette série de fonctions est uniformément convergente et que sa somme f est continue sur $\mathbb{R}$.*
4. *Soient $x \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.*
   (a) *Montrer que l'intervalle $\left[4^m x - \frac{1}{2}, 4^m x + \frac{1}{2}\right[$ contient exactement un entier et que cet entier est dans l'un seulement des deux intervalles $\left[4^m x - \frac{1}{2}, 4^m x\right[$ ou $\left[4^m x, 4^m x + \frac{1}{2}\right[$. On note alors $\varepsilon_m = -1$ si le premier intervalle ne contient pas d'entier et $\varepsilon_m = 1$ si c'est le second et on pose $h_m = \frac{\varepsilon_m}{2} \frac{1}{4^m}$.*

   (b) *Montrer que :*
$$\left|\frac{f(x + h_m) - f(x)}{h_m}\right| \geq \frac{3^m + 1}{2}.$$
   (c) *En déduire que la fonction f n'est dérivable en aucun point de $\mathbb{R}$.*

   Un autre exemple de telle fonction est donné par la fonction de Weierstrass définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(p^n x)}{2^n},$$
   où $p \geq 6$ est un entier pair. On peut même montrer que cette fonction n'est monotone sur aucun intervalle non réduit à un point. Cela vous rappelle peut-être des choses ?

Solution 17.9

1.
   (a) Avec $\varphi(x) \in [0, 1]$ pour tout réel x, on déduit que pour x, y dans $\mathbb{R}$ tels que $|x - y| \geq 1$, on a $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq 1 \leq |x - y|$.

   (b) On suppose donc que $|x - y| < 1$ et comme x, y jouent des rôles symétriques, on peut même supposer que $0 < y - x < 1$. On distingue alors les cas suivants :

      i. si x, y sont dans $[-1, 1]$, alors :
$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = ||x| - |y|| \leq |x - y| \ ;$$
      ii. si $x \in [-1, 1]$ et $y \in [1, 2]$, avec $0 < y - x < 1$ on a nécessairement $x \in [0, 1]$ et $y - 2 \in [-1, 0]$, ce qui donne :
$$\begin{cases} \varphi(x) - \varphi(y) = \varphi(x) - \varphi(y - 2) = x + y - 2 \leq y - x, \\ \varphi(y) - \varphi(x) = \varphi(y - 2) - \varphi(x) = 2 - y - x \leq y - x, \end{cases}$$
      soit $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq |x - y|$;

      iii. dans le cas général, toujours avec $0 < y - x < 1$, en notant n la partie entière de $\frac{x + 1}{2}$, on a :
$$\begin{cases} -1 \leq x - 2n < 1, \\ -1 \leq x - 2n < y - 2n < 1 + x - 2n < 2 \end{cases}$$
      et avec ce qui précède :
$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = |\varphi(x - 2n) - \varphi(y - 2n)| \leq |x - y|.$$

2. Si n est la partie entière de $\dfrac{x+1}{2}$, alors $-1 < x - 2n < 1$ (l'inégalité stricte à gauche est justifiée par $x \notin \mathbb{Z}$) et comme il n'y a pas d'entiers dans $\left[x - 2n, x - 2n + \dfrac{1}{2}\right[$, on a soit $-1 < x - 2n < 0$ et $-\dfrac{1}{2} < x - 2n + \dfrac{1}{2} \leq 0$, soit $x - 2n > 0$ et $\dfrac{1}{2} < x - 2n + \dfrac{1}{2} \leq 1$, ce qui donne :
$$\varphi\left(x + \frac{1}{2}\right) - \varphi(x) = \varphi\left(x - 2n + \frac{1}{2}\right) - \varphi(x - 2n) = -\frac{1}{2}$$
dans le premier cas et :
$$\varphi\left(x + \frac{1}{2}\right) - \varphi(x) = \varphi\left(x - 2n + \frac{1}{2}\right) - \varphi(x - 2n) = \frac{1}{2}$$
dans le second cas.
3. Avec $0 \leq \left(\dfrac{3}{4}\right)^n \varphi(4^n x) \leq \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$, on déduit que cette série de fonction est uniformément convergente et avec la continuité de φ que la somme f est continue sur $\mathbb{R}$.
4.
   (a) L'intervalle semi ouvert $\left[4^m x - \dfrac{1}{2}, 4^m x + \dfrac{1}{2}\right[$ qui est de longueur 1 contient exactement un entier et cet entier est dans l'un seulement des deux intervalles $\left[4^m x - \dfrac{1}{2}, 4^m x\right[$ ou $\left[4^m x, 4^m x + \dfrac{1}{2}\right[$.

   (b) On a :
$$\frac{f(x + h_m) - f(x)}{h_m} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \frac{\varphi(4^n(x + h_m)) - \varphi(4^n x)}{h_m}.$$

      i. Pour $n > m$, $4^n h_m = 4^n \dfrac{\varepsilon_m}{2} \dfrac{1}{4^m} = 2\varepsilon_m 4^{n-m-1}$ est un entier pair et par 2-périodicité de φ, on a $\varphi(4^n x + 4^n h_m) - \varphi(4^n x) = 0$.

      ii. Pour $n = m$, $4^m h_m = \dfrac{\varepsilon_m}{2}$ et la question 2. nous dit que :
$$|\varphi(4^m x + 4^m h_m) - \varphi(4^m x)| = \frac{1}{2}.$$
(si $\varepsilon_m = 1$, alors $[4^m x, 4^m x + 4^m h_m[= \left[4^m x, 4^m x + \dfrac{1}{2}\right[$ ne contient pas d'entier et si $\varepsilon_m = -1$, alors c'est $[4^m x + 4^m h_m, 4^m x[= \left[4^m x - \dfrac{1}{2}, 4^m x\right[$ qui ne contient pas d'entier et $|\varphi(4^m x) - \varphi(4^m x + 4^m h_m)| = \dfrac{1}{2}$).

      iii. Enfin pour $0 \leq n < m$, avec la question 1. on a :
$$|\varphi(4^n(x + h_m)) - \varphi(4^n x)| \leq 4^n h_m.$$

iv. Il en résulte que :

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+h_m)-f(x)}{h_m} &= \sum_{n=0}^{m}\left(\frac{3}{4}\right)^n \frac{\varphi(4^n(x+h_m))-\varphi(4^n x)}{h_m} \\
&= \pm\left(\frac{3}{4}\right)^m \frac{1}{2h_m} + \sum_{n=0}^{m-1}\left(\frac{3}{4}\right)^n \frac{\varphi(4^n(x+h_m))-\varphi(4^n x)}{h_m} \\
&= \pm\left(\frac{3}{4}\right)^m \frac{1}{2\frac{\varepsilon_m}{2}\frac{1}{4^m}} + \sum_{n=0}^{m-1}\left(\frac{3}{4}\right)^n \frac{\varphi(4^n(x+h_m))-\varphi(4^n x)}{h_m} \\
&= \pm\varepsilon_m\left(\frac{3}{4}\right)^m 4^m + \sum_{n=0}^{m-1}\left(\frac{3}{4}\right)^n \frac{\varphi(4^n(x+h_m))-\varphi(4^n x)}{h_m} \\
&= \pm\varepsilon_m 3^m + \sum_{n=0}^{m-1}\left(\frac{3}{4}\right)^n \frac{\varphi(4^n(x+h_m))-\varphi(4^n x)}{h_m}
\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(x+h_m)-f(x)}{h_m}\right| &\geq \left|\pm\varepsilon_m 3^m\right| - \left|\sum_{n=0}^{m-1}\left(\frac{3}{4}\right)^n \frac{\varphi(4^n(x+h_m))-\varphi(4^n x)}{h_m}\right| \\
&\geq 3^m - \sum_{n=0}^{m-1} 3^n = \frac{3^m+1}{2}
\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n=0}^{m-1}\left(\frac{3}{4}\right)^n \frac{\varphi(4^n(x+h_m))-\varphi(4^n x)}{h_m}\right| &\leq \sum_{n=0}^{m-1}\left(\frac{3}{4}\right)^n \frac{4^n|h_m|}{|h_m|} \\
&\leq \sum_{n=0}^{m-1} 3^n = \frac{3^m-1}{2}
\end{aligned}$$

Ce qui donne en définitive :

$$\left|\frac{f(x+h_m)-f(x)}{h_m}\right| \geq 3^m - \frac{3^m-1}{2} = \frac{3^m+1}{2}.$$

Ouf !!!

(c) On a donc $\lim\limits_{m\to+\infty}\left|\frac{f(x+h_m)-f(x)}{h_m}\right| = +\infty$ avec $\lim\limits_{m\to+\infty} h_m = \lim\limits_{m\to+\infty}\frac{1}{2\cdot 4^m} = 0$ et f ne peut être dérivable en x.

18

Séries de Fourier

18.1 Séries entières et séries de Fourier

Nous allons dans un premier temps introduire la notion de série de Fourier en partant des développements en séries entières.

Le théorème relatif aux projections orthogonales d'un espace préhilbertien sur un sous-espace de dimension finie nous donnera une autre présentation de cette notion de série de Fourier.

Si $\sum \alpha_n z^n$ est une série entière de rayon de convergence $R > 0$ éventuellement infini, on peut définir, en notant f la somme de cette série entière, pour tout réel $r \in \left]0, R\right[$ la fonction φ_r par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi_r(x) = f\left(re^{ix}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n r^n e^{inx}$$

La fonction f étant continue sur le disque ouvert $D(0, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$, on en déduit que, pour r fixé dans $\left]0, R\right[$, la fonction φ_r est continue sur tout $\mathbb{R}$.

Remarque 18.1 *Avec $|\alpha_n r^n e^{inx}| = |\alpha_n| r^n$ pour tout réel x et $\sum |\alpha_n| r^n < +\infty$, on déduit que la série de fonctions $\sum \alpha_n r^n e^{inx}$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$, ce qui permet de retrouver la continuité de φ_r avec celle des fonctions $x \mapsto e^{inx}$ pour tout entier naturel n.*

Remarque 18.2 *Si p est un entier naturel non nul, on sait que la série dérivée :*

$$\sum n(n-1)\cdots(n-p+1)\,\alpha_n z^{n-p}$$

a même rayon de convergence que $\sum \alpha_n z^n$, donc la série $\sum n^p |\alpha_n| r^n$ est convergente pour tout réel $r \in \left]0, R\right[$ (puisque $n^p |\alpha_n| r^n \underset{+\infty}{\sim} r^p n(n-1)\cdots(n-p+1)|\alpha_n| r^{n-p}$) et avec $|(in)^p \alpha_n r^n e^{inx}| = n^p |\alpha_n| r^n$ pour tout entier naturel n et tout réel x, on déduit que la série de fonctions $\sum (in)^p \alpha_n r^n e^{inx}$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$. Comme les fonctions $x \mapsto e^{inx}$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ pour tout entier naturel n, on en déduit que la fonction φ_r est aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

De la 2π-périodicité des fonctions $x \mapsto e^{inx}$, on déduit que la fonction φ_r est périodique de période 2π, c'est-à-dire que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi_r(x + 2\pi) = \varphi_r(x).$$

En utilisant les formules d'Euler :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ e^{inx} = \cos(nx) + i\sin(nx)$$

on peut écrire que :

$$\begin{aligned}\varphi_r(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n r^n \cos(nx) + i \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n r^n \sin(nx) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n r^n \cos(nx) + i \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n r^n \sin(nx)\end{aligned}$$

chacune des séries de fonctions $\sum \alpha r^n \cos(nx)$ et $\sum \alpha_n r^n \sin(nx)$ étant normalement convergente sur $\mathbb{R}$ (le terme général est majoré par $|\alpha_n| r^n$).

Un tel développement est appelé développement en série de Fourier de la fonction φ_r.

Nous allons étudier un peu plus loin, de façon plus générale, cette notion de série de Fourier.

Les coefficients α_n peuvent s'exprimer à l'aide de formules intégrales comme suit.

Théorème 18.1 (Cauchy) *Avec les notations qui précèdent, on a :*

$$\forall n \geq 0,\ \alpha_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_r(t) e^{-int} dt$$

Démonstration. Avec la convergence normale sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\sum \alpha_n r^n e^{int}$, on peut écrire pour tout entier $n \geq 0$:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \varphi_r(t) e^{-int} dt &= \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k r^k \int_0^{2\pi} e^{i(k-n)t} dt \\ &= 2\pi \alpha_n r^n\end{aligned}$$

puisque :

$$\int_0^{2\pi} e^{i(k-n)t} dt = \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ si } k \neq n \\ 2\pi \text{ si } k = n \end{array} \right.$$

■

On a en particulier :

$$f(0) = \alpha_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_r(t) dt$$

Remarque 18.3 *Pour $n \geq 1$, on a :*

$$\int_0^{2\pi} \varphi_r(t) e^{int} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k r^k \int_0^{2\pi} e^{i(k+n)t} dt = 0$$

et :

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \varphi_r(t) \cos(nt) dt &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \varphi_r(t) \left(e^{int} + e^{-int}\right) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \varphi_r(t) e^{-int} dt = \pi \alpha_n r^n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \varphi_r(t) \sin(nt) dt &= \frac{1}{2i} \int_0^{2\pi} \varphi_r(t) \left(e^{int} - e^{-int}\right) dt \\ &= -\frac{1}{2i} \int_0^{2\pi} \varphi_r(t) e^{-int} dt = i\pi \alpha_n r^n\end{aligned}$$

Soit, pour $n \geq 1$:

$$\alpha_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_r(t) e^{-int} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_r(t) \cos(nt) dt$$

et :

$$i\alpha_n r^n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_r(t) \sin(nt) dt$$

Les coefficients

$$a_n = \alpha_n r^n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_r(t) \cos(nt) dt \ \ (n \geq 0)$$
$$b_n = i\alpha_n r^n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_r(t) \sin(nt) dt \ \ (n \geq 1)$$

sont les coefficients de Fourier trigonométriques de φ_r et les coefficients :

$$c_n = \alpha_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_r(t) e^{-int} dt \ \ (n \in \mathbb{Z})$$

sont les coefficients de Fourier exponentiels de φ_r.

Nous utiliserons par la suite les coefficients trigonométriques un peu plus commodes pour les fonctions à valeurs réelles paires ou impaires.

Exercice 18.1 *Montrer que les seules fonctions développables en série entière et bornées sur $\mathbb{C}$ sont les fonctions constantes (théorème de Liouville).*

Solution 18.1 *On a $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n z^n$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ et il existe un réel $M > 0$ tel que $|f(z)| \leq M$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.*
En utilisation les notations qui précèdent, on a pour tout réel $r > 0$ et tout entier $n \geq 1$:

$$|\alpha_n| = \frac{1}{2\pi r^n} \left| \int_0^{2\pi} \varphi_r(t) e^{-int} dt \right| \leq \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} \left| f\left(re^{it}\right) \right| dt \leq \frac{M}{r^n} \underset{r \to +\infty}{\to} 0$$

donc $\alpha_n = 0$ pour tout $n \geq 1$ et $f = \alpha_0$.

Exercice 18.2 *Soit $f(z) = \sum_{n \geq 0} \alpha_n z^n$ une fonction développable en série entière sur $\mathbb{C}$. Que peut–on dire de f s'il existe une fonction polynomiale P telle que $|f(z)| \leq |P(z)|$ pour tout $z \in \mathbb{C}$?*

Solution 18.2 *Soit $P(z) = \sum_{j=0}^{p} p_j z^j$ un polynôme de degré p qui majore f. En utilisant les notations qui précèdent, on a pour tout réel $r > 0$ et tout entier $n \geq p + 1$:*

$$|\alpha_n| = \frac{1}{2\pi r^n} \left| \int_0^{2\pi} \varphi_r(t) e^{-int} dt \right| \leq \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} \left| f\left(re^{it}\right) \right| dt$$
$$\leq \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} \left| P\left(re^{it}\right) \right| dt \leq \frac{1}{r^n} \sum_{j=0}^{p} |p_j| r^j \underset{r \to +\infty}{\to} 0$$

donc $\alpha_n = 0$ pour tout $n \geq p+1$ et f est une fonction polynomiale. Dans le cas où le polynôme majorant est constant, on retrouve le théorème de Liouville de l'exercice précédent.

L'utilisation du produit de Cauchy de deux séries numériques absolument convergentes permet de donner la version particulière qui suit du théorème de Parseval que nous retrouverons plus loin.

Théorème 18.2 (Parseval) *Soit* $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n z^n$ *une fonction développable en série entière sur* $D(0,R)$ *avec* $0 < R \leq +\infty$.
Pour tout réel $r \in]0, R[$, *on a :*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f\left(re^{it}\right)\right|^2 dt = \sum_{n=0}^{+\infty} |\alpha_n|^2 r^{2n}$$

Démonstration. Les séries $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n r^n e^{int}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \overline{\alpha_n} r^n e^{-int}$ étant absolument convergentes pour tout réel $t \in [0, 2\pi]$, leur produit de Cauchy est aussi une série absolument convergente et on a :

$$\begin{aligned}
\left|f\left(re^{it}\right)\right|^2 = f\left(re^{it}\right)\overline{f\left(re^{it}\right)} &= \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} \alpha_k r^k e^{ikt}\overline{\alpha_{n-k}} r^{n-k} e^{-i(n-k)t} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \overline{\alpha_{n-k}} e^{-i(n-2k)t}\right) r^n
\end{aligned}$$

Avec :

$$\left|\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \overline{\alpha_{n-k}} e^{-i(n-2k)t}\right| r^n \leq \left(\sum_{k=0}^{n} |\alpha_k| |\alpha_{n-k}|\right) r^n$$

pour tout $t \in [0, 2\pi]$ et :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} |\alpha_k| |\alpha_{n-k}|\right) r^n &= \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} |\alpha_k| r^k |\alpha_{n-k}| r^{n-k} \\
&= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |\alpha_n| r^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} |\alpha_n| r^n\right) < +\infty
\end{aligned}$$

(encore un produit de Cauchy de séries absolument convergentes), on déduit que la série de fonctions de somme $|f(re^{it})|^2$ est normalement convergente sur $[0, 2\pi]$ et on peut écrire que :

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \left|f\left(re^{it}\right)\right|^2 dt &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \overline{\alpha_{n-k}} \int_0^{2\pi} e^{-i(n-2k)t} dt\right) r^n \\
&= 2\pi \sum_{p=0}^{+\infty} |\alpha_p|^2 r^{2p}
\end{aligned}$$

puisque :

$$\int_0^{2\pi} e^{-i(n-2k)t} dt = \begin{cases} 0 \text{ si } n = 2p+1 \\ 0 \text{ si } n = 2p \text{ et } k \neq p \\ 2\pi \text{ si } n = 2p \text{ et } k = p \end{cases}$$

■

Exercice 18.3 *Soit* $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n z^n$ *une fonction développable en série entière sur* $D(0,R)$ *avec* $0 < R \leq +\infty$. *Montrer que si* $|f|$ *admet un maximum local en* 0, *elle est alors constante (principe du maximum).*

Solution 18.3 *Si* $|f|$ *admet un maximum local en* 0, *il existe alors un réel* $r_0 \in \left]0, R\right[$ *tel que* $|f(0)| = \sup_{|z| \leq r_0} |f(z)|$. *On a alors, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz :*

$$\begin{aligned}
|f(0)| &= \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} f\left(r_0 e^{it}\right) dt\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f\left(r_0 e^{it}\right)\right| \cdot 1 dt \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} \left|f\left(r_0 e^{it}\right)\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{2\pi} dt\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_0^{2\pi} \left|f\left(r_0 e^{it}\right)\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_0^{2\pi} |f(0)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} = |f(0)|
\end{aligned}$$

donc $|\alpha_0| = |f(0)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_0^{2\pi} \left|f\left(r_0 e^{it}\right)\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$, *soit :*

$$|\alpha_0|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f\left(r_0 e^{it}\right)\right|^2 dt = \sum_{n=0}^{+\infty} |\alpha_n|^2 r_0^{2n}$$

et α_n *pour tout* $n \geq 1$, *ce qui signifie que* f *est constante.*

18.2 L'espace préhilbertien $\mathcal{D}$ de Dirichlet

Pour ce paragraphe, les fonctions considérées sont définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.

Définition 18.1 *On dit qu'une fonction* 2π*-périodique,* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *est continue par morceaux s'il existe une subdivision de* $[0, 2\pi]$ *:*

$$0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_p = 2\pi$$

avec $p \in \mathbb{N}^*$, *telle que* f *soit continue sur chaque intervalle* $\left]a_k, a_{k+1}\right[$ $(0 \leq k \leq n-1)$ *et admette une limite à droite et à gauche en chaque point de discontinuité (s'il en existe).*

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, est continue par morceaux, on notera en tout point de discontinuité a de f (s'il en existe) :

$$f\left(a^-\right) = \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) \text{ et } f\left(a^+\right) = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$$

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique est continue par morceaux, en utilisant les notations de la définition qui précède, on vérifie facilement que f se prolonge en fonction continue sur chaque intervalle $[a_k, a_{k+1}]$. Et réciproquement, si pour une telle subdivision de $[0, 2\pi]$, la fonction f se prolonge en fonction continue sur chaque intervalle $[a_k, a_{k+1}]$, elle est alors continue par morceaux.

On rappelle qu'une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ est Riemann-intégrable sur tout segment $[a, b]$.

On désigne par $\mathcal{D}$ l'espace des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui sont 2π-périodiques, continues par morceaux et telles qu'en tout point de discontinuité a de f, on ait :

$$f(a) = \frac{f(a^-) + f(a^+)}{2}.$$

On dit que $\mathcal{D}$ est l'espace des fonctions de Dirichlet.

Il est facile de vérifier que $\mathcal{D}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

On peut remarquer qu'une fonction de $\mathcal{D}$ est bornée avec :

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)| = \sup_{t\in[-\pi,\pi]} |f(t)|$$

du fait de la 2π-périodicité.

Remarque 18.4 *On peut aussi travailler avec des fonctions périodiques de période $T > 0$. Si f est une telle fonction, alors la fonction g définie par $g(x) = f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)$ est périodique de période 2π. La limitation à la période 2π n'est donc pas vraiment restrictive.*

Exercice 18.4 *Soient $[a, a+2\pi]$ un intervalle de longueur 2π et f une fonction continue de $[a, a+2\pi]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(a) = f(a+2\pi)$. Montrer qu'il existe une unique fonction $\widetilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et 2π-périodique qui coïncide avec f sur $[a, a+2\pi]$.*

Solution 18.4 *En utilisant la partition :*

$$\mathbb{R} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [a + 2k\pi, a + 2(k+1)\pi[$$

on définit la fonction $\widetilde{f}$ par :

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ \forall x \in [a + 2k\pi, a + 2(k+1)\pi[,\ \widetilde{f}(x) = f(x - 2k\pi)$$

on a $\widetilde{f}(x) = f(x)$, pour tout $x \in [a, a+2\pi[$, $\widetilde{f}(a+2\pi) = f(a) = f(a+2\pi)$ et pour tout $k \in \mathbb{Z}$, tout $x \in [a + 2k\pi, a + 2(k+1)\pi[$, on a :

$$\widetilde{f}(x + 2\pi) = f(x + 2\pi - 2(k+1)\pi) = f(x - 2k\pi) = \widetilde{f}(x)$$

Donc $\widetilde{f}$ coïncide avec f sur $[a, a+2\pi]$ et est 2π-périodique.

La fonction $\widetilde{f}$ est comme f continue sur $]a, a+2\pi[$ et par 2π-périodicité, on déduit qu'elle est continue sur $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]a + 2k\pi, a + 2(k+1)\pi[$. En effet, pour x, x_0 dans l'ouvert $]a + 2k\pi, a + 2(k+1)\pi[$, on a :

$$\widetilde{f}(x) = f(x - 2k\pi) \underset{x\to x_0}{\to} f(x_0 - 2k\pi) = \widetilde{f}(x_0).$$

Enfin pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et $h \in]0, \pi[$, on a $a - h \in]a - 2\pi, a[$, $a + h \in]a, a+2\pi[$ et :

$$\begin{aligned}\widetilde{f}(a + 2k\pi - h) &= \widetilde{f}(a - h) = f(a - h + 2\pi) \\ &\underset{h\to 0}{\to} f(a + 2\pi) = f(a)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{f}(a + 2k\pi + h) &= \widetilde{f}(a + h) = f(a + h) \\ &\underset{h\to 0}{\to} f(a) = f(a)\end{aligned}$$

donc :

$$\lim_{x \to a+2k\pi} \widetilde{f}(x) = f(a) = \widetilde{f}(a) = \widetilde{f}(a+2k\pi)$$

et $\widetilde{f}$ est continue en $a+2k\pi$.
L'unicité de $\widetilde{f}$ provient du fait qu'une fonction 2π-périodique est uniquement déterminée par ses valeurs sur un intervalle de longueur 2π.

Le lemme qui suit, de démonstration élémentaire, nous sera très utile.

Lemme 18.1 *Pour toute fonction $f \in \mathcal{D}$ et tout réel a, on a :*

$$\int_a^{a+2\pi} f(t)\,dt = \int_0^{2\pi} f(t)\,dt$$

Démonstration. En utilisant la relation de Chasles pour l'intégrale de Riemann, on a :

$$\int_a^{a+2\pi} f(t)\,dt = \int_a^0 f(t)\,dt + \int_0^{2\pi} f(t)\,dt + \int_{2\pi}^{a+2\pi} f(t)\,dt$$

et le changement de variable $t = 2\pi + u$ dans la troisième intégrale nous donne, compte tenu de la 2π-périodicité de f :

$$\int_{2\pi}^{a+2\pi} f(t)\,dt = \int_0^a f(2\pi+u)\,du = \int_0^a f(u)\,du = -\int_a^0 f(u)\,du$$

ce qui donne le résultat annoncé. ■

En particulier on a, pour toute fonction $f \in \mathcal{D}$, en prenant $a = -\pi$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \int_0^{2\pi} f(t)\,dt$$

Ce résultat est intéressant dans le cas particulier où la fonction f est paire ou impaire.
Il sera aussi commode de noter que :

$$\int_{a-\pi}^{a+\pi} f(t)\,dt = \int_{a-\pi}^{(a-\pi)+2\pi} f(t)\,dt = \int_0^{2\pi} f(t)\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt.$$

Théorème 18.3 *L'application :*

$$(f,g) \mapsto \langle f \mid g \rangle = \int_0^{2\pi} f(t)\,g(t)\,dt$$

définit un produit scalaire sur l'espace vectoriel $\mathcal{D}$.

Démonstration. Des propriétés de l'intégrale de Riemann sur un segment, on déduit que l'application $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ est bilinéaire, symétrique et positive.

Si $\langle f \mid f \rangle = 0$, en notant $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_p = 2\pi$ les éventuels points de discontinuité de f, on a :

$$0 = \int_0^{2\pi} (f(t))^2\,dt = \sum_{k=0}^{p-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} (f(t))^2\,dt$$

donc $\displaystyle\int_{a_k}^{a_{k+1}} (f(t))^2\, dt = 0$ pour tout k et f est nulle sur $]a_k, a_{k+1}[$ puisque f^2 est continue positive. On a alors :

$$f\left(a_k^-\right) = \lim_{\substack{x \to a_k \\ x < a_k}} f(x) = 0 \text{ et } f\left(a_k^+\right) = \lim_{\substack{x \to a_k \\ x > a_k}} f(x) = 0$$

et $f(a_k) = \dfrac{f\left(a_k^-\right) + f\left(a_k^+\right)}{2} = 0$. La fonction f est donc nulle sur $[0, 2\pi]$ et sur $\mathbb{R}$ par 2π-périodicité.

L'application $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ est donc définie et c'est un produit scalaire sur $\mathcal{D}$. ■

Définition 18.2 *Soit k un entier naturel.*
On dit qu'une fonction 2π-périodique, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, est de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux s'il existe une subdivision de $[0, 2\pi]$:

$$0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_p = 2\pi$$

avec $p \in \mathbb{N}^*$, telle que la restriction de f à chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$ se prolonge par continuité en une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ sur $[a_i, a_{i+1}]$ $(0 \leq i \leq n-1)$.

Avec les notations de la définition qui précède, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, est 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, elle est alors de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 2\pi] \setminus \{a_0, a_1, \cdots, a_p\}$ et en chacun des points a_k, la fonction f admet une dérivée à droite et une dérivée à gauche non nécessairement égales.

On notera respectivement :

$$f_g'(a_k) = \lim_{\substack{x \to a_k \\ x < a_k}} \frac{f(x) - f\left(a_k^-\right)}{x - a_k} \text{ et } f_d'(a_k) = \lim_{\substack{x \to a_k \\ x > a_k}} \frac{f(x) - f\left(a_k^+\right)}{x - a_k}$$

la dérivée à gauche et à droite en a_k.

Le théorème des accroissements finis nous dit que :

$$f_g'(a_k) = \lim_{\substack{x \to a_k \\ x < a_k}} f'(x) = f'\left(a_k^-\right) \text{ et } f_d'(a_k) = \lim_{\substack{x \to a_k \\ x > a_k}} f'(x) = f'\left(a_k^+\right)$$

La fonction f' sera considérée comme un élément de $\mathcal{D}$ en posant, pour chaque a_k :

$$f'(a_k) = \frac{f'\left(a_k^-\right) + f'\left(a_k^+\right)}{2}$$

Par dérivée d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, qui est 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux nous entendrons ce prolongement.

De manière plus générale, pour $k \geq 1$, si f est de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux, elle est alors de classe $\mathcal{C}^k$ sur $[0, 2\pi]$ éventuellement privé d'un nombre fini de points $\{a_0, a_1, \cdots, a_p\}$ et sa dérivée est une fonction de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ par morceaux.

18.3 Polynômes trigonométriques et séries de Fourier sur $\mathcal{D}$

Pour tout entier naturel n, on note $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des polynômes trigonométriques de degré inférieur ou égal à n, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ la forme :

$$P : x \mapsto a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

où les coefficients a_k et b_k sont des réels.

On vérifie facilement que $\mathcal{P}_n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}$ de dimension $2n+1$ engendré par la famille $\{c_k \mid 0 \leq k \leq n\} \cup \{s_k \mid 1 \leq k \leq n\}$, où on a noté :

$$c_k : x \mapsto \cos(kx) \text{ pour } k \geq 0 \text{ et } s_k : x \mapsto \sin(kx) \text{ pour } k \geq 1$$

En effet, cette famille est génératrice, formée de fonctions non nulles et orthogonale pour le produit scalaire défini sur $\mathcal{D}$, elle est donc libre (voir le cours d'algèbre).

On note $\mathcal{P} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{P}_n$ l'espace de tous les polynômes trigonométriques.

C'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}$ de base orthogonale :

$$\{c_k \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{s_k \mid k \in \mathbb{N}^*\}$$

Avec :

$$\|c_0\|^2 = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

et pour $n \geq 1$:

$$\|c_n\|^2 = \int_0^{2\pi} \cos^2(nt)\,dt = \|s_n\|^2 = \int_0^{2\pi} \sin^2(nt)\,dt = \pi$$

(voir le cours d'algèbre) on déduit que la famille de fonctions :

$$\mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} c_0 \right\} \cup \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} c_n,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} s_m \mid (n,m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \right\}$$

est une base orthonormée de $\mathcal{P}$ et pour tout $n \geq 0$:

$$\mathcal{B}_n = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} c_0 \right\} \cup \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} c_k,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} s_k \mid 1 \leq k \leq n \right\}$$

est une base orthonormée de $\mathcal{P}_n$.

Exercice 18.5 *Montrer que pour tout entier naturel n les fonctions :*

$$t \mapsto (\cos(t))^n \ \textit{ et } t \mapsto (\sin(t))^n$$

sont des polynômes trigonométriques.

Solution 18.5 *Pour $n = 0$ et $n = 1$, c'est évident. En supposant le résultat acquis pour $n \geq 1$, on a :*

$$\begin{aligned}
(\cos(t))^{n+1} &= (\cos(t))^n \cos(t) \\
&= \left(a_0 + \sum_{k=1}^{m} (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)) \right) \cos(t) \\
&= a_0 \cos(t) + \sum_{k=1}^{m} (a_k \cos(kt)\cos(t) + b_k \sin(kt)\cos(t))
\end{aligned}$$

avec :

$$\cos(kt)\cos(t) = \frac{\cos((k+1)t) + \cos((k-1)t)}{2} \in \mathcal{P}$$

et :

$$\sin(kt)\cos(t) = \frac{\sin((k+1)t) + \sin((k-1)t)}{2} \in \mathcal{P}$$

pour $k \geq 1$*, ce qui entraîne* $(\cos(t))^{n+1} \in \mathcal{P}$*.*
On procède de même pour $(\sin(t))^n$*.*
On peut aussi utiliser les exponentielles complexes et la formule du binôme pour écrire :

$$\begin{aligned}(\cos(t))^n &= \frac{\left(e^{it} + e^{-it}\right)^n}{2^n} = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} C_n^k e^{ikt} e^{-i(n-k)t} \\ &= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} C_n^k e^{i(2k-n)t}\end{aligned}$$

et :

$$(\cos(t))^n = \Re\left(\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} C_n^k e^{i(2k-n)t}\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{2^n}\cos((2k-n)t) \in \mathcal{P}_n$$

On rappelle que pour toute fonction $f \in \mathcal{D}$, la projection orthogonale de f sur $\mathcal{P}_n$, pour $n \geq 0$ fixé, est le polynôme trigonométrique $S_n(f)$ défini par :

$$\begin{cases} S_n(f) \in \mathcal{P}_n \\ f - S_n(f) \in \mathcal{P}_n^{\perp} \end{cases}$$

Son expression dans la base orthonormée $\mathcal{B}_n$ est donnée par :

$$\begin{aligned}S_n(f) &= \left\langle f \mid \frac{c_0}{\sqrt{2\pi}}\right\rangle \frac{c_0}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^{n}\left\langle f \mid \frac{c_k}{\sqrt{\pi}}\right\rangle \frac{c_k}{\sqrt{\pi}} + \sum_{k=1}^{n}\left\langle f \mid \frac{s_k}{\sqrt{\pi}}\right\rangle \frac{s_k}{\sqrt{\pi}} \\ &= \frac{1}{2\pi}\langle f \mid c_0\rangle c_0 + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\langle f \mid c_k\rangle c_k + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\langle f \mid s_k\rangle s_k\end{aligned}$$

Soit, pour tout réel x :

$$S_n(f)(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k(f)\cos(kx) + \sum_{k=1}^{n} b_k(f)\sin(kx)$$

où on a noté, pour tout entier naturel k :

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(kt)\,dt \text{ et } b_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(kt)\,dt \tag{18.1}$$

Définition 18.3 *Avec les notations qui précèdent, on dit les réels* $a_k(f)$ *pour* $k \in \mathbb{N}$ *et* $b_k(f)$ *pour* $k \in \mathbb{N}^*$*, sont les coefficients de Fourier trigonométriques de la fonction* f *et la série de fonctions :*

$$\frac{a_0(f)}{2} + \sum (a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx))$$

est la série de Fourier de la fonction f*.*

Remarque 18.5 *Les applications* a_n *et* b_n *sont des formes linéaires sur* $\mathcal{D}$*.*

De manière plus générale, on donne la définition suivante.

Définition 18.4 *On appelle série trigonométrique toute série de fonctions de la forme :*

$$\sum \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right)$$

où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites réelles ou complexes.

Remarque 18.6 *Dans le cas où f est un polynôme trigonométrique, on a $S_n(f) = f$ pour n assez grand et la série de Fourier de f converge vers f en tout point $x \in \mathbb{R}$.*

Remarque 18.7 *De manière plus générale, on peut définir les coefficients de Fourier trigonométriques d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ qui est 2π-périodique et Riemann-intégrable sur tout segment par les formules* (18.1) *.*

Le résultat qui suit est élémentaire, mais utile pour le calcul des coefficients de Fourier des fonctions paires ou impaires.

Lemme 18.2 *Si $f \in \mathcal{D}$ est paire, on a alors $b_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt$$

Si $f \in \mathcal{D}$ est impaire, on a alors $a_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt$$

Démonstration. Résulte immédiatement du lemme 18.1 et du fait que la fonction $t \mapsto f(t)\cos(nt)$ est paire [resp. impaire] et la fonction $t \mapsto f(t)\sin(nt)$ est impaire [resp. paire] pour f paire [resp. impaire]. ∎

Nous verrons plus loin que la réciproque du résultat précédent est vraie, c'est-à-dire que si $f \in \mathcal{D}$ est telle que $b_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ [resp. $a_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$] alors f est paire [resp. impaire] (exercice 18.10).

Il sera parfois commode d'utiliser les coefficients de Fourier exponentiels de $f \in \mathcal{D}$ (ou plus généralement de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-périodique et Riemann-intégrable sur tout segment) définis pour $n \in \mathbb{Z}$ par :

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-int}dt$$

On a alors $c_0(f) = \dfrac{a_0(f)}{2}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \begin{cases} c_n(f) = \dfrac{a_n(f) - ib_n(f)}{2} \\ c_{-n}(f) = \dfrac{a_n(f) + ib_n(f)}{2} \\ a_n(f) = c_{-n}(f) + c_n(f) \\ b_n(f) = i\left(c_n(f) - c_{-n}(f)\right) \end{cases}$$

et :

$$\begin{aligned}
S_n(f)(x) &= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k(f)\cos(kx) + \sum_{k=1}^{n} b_k(f)\sin(kx) \\
&= c_0(f) + \sum_{k=1}^{n} (c_{-k}(f) + c_k(f))\cos(kx) + i\sum_{k=1}^{n} (c_k(f) - c_{-k}(f))\sin(kx) \\
&= c_0(f) + \sum_{k=1}^{n} c_k(f)e^{ikx} + \sum_{k=1}^{n} c_{-k}(f)e^{-ikx} \\
&= \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{ikx}
\end{aligned}$$

Remarque 18.8 *Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ qui est 2π-périodique et Riemann-intégrable sur tout segment, les suites $(a_n(f))_{n\geq 0}$, $(b_n(f))_{n\geq 1}$ et $(c_n(f))_{n\geq 0}$ sont bornées. En effet, la fonction $|f|$ est Riemann-intégrable sur $[0, 2\pi]$ et on a pour tout $n \in \mathbb{Z}$:*

$$|c_n(f)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|\,dt$$

ce qui donne pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|a_n(f)| \leq |c_{-n}(f)| + |c_n(f)| \leq \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|\,dt$$

et pareil pour $b_n(f)$.

Exercice 18.6 *Soit $f \in \mathcal{D}$ et $g \in \mathcal{D}$ définie par $g(x) = f(x+a)$ où a est un réel fixé. Exprimer les coefficients de Fourier de g en fonction de ceux de f.*

Solution 18.6 *Pour $n \in \mathbb{Z}$, on a :*

$$\begin{aligned}
c_n(g) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t)e^{-int}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t+a)e^{-int}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)e^{-in(x-a)}dt = e^{ina}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dt \\
&= e^{ina}c_n(f)
\end{aligned}$$

Il en résulte que :

$$\begin{aligned}
a_n(g) &= c_{-n}(g) + c_n(g) = e^{-ina}c_{-n}(f) + e^{ina}c_n(f) \\
&= e^{-ina}\frac{a_n(f) + ib_n(f)}{2} + e^{ina}\frac{a_n(f) - ib_n(f)}{2} \\
&= \frac{e^{ina} + e^{-ina}}{2}a_n(f) + \frac{e^{ina} - e^{-ina}}{2i}b_n(f) \\
&= \cos(na)\,a_n(f) + \sin(na)\,b_n(f)
\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
b_n(g) &= i(c_n(g) - c_{-n}(g)) = i\left(e^{ina}c_n(f) - e^{-ina}c_{-n}(f)\right) \\
&= i\left(e^{ina}\frac{a_n(f) - ib_n(f)}{2} - e^{-ina}\frac{a_n(f) + ib_n(f)}{2}\right) \\
&= \frac{e^{ina} + e^{-ina}}{2}b_n(f) - \frac{e^{ina} - e^{-ina}}{2i}a_n(f) \\
&= \cos(na)\,b_n(f) - \sin(na)\,a_n(f)
\end{aligned}$$

Ce qui peut aussi se vérifier avec :

$$\begin{aligned}
a_n(g) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t+a)\cos(nt)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(n(x-a))\,dt \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\cos(na)\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,dt + \sin(na)\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\,dt\right) \\
&= \cos(na)\,a_n(f) + \sin(na)\,b_n(f)
\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
b_n(g) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t+a)\sin(nt)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(n(x-a))\,dt \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\cos(na)\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\,dt - \sin(na)\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,dt\right) \\
&= \cos(na)\,b_n(f) - \sin(na)\,a_n(f)
\end{aligned}$$

Exercice 18.7 *Soit $f \in \mathcal{D}$ continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Montrer que :*

$$\forall n \in \mathbb{Z}^*,\ c_n(f) = \frac{c_n(f')}{in}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n(f) = -\frac{b_n(f')}{n} \text{ et } b_n(f) = \frac{a_n(f')}{n}$$

Solution 18.7 *Si $f \in \mathcal{D}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, il existe alors une subdivision de $[0, 2\pi]$:*

$$0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_p = 2\pi$$

telle que la restriction de f à chaque intervalle $]a_k, a_{k+1}[$ se prolonge par continuité en fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a_k, a_{k+1}]$ et on a, pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$:

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,e^{-int}dt = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{p-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)\,e^{-int}dt$$

et comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a_k, a_{k+1}]$, une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned}
\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)\,e^{-int}dt &= \left[i\frac{f(t)\,e^{-int}}{n}\right]_{a_k}^{a_{k+1}} - \frac{i}{n}\int_{a_k}^{a_{k+1}} f'(t)\,e^{-int}dt \\
&= i\frac{f\left(a_{a+1}^-\right)e^{-ina_{k+1}} - f\left(a_k^+\right)e^{-ina_k}}{n} - \frac{i}{n}\int_{a_k}^{a_{k+1}} f'(t)\,e^{-int}dt
\end{aligned}$$

Si on suppose de plus que f est continue sur $\mathbb{R}$, on a alors $f\left(a_k^-\right) = f\left(a_k^+\right) = f(a_k)$ pour tout k compris entre 0 et p et :

$$\begin{aligned}
2\pi c_n(f) &= \frac{i}{n}\sum_{k=0}^{p-1}\left(f(a_{k+1})\,e^{-ina_{k+1}} - f(a_k)\,e^{-ina_k}\right) - \frac{i}{n}\sum_{k=0}^{p-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} f'(t)\,e^{-int}dt \\
&= -\frac{i}{n}\sum_{k=0}^{p-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} f'(t)\,e^{-int}dt = \frac{1}{in}\int_0^{2\pi} f'(t)\,e^{-int}dt
\end{aligned}$$

puisque f est 2π-périodique et $c_n(f) = \dfrac{c_n(f')}{in}$.
Il en résulte que :

$$\begin{cases} a_n(f) = c_{-n}(f) + c_n(f) = \dfrac{c_n(f') - c_{-n}(f')}{in} = -\dfrac{b_n(f')}{n} \\ b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f)) = \dfrac{c_{-n}(f') + c_n(f')}{n} = \dfrac{a_n(f')}{n} \end{cases}$$

Remarque 18.9 *Avec les notations et hypothèses de l'exercice précédent, on a :*

$$c_0(f') = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(t)\,dt = 0$$

puisque f est 2π-périodique. Donc la relation $c_n(f') = inc_n(f)$ est valable pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

18.4 L'inégalité de Bessel

On rappelle que la projection orthogonale $S_n(f)$ de $f \in \mathcal{D}$ sur $\mathcal{P}_n$ est aussi la meilleure approximation de f (pour la distance induite par le produit scalaire que nous avons défini sur $\mathcal{D}$) par un polynôme trigonométrique de degré au plus égal à n, c'est à dire que :

$$\|f - S_n(f)\| = \inf_{P \in \mathcal{P}_n} \|f - P\|$$

Du théorème de Pythagore, on déduit que :

$$\|f\|^2 = \|(f - S_n(f)) + S_n(f)\|^2 = \|f - S_n(f)\|^2 + \|S_n(f)\|^2$$

ce qui donne l'inégalité de Bessel :

$$\|S_n(f)\|^2 \leq \|f\|^2$$

et en tenant compte de :

$$\begin{aligned} \|S_n(f)\|^2 &= \left\langle f \mid \frac{c_0}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle^2 + \sum_{k=1}^{n} \left\langle f \mid \frac{ck}{\sqrt{\pi}} \right\rangle^2 + \sum_{k=1}^{n} \left\langle f \mid \frac{sk}{\sqrt{\pi}} \right\rangle^2 \\ &= \frac{1}{2\pi}\langle f \mid c_0\rangle^2 + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\langle f \mid ck\rangle^2 + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\langle f \mid sk\rangle^2 \\ &= \pi\left(\frac{a_0^2(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2(f) + b_k^2(f)\right)\right) \end{aligned}$$

cela s'écrit :

$$\frac{a_0^2(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2(f) + b_k^2(f)\right) \leq \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^2(t)\,dt$$

On en déduit alors le résultat suivant.

Théorème 18.4 (Bessel) *Pour toute fonction $f \in \mathcal{D}$, la série numérique* $\dfrac{a_0^2(f)}{2} + \sum\left(a_n^2(f) + b_n^2(f)\right)$ *est convergente et on a :*

$$\frac{a_0^2(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n^2(f) + b_n^2(f)\right) \leq \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^2(t)\,dt$$

Nous verrons un peu plus loin qu'on a en fait l'égalité (théorème de Parseval).

Avec :

$$|c_{\pm n}(f)|^2 \leq \left(\frac{|a_n(f)| + |b_n(f)|}{2}\right)^2 \leq \frac{|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2}{2}$$

on déduit que les séries $\sum |c_{\pm n}(f)|^2$ sont convergentes.

Remarque 18.10 *Du théorème de Bessel, on déduit que la suite $(\|f - S_n(f)\|)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente avec :*

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \|f - S_n(f)\|^2 &= \|f\|^2 - \lim_{n\to+\infty} \|S_n(f)\|^2 \\ &= \|f\|^2 - \pi\left(\frac{a_0^2(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n^2(f) + b_n^2(f)\right)\right)\end{aligned}$$

Avec le théorème de Parseval, nous verrons que cette limite est nulle, ce qui signifie que la suite $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans l'espace normé $(\mathcal{D}, \|\cdot\|)$, mais cela ne signifie pas qu'il y a convergence simple de la série de Fourier.

Remarque 18.11 *On peut aussi remarquer que la suite $(\|f - S_n(f)\|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante minorée par 0, donc convergente. En effet, pour $n \geq 1$, on a $S_n(f) \in \mathcal{P}_{n+1}$ et considérant que $S_{n+1}(f)$ est la meilleure approximation de f dans $\mathcal{P}_{n+1}$, on a :*

$$\|f - S_{n+1}(f)\| \leq \|f - S_n(f)\|$$

De l'inégalité de Bessel, on déduit le résultat suivant.

Corollaire 18.1 (Riemann-Lebesgue) *Pour toute fonction $f \in \mathcal{D}$, on a :*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n(f) = \lim_{n\to+\infty} b_n(f) = 0$$

et :

$$\lim_{|n|\to+\infty} c_n(f) = 0$$

Démonstration. Les séries $\sum a_n^2(f)$ et $\sum b_n^2(f)$ étant convergentes, leur terme général tend vers 0 et avec :

$$|c_{\pm n}(f)| \leq \frac{|a_n(f)| + |b_n(f)|}{2}$$

on déduit que $\lim\limits_{|n|\to+\infty} c_n(f) = 0$. ∎

Exercice 18.8 *Montrer que la série trigonométrique $\sum \dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ est convergente sur $\mathbb{R}$, mais qu'elle ne peut être la série de Fourier d'une fonction $f \in \mathcal{D}$.*

Solution 18.8 *Le théorème d'Abel nous assure la convergence de la série trigonométrique pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ (théorème 6.25) et pour $x \in 2\pi\mathbb{Z}$ cette série est nulle.*
Si cette série est la série de Fourier d'une fonction $f \in \mathcal{D}$, cela signifie que $a_n(f) = 0$ pour tout $n \geq 0$, $b_n(f) = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ pour tout $n \geq 1$ et le théorème de Bessel nous dit que la série $\sum (b_n(f))^2 = \sum \dfrac{1}{n}$ est convergente, ce qui n'est pas.
On peut en fait remplacer la suite $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\geq 1}$ par n'importe quelle suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers 0 en décroissant et telle que $\sum u_n^2 = +\infty$.

Exercice 18.9 *Soit $f \in \mathcal{D}$ continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Montrer que :*

$$a_n(f) = o\left(\frac{1}{n}\right) \text{ et } b_n(f) = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Solution 18.9 *Si $f \in \mathcal{D}$ est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, sa dérivée se prolonge en une fonction de $\mathcal{D}$. Le résultat se déduit alors de l'exercice 18.7 et du théorème de Riemann-Lebesgue.*

De manière plus générale, on a le résultat suivant.

Théorème 18.5 *Si $f \in \mathcal{D}$ est de classe $\mathcal{C}^p$ et de classe $\mathcal{C}^{p+1}$ par morceaux avec $p \geq 0$, on a alors :*

$$a_n(f) = o\left(\frac{1}{n^{p+1}}\right) \text{ et } b_n(f) = o\left(\frac{1}{n^{p+1}}\right)$$

Démonstration. Avec l'exercice 18.7, on a vu que $c_n(f') = inc_n(f)$ pour $f \in \mathcal{D}$ continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et $n \in \mathbb{Z}$.

Par récurrence, on en déduit que pour $f \in \mathcal{D}$ de classe $\mathcal{C}^p$ et de classe $\mathcal{C}^{p+1}$ par morceaux, on a :

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n\left(f^{(k)}\right) = (in)^k c_n(f)$$

pour tout $k \in \{0, \cdots, p+1\}$. On en déduit que :

$$\begin{aligned} \left|n^{p+1} a_n(f)\right| &\leq \left|n^{p+1} c_n(f)\right| + \left|n^{p+1} c_{-n}(f)\right| \\ &\leq \left|c_n\left(f^{(p+1)}\right)\right| + \left|c_{-n}\left(f^{(p+1)}\right)\right| \underset{n\to+\infty}{\to} 0 \end{aligned}$$

et pareil pour $b_n(f)$. On a donc $a_n(f) = o\left(\frac{1}{n^{p+1}}\right)$ et $b_n(f) = o\left(\frac{1}{n^{p+1}}\right)$. ■

Lemme 18.3 *Si $f \in \mathcal{D}$ est de classe $\mathcal{C}^p$ et de classe $\mathcal{C}^{p+1}$ par morceaux avec $p \geq 0$, alors pour tout $k \in \{0, \cdots, p\}$ les séries $\sum n^k a_n(f)$ et $\sum n^k b_n(f)$ sont absolument convergentes.*

Démonstration. Pour tout $k \in \{0, \cdots, p\}$ et $n \geq 1$, on :

$$\begin{aligned} n^k \left|c_{\pm n}(f)\right| &= \frac{1}{n}\left|n^{k+1} c_{\pm n}(f)\right| = \frac{1}{n}\left|c_{\pm n}\left(f^{(k+1)}\right)\right| \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2} + \left|c_{\pm n}\left(f^{(k+1)}\right)\right|^2\right) \end{aligned}$$

ce qui entraîne la convergence de la série $\sum n^k \left|c_{\pm n}(f)\right|$ (inégalité de Bessel) et celles des séries $\sum n^k \left|a_n(f)\right|$ et $\sum n^k \left|b_n(f)\right|$. ■

18.5 Convergence ponctuelle des séries de Fourier sur $\mathcal{D}$

Nous allons tout d'abord montrer qu'une fonction $f \in \mathcal{D}$ est uniquement déterminée par ses coefficients de Fourier, ce qui compte tenu de la linéarité des coefficients de Fourier revient à montrer le résultat suivant.

Théorème 18.6 *Une fonction $f \in \mathcal{D}$ est telle que $a_n(f) = b_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ce qui équivaut à $c_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$) si, et seulement si, elle est identiquement nulle.*

Démonstration. Soit f non identiquement nulle dans $\mathcal{D}$ ayant tout ses coefficients de Fourier nuls.

Dans ce cas, on a $\int_0^{2\pi} f(t)\, P(t)\, dt = 0$ pour tout polynôme trigonométrique P.

Supposons qu'il existe un réel a tel que $f(a) \neq 0$ et tel que f soit continue en a. Quitte à changer f en $-f$, on peut supposer que $f(a) > 0$ (avec la linéarité des coefficients de Fourier, on a $c_n(-f) = -c_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$).

Avec la continuité de f en a, on peut trouver un réel $\delta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que :

$$\forall t \in [a-\delta, a+\delta]\,,\ |f(t) - f(a)| < \frac{f(a)}{2}$$

ce qui entraîne :

$$\forall t \in [a-\delta, a+\delta]\,,\ f(t) > \frac{f(a)}{2}$$

On désigne par P le polynôme trigonométrique défini par :

$$P(t) = 1 + \cos(t-a) - \cos(\delta)$$

Pour $t \in [a-\delta, a+\delta]$, on a $t - a \in [-\delta, \delta] \subset \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, ce qui donne en tenant compte de la parité de cos et sa décroissance sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$:

$$0 \leq \cos(\delta) \leq \cos(t-a) \leq 1$$

soit :

$$\forall t \in [a-\delta, a+\delta]\,,\ P(t) \geq 1$$

Toujours avec les propriétés de la fonction cos, on a :

$$\forall t \in \left[a - \frac{\delta}{2}, a + \frac{\delta}{2}\right],\ \cos(t-a) \geq \cos\left(\frac{\delta}{2}\right)$$

et :

$$\forall t \in \left[a - \frac{\delta}{2}, a + \frac{\delta}{2}\right],\ P(t) \geq 1 + \cos\left(\frac{\delta}{2}\right) - \cos(\delta) = 1 + \varepsilon$$

avec $\varepsilon = \cos\left(\frac{\delta}{2}\right) - \cos(\delta) > 0$ (stricte décroissance de cos sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$)

Enfin pour $\delta \leq |t-a| \leq \pi$, on a :

$$-1 \leq \cos(t-a) \leq \cos(\delta)$$

puisque cos est décroissante sur $[0, \pi]$ et paire, ce qui donne :

$$P(t) = 1 + \cos(t-a) - \cos(\delta) \leq 1.$$

On définit alors la suite $(P)_{n\in\mathbb{N}}$ polynômes trigonométriques par :

$$P_n(t) = (P(t))^{2n}$$

et on écrit que :

$$0 = I_n = \int_0^{2\pi} f(t)\, P_n(t)\, dt = \int_{a-\pi}^{a+\pi} f(t)\, P_n(t)\, dt = J_n + K_n + L_n$$

avec :

$$J_n = \int_{a-\frac{\delta}{2}}^{a+\frac{\delta}{2}} f(t) P_n(t)\, dt \geq \delta \frac{f(a)}{2}(1+\varepsilon)^{2n} \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$$

$$K_n = \int_{\frac{\delta}{2}\leq |t-a| \leq \delta} f(t) P_n(t)\, dt \geq 0$$

car $f(t) > \dfrac{f(a)}{2} > 0$ pour $|t-a| \leq \delta$ et $P_n(t) \geq 0$ pour tout t et :

$$|L_n| \leq \int_{\delta \leq |t-a| \leq \pi} |f(t)| P_n(t)\, dt \leq \int_{\delta \leq |t-a| \leq \pi} |f(t)|\, dt \leq 2\pi \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)| = M$$

ce qui donne :

$$J_n + K_n + L_n \geq J_n - M \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$$

et est en contradiction avec $I_n = 0$.

On a donc ainsi montré que f est nulle en tout point de continuité.

En un point de discontinuité $a \in [0, 2\pi]$ (s'il en existe, il n'y en a alors qu'un nombre fini), on a :

$$f\left(a^-\right) = \lim_{\substack{x\to a \\ x<a}} f(x) = 0,\ f\left(a^+\right) = \lim_{\substack{x\to a \\ x>a}} f(x) = 0$$

et :

$$f(a) = \frac{f(a^-) + f(a^+)}{2} = 0.$$

■

Théorème 18.7 *Si f, g dans $\mathcal{D}$ sont telles que $a_n(f) = a_n(g)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $b_n(f) = b_n(g)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (ce qui équivaut à $c_n(f) = c_n(g)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$) on a alors $f = g$.*

Démonstration. Avec la linéarité des applications c_n, on a $c_n(f-g) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $f - g = 0$. ■

Exercice 18.10 *Montrer que si $f \in \mathcal{D}$ est telle que $b_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ [resp. $a_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$] alors f est paire [resp. impaire].*

Solution 18.10 *Les fonctions g, h définies sur $\mathbb{R}$ par :*

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \text{ et } h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

sont respectivement paire et impaire et on a $f = g + h$ avec g et h dans $\mathcal{D}$.
Si $b_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a alors $a_n(f) = a_n(g) + a_n(h) = a_n(g)$ ($a_n(h) = 0$ puisque h est impaire) pour tout $n \geq 0$ et $b_n(f) = b_n(g) = 0$ pour tout $n \geq 1$ ($b_n(g) = 0$ puisque g est paire), donc $f = g$ est paire.

Du théorème précédent, nous allons déduire un premier théorème de convergence de la série de Fourier.

Théorème 18.8 *Si $f \in \mathcal{D}$ est telle que les séries $\sum a_n(f)$ et $\sum b_n(f)$ sont absolument convergentes, alors sa série de Fourier converge normalement (donc uniformément) sur $\mathbb{R}$ vers f et la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$*

Démonstration. Si les séries $\sum a_n(f)$ et $\sum b_n(f)$ sont absolument convergentes, avec

$$|a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx)| \leq |a_n(f)| + |b_n(f)|$$

pour tout $n \geq 1$, on déduit alors que la série de Fourier de f est normalement convergente, donc uniformément convergente, sur $\mathbb{R}$ et sa somme $g(x)$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Avec la convergence uniforme sur $[0, 2\pi]$ des séries :

$$\frac{a_0(f)}{2}\cos(mt) + \sum (a_n(f)\cos(nt)\cos(mt) + b_n(f)\sin(nt))\cos(mt)$$

pour tout $m \geq 0$ et l'orthogonalité de $\{c_k \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{s_k \mid k \in \mathbb{N}^*\}$, on déduit que les coefficients de Fourier de g sont donnés par :

$$\begin{aligned}
\pi a_0(g) &= \int_0^{2\pi} g(t)\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{a_0(f)}{2}dt + \int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n(f)\cos(nt) + b_n(f)\sin(nt))\right)dt \\
&= \pi a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n(f)\int_0^{2\pi}\cos(nt)\,dt + b_n(f)\int_0^{2\pi}\sin(nt)\,dt\right) \\
&= \pi a_0(f)
\end{aligned}$$

et, pour $m \geq 1$:

$$\begin{aligned}
\pi a_m(g) &= \int_0^{2\pi} g(t)\cos(mt)\,dt \\
&= \int_0^{2\pi}\frac{a_0(f)}{2}\cos(mt)\,dt \\
&+ \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n(f)\int_0^{2\pi}\cos(nt)\cos(mt)\,dt + b_n(f)\int_0^{2\pi}\sin(nt)\cos(mt)\,dt\right) \\
&= a_m(f)\int_0^{2\pi}\cos^2(mt)\,dt = \pi a_m(f)
\end{aligned}$$

$$\pi b_m(g) = b_m(f)\int_0^{2\pi}\sin^2(mt)\,dt = \pi b_m(f)$$

Il en résulte que $f = g$ puisque ces deux fonctions sont dans $\mathcal{D}$ avec les mêmes coefficients de Fourier. ■

Exercice 18.11 *Étudier la série de Fourier de la fonction 2π-périodique, paire valant $x(\pi - x)$ sur $[0, \pi]$.*

En déduire les valeurs des sommes $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.

Solution 18.11 *On a $b_n(f) = 0$ pour tout $n \geq 1$ puisque f est paire et :*

$$a_0(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t(\pi - t)\,dt = \frac{\pi^2}{3}$$

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t(\pi - t)\cos(nt)\,dt \\ &= -\frac{2}{n^2}(1+(-1)^n) = \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ si } n = 2p+1 \\ -\dfrac{1}{p^2} \text{ si } n = 2p \end{array} \right. \end{aligned}$$

pour $n \geq 1$.

Avec $|a_n(f)| \leq \dfrac{4}{n^2}$ *pour tout* $n \geq 1$, *on déduit que la série* $\sum a_n(f)$ *est absolument convergente et la série de Fourier de* f *converge normalement vers* f. *On a donc, pour tout réel* x :

$$f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f)\cos(nx) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(2nx)}{n^2}$$

ce qui équivaut à :

$$\forall x \in [0,\pi],\ x(\pi - x) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(2nx)}{n^2}$$

Les évaluations en $x = 0$ *et* $x = \dfrac{\pi}{2}$ *respectivement nous donnent :*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Exercice 18.12 *Étudier la série de Fourier de la fonction* 2π*-périodique, valant* $|x|$ *sur* $[-\pi,\pi]$.
En déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$.

Solution 18.12 *On a* $b_n(f) = 0$ *pour tout* $n \geq 1$ *puisque* f *est paire et :*

$$a_0(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\,dt = \pi$$

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\cos(nt)\,dt = \frac{2}{\pi n^2}((-1)^n - 1) \\ &= \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ si } n = 2p \\ -\dfrac{4}{\pi(2p+1)^2} \text{ si } n = 2p+1 \end{array} \right. \end{aligned}$$

pour $n \geq 1$.

Avec $|a_n(f)| \leq \dfrac{4}{n^2}$ *pour tout* $n \geq 1$, *on déduit que la série* $\sum a_n(f)$ *est absolument convergente et la série de Fourier de* f *converge normalement vers* f. *On a donc :*

$$\forall x \in [0,\pi],\ x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2}$$

L'évaluation en $x = 0$ *nous donne :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

En utilisant le lemme 18.3, on en déduit le résultat suivant qui est un cas particulier du théorème de Dirichlet.

Corollaire 18.2 *Si $f \in \mathcal{D}$ est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors sa série de Fourier converge normalement (donc uniformément) sur $\mathbb{R}$ vers f.*

Démonstration. Le lemme 18.3 nous dit que les séries $\sum a_n(f)$ et $\sum b_n(f)$ sont absolument convergentes, ce qui donne le résultat. ■

Exercice 18.13 *Soit $f(x) = |\sin(x)|$.*

1. *Etudier sa série de Fourier.*
2. *Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}$.*
3. *Développer f sous la forme $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n \sin^2(nx)$.*

Solution 18.13

1. *La fonction f étant 2π-périodique continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, est développable en série de Fourier, la convergence étant uniforme sur $\mathbb{R}$ tout entier. Ces coefficients de Fourier trigonométriques sont donnés par $b_n = 0$ puisque la fonction f est paire et pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$:*

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin(t)\cos(nt)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\sin((1+n)t) + \sin((1-n)t))\,dt \\ &= \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^{n+1}-1}{n^2-1} = \begin{cases} 0 \text{ si } n = 2p+1 \\ -\frac{4}{\pi}\frac{1}{4p^2-1} \text{ si } n = 2p \end{cases} \end{aligned}$$

et pour $n = 1$:

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(2t)\,dt = 0$$

On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |\sin(x)| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nx)}{4n^2-1}.$$

2. *En prenant respectivement $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$, on a :*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}.$$

Ce qui peut se montrer de manière élémentaire avec :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1} - \sum_{j=2}^{n+1}\frac{1}{2j-1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{1}{2} \end{aligned}$$

et :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{2}{\pi}-1\right) = \frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}$$

3. *On a :*

$$\begin{aligned}|\sin(x)| &= \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{2}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(2nx)}{4n^2-1}\right)\\ &= \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1-\cos(2nx)}{4n^2-1} = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin^2(nx)}{4n^2-1}\end{aligned}$$

Exercice 18.14 *À tout réel $a \in]0,\pi[$ on associe la fonction f_a, 2π-périodique et impaire telle que :*

$$\forall x \in [0,\pi],\ f_a(x) = \begin{cases} x(\pi-a) & si\ 0 \le x \le a \\ a(\pi-x) & si\ a \le x \le \pi \end{cases}$$

1. *Étudier la série de Fourier de f_a.*
2. *En déduire les valeurs des sommes :*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nx)\sin(na)}{n^2},\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin^2(nx)}{n^2}\ \ et\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(2nx)}{n^2}$$

pour x, a dans $]0,\pi[$.

Solution 18.14

1. *La fonction f_a étant 2π-périodique continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, est développable en série de Fourier, la convergence étant uniforme sur $\mathbb{R}$ tout entier. Ces coefficients de Fourier trigonométriques sont donnés par $a_n = 0$ puisque la fonction f est impaire et pour $n \geq 1$:*

$$\begin{aligned}b_n &= \frac{2}{\pi}\left((\pi-a)\int_0^a t\sin(nt)\,dt + a\int_a^\pi (\pi-t)\sin(nt)\,dt\right)\\ &= \frac{2}{\pi}\left((\pi-a)\left(\left[-t\frac{\cos(nt)}{n}\right]_0^a + \frac{1}{n}\int_0^a\cos(nt)\,dt\right)\right)\\ &+ \frac{2}{\pi}\left(a\left(\left[-(\pi-t)\frac{\cos(nt)}{n}\right]_a^\pi - \frac{1}{n}\int_a^\pi\cos(nt)\,dt\right)\right)\\ &= \frac{2}{\pi}\left((\pi-a)\left(-a\frac{\cos(na)}{n}+\frac{1}{n^2}\sin(na)\right)\right)\\ &+ \frac{2}{\pi}\left(a\left((\pi-a)\frac{\cos(na)}{n}+\frac{1}{n^2}\sin(na)\right)\right)\\ &= \frac{2}{n^2}\sin(na)\end{aligned}$$

2. *Ce qui donne, pour tout réel $x \in]0,\pi[$:*

$$2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nx)\sin(na)}{n^2} = f_a(x) = \begin{cases} x(\pi-a) & si\ 0 \le x \le a \\ a(\pi-x) & si\ a \le x \le \pi \end{cases}$$

(pour $x = 0$ ou $x = \pi$ tout est nul) et $x = a \in \left]0, \pi\right[$ donne :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(nx)}{n^2} = \frac{x(\pi - x)}{2}$$

En écrivant que $\cos(2nx) = 1 - 2\sin^2(nx)$, *on en déduit que :*

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nx)}{n^2} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(nx)}{n^2} \\ &= \frac{\pi^2}{6} - x(\pi - x)\end{aligned}$$

Prenant $x = \frac{\pi}{2}$, *on retrouve :*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{4} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

Exercice 18.15 *Soient* $a \in \left]-1, 1\right[\setminus \{0\}$, f *définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$f(x) = \frac{1}{1 - 2a\cos(x) + a^2}$$

et $(u_n)_{n \geq 0}$ *la suite définie par :*

$$u_n = \int_0^\pi f(x)\cos(nx)\,dx$$

1. *Calculer* $u_0 = \int_0^\pi f(x)\,dx$.
2. *Calculer* $u_1 = \int_0^\pi f(x)\cos(x)\,dx$.
3. *Établir une relation de récurrence entre* u_{n+1}, u_n *et* u_{n-1} *pour* $n \geq 1$.
4. *Calculer les racines du polynôme* $P(x) = x^2 - \frac{1+a^2}{a}x + 1$.
5. *Expliciter* u_n.
6. *En déduire le développement de* f *en série de Fourier.*
7. *Exprimer, pour tout réel* x *:*

$$\frac{1}{1 - ae^{-ix}} + \frac{1}{1 - ae^{ix}} - 1$$

   en fonction de $f(x)$.
8. *Retrouver le développement de Fourier de* f *en utilisant des développements en série entière.*

Solution 18.15 *Comme* $0 < |a| < 1$, *on a :*

$$1 - 2a\cos(x) + a^2 = (a - \cos(x))^2 + \sin^2(x) > 0$$

pour tout réel x *et la fonction* f *est bien définie sur* $\mathbb{R}$.

1. *En effectuant le changement de variable* $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, *pour* $x \in \left]0,\pi\right[$, *on a* $du = \frac{1}{2}\left(1+u^2\right)dx$ *:*

$$\begin{aligned}\cos(x) &= 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 = \frac{2}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} - 1 \\ &= \frac{1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1-u^2}{1+u^2}\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}u_0 = \int_0^{\pi} f(x)\,dx &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1-2a\frac{1-u^2}{1+u^2}+a^2}\frac{2du}{1+u^2} \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{2}{1-2a+a^2+\left(1+2a+a^2\right)u^2}du \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{2}{(1-a)^2+(1+a)^2u^2}du \\ &= \frac{2}{(1-a)^2}\int_0^{+\infty}\frac{du}{1+\left(\frac{1+a}{1-a}\right)^2u^2}\end{aligned}$$

puis le changement de variable $x = \frac{1+a}{1-a}u$ *donne :*

$$\begin{aligned}u_0 &= \frac{2}{(1-a)^2}\frac{1-a}{1+a}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} \\ &= \frac{2}{1-a^2}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{1-a^2}.\end{aligned}$$

2. *En écrivant que :*

$$\left(1-2a\cos(x)+a^2\right)f(x) = 1$$

on déduit que :

$$f(x)\cos(x) = \frac{\left(1+a^2\right)f(x)-1}{2a}$$

et :

$$\begin{aligned}u_1 = \int_0^{\pi} f(x)\cos(x)\,dx &= \frac{1+a^2}{2a}\int_0^{\pi}f(x)\,dx - \frac{\pi}{2a} \\ &= \frac{1+a^2}{2a}u_0 - \frac{\pi}{2a} = \frac{1+a^2}{2a}\frac{\pi}{1-a^2} - \frac{\pi}{2a} \\ &= \frac{\pi}{2a}\left(\frac{1+a^2}{1-a^2}-1\right) = \frac{\pi a}{1-a^2}.\end{aligned}$$

3. *Avec :*

$$\cos((n+1)x) + \cos((n-1)x) = 2\cos(x)\cos(nx)$$

on déduit que :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} + u_{n-1} &= 2\int_0^{\pi} f(x)\cos(x)\cos(nx)\,dx \\
&= 2\int_0^{\pi} \frac{(1+a^2)\,f(x)-1}{2a}\cos(nx)\,dx \\
&= \frac{1+a^2}{a}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx - \frac{1}{a}\int_0^{\pi}\cos(nx)\,dx \\
&= \frac{1+a^2}{a}u_n.
\end{aligned}$$

4. *On a :*

$$aP(x) = ax^2 - \left(1+a^2\right)x + a = (ax-1)(x-a)$$

et le polynôme P a deux racines réelles, à savoir a et $\frac{1}{a}$.

5. *On en déduit que $u_n = \lambda a^n + \frac{\mu}{a^n}$, les réels λ, μ étant déterminés par :*

$$\left\{\begin{array}{l}
\lambda + \mu = u_0 = \dfrac{\pi}{1-a^2} \\
\lambda a + \dfrac{\mu}{a} = u_1 = \dfrac{\pi a}{1-a^2} = a(\lambda+\mu)
\end{array}\right.$$

ce qui donne $\mu = 0$ $(a^2 \neq 1)$ et $\lambda = \frac{\pi}{1-a^2}$. On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{\pi}{1-a^2}a^n$$

6. *La fonction f étant impaire, on a $b_n = 0$ pour tout $n \geq 1$ et $a_n = \frac{2}{\pi}u_n = \frac{2}{1-a^2}a^n$ pour tout $n \geq 0$. Comme f est $\mathcal{C}^{\infty}$, sa série de Fourier converge normalement vers f et pour tout réel x, on a :*

$$\frac{1}{1-2a\cos(x)+a^2} = \frac{1}{1-a^2}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} a^n\cos(nx)\right).$$

7. *On a :*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-ae^{-ix}} + \frac{1}{1-ae^{ix}} &= \frac{2(1-a\cos(x))}{(1-ae^{-ix})(1-ae^{ix})} = \frac{2-2a\cos(x)}{\left|e^{ix}-a\right|^2} \\
&= \frac{2-2a\cos(x)}{1-2a\cos(x)+a^2}
\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-ae^{-ix}} + \frac{1}{1-ae^{ix}} - 1 &= \frac{2-2a\cos(x)}{1-2a\cos(x)+a^2} - 1 \\
&= \frac{1-a^2}{1-2a\cos(x)+a^2} = \left(1-a^2\right)f(x)
\end{aligned}$$

8. *On en déduit que :*

$$\begin{aligned}\left(1-a^2\right) f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a^n e^{-inx} + \sum_{n=0}^{+\infty} a^n e^{inx} - 1 \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} a^n \left(e^{inx} + e^{-inx}\right) \\ &= 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} a^n \cos(nx)\end{aligned}$$

Exercice 18.16 *Soit $f(z) = \sum\limits_{n\geq 0} \alpha_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in \left]0, +\infty\right]$ telle que $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in D(0,R)$. Pour tout $r \in \left]0, R\right[$, on désigne par φ_r la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi_r(t) = \dfrac{1}{f(re^{it})}$.*

1. *Montrer que φ_r est développable en série de Fourier. On note $c_n(r)$ ses coefficients de Fourier exponentiels.*
2. *Montrer que la fonction h_n définie sur $\left]0, R\right[$ par $h_n(r) = \dfrac{c_n(r)}{r^n}$ est dérivable et calculer sa dérivée.*
3. *Montrer que $c_n(r) = 0$ pour tout r dans $\left]0, R\right[$ et tout $n < 0$.*
4. *En déduire que $\dfrac{1}{f}$ est développable en série entière de rayon de convergence R.*

Solution 18.16

1. *La fonction φ_r est 2π-périodique et indéfiniment dérivable, sa série de Fourier est alors normalement convergente vers φ_r sur $\mathbb{R}$ tout entier.*
2. *Pour tout $r \in \left]0, R\right[$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, on a :*

$$c_n(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{-int}}{f(re^{it})} dt,\ c_n'(r) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it} f'(re^{it})}{f^2(re^{it})} e^{-int} dt$$

(la fonction $(t,r) \longmapsto \frac{e^{-int}}{f(re^{it})}$ est indéfiniment dérivable sur $[0, 2\pi] \times \left]0, R\right[$ et on intègre sur un intervalle fermé borné). On a alors :

$$\forall r \in \left]0, R\right[,\ \forall n \in \mathbb{Z},\ h_n'(r) = -\frac{1}{2\pi r^{n+1}} \int_0^{2\pi} \frac{re^{it} f(re^{it}) + nf(re^{it})}{f^2(re^{it})} e^{-int} dt.$$

En remarquant que :

$$\frac{re^{it} f'(re^{it}) + nf(re^{it})}{f^2(re^{it})} e^{-int} = i\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{e^{-int}}{f(re^{it})}\right),$$

le résultat précédent donne, en tenant compte de la périodicité :

$$\forall r \in \left]0, R\right[,\ \forall n \in \mathbb{Z},\ h_n'(r) = -\frac{i}{2\pi r^{n+1}} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{e^{-int}}{f(re^{it})}\right) dt = 0.$$

On déduit donc que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la fonction h_n est constante sur $\left]0, R\right[$. En notant encore h_n cette constante on a alors :

$$\forall r \in \left]0, R\right[,\ \forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(r) = h_n r^n.$$

De la continuité de chaque fonction $r \longmapsto c_n(r)$ sur $\left[0, R\right[$, on déduit que $h_n = 0$ pour tout $n < 0$. Et toujours par continuité, on a $c_n(r) = h_n r^n$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $r \in \left[0, R\right[$.

3. De ce qui précède, on déduit que pour tout $r \in [0, R[$ et tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\frac{1}{f(re^{it})} = \sum_{n=0}^{+\infty} h_n r^n e^{int},$$

c'est-à-dire $\frac{1}{f(z)} = \sum_{n=0}^{+\infty} h_n z^n$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$. C'est-à-dire que la fonction $\frac{1}{f}$ est développable en série entière avec un rayon de convergence $R' \geq R$. En appliquant le raisonnement précédent à la fonction $\frac{1}{f}$, on déduit que $f = \left(\frac{1}{f}\right)^{-1}$ a un rayon de convergence $R \geq R'$. En définitive f et $\frac{1}{f}$ ont même rayon de convergence.

18.6 Approximation uniforme par des polynômes trigonométriques

Les lemmes techniques qui suivent nous seront utiles.

Lemme 18.4 *Pour tout entier naturel n, la fonction $t \mapsto (1 + \cos(t))^n$ est un polynôme trigonométrique.*
Plus précisément, on a :

$$(1 + \cos(t))^n = \frac{1}{2^n}\left(C_{2n}^n + 2\sum_{k=1}^{n} C_{2n}^{n-k}\cos(kt)\right).$$

Démonstration. On a déjà vu avec l'exercice 18.5 que les fonctions $\cos^k(t)$ sont des polynômes trigonométriques pour tout entier naturel k. Il en résulte que $(1 + \cos(t))^n$ est un polynôme trigonométrique.

En posant, pour t réel, $z = e^{it}$, on a :

$$P_n(t) = (1 + \cos(t))^n = \left(\frac{z^2 + 2z + 1}{2z}\right)^n = \frac{(1+z)^{2n}}{2^n z^n}$$

et avec la formule du binôme de Newton :

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n}\left(C_{2n}^n + \sum_{k=0}^{n-1} C_{2n}^k z^{-(n-k)} + \sum_{k=n+1}^{2n} C_{2n}^k z^{k-n}\right),$$

soit en posant $j = n - k$ dans la première somme et $j = k - n$ dans la deuxième :

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n}\left(C_{2n}^n + \sum_{j=1}^{n} C_{2n}^{n-j} z^{-j} + \sum_{j=+1}^{n} C_{2n}^{n+j} z^j\right)$$

et avec $C_{2n}^{n+j} = C_{2n}^{n-j}$, on a :

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n}\left(C_{2n}^n + \sum_{j=1}^{n} C_{2n}^{n-j}\left(z^j + z^{-j}\right)\right),$$

c'est-à-dire :

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n}\left(C_{2n}^n + 2\sum_{j=1}^{n} C_{2n}^{n-j}\cos(jt)\right).$$

On peut aussi écrire que :

$$\begin{aligned}
P_n(t) &= (1+\cos(t))^n = 2^n \cos^{2n}\left(\frac{t}{2}\right) \\
&= 2^n \frac{\left(e^{i\frac{t}{2}} + e^{-i\frac{t}{2}}\right)^{2n}}{2^{2n}} = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k e^{ik\frac{t}{2}} e^{-i(2n-k)\frac{t}{2}} \\
&= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k e^{i(2k-2n)\frac{t}{2}} = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k e^{i(k-n)t}
\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
P_n(t) &= \Re\left(\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k e^{i(k-n)t}\right) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k \cos((k-n)t) \\
&= \frac{1}{2^n}\left(C_{2n}^n + 2\sum_{j=1}^{n} C_{2n}^{n-j}\cos(jt)\right) \in \mathcal{P}_n
\end{aligned}$$

■

Exercice 18.17 *Montrer que pour tout entier naturel n, on a :*

$$\int_{-\pi}^{\pi} (1+\cos(t))^n \, dt = \frac{\pi}{2^{n-1}} C_{2n}^n.$$

Solution 18.17 *Résulte immédiatement du lemme précédent.*

Remarque 18.12 *On a aussi :*

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} (1+\cos(t))^n \, dt = 2^n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2n}\left(\frac{t}{2}\right) dt \\
= 2^{n+1} \int_{0}^{\pi} \cos^{2n}\left(\frac{t}{2}\right) dt \\
= 2^{n+2} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(x) \, dx
\end{aligned}$$

et on reconnaît l'intégrale de Wallis :

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(x) \, dx = \frac{C_{2n}^n}{2^{2n}} \frac{\pi}{2}$$

Lemme 18.5 *Pour tout entier naturel n, on a :*

$$I_n = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1+\cos(t)}{2}\right)^n dt \geq \frac{4}{n+1}$$

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1+\cos(t)}{2}\right)^n dt &= 2\int_0^{\pi}\left(\frac{1+\cos(t)}{2}\right)^n dt\\ &\geq 2\int_0^{\pi}\left(\frac{1+\cos(t)}{2}\right)^n \sin(t)\,dt = 2J_n\end{aligned}$$

et le changement de variable $x=\cos(t)$ nous donne :

$$J_n=\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+x}{2}\right)^n dx=\left[\frac{2}{n+1}\left(\frac{1+x}{2}\right)^{n+1}\right]_{-1}^{1}=\frac{2}{n+1}.$$

■

Lemme 18.6 *En notant, pour tout réel* $\delta\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ *:*

$$I_n(\delta)=\int_{\delta\leq|t|\leq\pi}\left(\frac{1+\cos(t)}{2}\right)^n dt$$

on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{I_n(\delta)}{I_n}=0$$

Démonstration. Par parité, on a :

$$I_n(\delta)=\int_{\delta\leq|t|\leq\pi}\left(\frac{1+\cos(t)}{2}\right)^n dt=2\int_{\delta}^{\pi}\left(\frac{1+\cos(t)}{2}\right)^n dt.$$

Avec la décroissance de la fonction cos sur $[0,\pi]$ et la positivité de la fonction $1+\cos$, il vient :

$$0<I_n(\delta)\leq 2(\pi-\delta)\left(\frac{1+\cos(\delta)}{2}\right)^n\leq\pi\left(\frac{1+\cos(\delta)}{2}\right)^n$$

soit en notant $\lambda=\dfrac{1+\cos(\delta)}{2}\in\,]0,1[$:

$$0<\frac{I_n(\delta)}{I_n}\leq\frac{\pi}{I_n}\lambda^n\leq\frac{\pi}{4}(n+1)\lambda^n\underset{n\to+\infty}{\to}0$$

■

À toute fonction $f\in\mathcal{D}$, on associe la suite de fonctions $(P_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$P_n(f)(x)=\frac{1}{I_n}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1+\cos(t)}{2}\right)^n f(x-t)\,dt$$

où $I_n=\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1+\cos(t)}{2}\right)^n dt.$

On peut remarquer que pour $f=1$, on a $P_n(f)=1$.

Lemme 18.7 *Pour toute fonction* $f\in\mathcal{D}$ *et tout entier naturel* n*, la fonction* $P_n(f)$ *est un polynôme trigonométrique.*

Démonstration. La fonction f étant fixée, on note P_n pour $P_n(f)$.
Le changement de variable $u = x - t$ nous donne :

$$I_n P_n(x) = \int_{x-\pi}^{x+\pi} \left(\frac{1+\cos(x-u)}{2}\right)^n f(u)\,du$$

ce qui s'écrit aussi, compte tenu de la 2π-périodicité de la fonction intégrée :

$$I_n P_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1+\cos(x-u)}{2}\right)^n f(u)\,du$$

Il en résulte que :

$$I_n P_n(x) = \frac{1}{4^n}\left(C_{2n}^n \int_{-\pi}^{\pi} f(u)\,du + 2\sum_{k=1}^{n} C_{2n}^{n-k} \int_{-\pi}^{\pi} f(u)\cos(k(x-u))\,dt\right)$$

et en écrivant que :

$$\cos(k(x-u)) = \cos(kx)\cos(ku) + \sin(kx)\sin(ku)$$

on constate que chaque fonction $x \mapsto \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\cos(k(x-u))\,dt$ est un polynôme trigonométrique, ce qui donne le résultat. ■

Lemme 18.8 *Toute fonction continue $f \in \mathcal{D}$ est uniformément continue sur* $\mathbb{R}$.

Démonstration. Toute fonction continue $f \in \mathcal{D}$ est uniformément continue sur le compact $J = [-\pi-1, \pi+1]$. Donc pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un réel $\eta \in]0,1[$ tel que :

$$(t,x) \in J^2,\ |t-x| \leq \eta \implies |f(t) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Pour $x \in [-\pi, \pi]$ et $t \in \mathbb{R}$ tels que $|t-x| \leq \eta$ on a nécessairement $t \in [-\pi-1, \pi+1]$ ($\eta \in]0,1[$ et faire un dessin), donc $|f(t) - f(x)| \leq \varepsilon$.

Pour $(t,x) \in \mathbb{R}^2$ tels que $|t-x| \leq \eta$, il existe un entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $x - 2n\pi \in [-\pi, \pi]$ ($n = E\left(\dfrac{x+\pi}{2\pi}\right)$) et on a $|(t-2n\pi) - (x-2n\pi)| \leq \eta$, ce qui entraîne :

$$|f(t) - f(x)| = |f(t-2n\pi) - f(x-2n\pi)| \leq \varepsilon.$$

On a donc ainsi prouvé que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$. ■

Théorème 18.9 *Pour toute fonction continue $f \in \mathcal{D}$, la suite de polynômes trigonométriques $(P_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f.*

Démonstration. La fonction f étant fixée, on note P_n pour $P_n(f)$.
Comme $I_n = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1+\cos(t)}{2}\right)^n dt$, on a pour tout réel x :

$$P_n(x) - f(x) = \frac{1}{I_n}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1+\cos(t)}{2}\right)^n (f(x-t) - f(x))\,dt$$

Comme f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, pour tout réel $\varepsilon > 0$, on peut trouver un réel $\delta \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que :

$$\big((u,v) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } |u-v| \leq \delta\big) \Rightarrow (|f(u) - f(v)| \leq \varepsilon)$$

On a alors pour tout réel x et tout réel $t \in [-\delta, \delta]$:

$$|f(x-t) - f(x)| < \varepsilon$$

et :

$$\begin{aligned} |P_n(x) - f(x)| &\leq \frac{1}{I_n} \int_{-\delta}^{\delta} \left(\frac{1+\cos(t)}{2} \right)^n |f(x-t) - f(x)| \, dt \\ &+ \frac{1}{I_n} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} \left(\frac{1+\cos(t)}{2} \right)^n |f(x-t) - f(x)| \, dt \\ &\leq \varepsilon + 2M \frac{I_n(\delta)}{I_n} \end{aligned}$$

où on a posé $M = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$.

Puis avec $\lim_{n \to +\infty} \frac{I_n(\delta)}{I_n} = 0$, on déduit qu'il existe un entier n_ε tel que :

$$\forall n \geq n_\varepsilon, \ 0 < \frac{I_n(\delta)}{I_n} \leq \varepsilon$$

ce qui donne :

$$\forall n \geq n_\varepsilon, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ |P_n(x) - f(x)| \leq (1 + 2M) \varepsilon$$

On a donc ainsi prouvé la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ de $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers f. ■

Le résultat précédent nous dit que toute fonction continue $f \in \mathcal{D}$ peut être approchée uniformément par une suite de polynômes trigonométriques, ce qui se traduit en disant que l'espace $\mathcal{P}$ des polynômes trigonométriques est dense dans l'espace $\mathcal{D} \cap \mathcal{C}^0$ des fonctions continues et 2π-périodiques muni de la norme $f \mapsto \|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$ (norme de la convergence uniforme).

Ce résultat ne peut être vrai sur $\mathcal{D}$ car il existe des fonctions non continues dans $\mathcal{D}$.

Mais nous allons en déduire que $\mathcal{P}$ est dense dans l'espace $\mathcal{D}$ muni de sa structure hilbertienne, ce qui permettra de montrer le théorème de Parseval et de retrouver l'unicité des coefficients de Fourier d'une fonction $f \in \mathcal{D}$.

Lemme 18.9 *Pour toute fonction $f \in \mathcal{D}$, il existe une suite $(f_n)_{n \geq n_0}$ de fonctions continues dans $\mathcal{D}$ telle que $\lim_{n \to +\infty} \|f_n - f\| = 0$ (ce qui signifie que $(f_n)_{n \geq n_0}$ converge vers f dans $(\mathcal{D}, \|\cdot\|)$.*

Démonstration. Si f est continue, le résultat est alors évident.

En supposant f non continue, on se donne un point de continuité a de f et on note :

$$a_0 = a < a_1 < \cdots < a_p < a_{p+1} = a + 2\pi$$

les points de discontinuité de f sur $[a, a+2\pi]$.

On désigne par $n_0 \geq 1$ un entier tel que :

$$\frac{1}{n_0} \leq 2 \min_{0 \leq k \leq p} (a_{k+1} - a_k)$$

et pour tout entier $n \geq n_0$, par f_n la fonction continue et 2π-périodique définie par :

$$\forall x \in [a, a+2\pi] \setminus \bigcup_{k=1}^{p} \left[a_k - \frac{1}{n}, a_k + \frac{1}{n} \right], \ f_n(x) = f(x)$$

$$f \text{ est affine sur } \left[a_k - \frac{1}{n}, a_k + \frac{1}{n}\right] \text{ pour } 1 \leq k \leq p$$

(la condition $\dfrac{1}{n_0} \leq 2 \min\limits_{0 \leq k \leq p} (a_{k+1} - a_k)$ nous assure que ces intervalles sont disjoints).

On peut préciser l'expression de f_n sur chaque intervalle $\left[a_k - \dfrac{1}{n}, a_k + \dfrac{1}{n}\right]$, c'est :

$$f_n(x) = \frac{n}{2}\left(\left(x - (a_k - \frac{1}{n})\right) f\left(a_k + \frac{1}{n}\right) + \left((a_k + \frac{1}{n}) - x\right) f\left(a_k - \frac{1}{n}\right)\right).$$

En notant $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$, on a pour tout k compris entre 1 et p et tout $x \in \left[a_k - \dfrac{1}{n}, a_k + \dfrac{1}{n}\right]$:

$$|f_n(x)| \leq \frac{n}{2}\left(\left(x - (a_k - \frac{1}{n})\right) + \left((a_k + \frac{1}{n}) - x\right)\right) \|f\|_\infty = \|f\|_\infty$$

Les fonctions considérées étant continues par morceaux et 2π-périodiques, on a pour tout $n \geq n_0$:

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|^2 &= \int_a^{a+2\pi} |f_n(x) - f(x)|^2 \, dx \\ &= \sum_{k=1}^{p} \int_{a_k - \frac{1}{n}}^{a_k + \frac{1}{n}} |f_n(x) - f(x)|^2 \, dx \leq 4p\|f\|_\infty^2 \frac{2}{n} \underset{n \to +\infty}{\to} 0 \end{aligned}$$

■

Théorème 18.10 *Pour toute fonction $f \in \mathcal{D}$, la suite de polynômes trigonométriques $(S_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers f dans $(\mathcal{D}, \|\cdot\|)$.*

Démonstration. Pour $\varepsilon > 0$ donné, on peut trouver une fonction continue $g \in \mathcal{D}$ telle que $\|f - g\| < \varepsilon$ et avec la convergence uniforme de la suite de polynômes trigonométriques $(P_n(g))_{n \in \mathbb{N}}$ vers g, on déduit qu'il existe un polynôme trigonométrique $P = P_{n_0}(g)$ tel que $\|P - g\|_\infty < \varepsilon$, ce qui entraîne :

$$\|P - g\|^2 = \int_0^{2\pi} |P(x) - g(x)|^2 \, dx \leq 2\pi \|P - g\|_\infty^2 < 2\pi\varepsilon^2$$

et :

$$\|P - f\| \leq \|P - g\| + \|g - f\| < \left(\sqrt{2\pi} + 1\right)\varepsilon$$

En notant n_ε le degré de P, on a $P \in \mathcal{P}_n$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$ et :

$$\|S_n(f) - f\| \leq \|P - f\| < \left(\sqrt{2\pi} + 1\right)\varepsilon$$

ce qui prouve que $\lim\limits_{n \to +\infty} \|S_n(f) - f\| = 0$, soit que $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n(f) = f$ dans $(\mathcal{D}, \|\cdot\|)$. ■

Ce résultat est en fait équivalent au théorème de Parseval qui suit.

Théorème 18.11 (Parseval) *Pour toute fonction $f \in \mathcal{D}$, la série numérique $\dfrac{a_0^2(f)}{2} + \sum \left(a_n^2(f) + b_n^2(f)\right)$ est convergente et on a :*

$$\frac{a_0^2(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n^2(f) + b_n^2(f)\right) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^2(t) \, dt$$

Démonstration. Résulte de :

$$\|f - S_n(f)\|^2 = \|f\|^2 - \|S_n(f)\|^2$$

avec $\|f\|^2 = \int_0^{2\pi} f^2(t)\,dt$ et :

$$\|S_n(f)\|^2 = \pi \left(\frac{a_0^2(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k^2(f) + b_k^2(f) \right) \right)$$

■

Corollaire 18.3 *Une fonction $f \in \mathcal{D}$ est telle que $a_n(f) = b_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si, et seulement si, elle est identiquement nulle.*

Démonstration. Les égalités $a_n(f) = b_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ sont équivalentes à $\|f\|^2 = \int_0^{2\pi} f^2(t)\,dt$, soit à $f = 0$. ■

Exercice 18.18 *Étudier la série de Fourier de la fonction 2π-périodique valant x^2 sur $[-\pi, \pi]$. En déduire les valeurs des sommes $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.*

Solution 18.18 *On a $b_n(f) = 0$ pour tout $n \geq 1$ puisque f est paire et :*

$$a_0(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t^2 dt = 2\frac{\pi^2}{3}$$

$$\forall n \geq 1,\ a_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t^2 \cos(nt)\,dt = 4\frac{(-1)^n}{n^2}$$

Avec $|a_n(f)| \leq \frac{4}{n^2}$ pour tout $n \geq 1$, on déduit que la série $\sum a_n(f)$ est absolument convergente et la série de Fourier de f converge normalement vers f. On a donc, pour tout réel x :

$$f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f)\cos(nx) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx)$$

ce qui équivaut à :

$$\forall x \in [0, \pi],\ x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx)$$

Les évaluations en $x = 0$ et $x = \pi$ respectivement nous donnent :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

La formule de Parseval nous donne :

$$2\frac{\pi^4}{9} + 16\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t^4 dt = 2\frac{\pi^4}{5}$$

et :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Exercice 18.19 *Soit f la fonction paire et 2π-périodique, telle que $f(x) = \operatorname{sh}(x)$ sur $[0, \pi]$.*

1. *Tracer le graphe de f.*
2. *Calculer les coefficients de Fourier de f.*
3. *Étudier la série de Fourier de f.*
4. *En déduire les valeurs des sommes :*

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1} \text{ et } T = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}.$$

5. *Que déduire du théorème de Parseval ?*

Solution 18.19

1. *Le lecteur est invité à dessiner.*
2. *On a $b_n(f) = 0$ pour tout $n \geq 1$ puisque f est paire et pour tout $n \geq 0$:*

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sh}(t)\cos(nt)\,dt = \frac{2}{\pi}\Re\left(\int_0^{\pi} \operatorname{sh}(t)\, e^{int}dt\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\Re\left(\int_0^{\pi} \left(e^t - e^{-t}\right) e^{int}dt\right) \end{aligned}$$

avec, pour $\varepsilon \in \{-1, 1\}$:

$$I_n(\varepsilon) = \int_0^{\pi} e^{(\varepsilon+in)t}dt = \frac{(-1)^n e^{\varepsilon\pi} - 1}{\varepsilon + in} = \frac{\left((-1)^n e^{\varepsilon\pi} - 1\right)(\varepsilon - in)}{n^2+1}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{\left((-1)^n e^{\pi} - 1\right) + \left((-1)^n e^{-\pi} - 1\right)}{\pi\left(n^2+1\right)} \\ &= \frac{(-1)^n\left(e^{\pi} + e^{-\pi}\right) - 2}{\pi\left(n^2+1\right)} = 2\frac{(-1)^n \operatorname{ch}(\pi) - 1}{\pi\left(n^2+1\right)} \end{aligned}$$

Avec $|a_n(f)| \leq \dfrac{\lambda}{n^2}$ pour tout $n \geq 1$, on déduit que la série $\sum a_n(f)$ est absolument convergente et la série de Fourier de f converge normalement vers f. On a donc, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f)\cos(nx) \\ &= \frac{\operatorname{ch}(\pi) - 1}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{ch}(\pi) - 1}{n^2+1}\cos(nx) \end{aligned}$$

ce qui équivaut à :

$$\forall x \in [0, \pi],\ \operatorname{sh}(x) = \frac{\operatorname{ch}(\pi) - 1}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{ch}(\pi) - 1}{n^2+1}\cos(nx)$$

3. *Les évaluations en $x=0$ et $x=\pi$, nous donne :*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{ch}(\pi)-1}{n^2+1} = \frac{1-\operatorname{ch}(\pi)}{2}$$

et :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{ch}(\pi)-1}{n^2+1}(-1)^n = \frac{\pi \operatorname{sh}(\pi)-\operatorname{ch}(\pi)+1}{2}$$

soit le système linéaire :

$$\begin{cases} -S+\operatorname{ch}(\pi)\,T = \frac{1-\operatorname{ch}(\pi)}{2} \\ \operatorname{ch}(\pi)\,S - T = \frac{\pi \operatorname{sh}(\pi)-\operatorname{ch}(\pi)+1}{2} \end{cases}$$

de solution :

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\operatorname{th}(\pi)}-1\right)$$

et :

$$T = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\operatorname{sh}(\pi)}-1\right)$$

4. *Le théorème de Parseval nous donne :*

$$\begin{aligned} 2\frac{(\operatorname{ch}(\pi)-1)^2}{\pi^2} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{((-1)^n \operatorname{ch}(\pi)-1)^2}{(n^2+1)^2} &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sh}^2(t)\,dt \\ &= \frac{\operatorname{sh}(2\pi)}{2\pi} - 1 \end{aligned}$$

soit :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{((-1)^n \operatorname{ch}(\pi)-1)^2}{(n^2+1)^2} &= \frac{\pi^2}{4}\left(\frac{\operatorname{sh}(2\pi)}{2\pi} - 1 - 2\frac{(\operatorname{ch}(\pi)-1)^2}{\pi^2}\right) \\ &= \frac{\pi}{8}\operatorname{sh}(2\pi) - \frac{\pi^2}{4} - \frac{(\operatorname{ch}(\pi)-1)^2}{2} \end{aligned}$$

Exercice 18.20 *Soit $f \in \mathcal{D}$ continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.*

1. *Montrer que :*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{a_n^2(f)+b_n^2(f)} \leq \sqrt{\frac{\pi}{6}}\sqrt{\int_0^{2\pi} |f'(t)|^2\,dt}.$$

2. *Montrer que pour tous réels a, b, t, on a :*

$$|a\cos(t)+b\sin(t)| \leq \sqrt{a^2+b^2}$$

3. *Montrer que :*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| f(x) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt \right| \leq \sqrt{\frac{\pi}{6}\int_0^{2\pi} |f'(t)|^2\,dt}.$$

Solution 18.20

1. *Dans le cas où $f \in \mathcal{D}$ est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, on a :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n(f) = -\frac{b_n(f')}{n} \text{ et } b_n(f) = \frac{1}{n} a_n(f')$$

(exercice 18.7) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans l'espace des suites réelles de carré sommable nous dit que :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{a_n^2(f) + b_n^2(f)} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sqrt{a_n^2(f') + b_n^2(f')} \\ &\leq \sqrt{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}} \sqrt{\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2(f') + b_n^2(f')}\end{aligned}$$

ce qui donne, compte tenu de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et de l'égalité de Parseval appliquée à la fonction $f' \in \mathcal{D}$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{a_n^2(f) + b_n^2(f)} \leq \frac{\pi}{\sqrt{6}} \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 \, dt} = \sqrt{\frac{\pi}{6}} \sqrt{\int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 \, dt}.$$

(on rappelle que $a_0(f') = 0$).

2. *Si $a^2 + b^2 = 0$, c'est évident, sinon il existe un réel θ tel que :*

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos(\theta) \text{ et } \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin(\theta)$$

(puisque $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$) et :

$$\begin{aligned}\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos(t) + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin(t) &= \cos(\theta)\cos(t) + \sin(\theta)\sin(t) \\ &= \cos(\theta - t) \in [-1, 1]\end{aligned}$$

On peut aussi écrire que :

$$\begin{aligned}a\cos(t) + b\sin(t) &= a\frac{e^{it} + e^{-it}}{2} + b\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \\ &= \frac{a - ib}{2} e^{it} + \frac{a + ib}{2} e^{-it}\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}|a\cos(t) + b\sin(t)| &\leq \left|\frac{a - ib}{2}\right| + \left|\frac{a + ib}{2}\right| \\ &\leq |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}\end{aligned}$$

3. *Comme $f \in \mathcal{D}$ est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, sa série de Fourier converge normalement vers f sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout réel x :*

$$\begin{aligned}\left|f(x)-\frac{a_0(f)}{2}\right| &= \left|\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n(f)\cos(nx)+b_n(f)\sin(nx))\right| \\ &\leq \sum_{n=1}^{+\infty}|a_n(f)\cos(nx)+b_n(f)\sin(nx)| \\ &\leq \sum_{n=1}^{+\infty}\sqrt{a_n^2(f)+b_n^2(f)} \leq \sqrt{\frac{\pi}{6}\int_0^{2\pi}|f'(t)|^2\,dt}\end{aligned}$$

c'est-à-dire que :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|f(x)-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\,dt\right| \leq \sqrt{\frac{\pi}{6}\int_0^{2\pi}|f'(t)|^2\,dt}$$

18.7 Le théorème de Dirichlet

Dans un premier temps nous allons donner une expression intégrale des sommes partielles d'une série de Fourier.

Lemme 18.10 *Pour tout entier naturel p strictement positif, la fonction θ_p définie sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}\pi$ par :*

$$x \mapsto \frac{\sin(px)}{\sin(x)}$$

se prolonge en une fonction continue et périodique de période 2π sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. L'ensemble $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}\pi$ est stable par la translation $x \mapsto x+2\pi$ et la fonction θ_p est continue et périodique sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}\pi$ comme quotient de deux fonctions continues et périodiques, le dénominateur ne s'annulant jamais sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}\pi$. Pour k entier relatif et $x = k\pi + t$ avec t voisin de 0 on a :

$$\theta_p(x) = (-1)^{(p-1)k}\frac{\sin(pt)}{\sin(t)} \underset{t\to 0}{\backsim} (-1)^{(p-1)k}\,p.$$

On peut donc prolonger la fonction θ_p par continuité en tout point $k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$ en posant $\theta_p(k\pi) = (-1)^{(p-1)k}\,p$. La fonction obtenue est bien continue et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$. ■

Pour la suite, on note encore θ_p le prolongement à $\mathbb{R}$ de la fonction θ_p.

Pour tout entier naturel n, on désigne par D_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$D_n(x) = \frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)$$

Ces fonctions D_n sont appelées noyaux de Dirichlet.

Lemme 18.11 *Pour tout entier naturel n et tout réel x on a :*

$$D_n(x) = \frac{1}{2}\theta_{2n+1}\left(\frac{x}{2}\right).$$

Démonstration. Pour tout entier naturel k et pour tout réel x on a :

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos(kx) = \frac{1}{2}\left(\sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right) - \sin\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right)\right),$$

ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{x}{2}\right)D_n(x) &= \frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \sum_{k=1}^{n}\left(\sin\left(\frac{2k+1}{2}x\right) - \sin\left(\frac{2k-1}{2}x\right)\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)\end{aligned}$$

et $D_n(x) = \dfrac{1}{2}\theta_{2n+1}\left(\dfrac{x}{2}\right)$. ∎

Théorème 18.12 *Pour toute fonction $f \in \mathcal{D}$, tout réel x et tout entier n, on a :*

$$\begin{aligned}S_n(f)(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\theta_{2n+1}\left(\frac{x-t}{2}\right)dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\,\theta_{2n+1}\left(\frac{t}{2}\right)dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} (f(x-t)+f(x+t))\,\theta_{2n+1}\left(\frac{t}{2}\right)dt\end{aligned}$$

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned}S_n(f)(x) &= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k(f)\cos(kx) + \sum_{k=1}^{n} b_k(f)\sin(kx) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sum_{k=1}^{n}(\cos(kt)\cos(kx)+\sin(kt)\sin(kx))\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sum_{k=1}^{n}\cos(k(x-t))\,dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos(k(x-t))\right)dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,D_n(x-t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\theta_{2n+1}\left(\frac{x-t}{2}\right)dt\end{aligned}$$

et le changement de variable $u = x - t$, nous donne :

$$S_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi} f(x-u)\,\theta_{2n+1}\left(\frac{u}{2}\right)du$$

la fonction :

$$u \mapsto \theta_{2n+1}\left(\frac{u}{2}\right) = \frac{\sin\left((2n+1)\frac{u}{2}\right)}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)}$$

étant 2π-périodique, il en est de même de $u \mapsto f(x-u)\,\theta_{2n+1}\left(\dfrac{u}{2}\right)$ et on a :

$$S_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)\,\theta_{2n+1}\left(\frac{u}{2}\right)du$$

En exploitant la parité de $u \mapsto \theta_{2n+1}\left(\frac{u}{2}\right)$, le changement de variable $u = -t$ nous donne :

$$\int_{-\pi}^{0} f(x-u)\,\theta_{2n+1}\left(\frac{u}{2}\right)du = \int_{0}^{\pi} f(x+t)\,\theta_{2n+1}\left(\frac{t}{2}\right)dt$$

et :

$$S_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left(f(x-t)+f(x+t)\right)\theta_{2n+1}\left(\frac{t}{2}\right)dt.$$

■

En remarquant que $S_n(1) = 1$ pour tout $n \geq 0$, on déduit que :

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\theta_{2n+1}\left(\frac{t}{2}\right)dt = 1.$$

En fait cette égalité peut aussi se démontrer directement avec :

$$\int_0^{\pi}\theta_{2n+1}\left(\frac{t}{2}\right)dt = 2\int_0^{\pi}D_n(t)\,dt = 2\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos(kt)\right)dt = \pi.$$

Pour toute fonction $f \in \mathcal{D}$ et tout réel x, on rappelle qu'on a noté :

$$f\left(x^-\right) = \lim_{\substack{t\to x\\ t<x}} f(t) \text{ et } f\left(x^+\right) = \lim_{\substack{t\to x\\ t>x}} f(t)$$

les limites à gauche et à droite en x. Si la fonction f est continue en x, on a $f(x^-) = f(x^+) = f(x)$.

Lemme 18.12 *Soient $f \in \mathcal{D}$ de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, x un réel fixé et φ_x la fonction définie sur $]0,\pi]$ par :*

$$\varphi_x(t) = \frac{f(x-t)-f(x^-)+f(x+t)-f(x^+)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

La fonction φ_x se prolonge par continuité en 0 et est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $]0,\pi]$.

Démonstration. Comme $f \in \mathcal{D}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, on a :

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x-t)-f(x^-)}{t} = f'_g(x) \text{ et } \lim_{t\to 0^+}\frac{f(x+t)-f(x^+)}{t} = f'_d(x)$$

et comme $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{u}{\sin(u)} = 1$, on déduit que :

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0^+}\varphi_x(t) &= 2\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x-t)-f(x^-)+f(x+t)-f(x^+)}{t}\frac{\frac{t}{2}}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\\ &= 2\left(f'_g(x)+f'_d(x)\right)\end{aligned}$$

et φ_x se prolonge par continuité en 0.

Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, et $t \mapsto \sin\left(\frac{t}{2}\right)$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, ne s'annulant pas sur $]0,\pi]$, on déduit que φ_x est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $]0,\pi]$. ■

Remarque 18.13 *La fonction φ_x n'est pas 2π-périodique car :*

$$\varphi_x(t+2\pi) = \frac{f(x-t) - f(x^-) + f(x+t) - f(x^+)}{\sin\left(\frac{t}{2}+\pi\right)} = -\varphi_x(t).$$

Nous aurons besoin de la version suivante du théorème de Riemann-Lebesgue.

Lemme 18.13 *Si $\varphi : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue en 0 et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $]0,\pi]$, on a alors :*

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_0^\pi \varphi(t)\sin(\lambda t)\,dt = 0.$$

Démonstration. Avec :

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \varphi(t)\sin(\lambda t)\,dt &= \int_0^\pi (\varphi(t)-\varphi(0))\sin(\lambda t)\,dt + \varphi(0)\int_0^\pi \sin(\lambda t)\,dt \\ &= \int_0^\pi (\varphi(t)-\varphi(0))\sin(\lambda t)\,dt + \varphi(0)\frac{1-\cos(\lambda\pi)}{\lambda}\end{aligned}$$

et $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \dfrac{1-\cos(\lambda\pi)}{\lambda} = 0$, on se ramène au cas où $\varphi(0)=0$.

Comme φ est continue en 0, pour $\varepsilon > 0$ donné, on peut trouver $\delta \in]0,\pi[$ tel que $|\varphi(t)| < \varepsilon$ pour tout $t \in [0,\delta]$ et on a :

$$\begin{aligned}\left|\int_0^\pi \varphi(t)\sin(\lambda t)\,dt\right| &\leq \int_0^\delta |\varphi(t)|\,dt + \left|\int_\delta^\pi \varphi(t)\sin(\lambda t)\,dt\right| \\ &\leq \pi\varepsilon + \left|\int_\delta^\pi \varphi(t)\sin(\lambda t)\,dt\right|\end{aligned}$$

Comme φ est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[\delta,\pi]$, il existe une subdivision $a_0 = \delta < a_1 < \cdots < a_p = \pi$ telle que φ se prolonge par continuité en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur chaque intervalle $[a_k, a_{k+1}]$ pour k compris entre 0 et $p-1$ et on écrit que :

$$\left|\int_\delta^\pi \varphi(t)\sin(\lambda t)\,dt\right| \leq \sum_{k=0}^{p-1}\left|\int_{a_k}^{a_{k+1}} \varphi(t)\sin(\lambda t)\,dt\right|$$

Une intégration par parties sur chaque intervalle $[a_k, a_{k+1}]$ nous donne pour $\lambda > 0$:

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} \varphi(t)\sin(\lambda t)\,dt = \left[-\varphi(t)\frac{\cos(\lambda t)}{\lambda}\right]_{a_k}^{a_{k+1}} + \int_{a_k}^{a_{k+1}} \varphi'(t)\frac{\cos(\lambda t)}{\lambda}dt$$

et :

$$\begin{aligned}\left|\int_{a_k}^{a_{k+1}} \varphi(t)\sin(\lambda t)\,dt\right| &\leq \frac{2}{\lambda}\sup_{[0,\pi]}|\varphi(t)| + \frac{\pi}{\lambda}\sup_{[a_k,a_{k+1}]}|\varphi'(t)| \\ &\leq \frac{M_k}{\lambda} \underset{\lambda\to+\infty}{\to} 0\end{aligned}$$

Il existe donc un réel λ_ε tel que $\left|\int_\delta^\pi \varphi(t)\sin(\lambda t)\,dt\right| < \varepsilon$ pour $\lambda > \lambda_\varepsilon$ et on a $\left|\int_0^\pi \varphi(t)\sin(\lambda t)\,dt\right| \leq (\pi+1)\varepsilon$ pour tout $\lambda > \lambda_\varepsilon$.

On a donc ainsi prouvé que $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \displaystyle\int_0^\pi \varphi(t)\sin(\lambda t)\,dt = 0$. ■

Théorème 18.13 (Dirichlet) *Si $f \in \mathcal{D}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, sa série de Fourier converge alors simplement vers f sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que pour tout réel x, on a :*

$$f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f)\cos(nx) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(f)\sin(nx)$$

avec $f(x) = \dfrac{f(x^-) + f(x^+)}{2}$ dans le cas où x est un point de discontinuité de f.

Démonstration. Les lemmes qui précèdent nous disent que, pour tout réel x et tout entier naturel n, on a :

$$\begin{aligned}
S_n(f)(x) - f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi (f(x-t) + f(x+t))\,\theta_{2n+1}\left(\frac{t}{2}\right)dt - f(x)\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \theta_{2n+1}\left(\frac{t}{2}\right)dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi (f(x-t) + f(x+t) - 2f(x))\,\theta_{2n+1}\left(\frac{t}{2}\right)dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \frac{f(x-t) - f(x^-) + f(x+t) - f(x^+)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \varphi_x(t)\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)dt
\end{aligned}$$

et le lemme de Riemann-Lebesgue nous permet de conclure à :

$$\lim_{n\to+\infty}(S_n(f)(x) - f(x)) = 0.$$

■

Exercice 18.21 *Étudier la série de Fourier de la fonction f, 2π–périodique telle que $f(x) = \sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$ sur $[-\pi,\pi]$.*

Solution 18.21 *On a $a_n(f) = 0$ pour tout $n \geq 0$ puisque f est paire et pour tout $n \geq 1$:*

$$\begin{aligned}
b_n(f) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin\left(\frac{t}{2}\right)\sin(nt)\,dt \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^\pi \cos\left(\left(\frac{1}{2} - n\right)t\right) - \cos\left(\left(\frac{1}{2} + n\right)t\right)\right)dt \\
&= \frac{8}{\pi}\frac{(-1)^{n-1}n}{4n^2 - 1}
\end{aligned}$$

Comme f est continue par morceaux et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, les points de discontinuité étant les $(2k+1)\pi$ ou k décrit $\mathbb{Z}$, on a, pour $x \in]-\pi,\pi]$:

$$\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{4n^2-1}\sin(nx) = \begin{cases} \sin\left(\dfrac{x}{2}\right) \ \text{si } x \in]-\pi,\pi[\\ 0 \ \text{si } x = \pi \end{cases}$$

18.8 Séries de Fourier et équations aux dérivées partielles

On se contente ici d'étudier quelques exemples.

On s'intéresse tout d'abord à l'équation des ondes.

Le problème est de déterminer une fonction $u : [0, \pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que :

$$\begin{cases} \forall (x,t) \in [0,\pi] \times \mathbb{R},\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0 \\ \forall x \in [0,\pi],\ u(x,0) = f(x),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) \\ \forall t \in \mathbb{R},\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \end{cases} \tag{18.2}$$

où $c > 0$, f et g sont des fonctions données, les hypothèses sur ces fonctions seront précisées en cours d'étude.

Lemme 18.14 *Soit $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = f(\pi) = 0$. Si on prolonge cette fonction en une fonction $\widetilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui est 2π-périodique et impaire, alors $\widetilde{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$.*

Démonstration. En utilisant l'exercice 18.4, il nous suffit de vérifier la continuité de $\widetilde{f}$ sur $[-\pi,\pi]$, ce qui est clair par imparité sur $[-\pi,\pi] \setminus \{0\}$ et en 0, cela se déduit de :

$$\lim_{x \to 0^+} \widetilde{f}(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 0$$

et :

$$\lim_{x \to 0^-} \widetilde{f}(x) = -\lim_{x \to 0^-} \widetilde{f}(-x) = -\lim_{t \to 0^+} f(t) = f(0) = 0.$$

■

On suppose que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$ avec $f(0) = f(\pi) = 0$ et on la prolonge en une fonction impaire et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ qu'on note encore f. Cette fonction f est continue, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ et le théorème de Dirichlet (plus précisément le corollaire 18.2) nous dit que sa série de Fourier converge normalement vers f sur $\mathbb{R}$.

Compte tenu du fait que les $a_n(f)$ sont tous nuls (f est impaire), on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(f) \sin(nx)$$

On suppose maintenant que $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^3$ avec $f(0) = f(\pi) = 0$, $f''(0) = f''(\pi) = 0$ et on la prolonge en une fonction impaire et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ qu'on note encore f.

Lemme 18.15 *Avec nos hypothèses, le prolongement f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.*

Démonstration. On vient de voir que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(f) \sin(nx)$$

la convergence étant normale sur $\mathbb{R}$.

Pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{2} b_n(f) &= \int_0^\pi f(t)\sin(nt)\,dt = \left[-f(t)\frac{\cos(nt)}{n}\right]_0^\pi + \frac{1}{n}\int_0^\pi f'(t)\cos(nt)\,dt \\
&= \frac{1}{n}\left(\left[f'(t)\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^\pi - \frac{1}{n}\int_0^\pi f''(t)\sin(nt)\,dt\right) \\
&= -\frac{1}{n^2}\left(\left[-f''(t)\frac{\cos(nt)}{n}\right]_0^\pi + \frac{1}{n}\int_0^\pi f'''(t)\cos(nt)\,dt\right) \\
&= -\frac{1}{n^3}\int_0^\pi f'''(t)\cos(nt)\,dt
\end{aligned}$$

soit $b_n(f) = -\dfrac{1}{n^3}a_n(g)$, où $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est 2π-périodique, paire coïncidant avec f''' sur $[0,\pi]$. Cette fonction g est dans $\mathcal{D}$ et avec :

$$\left|n^2 b_n(f)\right| = \frac{1}{n}|a_n(g)| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2} + |a_n(g)|^2\right)$$

on déduit que les séries dérivées :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n b_n(f)\cos(nx) \text{ et } -\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 b_n(f)\sin(nx)$$

sont uniformément convergentes sur $\mathbb{R}$ puisque :

$$\left|n b_n\left(\widetilde{f}\right)\right| \leq \left|n^2 b_n\left(\widetilde{f}\right)\right| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2} + |a_n(g)|^2\right)$$

avec $\sum \dfrac{1}{n^2} < +\infty$ et $\sum |a_n(g)|^2 < +\infty$ (théorème de Bessel). Les fonctions $x \mapsto \sin(nx)$, étant indéfiniment dérivables, on en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. ∎

Théorème 18.14 *Avec nos hypothèses, les fonctions u_1 et u_2 définies par :*

$$\forall (x,t) \in [0,\pi] \times \mathbb{R}, \begin{cases} u_1(x,t) = f(x-ct) \\ u_1(x,t) = f(x+ct) \end{cases}$$

sont solutions de l'équation des ondes :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0$$

avec la condition initiale :

$$\forall x \in [0,\pi],\ u(x,0) = f(x)$$

et la fonction $u_3 = \dfrac{1}{2}(u_1 + u_2)$ est solution du problème :

$$\begin{cases} \forall (x,t) \in [0,\pi] \times \mathbb{R},\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0 \\ \forall x \in [0,\pi],\ u(x,0) = f(x),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \\ \forall t \in \mathbb{R},\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \end{cases}$$

Démonstration. Le lemme précédent nous dit que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Il en est donc de même des fonctions u_1 et u_2 et pour $k = 1, 2$, on a :

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial t}(x,t) = c^2 f''(x - ct) = c^2 \frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2}(x,t)$$

$$u_k(x,0) = f(x)$$

avec :

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}(x,0) = -cf'(x) = -\frac{\partial u_2}{\partial t}(x,0)$$

$$\begin{aligned} u_1(0,t) &= f(-ct) = -f(ct) = -u_2(0,t) \\ u_1(\pi,t) &= f(\pi - ct) = f(-\pi - ct) = -f(\pi + ct) = -u_2(\pi,t) \end{aligned}$$

Il en résulte que la fonction $u_3 = \frac{1}{2}(u_1 + u_2)$ vérifie $\frac{\partial^2 u}{\partial t}(x,t) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$, $u(x,0) = f(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$ et $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$. ■

On suppose que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $[0,\pi]$ avec $g(0) = g(\pi) = 0$, $g''(0) = g''(\pi) = 0$.

On prolonge g en une fonction impaire et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ qu'on note encore g. Cette fonction g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

On désigne par G la primitive de g sur $\mathbb{R}$ telle que $\int_0^\pi G(x)\,dx = 0$. Elle est définie par $G(x) = \int_0^x g(t)\,dt + \lambda$ pour $x \in [0,\pi]$ et la condition $\int_0^\pi G(x)\,dx = 0$, qui s'écrit $\int_0^\pi \left(\int_0^x g(t)\,dt\right) dx + \pi\lambda = 0$, détermine λ de manière unique. De plus G est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}$.

Théorème 18.15 *Avec nos hypothèses, les fonctions v_1 et v_2 définies par :*

$$\forall (x,t) \in [0,\pi] \times \mathbb{R}, \ \begin{cases} v_1(x,t) = G(x - ct) \\ v_2(x,t) = G(x + ct) \end{cases}$$

sont solutions de l'équation des ondes :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0$$

avec la condition initiale :

$$\forall x \in [0,\pi], \ u(x,0) = f(x)$$

et la fonction $v_3 = \frac{1}{2c}(v_2 - v_1)$ est solution du problème :

$$\begin{cases} \forall (x,t) \in [0,\pi] \times \mathbb{R}, \ \frac{\partial^2 u}{\partial t}(x,t) - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0 \\ \forall x \in [0,\pi], \ u(x,0) = 0, \ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) \\ \forall t \in \mathbb{R}, \ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \end{cases}$$

Démonstration. La fonction G étant de classe $\mathcal{C}^3$ sur $[0, \pi]$ il en est de même de v_k, pour $k = 1, 2$ et :

$$\frac{\partial^2 v_k}{\partial t}(x,t) = c^2 G''(x - ct) = c^2 g'(x - ct) = c^2 \frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2}(x,t)$$
$$v_k(x,0) = G(x)$$

avec :

$$\frac{\partial v_1}{\partial t}(x,0) = -cG'(x) = -cg(x) = -\frac{\partial v_2}{\partial t}(x,0)$$

$$v_1(0,t) = G(-ct) = G(ct) = v_2(0,t)$$
$$v_1(\pi,t) = G(\pi - ct) = G(-\pi - ct) = G(\pi + ct) = v_2(\pi,t)$$

■

Théorème 18.16 *Si les fonctions f et g sont de classe $\mathcal{C}^3$ sur $[0, \pi]$ avec $f(0) = f(\pi) = 0$, $f''(0) = f''(\pi) = 0$, $g(0) = g(\pi) = 0$ et $g''(0) = g''(\pi) = 0$, alors une solution du problème* (18.2) *est donnée par :*

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(b_n(f)\cos(nct) + \frac{b_n(g)}{n}\sin(nct) \right) \sin(nx)$$

Démonstration. Le théorème de Dirichlet nous dit que G est développable en série de Fourier sur $\mathbb{R}$ et avec $a_0(G) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} G(x)\,dx = 0$, $a_n(G) = \dfrac{b_n(g)}{n}$ pour tout $n \geq 0$, on déduit que, pour tout réel x, on a :

$$G(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n(g)}{n}\cos(nx)$$

la convergence étant uniforme.

En utilisant les théorèmes 18.14 et 18.15, on voit que la fonction $u = u_3 + v_3$ est solution de (18.2) et elle s'écrit :

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(f(x+ct) + f(x-ct)) + \frac{1}{2c}(G(x+ct) - G(x-ct))$$

avec :

$$\begin{aligned} f(x+ct) + f(x-ct) &= \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(f)(\sin(nx+nct) + \sin(nx-nct)) \\ &= 2\sum_{n=1}^{+\infty} b_n(f)\sin(nx)\cos(nct) \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} G(x+ct) - G(x-ct) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n(g)}{n}(\cos(nx-nct) - \cos(nx-nct)) \\ &= 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n(g)}{n}\sin(nx)\sin(nct) \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(b_n(f)\cos(nct) + \frac{b_n(g)}{n}\sin(nct) \right) \sin(nx)$$

■

Sixième partie

Fonctions d'une variable complexe

19

Fonctions holomorphes

Dans ce chapitre nous allons généraliser la notion de dérivation rencontrée pour les fonctions d'une variable réelle au cas des fonctions d'une variable complexe.

19.1 La représentation de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{C}$

Le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes est identifié à $\mathbb{R}^2$ par l'isomorphisme de $\mathbb{R}$-espace vectoriels :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{C} & \to & \mathbb{R}^2 \\ & z = x + iy & \mapsto & (x, y) \end{array}$$

Si $u_{\mathbb{C}}$ est une application $\mathbb{R}$-linéaire de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, sa représentation dans $\mathbb{R}^2$ est donnée par le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \overset{u_{\mathbb{C}}}{\to} & \mathbb{C} \\ \varphi^{-1} \uparrow & & \downarrow \varphi \\ \mathbb{R}^2 & \overset{u_{\mathbb{R}}}{\to} & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

c'est donc l'application $u_{\mathbb{R}} = \varphi \circ u_{\mathbb{C}} \circ \varphi^{-1}$ et $u_{\mathbb{C}}$ est $\mathbb{R}$-linéaire si, et seulement si, $u_{\mathbb{R}}$ est $\mathbb{R}$-linéaire.

Les applications $\mathbb{C}$-linéaires de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ sont les applications $z \mapsto \alpha z$ où $\alpha = a + ib$ est un nombre complexe avec a, b réels. La représentation $\mathbb{R}$-linéaire d'une telle application est l'application $u_{\mathbb{R}}$ définie par :

$$\begin{aligned} u_{\mathbb{R}}(x, y) &= \varphi(\alpha(x + iy)) = \varphi((ax - by) + i(ay + bx)) \\ &= (ax - by, bx + ay) \end{aligned}$$

et sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

Réciproquement si $u_{\mathbb{C}}$ est une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle que $u_{\mathbb{R}} = \varphi \circ u_{\mathbb{C}} \circ \varphi^{-1}$ soit une application $\mathbb{R}$-linéaire de matrice $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, alors $u_{\mathbb{C}}$ est l'application $\mathbb{C}$-linéaire $z \mapsto \alpha z$ où $\alpha = a + ib$.

Remarque 19.1 *Ce résultat est à la base des conditions de Cauchy-Riemann que nous verrons un peu plus loin (paragraphe 19.6).*

En utilisant, pour $\alpha \in \mathbb{C}^*$, la forme polaire $\alpha = \rho e^{i\theta} = \rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ avec $\rho \in \mathbb{R}^{+,*}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, l'application $u_{\mathbb{R}}$ a pour matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$:

$$A = \rho \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

et $u_{\mathbb{R}} = \rho \cdot r_\theta$ est la composée de la rotation r_θ d'angle $\theta = \arg(\alpha)$ (modulo 2π) et de l'homothétie h_ρ de rapport $\rho = |\alpha| > 0$. C'est une similitude directe.

Remarque 19.2 *Une similitude directe conserve les angles orientés et les cercles. Cette remarque est à la base de la notion de représentation conforme que nous verrons plus loin.*

Exercice 19.1 *Soit $\alpha = a + ib$ un nombre complexe et $u_{\mathbb{C}}$ l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $u_{\mathbb{C}}(z) = \alpha\overline{z}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, où $\overline{z}$ est le conjugué de z. Montrer que $u_{\mathbb{C}}$ est $\mathbb{R}$-linéaire et donner sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.*

Solution 19.1 *La représentation $\mathbb{R}$-linéaire de $u_{\mathbb{C}}$ est l'application $u_{\mathbb{R}}$ définie par :*

$$\begin{aligned} u_{\mathbb{R}}(x,y) &= \varphi(\alpha(x-iy)) = \varphi((ax+by) + i(bx-ay)) \\ &= (ax+by, bx-ay) \end{aligned}$$

et sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$.
En utilisant, pour α non nul, la forme polaire $\alpha = \rho e^{i\theta} = \rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ l'application $u_{\mathbb{R}}$ a pour matrice :

$$A = \rho \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

et $u_{\mathbb{R}} = \rho \cdot \sigma_\theta$ est la composée de la symétrie orthogonale σ_θ par rapport à la droite D_θ faisant l'angle $\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\arg(\alpha)}{2}$ avec l'axe des x et de l'homothétie h_ρ de rapport $\rho = |\alpha|$. C'est une similitude indirecte.
La droite D_θ est dirigée par $u_\theta = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}$, l'orthogonale $D_\theta^\perp$ est dirigée par $v_\theta = \begin{pmatrix} -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}$ et on a :

$$\begin{aligned} \sigma_\theta(u_\theta) &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin(\theta)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sin(\theta)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \cos(\theta)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\left(\theta - \frac{\theta}{2}\right) \\ \sin\left(\theta - \frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix} = u_\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta(v_\theta) &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \cos(\theta)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ -\sin(\theta)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - \cos(\theta)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sin\left(\theta - \frac{\theta}{2}\right) \\ -\cos\left(\theta - \frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix} = -v_\theta \end{aligned}$$

donc σ_θ est bien la symétrie orthogonale par rapport à la droite D_θ.

Exercice 19.2 *Montrer qu'une application $u : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est $\mathbb{R}$-linéaire si, et seulement si, il existe deux nombres complexes α et β tels que $u(z) = \alpha z + \beta\overline{z}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.*

Solution 19.2 *Il est clair qu'une telle application est $\mathbb{R}$-linéaire.*
Réciproquement si u est $\mathbb{R}$-linéaire, il suffit de connaître $u(1)$ et $u(i)$ pour connaître u (puisque $(1, i)$ est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$). On définit alors les nombres complexes α et β comme les solutions du système linéaire :

$$\left\{ \begin{array}{c} \alpha + \beta = u(1) \\ \alpha i - \beta i = u(i) \end{array} \right.$$

soit $(\alpha, \beta) = \dfrac{1}{2}(u(1) - i \cdot u(i), u(1) + i \cdot u(i))$ et on a pour tout $z = x + iy \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} u(z) &= xu(1) + yu(i) = x(\alpha + \beta) + y(\alpha i - \beta i) \\ &= \alpha(x + iy) + \beta(x - iy) = \alpha z + \beta \overline{z}. \end{aligned}$$

19.2 Fonctions continues sur un ouvert de $\mathbb{C}$

Nous décrivons tout d'abord quelques notions topologiques de base sur $\mathbb{C}$.

Toutes ces notions seront étudiées en détails dans le chapitre sur les espaces métriques avec le cas particulier des espaces vectoriels normés de dimension finie.

Définition 19.1 *Étant donnés un nombre complexe ω et un nombre réel positif ou nul R, le disque ouvert de centre ω et de rayon R est la partie de $\mathbb{C}$ définie par :*

$$D(\omega, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - \omega| < R\}$$

et le disque fermé de centre ω et de rayon R est la partie de $\mathbb{C}$ définie par :

$$\overline{D}(\omega, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - \omega| \leq R\}$$

Pour $R = 0$, on a $D(\omega, R) = \emptyset$ et $\overline{D}(\omega, R) = \{\omega\}$.

En désignant par Ω le point de $\mathbb{R}^2$ d'affixe ω, un tel disque (ouvert ou fermé) est identifié au disque (ouvert ou fermé) de $\mathbb{R}^2$ de centre Ω et de rayon R.

Le bord d'un tel disque est le cercle de centre ω et de rayon R défini par :

$$\mathcal{C}(\omega, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - \omega| = R\}.$$

Une paramétrisation de ce cercle est aussi donnée par :

$$(z \in \mathcal{C}(\omega, R)) \Leftrightarrow \left(\exists t \in]-\pi, \pi] \mid z = \omega + R \cdot e^{it}\right)$$

Définition 19.2 *On dit qu'une partie $\mathcal{V}$ de $\mathbb{C}$ est un voisinage de $z_0 \in \mathbb{C}$ si elle contient une boule ouverte centrée en z_0 de rayon strictement positif.*

Définition 19.3 *On dit qu'une partie $\mathcal{O}$ de $\mathbb{C}$ est ouverte (ou que c'est un ouvert de $\mathbb{C}$) si elle est vide ou si elle est non vide et pour tout $z \in \mathcal{O}$ il existe un réel $r > 0$ tel que $D(z, r) \subset \mathcal{O}$.*

L'ensemble vide et $\mathbb{C}$ sont des ouverts.

Il est équivalent de dire qu'un ensemble non vide est un ouvert si, et seulement si, c'est un voisinage de chacun de ses points.

Exercice 19.3 *Montrer qu'un disque ouvert de $\mathbb{C}$ est un ouvert. Qu'en est-il d'un disque fermé ?*

Solution 19.3 *Soit $D(\omega, R)$ un disque ouvert. Si $R = 0$, on a alors $D(\omega, R) = \emptyset$ et c'est un ouvert. Sinon, pour $z \in D(\omega, R)$, on a $R - |z - \omega| > 0$ et pour $0 < \varepsilon < R - |z - \omega|$, en utilisant l'inégalité triangulaire, on voit que pour tout $t \in D(z, \varepsilon)$, on a :*

$$\begin{aligned} |t - \omega| &= |(t - z) + (z - \omega)| \\ &\leq |t - z| + |z - \omega| < \varepsilon + |z - \omega| < R \end{aligned}$$

(figure 19.1) ce qui signifie que $t \in D(\omega, R)$. On a donc $D(z, \varepsilon) \subset D(\omega, R)$ et $D(\omega, R)$ est un ouvert.

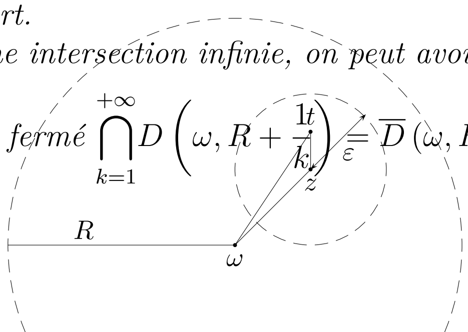

FIGURE 19.1 –

Un disque fermé n'est pas ouvert. En effet pour $z = \omega + R \cdot e^{i\theta} \in \overline{D}(\omega, R)$ et tout $\varepsilon > 0$, le point $t = z + \frac{\varepsilon}{2} e^{i\theta}$ est dans $D(z, \varepsilon)$ et pas dans $\overline{D}(\omega, R)$ puisque :

$$|t - \omega| = \left|\omega + \left(R + \frac{\varepsilon}{2}\right) e^{i\theta} - \omega\right| = R + \frac{\varepsilon}{2} > R.$$

Exercice 19.4 *Montrer qu'une réunion quelconque d'ouverts de $\mathbb{C}$ est un ouvert.*

Solution 19.4 *Soit $(\mathcal{O}_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts qu'on peut supposer non vides. Si $z \in \mathcal{O} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i$, il existe un indice $i \in I$ tel que $z \in \mathcal{O}_i$ et comme $\mathcal{O}_i$ est ouvert non vide, il existe un réel $r_i > 0$ tel que $D(z, r_i) \subset \mathcal{O}_i \subset \mathcal{O}$. L'ensemble $\mathcal{O}$ est donc ouvert.*

Exercice 19.5 *Montrer qu'une intersection finie d'ouverts de $\mathbb{C}$ est un ouvert. Que dire d'une intersection infinie d'ouverts de $\mathbb{C}$?*

Solution 19.5 *Soit $(\mathcal{O}_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille finie d'ouverts qu'on peut supposer non vides. Si $z \in \mathcal{O} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{O}_i$, comme chaque $\mathcal{O}_i$ est ouvert, il existe des réel $r_i > 0$ tels que $D(z, r_i) \subset \mathcal{O}_i$ pour tout i compris entre 1 et n et en notant $r = \min_{1 \leq i \leq n} r_i$, on a $r > 0$ et $D(z, r) \subset \mathcal{O}$. L'ensemble $\mathcal{O}$ est donc ouvert.*

Dans le cas d'une intersection infinie, on peut avoir $r = \inf_{i \in I} r_i = 0$. Par exemple pour $R \geq 0$ et $\omega \in \mathbb{C}$, le disque fermé $\bigcap_{k=1}^{+\infty} D\left(\omega, R + \frac{1}{k}\right) = \overline{D}(\omega, R)$ n'est pas ouvert.

Définition 19.4 *On dit qu'une partie $\mathcal{F}$ de $\mathbb{C}$ est fermée (ou que c'est un fermé de $\mathbb{C}$) si son complémentaire dans $\mathbb{C}$, $\mathbb{C} \setminus \mathcal{F}$, est un ouvert de $\mathbb{C}$.*

L'ensemble vide et $\mathbb{C}$ sont à la fois ouverts et fermés.

Exercice 19.6 *Montrer qu'une intersection quelconque de fermés de $\mathbb{C}$ est un fermé.*

Solution 19.6 *Résulte de :*

$$\mathbb{C} \setminus \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i = \bigcup_{i \in I} (\mathbb{C} \setminus \mathcal{F}_i)$$

Exercice 19.7 *Montrer qu'une réunion finie de fermés de $\mathbb{C}$ est un fermé. Que dire d'une réunion infinie de fermés de $\mathbb{C}$?*

Solution 19.7 *Résulte de :*

$$\mathbb{C} \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{F}_i = \bigcap_{i=1}^{n} (\mathbb{C} \setminus \mathcal{F}_i)$$

Une réunion infinie de fermés de $\mathbb{C}$ n'est pas nécessairement fermé. Par exemple pour $R > 0$ et $\omega \in \mathbb{C}$, le disque ouvert $\bigcup\limits_{\substack{k=1 \\ k > \frac{1}{R}}}^{+\infty} \overline{D}\left(\omega, R - \dfrac{1}{k}\right) = D(\omega, R)$ n'est pas ouvert.

Exercice 19.8 *Montrer qu'un disque fermé de $\mathbb{C}$ est un fermé.*

Solution 19.8 *Laissée au lecteur.*

Le résultat suivant nous fournit une caractérisation séquentielle de la notion de fermé.

Théorème 19.1 *Une partie non vide $\mathcal{F}$ de $\mathbb{C}$ est fermée si, et seulement si, pour toute suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{F}$ qui est convergente, la limite $z = \lim\limits_{n \to +\infty} z_n$ est dans $\mathcal{F}$.*

Si $\mathcal{O}$ est un ouvert non vide de $\mathbb{C}$, on peut l'identifier à un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ et toute application $f : \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ peut être identifiée à l'application φ de Ω dans $\mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ où P est la partie réelle de f et Q sa partie imaginaire.

On connaît déjà les notions de limite, de continuité et de dérivabilité pour les fonctions réelles P et Q.

Nous allons définir ces notions pour les fonctions d'une variable complexe et étudier le lien avec les notions réelles.

Pour la notion de limite, on se contente du cas particulier d'une fonction définie sur un voisinage d'un point privé de ce point.

Définition 19.5 *Soient $\mathcal{V}$ un voisinage d'un point z_0 de $\mathbb{C}$ et une application $f : \mathcal{V} \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$. On dit que f admet une limite en z_0, si il existe un nombre complexe ℓ tel que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que si $z \in \mathcal{V}$ et $0 < |z - z_0| < \eta$ alors $|f(z) - \ell| < \varepsilon$.*

Comme dans le cas réel, on déduit de l'inégalité triangulaire pour le module que si une fonction f admet une limite en un point, cette dernière est alors unique et on peut noter $\ell = \lim\limits_{\substack{z \to z_0 \\ z \neq z_0}} f(z)$. En pratique, on note $\ell = \lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ étant entendu que z tend vers z_0 avec $z \neq z_0$.

On a donc :

$$\left(\ell = \lim_{z\to z_0} f(z)\right) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \mid 0 < |z - z_0| < \eta \Rightarrow |f(z) - \ell| < \varepsilon)$$
$$\Leftrightarrow \left(\lim_{z\to z_0} |f(z) - \ell| = 0\right)$$

(on peut toujours trouver $\eta > 0$ tel que $D(z_0, \eta) \subset \mathcal{V}$).

Définition 19.6 *Soient $\mathcal{O}$ un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ et une application $f : \mathcal{O} \to \mathbb{C}$.*
On dit que f est continue en $z_0 \in \mathcal{O}$ si $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$.
On dit que f est continue sur $\mathcal{O}$, si elle est continue en tout point de $\mathcal{O}$.

La continuité de f en z_0 se traduit donc par :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \mid z \in \mathcal{O} \text{ et } |z - z_0| < \eta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

Exemple 19.1 *Une fonction constante est continue en tout point de $\mathbb{C}$.*

Exercice 19.9 *Montrer que la fonction $z \mapsto |z|$ est continue en tout point de $\mathbb{C}$.*

Solution 19.9 *Résulte de $||z| - |z_0|| < |z - z_0|$.*

Exercice 19.10 *Montrer que pour tout entier naturel n, la fonction $z \mapsto z^n$ est continue en tout point de $\mathbb{C}$.*

Solution 19.10 *Pour $n = 0$, il s'agit de la fonction constante égale à 1 et pour $n \geq 1$, $z_0 \in \mathbb{C}$, on peut trouver un réel $R > 0$ tel que $z_0 \in D(0, R)$ et pour tout $z \in D(0, R)$, on a :*

$$|z^n - z_0^n| = |z - z_0| \left|\sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k} z_0^k\right| \leq nR^{n-1} |z - z_0| \underset{x\to z_0}{\to} 0.$$

Exercice 19.11 *Montrer que pour tout entier naturel n, la fonction $z \mapsto \overline{z}^n$ est continue en tout point de $\mathbb{C}$.*

Solution 19.11 *Résulte de :*

$$|\overline{z}^n - \overline{z_0}^n| = |z^n - z_0^n| \underset{x\to z_0}{\to} 0.$$

Une définition équivalente de la continuité en un point est donnée par le résultat suivant.

Théorème 19.2 *Une fonction $f : \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ est continue en $a \in \mathcal{O}$ si, et seulement si, pour toute suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $\mathcal{O}$ qui converge vers a, la suite $(f(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$.*

Démonstration. On copie la démonstration du cas réel. ∎
Dans ce qui suit, $\mathcal{O}$ est un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ et f une application de $\mathcal{O}$ dans $\mathbb{C}$.

Théorème 19.3 *Si $f : \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ est continue en $z_0 \in \mathcal{O}$, elle est alors bornée au voisinage de ce point, c'est-à-dire qu'il existe un réel $r > 0$ et une constante $M > 0$ tels que $D(z_0, r) \subset \mathcal{O}$ et :*

$$\forall z \in D(z_0, r),\ |f(z)| \leq M.$$

Démonstration. On copie la démonstration du cas réel. ■

Une définition topologique de la notion de continuité est donnée par le résultat suivant.

Théorème 19.4 *Une fonction $f : \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ est continue sur $\mathcal{O}$ si, et seulement si, l'image réciproque par f de tout ouvert [resp. fermé] de $\mathbb{C}$ est un ouvert [resp. fermé] de $\mathcal{O}$ (i. e. $f^{-1}(\mathcal{O}) = \mathcal{O} \cap \mathcal{O}'$ [resp. $f^{-1}(\mathcal{O}) = \mathcal{O} \cap \mathcal{F}'$]où $\mathcal{O}'$ [resp. $\mathcal{F}'$]est un ouvert [resp. fermé] de $\mathbb{C}$).*

Démonstration. Supposons f continue et soit $\mathcal{O}_1$ un ouvert de $\mathbb{C}$. Pour tout $z_0 \in f^{-1}(\mathcal{O}_1)$, $f(z_0)$ est dans l'ouvert $\mathcal{O}_1$, il existe donc un réel $\varepsilon > 0$ tel que le disque ouvert $D(f(z_0), \varepsilon)$ soit contenue dans $\mathcal{O}_1$ et avec la continuité de f, on peut trouver un réel $\eta > 0$ tel que pour tout $z \in D(z_0, \eta) \cap \mathcal{O}$ on ait $f(z) \in D(f(z_0), \varepsilon) \subset \mathcal{O}_1$. On a donc $D(z_0, \eta) \cap \mathcal{O} \subset f^{-1}(\mathcal{O}_1)$ et en posant $\mathcal{O}' = \bigcup\limits_{z_0 \in f^{-1}(\mathcal{O}_1)} D(z_0, \eta)$, on définit un ouvert de $\mathbb{C}$ tel que $f^{-1}(\mathcal{O}_1) = \mathcal{C} \cap \mathcal{O}'$, ce qui prouve que $f^{-1}(\mathcal{O}_1)$ est ouvert dans $\mathbb{C}$.

Réciproquement, supposons que l'image réciproque par f de tout ouvert de $\mathbb{C}$ est un ouvert de $\mathcal{O}$. Pour $z_0 \in \mathcal{C}$ et $\varepsilon > 0$, $f^{-1}(D(f(z_0), \varepsilon))$ est un ouvert de $\mathcal{O}$, il existe donc un réel $\eta > 0$ tel que $D(z_0, \eta) \cap \mathcal{O} \subset f^{-1}(D(f(z_0), \varepsilon))$, ce qui signifie que $|f(z) - f(z_0)| \leq \varepsilon$ pour tout $z \in B(z_0, \eta) \cap \mathcal{O}$. La fonction f est donc continue en tout point de $\mathcal{O}$.

Pour ce qui est de l'image réciproque des fermés, on utilise le fait qu'un fermé est le complémentaire d'un ouvert et l'image réciproque du complémentaire est le complémentaire de l'image réciproque. ■

Pour ce qui est des opérations élémentaires, on a le résultat suivant.

Théorème 19.5 *Soient f, g deux fonctions définies sur $\mathcal{O}$, à valeurs complexes et continues en $z_0 \in \mathcal{O}$. Les fonctions $\overline{f}$, $|f|$, $f + g$ et fg sont continues en z_0.*
Si $f(z_0) \neq 0$, il existe alors un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ de z_0 dans $\mathcal{O}$ tel que $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in \mathcal{V}$ et la fonction $\dfrac{1}{f}$ qui est définie sur $\mathcal{V}$ est continue en z_0.

Démonstration. Pour $\overline{f}$ c'est clair et pour les autres fonctions, on copie la démonstration du cas réel. ■

Exercice 19.12 *Montrer que les fonctions $z \mapsto \Re(z)$ et $z \mapsto \Im(z)$ sont continues en tout point de $\mathbb{C}$.*

Solution 19.12 *Résulte de $\Re(z) = \dfrac{1}{2}(z + \overline{z})$ et $\Im(z) = \dfrac{1}{2i}(z - \overline{z})$.*

De la continuité des applications $z \mapsto z^n$ pour tout entier naturel n, on déduit que les fonctions polynomiales sont continue sur $\mathbb{C}$ et que les fonctions rationnelles sont continue sur leurs domaines de définition.

Pour la composition des applications, on a le résultat suivant.

Théorème 19.6 *Si $f : \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ est continue en $z_0 \in \mathcal{O}$, $\mathcal{O}'$ est un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant $f(\mathcal{O})$ et $g : \mathcal{O}' \to \mathbb{C}$ est continue en $f(z_0)$, alors $g \circ f$ est continue en z_0.*

Exercice 19.13 *Montrer que si $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ est une fonction continue et $f : \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ une fonction continue, alors la fonction $z \mapsto \varphi(|f(z)|)$ est continue sur $\mathcal{O}$.*

Solution 19.13 *Soient $\varepsilon > 0$ et $z_0 \in \mathcal{O}$. Comme φ est continue en $|f(z_0)|$, il existe $\delta > 0$ tel que $|\varphi(t) - \varphi(|f(z_0)|)| < \varepsilon$ pour tout réel $t > 0$ tel que $|t - |f(z_0)|| < \delta$. En désignant par $\eta > 0$ un réel tel que $||f(z)| - |f(z_0)|| < \delta$ pour tout $z \in \mathcal{O}$ tel que $|z - z_0| < \eta$, on a $|\varphi(|f(z)|) - \varphi(|f(z_0)|)| < \varepsilon$ pour tout $z \in \mathcal{O}$ tel que $|z - z_0| < \eta$. La fonction $z \mapsto \varphi(|f(z)|)$ est donc continue en z_0.*

19.3 Intégrales curvilignes

Définition 19.7 *Un chemin dans $\mathbb{C}$ est une application $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, où $[a,b]$ est un segment réel non réduit à un point (on a donc $a < b$).*
Si $\gamma(a) = \gamma(b)$, on dit que ce chemin est fermé ou que c'est un lacet.
Si l'application γ est injective, on dit alors que le chemin est sans points doubles.

On rappelle qu'une fonction $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ est dite de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, s'il existe une subdivision

$$a_0 = a < a_1 < \cdots < a_p < a_{p+1} = b$$

telle que la fonction f se prolonge par continuité en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur chacun des intervalle $[a_k, a_{k+1}]$ $(0 \leq k \leq p)$.

Si $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ est un chemin, son image $\operatorname{Im}(\gamma) = \gamma([a,b])$ est le chemin géométrique qu'il définit et γ est une paramétrisation de $\operatorname{Im}(\gamma)$.

Si α, β sont deux nombres complexes, on dit qu'un chemin $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ relie α et β, si $\gamma(a) = \alpha$ et $\gamma(b) = \beta$. On dit alors, dans ce cas, que α est l'origine et β l'extrémité du chemin géométrique $\operatorname{Im}(\gamma)$.

Exemple 19.2 *Le cercle de centre ω et de rayon $R > 0$ parcouru une fois dans le sens direct peut être paramétré par :*

$$\begin{array}{rccc} \gamma_{\omega,R} : & [0, 2\pi] & \to & \mathbb{C} \\ & t & \mapsto & \omega + Re^{it} \end{array}$$

Ce lacet sera noté plus simplement : $|z - \omega| = r$.

Exemple 19.3 *Pour α, β dans $\mathbb{C}$, le segment $[\alpha, \beta]$ reliant α et β peut être paramétré par :*

$$\begin{array}{rccc} \gamma : & [0, 1] & \to & \mathbb{C} \\ & t & \mapsto & (1-t)\alpha + t\beta \end{array}$$

Si $\mathcal{O}$ est un ouvert non vide de $\mathbb{C}$, $f : \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ une fonction continue et $\gamma : [a,b] \to \mathcal{O}$ un chemin à valeurs dans $\mathcal{O}$, on peut définir l'intégrale de f le long de ce chemin en s'inspirant de la définition de l'intégrale de Riemann d'une fonction définie sur un segment réel et à valeurs complexes. Pour ce faire, on découpe, pour tout entier naturel $n \geq 1$, l'intervalle $[a,b]$ en n intervalles de même longueur en utilisant la subdivision $(t_{n,k})_{0 \leq k \leq n}$ définie par $t_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$ pour $0 \leq k \leq n$ et on associe à ces subdivisions la suite $(I_n)_{n \geq 1}$ définie par :

$$\forall n \geq 1,\ I_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(z_{n,k})(z_{n,k+1} - z_{n,k})$$

où $z_{n,k} = \gamma(t_{n,k})$. En écrivant que :

$$z_{n,k+1} - z_{n,k} = \gamma(t_{n,k+1}) - \gamma(t_{n,k}) = (t_{n,k+1} - t_{n,k})\gamma'(t_{n,k}) + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$\left(\gamma'(t_{n,k}) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\gamma(t_{n,k} + h) - \gamma(t_{n,k})}{h}\right.$ équivaut à $\gamma(t_{n,k} + h) - \gamma(t_{n,k}) = h\gamma'(t_{n,k}) + o(h)$ et ici $h = t_{n,k+1} - t_{n,k} = \dfrac{b-a}{n}$), on a :

$$I_n \approx \sum_{k=0}^{n-1} f(z_{n,k})(t_{n,k+1} - t_{n,k})\gamma'(t_{n,k})$$

et il est naturel de donner la définition suivante.

Définition 19.8 *Si $\mathcal{O}$ est un ouvert non vide de $\mathbb{C}$, $f : \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ une fonction continue et $\gamma : [a,b] \to \mathcal{O}$ un chemin à valeurs dans $\mathcal{O}$, alors l'intégrale curviligne de f le long de γ est le nombre complexe :*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt.$$

En notant :

$$a_0 = a < a_1 < \cdots < a_p < a_{p+1} = b$$

une subdivision telle que γ soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur chaque $[a_k, a_{k+1}]$ $(0 \leq k \leq p)$, on a précisément :

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{k=0}^{p} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$$

Pratiquement cette intégrale curviligne se calcule en posant $z = \gamma(t)$ et $dz = \gamma'(t)\,dt$ avec t parcourant $[a,b]$ pour z parcourant $\gamma([a,b])$.

Exercice 19.14 *Soient ω un nombre complexe et R un réel strictement positif. Calculer :*

$$I_n = \int_{|z-\omega|=R} (z-\omega)^n\,dz$$

pour tout entier relatif n.

Solution 19.14 *On a :*

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{2\pi} R^n e^{int} iRe^{it} dt = iR^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt \\ &= \begin{cases} 0 \ \text{si } n \neq -1 \\ 2i\pi \ \text{ si } n = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice 19.15 *Donner une paramétrisation γ du bord du rectangle R défini par :*

$$R = \{z \in \mathbb{C} \mid -a \leq \Re(z) \leq a,\ -b \leq \Im(z) \leq b\}$$

où a, b sont des réels strictement positifs. Calculer $\displaystyle\int_\gamma z^n dz$ pour tout entier relatif n.

Solution 19.15 *Une paramétrisation γ du bord de R est donnée par :*

$$\begin{array}{cccc} \gamma: & [0,4] & \to & \mathbb{C}^* \\ & t & \mapsto & \begin{cases} (2t-1)\,a - ib \ \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ a + ib\,(2t-3) \ \ \text{si } 1 \leq t \leq 2 \\ (5-2t)\,a + ib \ \text{si } 2 \leq t \leq 3 \\ -a + i\,(7-2t)\,b \ \text{si } 3 \leq t \leq 4 \end{cases} \end{array}$$

et pour f continue sur $\mathbb{C}^*$, on a :

$$\begin{aligned} \int_\gamma f(z)\,dz = 2a &\int_0^1 f((2t-1)\,a - ib)\,dt \\ &+ 2ib \int_1^2 f(a + ib\,(2t-3))\,dt \\ &- 2a \int_2^3 f((5-2t)\,a + ib)\,dt \\ &- 2ib \int_3^4 f(-a + i\,(7-2t)\,b)\,dt \end{aligned}$$

Le changement de variable $t \mapsto t-2$ dans la troisième et quatrième intégrale, nous donne :

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2a\int_0^1 \left(f\left((2t-1)a-ib\right) - f\left((1-2t)a+ib\right)\right)dt$$
$$+\,2ib\int_1^2 \left(f\left(a+ib(2t-3)\right) - f\left(-a+ib(3-2t)\right)\right)dt$$

Pour f paire, cela donne $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ et pour f impaire, on a :

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 4a\int_0^1 f\left((2t-1)a-ib\right)dt + 4ib\int_1^2 f\left(a+ib(2t-3)\right)dt$$

Pour $f(z) = z^{2n+1}$ avec n entier relatif différent de -1, on a :

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\,dz &= 4a\int_0^1 (2at-(a+ib))^{2n+1}\,dt + 4ib\int_1^2 (a-3ib+2ibt)^{2n+1}\,dt\\ &= \frac{1}{n+1}\left[(2at-(a+ib))^{2(n+1)}\right]_0^1 + \frac{1}{n+1}\left[(a-3ib+2ibt)^{2(n+1)}\right]_1^2\\ &= \frac{(a-ib)^{2(n+1)}-(a+ib)^{2(n+1)}}{n+1} + \frac{(a+ib)^{2(n+1)}-(a-ib)^{2(n+1)}}{n+1}\\ &= 0\end{aligned}$$

et pour $f(z) = \dfrac{1}{z}$, on a :

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{dz}{z} &= 4a\int_0^1 \frac{1}{(2t-1)a-ib}dt + 4ib\int_1^2 \frac{1}{a+(2t-3)ib}dt\\ &= 4a\int_0^1 \frac{(2t-1)a-ib}{(2t-1)^2+b^2}dt + 4ib\int_1^2 \frac{a-(2t-3)ib}{a^2+(2t-3)^2}dt\\ &= \cdots = 2i\pi.\end{aligned}$$

Nous verrons plus loin que ces résultats ne sont pas étonnant.

Exercice 19.16 *Calculer* $\displaystyle\int_{[1,2+i]} \frac{dz}{z}$.

Solution 19.16 *Si $[\alpha,\beta]$ est un segment dans $\mathbb{C}$ paramétré par :*

$$\gamma : t \in [0,1] \mapsto (1-t)\alpha + t\beta$$

on a, dans la cas où 0 n'est pas sur le segment $[\alpha,\beta]$:

$$\int_{[\alpha,\beta]} \frac{dz}{z} = \int_0^1 \frac{\beta-\alpha}{(1-t)\alpha+t\beta}dt = \int_0^1 \frac{\beta-\alpha}{(\beta-\alpha)t+\alpha}dt$$

ce qui donne pour $\alpha = 1$ et $\beta = 2+i$:

$$\begin{aligned}\int_{[1,2+i]} \frac{dz}{z} &= (1+i)\int_0^1 \frac{dt}{(1+i)t+1} = (1+i)\int_0^1 \frac{1+t-it}{2t^2+2t+1}dt\\ &= (1+i)\left(\int_0^1 \frac{1+t}{2t^2+2t+1}dt - i\int_0^1 \frac{t}{2t^2+2t+1}dt\right)\\ &= (1+i)\left(\frac{\ln(5)}{4} + \frac{\arctan(3)}{2} - \frac{\pi}{8} - i\left(\frac{\ln(5)}{4} - \frac{\arctan(3)}{2} + \frac{\pi}{8}\right)\right)\\ &= \frac{\ln(5)}{2} + i\left(\arctan(3) - \frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

Exercice 19.17 *Calculer* $\int_{|z|=1} f(z)\, dz$ *pour les fonctions suivantes :*

1. $f(z) = |z|^n$ *pour* $z \in \mathbb{C}^*$, *où* n *est un entier relatif.*
2. $f(z) = \Re(z^n) - \Im(z^n)$ *pour* $z \in \mathbb{C}^*$, *où* n *est un entier relatif.*

Solution 19.17 *Une paramétrisation du cercle de centre* 0 *et de rayon* 1 *parcouru une fois dans le sens direct est donné par l'application* γ *définie par :*

$$\forall t \in [0, 2\pi],\ \gamma(t) = e^{it}.$$

et on a $\int_{|z|=1} f(z)\, dz = \int_\gamma f(z)\, dz = \int_0^{2\pi} f(e^{it})\, ie^{it} dt.$

1. *Pour* $f(z) = |z|^n$, *on a :*

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_0^{2\pi} \left|e^{it}\right|^n ie^{it} dt = \int_0^{2\pi} ie^{it} dt = 0.$$

2. *Pour* $f(z) = \Re(z^n) - \Im(z^n)$, *on a :*

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\, dz &= \int_0^{2\pi} (\cos(nt) - \sin(nt))\,(i\cos(t) - \sin(t))\, dt \\ &= i\int_0^{2\pi} (\cos(nt) - \sin(nt))\cos(t)\, dt - \int_0^{2\pi} (\cos(nt) - \sin(nt))\sin(t)\, dt \\ &= i\int_0^{2\pi} \cos(nt)\cos(t)\, dt - \int_0^{2\pi} \sin(nt)\sin(t)\, dt\end{aligned}$$

puisque $\int_0^{2\pi} \cos(nt)\sin(mt)\, dt = 0$ *pour tous* n, m *dans* $\mathbb{Z}$. *Et avec* $\int_0^{2\pi} \cos(nt)\cos(mt)\, dt = 0$, $\int_0^{2\pi} \sin(nt)\sin(mt)\, dt = 0$ *pour* $n \neq m$ *et* $\int_0^{2\pi} \cos^2(nt)\, dt = \int_0^{2\pi} \sin^2(nt)\, dt = \pi$ *pour* $n \neq 0$, *on déduit que :*

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \begin{cases} 0 \text{ si } n \neq 1 \\ (-1+i)\,\pi \text{ si } n = 1 \end{cases}$$

Exercice 19.18 *Soit* f *définie par* $f(z) = z^2 - 1$ *pour tout* $z \in \mathbb{C}$. *Calculer* $\int_\gamma f(z)\, dz$ *pour les chemins suivants :*

1. $\gamma : t \in [0, 1] \mapsto t + it^2.$
2. $\gamma : t \in [0, 2\pi] \mapsto e^{t+it}.$
3. $\gamma : t \in [0, 2\pi] \mapsto \cos(t) + i\sin(2t)$.

Solution 19.18 *On a :*

1.

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)\,dz &= \int_0^1 \left(\left(t+it^2\right)^2-1\right)(1+2it)\,dt \\
&= \int_0^1 \left(t+it^2\right)^2(1+2it)\,dt - \int_0^1 (1+2it)\,dt \\
&= \left[\frac{\left(t+it^2\right)^3}{3} - \left(t+it^2\right)\right]_0^1 = \frac{(1+i)^3}{3} - (1+i) \\
&= -\frac{5}{3} - \frac{1}{3}i.
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)\,dz &= \int_0^{2\pi} \left(e^{2t+2it}-1\right)(1+i)\,e^{t+it}dt \\
&= \int_0^{2\pi} e^{3(1+i)t}(1+i)\,dt - \int_0^{2\pi} (1+i)\,e^{(1+i)t}dt \\
&= \left[\frac{e^{3(1+i)t}}{3} - e^{(1+i)t}\right]_0^{2\pi} = \frac{e^{6\pi}}{3} - e^{2\pi} + \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)\,dz &= \int_0^{2\pi} \left((\cos(t)+i\sin(2t))^2-1\right)(-\sin(t)+2i\cos(2t))\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} (\cos(t)+i\sin(2t))^2(-\sin(t)+2i\cos(2t))\,dt \\
&- \int_0^{2\pi} (-\sin(t)+2i\cos(2t))\,dt \\
&= \left[\frac{(\cos(t)+i\sin(2t))^3}{3} - (\cos(t)+i\sin(2t))\right]_0^{2\pi} = 0
\end{aligned}$$

Exercice 19.19 *Pour $r>0$, on désigne par γ_r le demi-cercle défini par :*

$$\gamma_r : t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \mapsto re^{it}.$$

Calculer $\displaystyle\lim_{r\to+\infty} \int_{\gamma_r} \frac{e^{-z}}{z^2}dz.$

Solution 19.19 *On a, pour $r>0$:*

$$\int_{\gamma_r} \frac{e^{-z}}{z^2}dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-re^{it}}}{r^2e^{2it}} ire^{it}dt = \frac{i}{r}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-re^{it}}e^{-it}dt$$

et :

$$\left|\int_{\gamma_r} \frac{e^{-z}}{z^2}dz\right| \leq \frac{1}{r}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-r\cos(t)}dt \leq \frac{1}{r}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{r} \underset{r\to+\infty}{\to} 0$$

et en conséquence $\displaystyle\lim_{r\to+\infty} \int_{\gamma_r} \frac{e^{-z}}{z^2}dz = 0.$

En utilisant les subdivisions précédentes de l'intervalle $[a, b]$, des approximations de la longueur du chemin γ sont données par :

$$\ell_n = \sum_{k=0}^{n-1} |z_{n,k+1} - z_{n,k}| \approx \sum_{k=0}^{n-1} (t_{n,k+1} - t_{n,k}) |\gamma' (t_{n,k})|$$

et il est naturel de définir la longueur de γ comme suit.

Définition 19.9 *Si $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ est un chemin, sa longueur est le réel positif :*

$$\ell (\gamma) = \int_a^b |\gamma' (t)| \, dt.$$

Exercice 19.20 *Calculer la longueur d'un cercle de centre $z_0 \in \mathbb{C}$ et de rayon $r > 0$ parcouru une fois dans le sens direct et la longueur d'un segment reliant deux nombres complexes α et β.*

Solution 19.20 *Pour le cercle paramétré par $\gamma_{z_0,r}$, on a :*

$$\ell (\gamma_{z_0,r}) = \int_0^{2\pi} \left| ire^{it} \right| dt = 2\pi r$$

et pour un segment $[\alpha, \beta]$:

$$\ell (\gamma) = \int_0^1 |\beta - a| \, dt = |\beta - a| .$$

Théorème 19.7 *Si $\mathcal{O}$ est un ouvert non vide de $\mathbb{C}$, $f : \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ une fonction continue et $\gamma : [a, b] \to \mathcal{O}$ un chemin à valeurs dans $\mathcal{O}$, on a alors :*

$$\left| \int_\gamma f (z) \, dz \right| \leq \ell (\gamma) \cdot \sup_{z \in \mathrm{Im}(\gamma)} |f (z)| .$$

Démonstration. Comme γ est continue, $\mathrm{Im} (\gamma)$ est compact dans $\mathbb{C}$ comme image du compact $[a, b]$ par l'application continue γ et la fonction f qui est continue est bornée sur le compact $\mathrm{Im} (\gamma)$, ce qui valide l'existence de $\sup\limits_{z \in \mathrm{Im}(\gamma)} |f (z)|$.

On a alors, par définitions :

$$\begin{aligned} \left| \int_\gamma f (z) \, dz \right| &= \left| \int_a^b f (\gamma (t)) \gamma' (t) \, dt \right| \leq \int_a^b |f (\gamma (t))| \, |\gamma' (t)| \, dt \\ &\leq \sup_{z \in \mathrm{Im}(\gamma)} |f (z)| \int_a^b |\gamma' (t)| \, dt = \ell (\gamma) \cdot \sup_{z \in \mathrm{Im}(\gamma)} |f (z)| . \end{aligned}$$

■

La notion d'ouvert connexe dans $\mathbb{C}$ peut se définir en utilisant les chemins.

Définition 19.10 *On dit qu'un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{C}$ est connexe si deux points quelconques de $\mathcal{O}$ peuvent être joints par un chemin dans $\mathcal{O}$ (i. e. pour α, β dans $\mathcal{O}$, il existe un chemin $\gamma : [0, 1] \to \mathcal{O}$ tel que $\gamma (0) = \alpha$ et $\gamma (1b) = \beta$).*

En réalité, on dit usuellement qu'une partie $\mathcal{C}$ de $\mathbb{C}$ est connexe s'il n'est pas possible de l'écrire comme réunion disjointe de deux ouverts non vides de $\mathcal{C}$ (un ouvert de $\mathcal{C}$ étant un ensemble $\mathcal{C} \cap \mathcal{O}$, où $\mathcal{O}$ est un ouvert de $\mathbb{C}$) et on montre qu'un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ est connexe si, et seulement si, il est connexe par arcs, c'est-à-dire que deux points quelconques de $\mathcal{C}$ peuvent être reliés par un chemin dans $\mathcal{C}$.

La définition d'ouvert connexe que nous avons donné nous suffira.

19.4 Fonctions analytiques

Pour ce paragraphe, $\mathcal{O}$ est un ouvert non vide de $\mathbb{C}$, f une application de $\mathcal{O}$ dans $\mathbb{C}$ et z_0 un point de $\mathcal{O}$.

Définition 19.11 *On dit que f est analytique en z_0 s'il existe un réel $r > 0$ (dépendant de z_0) tel que $D(z_0, r) \subset \mathcal{O}$ et une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes tels que :*

$$\forall z \in D(z_0, r), \ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

On dit aussi que f est analytique en z_0 si elle est développable en série entière au voisinage de z_0.

On peut remarquer que $a_0 = f(z_0)$.

Avec les notations de la définition précédente la série entière $\sum a_n t^n$ a un rayon de convergence $R_0 \geq r$.

Dire que f est analytique en z_0 équivaut à dire que la fonction $f_{z_0} : t \mapsto f(z_0 + t)$, qui est définie sur le disque ouvert $D(0, r)$, est développable en série entière au voisinage de 0.

Définition 19.12 *On dit que f est analytique sur $\mathcal{O}$ si elle est analytique en tout point de $\mathcal{O}$.*

Du théorème 14.11 sur la continuité des fonctions développables en série entière au voisinage de 0, on déduit le suivant.

Théorème 19.8 *Toute fonction analytique sur $\mathcal{O}$ est continue sur cet ouvert.*

Démonstration. Pour $z_0 \in \mathcal{O}$ la fonction $f_{z_0} : t \mapsto f(z_0 + t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$, qui est définie dans un voisinage de 0, est continue en 0, ce qui revient à dire que f est continue en z_0. ■

De cette continuité, on déduit que le développement en série entière au voisinage de z_0 est unique.

Exercice 19.21 *Montrer que toute fonction polynomiale est analytique sur $\mathbb{C}$.*

Solution 19.21 *Comme pour tout nombre complexe z_0 la famille $\left((z - z_0)^k\right)_{0\leq k\leq n}$ est une base de $\mathbb{C}_n[z]$, toute fonction polynomiale $P \in \mathbb{C}_n[z]$ s'écrit de manière unique $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k (z - z_0)^k$ et en conséquence est analytique en z_0 (on a $a_{n+k} = 0$ pour tout $k \geq 0$).*

Exercice 19.22 *Montrer que la fonction $f : z \mapsto \dfrac{1}{1 - z}$ est analytique sur $D(0, 1)$.*

Solution 19.22 *On sait déjà que cette fonction est développable en série entière en 0 avec, pour tout $z \in D(0, 1)$, $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$.*

Pour $z_0 \in D(0, 1)$ et $z \in D(z_0, 1 - |z_0|) \subset D(0, 1)$ (faire un dessin), on a :

$$f(z) = \frac{1}{1 - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{1 - z_0}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(1 - z_0)^{n+1}}$$

et f est analytique en z_0.

Au paragraphe 15.2 nous avons défini la fonction exponentielle complexe par $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ pour tout nombre complexe z. On note aussi $\exp(z)$ pour e^z.

Exercice 19.23 *Montrer que la fonction exponentielle complexe est analytique sur $\mathbb{C}$.*

Solution 19.23 *En utilisant l'équation fonctionnelle vérifiée par la fonction exponentielle (théorème 15.2), on a pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$:*

$$e^z = e^{z_0} e^{z-z_0} = e^{z_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-z_0)^n}{n!}$$

et f est analytique en z_0.

Nous verrons un peu plus loin que si f est une fonction développable en série entière sur un disque ouvert $D(0,R)$ de centre 0 et de rayon $R > 0$, elle est alors analytique sur ce disque.

En utilisant les résultats relatifs aux opérations sur les fonctions développables en série entière au voisinage de 0 (théorèmes 14.8 et 14.9), on déduit le suivant.

Théorème 19.9 *La somme et le produit de deux fonctions analytiques sur $\mathcal{O}$ est analytique sur $\mathcal{O}$.*
Plus précisément si $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$ et $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z-z_0)^n$ pour $z \in D(z_0, r) \subset \mathcal{O}$, on a alors $f(z) + g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n)(z-z_0)^n$ et $f(z)g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n$ avec $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

Exercice 19.24 *Montrer que les fonctions $f : z \mapsto \cos(z)$, $z \mapsto \sin(z)$, $z \mapsto \operatorname{ch}(z)$ et $z \mapsto \operatorname{sh}(z)$ sont analytiques sur $\mathbb{C}$.*

Solution 19.24 *Ce sont des combinaisons linéaires de la fonction exponentielle.*

Exercice 19.25 *Montrer qu'une fonction rationnelle est analytique sur son domaine de définition.*

Solution 19.25 *Sachant qu'une fonction polynomiale est analytique et en utilisant le théorème de décomposition en éléments simples, il suffit de montrer le résultat pour les fonctions rationnelles de la forme $z \mapsto \frac{1}{(z-a)^m}$ où a est un nombre complexe et m un entier naturel non nul.*
Pour $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$ et $z \in D(z_0, |z_0 - a|) \subset \mathbb{C} \setminus \{a\}$, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(z-a)^m} &= \frac{1}{(z-z_0+z_0-a)^m} \\
&= \frac{1}{(z_0-a)^m} \frac{1}{\left(1 - \frac{z-z_0}{a-z_0}\right)^m} = \frac{1}{(z_0-a)^m} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n
\end{aligned}$$

sachant que la fonction $t \mapsto \frac{1}{(1-t)^m}$ est développable en série entière sur $D(0,1)$.
Si maintenant f est une fonction rationnelle, le théorème de décomposition en élément simples

nous dit qu'elle s'écrit $f = P + \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \frac{1}{(z-a_k)^{m_k}}$ *où* P *est une fonction polynomiale, les* α_k *sont des nombres complexes et les* m_k *des entiers naturels non nuls. La fonction* P *étant analytique sur* $\mathbb{C}$ *et les fonctions* $z \mapsto \frac{1}{(z-a_k)^{m_k}}$ *analytiques sur* $\mathbb{C} \backslash \{a_k\}$ *, on en déduit que* f *est analytique sur l'intersection de ces ensembles, soit sur* $\mathbb{C} \setminus \{a_1, \cdots, a_p\}$ *qui est le domaine de définition de* f*.*

Remarque 19.3 *Montrer que le quotient ou la composée de deux fonctions analytiques est analytique sur son domaine de définition est assez délicat. Nous obtiendrons ces résultats comme conséquences d'un résultat élémentaire relatif au quotient ou à la composée de deux fonctions* $\mathbb{C}$*-dérivables après avoir défini cette notion et montré qu'elle est équivalente à l'analyticité.*

19.5 La dérivation complexe. Fonctions holomorphes

Pour ce paragraphe, $\mathcal{O}$ est un ouvert non vide de $\mathbb{C}$, f une application de $\mathcal{O}$ dans $\mathbb{C}$ et z_0 un point de $\mathcal{O}$.

La notion de dérivabilité pour une fonction d'une variable complexe et à valeurs complexes se défini comme dans le cas réel.

Définition 19.13 *On dit que* f *est dérivable en* z_0 *si la fonction* $z \mapsto \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ *définie sur* $\mathcal{O} \setminus \{z_0\}$ *admet une limite en* z_0*.*

Quand cette limite existe, elle est unique, on la note $f'(z_0)$ et on dit que c'est le nombre dérivé de f en z_0.

De manière équivalente, on peut dire que f est dérivable en z_0 si, et seulement si, elle admet le développement limité d'ordre 1 en z_0 :

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + |z - z_0| \varepsilon(z) \tag{19.1}$$

où $\lim_{z \to z_0} \varepsilon(z) = 0$.

Définition 19.14 *On dit que* f *est holomorphe (ou* $\mathbb{C}$*-dérivable) sur* $\mathcal{O}$ *si elle est dérivable en tout point de* $\mathcal{O}$*.*

Si f est une fonction holomorphe sur $\mathcal{O}$, la fonction $z \mapsto f'(z)$ est la fonction dérivée de f.

Si f est holomorphe sur $\mathcal{O}$ avec f' également holomorphe, la dérivée de f' est notée f''. Par récurrence, on peut définir les dérivées d'ordre n notées $f^{(n)}$ comme dans le cas réel. Nous verrons plus loin qu'une fonction holomorphe est en fait toujours indéfiniment dérivable (ce qui est faux pour les fonctions d'une variable réelle).

Exemple 19.4 *Il est facile de vérifier qu'une fonction constante sur* $\mathcal{O}$ *est holomorphe de dérivée nulle en tout point.*

Exercice 19.26 *Les fonctions* $z \mapsto \overline{z}$, $z \mapsto \Re(z)$, $z \mapsto \Im(z)$, $z \mapsto |z|^2$, $z \mapsto |z|$ *sont-elles holomorphes sur* $\mathbb{C}$ *?*

Solution 19.26 *Pour $z \neq z_0$, on a en utilisant la représentation polaire $z - z_0 = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$:*

$$\frac{\overline{z} - \overline{z_0}}{z - z_0} = \frac{\overline{z - z_0}}{z - z_0} = e^{-2i\theta} \underset{\rho \to 0}{\to} e^{-2i\theta}$$

et en conséquence $\dfrac{\overline{z} - \overline{z_0}}{z - z_0}$ n'a pas de limite quand z tend vers z_0 dans $\mathbb{C}$ (par exemple, pour $\theta = 0$ et $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, on a deux limites différentes, ce qui n'est pas possible).
L'étude des autres fonctions sont laissées au lecteur.

Remarque 19.4 *Les fonctions $z \mapsto \overline{z}$, $z \mapsto \Re(z)$, $z \mapsto \Im(z)$, $z \mapsto |z|^2$ nous fournissent des exemples de fonctions indéfiniment dérivables vues comme fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ et non dérivables au sens complexe. La fonction $z \mapsto |z|^2$ est uniquement dérivable en 0 avec une dérivée nulle ($\dfrac{|z|^2}{z} = \overline{z} \underset{z \to 0}{\to} 0$).*

Exercice 19.27 *Montrer que pour tout entier naturel n, la fonction $f : z \mapsto z^n$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ avec $f'(z) = nz^{n-1}$ pour tout $n \geq 1$ et tout $z \in \mathbb{C}$.*

Solution 19.27 *Pour $n = 0$, f est constante égale à 1 et elle holomorphe de dérivée nulle.*
Pour $n = 1$, de $\dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = 1$, on déduit que f est holomorphe sur $\mathbb{C}$ avec $f'(z_0) = 1$ pour tout z_0.
Pour $n \geq 2$, de :

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k} z_0^k \underset{z \to z_0}{\to} n z_0^{n-1}$$

(continuité sur $\mathbb{C}$ des fonctions $z \mapsto z^p$ pour tout entier naturel p), on déduit que f est holomorphe sur $\mathbb{C}$ avec $f'(z_0) = nz_0^{n-1}$ pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$.

Exercice 19.28 *Montrer que pour tout entier naturel non nul n, la fonction $f : z \mapsto \dfrac{1}{z^n}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$ avec $f'(z) = -\dfrac{n}{z^{n+1}}$ pour tout $z \in \mathbb{C}^*$.*

Solution 19.28 *De :*

$$\begin{aligned}\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \frac{z_0^n - z^n}{z^n z_0^n (z - z_0)} = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{z^{n-1-k} z_0^k}{z^n z_0^n} \\ &= -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{z^{k+1} z_0^{n-k}} \underset{z \to z_0}{\to} -\frac{n}{z_0^{n+1}}\end{aligned}$$

(continuité sur $\mathbb{C}^*$ des fonctions $z \mapsto \dfrac{1}{z^p}$ pour tout entier naturel non nul p), on déduit que f est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$ avec $f'(z_0) = -\dfrac{n}{z_0^{n+1}}$ pour tout $z_0 \in \mathbb{C}^*$.

De la définition du nombre dérivé on déduit facilement le résultat suivant.

Théorème 19.10 *Si f est dérivable en z_0 elle est alors continue en ce point.*

Démonstration. Se déduit immédiatement de (19.1) . ■

La réciproque de ce résultat est fausse comme le montre l'exemple de la fonction $z \mapsto \overline{z}$.

Le résultat de l'exercice qui suit nous sera utile pour montrer qu'une fonction de dérivée nulle sur un ouvert connexe est constante.

Exercice 19.29 *Soient $f : \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ holomorphe, $[a, b]$ un segment réel non réduit à un point et $\gamma : [a, b] \to \mathcal{O}$ une fonction dérivable. Montrer que la fonction $f \circ \gamma$ est dérivable sur $[a, b]$ avec $(f \circ \gamma)'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t)$.*

Solution 19.29 *Pour $t \neq t_0$ dans $[a, b]$, on a :*

$$\begin{aligned}\frac{(f \circ \gamma)(t) - (f \circ \gamma)(t_0)}{t - t_0} &= \frac{f(\gamma(t)) - f(\gamma(t_0))}{t - t_0} \\ &= \frac{f'(\gamma(t_0))(\gamma(t) - \gamma(t_0)) + |\gamma(t) - \gamma(t_0)| \varepsilon(\gamma(t))}{t - t_0} \\ &= f'(\gamma(t_0)) \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} + \delta(t)\end{aligned}$$

avec $\dfrac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} \underset{t \to t_0}{\to} \gamma'(t_0)$ *et :*

$$|\delta(t)| = \frac{|\gamma(t) - \gamma(t_0)|}{|t - t_0|} |\varepsilon(\gamma(t))| \underset{t \to t_0}{\to} |\gamma'(t_0)| \cdot 0 = 0$$

(γ qui est dérivable est continue, donc $\lim\limits_{t \to t_0} \gamma(t) = \gamma(t_0)$ et $\lim\limits_{t \to t_0} \varepsilon(\gamma(t))$).

Dans le cas des fonctions d'une variable réelle, on sait qu'une fonction définie sur un intervalle et à valeurs réelles ou complexes est constante si, et seulement si, elle est dérivable de dérivée nulle.

Dans le cas complexe, on vérifie facilement qu'une fonction constante est holomorphe de dérivée nulle et pour la réciproque, on a le résultat suivant.

Théorème 19.11 *Soient $\mathcal{O}$ un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f : \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Si $f' = 0$, alors f est constante.*

Démonstration. Soient a, b dans $\mathcal{O}$. Comme $\mathcal{O}$ est un ouvert connexe, il existe un arc affine par morceaux et continu $\gamma : [0, 1] \to \mathcal{O}$ qui joint a et b. Un tel chemin est défini par une subdivision $t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_p < t_{p+1} = 1$ et pour $0 \leq k \leq p$, $t \in [t_k, t_{k+1}]$:

$$\gamma(t) = \frac{t_{k+1} - t}{t_{k+1} - t_k} a_k + \frac{t - t_k}{t_{k+1} - t_k} a_{k+1}$$

où les $a_k = \gamma(t_k)$ sont dans $\mathcal{O}$ avec $a_0 = a$, $a_{p+1} = b$.

Les fonctions $\varphi_k : t \mapsto f(\gamma(t))$ sont alors dérivables sur $[t_k, t_{k+1}]$ avec :

$$\varphi_k'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t) = 0$$

et en conséquence φ_k est constante sur $[t_k, t_{k+1}]$. On a donc $f(a_k) = f(a_{k+1})$ pour tout k compris entre 0 et p et $f(a) = f(b)$. La fonction f est donc constante. ■

De manière plus générale si $f' = 0$ pour $f : \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ holomorphe, la fonction f est constante sur chaque composante connexe de l'ouvert $\mathcal{O}$.

Comme dans le cas des fonctions d'une variable réelle, on a les résultats suivants relatifs aux opérations algébriques sur les fonctions holomorphes, les démonstrations étant analogues.

Théorème 19.12 *Soient f, g deux fonctions holomorphes sur $\mathcal{O}$.*

1. *Pour tous nombres complexes λ, μ la fonction $\lambda f + \mu g$ est holomorphe sur $\mathcal{O}$ avec :*
$$(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'.$$
2. *La fonction fg est holomorphe sur $\mathcal{O}$ avec :*
$$(fg)' = f'g + fg'$$
(formule de Leibniz).
3. *Si $g(z_0) \neq 0$, alors la fonction g ne s'annule pas dans un voisinage de z_0, les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ qui sont définies dans un tel voisinage sont dérivables en z_0 avec :*
$$\left(\frac{1}{g}\right)'(z_0) = -\frac{g'(z_0)}{g^2(z_0)}, \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{g(z_0) f'(z_0) - f(z_0) g'(z_0)}{g^2(z_0)}.$$

Démonstration. On copie la démonstration du cas réel. ■

La formule de Leibniz se généralise, par récurrence sur $n \geq 2$ en :
$$(f_1 f_2 \cdots f_n)' = f_1' f_2 \cdots f_n + f_1 f_2' f_3 \cdots f_n + \cdots + f_1' \cdots f_{n-1} f_n'$$
les f_k, pour k compris entre 1 et n étant des fonctions holomorphes sur $\mathcal{O}$.

Dans le cas où toutes les f_k sont égales à une même fonction f, on a :
$$(f^n)' = n f^{n-1} f'.$$

Exercice 19.30 *Montrer qu'une fonction polynomiale est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et qu'une fonction rationnelle $f = \frac{P}{Q}$, où P et Q sont des polynômes avec Q non nul, est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid Q(z) = 0\}$.*

Solution 19.30 *C'est clair puisque les fonctions $z \mapsto 1$ et $z \mapsto z$ sont holomorphe sur $\mathbb{C}$.*

Pour la composition des applications, on a le résultat suivant.

Théorème 19.13 *Si $f : \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ est holomorphe sur $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}'$ est un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant $f(\mathcal{O})$ et $g : \mathcal{O}' \to \mathbb{C}$ est holomorphe sur $\mathcal{O}'$, alors $g \circ f$ est holomorphe sur $\mathcal{O}$ avec $(g \circ f)' = (g' \circ f) f'$.*

Démonstration. On copie la démonstration du cas réel. ■

Définition 19.15 *On appelle fonction entière, toute fonction qui est holomorphe sur $\mathbb{C}$.*

Exercice 19.31 *Montrer que la fonction exponentielle complexe est une fonction entière avec* $\exp'(z) = \exp(z)$ *pour tout $z \in \mathbb{C}$.*

Solution 19.31 *Pour $z \neq z_0$, on a :*
$$\begin{aligned}\frac{e^z - e^{z_0}}{z - z_0} - e^{z_0} &= e^{z_0} \frac{e^{z-z_0} - 1}{z - z_0} = e^{z_0} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(z - z_0)^{n-1}}{n!} - e^{z_0} \\ &= e^{z_0} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(z - z_0)^{n-1}}{n!}\end{aligned}$$

et :

$$\left|\frac{e^z - e^{z_0}}{z - z_0} - e^{z_0}\right| = |e^{z_0}|\,|z - z_0| \left|\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(z - z_0)^{n-2}}{n!}\right|$$
$$\leq |e^{z_0}|\,|z - z_0| \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{|z - z_0|^{n-2}}{(n-2)!} = |e^{z_0}|\,|z - z_0|\, e^{|z-z_0|}$$

et $\lim\limits_{z \to z_0} = \dfrac{e^z - e^{z_0}}{z - z_0} - e^{z_0} = 0$, *ce qui signifie que* $\exp$ *est dérivable en* z_0 *avec* $\exp'(z_0) = \exp(z_0)$.

De cet exercice, on déduit que les fonctions cos, sin, ch et sh sont des fonctions entières avec pour tout $z \in \mathbb{C}$: $\cos'(z) = -\sin(z)$, $\sin'(z) = \cos(z)$, $\mathrm{ch}'(z) = \mathrm{sh}(z)$ et $\mathrm{sh}'(z) = \mathrm{ch}(z)$.

La fonction tan est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ avec $\tan'(z) = \dfrac{1}{\cos^2(z)} = 1 + \tan^2(z)$ et la fonction th est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \left\{k\pi + i\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ avec $\mathrm{th}'(z) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2(z)} = 1 - \mathrm{th}^2(z)$.

19.6 Les conditions de Cauchy-Riemann

$\mathcal{O}$ désigne encore un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ et f une application de $\mathcal{O}$ dans $\mathbb{C}$.

On rappelle que si Ω est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$, on dit qu'une fonction $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^2$ est différentiable en $(x_0, y_0) \in \Omega$ s'il existe un application linéaire $d\varphi(x_0, y_0)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que pour tout $(x, y) \in \Omega$ on ait :

$$\varphi(x, y) = \varphi(x_0, y_0) + d\varphi(x_0, y_0)(x - x_0, y - y_0) + \|(x - x_0, y - y_0)\|\, \varepsilon(x, y) \tag{19.2}$$

où $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \varepsilon(x, y) = 0$. Si $\varphi = (P, Q)$, où P et Q sont à valeurs réelles, alors la matrice de l'application linéaire $d\varphi(x_0, y_0)$ (la différentielle de φ en (x_0, y_0)) est :

$$J\varphi(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

(matrice jacobienne de φ en (x_0, y_0)).

En notant respectivement P et Q la partie réelle et la partie imaginaire de f, on a le résultat suivant, où $\varphi : (x, y) \mapsto (P(x, y), Q(x, y))$ est la représentation réelle de f.

Théorème 19.14 *La fonction f est holomorphe sur $\mathcal{O}$ si, et seulement si, la fonction φ est différentiable (au sens réel) sur Ω avec pour tout $(x, y) \in \Omega$:*

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) \end{cases}$$

(conditions de Cauchy-Riemann).

Démonstration. Supposons f holomorphe sur $\mathcal{O}$. Pour $z_0 \in \mathcal{O}$, on note $f'(z_0) = a + ib$ avec a, b réels. De (19.1), on déduit avec les notations qui précèdent que :

$$\begin{aligned}\varphi(x, y) = \varphi(x_0, y_0) &+ (a(x - x_0) - b(y - y_0), a(y - y_0) + b(x - x_0)) \\ &+ \|(x - x_0, y - y_0)\|\, \varepsilon(x, y)\end{aligned}$$

ce qui signifie que φ est différentiable en (x_0, y_0) de matrice jacobienne :

$$J\varphi(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

et on a les conditions de Cauchy-Riemann.

Réciproquement si φ est différentiable en (x_0, y_0), les conditions de Cauchy-Riemann étant remplies, l'expression complexe de (19.2) est :

$$f(z) = f(z_0) + \left(\frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0)\right)(z - z_0) + |z - z_0|\,\varepsilon(z)$$

et :

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0)$$

ce qui signifie que f est holomorphe en z_0 de dérivée :

$$f'(z_0) = \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0)$$

■

Remarque 19.5 *Les conditions de Cauchy-Riemann se traduisent en disant que pour f holomorphe, la différentielle $d\varphi$ est $\mathbb{C}$-linéaire.*

Remarque 19.6 *En notant $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} + i\frac{\partial Q}{\partial y}$, nous avons vu avec la démonstration précédente que $f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x}(z)$ et les conditions de Cauchy-Riemann se traduisent par :*

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(z) = f'(z) &= \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) - i\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \\ &= -i\left(\frac{\partial P}{\partial y} + i\frac{\partial Q}{\partial y}\right) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(z) \end{aligned}$$

ou encore par :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(z) = f'(z).$$

Exercice 19.32 *En utilisant les conditions de Cauchy-Riemann, montrer que les fonctions $z \mapsto \overline{z}$, $z \mapsto \Re(z)$, $z \mapsto \Im(z)$, $z \mapsto |z|^2$, $z \mapsto |z|$, $z \mapsto e^{\overline{z}}$ ne sont pas holomorphes sur $\mathbb{C}$.*

Solution 19.32 *Pour $f : z \mapsto \overline{z}$, on a $f = P + iQ$ avec $P(x, y) = x$, $Q(x, y) = -y$ et $\frac{\partial P}{\partial x}(x, y) = 1 \neq \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) = -1$. Cette fonction f n'est donc pas holomorphe. On montre de manière analogue que les autres fonctions ne sont pas holomorphes.*

Exercice 19.33 *La fonction f définie sur $\mathbb{C}$ par $f(z) = f(x + iy) = x^2y + iy$ est-elle holomorphe ?*

Solution 19.33 *On a* $f = P + iQ$ *avec* $P(x, y) = x^2 y$ *et* $Q(x, y) = y$. *Comme :*

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x, y) = 2xy \neq \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) = 1$$

pour z *dans* $\mathbb{C}$ *privé de l'hyperbole* $\mathcal{H}$ *d'équation* $2xy = 1$ *et :*

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = x^2 \neq -\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = 0$$

pour les points de $\mathcal{H}$, *la fonction n'est pas holomorphe sur* $\mathbb{C}$.

Exercice 19.34 *Montrer que si* f *est une fonction holomorphe sur un ouvert connexe* $\mathcal{O}$ *de* $\mathbb{C}$ *et à valeurs réelles, elle est alors nécessairement constante.*

Solution 19.34 *En gardant la notation* $f = P + iQ$ *avec* P, Q *à valeurs réelles, on a* $Q = 0$ *pour* f *à valeurs réelles et des conditions de Cauchy Riemann, on déduit que* $\dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y} = 0$ *sur* Ω *et en conséquence* $f'(z) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(z) = 0$ *ce qui équivaut à dire que* f *est constante sur l'ouvert connexe* $\mathcal{O}$.

Exercice 19.35 *Soit* $f = P + iQ$ *une fonction holomorphe sur un ouvert connexe* $\mathcal{O}$ *de* $\mathbb{C}$, *où* P *et* Q *sont respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de* f. *Montrer que s'il existe des réel* a, b *tels que* $P + aQ + b = 0$ *sur* $\mathcal{O}$, *alors* f *est constante.*

Solution 19.35 *Si* $a = 0$, P *est constante et on a ,* $\dfrac{\partial P}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = -\dfrac{\partial P}{\partial y} = 0$, *soit* $f'(z) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(z) = 0$ *et* f *est constante sur l'ouvert connexe* $\mathcal{O}$.
On suppose maintenant que $a \neq 0$. *De* $P+aQ+b = 0$, *on déduit que* $\dfrac{\partial P}{\partial x}+a\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}+a\dfrac{\partial Q}{\partial y} = 0$ *et donc* $\dfrac{\partial P}{\partial x} = -a\dfrac{\partial Q}{\partial x} = a\dfrac{\partial P}{\partial y}$, $\dfrac{\partial P}{\partial y} = -a\dfrac{\partial Q}{\partial y} = -a\dfrac{\partial P}{\partial x}$, *ce qui donne* $\dfrac{\partial P}{\partial x} = -a^2\dfrac{\partial P}{\partial x}$, *soit* $(1 + a^2)\dfrac{\partial P}{\partial x} = 0$, *donc* $\dfrac{\partial P}{\partial x} = 0$ *et* $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = -\dfrac{1}{a}\dfrac{\partial P}{\partial x} = 0$, *ce qui entraîne* $f'(z) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(z) = 0$ *et* f *est constante sur l'ouvert connexe* $\mathcal{O}$.

Exercice 19.36 *Connaissant les fonctions de la variable réelle* exp, sin *et* cos, *on peut définir la fonction* $x \mapsto e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$ *sur* $\mathbb{R}$ *et la fonction exponentielle complexe par* $z = x+iy \mapsto \exp(z) = e^x e^{iy}$ *sur* $\mathbb{C}$. *Montrer, avec cette définition, que cette fonction est holomorphe sur* $\mathbb{C}$ *avec* $\exp' = \exp$.

Solution 19.36 *On a* $\exp(z) = P(z) + iQ(z)$ *avec* $P(z) = e^x \cos(y)$ *et* $Q(z) = e^x \sin(y)$. *Les fonctions* P *et* Q *sont différentiables sur* $\mathbb{R}^2$ *et on a :*

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) = e^x \cos(y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = -e^x \sin(y) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) \end{cases}$$

et donc exp *est holomorphe sur* $\mathbb{C}$. *Et pour tout complexe* z, *on a :*

$$\begin{aligned} \exp'(z) &= \frac{\partial \exp}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) \\ &= e^x \cos(y) + ie^x \sin(y) = \exp(z). \end{aligned}$$

Exercice 19.37 *On a défini la détermination principale du logarithme complexe par :*

$$\begin{array}{rccl} \ln : & \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^- & \to & \mathbb{C} \\ & z = x + iy & \mapsto & \ln(|z|) + i \arg(z) = \ln(|z|) + 2i \arctan\left(\frac{y}{x+|z|}\right) \end{array}$$

(paragraphe 15.8). Montrer que cette fonction est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ avec $\ln'(z) = \dfrac{1}{z}$ pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$.

Solution 19.37 *On rappelle que si θ est la détermination de $\arg(z)$ dans $]-\pi, \pi[$, on a $x = |z| \cos(\theta) = |z| \left(2\cos^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right) - 1\right)$, $y = |z| \sin(\theta) = |z|\, 2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ et*

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{y}{2|z|\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} \frac{2|z|\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{x+|z|} = \frac{y}{x+|z|}$$

avec $\dfrac{\theta}{2} \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

En notant $z = x + iy$, on a $f(z) = P(z) + iQ(z)$ avec $P(z) = \ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ et $Q(z) = 2\arctan\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right)$. Les fonctions P et Q sont différentiables sur $\mathbb{R}^2$ et on a :

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}, \ \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$$

et :

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) &= 2\frac{\frac{x+\sqrt{x^2+y^2}-y\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}}{1+\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2} = 2\frac{x\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}\left(\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)^2+y^2\right)} \\ &= \frac{x\sqrt{x^2+y^2}+x^2}{\sqrt{x^2+y^2}\left(x^2+y^2+x\sqrt{x^2+y^2}\right)} \\ &= \frac{x\left(\sqrt{x^2+y^2}+x\right)}{(x^2+y^2)\left(\sqrt{x^2+y^2}+x\right)} = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) &= 2\frac{\frac{-y\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)}{\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}}{1+\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2} = -2\frac{y\left(\sqrt{x^2+y^2}+x\right)}{\sqrt{x^2+y^2}\left(\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)^2+y^2\right)} \\ &= -\frac{y\left(\sqrt{x^2+y^2}+x\right)}{\sqrt{x^2+y^2}\left(x^2+y^2+x\sqrt{x^2+y^2}\right)} \\ &= -\frac{y\left(\sqrt{x^2+y^2}+x\right)}{(x^2+y^2)\left(\sqrt{x^2+y^2}+x\right)} = -\frac{y}{x^2+y^2} = \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \end{aligned}$$

Les conditions de Cauchy-Riemann étant satisfaites, la fonction $\ln$ *est holomorphe sur* $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ *avec :*

$$\begin{aligned} \ln'(z) &= \frac{\partial \ln}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) \\ &= \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{1}{z}. \end{aligned}$$

Exercice 19.38 *Soient* $\mathcal{O}$ *un ouvert de* $\mathbb{C}^*$ *et* $f = P + iQ : \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ *où* P *et* Q *sont à valeurs réelles. En utilisant l'écriture polaire des nombres complexes,* $z = re^{it}$*, on peut écrire* $P(z) = P(r,t)$ *et* $Q(z) = Q(r,t)$. *Montrer que* f *est holomorphe sur* $\mathcal{O}$ *si, et seulement si, les fonctions* P *et* Q *sont différentiables avec* $\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial Q}{\partial t}$ *et* $\frac{\partial Q}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial t}$ *(expression polaire des conditions de Cauchy-Riemann).*

Solution 19.38 *L'écriture* $z = re^{it}$ *se traduit par* $x = r\cos(t)$, $y = r\sin(t)$. *Si* f *est holomorphe sur* $\mathcal{O}$, *les fonctions* P *et* Q *sont différentiables sur* Ω *et on a :*

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial r} &= \frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \cos(t)\frac{\partial P}{\partial x} + \sin(t)\frac{\partial P}{\partial y} \\ &= \cos(t)\frac{\partial Q}{\partial y} - \sin(t)\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}\right) \\ &= \frac{1}{r}\frac{\partial Q}{\partial t} \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial r} &= \cos(t)\frac{\partial Q}{\partial x} + \sin(t)\frac{\partial Q}{\partial y} \\ &= -\cos(t)\frac{\partial P}{\partial y} + \sin(t)\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{1}{r}\left(\frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}\right) \\ &= -\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial t} \end{aligned}$$

Réciproquement si les fonctions P *et* Q *sont différentiables avec* $\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial Q}{\partial t}$ *et* $\frac{\partial Q}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial t}$, *de :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial r} = \cos(t)\frac{\partial P}{\partial x} + \sin(t)\frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial t} = -r\sin(t)\frac{\partial P}{\partial x} + r\cos(t)\frac{\partial P}{\partial y} \end{array} \right.$$

on déduit que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial x} = \cos(t)\frac{\partial P}{\partial r} - \frac{\sin(t)}{r}\frac{\partial P}{\partial t} \\ \frac{\partial P}{\partial y} = \sin(t)\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\cos(t)}{r}\frac{\partial P}{\partial t} \end{array} \right.$$

et :

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} &= \frac{\cos(t)}{r}\frac{\partial Q}{\partial t} + \sin(t)\frac{\partial Q}{\partial r} = \frac{\partial Q}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\sin(t)}{r}\frac{\partial Q}{\partial t} - \cos(t)\frac{\partial Q}{\partial r} = -\frac{\partial Q}{\partial x} \end{aligned}$$

ce qui signifie que f *est holomorphe sur* $\mathcal{O}$.

Exercice 19.39 *Soit* $P : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}$ *définie par* $P(z) = P(x+iy) = \dfrac{x}{|z|^2}$. *Déterminer, si elles existent, toutes les fonctions* $Q : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}$ *telles que* $f = P + iQ$ *soit holomorphe sur* $\mathbb{C}^*$.

Solution 19.39 *La fonction* $P : (x,y) \mapsto \dfrac{x}{x^2+y^2}$ *est différentiable sur* $\mathbb{C}^*$ *identifié à* $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. *Si* $f = P + iQ$ *est holomorphe sur* $\mathbb{C}^*$, *la fonction* Q *est alors différentiable sur* $\mathbb{C}^*$ *avec :*

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = -\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \end{cases}$$

De la deuxième équation, on déduit que $Q(x,y) = -\dfrac{y}{x^2+y^2} + \varphi(y)$, *où* φ *est différentiable sur* $\mathbb{R}$ *et avec la première, on déduit que* $\varphi'(y) = 0$. *On a donc* $Q(x,y) = -\dfrac{y}{x^2+y^2} + c = -\dfrac{y}{|z|^2} + c$, *où* c *est une constante réelle et* $f(z) = \dfrac{x-iy}{x^2+y^2} + ic = \dfrac{1}{z} + ic$.

Exercice 19.40 *Soit* $Q : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ *définie par* $Q(z) = Q(x+iy) = \cos(x)\operatorname{sh}(y)$. *Déterminer, si elles existent, toutes les fonctions* $P : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ *telles que* $f = P + iQ$ *soit holomorphe sur* $\mathbb{C}$.

Solution 19.40 *La fonction* $Q : (x,y) \mapsto \cos(x)\operatorname{sh}(y)$ *est différentiable sur* $\mathbb{C}$ *identifié à* $\mathbb{R}^2$. *Si* $f = P + iQ$ *est holomorphe sur* $\mathbb{C}$, *la fonction* P *est alors différentiable sur* $\mathbb{C}$ *avec :*

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) = \cos(x)\operatorname{ch}(y) \\ \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \sin(x)\operatorname{sh}(y) \end{cases}$$

De la première équation, on déduit que $P(x,y) = \sin(x)\operatorname{ch}(y) + \varphi(y)$, *où* φ *est différentiable sur* $\mathbb{R}$ *et avec la deuxième, on déduit que* $\varphi'(y) = 0$. *On a donc* $P(x,y) = \sin(x)\operatorname{ch}(y) + c$, *où* c *est une constante réelle et :*

$$\begin{aligned} f(z) &= \sin(x)\operatorname{ch}(y) + i\cos(x)\operatorname{sh}(y) + c \\ &= \sin(x)\cos(iy) - \cos(x)\sin(iy) + c \\ &= \sin(x+iy) + c = \sin(z) + c. \end{aligned}$$

Exercice 19.41 *Soit* $P : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ *définie par* $P(z) = P(x+iy) = |z|^2$. *Montrer qu'il n'est pas possible de trouver* $Q : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ *telle que* $f = P + iQ$ *soit holomorphe sur* $\mathbb{C}$ *(il n'existe pas de fonction holomorphe sur* $\mathbb{C}$ *de partie réelle* $|z|^2$*).*

Solution 19.41 *Les conditions de Cauchy-Riemann s'écrivent :*

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = 2x \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = -\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -2y \end{cases}$$

ce qui donne $Q(x,y) = -2xy + \varphi(y)$ *et* $-2x + \varphi'(y) = 2x$, *donc* $\varphi'(y) = 4x$, *ce qui est impossible (sans quoi, pour* y *fixé,* $\varphi'(y)$ *prend une infinité de valeurs).*

19.7 Fonctions harmoniques

Définition 19.16 *Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$. On dit qu'une fonction $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ est harmonique sur Ω si elle est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω avec :*

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(x,y) = 0$$

pour tout $(x,y) \in \Omega$.

L'opérateur différentiel $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ est noté Δ et appelé laplacien.

Théorème 19.15 *Si $f = P + iQ$ est une fonction holomorphe sur l'ouvert $\mathcal{O}$ avec P et Q de classe $\mathcal{C}^2$ et à valeurs réelles, alors les fonctions P et Q sont harmoniques sur $\mathcal{O}$.*

Démonstration. En utilisant les conditions de Cauchy-Riemann et le théorème de Schwarz pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) \\ &= \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial x} = 0\end{aligned}$$

et P est harmonique sur $\mathcal{O}$.

De manière analogue, on vérifie que Q est harmonique sur $\mathcal{O}$. ■

Remarque 19.7 *Nous verrons plus loin qu'une fonction holomorphe est en fait indéfiniment dérivable et l'hypothèse P et Q de classe $\mathcal{C}^2$ est automatiquement vérifiée.*

Exemple 19.5 *La fonction $P : (x,y) \mapsto x^2 + y^2$ n'étant pas harmonique ($\Delta P = 4 \neq 0$), il ne peut pas exister de fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ de partie réelle $x^2 + y^2 = |z|^2$.*

Exercice 19.42 *Soit $f = P + iQ$ une fonction holomorphe sur l'ouvert $\mathcal{O}$ ne s'annulant pas, où P et Q sont de classe $\mathcal{C}^2$ et à valeurs réelles. Montrer que la fonction $\ln(|f|)$ est harmonique.*

Solution 19.42 *On a $\varphi = \ln(|f|) = \dfrac{1}{2}\ln(P^2 + Q^2)$ et :*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{P\frac{\partial P}{\partial x} + Q\frac{\partial Q}{\partial x}}{P^2 + Q^2}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= \frac{(P^2+Q^2)\left(\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + P\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)^2 + Q\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\right) - 2\left(P\frac{\partial P}{\partial x} + Q\frac{\partial Q}{\partial x}\right)^2}{(P^2+Q^2)^2} \\ &= \frac{(P^2+Q^2)\left(\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + P\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)^2 + Q\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\right) - 2\left(P\frac{\partial P}{\partial x} + Q\frac{\partial Q}{\partial x}\right)^2}{(P^2+Q^2)^2} \\ &= \frac{\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + P\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)^2 + Q\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}}{P^2+Q^2} - 2\left(\frac{P\frac{\partial P}{\partial x} + Q\frac{\partial Q}{\partial x}}{P^2+Q^2}\right)^2\end{aligned}$$

Utilisant une formule analogue pour $\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$, *on obtient :*

$$\begin{aligned}
\Delta\varphi &= \frac{\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2 + P\Delta P + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)^2 + Q\Delta Q}{P^2+Q^2} \\
&\quad - 2\left(\frac{P\frac{\partial P}{\partial x} + Q\frac{\partial Q}{\partial x}}{P^2+Q^2}\right)^2 - 2\left(\frac{P\frac{\partial P}{\partial y} + Q\frac{\partial Q}{\partial y}}{P^2+Q^2}\right)^2 \\
&= 2\frac{\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2}{P^2+Q^2} - 2\frac{\left(P\frac{\partial P}{\partial x} - Q\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2 + \left(P\frac{\partial P}{\partial y} + Q\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2}{\left(P^2+Q^2\right)^2} \\
&= 2\frac{\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2}{P^2+Q^2} - 2\frac{P^2\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + Q^2\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2 + P^2\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2 + Q^2\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2}{\left(P^2+Q^2\right)^2} \\
&= 2\frac{\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2}{P^2+Q^2} - 2\frac{\left(P^2+Q^2\right)\left(\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2\right)}{\left(P^2+Q^2\right)^2} = 0.
\end{aligned}$$

Remarque 19.8 *L'exercice précédant peut se résoudre facilement en remarquant que l'hypothèse* $f(z) \neq 0$ *pour tout* $z \in \mathcal{O}$ *permet de définir localement des déterminations holomorphes de* $\ln(f)$ *et* $\ln(|f|)$ *est harmonique comme partie réelle d'une telle détermination.*

Le théorème précédent admet une réciproque qui peut s'énoncer comme suit, en prenant pour l'instant, comme définition intuitive d'un ouvert simplement connexe, un ouvert non vide, connexe et « sans trous ».

Théorème 19.16 *Si* $\mathcal{O}$ *est un ouvert simplement connexe et* $P : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ *une fonction harmonique, il existe alors des fonctions holomorphes sur* $\mathcal{O}$ *de partie réelle* P.

Démonstration. Admis. ■

De telles fonctions s'écrivent $f = P + iQ$, où $Q : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ s'obtient en résolvant le système défini par les conditions de Cauchy-Riemann.

Exercice 19.43 *Soit* $P : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ *définie par* $P(z) = x^2 - y^2 - 2xy - 2x + 3y$. *Déterminer toutes les fonctions* $Q : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ *telles que* $f = P + iQ$ *soit holomorphe sur* $\mathbb{C}$.

Solution 19.43 *On a* $\Delta P = 0$, *donc* P *est harmonique et on peut trouver* Q.
Les conditions de Cauchy-Riemann donnent :

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = 2x - 2y - 2 \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = -\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 2y + 2x - 3 \end{cases}$$

De la deuxième équation, on déduit que $Q(x,y) = 2xy + x^2 - 3x + \varphi(y)$, *où* φ *est différentiable sur* $\mathbb{R}$ *et avec la première, on déduit que* $\varphi'(y) = -2y - 2$. *On a donc* $Q(x,y) = 2xy + x^2 - 3x - y^2 - 2y + c$, *où* c *est une constante réelle et :*

$$\begin{aligned}
f(z) &= x^2 - y^2 - 2xy - 2x + 3y + i\left(2xy + x^2 - 3x - y^2 - 2y\right) + ic \\
&= (x+iy)^2 + i(x+iy)^2 - 2(x+iy) - 3i(x+iy) + ic \\
&= (1+i)z^2 - (2+3i)z + ic
\end{aligned}$$

Exercice 19.44 *Montrer que si $P : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ est une fonction harmonique de classe $\mathcal{C}^3$, alors la fonction $\varphi = x\dfrac{\partial P}{\partial x} + y\dfrac{\partial P}{\partial y}$ est aussi harmonique.*

Solution 19.44 *On a :*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x} + x\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right) + y\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right) \\ &= 2\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right) + y\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right)\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = x\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} + \frac{\partial P}{\partial y} + y\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 2\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}\right) + y\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}\right)$$

et :

$$\Delta\varphi = 2\Delta P + x\frac{\partial}{\partial x}(\Delta P) + y\frac{\partial}{\partial y}(\Delta P) = 0$$

ce qui signifie que φ est harmonique.

Remarque 19.9 *Si dans l'exercice précédant, $\mathcal{O}$ est un ouvert simplement connexe, alors P est la partie réelle d'une fonction holomorphe et en conséquence, elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Dans ce cas , l'hypothèse P de classe $\mathcal{C}^3$ est superflue.*
En remarquant que :

$$f' = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x} - i\frac{\partial P}{\partial y}$$

et :

$$zf' = (x+iy)\left(\frac{\partial P}{\partial x} - i\frac{\partial P}{\partial y}\right) = x\frac{\partial P}{\partial x} + y\frac{\partial P}{\partial y} + i\left(y\frac{\partial P}{\partial x} - x\frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

on déduit que $x\dfrac{\partial P}{\partial x} + y\dfrac{\partial P}{\partial y}$ et $y\dfrac{\partial P}{\partial x} - x\dfrac{\partial P}{\partial y}$ sont harmoniques comme partie réelle et imaginaire de la fonction holomorphe zf'.

19.8 Equivalence entre analyticité et holomorphie

Nous avons vu qu'une fonction de la variable réelle développable en série entière au voisinage de 0 est indéfiniment dérivable (corollaire 14.6). Maintenant que nous avons donné un sens à la notion de dérivation complexe nous allons montrer que ce résultat est encore valable pour les fonctions d'une variable complexe.

Le fait qu'une fonction analytique en z_0 est holomorphe en ce point est élémentaire.

Théorème 19.17 *Une fonction analytique sur un ouvert non vide $\mathcal{O}$ de $\mathbb{C}$ est holomorphe sur cet ouvert.*

Démonstration. Pour $z_0 \in \mathcal{O}$, il existe $r > 0$ tel que $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ pour $z \in D(z_0, r) \subset \mathcal{O}$ et pour $z \neq z_0$ dans $D(z_0, r)$, on a :

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1} (z - z_0)^n = g(z)$$

avec $\lim\limits_{z \to z_0} g(z) = g(z_0) = a_1$ puisque la fonction g est continue en z_0 (la série entière $\sum a_{n+1} t^n$ qui a même rayon de convergence que $\sum a_n t^n$ est continue sur $D(0, r)$, donc en 0). La fonction f est donc dérivable en z_0 de dérivée $f'(z_0) = a_1$. ∎

De manière, plus précise, on peut montrer que la dérivée d'une fonction analytique sur $\mathcal{O}$ est elle même analytique sur cet ouvert et donc holomorphe. Après avoir montré l'équivalence entre analyticité et holomorphie, on déduira qu'une fonction $\mathbb{C}$-dérivable est indéfiniment $\mathbb{C}$-dérivable (ce résultat étant faux pour les fonctions d'une variable réelle).

Théorème 19.18 *Si f une est fonction analytique sur un ouvert non vide $\mathcal{O}$ de $\mathbb{C}$, elle est alors holomorphe de dérivée f' analytique. Si $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ pour $z \in D(z_0, r) \subset \mathcal{O}$, on a alors $f'(z) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$ pour tout $z \in D(z_0, r)$.*

Démonstration. Sachant qu'une série et sa série dérivée ont même rayon de convergence, on peut définir la fonction g sur $D(z_0, r)$ par :

$$\forall z \in D(z_0, r), \ g(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}.$$

Soient $z \in D(z_0, r)$, $\rho > 0$ tel que $|z - z_0| < \rho < r$ et $h \in D(0, \rho - |z - z_0|) \setminus \{0\}$ (figure 19.2). On a $|z + h - z_0| \leq |z - z_0| + |h| < |z - z_0| + \rho - |z - z_0| < \rho$ et :

FIGURE 19.2 –

$$\begin{aligned}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}-g(z)&=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\frac{(z+h-z_0)^n-(z-z_0)^n}{h}-\sum_{n=1}^{+\infty}na_n(z-z_0)^{n-1}\\&=\sum_{n=1}^{+\infty}a_nP_n(z,h)\end{aligned}$$

où on a posé pour $n\geq 1$:

$$\begin{aligned}P_n(z,h)&=\frac{(z+h-z_0)^n-(z-z_0)^n}{h}-n(z-z_0)^{n-1}\\&=\sum_{k=0}^{n-1}(z+h-z_0)^{n-1-k}(z-z_0)^k-n(z-z_0)^{n-1}\end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned}|P_n(z,h)|&\leq\sum_{k=0}^{n-1}|z+h-z_0|^{n-1-k}|z-z_0|^k+n|z-z_0|^{n-1}\\&\leq\sum_{k=0}^{n-1}\rho^{n-1-k}\rho^k+n\rho^{n-1}=2n\rho^{n-1}\end{aligned}$$

la série $\sum na_{n-1}\rho^{n-1}$ étant convergente.

Pour $\varepsilon>0$ donné, on peut donc trouver un entier naturel $n_\varepsilon\geq 1$ tel que :

$$\forall n\geq n_\varepsilon,\ \sum_{k=n+1}^{+\infty}ka_{k-1}\rho^{k-1}<\varepsilon$$

et un réel $\rho_1\in\left]0,\rho-|z-z_0|\right[$ tel que pour $|h|<\rho_1$, on ait :

$$\left|\sum_{k=1}^{n_\varepsilon}a_kP_k(z,h)\right|<\varepsilon$$

(on a $\lim\limits_{h\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n_\varepsilon}a_kP_k(z,h)=0$), ce qui donne pour $|h|<\rho_1$:

$$\left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h}-g(z)\right|<3\varepsilon$$

On a donc ainsi montré que $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z+h)-f(z)}{h}=g(z)$, ce qui signifie que f est $\mathbb{C}$-dérivable en z de dérivée $g(z)$.

La fonction f est donc holomorphe sur $\mathcal{O}$ de dérivée f analytique sur cet ouvert, donc également holomorphe. ■

On a aussi montré avec ce théorème qu'une fonction développable en série entière au voisinage d'un point z_0 est holomorphe dans ce voisinage.

Par récurrence, on déduit le résultat suivant.

Corollaire 19.1 *Si f est une fonction analytique sur un ouvert non vide $\mathcal{O}$ de $\mathbb{C}$, elle est alors indéfiniment $\mathbb{C}$-dérivable sur $\mathcal{O}$ et si $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n$ pour $z\in D(z_0,r)\subset\mathcal{O}$, on a pour tout entier $p\geq 1$, $f^{(p)}(z)=\sum\limits_{n=p}^{+\infty}\dfrac{n!}{(n-p)!}a_n(z-z_0)^{n-p}$ pour tout $z\in D(z_0,r)$.*

Avec les notations du corollaire, on a $f^{(p)}(z_0) = p!a_p$, soit $a_p = \dfrac{f^{(p)}(z_0)}{p!}$ pour tout $p \geq 0$.

Exemple 19.6 *En utilisant ce théorème, on voit que la fonction exponentielle complexe est holomorphe sur $\mathbb{C}$ avec, pour tout $z \in \mathbb{C}$:*

$$\begin{aligned} \exp'(z) &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{nz^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \exp(z) \end{aligned}$$

Exercice 19.45 *En utilisant le fait que la fonction* exp *est holomorphe avec* $\exp' = \exp$, *montrer que* $\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$ *pour tous nombres complexes a et b.*

Solution 19.45 *On définit la fonction f par $f(z) = e^{-z}e^{z+c}$, où c est une constante complexe. Cette fonction est holomorphe sur $\mathbb{C}$ comme produit de deux fonctions holomorphes avec $f'(z) = -e^{-z}e^{z+c} + e^{-z}e^{z+c} = 0$, elle est donc constante égale à $f(0) = e^c$. Prenant $z = -a$ et $c = a+b$, on en déduit que $e^{a+b} = e^a e^b$.*

Le théorème de Cauchy qui suit nous dit que réciproquement toute fonction holomorphe sur $\mathcal{O}$ est analytique sur cet ouvert.

Pour montrer ce théorème, on admet temporairement le résultat suivant.

Théorème 19.19 *Si f est une fonction holomorphe sur un ouvert non vide $\mathcal{O}$ de $\mathbb{C}$, sa dérivée f' est alors une fonction continue sur $\mathcal{O}$.*

Théorème 19.20 (Cauchy) *Soient f une fonction holomorphe sur un ouvert non vide $\mathcal{O}$ de $\mathbb{C}$, z_0 un point de $\mathcal{O}$ et $R > 0$ le plus grand réel (éventuellement égal à $+\infty$) tel que $D(z_0, R) \subset \mathcal{O}$.*
Pour tout entier naturel n, le nombre complexe :

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{|u-z_0|=r} \frac{f(u)}{(u-z_0)^{n+1}} du = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + re^{it}\right) e^{-int} dt$$

est indépendant du réel $r \in \left]0, R\right[$ et pour tout $z \in D(z_0, R)$, on a :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Démonstration. Soient $z \in D(z_0, R)$ et $r > 0$ tel que $|z - z_0| < r < R$. On associe à ces quantités la fonction φ définie sur $[0, 1]$ par :

$$\begin{aligned} \varphi(\theta) &= \int_{|u-z_0|=r} \frac{f((1-\theta)z + \theta u)}{u - z} du \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{f\left((1-\theta)z + \theta\left(z_0 + re^{it}\right)\right)}{z_0 + re^{it} - z} ire^{it} dt \end{aligned}$$

(pour $u = z_0 + re^{it}$ sur le cercle de centre z_0 et de rayon r, le point $(1-\theta)z + \theta u$ est sur le segment $[z, u] \subset D(z_0, R)$).

La fonction intégrée est continûment différentiable en $(\theta, t) \in [0,1] \times [0,2\pi]$ puisque f est continûment différentiable (vue comme une application d'un ouvert de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$) et en conséquence φ est continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1[$ avec :

$$\begin{aligned}\varphi'(\theta) &= \int_0^{2\pi} f'\left((1-\theta)z + \theta\left(z_0 + re^{it}\right)\right) ire^{it} dt \\ &= \left[\frac{1}{\theta} f\left((1-\theta)z + \theta\left(z_0 + re^{it}\right)\right)\right]_{t=0}^{t=2\pi} = 0\end{aligned}$$

par 2π-périodicité de la fonction $t \mapsto f\left((1-\theta)z + \theta\left(z_0 + re^{it}\right)\right)$. La fonction φ est donc constante sur $]0,1[$ et sur $[0,1]$ par continuité. On a donc :

$$\varphi(1) = \int_0^{2\pi} \frac{f\left(z_0 + re^{it}\right)}{z_0 + re^{it} - z} ire^{it} dt = \varphi(0) = f(z) \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{z_0 + re^{it} - z} dt$$

soit :

$$f(z) \int_0^{2\pi} \frac{re^{it}}{z_0 + re^{it} - z} dt = \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + re^{it}\right) \frac{re^{it}}{z_0 + re^{it} - z} dt$$

ou encore :

$$f(z) \int_{|u-z_0|=r} \frac{du}{u-z} = \int_{|u-z_0|=r} \frac{f(u)}{u-z} du. \tag{19.3}$$

Tenant compte de $|z - z_0| < r = |re^{it}|$, on peut écrire que :

$$\frac{re^{it}}{z_0 + re^{it} - z} = \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{re^{it}}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-z_0)^n}{r^n e^{int}}$$

la convergence étant uniforme quand t décrit $[0,2\pi]$, ce qui donne :

$$\int_0^{2\pi} \frac{re^{it}}{z_0 + re^{it} - z} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-z_0)^n}{r^n} \int_0^{2\pi} e^{-int} dt = 2\pi.$$

Comme la fonction $t \mapsto f\left(z_0 + re^{it}\right)$ est bornée sur $[0,2\pi]$ (puisque continue), on peut aussi écrire :

$$\int_0^{2\pi} f\left(z_0 + re^{it}\right) \frac{re^{it}}{z_0 + re^{it} - z} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-z_0)^n}{r^n} \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + re^{it}\right) e^{-int} dt$$

et on a en définitive :

$$2\pi f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-z_0)^n}{r^n} \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + re^{it}\right) e^{-int} dt$$

soit $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$ avec :

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + re^{it}\right) e^{-int} dt = \frac{1}{2i\pi} \int_{|u-z_0|=r} \frac{f(u)}{(u-z_0)^{n+1}} du.$$

Il reste à vérifier que ces coefficients a_n sont indépendants du réel $r \in]0,R[$. En effet pour r, r' dans $]0,R[$, on peut trouver $z \in D(z_0,R)$ tel que $|z-z_0| < r$ et $|z-z_0| < r'$ et on a alors deux développements en série entière $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$ et $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a'_n (z-z_0)^n$ avec $a_n = \frac{1}{2i\pi}\int_{|u-z_0|=r} \frac{f(u)}{(u-z_0)^{n+1}}du$ et $a'_n = \frac{1}{2i\pi}\int_{|u-z_0|=r'} \frac{f(u)}{(u-z_0)^{n+1}}du$, et un tel développement est unique, on a nécessairement $a_n = a'_n$ pour tout $n \geq 0$. ■

Le théorème précédent nous dit qu'une fonction holomorphe est analytique et on a ainsi montré l'équivalence entre les deux notions.

Avec ce théorème, on a aussi montré le résultat suivant.

Théorème 19.21 (Cauchy) *Soient f une fonction holomorphe sur un ouvert non vide $\mathcal{O}$ de $\mathbb{C}$, z_0 un point de $\mathcal{O}$ et $R > 0$ le plus grand réel (éventuellement égal à $+\infty$) tel que $D(z_0, R) \subset \mathcal{O}$.*
Pour $0 < r < R$ et $z \in D(z_0, r)$, on a :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{|u-z_0|=r} \frac{f(u)}{u-z}du$$

(formule de Cauchy).

Démonstration. Tenant compte de

$$\int_{|u-z_0|=r} \frac{du}{u-z} = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{z_0 + re^{it} - z}dt = 2i\pi,$$

la formule (19.3) nous donne :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{|u-z_0|=r} \frac{f(u)}{u-z}du$$

■

Remarque 19.10 *Le corollaire 19.1 nous dit que les coefficients a_n du développement en série entière au voisinage de z_0 sont donnés par $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ et avec l'expression intégrale de ces coefficients a_n,, on déduit que :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2i\pi}\int_{|u-z_0|=r} \frac{f(u)}{(u-z_0)^{n+1}}du$$

En définitives la connaissance de f sur le disque de centre z_0 et de rayon $r \in]0, R[$ suffit pour déterminer $f(z)$ pour tout $z \in D(z_0, r)$ et toutes les dérivées $f^{(n)}(z_0)$.

Remarque 19.11 *Comme la composée de deux fonctions holomorphes est holomorphe, on déduit que la composée de deux fonctions analytiques est analytique.*

Exercice 19.46 *Soit f une fonction développable en série entière sur un disque $D(0, R)$ où $0 < R \leq +\infty$ ($R = +\infty$ signifie que $D(0, R) = \mathbb{C}$) avec $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ pour tout $z \in D(0, R)$.*
Montrer que la fonction g définie par $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$ est holomorphe sur $D(0, R)$.

Solution 19.46 *On a $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{a_n} z^n$ pour tout $z \in D(0, R)$ et g est holomorphe sur $D(0, R)$ puisque développable en série entière sur $D(0, R)$.*

Exercice 19.47 *On désigne par* ln *la détermination principale du logarithme complexe sur* $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$. *Montrer que :*

$$\forall z \in D(0,1), \ \ln(1+z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$$

Solution 19.47 *Le rayon de convergence de la série entière* $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$ *vaut* 1 *(théorème de d'Alembert), donc la fonction* f *définie par* $f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n$ *sur* $D(0,1)$ *est analytique et en conséquence holomorphe avec* $f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} z^{n-1} = \frac{1}{1+z}$. *Mais la fonction* $z \mapsto \ln(1+z)$ *est également holomorphe sur* $D(0,1)$ *(composée de fonctions holomorphes) avec* $\ln'(1+z) = \frac{1}{1+z}$, *il en résulte que* $f(z) = \ln(1+z) + c$, *où* c *est une constante (le disque ouvert* $D(0,1)$ *est connexe). Faisant* $z = 0$, *on a* $c = 0$ *et* $f(z) = \ln(1+z)$.

Corollaire 19.2 (Inégalités de Cauchy) *En gardant les hypothèses et notations du théorème 19.20, on a pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *:*

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right| = \frac{n!}{r^n} \sup_{|z-z_0|=r} |f(z)|.$$

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned}
\left|f^{(n)}(z_0)\right| &= \left|\frac{n!}{2i\pi} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz\right| \\
&= \frac{n!}{2\pi r^n} \left|\int_0^{2\pi} f\left(z_0 + re^{it}\right) e^{-int} dt\right| \\
&\leq \frac{n!}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} \left|f\left(z_0 + re^{it}\right)\right| dt \leq \frac{n!}{r^n} \sup_{|z-z_0|=r} |f(z)|.
\end{aligned}$$

■

Remarque 19.12 *En remarquant que la fonction* $t \mapsto f\left(z_0 + re^{it}\right)$ *est* 2π*-périodique et de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}$ *avec des coefficients de Fourier donnés par :*

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \ c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + re^{it}\right) e^{-int} dt$$

la formule de Parseval nous donne :

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|f\left(z_0 + re^{it}\right)\right|^2 dt$$

En écrivant que

$$f\left(z_0 + re^{it}\right) = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m \left(z_0 + re^{it} - z_0\right)^m = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} r^m e^{imt}$$

la série étant uniformément convergente en $t \in [0, 2\pi]$, on a pour $n \in \mathbb{Z}$:

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} r^m \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)t} dt = \begin{cases} 0 \text{ si } n < 0 \\ \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!} r^n \text{ si } n \geq 0 \end{cases}$$

et la formule de Parseval s'écrit alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \right|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f\left(z_0 + re^{it}\right) \right|^2 dt$$

Il en résulte que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \right|^2 r^{2n} \leq \sup_{|z-z_0|=r} |f(z)|^2 = \left(\sup_{|z-z_0|=r} |f(z)| \right)^2$$

et on retrouve les inégalités de Cauchy :

$$\left| \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \right| r^n \leq \sup_{|z-z_0|=r} |f(z)|.$$

Remarque 19.13 *En gardant toujours les même notations, la fonction $g : z \mapsto (z - z_0) f(z)$ est holomorphe sur $\mathcal{O}$ et :*

$$0 = g(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|z-z_0|=r} \frac{g(z)}{(z-z_0)} dz = \frac{1}{2i\pi} \int_{|z-z_0|=r} f(z)\, dz$$

et donc $\displaystyle\int_{|z-z_0|=r} f(z)\, dz = 0$ pour tout $z_0 \in \mathcal{O}$ et $r > 0$ tel que $D(z_0, r) \subset \mathcal{O}$.

19.9 Primitives des fonctions holomorphes

$\mathcal{O}$ désigne toujours un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ et f une application de $\mathcal{O}$ dans $\mathbb{C}$.

Définition 19.17 *Soit f une fonction holomorphe de $\mathcal{O}$ dans $\mathbb{C}$. On appelle primitive de f, tout fonction F holomorphe de $\mathcal{O}$ dans $\mathbb{C}$ telle que $F' = f$.*

Du théorème 19.11, on déduit que si l'ouvert $\mathcal{O}$ est connexe et si $f : \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ est holomorphe et admet des primitives, alors deux primitives de f sur $\mathcal{O}$ différent d'une constante.

Théorème 19.22 *Si F est une primitive de la fonction holomorphe $f : \mathcal{O} \to \mathbb{C}$, on a alors pour tout chemin $\gamma : [a, b] \to \mathcal{O}$:*

$$\int_\gamma f(z)\, dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned} \int_\gamma f(z)\, dz &= \int_\gamma F'(z)\, dz = \int_a^b F'(\gamma(t))\, \gamma'(t)\, dt \\ &= \int_a^b (F \circ \gamma)'(t)\, dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) \end{aligned}$$

■

Dans le cas particulier, où est un lacet, on a $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$, si f admet des primitives sur $\mathcal{O}$.

L'exercice 19.18 se résout très simplement en remarquant que la fonction f définie sur $\mathbb{C}$ par $f(z) = z^2 - 1$ admet pour primitive la fonction F définie par $F(z) = \frac{z^3}{3} - z$. Ce qui donne :

— pour $\gamma : t \in [0,1] \mapsto t + it^2$:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)) = \frac{(1+i)^3}{3} - (1+i) = -\frac{5}{3} - \frac{1}{3}i$$

— pour $\gamma : t \in [0, 2\pi] \mapsto e^{t+it}$:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F(\gamma(2\pi)) - F(\gamma(0)) = \frac{e^{6\pi}}{3} - e^{2\pi} - \left(\frac{1}{3} - 1\right)$$

— pour $\gamma : t \in [0, 2\pi] \mapsto \cos(t) + i\sin(2t)$:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F(\gamma(2\pi)) - F(\gamma(0)) = 0.$$

Remarque 19.14 *Comme* $\int_{|z|=1} \frac{dz}{z} = 2i\pi \neq 0$, *on déduit que la fonction* $z \mapsto \frac{1}{z}$ *n'admet pas de primitive sur* $\mathbb{C}^*$. *Il n'est donc pas possible de définir une fonction logarithme comme primitive de* $z \mapsto \frac{1}{z}$ *sur* $\mathbb{C}^*$.

Définition 19.18 *On dit que l'ouvert* $\mathcal{O}$ *est étoilé par rapport à l'un de ses points, s'il existe* $a \in \mathcal{O}$ *tel que pour tout* $z \in \mathcal{O}$, *le segment* $[a, z]$ *est tout entier contenu dans* $\mathcal{O}$.

Remarque 19.15 *Un ouvert étoilé par rapport à l'un de ses points est connexe.*

Exemple 19.7 $\mathbb{C}^*$ *n'est pas étoilé.*

Exercice 19.48 *Montrer qu'un disque ouvert* $D(z_0, R)$ *est étoilé par rapport à tous ses points.*

Solution 19.48 *Laissée au lecteur.*

Exercice 19.49 *Montrer que l'ouvert* $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ *est étoilé par rapport à tous les points de* $\mathbb{R}^{+,*}$.

Solution 19.49 *Laissée au lecteur.*

Théorème 19.23 *Si* $\mathcal{O}$ *est un ouvert étoilé par rapport à l'un de ses points, alors toute fonction holomorphe* $f : \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ *admet des primitives sur* $\mathcal{O}$.

Démonstration. Supposons l'ouvert $\mathcal{O}$ étoilé par rapport à $a \in \mathcal{O}$. Si $f : \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ admet une primitive F sur $\mathcal{O}$, on a alors pour tout $z \in \mathcal{O}$:

$$\int_{[a,z]} f(u)\,du = \int_{[a,z]} F'(u)\,du = F(z) - F(a).$$

On définit donc naturellement la fonction F par :

$$\forall z \in \mathcal{O},\ F(z) = \int_{[a,z]} f(u)\,du = (z-a)\int_0^1 f(a+t(z-a))\,dt.$$

Comme f est holomorphe, elle est indéfiniment différentiable $\mathcal{O}$, vue comme une fonction de deux variables réelles et il en est de même de la fonction F avec :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x}(z) &= \int_0^1 f(a+t(z-a))\,dt + (z-a)\int_0^1 f'(a+t(z-a))\cdot t dt \\
&= \int_0^1 \left(f(a+t(z-a)) + t\cdot(z-a) f'(a+t(z-a))\right)dt \\
&= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\left(t\cdot f(a+t(z-a))\right)dt \\
&= \left[t\cdot f(a+t(z-a))\right]_{t=0}^{t=1} = f(z)
\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial y}(z) &= i\int_0^1 f(a+t(z-a))\,dt + (z-a)\int_0^1 f'(a+t(z-a))\cdot itdt \\
&= i\int_0^1 \left(f(a+t(z-a)) + t\cdot(z-a) f'(a+t(z-a))\right)dt \\
&= i\int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\left(t\cdot f(a+t(z-a))\right)dt \\
&= i\left[t\cdot f(a+t(z-a))\right]_{t=0}^{t=1} = if(z)
\end{aligned}$$

On a donc $\dfrac{\partial F}{\partial x}(z) = f(z) = -i\dfrac{\partial F}{\partial y}(z)$ et F est holomorphe sur $\mathcal{O}$ de dérivée f (conditions de Cauchy-Riemann). ■

Exercice 19.50 *Soit F la fonction holomorphe définie sur sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-$ par :*

$$F(z) = \int_{[1,z]} \frac{du}{u}$$

1. *Montrer que :*

$$\forall z = x+iy \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-,\ F(z) = \ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) + 2i\arctan\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

2. *Montrer, par un calcul direct de $\displaystyle\int_{[1,z]} \frac{du}{u}$ que :*

$$\forall z = x+iy \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-,\ F(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$$

avec :

$$P(x,y) = \ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

et :

$$Q(x,y) = \int_0^1 \frac{y}{\left((x-1)^2+y^2\right)t^2 + 2(x-1)t+1}dt$$

3. *Vérifier que :*
$$\forall x > 0,\ F(x) = \ln(x)$$
4. *Soient a, b deux réels tels que $b^2 - a < 0$. Montrer que :*
$$\begin{aligned} I(a,b) &= \int_0^1 \frac{1}{at^2 + 2bt + 1} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{a - b^2}} \left(\arctan\left(\frac{a+b}{\sqrt{a-b^2}} \right) - \arctan\left(\frac{b}{\sqrt{a-b^2}} \right) \right) \end{aligned}$$
5. *Montrer que $z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ tels que $y \neq 0$, on a :*
$$Q(x,y) = \frac{y}{|y|} \left(\arctan\left(\frac{x(x-1)}{|y|} + |y| \right) - \arctan\left(\frac{x-1}{|y|} \right) \right)$$
6. *Utilisant la détermination principale du logarithme complexe, montrer que :*
$$Q(x,y) = 2\arctan\left(\frac{y}{x + \sqrt{x^2+y^2}} \right)$$

Solution 19.50

1. *Les fonctions F et $\ln : z \mapsto \ln(|z|) + i\arg(z)$, où $\arg(z) = 2\arctan\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ est la détermination principale de l'argument dans $]-\pi;\pi[$, sont des primitives de $z \mapsto \dfrac{1}{z}$ sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ avec $F(1) = 0 = \ln(1)$, elles sont donc égales.*
2. *Pour $z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ fixé, on a :*
$$\begin{aligned} F(z) &= (z-1)\int_0^1 \frac{dt}{(z-1)t+1} = (x-1+iy)\int_0^1 \frac{dt}{(x-1)t+1+iyt} \\ &= (x-1+iy)\int_0^1 \frac{(x-1)t+1-iyt}{((x-1)t+1)^2 + y^2t^2} dt = P(x,y) + iQ(x,y) \end{aligned}$$
avec :
$$P(x,y) = \int_0^1 \frac{(x-1)((x-1)t+1) + y^2 t}{((x-1)t+1)^2 + y^2t^2} dt$$
En notant :
$$u(t) = ((x-1)t+1)^2 + y^2t^2$$
on a $u(t) > 0$ pour tout $t \in [0,1]$ et :
$$u'(t) = 2\left((x-1)((x-1)t+1) + y^2 t\right)$$
donc :
$$\begin{aligned} P(x,y) &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{u'(t)}{u(t)} dt = \frac{1}{2}[\ln u(t)]_0^1 = \frac{1}{2}[\ln(u(1)) - \ln(u(0))] \\ &= \frac{1}{2}\left[\ln\left(x^2+y^2\right) - \ln(1)\right] = \ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) \end{aligned}$$
Pour ce qui est de la partie imaginaire, on a :
$$\begin{aligned} Q(x,y) &= \int_0^1 \frac{y((x-1)t+1) - yt(x-1)}{((x-1)t+1)^2 + y^2t^2} dt \\ &= \int_0^1 \frac{y}{\left((x-1)^2 + y^2\right)t^2 + 2(x-1)t + 1} dt \end{aligned}$$

3. *Pour* $x > 0$ *et* $y = 0$, *on a* $P(x,0) = \ln(x)$ *et* $Q(x,0) = 0$, *soit* $F(x) = \ln(x)$, *c'est-à-dire que* F *coïncide avec le logarithme népérien usuel sur* $\mathbb{R}^{+,*}$.
4. *Comme* $a > b^2 \geq 0$, *on a* $a > 0$ *et le discrimant de* $at^2 + 2bt + 1$ *est strictement négatif, donc* $at^2 + 2bt + 1 > 0$ *pour tout réel* t *et :*

$$I(a,b) = \frac{1}{a}\int_0^1 \frac{1}{t^2 + 2\frac{b}{a}t + \frac{1}{a}}dt = \frac{1}{a}\int_0^1 \frac{1}{\left(t + \frac{b}{a}\right)^2 + \frac{a-b^2}{a^2}}dt$$

soit en posant $\lambda = \dfrac{\sqrt{a - b^2}}{a}$ *:*

$$\begin{aligned} I(a,b) &= \frac{1}{a}\int_0^1 \frac{1}{\left(t + \frac{b}{a}\right)^2 + \lambda^2}dt = \frac{1}{a\lambda^2}\int_0^1 \frac{1}{\left(\frac{t}{\lambda} + \frac{b}{a\lambda}\right)^2 + 1}dt \\ &= \frac{1}{a\lambda}\left[\arctan\left(\frac{at+b}{a\lambda}\right)\right]_0^1 = \frac{1}{a\lambda}\left(\arctan\left(\frac{a+b}{a\lambda}\right) - \arctan\left(\frac{b}{a\lambda}\right)\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{a-b^2}}\left(\arctan\left(\frac{a+b}{\sqrt{a-b^2}}\right) - \arctan\left(\frac{b}{\sqrt{a-b^2}}\right)\right) \end{aligned}$$

5. *Pour* $z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ *fixé, on note :*

$$a = (x-1)^2 + y^2 \text{ et } b = x - 1$$

Si on suppose que $y \neq 0$, *on a alors* $b^2 - a = -y^2 < 0$ *et :*

$$Q(x,y) = yI\left((x-1)^2 + y^2, x - 1\right)$$

avec :

$$\sqrt{a - b^2} = |y| \text{ et } a + b = x(x-1) + y^2$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} Q(x,y) &= \frac{y}{|y|}\left(\arctan\left(\frac{x(x-1)+y^2}{|y|}\right) - \arctan\left(\frac{x-1}{|y|}\right)\right) \\ &= \frac{y}{|y|}\left(\arctan\left(\frac{x(x-1)}{|y|} + |y|\right) - \arctan\left(\frac{x-1}{|y|}\right)\right) \end{aligned}$$

6. *Résulte de* $F = \ln$.

Corollaire 19.3 *Si* $\mathcal{O}$ *est un ouvert étoilé par rapport à l'un de ses points, alors toute fonction holomorphe* $f : \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ *et tout lacet chemin* $\gamma : [a,b] \to \mathcal{O}$, *on a* $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.

Remarque 19.16 *Les ouverts étoilé sont des cas particuliers d'ouverts simplement connexes.*

Exemple 19.8 *On a* $\displaystyle\int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{z}{1+z^2}dz = 0$ *car* $z \mapsto \dfrac{z}{1+z^2}$ *est holomorphe sur* $D(0,1)$ *et le cercle de centre* 0 *et de rayon* $\dfrac{1}{2}$ *est contenu dans ce disque.*

Septième partie

Analyse numérique

20

Calcul approché des intégrales définies

Pour ce chapitre, $I = [a, b]$ est un segment réel avec $a < b$, $\mathcal{C}(I)$ est l'espace vectoriel réel des fonctions définies sur I à valeurs réelles et continues et pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(I)$, on note :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f'(t)|.$$

20.1 Formules de quadrature

Définition 20.1 *On appelle formule (ou méthode) de quadrature à $n+1$ points sur $\mathcal{C}(I)$ la donnée d'une forme linéaire φ_n définie sur $\mathcal{C}(I)$ par :*

$$\forall f \in \mathcal{C}(I), \ \varphi_n(f) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_{n,k} f(x_{n,k})$$

où n est un entier naturel non nul, $(x_{n,k})_{0 \leq k \leq n}$ une suite de points deux à deux distincts dans l'intervalle I et $(\lambda_{n,k})_{0 \leq k \leq n}$ une suite de réels non tous nuls.

On cherche des formules de quadrature, avec des coefficients $x_{n,k}$ et $\lambda_{n,k}$ indépendants de f, permettant d'approximer l'intégrale définie $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$. On écrira alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx \backsimeq \varphi_n(f) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_{n,k} f(x_{n,k}).$$

Pour chaque formule de quadrature il sera important de savoir estimer l'erreur de quadrature :

$$E_n(f) = \int_a^b f(x)\,dx - \varphi_n(f).$$

Définition 20.2 *Une formule de quadrature à $n+1$ points sur $\mathcal{C}(I)$ est dite d'ordre p si elle est exacte sur $\mathbb{R}_p[x]$ et inexacte pour au moins un polynôme de degré strictement supérieur à p.*

Pour vérifier qu'une formule de quadrature est d'ordre p, il suffit, par linéarité de φ_n et de l'intégrale, de vérifier qu'elle est exacte sur une base de $\mathbb{R}_p[x]$ (par exemple la base canonique) et inexacte pour un polynôme de degré $p+1$ (par exemple le polynôme x^{p+1}).

Remarque 20.1 *L'ordre maximum d'une formule de quadrature à $n+1$ points est $2n+1$. En effet en considérant le polynôme P de degré $2n+2$ défini par $P(x) = \prod_{k=0}^{n}(x - x_{n,k})^2$, on a :*

$$\int_a^b P(x)\,\pi(x)\,dx > 0 = \sum_{k=0}^{n} \lambda_{n,k} P(x_{n,k}).$$

On dit qu'une méthode de quadrature définie par une suite de formes linéaires $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(I)$ la suite $(\varphi_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\varphi(f)$.

20.2 La méthode des rectangles à gauche

Pour $I = [a,b]$ intervalle fermé borné, en prenant les points $x_{n,k}$ équidistants dans I, c'est-à-dire :

$$x_{n,k} = a + k\frac{b-a}{n} \quad (0 \leq k \leq n)$$

et les coefficients $\lambda_{n,k}$ tous égaux à $\dfrac{b-a}{n}$ pour k compris entre 0 et $n-1$, le coefficient $\lambda_{n,n}$ étant nul, on obtient la formule des rectangles à gauche :

$$R_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{n,k})$$

et le cours sur l'intégrale de Riemann nous dit que :

$$\forall f \in \mathcal{C}(I), \lim_{n\to+\infty} R_n(f) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

La méthode des rectangles à gauche est donc convergente.

Cette méthode est d'ordre 0. En effet il est clair que $R_n(f) = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ pour f constante et pour $f(x) = x$ sur $[0,1]$, on a pour tout entier $n \geq 1$:

$$R_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n} = \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \neq \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}.$$

De manière plus générale, en choisissant pour tout entier k compris entre 0 et $n-1$ un réel $\xi_{n,k}$ dans l'intervalle $[x_{n,k}, x_{n,k+1}]$, les sommes de Riemann :

$$\varphi_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_{n,k})$$

définissent une méthode de quadrature sur $\mathcal{C}(I)$ qui est exacte sur l'ensemble des fonctions constantes et pour toute fonction f dans $\mathcal{C}(I)$ on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\varphi_n(f) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

La méthode des rectangles en un point quelconque de $[x_{n,k}, x_{n,k+1}]$ est donc convergente.

Pour f monotone, on peut facilement obtenir un encadrement de l'erreur d'approximation pour la méthode des rectangles à gauche.

Théorème 20.1 *Avec les notations qui précèdent, on a pour f monotone sur $[a,b]$:*

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - R_n(f) \right| \leq \frac{b-a}{n} |f(b) - f(a)|$$

Démonstration. Par exemple, pour f croissante, on a pour k compris entre 0 et $n-1$:

$$\forall x \in [x_{n,k}, x_{n,k+1}],\ f(x_{n,k}) \leq f(x) \leq f(x_{n,k+1})$$

ce qui entraîne en intégrant sur $[x_{n,k}, x_{n,k+1}]$:

$$\frac{b-a}{n} f(x_{n,k}) \leq \int_{x_{n,k}}^{x_{n,k+1}} f(x)\,dx \leq \frac{b-a}{n} f(x_{n,k+1})$$

et en effectuant la somme :

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{n,k}) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_{n,k})$$

soit :

$$0 \leq \int_a^b f(x)\,dx - R_n(f) \leq \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a))$$

Dans le cas où f est décroissante, $-f$ est croissante et $R_n(f) = -R_n(-f)$. On a donc :

$$0 \leq \int_a^b -f(x)\,dx - R_n(-f) \leq \frac{b-a}{n} (-f(b) + f(a))$$

ou encore :

$$0 \leq R_n(f) - \int_a^b f(x)\,dx \leq \frac{b-a}{n} (f(a) - f(b)).$$

■

Remarque 20.2 *Il n'est pas nécessaire de supposer que f est continue dans le théorème précédent puisque une fonction monotone est Riemann-intégrable.*

Pour f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, on peut donner une majoration de l'erreur d'approximation de $\int_a^b f(x)\,dx$ par la méthode des rectangles à gauche.

Nous utiliserons à plusieurs reprises le lemme suivant, conséquence du théorème des valeurs intermédiaires.

Lemme 20.1 *Si φ est une fonction continue sur $[a,b]$ et $(x_k)_{1\leq k\leq n}$ une suite de points de $[a,b]$ avec $n \geq 2$, il existe alors un réel c dans $[a,b]$ tel que :*

$$\sum_{k=1}^{n-1} \varphi(x_k) = n \cdot \varphi(c)$$

Démonstration. En désignant par m [resp. M] la borne inférieure [resp. supérieure] de φ sur $[a,b]$, on a :

$$n \cdot m \leq \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(x_k) \leq n \cdot M$$

et le théorème des valeurs intermédiaires nous dit alors qu'il existe c dans $[a,b]$ tel que $\sum_{k=1}^{n-1} \varphi(x_k) = n \cdot \varphi(c)$. ■

Lemme 20.2 *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$. Il existe un réel c dans $]a,b[$ tel que :*

$$\int_a^b f(x)\,dx - f(a)(b-a) = \frac{f'(c)}{2}(b-a)^2.$$

Démonstration. En désignant par $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ la primitive de f nulle en a, cette fonction est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$ et le théorème de Taylor-Lagrange nous dit qu'il existe un réel $c \in \,]a,b[$ tel que :

$$\begin{aligned} F(b) = \int_a^b f(x)\,dx &= F(a) + F'(a)(b-a) + \frac{F''(c)}{2}(b-a)^2 \\ &= f(a)(b-a) + \frac{f'(c)}{2}(b-a)^2 \end{aligned}$$

■

On déduit de ce lemme une majoration de l'erreur dans la méthode de base du rectangle à gauche :

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - f(a)(b-a)\right| \leq \frac{\|f'\|_\infty}{2}(b-a)^2$$

Pour ce qui est de la méthode composée des rectangles, on a le résultat suivant.

Théorème 20.2 *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et n un entier naturel non nul. Avec les notations qui précèdent, il existe un réel $c_n \in [a,b]$ tel que :*

$$\int_a^b f(x)\,dx - R_n(f) = \frac{(b-a)^2}{2n} f'(c_n)$$

et on a :

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - R_n(f)\right| \leq \frac{\|f'\|_\infty (b-a)^2}{2n}$$

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,dx - R_n(f) &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_{n,k}}^{x_{n,k+1}} f(x)\,dx - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{n,k}) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_{n,k}}^{x_{n,k+1}} f(x)\,dx - (x_{n,k+1} - x_{n,k}) f(x_{n,k}) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f'(c_{n,k})}{2}(x_{n,k+1} - x_{n,k})^2 = \frac{(b-a)^2}{2n^2}\sum_{k=0}^{n-1} f'(c_{n,k}) \end{aligned}$$

où chaque $c_{n,k}$ est dans $]x_{n,k}, x_{n,k+1}[$.

Le lemme 20.1 nous dit alors qu'il existe c_n dans $[a,b]$ tel que $\sum_{k=0}^{n-1} f'(c_{n,k}) = n \cdot f'(c_n)$. On a donc :

$$\int_a^b f(x)\,dx - R_n(f) = \frac{(b-a)^2}{2n^2} n \cdot f'(c_n) = \frac{(b-a)^2}{2n} f'(c_n)$$

et :

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - R_n(f)\right| \leq \frac{\|f'\|_\infty (b-a)^2}{2n}$$

■

Avec ce théorème, on retrouve le fait que :

$$\lim_{n\to+\infty} R_n(f) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Pour une fonction f suffisamment dérivable, on peut donner, en utilisant la formule de Taylor-Lagrange, un développement asymptotique de l'erreur d'approximation dans la méthode des rectangles à gauche.

Lemme 20.3 *Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^3([a,b],\mathbb{R})$, il existe des réel c_1, c_2, c_3 dans $[a,b]$ tels que :*

$$\begin{aligned} F(b) = f(a)(b-a) &+ \frac{b-a}{2}(f(b)-f(a)) - \frac{(b-a)^2}{12}(f'(b)-f'(a)) \\ &+ \frac{(b-a)^4}{24}\left(f^{(3)}(c_1) - f^{(3)}(c_2) + f^{(3)}(c_3)\right) \end{aligned}$$

Démonstration. En désignant par $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ la primitive de f nulle en a, cette fonction est de classe $\mathcal{C}^4$ sur $[a,b]$ et le théorème de Taylor-Lagrange nous dit qu'il existe un réel $c_1 \in \,]a,b[$ tel que :

$$\begin{aligned} F(b) &= \int_a^b f(x)\,dx && (20.1) \\ &= F(a) + F'(a)(b-a) + \frac{F''(a)}{2}(b-a)^2 + \frac{F^{(3)}(a)}{6}(b-a)^3 + \frac{F^{(4)}(c)}{24}(b-a)^4 && (20.2) \\ &= f(a)(b-a) + \frac{f'(a)}{2}(b-a)^2 + \frac{f''(a)}{6}(b-a)^3 + \frac{f^{(3)}(c_1)}{24}(b-a)^4 \end{aligned}$$

On a aussi, avec la formule de Taylor-Lagrange pour f :

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2}(b-a)^2 + \frac{f^{(3)}(c_2)}{6}(b-a)^3$$

soit, en multipliant la première relation par $\dfrac{b-a}{2}$:

$$\frac{f'(a)}{2}(b-a)^2 = \frac{b-a}{2}(f(b)-f(a)) - \frac{f''(a)}{4}(b-a)^3 - \frac{f^{(3)}(c_2)}{12}(b-a)^4$$

et en reportant dans (20.1), on obtient :

$$\begin{aligned} F(b) = f(a)(b-a) &+ \frac{b-a}{2}(f(b)-f(a)) - \frac{f''(a)}{4}(b-a)^3 - \frac{f^{(3)}(c_2)}{12}(b-a)^4 \\ &+ \frac{f''(a)}{6}(b-a)^3 + \frac{f^{(3)}(c_1)}{24}(b-a)^4 \\ = f(a)(b-a) &+ \frac{b-a}{2}(f(b)-f(a)) - \frac{f''(a)}{12}(b-a)^3 + \frac{(b-a)^4}{24}\left(f^{(3)}(c_1) - f^{(3)}(c_2)\right) \end{aligned}$$

De même, avec :

$$f'(b) = f'(a) + f''(a)(b-a) + \frac{f^{(3)}(c_3)}{2}(b-a)^2$$

on obtient :

$$\frac{f''(a)}{12}(b-a)^3 = \frac{(b-a)^2}{12}(f'(b) - f'(a)) - \frac{f^{(3)}(c_3)}{24}(b-a)^4$$

et :

$$\begin{aligned}F(b) = f(a)(b-a) + \frac{b-a}{2}(f(b) - f(a)) - \frac{(b-a)^2}{12}(f'(b) - f'(a)) \\ + \frac{(b-a)^4}{24}\left(f^{(3)}(c_1) - f^{(3)}(c_2) + f^{(3)}(c_3)\right)\end{aligned}$$

■

Théorème 20.3 *Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^3([a,b], \mathbb{R})$ on a le développement asymptotique :*

$$R_n(f) = \int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{2n}(f(b) - f(a)) + \frac{(b-a)^2}{12n^2}(f'(b) - f'(a)) + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Démonstration. On a, pour tout k compris entre 0 et $n-1$:

$$\begin{aligned}\int_{x_{n,k}}^{x_{n,k+1}} f(x)\,dx &= f(x_{n,k})(x_{n,k+1} - x_{n,k}) + \frac{x_{n,k+1} - x_{n,k}}{2}(f(x_{n,k+1}) - f(x_{n,k})) \\ &\quad - \frac{(x_{n,k+1} - x_{n,k})^2}{12}(f'(x_{n,k+1}) - f'(x_{n,k})) \\ &\quad + \frac{(x_{n,k+1} - x_{n,k})^4}{24}\left(f^{(3)}(c_{1,k}) - f^{(3)}(c_{2,k}) + f^{(3)}(c_{3,k})\right) \\ &= \frac{b-a}{n} f(x_{n,k}) + \frac{b-a}{2n}(f(x_{n,k+1}) - f(x_{n,k})) \\ &\quad - \frac{(b-a)^2}{12n^2}(f'(x_{n,k+1}) - f'(x_{n,k})) \\ &\quad + \frac{(b-a)^4}{24n^4}\left(f^{(3)}(c_{1,k}) - f^{(3)}(c_{2,k}) + f^{(3)}(c_{3,k})\right)\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_{n,k}}^{x_{n,k+1}} f(x)\,dx \\ &= \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{n,k}) + \frac{b-a}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}(f(x_{n,k+1}) - f(x_{n,k})) \\ &\quad - \frac{(b-a)^2}{12n^2}\sum_{k=0}^{n-1}(f'(x_{n,k+1}) - f'(x_{n,k})) \\ &\quad + \frac{(b-a)^4}{24n^4}\sum_{k=0}^{n-1}\left(f^{(3)}(c_{1,k}) - f^{(3)}(c_{2,k}) + f^{(3)}(c_{3,k})\right)\end{aligned}$$

soit en désignant par c_n, d_n et e_n des réels dans $[a,b]$ tels que $\sum_{k=0}^{n-1} f^{(3)}(c_{1,k}) = nf^{(3)}(c_n)$, $\sum_{k=0}^{n-1} f^{(3)}(c_{2,k}) = nf^{(3)}(d_n)$, et $\sum_{k=0}^{n-1} f^{(3)}(c_{3,k}) = nf^{(3)}(e_n)$:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx = R_n(f) + \frac{b-a}{2n}(f(b) - f(a)) - \frac{(b-a)^2}{12n^2}(f'(b) - f'(a)) \\ + \frac{(b-a)^4}{24n^3}\left(f^{(3)}(c_n) - f^{(3)}(d_n) + f^{(3)}(e_n)\right)\end{aligned}$$

avec :

$$\left|f^{(3)}(c_n) - f^{(3)}(d_n) + f^{(3)}(e_n)\right| \leq 3\left\|f^{(3)}\right\|_\infty$$

ce qui donne bien le résultat annoncé. ■

Exemple 20.1 *Pour* $f(t) = \dfrac{1}{1+t}$ *sur* $[0,1]$, *on obtient :*

$$\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k} = \ln(2) + \frac{1}{4n} + \frac{1}{16n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

Exemple 20.2 *Pour* $f(t) = \dfrac{1}{(1+t)^\alpha}$ *sur* $[0,1]$, *avec* $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$ *:*

$$n^{\alpha-1} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{2^{\alpha-1}} - 1\right) - \frac{1}{2n}\left(\frac{1}{2^\alpha} - 1\right) + \frac{\alpha}{12n^2}\left(1 - \frac{1}{2^{\alpha+1}}\right) + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

20.3 La méthode des points milieux

Cette méthode consiste à utiliser les sommes de Riemann avec le point milieu $\xi_{n,k} = \dfrac{x_{n,k} + x_{n,k+1}}{2}$. On utilise donc l'opérateur M_n défini sur $\mathcal{C}([a,b])$ par :

$$M_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{x_{n,k} + x_{n,k+1}}{2}\right).$$

La méthode de base, qui correspond à $n = 1$, est définie par :

$$\int_a^b f(x)\,dx \backsimeq M_1(f) = (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Si f est une fonction affine, elle peut s'écrire $f(x) = \alpha(x-a) + \beta$ et le changement de variable $x = \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{b-a}{2}t$ nous donne :

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &= \int_a^b (\alpha(x-a) + \beta)\,dx = \int_{-1}^1 \left(\alpha\frac{b-a}{2}(t+1) + \beta\right)\frac{b-a}{2}dt \\
&= 2\int_0^1 \left(\alpha\frac{b-a}{2} + \beta\right)\frac{b-a}{2}dt = \left(\alpha\frac{b-a}{2} + \beta\right)(b-a) \\
&= (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right)
\end{aligned}$$

et :

$$M_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{n,k+1} - x_{n,k}) f\left(\frac{x_{n,k} + x_{n,k+1}}{2}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_{n,k}}^{x_{n,k+1}} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Pour $f(x) = x^2$ sur $[0,1]$, on a pour tout entier $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}
M_n(f) &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n} + \frac{1}{2n}\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k^2}{n^2} + \frac{k}{n^2} + \frac{1}{4n^2}\right) \\
&= \frac{1}{n^3}\left(\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n}{4}\right) \\
&= \frac{1}{3} - \frac{1}{12n^2} \neq \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

La méthode est donc d'ordre 1.

Dans le cas ou f est une fonction dérivable, la tangente au graphe de f en $\dfrac{a+b}{2}$ a pour équation :

$$y = h(x) = f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) + f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

et :

$$\int_a^b h(x)\,dx = (b-a)\,h\left(\frac{a+b}{2}\right) = (b-a)\,f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

On a donc :

$$M_1(f) = \int_a^b h(x)\,dx.$$

Dans le cas où f est une fonction dérivable convexe, son graphe est toujours au dessus des tangentes, on a donc $f(x) \geq h(x)$ pour tout $x \in [a,b]$ et :

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b h(x)\,dx = (b-a)\,f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Pour ce qui est d'une estimation de l'erreur d'approximation, on s'intéresse d'abord à la méthode de base.

Lemme 20.4 *Soit f une fonction à valeurs réelles de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle $[a,b]$. Il existe un réel c dans $]a,b[$ tel que :*

$$\int_a^b f(x)\,dx - (b-a)\,f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{(b-a)^3}{24} f''(c)$$

Démonstration. On se ramène à l'intervalle $[-1,1]$ en utilisant le changement de variable $x = \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{b-a}{2}t$ avec $t \in [-1,1]$, ce qui conduit à introduire la fonction g définie sur $[-1,1]$ par :

$$g(t) = f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t\right).$$

L'erreur dans la méthode du point milieu de base pour f sur $[a,b]$ est :

$$\begin{aligned} E(f) &= \int_a^b f(x)\,dx - (b-a)\,f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ &= \frac{b-a}{2}\left(\int_{-1}^1 g(t)\,dt - 2g(0)\right) \end{aligned}$$

On désigne par $G : x \mapsto \displaystyle\int_0^x g(t)\,dt$ la primitive sur $[0,1]$ de g nulle en 0 et par φ la fonction définie sur $[0,1]$ par :

$$\varphi(x) = \int_{-x}^x g(t)\,dt - 2xg(0) = G(x) - G(-x) - 2xg(0)$$

(erreur dans la méthode du point milieu sur $[-x,x]$). La fonction G est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $[0,1]$ et la formule de Taylor-Lagrange nous donne pour $x \in [-1,1] \setminus \{0\}$:

$$\begin{aligned} G(x) &= G(0) + G'(0)\,x + \frac{G''(0)}{2}x^2 + \frac{G^{(3)}(c_x)}{6}x^3 \\ &= g(0)\,x + \frac{g'(0)}{2}x^2 + \frac{g''(c_x)}{6}x^3 \end{aligned}$$

avec $0 < c_x < x$ et en conséquence :

$$\varphi(x) = G(x) - G(-x) - 2xg(0) = \frac{g''(c_x) + g''(c_{-x})}{6} x^3.$$

avec $-x < c_{-x} < 0$. Le lemme 20.1 nous dit alors qu'il existe d_x dans $[-x, x] \subset]-1, 1[$ tel que $g''(c_x) + g''(c_{-x}) = 2g''(d_x)$. On a donc :

$$\varphi(x) = \frac{g''(d_x)}{3} x^3$$

et :

$$\begin{aligned} E(f) &= \frac{b-a}{2}\varphi(1) = \frac{b-a}{2}\frac{g''(d_1)}{3} \\ &= \frac{b-a}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \frac{f''(c)}{3} = \frac{(b-a)^3}{24} f''(c) \end{aligned}$$

avec $c = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} d_1 \in]a, b[$. ■

On déduit de ce lemme une majoration de l'erreur dans la méthode de base du point milieu pour une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$:

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx = (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \leq \frac{\|f''\|_\infty}{24} (b-a)^3$$

Pour la méthode composée, on en déduit le résultat suivant.

Théorème 20.4 *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$ et n un entier naturel non nul. Avec les notations qui précèdent, il existe un réel $c_n \in [a, b]$ tel que :*

$$\int_a^b f(x)\,dx - M_n(f) = \frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(c_n)$$

et on a :

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - M_n(f) \right| \leq \frac{(b-a)^3}{24n^2} \|f''\|_\infty$$

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,dx - M_n(f) &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{x_{n,k}}^{x_{n,k+1}} f(x)\,dx - (x_{n,k+1} - x_{n,k}) f\left(\frac{x_{n,k} + x_{n,k+1}}{2}\right) \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x_{n,k+1} - x_{n,k})^3}{24} f''(c_{n,k}) = \frac{(b-a)^3}{24n^3} \sum_{k=0}^{n-1} f''(c_{n,k}) \end{aligned}$$

où chaque $c_{n,k}$ est dans $]x_{n,k}, x_{n,k+1}[$.

Le lemme 20.1 nous dit qu'il existe c_n dans $[a, b]$ tel que $\sum_{k=0}^{n-1} f''(c_{n,k}) = n \cdot f''(c_n)$. On a donc :

$$\int_a^b f(x)\,dx - M_n(f) = \frac{(b-a)^3}{24n^3} n \cdot f''(c_n) = \frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(c_n)$$

et :

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - M_n(f) \right| \leq \frac{(b-a)^3}{24n^2} \|f''\|_\infty$$

■

Là encore, on retrouve le fait que :

$$\lim_{n \to +\infty} M_n(f) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Remarque 20.3 *Pour $n \geq 1$, on a :*

$$M_n(f) = 2R_{2n}(f) - R_n(f)$$

En effet :

$$\begin{aligned} R_{2n}(f) &= \frac{b-a}{2n} \sum_{k=0}^{2n-1} f(x_{2n,k}) = \frac{b-a}{2n} \sum_{k=0}^{2n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{2n}\right) \\ &= \frac{b-a}{2n} \left(\sum_{j=0}^{n-1} f\left(a + 2j\frac{b-a}{2n}\right) + \sum_{j=0}^{n-1} f\left(a + (2j+1)\frac{b-a}{2n}\right) \right) \\ &= \frac{b-a}{2n} \left(\sum_{j=0}^{n-1} f(x_{n,j}) + \sum_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{x_{n,j} + x_{n,j+1}}{2}\right) \right) \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} 2R_{2n}(f) &= \frac{b-a}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(x_{n,j}) + \frac{b-a}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{x_{n,j} + x_{n,j+1}}{2}\right) \\ &= R_n(f) + M_n(f). \end{aligned}$$

On a donc accéléré la convergence de la suite $(R_n(f))_{n\geq 1}$ en utilisant la suite $(M_n(f))_{n\geq 1}$ formée des moyennes de $R_{2n}(f)$ et $R_n(f)$ avec les poids 2 et -1 respectivement.

20.4 Les méthodes de Newton-Cotes

Ces méthodes sont basées sur l'interpolation de Lagrange.

On se place ici dans le cas où $I = [a,b]$ est intervalle fermé borné, on se donne un entier $p \geq 1$ et on lui associe les points $x_{p,k}$ définis par :

$$x_{p,k} = a + k\frac{b-a}{p} \quad (0 \leq k \leq p).$$

Théorème 20.5 *Pour tout entier naturel non nul p, il existe des coefficients réels uniques $(\mu_{p,k})_{0\leq k\leq p}$ tels que pour toute fonction polynomiale P de degré au plus égal à p on ait :*

$$\int_a^b P(x)\,dx = \frac{b-a}{p} \sum_{k=0}^{p} \mu_{p,k} P(x_{p,k}). \tag{20.3}$$

Ces coefficients sont donnés par :

$$\mu_{p,k} = \frac{(-1)^{p-k}}{p!} C_p^k \int_0^p \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{p} (t-j)\,dt \quad (0 \leq k \leq p)$$

Démonstration. On désigne par $(L_{p,k})_{0\leq k\leq p}$ la base de Lagrange de $\mathbb{R}_p[x]$ définie par :

$$L_{p,k}(x) = \prod_{\substack{j=0\\j\neq k}}^{p} \frac{x - x_{p,j}}{x_{p,k} - x_{p,j}}$$

Par linéarité, la propriété (20.3) est vérifiée pour tout P dans $\mathbb{R}_p[x]$ si, et seulement si, elle est vérifiée pour tous les $L_{p,k}$, ce qui équivaut à :

$$\int_a^b L_{p,k}(x)\,dx = \frac{b-a}{p}\mu_{p,k}$$

pour tout entier k compris entre 0 et p. On a donc ainsi prouvé l'existence et l'unicité des coefficients $\mu_{p,k}$.

Le changement de variable $x = a + t\dfrac{b-a}{p}$ nous donne :

$$\mu_{p,k} = \int_0^p L_{p,k}\left(a + t\frac{b-a}{p}\right) dt$$

avec :

$$\begin{aligned} L_{p,k}(a + t(b-a)) = \prod_{\substack{j=0\\j\neq k}}^{p} \frac{t-j}{k-j} &= \frac{(-1)^{p-k}}{k!\,(p-k)!}\prod_{\substack{j=0\\j\neq k}}^{p}(t-j) \\ &= \frac{(-1)^{p-k}}{p!}C_p^k\prod_{\substack{j=0\\j\neq k}}^{p}(t-j) \end{aligned}$$

■

Remarque 20.4 *Les coefficients $(\mu_{p,k})_{0\leq k\leq p}$ ne dépendent que de p et de k, mais pas de l'intervalle I.*

Remarque 20.5 *On peut aussi déterminer les coefficients $(\mu_{p,k})_{0\leq k\leq p}$ en utilisant la base $\left((x-a)^i\right)_{0\leq i\leq p}$ de $\mathbb{R}_p[x]$, ce qui fait apparaître ces coefficients comme solutions du système linéaire :*

$$\sum_{k=0}^{p} \mu_{p,k}(x_{p,k} - a)^i = \frac{p}{b-a}\int_a^b (x-a)^i\,dx \ \ (0 \leq i \leq pn)$$

Soit :

$$\sum_{k=0}^{p} k^i \mu_{p,k} = \frac{p^{i+1}}{i+1} \ \ (0 \leq i \leq p) \tag{20.4}$$

La matrice de ce système est la matrice de type Vandermonde :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & p & p^2 & \cdots & p^p \end{pmatrix}$$

de déterminant

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2^2 & \cdots & 2^p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p & p^2 & \cdots & p^p \end{vmatrix} = p! \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 2^{p-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & p & \cdots & p^{p-1} \end{vmatrix}$$
$$= p! \prod_{1 \leq j < i \leq p} (i-j) = p! \prod_{i=2}^{p} (i-1)! = \prod_{i=2}^{p} i!.$$

Ce déterminant étant non nul, on retrouve l'existence et l'unicité des coefficients $\mu_{p,k}$.
En résolvant ces systèmes on obtient les coefficients $\mu_{p,k}$.

Si f est une fonction continue sur I, en notant P_p le polynôme d'interpolation de Lagrange associé à f et aux points $(x_{p,k})_{0 \leq k \leq p}$, on a :

$$\int_a^b P_p(x)\,dx = \frac{b-a}{p} \sum_{k=0}^{p} \mu_{p,k} P(x_{p,k}) = \frac{b-a}{p} \sum_{k=0}^{p} \mu_{p,k} f(x_{p,k}).$$

La méthode de Newton-Cotes correspondante consiste à remplacer $\int_a^b f(x)\,dx$ par $\int_a^b P_p(x)\,dx$, ce qui revient à utiliser la méthode de quadrature décrite par la fonctionnelle φ_p définies par :

$$\forall f \in \mathcal{C}(I),\ \varphi_p(f) = \frac{b-a}{p} \sum_{k=0}^{p} \mu_{p,k} f(x_{p,k}).$$

Théorème 20.6 *Avec les notations qui précèdent, les coefficients $(\mu_{p,k})_{0 \leq k \leq n}$ sont des nombres rationnels et on a :*

$$\mu_{p,p-k} = \mu_{p,k} \ \ (0 \leq k \leq p)$$

Démonstration. Pour tout k compris entre 0 et p, le polynôme $\pi_{p,k}$ défini par :

$$\pi_{p,k}(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{p} (t-j)$$

est à coefficients entiers, donc $\int_0^p \pi_{p,k}(t)\,dt$ est un nombre rationnel et il en est de même de $\mu_{p,k}$.

On peut aussi dire que les $\mu_{p,k}$ sont rationnels comme solutions du système linéaire (20.4) qui est à coefficients rationnels.

En notant $\pi_p(t) = \prod_{j=0}^{p} (t-j)$, le changement d'indice $k = p - j$ nous donne :

$$\pi_p(p-t) = \prod_{j=0}^{p} (p-t-j) = (-1)^{p+1} \prod_{j=0}^{p} (t-(p-j))$$
$$= (-1)^{p+1} \prod_{k=0}^{p} (t-k) = (-1)^{n+1} \pi_p(t),$$

et en écrivant que $\pi_{p,k}(t) = \dfrac{\pi_p(t)}{t-k}$, on obtient :

$$\begin{aligned}\pi_{p,k}(n-t) &= -\frac{\pi_p(p-t)}{t-(p-k)} = (-1)^p \frac{\pi_p(t)}{t-(p-k)} \\ &= (-1)^p \pi_{p,p-k}(t).\end{aligned}$$

Le changement de variable $t = p - u$ nous donne alors :

$$\int_0^p \pi_{p,k}(t)\,dt = (-1)^p \int_0^p \pi_{p,p-k}(u)\,du$$

et tenant compte de $C_p^{p-k} = C_p^k$, on en déduit que $\mu_{p,p-k} = \mu_{p,k}$ pour tout k compris entre 0 et p. ■

Remarque 20.6 *Les formules de Newton-Cotes à $p+1$ points sont exactes sur $\mathbb{R}_p[x]$, elles sont donc d'ordre au moins égal à p.*

Exercice 20.1 *Montrer que pour tout entier naturel non nul p pair, les formules de Newton-Cotes à $p+1$ points sont exactes sur $\mathbb{R}_{p+1}[x]$.*

Solution 20.1 *En effectuant un changement de variable on se ramène à l'intervalle $I = [-1,1]$.*
On sait déjà que les formules de Newton-Cotes à $p+1$ points sont exactes sur $\mathbb{R}_p[x]$.
Soit $p = 2q$ avec q non nul. La fonction x^{p+1} étant impair, on a :

$$\int_{-1}^{1} x^{p+1}dx = 0.$$

D'autre part, avec :

$$\begin{cases} \mu_{p,p-k} = \mu_{p,k} \\ x_{p,p-k} = -1 + (2q-k)\dfrac{1}{q} = 1 - \dfrac{k}{q} = -x_{p,k} \end{cases}$$

pour k compris entre 0 et $q-1$, $x_{p,q} = 0$ et $p+1$ impair, on déduit que :

$$\sum_{k=0}^{p} \mu_{p,k} x_{p,k}^{p+1} = \sum_{k=0}^{q-1} \mu_{p,k} x_{p,k}^{p+1} + \sum_{k=0}^{q-1} \mu_{p-k,k} x_{p-k,k}^{p+1} = 0.$$

La formule de quadrature correspondante est donc exacte sur $\mathbb{R}_{p+1}[x]$.

Remarque 20.7 *On peut montrer que les formules de Newton-Cotes à $p+1$ points sont d'ordre p pour p impair et d'ordre $p+1$ pour p pair (voir [44]).*

Pour ce qui est de l'erreur d'approximation, on peut montrer le résultat suivant (voir [44]), où $\pi_p(t) = \prod_{j=0}^{p}(t-j)$.

Théorème 20.7 *Soient f une fonction de classe $\mathcal{C}^{p+2}$ sur $I = [a,b]$ et*

$$E_p(f) = \int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{p}\sum_{k=0}^{p} \mu_{p,k} f(x_{p,k})$$

l'erreur de quadrature dans la méthode de Newton-Cotes à $p+1$ points dans I.
Si p est pair, il existe alors un réel ξ dans $[a,b]$ tel que :

$$E_p(f) = \left(\frac{b-a}{n}\right)^{p+3} \frac{f^{(p+2)}(\xi)}{(p+2)!}\int_0^p t\pi_p(t)\,dt.$$

Si p est impair, il existe alors un réel ξ dans $[a,b]$ tel que :

$$E_p(f) = \left(\frac{b-a}{p}\right)^{p+2} \frac{f^{(p+1)}(\xi)}{(p+1)!}\int_0^p \pi_p(t)\,dt.$$

Les méthodes que nous venons de décrire sont les méthodes de Newton-Cotes de base. En pratique, on utilise les formules de Newton-Cotes composées qui consistent à se fixer un entier naturel non nul p (égal dans la pratique à $1, 2, 4$ ou 6) et pour tout entier naturel non nul n on utilise une formule de Newton-Cotes d'ordre p sur chacun des intervalles $[x_{n,k}, x_{n,k+1}]$ pour k compris entre 0 et $n-1$, où $x_{n,k} = a + k\dfrac{b-a}{n}$. Ces formules sont décrites par les fonctionnelles $\varphi_{n,p}$ définies sur $\mathcal{C}(I)$ par :

$$\varphi_{n,p}(f) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{b-a}{np}\sum_{j=0}^{p}\mu_{p,j} f\left(x_{n,k} + j\frac{b-a}{np}\right) = \sum_{k=0}^{n-1}\varphi_{n,p,k}(f). \tag{20.5}$$

En écrivant :

$$\varphi_{n,p}(f) = \sum_{j=0}^{p}\frac{\mu_{p,j}}{p}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{b-a}{n} f\left(x_{n,k} + j\frac{b-a}{np}\right) = \frac{1}{p}\sum_{j=0}^{p}\mu_{p,j} S_{n,p,j}(f)$$

et en remarquant que pour tout entier j compris entre 0 et p, $S_{n,p,j}(f)$ est une somme de Riemann de f sur $[a,b]$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} S_{n,p,j}(f) = \int_a^b f(x)\,dx$$

et avec $\sum\limits_{j=0}^{p}\mu_{p,j} = p$, on déduit que :

$$\forall f \in \mathcal{C}(I), \ \lim_{n\to+\infty}\varphi_{n,p}(f) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Les méthodes de Newton-Cotes composées sont donc convergentes.

20.5 La méthode des trapèzes

On conserve les notations du paragraphe précédent.

Pour $p = 1$, on a $x_{1,0} = a$, $x_{1,1} = b$ et :

$$\mu_{1,0} = \mu_{1,1} = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}.$$

La formule de quadrature de base correspondante est la formule du trapèze :

$$\int_a^b f(x)\,dx \backsimeq \frac{b-a}{2}\left(f(a) + f(b)\right).$$

Cette formule est exacte pour les polynômes de degré 1 mais pas pour x^2, elle est donc d'ordre 1.

La méthode composée est la méthode des trapèzes définie par :

$$\begin{aligned} T_n(f) &= \frac{b-a}{2n}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left(f(x_{n,k}) + f(x_{n,k+1})\right)\right) \\ &= \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_{n,k})\right) \end{aligned}$$

où on a noté $x_{n,k} = a + k\dfrac{b-a}{n}$ pour tout k compris entre 0 et n.

La formule de Taylor avec reste intégral et le théorème de la moyenne nous permettent d'obtenir une estimation de l'erreur d'approximation dans la méthode du trapèze.

Comme pour la méthode du point milieu, un changement de variable nous ramène à $[-1, 1]$.

Le lemme qui suit nous sera utile pour obtenir cette estimation de l'erreur.

Lemme 20.5 *Soit h une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$ telle que $h'(0) = 0$. Pour tout x dans $]0,1]$ il existe un réel c_x dans $[0,1]$ tel que :*

$$\int_0^x h(t)\,dt - xh(x) = -\frac{h''(c_x)}{3}x^3.$$

Démonstration. La formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1 nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} h(x) &= h(0) + h'(0)\,x + \int_0^x (x-t)\,h''(t)\,dt \\ &= h(0) + \int_0^x (x-t)\,h''(t)\,dt. \end{aligned}$$

De même, la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 2 pour la primitive de h nulle en 0, $H : x \mapsto \int_0^x h(t)\,dt$ (qui est de classe $\mathcal{C}^3$) nous donne :

$$\begin{aligned} H(x) &= H(0) + H'(0)\,x + \frac{H''(0)}{2}x^2 + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2}H'''(t)\,dt \\ &= h(0)\,x + \frac{h'(0)}{2}x^2 + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2}h''(t)\,dt \\ &= h(0)\,x + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2}h''(t)\,dt. \end{aligned}$$

On en déduit alors que :

$$\begin{aligned}\int_0^x h(t)\,dt - xh(x) &= H(x) - xh(x)\\ = \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} h''(t)\,dt - x\int_0^x (x-t)\,h''(t)\,dt\\ &= -\int_0^x \frac{x^2-t^2}{2} h''(t)\,dt.\end{aligned}$$

Pour $x \in \left]0,1\right]$, la fonction $t \mapsto x^2 - t^2$ étant à valeurs positives sur $[0,x]$, le théorème de la moyenne nous dit qu'il existe $c_x \in [0,x]$ tel que :

$$\int_0^x h(t)\,dt - xh(x) = -h''(c_x)\int_0^x \frac{x^2-t^2}{2}dt = -\frac{h''(c_x)}{3}x^3.$$

■

Lemme 20.6 *Soit f une fonction à valeurs réelles de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle $[a,b]$. Il existe un réel c dans $\left]a,b\right[$ tel que :*

$$\int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)) = -\frac{(b-a)^3}{12}f''(c)$$

Démonstration. Le changement de variable $x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t$ avec $t \in [-1,1]$ nous ramène à l'intervalle $[-1,1]$. En définissant la fonction g sur $[-1,1]$ par :

$$g(t) = f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t\right),$$

l'erreur dans la méthode du trapèze pour f sur $[a,b]$ s'écrit :

$$\begin{aligned}E(f) &= \int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))\\ &= \frac{b-a}{2}\left(\int_{-1}^1 g(t)\,dt - (g(-1)+g(1))\right).\end{aligned}$$

En désignant par h la fonction définie sur $[-1,1]$ par $h(t) = g(-t) + g(t)$, on a :

$$E(f) = \frac{b-a}{2}\left(\int_0^1 h(x)\,dx - h(1)\right),$$

la fonction h étant de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[-1,1]$ avec $h'(0) = g'(0) - g'(0) = 0$ et le lemme précédent nous dit qu'il existe un réel c_1 dans $[0,1]$ tel que :

$$E(f) = -\frac{b-a}{2}\frac{h''(c)}{3} = -\frac{b-a}{2}\frac{g''(c_1)+g''(-c_1)}{3}.$$

Le lemme 20.1 nous dit qu'il existe d_1 dans $[0,1]$ tel que $g''(-c_1) + g''(c_1) = 2g''(d_1)$. On a donc :

$$E(f) = -\frac{b-a}{3}g''(d_1) = -\frac{(b-a)^3}{12}f''(c)$$

avec $c = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} d_1$ dans $[a,b]$. ■

On déduit de ce lemme une majoration de l'erreur dans la méthode du trapèze pour une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$:

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx - \frac{b-a}{2} \left(f(a) + f(b) \right) \right| \leq \frac{\|f''\|_\infty}{12} (b-a)^3$$

Remarque 20.8 *Une démonstration élémentaire, mais plus astucieuse, du lemme précédent peut se faire comme suit (voir [11]).*
On peut remarquer qu'une intégration par parties nous donne pour f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$:

$$\begin{aligned}\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2} \right) f'(x)\, dx &= \left[\left(x - \frac{a+b}{2} \right) f(x) \right]_a^b - \int_a^b f(x)\, dx \\ &= \frac{b-a}{2} \left(f(a) + f(b) \right) - \int_a^b f(x)\, dx\end{aligned}$$

Pour f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$ une autre intégration par parties nous donne :

$$\begin{aligned}\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2} \right) f'(x)\, dx &= \left[f'(x) \frac{1}{2} \left(\left(x - \frac{a+b}{2} \right)^2 - \left(\frac{b-a}{2} \right)^2 \right) \right]_a^b \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_a^b \left(\left(x - \frac{a+b}{2} \right)^2 - \left(\frac{b-a}{2} \right)^2 \right) f''(x)\, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b \left(\left(\frac{b-a}{2} \right)^2 - \left(x - \frac{a+b}{2} \right)^2 \right) f''(x)\, dx\end{aligned}$$

et en conséquence :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\, dx - \frac{b-a}{2} \left(f(a) + f(b) \right) &= \frac{1}{2} \int_a^b \left(\left(x - \frac{a+b}{2} \right)^2 - \left(\frac{b-a}{2} \right)^2 \right) f''(x)\, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b \left(\left(x - \tfrac{a+b}{2} \right) - \left(\tfrac{b-a}{2} \right) \right) \left(\left(x - \tfrac{a+b}{2} \right) + \left(\tfrac{b-a}{2} \right) \right) f''(x)\, dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_a^b (b-x)(x-a) f''(x)\, dx.\end{aligned}$$

Comme sur l'intervalle $[a,b]$, on a $(b-x)(x-a) \geq 0$, on déduit du théorème de la moyenne qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que :

$$\int_a^b (b-x)(x-a) f''(x)\, dx = f''(c) \int_a^b (b-x)(x-a)\, dx = f''(c) \frac{(b-a)^3}{6}$$

et :

$$\int_a^b f(x)\, dx - \frac{b-a}{2} \left(f(a) + f(b) \right) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(c)$$

Pour la méthode composée, on en déduit le résultat suivant.

Théorème 20.8 *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$ et n un entier naturel non nul. Avec les notations qui précèdent, il existe un réel $c_n \in [a,b]$ tel que :*

$$\int_a^b f(x)\,dx - T_n(f) = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(c_n)$$

et on a :

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - T_n(f)\right| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \|f''\|_\infty$$

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx - T_n(f) &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{x_{n,k}}^{x_{n,k+1}} f(x)\,dx - \frac{x_{n,k+1} - x_{n,k}}{2} \left(f(x_{n,k}) + f(x_{n,k+1})\right) \right) \\ &= -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x_{n,k+1} - x_{n,k})^3}{12} f''(c_{n,k}) = -\frac{(b-a)^3}{12n^3} \sum_{k=0}^{n-1} f''(c_{n,k})\end{aligned}$$

où chaque $c_{n,k}$ est dans $[x_{n,k}, x_{n,k+1}]$.

Le lemme 20.1 nous dit qu'il existe c_n dans $[a,b]$ tel que $\sum_{k=0}^{n-1} f''(c_{n,k}) = n \cdot f''(c_n)$. On a donc :

$$\int_a^b f(x)\,dx - T_n(f) = -\frac{(b-a)^3}{12n^3} n \cdot f''(c_n) = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(c_n)$$

et :

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - T_n(f)\right| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \|f''\|_\infty$$

■

De ce théorème, on déduit que :

$$\lim_{n \to +\infty} T_n(f) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Remarque 20.9 *Pour $n \geq 1$, on a :*

$$T_n(f) = \frac{R_n(f) + R'_n(f)}{2}$$

où $R'_n(f) = \dfrac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{n,k+1})$ est une approximation de $\int_a^b f(x)\,dx$ par la méthode composée des rectangles à droite. On a donc accéléré la convergence des suites $(R_n(f))_{n\geq 1}$ $(R'_n(f))_{n\geq 1}$ en utilisant la suite $(T_n(f))_{n\geq 1}$ formée des moyennes de $R_n(f)$ et $R'_n(f)$ avec les poids $\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{1}{2}$ respectivement.

Remarque 20.10 *On a aussi :*

$$M_n(f) = 2T_{2n}(f) - T_n(f)$$

Pour $n \geq 2$ on a :

$$T_n(f) = \frac{b-a}{n} \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{n,k}) \right).$$

En remarquant que pour tout j *compris entre* 0 *et* $n-1$ *on a :*

$$\begin{cases} x_{2n,2j} = x_{n,j} \\ x_{2n,2j+1} = x_{n,j} + \dfrac{b-a}{2n} = m_{n,j} \end{cases}$$

on déduit que :

$$\begin{aligned} T_{2n}(f) &= \frac{b-a}{2n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{j=0}^{n-1} f(x_{n,j}) + \sum_{j=0}^{n-1} f(m_{n,j})\right) \\ &= \frac{T_n(f)+M_n(f)}{2}. \end{aligned}$$

Ce résultat étant encore valable pour $n=1$.

Exercice 20.2 *Donner une suite d'approximations rationnelles de* $\ln(2)$ *et* $\frac{\pi}{4}$ *en utilisant les méthodes composées des trapèzes. Donner une expression de l'erreur d'approximation.*

Solution 20.2 *On applique, pour tout entier* $n \geq 1$, *la méthode composée des trapèzes à la fonction* $f : t \mapsto \frac{1}{1+t}$ *sur l'intervalle* $[0,1]$ *découpé en* n *intervalles égaux, ce qui donne :*

$$\ln(2) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} \backsim u_n = \frac{3}{4n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+n}.$$

Une expression de l'erreur d'approximation est donnée par :

$$|\ln(2) - u_n| \leq \frac{\|f''\|_\infty}{12n^2} = \frac{1}{6n^2}.$$

Nous verrons plus loin que la formule d'Euler-Maclaurin nous donne le développement asymptotique :

$$\begin{aligned} \ln(2) - u_n &= -\frac{b_2}{2}\left(f'(1) - f'(0)\right)\frac{1}{n^2} - \frac{b_4}{24} f^{(4)}(\xi)\frac{1}{n^4} \\ &= -\frac{1}{16n^2} + \frac{1}{30n^4}\frac{1}{(1+\xi)^5}, \end{aligned}$$

avec $\xi \in [0,1]$. *La suite* $(v_n)_{n\geq 1}$ *définie par :*

$$v_n = \frac{3}{4n} - \frac{1}{16n^2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+n}$$

converge vers $\ln(2)$ *plus vite que* $(v_n)_{n\geq 1}$.
Pour $n = 10$, *on a :*

$$u_{10} \backsim 0.69377,\ v_{10} \backsim 0.69315,\ \ln(2) \sim 0.6931472.$$

Pour $\frac{\pi}{4}$, *on procède de même avec la fonction* $f : t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ *sur l'intervalle* $[0,1]$.

Exercice 20.3 *Vérifier que, pour $n \geq 2$, la formule des trapèzes composées sur $[0, 2\pi]$ est exacte pour la fonction* $\cos$. *Qu'en est-il pour la fonction $x \mapsto |\sin(x)|$ sur $[0, \pi]$.*

Solution 20.3 *La formule composée des trapèzes pour la fonction* $\cos$ *sur $[0, 2\pi]$s'écrit :*

$$0 = \int_0^{2\pi} \cos(t)\, dt \backsim \tau_n,$$

où :

$$\begin{aligned}\tau_n &= \frac{2\pi}{n}\left(\frac{\cos(0)+\cos(2\pi)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \cos\left(k\frac{2\pi}{n}\right)\right) \\ &= \frac{2\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(k\frac{2\pi}{n}\right).\end{aligned}$$

Pour $n = 1$, on a :

$$\tau_1 = 2\pi$$

et pour $n \geq 2$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(k\frac{2\pi}{n}\right) = \Re\left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) = \Re\left(\frac{1-e^{\frac{2in\pi}{n}}}{1-e^{\frac{2i\pi}{n}}}\right) = 0.$$

La formule est donc exacte pour tout $n \geq 2$.
Pour $f(x) = |\sin(x)|$, on a $T = \pi$ et :

$$\int_0^{\pi} |\sin(x)|\, dx = 2,\ \tau_n(f) = \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \sin\left(k\frac{\pi}{n}\right) = -\frac{\pi}{n}\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n} - 1}.$$

20.6 La méthode de Simpson

Pour $p = 2$ dans la méthode de base de Newton-Cotes, on a $x_{2,0} = a$, $x_{2,1} = \dfrac{a+b}{2}$, $x_{2,2} = b$ et :

$$\begin{cases} \mu_{2,0} = \mu_{2,2} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^2 t(t-1)\, dt = \dfrac{1}{3} \\ \mu_{2,1} = -\displaystyle\int_0^2 t(t-2)\, dt = \dfrac{4}{3} \end{cases}$$

La formule de quadrature correspondante est la formule de Simpson :

$$\int_a^b f(x)\, dx \backsimeq \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right).$$

On vérifie facilement, en se plaçant sur $I = [-1, 1]$ (on s'y ramène toujours par changement de variable affine) que cette formule est exacte pour les polynômes de degré 3 mais pas pour x^4, elle est donc d'ordre 3.

La méthode composée de Simpson est définie par :

$$\begin{aligned} S_n(f) = \varphi_{n,2}(f) &= \frac{b-a}{6n}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left(f(x_{n,k}) + 4f(m_{n,k}) + f(x_{n,k+1})\right)\right) \\ &= \frac{b-a}{3n}\left(\frac{f(b)-f(a)}{2} + \sum_{k=0}^{n-1}\left(f(x_{n,k}) + 2f(m_{n,k})\right)\right) \end{aligned}$$

où on a noté $x_{n,k} = a + k\dfrac{b-a}{n}$ pour tout k compris entre 0 et n et $m_{n,k} = x_k + \dfrac{b-a}{2n}$ (le milieu de $[x_k, x_{k+1}]$) pour tout k compris entre 0 et $n-1$.

Pour une majoration de l'erreur nous utiliserons le lemme suivant, analogue à celui utilisé pour la méthode des trapèzes.

Lemme 20.7 *Soit h une fonction de classe $\mathcal{C}^4$ sur $[0,1]$ telle que $h'(0) = 0$ et $h^{(3)}(0) = 0$. Pour tout x dans $]0,1]$ il existe un réel c_x dans $[0,1]$ tel que :*

$$\int_0^x h(t)\,dt - x\frac{h(x) + 2h(0)}{3} = -\frac{h^{(4)}(c_x)}{180}x^5.$$

Démonstration. La formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 3 nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} h(x) &= h(0) + h'(0)\,x + \frac{h''(0)}{2}x^2 + \frac{h^{(3)}(0)}{3!} + \int_0^x \frac{(x-t)^3}{3!}h^{(4)}(t)\,dt \\ &= h(0) + \frac{h''(0)}{2}x^2 + \int_0^x \frac{(x-t)^3}{3!}h^{(4)}(t)\,dt. \end{aligned}$$

et :

$$\frac{h(x) + 2h(0)}{3} = h(0) + \frac{h''(0)}{3!}x^2 + \int_0^x \frac{(x-t)^3}{3\cdot 3!}h^{(4)}(t)\,dt.$$

De même, la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 2 pour la primitive de h nulle en 0, $H : x \mapsto \int_0^x h(t)\,dt$ (qui est de classe $\mathcal{C}^5$) nous donne :

$$\begin{aligned} H(x) &= H(0) + H'(0)\,x + \frac{H''(0)}{2}x^2 + \frac{H^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{H^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \int_0^x \frac{(x-t)^4}{4!}H^{(5)}(t)\,dt \\ &= h(0)\,x + \frac{h'(0)}{2}x^2 + \frac{h''(0)}{3!}x^3 + \frac{h^{(3)}(0)}{4!}x^4 + \int_0^x \frac{(x-t)^4}{4!}h^{(4)}(t)\,dt \\ &= h(0)\,x + \frac{h''(0)}{3!}x^3 + \int_0^x \frac{(x-t)^4}{4!}h^{(4)}(t)\,dt. \end{aligned}$$

On en déduit alors que :

$$\begin{aligned} \int_0^x h(t)\,dt - x\frac{h(x)+2h(0)}{3} &= H(x) - x\frac{h(x)+2h(0)}{3} \\ &= \int_0^x \frac{(x-t)^4}{4!}h^{(4)}(t)\,dt - x\int_0^x \frac{(x-t)^3}{3\cdot 3!}h^{(4)}(t)\,dt \\ &= -\int_0^x \frac{(x-t)^3}{3!}h^{(4)}(t)\left(\frac{x}{3} - \frac{x-t}{4}\right)dt \\ &= -\int_0^x \frac{(x-t)^3}{3!}h^{(4)}(t)\,\frac{x+3t}{12}dt \end{aligned}$$

Pour $x \in]0,1]$, la fonction $t \mapsto (x-t)^3(x+3t)$ étant à valeurs positives sur $[0,x]$, le théorème de la moyenne nous dit qu'il existe $c_x \in [0,x]$ tel que :

$$\begin{aligned}\int_0^x h(t)\,dt - x\frac{h(x)+2h(0)}{3} &= -\frac{h^{(4)}(c_x)}{12\cdot 3!}\int_0^x (x-t)^3(x+3t)\,dt \\ &= -\frac{h^{(4)}(c_x)}{12\cdot 3!}\frac{2}{5}x^5 = -\frac{h^{(4)}(c_x)}{180}x^5.\end{aligned}$$

■

Lemme 20.8 *Soit f une fonction à valeurs réelles de classe $\mathcal{C}^4$ sur un intervalle $[a,b]$. Il existe un réel c dans $]a,b[$ tel que :*

$$\int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right) = -\frac{(b-a)^5}{2880}f^{(4)}(c)$$

Démonstration. Le changement de variable $x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t$ avec $t \in [-1,1]$ nous ramène à l'intervalle $[-1,1]$. En définissant la fonction g sur $[-1,1]$ par :

$$g(t) = f\left(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}t\right),$$

l'erreur dans la méthode de Simpson sur $[a,b]$:

$$E(f) = \int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)$$

s'écrit alors :

$$E(f) = \frac{b-a}{2}\left(\int_{-1}^1 g(t)\,dt - \frac{1}{3}(g(-1)+4g(0)+g(1))\right).$$

En désignant par h la fonction définie sur $[-1,1]$ par $h(t) = g(-t)+g(t)$, on a :

$$E(f) = \frac{b-a}{2}\left(\int_0^1 h(x)\,dx - \frac{h(1)+2h(0)}{3}\right),$$

la fonction h étant de classe $\mathcal{C}^4$ sur $[-1,1]$ avec $h'(0) = h^{(3)}(0) = 0$ et le lemme précédent nous dit qu'il existe un réel c_1 dans $[0,1]$ tel que :

$$E(f) = -\frac{b-a}{2}\frac{h^{(4)}(c_1)}{180}x^5 = -\frac{b-a}{2}\frac{g^{(4)}(c_1)+g^{(4)}(-c_1)}{180}.$$

Comme pour la méthode du point milieu ou du trapèze, le lemme 20.1 nous dit qu'il existe d_1 dans $[-1,1]$ tels que $g^{(4)}(c_1)+g^{(4)}(-c_1) = 2g^{(4)}(d_1)$ et :

$$E(f) = -\frac{b-a}{2}\frac{g^{(4)}(d_1)}{90} = -\frac{(b-a)^5}{2^5\cdot 90}f^{(4)}(c) = -\frac{(b-a)^5}{2880}f^{(4)}(c)$$

avec $c = \frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}d_1$ dans $[a,b]$. ■

On déduit de ce lemme une majoration de l'erreur dans la méthode de base de Simpson pour une fonction f de classe $\mathcal{C}^4$ sur $[a,b]$:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)\right| \leq \frac{\left\|f^{(4)}\right\|_\infty}{2880}(b-a)^5$$

Remarque 20.11 *Cette méthode d'évaluation de l'erreur ne fonctionne pas pour les méthodes de Newton-Cotes plus générales.*

Pour la méthode composée, on en déduit le résultat suivant.

Théorème 20.9 *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^4$ sur $[a,b]$ et n un entier naturel non nul. Avec les notations qui précèdent, il existe un réel $c_n \in [a,b]$ tel que :*

$$\int_a^b f(x)\,dx - S_n(f) = -\frac{(b-a)^5}{2880n^4} f^{(4)}(c_n)$$

et on a :

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - T_n(f)\right| \leq \frac{(b-a)^5}{2880n^4} \left\|f^{(4)}\right\|_\infty$$

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx - S_n(f) &= \sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{x_{n,k}}^{x_{n,k+1}} f(x)\,dx - \frac{x_{n,k+1}-x_{n,k}}{6n}\left(f(x_{n,k})+4f(m_{n,k})+f(x_{n,k+1})\right)\right)\\ &= -\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x_{n,k+1}-x_{n,k})^5}{2880} f^{(4)}(c_{n,k}) = -\frac{(b-a)^5}{2880n^5}\sum_{k=0}^{n-1} f^{(4)}(c_{n,k})\end{aligned}$$

où chaque $c_{n,k}$ est dans $[x_{n,k}, x_{n,k+1}]$.

Le lemme 20.1 nous dit alors qu'il existe c_n dans $[a,b]$ tel que $\sum_{k=0}^{n-1} f^{(4)}(c_{n,k}) = n \cdot f^{(4)}(c_n)$. On a donc :

$$\int_a^b f(x)\,dx - S_n(f) = -\frac{(b-a)^5}{2880n^5} n \cdot f^{(4)}(c_n) = -\frac{(b-a)^5}{2880n^4} f^{(4)}(c_n)$$

et :

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - S_n(f)\right| \leq \frac{(b-a)^5}{2880n^4} \left\|f^{(4)}\right\|_\infty$$

■

De ce théorème, on déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(f) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Remarque 20.12 *Pour tout entier $n \geq 1$ on a :*

$$S_n(f) = \frac{T_n(f) + 2M_n(f)}{3}$$

et :

$$S_n(f) = \frac{4T_{2n}(f) - T_n(f)}{3}$$

(c'est la première étape dans la méthode d'accélération de Romberg).
Pour la première formule, il suffit de la vérifier pour les méthodes de base, c'est-à-dire dans le cas $n = 1$. Dans ce cas on a :

$$S_1(f) = \frac{1}{3}\left(\frac{b-a}{2}\left(f(a) + f(b) + 2(b-a)f(m)\right)\right)$$

où $m = \dfrac{a+b}{2}$*, ce qui donne bien la relation :*

$$S_1(f) = \frac{T_1(f) + 2R_1(f)}{3}.$$

Puis en éliminant $M_n(f)$ *dans les équations :*

$$\begin{cases} S_n(f) = \dfrac{T_n(f) + 2M_n(f)}{3} \\ T_{2n}(f) = \dfrac{T_n(f) + M_n(f)}{2} \end{cases}$$

on obtient :

$$4T_{2n}(f) - 3S_n(f) = T_n(f),$$

soit $S_n(f) = \dfrac{4T_{2n}(f) - T_n(f)}{3}$.

Huitième partie

Probabilités

21

Espaces probabilisés

21.1 Introduction

De façon intuitive, une expérience aléatoire est une expérience dont le résultat ne peut être annoncé avec certitude a priori, c'est-à-dire avant la réalisation de cette expérience.

Un schéma concret souvent utilisé, pour rendre intuitif le calcul des probabilités, est celui d'un dé dont les six faces sont identiques, c'est-à-dire qui ont la même probabilité (au sens intuitif, pour l'instant) de chute.

On dira qu'un lancé de dé est une expérience aléatoire (aléa est un mot latin signifiant jeu de dé).

Le résultat d'un tel lancé est une éventualité (on dit aussi une épreuve) et l'ensemble de toutes les éventualités est appelé l'espace fondamental (on dit aussi l'univers) de l'expérience et est souvent noté Ω. Un événement est une proposition logique susceptible de se produire ou non à l'issue de la réalisation d'une expérience aléatoire. Enfin à chaque événement on essayera d'associer un nombre $p \in [0, 1]$ qui devra mesurer la probabilité pour que cet événement se produise.

L'origine du calcul des probabilités se trouve dans les jeux de hasard (le mot « hasard », transmis par les espagnols, vient de l'arabe « az-zahr » qui signifie « dé à jouer »).

Pascal et Fermat ont été les premiers, au 17ème siècle, à mathématiser cette théorie. Puis, à partir du 18ème siècle, de nombreux mathématiciens se sont intéressés à ce calcul (Laplace, Poisson, Gauss, Poincaré, Borel, Frechet, Levy, Kolmogorov, Khintchine, ...).

C'est Kolmogorov qui est considéré comme le fondateur (en 1933) de la théorie axiomatique moderne des probabilités.

Le langage de la théorie des ensembles permet de modéliser de façon efficace la notion d'expérience aléatoire.

On pourra consulter le chapitre 1 du cours d'algèbre pour les notions de base sur les ensembles et le chapitre 2 pour l'analyse combinatoire.

21.2 Événements

On désigne par Ω un ensemble non vide dont les éléments représentent tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire donnée $\mathcal{E}$.

Les éléments de Ω sont appelés éventualités ou épreuves, les parties (ou sous-ensembles) de Ω sont appelés événements et Ω est appelé univers ou espace fondamental.

Remarque 21.1 *La notion d'éventualité dépend de ce qui intéresse l'expérimentateur.*
Pour le lancé d'un dé équilibré, si on s'intéresse au résultat de la face supérieure, on prendra

pour univers $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *, mais si on s'intéresse à la parité du numéro de cette face, on prendra* $\Omega = \{Pair, Impair\}$ *ou* $\Omega = \{0, 1\}$ *(*0 *pour pair et* 1 *pour impair).*

Remarque 21.2 *L'univers* Ω *n'est pas nécessairement dénombrable (fini ou infini).*
Si on considère l'exemple d'un lancé de fléchettes sur une cible, en admettant que le joueur lance la fléchette assez fort pour atteindre le plan de la cible, une éventualité est le point d'impact de la fléchette sur le plan de la cible et Ω *est une partie de* $\mathbb{R}^2$*.*
On peut aussi prendre pour éventualité la distance du centre de la cible au point d'impact de la cible et on prendra $\Omega = \mathbb{N}$ *si on fait les mesures à un centimètre près.*
On peut aussi prendre pour éventualité, le gain correspondant au point d'impact et dans ce cas $\Omega = \{0, 20, 50, 100\}$ *.*

On dira qu'une expérience aléatoire est discrète si l'univers est dénombrable (fini ou infini) et on dira qu'elle est continue si l'espace fondamental est infini non dénombrable (par exemple, Ω peut être $\mathbb{R}^3$, un intervalle de $\mathbb{R}$,...).

Exemple 21.1 *Sachant que deux candidats* C_1, C_2 *à une élection ont obtenus respectivement* m *et* n *voix, avec* $m > n$*, quelle est la probabilité pour que, dans le dépouillement,* C_1 *ait constamment la majorité ?*
On est ici dans le cas discret fini et on peut montrer que la probabilité cherchée est : $p = \dfrac{m-n}{m+n}$.

Exemple 21.2 *Deux entiers positifs étant choisis au hasard, quelle est la probabilité pour qu'ils soient premiers entre eux ?*
On est ici dans le cas discret dénombrable infini (on peut prendre pour Ω *l'ensemble des* pgcd *de deux entiers) et on peut montrer que la probabilité cherchée est* $p = \dfrac{1}{\zeta(2)}$*, où* $\zeta(k) = \sum\limits_{n \geq 1} \dfrac{1}{n^k}$ *est la fonction dzéta de Riemann. De manière plus générale, la probabilité pour que* r *nombres entiers positifs soient premiers entre eux est* $p = \dfrac{1}{\zeta(r)}$.

Exemple 21.3 *Sur un plan, on trace des droites parallèles distantes de* d *et on jette une aiguille de longueur* $\ell < d$*. Quelle est la probabilité pour que cette aiguille rencontre l'une des droites ?*
On est ici dans le cas continu et on peut montrer que la probabilité cherchée est $p = \dfrac{2\ell}{\pi d}$ *(problème de l'aiguille de Buffon).*
En 1777 Buffon réalisa cette expérience avec 2048 *essais ce qui lui permit d'obtenir une estimation de* π *avec une décimale exacte.*

On note $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω.

Les opérations sur les ensembles s'interprètent, en termes d'événements, comme indiqué dans le tableau suivant :

Ensemble	**Événement**
L'ensemble vide $\emptyset$	Événement impossible
L'univers Ω	Événement certain
Un singleton $\{\omega\}$ où $\omega \in \Omega$	Un événement élémentaire
Un sous-sensemble A de Ω	Un événement
$\omega \in A$	Le résultat ω est une réalisation possible de A
$A \subset B$	si A est réalisé, alors B est réalisé
Le complémentaire $\Omega \setminus A$ de A dans Ω	Événement contraire de A
$A \cap B$	Réalisation simultanée de A et B
$A \cap B = \emptyset$	Les événements A et B sont incompatibles
$A \cup B$	Réalisation de A ou B
$(A_i)_{i\in I}$ une partition dénombrable de Ω	$(A_i)_{i\in I}$ est un système complet d'événements

21.3 Tribus d'événements, espaces probabilisables

On se donne un univers Ω.

Définition 21.1 *On appelle tribu (ou σ-algèbre d'événements, ou famille d'événements observables) sur Ω toute partie $\mathcal{B}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ telle que :*
- *$\Omega \in \mathcal{B}$;*
- *$\forall A \in \mathcal{B},\ \Omega \setminus A \in \mathcal{B}$ ($\mathcal{B}$ est stable par passage au complémentaire) ;*
- *Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{B}$ alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{B}$ ($\mathcal{B}$ est stable par réunions dénombrables).*

Remarque 21.3 *Si on impose seulement la stabilité de $\mathcal{B}$ par réunion finie, on parle alors d'algèbre d'événements (ou d'algèbre de Boole). Le préfixe σ fait référence à la possibilité d'utiliser des réunions infinies dénombrables d'événements.*
Il est facile de vérifier qu'une σ-algèbre est une algèbre.

Définition 21.2 *Si $\mathcal{B}$ est une tribu sur Ω, on dit alors que le couple $(\Omega, \mathcal{B})$ est un espace probabilisable (ou mesurable).*

Exemple 21.4 *$\mathcal{B} = \{\emptyset, \Omega\}$ (tribu triviale, c'est la plus petite) ; $\mathcal{B} = \{\emptyset, A, \Omega \setminus A, \Omega\}$ où A est une partie non vide distincte de Ω ; $\mathcal{B} = \mathcal{P}(\Omega)$ (tribu grossière, c'est la plus grande) sont des tribus sur Ω.*

On vérifie facilement le résultat suivant.

Théorème 21.1 *Si $(\Omega, \mathcal{B})$ est un espace probabilisable, on a alors :*
- *$\emptyset \in \mathcal{B}$;*
- *si A, B sont dans $\mathcal{B}$, alors $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ et $A \triangle B$ sont dans $\mathcal{B}$;*
- *si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{B}$ alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{B}$ ($\mathcal{B}$ est stable par intersection dénombrable).*

Démonstration. On a :

— $\emptyset = \Omega \setminus \Omega \in \mathcal{B}$.
— $A \cup B = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{B}$ en posant $A_0 = A$, $A_1 = B$ et $A_n = \emptyset$ pour $n \geq 2$.
$\Omega \setminus (A \cap B) = (\Omega \setminus A) \cup (\Omega \setminus B) \in \mathcal{B}$, donc $A \cap B = \Omega \setminus (\Omega \setminus (A \cap B)) \in \mathcal{B}$.
$A \setminus B = A \cap (\Omega \setminus B) \in \mathcal{B}$ et $A \bigtriangleup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \in \mathcal{B}$.
— Et :

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \Omega \setminus \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Omega \setminus A_n \right) \in \mathcal{B}.$$

■

En considérant des suites $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{B}$ telles que $A_n = \emptyset$ pour n assez grand, on voit qu'une tribu est stable par réunions et intersections finies.

Lemme 21.1 *Si $(\mathcal{B}_i)_{i \in I}$ est une famille de tribus sur Ω, alors $\mathcal{B} = \bigcap\limits_{i \in I} \mathcal{B}_i$ est aussi une tribu sur Ω.*

Démonstration. On a $\Omega \in \mathcal{B}_i$ pour tout $i \in I$, donc $\Omega \in \mathcal{B}$.

Pour tout A dans $\mathcal{B}$, on a $A \in \mathcal{B}_i$ pour tout $i \in I$, donc $\Omega \setminus A \in \mathcal{B}_i$ pour tout $i \in I$ et $\Omega \setminus A \in \mathcal{B}$.

Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{B}$, on a alors $A_n \in \mathcal{B}_i$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $i \in I$, donc $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{B}_i$ pour tout $i \in I$ et $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{B}$.

On a donc ainsi montré que $\mathcal{B}$ est une tribu sur Ω. ■

Définition 21.3 *Si $\mathcal{X}$ est une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$, on dit alors que l'intersection de toutes les tribus sur Ω qui contiennent $\mathcal{X}$ est la tribu engendrée par $\mathcal{X}$.*

Comme $\mathcal{P}(\Omega)$ est tribu sur Ω qui contient $\mathcal{X}$, il existe bien de telles tribus.

On note $\sigma(\mathcal{X})$ la tribu engendrée par une partie $\mathcal{X}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ et on a :

$$\sigma(\mathcal{X}) = \bigcap_{\substack{\mathcal{B} \text{ tribu} \\ \mathcal{X} \subset \mathcal{B}}} \mathcal{B}$$

Remarque 21.4 *La tribu engendrée par $\mathcal{X}$ est aussi la plus petite tribu sur Ω (pour l'ordre de l'inclusion sur $\mathcal{P}(\Omega)$) qui contient $\mathcal{X}$.*

Exercice 21.1 *Soient $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ deux parties de $\mathcal{P}(\Omega)$.*

1. *Montrer que si $\mathcal{X} \subset \sigma(\mathcal{Y})$, on a alors $\sigma(\mathcal{X}) \subset \sigma(\mathcal{Y})$.*
2. *Montrer que si $\mathcal{X} \subset \mathcal{Y}$, on a alors $\sigma(\mathcal{X}) \subset \sigma(\mathcal{Y})$.*

Solution 21.1

1. *Résulte du fait que $\sigma(\mathcal{X})$ est la plus petite tribu sur Ω qui contient $\mathcal{X}$.*
2. *Résulte de $\mathcal{X} \subset \mathcal{Y} \subset \sigma(\mathcal{Y})$.*

La définition qui suit nous sera utile pour définir les variables aléatoires réelles.

Définition 21.4 *La tribu borélienne sur $\mathbb{R}$ est la tribu sur $\mathbb{R}$ engendrée par l'ensemble des intervalles réels (finis ou non).*
On la note $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

Théorème 21.2 *La tribu borélienne sur* $\mathbb{R}$ *est engendrée par la famille des intervalles de la forme* $]-\infty, x]$ *où* x *décrit* $\mathbb{R}$. *Elle est aussi engendrée par la famille des intervalles de la forme* $]x, y]$ *où* $x < y$ *dans* $\mathbb{R}$.
Cela signifie que :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{\mathbb{R}} &= \sigma \{]-\infty, x] \mid x \in \mathbb{R}\} \\ &= \sigma \{]x, y] \mid x < y \text{ dans } \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Démonstration. Notons $\mathcal{X}$ l'ensemble de tous les intervalles réels, $\mathcal{X}_1 = \{]-\infty, x] \mid x \in \mathbb{R}\}$ et $\mathcal{X}_2 = \{]x, y] \mid x < y \text{ dans } \mathbb{R}\}$.

De $\mathcal{X}_1 \subset \mathcal{X}$ et $\mathcal{X}_2 \subset \mathcal{X}$, on déduit que $\sigma(\mathcal{X}_1) \subset \sigma(\mathcal{X}) = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ et $\sigma(\mathcal{X}_2) \subset \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

L'inclusion réciproque $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subset \sigma(\mathcal{X}_1)$ se déduit de :

— $]-\infty, x[= \bigcup\limits_{n \geq 1} \left]-\infty, x - \frac{1}{n}\right] \in \sigma(\mathcal{X}_1)$;
— $]x, +\infty[= \mathbb{R} \setminus]-\infty, x] \in \sigma(\mathcal{X}_1)$;
— $[x, +\infty[= \mathbb{R} \setminus]-\infty, x[\in \sigma(\mathcal{X}_1)$;
— $[x, y] = [x, +\infty[\cap]-\infty, y] \in \sigma(\mathcal{X}_1)$ pour $x \leq y$;
— $]x, y[=]x, +\infty[\cap]-\infty, y[\in \sigma(\mathcal{X}_1)$ pour $x \leq y$ (c'est $\emptyset$ pour $x = y$) ;
— $[x, y[= \{x\} \cup]x, y[$ pour $x \leq y$;
— $]x, y] =]x, y[\cup \{y\}$ pour $x \leq y$.

On procède de manière analogue pour l'inclusion $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subset \sigma(\mathcal{X}_2)$. Ou alors, on peut montrer directement que $\sigma(\mathcal{X}_1) = \sigma(\mathcal{X}_2)$. ∎

Lemme 21.2 *Si* $\Omega = \{\omega_i \mid i \in I\}$ *est dénombrable avec* $I \subset \mathbb{N}$, *alors* $\mathcal{P}(\Omega)$ *est la tribu engendré par les événements élémentaires* $\{\omega_i\}$ *où* $i \in I$.

Démonstration. Soit $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ la tribu engendrée par les événements élémentaires. Toute partie A de Ω s'écrivant $A = \bigcup\limits_{j \in J} \{\omega_j\}$ avec $J \subset I \subset \mathbb{N}$ et $\{\omega_j\} \subset \Omega$, elle est dans $\mathcal{B}$ comme réunion dénombrable d'éléments de $\mathcal{B}$. On a donc $\mathcal{B} = \mathcal{P}(\Omega)$. ∎

Dans le cas où Ω est dénombrable, on prend usuellement $\mathcal{P}(\Omega)$ pour tribu.

21.4 Espaces probabilisés

Étant donnée une expérience aléatoire $\mathcal{E}$, on s'intéresse à la probabilité de réalisation d'un événement A. Pour cela, une idée naturelle est de répéter un grand nombre de fois l'expérience dans les mêmes conditions. Si pour n expériences, on note $n(A)$ le nombre de fois où A est réalisé, la quantité $f(A) = \frac{n(A)}{n}$ est la fréquence statistique de réalisation de A sur n coups. Plus n sera grand, plus $f(A)$ se rapprochera d'une quantité qui sera la probabilité de réalisation de A.

Il est donc naturel de poser :

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n(A)}{n}$$

Mais en général cette quantité n'est pas directement calculable.

De plus, si on fait plusieurs séries d'expériences, on aura des évaluations différentes de cette limite (dont l'existence n'est pas toujours assurée). Un autre inconvénient de cette définition est qu'il faut faire des expériences pour avoir une idée de la probabilité de réalisation de A, alors que le but est justement d'avoir une idée de cette probabilité avant toute expérience. D'où la nécessité de donner des définitions axiomatiques à partir des résultats sur les fréquences statistiques.

Avec $0 \leq n(A) \leq n$, on déduit que $\mathbb{P}(A) \in [0,1]$, en notant Ω l'univers associé à cette expérience, on a $n(\Omega) = n$ et $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ et pour A, B événements incompatibles, on a $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$, donc $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Ces considérations nous conduisent à la définition suivante, où $(\Omega, \mathcal{B})$ est un espace probabilisable.

Définition 21.5 *On appelle probabilité (ou mesure de probabilité) sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{B})$ toute application $\mathbb{P} : \mathcal{B} \to [0,1]$ telle que :*

— $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ *;*

— *pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements deux à deux incompatibles dans $\mathcal{B}$ (i. e. $A_n \cap A_m = \emptyset$ pour $n \neq m$ dans $\mathbb{N}$), la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ est convergente et on a :*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$$

(σ-additivité de $\mathbb{P}$).

Avec ces conditions, on dit que le triplet $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé.

Dans ce qui suit, $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé.

Théorème 21.3 *On a les propriétés suivantes, où A, B, A_k désignent des événements dans $\mathcal{B}$:*

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ *;*
2. *si A et B sont deux événements incompatibles, on a alors $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$;*
3. *si $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ est une suite d'événements deux à deux incompatibles, on a alors :*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)$$

4. $\mathbb{P}(\Omega \setminus A) = 1 - \mathbb{P}(A)$ *;*
5. *si $A \subset B$ alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ ($\mathbb{P}$ est croissante) ;*
6. *si $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ est un système complet d'événements, on a alors pour tout $A \in \mathcal{B}$:*

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A \cap A_k)$$

7. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ *;*
8. *si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, alors :*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) = 1.$$

9. *si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante dans $\mathcal{B}$ (c'est-à-dire que $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$) alors :*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

(continuité croissante de $\mathbb{P}$) ;

10. *si* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite décroissante dans* $\mathcal{B}$ *(c'est-à-dire que* $A_{n+1} \subset A_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*) alors :*
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$
(continuité décroissante de $\mathbb{P}$*) ;*
11. *si* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite d'événements, alors :*
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$$
où $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$ *peut valoir* $+\infty$ *(inégalité de Boole). Ce résultat se traduit en disant que* $\mathbb{P}$ *est sous-additive.*

Démonstration.

1. La suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $A_n = \emptyset$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est formée d'événements deux à deux incompatibles et avec :
$$0 \leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(\emptyset) \leq 1$$
on déduit $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
2. En utilisant la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ formée d'événements deux à deux incompatibles définie par $A_1 = A$, $A_2 = B$ et $A_n = \emptyset$ pour tout $n \geq 3$, on a :
$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \sum_{n\geq 3} \mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$
3. Par récurrence, on en déduit que si $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ est une suite d'événements deux à deux incompatibles, on a alors :
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)$$
4. Résulte de :
$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A \cup (\Omega \setminus A)) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\Omega \setminus A).$$
5. Pour $A \subset B$, on a $B = A \cup (B \setminus A)$ et :
$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cup (B \setminus A)) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A) \geq \mathbb{P}(A)$$
6. Si $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ est un système complet d'événements, on a alors, pour tout $A \in \mathcal{B}$:
$$A = A \cap \Omega = A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \bigcup_{k=1}^{n} A \cap A_k$$
les événements $A \cap A_k$ étant deux à deux incompatibles, ce qui donne :
$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A \cap A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A \cap A_k)$$

7. Comme $(B, \Omega \setminus B)$ et $(A, \Omega \setminus A)$ sont deux systèmes complets d'événements, on a :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap (\Omega \setminus B)) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \setminus B)$$
$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap A) + \mathbb{P}(B \setminus A)$$

et en utilisant la partition :

$$A \cup B = (A \cap B) \cup (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

on déduit que :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cup B) &= \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(B \setminus A) \\ &= \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(B \cap A) \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)\end{aligned}$$

8. Résulte de $\Omega = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n$ et de $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

9. $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} p_k,$

10. Comme la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, la suite réelle $(\mathbb{P}(A_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante majorée par 1, donc convergente. En utilisant la partition :

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = A_0 \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_{k+1} \setminus A_k)$$

on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \mathbb{P}(A_0) + \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(A_n \setminus A_{n-1}).$$

avec :

$$\mathbb{P}(A_n \setminus A_{n-1}) = \mathbb{P}(A_n) - \mathbb{P}(A_{n-1})$$

(on a $A_{n-1} \subset A_n$ pour tout $n \geq 1$), ce qui donne :

$$\mathbb{P}(A_0) + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k \setminus A_{k-1}) = \mathbb{P}(A_0) + \sum_{k=1}^{n} (\mathbb{P}(A_k) - \mathbb{P}(A_{k-1})) = \mathbb{P}(A_n)$$

et :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \mathbb{P}(A_0) + \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k \setminus A_{k-1}) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

11. Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, alors $(\Omega \setminus A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) &= 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\Omega \setminus A_n)\right) = 1 - \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(\Omega \setminus A_n) \\ &= \lim_{n \to +\infty} (1 - \mathbb{P}(\Omega \setminus A_n)) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(A_n).\end{aligned}$$

12. De **7.** on déduit que, pour tous A, B dans $\mathcal{B}$, on a :

$$\mathbb{P}(A \cup B) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$

et par récurrence on déduit que :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \leq \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(A_k)$$

ce qui donne :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \leq \sum_{k=0}^{n} \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_k) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$$

(la suite $\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante).

■

Exercice 21.2 *Soit $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Montrer que pour $A \in \mathcal{B}$ l'égalité $\mathbb{P}(A) = 0$ n'entraîne pas nécessairement que A est l'événement impossible.*

Solution 21.2 *On considère l'expérience aléatoire $\mathcal{E}$ qui consiste à lancer une infinité de fois une pièce équilibrée et l'événement :*

$$A = \text{« obtenir Pile à tous les lancés »}$$

On $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$ avec :

$$A_n = \text{« obtenir Pile aux lancés } 1 \text{ à } n \text{ »}$$

Comme $A_{n+1} \subset A_n$, on a :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n}$$

et $A \neq \emptyset$. En prenant $\Omega = \{P, F\}^{\mathbb{N}^*}$, on a $A = \{(P, \cdots, P, \cdots)\}$.

Théorème 21.4 (formule de Poincaré) *Si $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ est une suite d'événements dans $\mathcal{B}$, on a alors :*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} p_{k,n}$$

où on a noté pour $1 \leq k \leq n$:

$$p_{k,n} = \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k})$$

Démonstration. On procède par récurrence sur $n \geq 1$.
Pour $n = 1$, c'est clair.
Pour $n = 2$, on utilise les partitions :

$$A_1 \cup A_2 = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_1)$$

avec :

$$\left\{\begin{array}{l} A_1 = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \setminus A_2) \\ A_2 = (A_1 \cap A_2) \cup (A_2 \setminus A_1) \end{array}\right.$$

ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1) &= \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + \mathbb{P}(A_1 \setminus A_2) \\ \mathbb{P}(A_2) &= \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + \mathbb{P}(A_2 \setminus A_1)\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) &= \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + \mathbb{P}(A_1 \setminus A_2) + \mathbb{P}(A_2 \setminus A_1) \\ &= \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + \mathbb{P}(A_1) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) \\ &= \mathbb{P}(A_1) + \mu(A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2)\end{aligned}$$

Supposons le résultat acquis pour $n \geq 2$ et soit $(A_k)_{1 \leq k \leq n+1}$ une suite d'événements dans $\mathcal{B}$.

En notant $B = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$, le cas $n = 2$, nous donne :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right) = \mathbb{P}(A_{n+1}) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A_{n+1} \cap B)$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k})$$

donc :

$$\mathbb{P}(A_{n+1}) + \mathbb{P}(B) = \sum_{i_1=1}^{n+1} \mathbb{P}(A_{i_1}) + \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k < n+1} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k})$$

et :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_{n+1} \cap B) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k \cap A_{n+1}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_j \leq n} \mathbb{P}\left(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_j} \cap A_{n+1}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_j < i_{j+1} = n+1} \mathbb{P}\left(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_j} \cap A_{i_{j+1}}\right)\end{aligned}$$

Le changement d'indice $k = j + 1$ dans cette dernière somme nous donne :

$$\mathbb{P}(A_{n+1} \cap B) = \sum_{k=2}^{n+1} (-1)^{k} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_{k-1} < i_k = n+1} \mathbb{P}\left(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_{k-1}} \cap A_{i_k}\right)$$

Donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right) &= \sum_{i_1=1}^{n+1} \mathbb{P}(A_{i_1}) + \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k < n+1} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) \\ &\quad + \sum_{k=2}^{n+1} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_{k-1} < i_k = n+1} \mathbb{P}\left(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_{k-1}} \cap A_{i_k}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n+1} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k})\end{aligned}$$

en utilisant, pour tout k compris entre 2 et $n+1$ la partition :

$$\begin{aligned}\{(i_1,\cdots,i_k)\mid 1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n+1\} &= \{(i_1,\cdots,i_k)\mid 1\leq i_1<\cdots<i_k<n+1\}\\ &\cup\{(i_1,\cdots,i_{k-1},n+1)\mid 1\leq i_1<\cdots<i_{k-1}<n+1\}\end{aligned}$$

■

Exercice 21.3 *Montrer qu'une application $\mathbb{P}:\mathcal{B}\to[0,1]$ est une probabilité sur l'espace probabilisable $(\Omega,\mathcal{B})$ si, et seulement si :*

- $\mathbb{P}(\Omega)=1$ *;*
- *pour tous événements A,B incompatibles dans $\mathcal{B}$, on a $\mathbb{P}(A\cup B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)$ (on dit que l'application $\mathbb{P}$ est additive) ;*
- *si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante dans $\mathcal{B}$, alors :*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n\right)=\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(A_n)$$

Solution 21.3 *On sait déjà que la condition est nécessaire.*
Montrons qu'elle est suffisante.
Avec la deuxième condition, on vérifie facilement par récurrence que si $(B_k)_{0\leq k\leq n}$ est une suite d'événements deux à deux incompatibles, on a alors :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n}B_k\right)=\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(B_k)$$

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements deux à deux incompatibles dans $\mathcal{B}$. La suite d'événements $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $B_n=\bigcup\limits_{k=0}^{n}A_k$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, est croissante et avec :

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}B_n$$

on déduit que :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n\right)=\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}B_n\right)&=\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(B_n)\\ &=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(A_k)\end{aligned}$$

ce qui signifie que la série $\sum\mathbb{P}(A_n)$ est convergente avec :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n\right)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{P}(A_n)$$

Exercice 21.4 *Soit $\mathcal{B}=\{A_1,\cdots,A_m\}$ une tribu finie sur Ω. Montrer qu'une application $\mathbb{P}:\mathcal{B}\to[0,1]$ est une probabilité sur l'espace probabilisable $(\Omega,\mathcal{B})$ si, et seulement si :*

- $\mathbb{P}(\Omega)=1$ *;*
- *pour tous événement A,B incompatibles, on a $\mathbb{P}(A\cup B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)$.*

Solution 21.4 *On sait déjà que la condition est nécessaire.*
Montrons qu'elle est suffisante.
Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite croissante d'événements dans* $\mathcal{B}$. *Comme la tribu* $\mathcal{B}$ *est finie, il existe un nombre fini d'événements* $B_{i_1}, \cdots, B_{i_k}$, *où* $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m$, *tels que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, B_n *soit l'un des* B_{i_j} *et en notant* $p = \max\limits_{1\leq j\leq k} i_j$, *on a :*

$$\forall n \geq p,\ B_p \subset B_n = B_{i_j} \subset B_p$$

donc $B_n = B_p$ *pour* $p \geq n$ *et :*

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcup_{j=1}^{p} B_j = B_p$$

ce qui donne :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \mathbb{P}(B_p) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B_n)$$

et $\mathbb{P}$ *est une probabilité.*

21.5 Espaces probabilisés discrets

On suppose ici que $\Omega = \{\omega_i \mid i \in I\}$ est dénombrable avec $I \subset \mathbb{N}$ et on prend $\mathcal{B} = \mathcal{P}(\Omega)$ pour tribu d'événements.

Le théorème qui suit nous dit que, dans le cas où l'univers est dénombrable, une probabilité est uniquement déterminée par les probabilités élémentaires $\mathbb{P}(\{\omega\})$.

Théorème 21.5 *Une application* $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ *telle que :*

$$\sum_{\omega\in\Omega} \mathbb{P}(\{\omega\}) = 1$$

est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ *si, et seulement si :*

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega),\ \mathbb{P}(A) = \sum_{\omega\in A} \mathbb{P}(\{\omega\})$$

Démonstration. Si $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ telle que :

$$\sum_{\omega\in\Omega} \mathbb{P}(\{\omega\}) = 1$$

est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$, on a alors pour toute partie A de Ω :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{\omega\in A} \{\omega\}\right) = \sum_{\omega\in A} \mathbb{P}(\{\omega\})$$

puisque la réunion est dénombrable et les événements élémentaires $\{\omega\}$ sont deux à deux disjoints.

Réciproquement, soit $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ telle que :

$$\left(\sum_{\omega\in\Omega} \mathbb{P}(\{\omega\}) = 1\right) \text{ et } \left(\forall A \in \mathcal{P}(\Omega),\ \mathbb{P}(A) = \sum_{\omega\in A} \mathbb{P}(\{\omega\})\right)$$

On a $\mathbb{P}(\Omega) = \sum\limits_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\{\omega\}) = 1$ et pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'événements deux à deux incompatibles dans $\mathcal{B}$, on peut écrire (a priori dans $\overline{\mathbb{R}^+} = [0, +\infty]$) :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{\omega \in A_n} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n} \mathbb{P}(\{\omega\})$$

$$= \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \in [0, 1]$$

et $\mathbb{P}$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$. ■

Exemple 21.5 *Pour $\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$ fini, la probabilité uniforme est définie par :*

$$\forall \omega \in \Omega,\ \mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{n} = \frac{1}{\operatorname{card}(\Omega)}$$

ce qui signifie que pour toute partie A de Ω, on a :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{\operatorname{card}(A)}{\operatorname{card}(\Omega)}$$

(c'est le quotient du nombre de cas favorables par le nombre de cas possibles).
Dans cette situation, on dit qu'on est dans le cadre de l'équiprobabilité et les outils de dénombrement nous seront utiles pour calculer des probabilités.

Exemple 21.6 *Pour $p \in \left]0, 1\right[$ et $\Omega = \{0, \cdots, n\}$ fini, on définit une unique probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ avec :*

$$\forall k \in \{0, 1, \cdots, n\},\ \mathbb{P}(\{k\}) = C_n^k p^k (1 - k)^{n-k}$$

(loi binomiale de paramètres $p \in \left]0, 1\right[$ et $n \in \mathbb{N}^*$).
En effet, on a $\mathbb{P}(\{k\}) \geq 0$ pour tout k compris entre 0 et n et :

$$\sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1 - k)^{n-k} = (p + 1 - p)^n = 1.$$

Exemple 21.7 *Pour $\lambda > 0$ et $\Omega = \mathbb{N}$, on définit une unique probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ avec :*

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(\{k\}) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

(loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$).
En effet, on a $\mathbb{P}(\{k\}) \geq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et :

$$\sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\{\omega\}) = e^{-\lambda} \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1.$$

Exemple 21.8 *Pour $p \in \left]0, 1\right[$ et $\Omega = \mathbb{N}$, on définit une unique probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ avec :*

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(\{k\}) = p(1 - p)^k$$

(loi géométrique de paramètre $p \in \left]0, 1\right[$).
En effet, on a $\mathbb{P}(\{k\}) \geq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et :

$$\sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\{\omega\}) = p \sum_{k \in \mathbb{N}} (1 - p)^k = \frac{p}{1 - (1 - p)} = 1.$$

Exercice 21.5 *Soit l'univers* $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$. *Laquelle des fonctions* $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ *suivantes définit une probabilité sur* Ω *?*

1. $\mathbb{P}(\{\omega_1\}) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(\{\omega_2\}) = \frac{1}{3}$, $\mathbb{P}(\{\omega_3\}) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(\{\omega_4\}) = \frac{1}{5}$.
2. $\mathbb{P}(\{\omega_1\}) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(\{\omega_2\}) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(\{\omega_3\}) = \frac{1}{8}$, $\mathbb{P}(\{\omega_4\}) = \frac{1}{8}$.

Solution 21.5

1. $\sum \mathbb{P}(\{\omega_j\}) \neq 1$, *donc ce n'est pas probabilité.*
2. *On a* $\mathbb{P}(\{\omega_j\}) \geq 0$ *et* $\sum \mathbb{P}(\{\omega_j\}) = 1$, *donc c'est une probabilité.*

Exercice 21.6 *Soit l'univers* $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ *et* $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ *une mesure de probabilité.*

1. *Calculer* $\mathbb{P}(\{\omega_1\})$ *et* $\mathbb{P}(\{\omega_2\})$ *en supposant que :*

$$\mathbb{P}(\{\omega_1\}) = 2\mathbb{P}(\{\omega_2\})$$
$$\mathbb{P}(\{\omega_3\}) = \mathbb{P}(\{\omega_4\}) = \frac{1}{4}$$

2. *Calculer* $\mathbb{P}(\{\omega_1\})$ *en supposant que :*

$$\mathbb{P}(\{\omega_2\}) = \frac{1}{3}$$
$$\mathbb{P}(\{\omega_2, \omega_3\}) = \frac{2}{3}$$
$$\mathbb{P}(\{\omega_2, \omega_4\}) = \frac{1}{4}$$

Solution 21.6

1. $\mathbb{P}(\{\omega_2\}) = \frac{1}{6}$ *et* $\mathbb{P}(\{\omega_1\}) = \frac{1}{3}$.
2. $\mathbb{P}(\{\omega_1\}) = \frac{1}{6}$.

Exercice 21.7 *On considère l'expérience aléatoire qui consiste à jeter* 3 *fois une pièce de monnaie équilibrée.*

1. *Donner un univers adapté à cette expérience.*
2. *Calculer la probabilité d'obtenir exactement une fois pile.*
3. *Calculer la probabilité d'obtenir au moins une fois pile.*

Solution 21.7 *Laissée au lecteur.*

Exercice 21.8 *On considère l'expérience aléatoire qui consiste à jeter* 10 *fois une pièce de monnaie équilibrée.*

1. *Calculer la probabilité d'obtenir* 10 *pile consécutifs.*
2. *On répète l'expérience* 4000 *fois. Calculer la probabilité d'obtenir au moins une fois* 10 *pile consécutifs.*

Solution 21.8 *Laissée au lecteur.*

Exercice 21.9 *On considère une course de chevaux avec* 10 *partants numérotés de* 1 *à* 10 *et on s'intéresse à l'ordre d'arrivée. On suppose les concurrents de force égale et qu'il n'y a pas d'ex-aequo.*

1. *Donner un univers adapté à cette expérience.*
2. *Calculer la probabilité pour que le numéro* 4 *arrive le premier.*
3. *Calculer la probabilité pour que le numéro* 4 *arrive dans les* 3 *premiers.*

Solution 21.9 *Laissée au lecteur.*

Exercice 21.10 *On considère le jeu de loto où il s'agit de choisir* 6 *numéros distincts parmi les numéros* $\{1, \cdots, 49\}$, *les boules portant les* 49 *numéros étant parfaites.*

1. *Donner un univers adapté à cette expérience.*
2. *Calculer la probabilité de gagner le premier prix avec un bulletin.*

Solution 21.10 *Laissée au lecteur.*

Exercice 21.11 *On pipe un dé de sorte que la probabilité du résultat obtenu quand on jette ce dé soit proportionnelle au résultat (par exemple* 6 *a une probabilité deux fois plus grande que* 3 *de sortir).*

1. *Calculer* $\mathbb{P}(\{k\})$ *pour tout* k *compris entre* 1 *et* 6.
2. *Calculer la probabilité d'obtenir un nombre pair.*
3. *Calculer la probabilité d'obtenir un nombre premier.*

Solution 21.11

1. $\mathbb{P}(\{1\}) = p$, $\mathbb{P}(\{k\}) = kp$ *et* $\sum_{k=1}^{6} \mathbb{P}(\{k\}) = 1$ *donne* $\mathbb{P}(\{k\}) = \dfrac{k}{21}$.
2. $\mathbb{P}(\{2, 4, 6\}) = \dfrac{4}{7}$.
3. $\mathbb{P}(\{2, 3, 5\}) = \dfrac{10}{21}$.

Exercice 21.12 *Qu'elle est la probabilité pour qu'il y ait au moins deux personnes nées le même jour dans un groupe de* $n \geq 2$ *personnes (on fait abstraction des années bissextiles) ?*

Solution 21.12 *Un univers adapté à la situation est* $\Omega = F^E$, *où* E *est l'ensemble des* n *personnes et* F *l'ensemble des* 365 *jours d'une année non bissextile.*
On suppose qu'il y a équiprobabilté des anniversaires.
L'événement qui nous intéresse :

$$A = \text{« deux personnes ont le même jour anniverssaire »}$$

est identifié à l'ensemble :

$$\begin{aligned} A &= \{f \in \Omega \mid \exists n \neq m \text{ dans } E \text{ tel que } f(n) = f(m)\} \\ &= \{f \in \Omega \mid f \text{ est non injective}\} \end{aligned}$$

et la probabilité cherchée est :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \frac{\operatorname{card}(A)}{\operatorname{card}(\Omega)} = 1 - \frac{\operatorname{card}(\Omega \setminus A)}{\operatorname{card}(\Omega)} \\ &= 1 - \frac{A_{365}^n}{365^n} = \begin{cases} 1 \text{ si } n > 365 \\ 1 - \dfrac{365!}{365^n \cdot (365-n)!} \text{ si } 2 \leq n \leq 365 \end{cases}\end{aligned}$$

Par exemple, pour $n = 23$, on a :

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \frac{365!}{365^{23} \cdot (365-23)!} \backsimeq 0.507$$

Exercice 21.13 *Formule d'inversion de Pascal*
Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels ou de complexes telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k g_k.$$

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad g_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k f_k.$$

Solution 21.13 *Laissée au lecteur.*

Exercice 21.14 *On appelle dérangement de l'ensemble $I_n = \{1, 2, \cdots, n\}$ toute permutation σ de cet ensemble n'ayant aucun point fixe (i. e. telle que $\sigma(i) \neq i$ pour tout $i \in I_n$). Pour tout entier naturel non nul p, on note δ_p le nombre de dérangements de I_p. On a $\delta_1 = 0$ et, par convention, on pose $\delta_0 = 1$.*

1. *Montrer que :*
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ n! = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \delta_k.$$
2. *En déduire que :*
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \delta_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$
3. *On considère n couples qui se présentent à un concours de danse, chaque danseur choisissant une partenaire au hasard.*
   (a) *Quelle est la probabilité p_n pour que personne ne danse avec son conjoint ?*
   (b) *Calculer la limite de p_n quand n tend vers l'infini.*

Solution 21.14

1. *$n!$ qui est le nombre de permutations de I_n peut s'écrire $n! = \sum\limits_{k=0}^{n} \pi_{n,k}$, où $\pi_{n,k}$ est le nombre de permutations de I_n ayant exactement k points fixes, soit $\pi_{n,k} = C_n^k \delta_{n-k}$, ce qui donne :*
$$n! = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \delta_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^{n-k} \delta_k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \delta_k.$$

2. *Avec la formule d'inversion de Pascal, on a :*

$$\delta_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k k! = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

3.

(a) *En supposant qu'on est dans le cadre de l'équiprobabilité, on a :*

$$p_n = \frac{\delta_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

(b) $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \frac{1}{e}.$

21.6 Probabilités sur $(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}})$

On rappelle que la tribu borélienne $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ sur $\mathbb{R}$ est la tribu engendré par les intervalles. C'est aussi la tribu engendrée par les intervalles de la forme $]-\infty,x]$ ou par ceux de la forme $]x,y]$.

Pour ce paragraphe, $\mathbb{P}$ est une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}})$.

Définition 21.6 *La fonction de répartition de la mesure de probabilité* $\mathbb{P}$ *est l'application :*

$$\begin{array}{rccc} F: & \mathbb{R} & \to & [0,1] \\ & x & \mapsto & \mathbb{P}(]-\infty,x]) \end{array}$$

Théorème 21.6 *La fonction de répartition d'une mesure de probabilité* $\mathbb{P}$ *sur* $(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ *est croissante, continue à droite en tout point de* $\mathbb{R}$ *et admet une limite à gauche en tout point* x *de* $\mathbb{R}$ *avec :*

$$F\left(x^-\right) = \lim_{t\to x^-} F(x) = \mathbb{P}(]-\infty,x[)$$

On a aussi :

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0,\ \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$$

et pour tous réels $x<y$, *on a :*

$$\mathbb{P}(\{x\}) = F(x) - F\left(x^-\right)$$

$$\mathbb{P}(]x,y]) = F(y) - F(x)$$

Démonstration. Pour $x \le y$, on a $]-\infty,x] \subset]-\infty,y]$ et en conséquence $F(x) \le F(y)$.

Pour $x\in\mathbb{R}$, la suite $\left(\left]-\infty, x+\frac{1}{n}\right]\right)_{n\geq 1}$ étant décroissante dans $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, on a :

$$\begin{aligned} F(x) = \mathbb{P}(]-\infty,x]) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\geq 1}\left]-\infty, x+\frac{1}{n}\right]\right) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left]-\infty, x+\frac{1}{n}\right]\right) = \lim_{n\to+\infty} F\left(x+\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

et comme F est croissante, on en déduit que $\lim\limits_{t\to x^+} F(x) = F(x)$, c'est-à-dire que continue à droite en x.

Avec les mêmes arguments, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\left]-\infty,x\right[\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\geq 1}\left]-\infty,x-\frac{1}{n}\right]\right) = \lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}\left(\left]-\infty,x-\frac{1}{n}\right]\right) \\ &= \lim_{n\to+\infty}F\left(x-\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

et $\lim\limits_{t\to x^-}F(x) = \mathbb{P}\left(\left]-\infty,x\right[\right)$.

Comme $\left(\left]-\infty,-n\right]\right)_{n\geq 1}$ est décroissante et $\left(\left]-\infty,n\right]\right)_{n\geq 1}$ est croissante dans $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, on a :

$$\begin{aligned}0 = \mathbb{P}(\emptyset) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\geq 1}\left]-\infty,-n\right]\right) \\ &= \lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}\left(\left]-\infty,-n\right]\right) = \lim_{n\to+\infty}F(-n)\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}1 = \mathbb{P}(\Omega) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\geq 1}\left]-\infty,n\right]\right) \\ &= \lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}\left(\left]-\infty,n\right]\right) = \lim_{n\to+\infty}F(n)\end{aligned}$$

soit avec la croissance de F, $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x) = 1$.

Enfin :

$$\begin{aligned}F(x) &= \mathbb{P}\left(\left]-\infty,x\right]\right) = \mathbb{P}\left(\left]-\infty,x\right[\cup\{x\}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\left]-\infty,x\right[\right) + \mathbb{P}(\{x\}) = F\left(x^-\right) + \mathbb{P}(\{x\}).\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}F(y) &= \mathbb{P}\left(\left]-\infty,y\right]\right) = \mathbb{P}\left(\left]-\infty,x\right]\cup\left]x,y\right]\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\left]-\infty,x\right]\right) + \mathbb{P}\left(\left]x,y\right]\right) = F(x) + \mathbb{P}\left(\left]x,y\right]\right)\end{aligned}$$

■

Exercice 21.15 *Montrer que la fonction de répartition d'une mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ est continue en x_0 si, et seulement si, $\mathbb{P}(\{x_0\}) = 0$.*

Solution 21.15 *Comme F est continue à droite en tout point, elle est continue en x_0 si, et seulement si, $F\left(x_0^-\right) = F(x_0)$, ce qui équivaut à $\mathbb{P}(\{x_0\}) = 0$.*

On admet le résultat suivant, qui nous dit qu'une probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ est caractérisée par sa fonction de répartition.

Théorème 21.7 *Si F est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui est croissante, continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$ et telle que :*

$$\lim_{x\to-\infty}F(x) = 0,\ \lim_{x\to+\infty}F(x) = 1$$

il existe alors une unique mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ telle que F soit la fonction de répartition de $\mathbb{P}$.

Corollaire 21.1 *Si* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ *est une fonction continue par morceaux telle que* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt = 1$, *il existe alors une unique mesure de probabilité* $\mathbb{P}$ *sur* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$ *telle que la fonction* F *définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\,,\ F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$$

soit la fonction de répartition de $\mathbb{P}$.

Démonstration. La fonction F est croissante, continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$ avec $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$. ■

Définition 21.7 *Avec les hypothèses et notations du corollaire précédent, on dit que* f *est une densité de probabilité.*

Dans le cas où $\mathbb{P}$ est une mesure de probabilité de densité f, on a, pour tout réels $x \leq y$:

$$\mathbb{P}(\{x\}) = 0$$

$$\mathbb{P}(]-\infty, x]) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt,\ \mathbb{P}([x, +\infty[) = \int_{x}^{+\infty} f(t)\, dt$$

$$\mathbb{P}([x, y]) = \int_{x}^{y} f(t)\, dt$$

Exemple 21.9 *Pour* $\lambda > 0$ *donné, on définit la fonction* f *par :*

$$\forall t \in \mathbb{R},\,,\ f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} \ si\ t \geq 0 \\ 0 \ si\ \lambda < 0 \end{cases}$$

et la probabilité $\mathbb{P}$ *de densité* f *est dite loi exponentielle de paramètre* λ. *On a, pour tout réel* x :

$$F(x) = \mathbb{P}(]-\infty, x]) = \begin{cases} \lambda \int_{0}^{x} e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x} \ si\ t \geq 0 \\ 0 \ si\ \lambda < 0 \end{cases}$$

Exemple 21.10 *Pour* $\sigma > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$ *donnés, on définit la fonction* f *par :*

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

et la probabilité $\mathbb{P}$ *de densité* f *est dite loi normale (de Gauss) de paramètres* σ *et* μ. *On a, pour tout réel* x :

$$F(x) = \mathbb{P}(]-\infty, x]) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$$

22

Probabilités conditionnelles

$(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé.

22.1 Définition et propriétés des probabilités conditionnelles

Considérons l'expérience aléatoire qui consiste à lancer deux fois un dé équilibré et les événements A et B définis par :

$$A = \text{« la somme des chiffres obtenus est 9»}$$

et

$$B = \text{« le premier lancé donne 5»}$$

En supposant qu'il y a équiprobabilité, on a :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\}) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$

Mais, si on sait que l'événement B est réalisé, c'est-à-dire que le premier lancé a donné 5, il semble raisonnable de dire que :

$$\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(\{4\}) = \frac{1}{6} \neq \frac{1}{9}$$

Sachant que B est réalisé on est donc amené à changer d'univers. Dans le premier cas, où on ne dispose d'aucune information sur le premier lancé, un univers adapté est $\Omega = \{(i,j) \mid 1 \leq i,j \leq 6\}$ avec la probabilité :

$$\begin{array}{rccc} \mathbb{P}: & \mathcal{P}(\Omega) & \to & [0,1] \\ & A & \mapsto & \mathbb{P}(A) = \dfrac{\operatorname{card}(A)}{\operatorname{card}(\Omega)} \end{array}$$

avec $\operatorname{card}(\Omega) = 6^2$ et dans le deuxième cas où on dispose de l'information « B est réalisé » un univers adapté est $\Omega_B = \{i \mid 1 \leq i \leq 6\}$ avec la probabilité :

$$\begin{array}{rccc} \mathbb{P}_B: & \mathcal{P}(\Omega_B) & \to & [0,1] \\ & A & \mapsto & \mathbb{P}_B(A) = \dfrac{\operatorname{card}(A)}{\operatorname{card}(\Omega_B)} \end{array}$$

avec $\operatorname{card}(\Omega_B) = 6$.

Pour calculer de telles probabilités conditionnelles $\mathbb{P}_B(A)$, une idée naturelle est de répéter un grand nombre de fois l'expérience dans les mêmes conditions. Si pour n expériences, on note $n(E)$ le nombre de fois où un événement E est réalisé, la quantité :

$$f_B(A) = \frac{n(A\cap B)}{n(B)} = \frac{n(A\cap B)}{n}\left(\frac{n(B)}{n}\right)^{-1}$$

est la fréquence relative de réalisation de A sur n coups sachant que B est réalisé. Plus n sera grand, plus $f_B(A)$ se rapprochera d'une quantité qui sera la probabilité de réalisation de A sachant que B est réalisé.

Il est donc naturel de poser :

$$\mathbb{P}_B(A) = \lim_{n\to+\infty} f_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Définition 22.1 *Soient A, B deux événements dans $\mathcal{B}$ avec $\mathbb{P}(B) \neq 0$. La probabilité de A sachant B est le réel :*

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Théorème 22.1 *Pour tout événement $B \in \mathcal{B}$ de probabilité non nulle, l'application :*

$$\begin{array}{rccl}\mathbb{P}_B: & \mathcal{B} & \to & [0,1] \\ & A & \mapsto & \mathbb{P}_B(A) = \dfrac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}\end{array}$$

est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{B})$.

Démonstration. On a :

—
$$\mathbb{P}_B(\Omega) = \frac{\mathbb{P}(\Omega\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = 1.$$

— Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements deux à deux incompatibles, il est de même de la suite $(A_n \cap B)_{n\in\mathbb{N}}$ et :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_B\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) &= \frac{\mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)\cap B\right)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n\cap B)\right)}{\mathbb{P}(B)} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathbb{P}(A_n\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}_B(A_n)\end{aligned}$$

■

On dit que $\mathbb{P}_B$ est la probabilité conditionnelle sur $(\Omega, \mathcal{B})$ sachant B et par définition, on a :

$$\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}_B(A)\,\mathbb{P}(B)$$

On note aussi $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A \mid B)$.

Théorème 22.2 *Si $n \geq 2$ et $A_1, \cdots, A_n$ sont des événements dans $\mathcal{B}$ tels que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n-1} A_k\right) \neq 0$, on a alors :*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = \mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}(A_2 \mid A_1)\,\mathbb{P}(A_3 \mid A_1\cap A_2)\cdots\mathbb{P}\left(A_n \mid \bigcap_{k=1}^{n-1} A_k\right)$$

Démonstration. Comme $\bigcap\limits_{k=1}^{n-1} A_k \subset \bigcap\limits_{k=1}^{p} A_k$ pour tout p compris entre 1 et $n-1$, on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{p} A_k\right) \geq \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n-1} A_k\right) > 0$$

et les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}_{\bigcap\limits_{k=1}^{p} A_k}$ sont bien définies.

On vérifie alors que :

$$\mathbb{P}(A_1) \prod_{p=1}^{n-1} \mathbb{P}\left(A_{p+1} \mid \bigcap_{k=1}^{p} A_k\right) = \mathbb{P}(A_1) \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)}{\mathbb{P}(A_1)} \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)} \cdots \frac{\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k\right)}{\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=1}^{n-1} A_k\right)}$$
$$= \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right).$$

■

Théorème 22.3 (Formule des probabilités totales) *Si $(A_1, \cdots, A_n)$ est un système complet d'événements dans $\mathcal{B}$ tel que $\mathbb{P}(A_k) \neq 0$ pour tout k compris entre 1 et n, on a alors pour tout événement $A \in \mathcal{B}$:*

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A \mid A_k) \mathbb{P}(A_k)$$

Démonstration. On a la partition :

$$A = A \cap \Omega = A \cap \bigcup_{k=1}^{n} A_k = \bigcup_{k=1}^{n} A \cap A_k$$

qui nous donne :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A \cap A_k) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A \mid A_k) \mathbb{P}(A_k)$$

■

Exercice 22.1 *Un fumeur essaye de ne plus fumer. S'il ne fume pas un jour donné, alors la probabilité qu'il ne fume pas le lendemain est $p \in \left]0,1\right[$. S'il fume un jour donné, alors la probabilité qu'il ne fume pas le lendemain est $q \in \left]0,1\right[$.*

1. *Calculer la probabilité p_n que cette personne ne fume pas le n-ème jour.*
2. *Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.*

Solution 22.1 *Pour $n \geq 0$, on note respectivement F_n et $\Omega \setminus F_n$ les événements :*

$$F_n : \text{ « il fume le n-ème jour »}$$

$$\overline{F_n} = \Omega \setminus F_n : \text{ « il ne fume pas le n-ème jour »}$$

On connaît $p = \mathbb{P}\left(\overline{F_n} \mid \overline{F_{n-1}}\right)$ et $p = \mathbb{P}\left(\overline{F_n} \mid F_{n-1}\right)$ pour $n \geq 1$.

1. *Comme* $\left(F_{n-1}, \overline{F_{n-1}}\right)$ *est un système complet d'événements, on a :*

$$\begin{aligned} p_n = \mathbb{P}\left(\overline{F_n}\right) &= q \cdot \mathbb{P}\left(F_{n-1}\right) + p \cdot \mathbb{P}\left(\overline{F_{n-1}}\right) \\ &= \left(1 - p_{n-1}\right) q + p_{n-1} p \\ &= (p - q)\, p_{n-1} + q \end{aligned}$$

La suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est donc une suite arithmético-géométrique et on a :*

$$p_n = r + (p_0 - r)(p - q)^n$$

où $r = \dfrac{q}{1-(p-q)}$.

2. *On a* $\lim\limits_{n\to+\infty} (p_n) = r = \dfrac{q}{1-(p-q)}$.

Théorème 22.4 (Formule de Bayes) *Si* $(A_1, \cdots, A_n)$ *est un système complet d'événements dans* $\mathcal{B}$ *tel que* $\mathbb{P}(A_k) \neq 0$ *pour tout* k *compris entre* 1 *et* n, *on a alors pour tout événement* $B \in \mathcal{B}$ *de probabilité non nulle et tout entier* j *compris entre* 1 *et* n *:*

$$\mathbb{P}(A_j \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A_j)\,\mathbb{P}(A_j)}{\sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B \mid A_k)\,\mathbb{P}(A_k)}$$

Démonstration. On a :

$$\mathbb{P}(A_j \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A_j \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B \mid A_j)\,\mathbb{P}(A_j)}{\sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B \mid A_k)\,\mathbb{P}(A_k)}$$

■

Exercice 22.2 *Des études sur une population ont montré que l'on pouvait admettre que la probabilité* p_n *qu'une famille ait exactement* n *enfants est définie par :*

$$\forall n \geq 1,\ p_n = \alpha p^n$$

avec $0 < p < 1$, $\alpha > 0$ *et* $(1+\alpha)\, p < 1$.
On suppose que les naissances des garçons et des filles sont équiprobables.

1. *Calculer la probabilité pour une famille de ne pas avoir d'enfants.*
2. *Calculer la probabilité pour une famille d'avoir exactement* k *garçons.*
3. *Étant donnée une famille ayant au moins un garçon, quelle est la probabilité qu'elle en ait deux ou plus ?*

Solution 22.2 *Pour tout entier* $n \geq 0$, *on note respectivement* E_n *et* G_n *les événements :*

$$E_n = \text{« la famille a } n \text{ enfants »}$$

$$G_n = \text{« la famille a } n \text{ garçons »}$$

1. *On a* $p_n = \mathbb{P}(E_n) = \alpha p^n$ *pour* $n \geq 1$ *et :*

$$p_0 = \mathbb{P}(E_0) = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha p^n = 1 - \alpha \frac{p}{1-p} = \frac{1-(1+\alpha)\,p}{1-p}$$

2. *Comme* $(E_n)_{n\geq 0}$ *est un système complet d'événements, on a pour* $k \geq 1$:

$$G_k = \bigcup_{n=0}^{+\infty} G_k \cap E_n = \bigcup_{n=k}^{+\infty} G_k \cap E_n$$

($G_k \cap E_n = \emptyset$ *pour* $0 \leq n < k$*) et :*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(G_k) &= \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(G_k \cap E_n) = \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(E_n)\,\mathbb{P}(G_k \mid E_n) \\ &= \alpha \sum_{n=k}^{+\infty} p^n C_n^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}\end{aligned}$$

(dans une famille de n *enfants, il y a* C_n^k *façons de placer l'ordre de naissance des garçons et par chacune d'elles la probabilité de réalisation est* $\left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}$ *si les naissances des filles et des garçons sont supposées équiprobables). On a donc :*

$$\mathbb{P}(G_k) = \alpha \sum_{n=k}^{+\infty} C_n^k \left(\frac{p}{2}\right)^n = \frac{\alpha}{k!}\left(\frac{p}{2}\right)^k \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-(k-1))\left(\frac{p}{2}\right)^{n-k}$$

soit en tenant compte de :

$$\sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-(k-1))\,x^{n-k} = \left(\frac{1}{1-x}\right)^{(k)} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$$

$$\mathbb{P}(G_k) = \frac{\alpha}{k!}\left(\frac{p}{2}\right)^k \frac{k!}{\left(1-\frac{p}{2}\right)^{k+1}} = \frac{2\alpha}{2-p}\left(\frac{p}{2-p}\right)^k$$

Pour $k = 0$, *on a :*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(G_0) &= 1 - \frac{2\alpha}{2-p}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{p}{2-p}\right)^k = 1 - \frac{2\alpha}{2-p}\frac{p}{2-p}\frac{1}{1-\frac{p}{2-p}} \\ &= 1 - \frac{\alpha p}{(1-p)(2-p)} = \frac{2-(3+\alpha)p+p^2}{(1-p)(2-p)}\end{aligned}$$

3. *La probabilité cherchée est :*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=2}^{+\infty} G_k \mid \bigcup_{k=1}^{+\infty} G_k\right) &= \frac{\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=2}^{+\infty} G_k\right)}{\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} G_k\right)} = \frac{1-\mathbb{P}(G_0)-\mathbb{P}(G_1)}{1-\mathbb{P}(G_0)} \\ &= 1 - \frac{\mathbb{P}(G_1)}{1-\mathbb{P}(G_0)} = \frac{p}{2-p}\end{aligned}$$

Exercice 22.3 *Deux joueurs* A *et* B *possèdent un capital de* a *et* b *euros respectivement. Ils jouent à pile ou face en misant* 1 *euro par partie jusqu'à la ruine de l'un d'eux. Déterminer la probabilité de ruine de chacun.*

Solution 22.3 *On désigne, pour tout entier $n \geq 0$, par A_n l'événement :*

$$A_n = \text{« } A \text{ possède } n \text{ euros et terminera ruiné »}$$

et par A l'événement :

$$A = \text{« } A \text{ gagne un tirage de Pile ou Face »}$$

Pour $n \geq 1$, on a :

$$A_n = (A_{n-1} \cap A) \cup (A_{n+1} \cap (\Omega \setminus A))$$

et en notant $p_n = \mathbb{P}(A_n)$, on déduit que :

$$p_n = \frac{1}{2}(p_{n-1} + p_{n+1})$$

avec $p_0 = 1$, $p_{a+b} = 0$, ce qui donne $p_n = 1 - \dfrac{n}{a+b}$ et :

$$\mathbb{P}(A \text{ perd}) = p_a = \frac{b}{a+b},\ \mathbb{P}(B \text{ perd}) = p_b = \frac{a}{a+b}.$$

22.2 Événements indépendants

Dans le cas où $\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A)$, on déduit que le fait que soit B soit réalisé ne change rien sur le calcul de $\mathbb{P}(A)$. Dans ces conditions, on dit que A et B sont des événements indépendants.

Définition 22.2 *On dit que deux événements A et B dans $\mathcal{B}$ sont indépendants (ou stochastiquement indépendants) si :*

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B).$$

Remarque 22.1 *Si $P(B) = 0$, on a alors, pour tout $A \in \mathcal{B}$, $0 \leq \mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(B) = 0$, donc $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B) = 0$ et A et B sont indépendants.*
Si $\mathbb{P}(B) \neq 0$, les événements A et B sont indépendants si, et seulement si, $\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A)$.

Remarque 22.2 *Deux événements peuvent être incompatibles, sans être indépendants. Par exemple, si $\mathbb{P}(A) = p \in \left]0,1\right[$, on a alors :*

$$\mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(\Omega \setminus A) = p(1-p) \neq 0 = \mathbb{P}(A \cap (\Omega \setminus A)).$$

Exercice 22.4 *Soit $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.*

1. *Soient A, B deux événements tels que $\mathbb{P}(A) = 0.2$ et $\mathbb{P}(A \cup B) = 0.5$. Quelle est la valeur de $\mathbb{P}(B)$ si A et B sont incompatibles ?*
2. *Soient A, B deux événements tels que $\mathbb{P}(A) = 0.1$ et $\mathbb{P}(A \cup B) = 0.6$. Quelle est la valeur de $\mathbb{P}(B)$ si A et B sont indépendants ?*

Solution 22.4

1. *Si A et B sont incompatibles, on a alors :*

$$0.5 = \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = 0.2 + \mathbb{P}(B)$$

et $\mathbb{P}(B) = 0.3$.

2. *Si A et B sont indépendants, on a alors :*

$$\begin{aligned}0.6 = \mathbb{P}(A \cup B) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = 0.1 + 0.9 \cdot \mathbb{P}(B)\end{aligned}$$

et $\mathbb{P}(B) = \dfrac{5}{9}$.

Exercice 22.5 *Montrer que A et B sont indépendants dans $\mathcal{B}$ si, et seulement si, A et $\Omega \setminus B$ sont indépendants et que A et $\Omega \setminus B$ sont indépendants si et seulement si, $\Omega \setminus A$ et $\Omega \setminus B$ sont indépendants.*

Solution 22.5 *On a $A \cap (\Omega \setminus B) = A \setminus (A \cap B)$ et :*

$$\mathbb{P}(A \cap (\Omega \setminus B)) = \mathbb{P}(A \setminus (A \cap B)) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

ce qui donne pour A et B indépendants :

$$\mathbb{P}(A \cap (\Omega \setminus B)) = \mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(B)) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\Omega \setminus B)$$

qui signifie que A et $\Omega \setminus B$ sont indépendants.
Réciproquement si A et $\Omega \setminus B$ sont indépendants, il en est alors de même de A et $B = \Omega \setminus (\Omega \setminus B)$.
Comme A et B jouent des rôles symétriques, il en résulte que :

$$(A \text{ et } \Omega \setminus B \text{ indépendants}) \Leftrightarrow (\Omega \setminus A \text{ et } \Omega \setminus B \text{ indépendants})$$

Plus généralement, on définit l'indépendance mutuelle de plusieurs événements comme suit.

Définition 22.3 *On dit que des événements $A_1, \cdots, A_n$, où $n \geq 2$, sont mutuellement indépendants dans $\mathcal{B}$ si pour toute partie J non vide de $\{1, 2, \cdots, n\}$, on a :*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j).$$

Remarque 22.3 *Des événements mutuellement indépendants sont deux à deux indépendants (il suffit de considérer toutes les parties à 2 éléments de $\{1, 2, \cdots, n\}$), mais la réciproque est fausse.*
En effet, considérons l'expérience aléatoire qui consiste à lancer un dé deux fois et les événements A, B, C définis respectivement par « le premier chiffre est pair », « le deuxième chiffre est impair », « la somme des chiffres est paire ». En supposant l'équiprobabilité, on a :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \frac{1}{2}$$
$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(B \cap C) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

donc les événements A, B, C sont deux à deux indépendants, mais :

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0 \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$$

et A, B, C ne sont pas mutuellement indépendants.

Exercice 22.6 *Soient $A_1, \cdots, A_n$, où $n \geq 2$, des événements mutuellement indépendants dans $\mathcal{B}$.*

1. *Montrer que* $\Omega \setminus A_1, A_2, \cdots, A_n$ *sont mutuellement indépendants.*
2. *En déduire que pour tout entier* k *compris entre* 1 *et* n*, les événements* $\Omega \setminus A_1, \cdots, \Omega \setminus A_k, A_{k+1}, \cdots, A_n$ *sont mutuellement indépendants.*

Solution 22.6

1. *On note* $A'_1 = \Omega \setminus A_1$*,* $A'_k = A_k$ *pour* k *compris entre* 2 *et* n *et on se donne une partie* J *non vide de* $\{1, 2, \cdots, n\}$*.*
Si $1 \notin J$*, on a :*
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A'_j\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}\left(A'_j\right).$$
Si J *a plus de* 2 *éléments et* $1 \in J$ *(pour* $J = \{1\}$*, il n'y a rien à montrer), on a alors :*
$$\bigcap_{j \in J} A'_j = (\Omega \setminus A_1) \cap \left(\bigcap_{j \in J \setminus \{1\}} A_j\right) = \bigcap_{j \in J \setminus \{1\}} A_j \setminus \bigcap_{j \in J} A_j$$
et :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A'_j\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J \setminus \{1\}} A_j\right) - \mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) \\ &= \prod_{j \in J \setminus \{1\}} \mathbb{P}(A_j) - \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j) \\ &= (1 - \mathbb{P}(A_1)) \prod_{j \in J \setminus \{1\}} \mathbb{P}(A_j) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}\left(A'_j\right)\end{aligned}$$
2. *On procède par récurrence finie.*

Exercice 22.7 *Soit* $n \geq 2$ *un entier naturel. On choisit de manière équiprobable un entier compris entre* 1 *et* n*. Soient* p *un diviseur positif de* n *et* A_p *l'événement :« le nombre choisi est divisible par* p *».*

1. *Calculer* $\mathbb{P}(A_p)$*.*
2. *Montrer que si* $p_1, \cdots, p_r$ *sont les diviseurs premiers de* n*, alors les événements* $A_{p_1}, \cdots, A_{p_r}$ *sont mutuellement indépendants.*
3. *On désigne par* φ *la fonction indicatrice d'Euler définie sur* $\mathbb{N}^*$ *par*
$$\varphi(n) = \operatorname{card}\{k \in \{1, \cdots, n\} \mid k \wedge n = 1\}$$
Montrer que
$$\varphi(n) = n \prod_{\substack{p \text{ premier} \\ p \text{ divise } n}} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Solution 22.7 *On se place sur* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$*, où* $\Omega = \{1, \cdots, n\}$ *et :*
$$\forall k \in \Omega,\ \mathbb{P}(\{k\}) = \frac{1}{n}.$$

1. *Pour p divisant n, on a $n = pq$ et :*

$$A_p = \{k \in \Omega \mid \exists j \in \Omega \; ; \; k = pj\} = \{p, 2p, \cdots, qp\}$$

donc :

$$\mathbb{P}(A_p) = \frac{\mathrm{card}(A_p)}{\mathrm{card}(\Omega)} = \frac{q}{n} = \frac{1}{p}.$$

2. *Soit J une partie non vide de $\{1, 2, \cdots, r\}$. Les entiers p_j pour $j \in J$ sont premiers et distincts, donc premiers entre eux et un entier est divisible par tous les p_j si, et seulement si, il est divisible par leur produit. On a donc :*

$$\bigcap_{j \in J} A_{p_j} = A_{\prod\limits_{j \in J} p_i}$$

et :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_{p_j}\right) = \mathbb{P}(A_{\prod\limits_{j \in J} p_i}) = \frac{1}{\prod\limits_{j \in J} p_i} = \prod_{j \in J} \frac{1}{p_j} = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_{pj}).$$

Donc les événements $A_{p_1}, \cdots, A_{p_r}$ sont mutuellement indépendants.

3. *Si A désigne l'événement : « l'entier choisi est premier avec n », on a alors :*

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\mathrm{card}(A)}{\mathrm{card}(\Omega)} = \frac{\varphi(n)}{n}$$

et en désignant par $p_1, \cdots, p_r$ tous les diviseurs premiers de n, on aura $k \in A$ si, et seulement si, k n'est divisible par aucun des p_i, donc :

$$A = \bigcap_{i=1}^{r} (\Omega \setminus A_{p_i}).$$

Comme les événements $\Omega \setminus A_{p_i}$ sont indépendants (exercice précédent), on en déduit que :

$$\mathbb{P}(A) = \prod_{i=1}^{r} \mathbb{P}(\Omega \setminus A_{p_i}) = \prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

Exercice 22.8 *On se fixe un réel $s > 1$ et on considère l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}_s)$, où $\Omega = \mathbb{N}^*$ et :*

$$\forall n \in \Omega, \; \mathbb{P}_s(\{n\}) = \frac{1}{\zeta(s)} \frac{1}{n^s}$$

en désignant par ζ la fonction de Riemann définie par $\zeta(s) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ (on dit que $\mathbb{P}_s$ est la loi dzéta de paramètre s).
Pour tout entier $n \geq 1$, on désigne par A_n l'événement :

$$A_n = \{\textit{multiples de } n\} = \{k \cdot n \mid k \in \mathbb{N}^*\}$$

1. *Calculer $\mathbb{P}_s(A_n)$ pour tout $n \geq 1$.*
2. *Montrer que, si $\mathcal{P}$ désigne l'ensemble des nombres premiers, alors la famille $(A_p)_{p \in \mathcal{P}}$ est indépendante, c'est-à-dire que pour toute suite finie $(p_k)_{1 \leq k \leq r}$ de nombres premiers distincts, les événement $A_{p_1}, \cdots, A_{p_r}$ sont mutuellement indépendants.*

3. *En déduire que :*

$$\mathbb{P}_s(\{1\}) = \prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$$

puis l'identité d'Euler :

$$\forall s > 1,\ \zeta(s) = \prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

Solution 22.8

1. *On a :*

$$\mathbb{P}_s(A_n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}_s(\{k \cdot n\}) = \frac{1}{\zeta(s)} \frac{1}{n^s} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s} = \frac{1}{n^s}.$$

2. *Pour $p_1 < p_2 < \cdots < p_r$ dans $\mathcal{P}$, comme les p_k sont premiers entre eux, on a :*

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_s\left(\bigcap_{k=1}^{r} A_{p_k}\right) &= \mathbb{P}_s(\{\textit{multiples de } p_1, p_2, \cdots, p_r\}) \\
&= \mathbb{P}_s\left(\left\{\textit{multiples de } \prod_{k=1}^{r} p_k\right\}\right) = \mathbb{P}\left(A_{\prod\limits_{k=1}^{r} p_k}\right) \\
&= \frac{1}{\left(\prod\limits_{k=1}^{r} p_k\right)^s} = \prod_{k=1}^{r} \frac{1}{p_k^s} = \prod_{k=1}^{r} \mathbb{P}_s(A_{p_k})
\end{aligned}$$

et les événement $A_{p_1}, \cdots, A_{p_r}$ sont mutuellement indépendants.

3. *L'entier 1 n'est divisible par aucun nombre premier, donc :*

$$\{1\} = \bigcap_{p\in\mathcal{P}} (\Omega \setminus A_p)$$

et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_s(\{1\}) &= \mathbb{P}_s\left(\bigcap_{p\in\mathcal{P}} (\Omega \setminus A_p)\right) = \prod_{p\in\mathcal{P}} \mathbb{P}_s(\Omega \setminus A_p) \\
&= \prod_{p\in\mathcal{P}} (1 - \mathbb{P}_s(A_p)) = \prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)
\end{aligned}$$

et comme $\mathbb{P}_s(\{1\}) = \dfrac{1}{\zeta(s)}$, il en résulte que :

$$\zeta(s) = \prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

Une définition équivalente de la notion de famille d'événements mutuellement indépendants est donnée par le théorème suivant.

Théorème 22.5 *Soient $A_1, \cdots, A_n$, où $n \geq 2$, des événements dans $\mathcal{B}$. Ces événements sont mutuellement indépendants si, et seulement si, pour toute partie J de $\{1, 2, \cdots, n\}$ telle que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) \neq 0$ et tout indice $i \in \{1, 2, \cdots, n\} \setminus J$, on a :*

$$\mathbb{P}\left(A_i \mid \bigcap_{j \in J} A_j\right) = \mathbb{P}(A_i).$$

Démonstration. Supposons $A_1, \cdots, A_n$ mutuellement indépendants. Pour $J \subsetneq \{1, 2, \cdots, n\}$ telle que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) \neq 0$ et $i \in \{1, 2, \cdots, n\} \setminus J$, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J \cup \{i\}} A_j\right) &= \prod_{j \in J \cup \{i\}} \mathbb{P}(A_j) = \mathbb{P}(A_i) \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j) \\ &= \mathbb{P}(A_i)\, \mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right)\end{aligned}$$

et :

$$\mathbb{P}(A_i) = \frac{\mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J \cup \{i\}} A_j\right)}{\mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right)} = \frac{\mathbb{P}\left(A_i \cap \bigcap_{j \in J} A_j\right)}{\mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right)} = \mathbb{P}\left(A_i \mid \bigcap_{j \in J} A_j\right).$$

Réciproquement, supposons que $\mathbb{P}\left(A_i \mid \bigcap_{j \in J} A_j\right) = \mathbb{P}(A_i)$ pour tout $J \subset \{1, 2, \cdots, n\}$ telle que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) \neq 0$ et $i \in \{1, 2, \cdots, n\} \setminus J$.

Soit $I = \{i_1, \cdots, i_r\} \subset \{1, 2, \cdots, n\}$ avec $r \geq 2$.

Si $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \neq 0$, on a alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_j\right) &= \mathbb{P}(A_{i_1})\, \mathbb{P}(A_{i_2} \mid A_{i_1}) \cdots \mathbb{P}\left(A_{i_r} \mid \bigcap_{k=1}^{r-1} A_{i_k}\right) \\ &= \mathbb{P}(A_{i_1})\, \mathbb{P}(A_{i_2}) \cdots \mathbb{P}(A_{i_r}) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)\end{aligned}$$

Si $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = 0$, il existe alors un entier $p \in \{1, 2, \cdots, r\}$ tel que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{p-1} A_{i_k}\right) \neq 0$ et $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{p} A_{i_k}\right) = 0$. Pour $p = 1$, on a $\mathbb{P}(A_{i_1}) = 0$ et $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$ et pour $p \geq 2$, on a :

$$\begin{aligned}0 = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{p} A_{i_k}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{p-1} A_{i_k}\right) \mathbb{P}\left(A_{i_p} \mid \bigcap_{k=1}^{p-1} A_{i_k}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{p-1} A_{i_k}\right) \mathbb{P}\left(A_{i_p}\right)\end{aligned}$$

et $\mathbb{P}\left(A_{i_p}\right) = 0$ qui entraîne encore $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \prod_{i\in I} \mathbb{P}\left(A_i\right)$. ■

23

Variables aléatoires réelles

Pour ce paragraphe, $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé.

23.1 Définition et propriétés des variables aléatoires réelles

Définition 23.1 *On dit qu'une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ si :*

$$\forall A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}},\ X^{-1}(A) \in \mathcal{B}$$

On dit aussi qu'une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ est une application mesurable de $(\Omega, \mathcal{B})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$.

Remarque 23.1 *Pour $\mathcal{B} = \mathcal{P}(\Omega)$ toute application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$. Donc, dans le cas où Ω est dénombrable, en prenant $\mathcal{B} = \mathcal{P}(\Omega)$ pour tribu d'événements, toute application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire.*

En utilisant le théorème 21.2, on a le résultat suivant.

Théorème 23.1 *Une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ si, et seulement si :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ X^{-1}(]-\infty, x]) \in \mathcal{B}$$

Démonstration. Le théorème 21.2 nous dit que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \sigma(\mathcal{X}_1)$, où $\mathcal{X}_1 = \{]-\infty, x] \mid x \in \mathbb{R}\}$.

Si X est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$, on a alors $X^{-1}(]-\infty, x]) \in \mathcal{B}$ pour tout réel x puisque $]-\infty, x] \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

Réciproquement, soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que $X^{-1}(]-\infty, x]) \in \mathcal{B}$ pour tout réel x. On note :

$$\mathcal{A} = \left\{A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \mid X^{-1}(A) \in \mathcal{B}\right\}$$

et on veut montrer que $\mathcal{A} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Pour ce faire, on montre que c'est une tribu qui contient $\mathcal{X}_1$, ce qui implique que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{A}$ et comme $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, on a l'égalité attendue.

Par hypothèses, on a $\mathcal{X}_1 \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

Avec $\Omega = X^{-1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R} \in \mathcal{X}_1$, on déduit que $\Omega \in \mathcal{A}$.

Si $A \in \mathcal{A}$, on a alors :

$$X^{-1}(\mathbb{R} \setminus A) = \Omega \setminus X^{-1}(A) \in \mathcal{B}$$

et $\mathbb{R} \setminus A \in \mathcal{A}$.

Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$, on a alors :

$$X^{-1}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X^{-1}(A_n) \in \mathcal{B}$$

et $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

Donc $\mathcal{A}$ est une tribu et $\mathcal{A} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, ce qui signifie que X est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$. ■

Si $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$, nous noterons :

— $(X \in A)$ pour $X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}$ où $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$;

— $(X = x)$ pour $X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}$ où x est un réel ;

— $(X \leq x)$ pour $X^{-1}(]-\infty, x]) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\}$ où x est un réel ;

— $(X < x)$ pour $X^{-1}(]-\infty, x[) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) < x\}$ où x est un réel.

Exercice 23.1 *Montrer qu'une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ si, et seulement si :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ X^{-1}(]-\infty, x[) \in \mathcal{B}$$

Solution 23.1 *Comme les intervalles de la forme $]-\infty, x[$ sont des boréliens, la condition est nécessaire.*
Réciproquement, soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que $X^{-1}(]-\infty, x[) \in \mathcal{B}$ pour tout réel x.
Pour montrer que X est une variable aléatoire réelle, il nous suffit de montrer que $X^{-1}(]-\infty, x]) \in \mathcal{B}$ pour tout réel x, ce qui résulte de :

$$X^{-1}(]-\infty, x]) = X^{-1}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left]-\infty, x + \frac{1}{n}\right[\right) = \bigcap_{n=1}^{+\infty} X^{-1}\left(\left]-\infty, x + \frac{1}{n}\right[\right)$$

Exercice 23.2 *On suppose que Ω est dénombrable. Montrer qu'une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ si, et seulement si :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ X^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{B}$$

Solution 23.2 *Résulte du fait que :*

$$X^{-1}(]-\infty, x[) = \bigcup_{\substack{\omega\in\Omega \\ X(\omega)<x}} X^{-1}(X(\omega))$$

la réunion étant dénombrable pour Ω dénombrable.

Définition 23.2 *On dit qu'une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ si $X(\Omega)$ est dénombrable et si $X^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{B}$ pour tout réel x. Dans le cas où $X(\Omega)$ est fini, on dit que X est étagée.*

Théorème 23.2 *Une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ est une variable aléatoire.*

Démonstration. On a $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in I\}$ où I est une partie de $\mathbb{N}$ et pour tout réel x, on a :

$$\begin{aligned} X^{-1}(]-\infty, x]) &= \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\} \\ &= \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x_i \text{ où } i \in I \text{ et } x_i \leq x\} \\ &= \bigcup_{\substack{i \in I \\ x_i \leq x}} X^{-1}(\{x_i\}) \in \mathcal{B} \end{aligned}$$

puisqu'il s'agit d'une réunion dénombrable. ■

Théorème 23.3 *Si X est une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ et f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors $f \circ X$ est une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$.*

Démonstration. On a $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in I\}$ où I est une partie de $\mathbb{N}$ et en conséquence $(f \circ X)(\Omega) = \{f(x_i) \mid i \in I\}$ est dénombrable.

Si $y \in \mathbb{R} \setminus (f \circ X)(\Omega)$, on a $(f \circ X)^{-1}(\{y\}) = \emptyset$ et si $y = f(x_k) \in (f \circ X)(\Omega)$, on a :

$$\begin{aligned} (f \circ X)^{-1}(\{y\}) &= \{\omega \in \Omega \mid f(X(\omega)) = f(x_k)\} \\ &= \bigcup_{i \in I \mid f(x_i) = f(x_k)} X^{-1}(\{x_i\}) \in \mathcal{B} \end{aligned}$$

Donc $f \circ X$ est une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$. ■

Théorème 23.4 *L'ensemble $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ des variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ stable par multiplication (c'est une $\mathbb{R}$-algèbre).*

Démonstration. Pour la structure d'espace vectoriel, il suffit de prouver que $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathbb{R}^{\Omega}$ de toutes les applications de Ω dans $\mathbb{R}$.

La fonction identiquement nulle $X_0 : \omega \mapsto 0$ est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ puisque pour tout réel x, on a :

$$X_0^{-1}(]-\infty, x]) = (0 \leq x) = \begin{cases} \emptyset \text{ si } x < 0 \\ \Omega \text{ si } x \geq 0 \end{cases} \in \mathcal{B}$$

Soient X, Y dans $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ et $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $\omega \in (X+Y)^{-1}(]-\infty, x[)$, on a $X(\omega) + Y(\omega) < x$ et il existe un nombre rationnel r_ω tel que :

$$X(\omega) < r_\omega < x - Y(\omega)$$

ce qui entraîne $X(\omega) < r_\omega$, soit $\omega \in X^{-1}(]-\infty, r_\omega[)$ et $Y(\omega) < x - r_\omega$, soit $\omega \in Y^{-1}(]-\infty, x - r_\omega[)$. On a donc :

$$(X+Y)^{-1}(]-\infty, x[) \subset A = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} X^{-1}(]-\infty, r[) \cap Y^{-1}(]-\infty, x - r[)$$

Réciproquement si $\omega \in A$, il existe un rationnel r tel que $X(\omega) < r$ et $Y(\omega) < x - r$, ce qui entraîne $(X+Y)(\omega) < x$ et $\omega \in (X+Y)^{-1}(]-\infty, x[)$. En définitive :

$$(X+Y)^{-1}(]-\infty, x[) = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} X^{-1}(]-\infty, r[) \cap Y^{-1}(]-\infty, x - r[) \in \mathcal{B}$$

comme réunion dénombrable d'éléments de la tribu $\mathcal{B}$ et $X+Y \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\Omega,\mathcal{B},\mathbb{P})$.

Soient X dans $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\Omega,\mathcal{B},\mathbb{P})$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$. Si $\lambda = 0$, on a alors $\lambda X = 0 \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\Omega,\mathcal{B},\mathbb{P})$. Pour $\lambda > 0$, on a :

$$(\lambda X)^{-1}(]-\infty, x]) = X^{-1}\left(\left]-\infty, \frac{x}{\lambda}\right]\right) \in \mathcal{B}$$

et pour $\lambda < 0$, on a :

$$(\lambda X)^{-1}(]-\infty, x]) = X^{-1}\left(\left[\frac{x}{\lambda}, +\infty\right[\right) \in \mathcal{B}$$

Donc $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\Omega,\mathcal{B},\mathbb{P})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

En écrivant que $XY = \frac{1}{4}\left((X+Y)^2 - (X-Y)^2\right)$, il nous suffit de montrer que le carré d'une variable aléatoire est une variable aléatoire pour en déduire que $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\Omega,\mathcal{B},\mathbb{P})$ est stable par multiplication.

Pour X dans $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\Omega,\mathcal{B},\mathbb{P})$ et $x \in \mathbb{R}$, on a $(X^2)^{-1}(]-\infty, x]) = \emptyset$ si $x < 0$ et pour $x \geq 0$, $\omega \in \Omega$, on a :

$$X^2(\omega) \leq x \Leftrightarrow -\sqrt{x} \leq X(\omega) \leq \sqrt{x}$$

ce qui entraîne que :

$$\left(X^2\right)^{-1}(]-\infty, x]) = X^{-1}\left(\left[-\sqrt{x}, \sqrt{x}\right]\right) \in \mathcal{B}$$

et donc $X^2 \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\Omega,\mathcal{B},\mathbb{P})$. ■

On rappelle que si A est une partie de Ω, on définit alors sa fonction caractéristique par :

$$\begin{array}{rccl} \chi_A : & \Omega & \to & \mathbb{R} \\ & \omega & \mapsto & \chi_A(\omega) = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } \omega \in A \\ 0 \text{ si } \omega \in \Omega \setminus A \end{array} \right. \end{array}$$

Pour $A = \emptyset$, on a $\chi_A = 0$ et pour $A = \Omega$, on a $\chi_A = 1$.

Exercice 23.3 *Montrer que si n est un entier naturel non nul, $A_1, \cdots, A_n$ des éléments de $\mathcal{B}$ et $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ des réels, alors $X = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \chi_{A_k}$ est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.*

Solution 23.3 *Il suffit de montrer que, pour tout $A \in \mathcal{B}$, $\chi_A \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\Omega,\mathcal{B},\mathbb{P})$ puisque $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\Omega,\mathcal{B},\mathbb{P})$ est un espace vectoriel réel.*
Pour $A = \emptyset$, on a $\chi_A = 0 \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\Omega,\mathcal{B},\mathbb{P})$ et pour $A \neq \emptyset$, $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} (\chi_A)^{-1}(]-\infty, x]) &= \{\omega \in \Omega \mid \chi_A(\omega) \leq x\} \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \emptyset \textit{ si } x < 0 \\ \Omega \setminus A \textit{ si } 0 \leq x < 1 \\ \Omega \textit{ si } x \geq 1 \end{array} \right. \in \mathcal{B} \end{aligned}$$

et donc $\chi_A \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\Omega,\mathcal{B},\mathbb{P})$.

Exercice 23.4 *Montrer que si $X \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\Omega,\mathcal{B},\mathbb{P})$, alors $|X| \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\Omega,\mathcal{B},\mathbb{P})$. En déduire que pour X, Y dans $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\Omega,\mathcal{B},\mathbb{P})$, $\max(X,Y)$ et $\min(X,Y)$ sont dans $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\Omega,\mathcal{B},\mathbb{P})$.*

Solution 23.4 *Pour X dans $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\Omega,\mathcal{B},\mathbb{P})$ et $x \in \mathbb{R}$, on a $(|X|)^{-1}(]-\infty, x]) = \emptyset$ si $x < 0$ et pour $x \geq 0$, $\omega \in \Omega$, on a :*

$$|X|(\omega) \leq x \Leftrightarrow -x \leq X(\omega) \leq x$$

ce qui entraîne que :

$$(|X|)^{-1}(]-\infty, x]) = X^{-1}([-x, x]) \in \mathcal{B}$$

et donc $|X| \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$.
Il en résulte que :

$$\max(X, Y) = \frac{1}{2}(X + Y + |X - Y|) \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$$

et :

$$\min(X, Y) = \frac{1}{2}(X + Y - |X - Y|) \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$$

Exercice 23.5 *Montrer que si* X *est une variable aléatoire réelle discrète sur* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ *et* f *une application de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$, *on a alors :*

$$f \circ X = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) \chi_{X^{-1}(\{x\})}$$

Solution 23.5 *On a* $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in I\}$ *où* I *est une partie de* $\mathbb{N}$.
Pour tout $\omega \in \Omega$, *il existe un indice* $k \in I$ *tel que* $X(\omega) = x_k$ *et :*

$$\sum_{i \in I} f(x_i) \chi_{X^{-1}(\{x_i\})}(\omega) = f(x_k) = f \circ X(\omega)$$

du fait que $\chi_{X^{-1}(\{x_i\})}(\omega) = 0$ *pour* $i \neq k$ *(dans ce cas* $X(\omega) = x_k \neq x_i$ *et* $\omega \notin X^{-1}(x_i)$*) et* $\chi_{X^{-1}(\{x_k\})}(\omega) = 1$.

Définition 23.3 *On dit qu'une application* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est borélienne si :*

$$\forall A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}},\ f^{-1}(A) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$$

Théorème 23.5 *Si* X *est une variable aléatoire réelle sur* $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ *et* f *une application borélienne de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$, *alors* $f \circ X$ *est une variable aléatoire réelle sur* $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$.

Démonstration. Pour tout $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, on a :

$$\begin{aligned}(f \circ X)^{-1}(A) &= \{\omega \in \Omega \mid (f \circ X)(\omega) \in A\} \\ &= \left\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in f^{-1}(A)\right\} = X^{-1}\left(f^{-1}(A)\right) \in \mathcal{B}\end{aligned}$$

donc $f \circ X$ est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$. ∎

23.2 Loi d'une variable aléatoire réelle. Fonction de répartition

Théorème 23.6 *Si* X *est une variable aléatoire réelle sur* $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$, *alors l'application :*

$$\begin{array}{rccc}\mathbb{P}_X : & \mathcal{B}_{\mathbb{R}} & \to & [0, 1] \\ & A & \mapsto & \mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A))\end{array}$$

définit une probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$.

Définition 23.4 *Si* X *est une variable aléatoire réelle sur* $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$, *on dit alors que la mesure de probabilité* $\mathbb{P}_X$ *définie par le théorème précédent est la loi de* X *et que la fonction de répartition de* $\mathbb{P}_X$ *est la fonction de répartition de* X. *On la note* F_X
Dans le cas où $\mathbb{P}_X$ *admet une densité, on dit que c'est la densité de* X.

La fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle est donc définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \mathbb{P}_X(]-\infty, x]) = \mathbb{P}(X \leq x).$$

Exemple 23.1 *Si X est étagée avec $X(\Omega) = \{x_1, \cdots, x_n\}$ où $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, alors la fonction de répartition F_X est une fonction en escaliers croissante, nulle sur $]-\infty, x_1[$, égale à 1 sur $[x_n, +\infty[$ et :*

$$\begin{cases} \mathbb{P}(X = x_1) = F_X(x_1) \\ \mathbb{P}(X = x_k) = F_X(x_k) - F_X(x_{k-1}) \ (2 \leq k \leq n) \end{cases}$$

Ce qui résulte de :

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \begin{cases} 0 \ si\ x < x_1 \\ \sum\limits_{i=1}^{k} \mathbb{P}(X = x_i) \ \ si\ x \in [x_k, x_{k+1}[\\ 1 \ si\ x \in [x_n, +\infty[\end{cases}$$

En effet :
pour $x < x_1$, on a $(X \leq x) = \emptyset$;
pour $x \in [x_k, x_{k+1}[$, on a $(X \leq x) = (X = x_1) \cup \cdots \cup (X = x_k)$;
pour $x \in [x_n, +\infty[$, on a $(X \leq x) = \Omega$.

Dans le cas où X est une variable aléatoire à densité, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$$

où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ est une fonction continue par morceaux telle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt = 1$.

Exemple 23.2 *Si n un entier naturel non nul, on dit qu'une variable aléatoire réelle X suit une loi uniforme discrète si $X(\Omega) = \{1, \cdots, n\}$ et :*

$$\forall k \in \{1, \cdots, n\},\ \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\{1, \cdots, n\})$.
Cette loi permet de décrire les expériences aléatoires où il y a équiprobabilité.

Exemple 23.3 *Si p un réel dans $]0, 1[$, on dit qu'une variable aléatoire réelle X suit une loi de Bernoulli de paramètre p si $X(\Omega) = \{0, 1\}$ et :*

$$\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p,\ \mathbb{P}(X = 1) = p.$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

Exemple 23.4 *Si n un entier naturel non nul et p un réel dans $]0, 1[$, on dit qu'une variable aléatoire réelle X suit une loi binomiale de paramètres n et p, si $X(\Omega) = \{0, 1, \cdots, n\}$ et :*

$$\forall k \in \{0, 1, \cdots, n\},\ \mathbb{P}(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

Exemple 23.5 *Si p un réel dans $]0,1[$, on dit qu'une variable aléatoire réelle X suit une loi géométrique de paramètre p, si $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et :*

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

Exemple 23.6 *Si λ un réel strictement positif, on dit qu'une variable aléatoire réelle X suit une loi de Poisson de paramètre λ, si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et :*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ \mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

Exemple 23.7 *Si λ est un réel strictement positif, on dit qu'une variable aléatoire réelle X suit une loi exponentielle de paramètre λ, si $X(\Omega) = \mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a :*

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \begin{cases} \lambda \displaystyle\int_0^x e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x} \ si \ x \geq 0 \\ 0 \ si \ x < 0 \end{cases}$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.

Exemple 23.8 *Si σ est un réel strictement positif et μ un réel, on dit qu'une variable aléatoire réelle X suit une loi normale (de Gauss) de paramètres μ et σ si $X(\Omega) = \mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a :*

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma)$.

Exercice 23.6 *Un concours de tir au pistolet entre deux compétiteurs A et B est constitué d'une suite d'épreuves consistant, pour chacun des compétiteurs, en un tir visant à atteindre une cible. Les deux compétiteurs tirent simultanément, chacun d'eux disposant de sa cible personnelle. On associe à ce concours une expérience aléatoire.*
On suppose que toutes les épreuves sont mutuellement indépendantes et que pour chaque épreuve :
– le compétiteur A a la probabilité $\frac{2}{3}$ de toucher sa cible ;
– le compétiteur B a la probabilité $\frac{1}{2}$ de toucher sa cible ;
– les résultats obtenus par A et B sont indépendants.
À l'issue de chaque épreuve, il faut avoir touché sa cible pour être autorisé à poursuivre le concours, sinon on est éliminé.
Le concours cesse lorsque les deux compétiteurs ont été éliminés.
Pour tout entier $n \geq 1$, on considère les événements suivants :

A_n *: à l'issue de l'épreuve n, seul A n'est pas éliminé ;*
B_n *: à l'issue de l'épreuve n, seul B n'est pas éliminé ;*
C_n *: à l'issue de l'épreuve n, aucun compétiteur n'est éliminé ;*
D_n *: à l'issue de l'épreuve n, les deux compétiteurs sont éliminés ;*

C_0 est l'événement certain et A_0, B_0, D_0 sont impossibles.

1. *Calculer les probabilités suivantes :*

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbb{P}(A_{n+1} \mid A_n),\ \mathbb{P}(B_{n+1} \mid A_n),\ \mathbb{P}(C_{n+1} \mid A_n),\ \mathbb{P}(D_{n+1} \mid A_n), \\ \mathbb{P}(A_{n+1} \mid B_n),\ \mathbb{P}(B_{n+1} \mid B_n),\ \mathbb{P}(C_{n+1} \mid B_n),\ \mathbb{P}(D_{n+1} \mid B_n), \\ \mathbb{P}(C_{n+1} \mid C_n),\ \mathbb{P}(B_{n+1} \mid C_n),\ \mathbb{P}(C_{n+1} \mid C_n),\ \mathbb{P}(D_{n+1} \mid C_n). \end{array}\right.$$

2. *On note X la variable aléatoire égale au numéro de l'épreuve à l'issue de laquelle a lieu la première élimination.*
   (a) *Calculer $\mathbb{P}(X = 1)$.*
   On suppose dans les questions suivantes que $n \geq 2$.
   (b) *Calculer $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} C_k\right)$.*
   (c) *Calculer $\mathbb{P}(X > n)$.*
   (d) *En déduire $\mathbb{P}(X = n)$.*
   (e) *Calculer $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X = k)$.*
   (f) *Montrer que $\mathbb{P}(X > n-1) = \mathbb{P}(X = n) + \mathbb{P}(X > n)$.*
   (g) *Montrer que $n\mathbb{P}(X > n) + \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X > k)$.*
   (h) *En déduire $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X = k)$.*

3. *Pour $n \in \mathbb{N}$ on note $X_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(A_n) \\ \mathbb{P}(B_n) \\ \mathbb{P}(C_n) \\ \mathbb{P}(D_n) \end{pmatrix}$ et $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ est la matrice de transition définie par $X_{n+1} = AX_n$.*
   (a) *Déterminer A.*
   (b) *Déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telle que $A = PDP$.*
   (c) *Calculer X_n en fonction de X_0 pour tout entier naturel n.*
   (d) *Calculer $\lim_{n\to+\infty} X_n$.*

Solution 23.6

1. *On a :*

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbb{P}(A_{n+1} \mid A_n) = \frac{2}{3},\ \mathbb{P}(B_{n+1} \mid A_n) = 0,\ \mathbb{P}(C_{n+1} \mid A_n) = 0,\ \mathbb{P}(D_{n+1} \mid A_n) = \frac{1}{3}, \\ \mathbb{P}(A_{n+1} \mid B_n) = 0,\ \mathbb{P}(B_{n+1} \mid B_n) = \frac{1}{2},\ \mathbb{P}(C_{n+1} \mid B_n) = 0,\ \mathbb{P}(D_{n+1} \mid B_n) = \frac{1}{2}, \\ \mathbb{P}(C_{n+1} \mid C_n) = \frac{1}{3},\ \mathbb{P}(B_{n+1} \mid C_n) = \frac{1}{6},\ \mathbb{P}(C_{n+1} \mid C_n) = \frac{1}{3},\ \mathbb{P}(D_{n+1} \mid C_n) = \frac{1}{6}. \end{array}\right.$$

2.
   (a) $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(D_1) = \frac{2}{3}$.
   (b) $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} C_k\right) = \mathbb{P}\left(C_n \mid \bigcap_{k=1}^{n-1} C_k\right) \cdots \mathbb{P}(C_2 \mid C_1)\,\mathbb{P}(C_1) = \frac{1}{3^n}$.

(c) $\mathbb{P}(X > n) = \mathbb{P}(C_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=1}^{n} C_k\right) = \dfrac{1}{3^n}.$

(d) $\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(X \leq n) - \mathbb{P}(X \leq n) = \dfrac{1}{3^{n-1}} - \dfrac{1}{3^n} = \dfrac{2}{3^n}.$

(e) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X = k) = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\dfrac{1}{3^{k-1}} - \dfrac{1}{3^k}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \dfrac{1}{3^n}\right) = 1.$

(f) *Résulte de* $(X > n-1) = (X = n) \cup (X > n)$.

(g) *On a :*

$$\begin{aligned} P_n &= n\mathbb{P}(X > n) + \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X = k) \\ &= \frac{n}{3^n} + \sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{1}{3^{k-1}} - \frac{1}{3^k}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{3^k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X > k). \end{aligned}$$

(h) *On a :*

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X = k) &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X > k) - n\mathbb{P}(X > n) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (\mathbb{P}(X > k) - \mathbb{P}(X > n)) \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} p(X > k) - p(X > n) &= p(X = k+1 \ ou \ \cdots \ ou \ n) \\ &= \sum_{j=k+1}^{n} p(X = j) = \frac{1}{3^k} - \frac{1}{3^n} \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X = k) = \frac{1 - \frac{1}{3^n}}{1 - \frac{1}{3}} - \frac{n}{3^n}$$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{3}{2}.$

3.

(a) *On a un processus de Markov avec :*

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) *A est diagonalisable avec* $P^{-1}AP = D$ *et* $P^2 = I_4$ *où :*

$$D = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \ P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) $X_n = A^n X_0 = PD^n P X_0$.

(d) On a :

$$X_n = A^n X_0 = PD^n P \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2^n - 1)\, 3^{-n} \\ 2^{-n} - 3^{-n} \\ 3^{-n} \\ 1 - 2^n 3^{-n} - 2^{-n} + 3^{-n} \end{pmatrix}$$

et $\lim\limits_{n \to +\infty} X_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

23.3 Espérance

Pour ce paragraphe, X est une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$.

Définition 23.5 *Si X est à valeurs positives, l'espérance de X est l'élément de $\overline{\mathbb{R}^+} = [0, +\infty]$ défini par :*

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X > t)\, dt$$

L'application $t \mapsto \mathbb{P}(X > t) = 1 - F_X(t)$ est décroissante à valeurs positives. Elle est donc Riemann-intégrable sur tout segment $[0, x]$ avec $x > 0$ et la fonction :

$$x \mapsto \int_0^x \mathbb{P}(X > t)\, dt$$

qui est croissante admet une limite, éventuellement égale à $+\infty$, quand x tend vers $+\infty$.

Avec :

$$\mathbb{P}(X > t) = 1 - \mathbb{P}(X \leq t) = 1 - F_X(t)$$

on a :

$$\int_0^x \mathbb{P}(X > t)\, dt = x - \int_0^x F_X(t)\, dt$$

Exercice 23.7 *Calculer $\mathbb{E}(X)$ pour X suivant une loi exponentielle de paramètre λ.*

Solution 23.7 *Si $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ alors :*

$$\mathbb{P}(X > t) = 1 - F_X(x) = \begin{cases} e^{-\lambda x} \text{ si } t \geq 0 \\ 1 \text{ si } t < 0 \end{cases}$$

et :

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}$$

Lemme 23.1 *Si X est une variable aléatoire réelle étagée positive sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ avec $X(\Omega) = \{x_1, \cdots, x_n\}$, on a alors :*

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k \mathbb{P}(X = x_k)$$

Démonstration. On peut supposer que $0 \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ et on a :

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < x_1 \\ \sum\limits_{i=1}^{k} \mathbb{P}(X = x_i) \text{ si } t \in [x_k, x_{k+1}[\\ 1 \text{ si } t \in [x_n, +\infty[\end{cases}$$

donc :

$$\mathbb{P}(X > t) = 1 - F_X(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t < x_1 \\ 1 - \sum\limits_{i=1}^{k} \mathbb{P}(X = x_i) \text{ si } t \in [x_k, x_{k+1}[\\ 0 \text{ si } t \in [x_n, +\infty[\end{cases}$$

et :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_0^{x_1} \mathbb{P}(X > t)\,dt + \int_{x_1}^{x_2} \mathbb{P}(X > t)\,dt + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} \mathbb{P}(X > t)\,dt + \int_{x_n}^{+\infty} \mathbb{P}(X > t)\,dt \\ &= x_1 + \int_{x_1}^{x_2} (1 - \mathbb{P}(X = x_1))\,dt + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} \left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(X = x_i)\right) dt \\ &= x_1 + (1 - \mathbb{P}(X = x_1))(x_2 - x_1) + \cdots + \left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(X = x_i)\right)(x_n - x_{n-1}) \end{aligned}$$

soit en notant $p_k = \mathbb{P}(X = x_k)$ pour $1 \leq k \leq n$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= x_1 + (1 - p_1)(x_2 - x_1) + (1 - p_1 - p_2)(x_3 - x_2) + \cdots + \left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} p_i\right)(x_n - x_{n-1}) \\ &= x_1(1 - (1 - p_1)) + x_2((1 - p_1) - (1 - p_1 - p_2)) \\ &+ x_{n-1}((1 - p_1 - \cdots - p_{n-2}) - (1 - p_1 - \cdots - p_{n-1})) \\ &+ x_n(1 - p_1 - \cdots - p_{n-1}) \\ &= p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_{n-1} x_{n-1} + p_n x_n \end{aligned}$$

puisque $p_1 + \cdots + p_{n-1} + p_n = 1$. ■

Exercice 23.8 *Calculer $\mathbb{E}(\chi_A)$ pour tout élément A de $\mathcal{B}$.*

Solution 23.8 *On a $\chi_A(\Omega) = \{0, 1\}$ et :*

$$\mathbb{E}(\chi_A) = \mathbb{P}(\chi_A = 1) = \mathbb{P}(A)$$

Exercice 23.9 *Calculer $\mathbb{E}(X)$ pour X suivant une loi uniforme discrète, une loi de Bernoulli, une loi binomiale.*

Solution 23.9 *Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\{1, \cdots, n\})$, alors :*

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} = \frac{n+1}{2}$$

Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, alors :

$$\mathbb{E}(X) = p$$

Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$, *alors en tenant compte de* $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$ *pour* $1 \leq k \leq n$, *on a :*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^{n} kC_n^k p^k (1-p)^{n-k} = np\sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} p^{k-1}(1-p)^{n-1-(k-1)} \\ &= np\sum_{j=0}^{n-1} C_{n-1}^{j} p^j (1-p)^{n-1-j} = np(p+1-p)^{n-1} = np.\end{aligned}$$

Lemme 23.2 *Si* X, Y *sont deux variables aléatoires réelles étagées positives sur* $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ *et* λ *un réel positif, on a alors :*

$$\mathbb{E}(\lambda X + Y) = \lambda \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$$

Démonstration. Soit $Z = \lambda X + Y$. Pour tout $z \in Z(\Omega)$, on note :

$$I_z = \{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \mid \lambda x + y = z\}$$

C'est un ensemble fini puisque contenu dans $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ qui est fini.

Pour tout $z \in Z(\Omega)$, on a la partition :

$$(Z = z) = \bigcup_{(x,y)\in I_z} (X = x) \cap (Y = y)$$

donc :

$$\mathbb{P}(Z = z) = \sum_{(x,y)\in I_z} \mathbb{P}((X = x) \cap (Y = y))$$

et :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z) &= \sum_{z\in Z(\Omega)} z\mathbb{P}(Z = z) = \sum_{z\in Z(\Omega)} z \sum_{(x,y)\in I_z} \mathbb{P}((X = x) \cap (Y = y)) \\ &= \sum_{z\in Z(\Omega)} \sum_{(x,y)\in I_z} z\mathbb{P}((X = x) \cap (Y = y)) \\ &= \sum_{z\in Z(\Omega)} \sum_{(x,y)\in I_z} (\lambda x + y)\mathbb{P}((X = x) \cap (Y = y)) \\ &= \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} (\lambda x + y)\mathbb{P}((X = x) \cap (Y = y)) \\ &= \lambda \sum_{x\in X(\Omega)} x \sum_{y\in Y(\Omega)} \mathbb{P}((X = x) \cap (Y = y)) + \sum_{y\in Y(\Omega)} y \sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}((X = x) \cap (Y = y))\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}\sum_{y\in Y(\Omega)} \mathbb{P}((X = x) \cap (Y = y)) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{y\in Y(\Omega)} (X = x) \cap (Y = y)\right) \\ &= \mathbb{P}((X = x))\end{aligned}$$

puisque $((Y = y))_{y\in Y(\Omega)}$ est un système complet d'événements et :

$$\begin{aligned}\sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}((X = x) \cap (Y = y)) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{x\in X(\Omega)} (X = x) \cap (Y = y)\right) \\ &= \mathbb{P}((Y = y))\end{aligned}$$

puisque $((X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements. Ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z) &= \lambda \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}((X = x)) + \sum_{y \in Y(\Omega)} y\mathbb{P}((Y = y)) \\ &= \lambda\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y).\end{aligned}$$

■

Définition 23.6 *On dit qu'une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ converge vers une variable aléatoire réelle X sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ si pour tout $\omega \in \Omega$, la suite réelle $(X_n(\omega))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $X(\omega)$ (ce qui revient à dire que la suite de fonctions $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers X sur Ω).*

Théorème 23.7 *Une variable aléatoire réelle positive sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ est limite d'une suite croissante de variables aléatoires réelles étagées positives.*

Démonstration. Soit X une variable aléatoire réelle positive sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ définie par :

$$X_n = \sum_{k=0}^{n2^n - 1} \frac{k}{2^n} \chi_{A_{n,k}}$$

où :

$$A_{n,k} = \left(\frac{k}{2^n} \leq X < \frac{k+1}{2^n}\right) \in \mathcal{B}$$

Chaque X_n est une variable aléatoire réelle étagée positive.

Pour $\omega \in \Omega$ et $n > X(\omega)$, il existe un unique entier $k \in \{0, \cdots, n2^n - 1\}$ tel que :

$$\frac{k}{2^n} \leq X(\omega) < \frac{k+1}{2^n}$$

(pour $0 \leq X(\omega) < n$, on a $0 \leq 2^n X(\omega) < n2^n$, donc $0 \leq k = [2^n X(\omega)] \leq n2^n - 1$ et $k \leq X(\omega) < k + 1$), ce qui signifie qu'il existe un unique entier $k \in \{0, \cdots, n2^n - 1\}$ tel que $\omega \in A_{n,k}$, donc $X_n(\omega) = \dfrac{k}{2^n}$ et :

$$|X(\omega) - X_n(\omega)| < \frac{1}{2^n} \underset{n \to +\infty}{\to} 0$$

La suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge donc simplement vers X.

Il reste à montrer que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

Pour $\omega \in \Omega$ et $n \geq 1$, on a deux possibilités.

Soit $X(\omega) < n$ et alors $X_n(\omega) = \dfrac{k}{2^n}$ où $k = [2^n X(\omega)]$, c'est-à-dire que $\dfrac{k}{2^n} \leq X(\omega) < \dfrac{k+1}{2^n}$ et :

$$X_{n+1}(\omega) = \begin{cases} \dfrac{k}{2^n} \text{ si } \dfrac{k}{2^n} = \dfrac{2k}{2^{n+1}} \leq X(\omega) < \dfrac{2k+1}{2^{n+1}} \\ \dfrac{2k+1}{2^{n+1}} \text{ si } \dfrac{2k+1}{2^{n+1}} \leq X(\omega) < \dfrac{k+1}{2^n} = \dfrac{2k+2}{2^{n+1}} \end{cases}$$

qui donne dans tous les cas $X_n(\omega) \leq X_{n+1}(\omega)$.

Soit $X(\omega) \geq n$ et alors $X(\omega) \notin A_{n,k}$ pour $0 \leq k \leq n2^n - 1$ puisque $2^n X(\omega) \geq n2^n \geq k + 1$, ce qui donne $X_n(\omega) = 0 \leq X_{n+1}(\omega)$. ■

Lemme 23.3 *Si X, Y sont deux variables aléatoires réelles positives sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ telles que $X \leq Y$, on a alors $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$.*

Démonstration. Si $X \leq Y$, on a alors $(X > t) \subset (Y > t)$ pour tout réel $t \geq 0$, donc $\mathbb{P}(X > t) \leq \mathbb{P}(Y > t)$ et :

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X > t)\, dt \leq \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(Y > t)\, dt = \mathbb{E}(Y).$$

■

Théorème 23.8 (Beppo-Levi) *Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de variables aléatoires réelles positives sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ qui converge vers une variable aléatoire réelle X sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$, on a alors :*

$$\mathbb{E}(X) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n)$$

dans $\overline{\mathbb{R}^+}$.

Démonstration. Avec $0 \leq X_n \leq X_{n+1} \leq X$ ($(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en croissant vers X), on déduit que $0 \leq \mathbb{E}(X_n) \leq \mathbb{E}(X_{n+1}) \leq \mathbb{E}(X)$, donc $(\mathbb{E}(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante dans $\overline{\mathbb{R}^+}$, elle est donc convergente (éventuellement vers $+\infty$) et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n) \leq \mathbb{E}(X)$.

D'autre part, pour tout réel $t > 0$, la suite $((X_n > t))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et :

$$(X > t) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (X_n > t)$$

($X_n(\omega) > t$ pour un entier n entraîne $X(\omega) = \lim\limits_{\substack{m\to+\infty \\ m\geq n}} X_m(\omega) \geq X_n(\omega) > t$ et $X(\omega) > t$ entraîne $X_n(\omega) \geq t$ pour n grand), ce qui donne :

$$\mathbb{P}(X > t) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n > t)$$

donc pour tout $m \geq 1$:

$$\begin{aligned}
\int_0^m \mathbb{P}(X > t)\, dt &= \int_0^m \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n > t)\, dt \\
&= \lim_{n\to+\infty} \int_0^m \mathbb{P}(X_n > t)\, dt \\
&\leq \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n)
\end{aligned}$$

et $\mathbb{E}(X) \leq \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n)$. ■

Remarque 23.2 *L'égalité $\int_0^m \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n > t)\, dt = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^m \mathbb{P}(X_n > t)\, dt$ est justifiée par le théorème de convergence monotone qui nous dit que : si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de fonctions de $I = [0, m]$ dans $\mathbb{R}^+$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction f_n est continue par morceaux et $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n = f$ avec f est continue par morceaux, alors $\int_I f(x)\, dx = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_I f_n(x)\, dx$.*

Théorème 23.9 *Si X, Y sont deux variables aléatoires réelles positives sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ et λ un réel positif, on a alors :*

$$\mathbb{E}(\lambda X + Y) = \lambda \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$$

Démonstration. En désignant respectivement par $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de variables aléatoires réelles positives et étagées sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ qui converge vers X et Y, la suite $(\lambda X_n + Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est étagée positive, converge en croissant vers $\lambda X + Y$ et on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\lambda X + Y) &= \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(\lambda X_n + Y_n) = \lim_{n\to+\infty} \lambda\mathbb{E}(X_n) + \mathbb{E}(Y_n)\\ &= \lambda\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)\end{aligned}$$

■

Pour toute variable aléatoire X sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$, on désigne par X^+ et X^- les variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ définies par :

$$X^+ = \max(X, 0) = \frac{1}{2}(X + |X|) \text{ et } X^- = \max(-X, 0) = \frac{1}{2}(|X| - X) = -\min(X, 0)$$

On peut remarquer que :

$$X = X^+ - X^- \text{ et } |X| = X^+ + X^-$$

Définition 23.7 *On dit qu'une variable aléatoire X sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ est intégrable si $\mathbb{E}(X^+) < +\infty$ et $\mathbb{E}(X^-) < +\infty$.*

Définition 23.8 *Si X est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ qui est intégrable, son espérance est le réel :*

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}\left(X^+\right) - \mathbb{E}\left(X^-\right)$$

Théorème 23.10 *Une variable aléatoire X sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ est intégrable si, et seulement si $\mathbb{E}(|X|) < +\infty$ et dans ce cas, on a :*

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} (1 - F_X(t))\, dt - \int_0^{+\infty} F_X(-t)\, dt$$

Démonstration. Supposons X intégrable. Avec $|X| = X^+ + X^-$, on déduit que $\mathbb{E}(|X|) = \mathbb{E}(X^+) + \mathbb{E}(X^-) < +\infty$.

Réciproquement si $\mathbb{E}(|X|) < +\infty$, avec $X^+ \leq |X|$, on déduit que $\mathbb{E}(X^+) \leq \mathbb{E}(|X|) < +\infty$.

Pour X intégrable, on a :

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}\left(X^+\right) - \mathbb{E}\left(X^-\right) = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}\left(X^+ > t\right) dt - \int_0^{+\infty} \mathbb{P}\left(X^- > t\right) dt$$

avec :

$$\begin{aligned}\left(X^+ > t\right) &= (\max(X, 0) > t) = (X > t)\\ \left(X^- > t\right) &= (\max(-X, 0) > t) = (X < -t)\end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X > t)\, dt - \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X < -t)\, dt = \int_0^{+\infty} (1 - F_X(t))\, dt - \int_0^{+\infty} F_X(-t)\, dt$$

■

Exercice 23.10 *Soient X, Y deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$. Montrer que si $|X| \leq |Y|$ avec Y intégrable, alors X est intégrable.*

Solution 23.10 *Si* $|X| \leq |Y|$ *avec* Y *intégrable, on a alors* $\mathbb{E}(|X|) \leq \mathbb{E}(|Y|) < +\infty$ *et* X *est intégrable.*

Théorème 23.11 *L'ensemble* $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ *des variables aléatoires intégrables sur* $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ *est un sous-espace vectoriel de l'espace* $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ *des variables aléatoires réelles sur* $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ *et l'application :*

$$\begin{array}{rccc} \mathbb{E}: & \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P}) & \to & \mathbb{R} \\ & X & \mapsto & \mathbb{E}(X) \end{array}$$

est une forme linéaire.

Démonstration. On a $\mathbb{E}(0) = \mathbb{E}(\chi_\emptyset) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$. Donc $0 \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$.

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et X, Y dans $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$, on a :

$$|\lambda X + Y| \leq |\lambda| |X| + |Y|$$

avec :

$$\mathbb{E}(|\lambda| |X| + |Y|) = |\lambda| \mathbb{E}(|X|) + \mathbb{E}(|Y|) < +\infty$$

donc $\mathbb{E}(|\lambda X + Y|) < +\infty$ et $\lambda X + Y \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$.

Il en résulte que $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ est un sous-espace vectoriel $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$.

Pour X, Y dans $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$, on a :

$$\begin{aligned} X + Y &= (X+Y)^+ - (X+Y)^- \\ &= \left(X^+ - X^-\right) + \left(Y^+ - Y^-\right) \end{aligned}$$

donc :

$$(X+Y)^+ + X^- + Y^- = (X+Y)^- + X^+ + Y^+$$

et :

$$\mathbb{E}\left((X+Y)^+\right) + \mathbb{E}\left(X^-\right) + \mathbb{E}\left(Y^-\right) = \mathbb{E}\left((X+Y)^-\right) + \mathbb{E}\left(X^+\right) + \mathbb{E}\left(Y^+\right)$$

ce qui donne :

$$\mathbb{E}\left((X+Y)^+\right) - \mathbb{E}\left((X+Y)^-\right) = \mathbb{E}\left(X^+\right) - \mathbb{E}\left(X^-\right) + \mathbb{E}\left(Y^+\right) - \mathbb{E}\left(Y^-\right)$$

soit :

$$\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$$

Pour X dans $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ et $\lambda \in \mathbb{R}^{+,*}$ on a :

$$(\lambda X)^+ = \frac{\lambda}{2}(X + |X|) = \lambda X^+ \text{ et } (\lambda X)^- = \frac{\lambda}{2}(|X| - X) = \lambda X^-$$

donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\lambda X) &= \mathbb{E}\left((\lambda X)^+\right) - \mathbb{E}\left((\lambda X)^-\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\lambda X^+\right) - \mathbb{E}\left(\lambda X^-\right) = \lambda\left(\mathbb{E}\left(X^+\right) - \mathbb{E}\left(X^-\right)\right) \\ &= \lambda \mathbb{E}(X) \end{aligned}$$

Pour $\lambda \in \mathbb{R}^{-,*}$ on a :

$$(\lambda X)^+ = \frac{\lambda}{2}(X - |X|) = -\lambda X^- \text{ et } (\lambda X)^- = \frac{\lambda}{2}(-|X| - X) = -\lambda X^+$$

avec $-\lambda > 0$, donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\lambda X) &= \mathbb{E}\left((\lambda X)^+\right) - \mathbb{E}\left((\lambda X)^-\right) \\ &= \mathbb{E}\left(-\lambda X^-\right) - \mathbb{E}\left(-\lambda X^+\right) = \lambda\left(\mathbb{E}\left(X^+\right) - \mathbb{E}\left(X^-\right)\right) \\ &= \lambda \mathbb{E}(X)\end{aligned}$$

Pour $\lambda = 0$ c'est clair. ∎

Théorème 23.12 *Si X est une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ avec $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in I\}$ où I est une partie de $\mathbb{N}$ et f est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$, on a alors, dans $\overline{\mathbb{R}^+}$:*

$$\mathbb{E}(f \circ X) = \sum_{i \in I} f(x_i)\, \mathbb{P}(X = x_i)$$

Démonstration. Si $X(\Omega)$ est fini, avec :

$$f \circ X = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)\, \chi_{X^{-1}(\{x\})} = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, \chi_{X^{-1}(\{x_i\})}$$

(exercice 23.5) et la linéarité de l'espérance, on déduit que :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(f \circ X) &= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, \mathbb{E}\left(\chi_{X^{-1}(\{x_i\})}\right) = \sum_{i \in I} f(x_i)\, \mathbb{P}\left(X^{-1}(\{x_i\})\right) \\ &= \sum_{i \in I} f(x_i)\, \mathbb{P}(X = x_i).\end{aligned}$$

Si $X(\Omega) = \{x_i \;;\; i \in \mathbb{N}\}$ est infini dénombrable, la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$X_n = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, \chi_{X^{-1}(\{x_i\})}$$

est croissante (f est à valeurs positives) et converge vers $f \circ X$ (pour $\omega \in \Omega$, il existe un entier m tel que $X(\omega) = x_m$ et pour $n \geq m$, on a $X_n(\omega) = f(x_m) = f \circ X(\omega)$), donc le théorème de Beppo-Levi nous dit que :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(f \circ X) &= \lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}(X_n) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, \mathbb{P}(X = x_i) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} f(x_n)\, \mathbb{P}(X = x_n) = \sum_{i \in I} f(x_i)\, \mathbb{P}(X = x_i)\end{aligned}$$

∎

Exercice 23.11 *Montrer que si X est une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ qui est intégrable, on a alors :*

$$\mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X)\, \chi_\Omega)^2\right) = \sum_{i \in I} (x_i - \mathbb{E}(X))^2\, \mathbb{P}(X = x_i)$$

Solution 23.11 *On applique le théorème précédent avec la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$f(x) = (x - \mathbb{E}(X))^2$$

On a alors pour tout $\omega \in \Omega$:

$$f \circ X(\omega) = (X(\omega) - \mathbb{E}(X))^2 = ((X - \mathbb{E}(X)\chi_\Omega)(\omega))^2$$

À toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on associe les fonctions f^+ et f^- définies par :

$$f^+ = \max(f, 0) \text{ et } f^- = \max(-f, 0) = -\min(f, 0)$$

Ces fonctions sont à valeurs positives.

Lemme 23.4 *Si X est une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ avec $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in I\}$ où I est une partie de $\mathbb{N}$ et f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on a alors :*

$$\mathbb{E}\left(f^+ \circ X\right) = \sum_{\substack{i \in I \\ f(x_i) \geq 0}} f(x_i)\,\mathbb{P}(X = x_i)$$

$$\mathbb{E}\left(f^- \circ X\right) = -\sum_{\substack{i \in I \\ f(x_i) \leq 0}} f(x_i)\,\mathbb{P}(X = x_i)$$

$$\mathbb{E}(|f \circ X|) = \sum_{i \in I} |f(x_i)|\,\mathbb{P}(X = x_i)$$

Démonstration. Comme f^+ est à valeurs positives et X discrète, on a :

$$\mathbb{E}\left(f^+ \circ X\right) = \sum_{i \in I} f^+(x_i)\,\mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{\substack{i \in I \\ f(x_i) \geq 0}} f(x_i)\,\mathbb{P}(X = x_i)$$

et même chose pour f^-.

Avec :

$$(f \circ X)^+ = \frac{1}{2}(f \circ X + |f \circ X|) = \frac{1}{2}(f + |f|) \circ X = f^+ \circ X$$

et :

$$(f \circ X)^- = \frac{1}{2}(|f \circ X| - f \circ X) = \frac{1}{2}(|f| - f) \circ X = f^- \circ X$$

on déduit que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(|f \circ X|) &= \mathbb{E}\left((f \circ X)^+ + (f \circ X)^-\right) = \mathbb{E}\left(f^+ \circ X + f^- \circ X\right) \\
&= \mathbb{E}\left(f^+ \circ X\right) + \mathbb{E}\left(f^- \circ X\right) \\
&= \sum_{\substack{i \in I \\ f(x_i) \geq 0}} f(x_i)\,\mathbb{P}(X = x_i) - \sum_{\substack{i \in I \\ f(x_i) \leq 0}} f(x_i)\,\mathbb{P}(X = x_i) \\
&= \sum_{i \in I} |f(x_i)|\,\mathbb{P}(X = x_i)
\end{aligned}$$

■

Théorème 23.13 (de transfert) *Si X est une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ avec $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in I\}$ où I est une partie de $\mathbb{N}$ et f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f \circ X$ soit intégrable, on a alors :*

$$\mathbb{E}(f \circ X) = \sum_{i \in I} f(x_i) \mathbb{P}(X = x_i)$$

Démonstration. En utilisant la démonstration du théorème précédent, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(f \circ X) &= \mathbb{E}\left((f \circ X)^+ - (f \circ X)^-\right) = \mathbb{E}\left(f^+ \circ X - f^- \circ X\right) \\
&= \mathbb{E}\left(f^+ \circ X\right) - \mathbb{E}\left(f^- \circ X\right) \\
&= \sum_{\substack{i \in I \\ f(x_i) \geq 0}} f(x_i) \mathbb{P}(X = x_i) + \sum_{\substack{i \in I \\ f(x_i) \leq 0}} f(x_i) \mathbb{P}(X = x_i) \\
&= \sum_{i \in I} f(x_i) \mathbb{P}(X = x_i)
\end{aligned}$$

■

On en déduit que si X est une variable aléatoire réelle discrète intégrable sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ avec $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in I\}$ où I est une partie de $\mathbb{N}$, on a alors :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i \in I} x_i \mathbb{P}(X = x_i)$$

cette série étant absolument convergente dans le cas où l'ensemble dénombrable I est infini.

Exercice 23.12 *Calculer $\mathbb{E}(X)$ pour X suivant une loi géométrique, une loi de Poisson.*

Solution 23.12 *Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ avec $p \in]0,1[$, on a alors :*

$$\mathbb{E}(X) = p \sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1}$$

avec :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k x^{k-1} = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} x^k\right)' = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

pour tout réel $x \in]0,1[$, ce qui nous donne :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}.$$

Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, alors :

$$\mathbb{E}(X) = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \lambda \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\lambda^j}{j!} = \lambda.$$

Lemme 23.5 *Si X est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ possédant une densité f, on a alors :*

$$\mathbb{E}\left(X^+\right) = \int_0^{+\infty} t f(t)\, dt,\ \mathbb{E}\left(X^-\right) = \int_{-\infty}^0 -t f(t)\, dt$$

et :

$$\mathbb{E}(|X|) = \int_{-\infty}^{+\infty} |t| f(t)\, dt$$

Démonstration. La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires réelles étagées positives définie par :

$$X_n = \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n}\chi_{A_{n,k}}$$

où :

$$A_{n,k} = \left(\frac{k}{2^n} \leq X < \frac{k+1}{2^n}\right)$$

converge en croissant vers X^+ (voir la démonstration du théorème 23.7).

Le théorème de Beppo-Levi nous dit alors que $\mathbb{E}\left(X^+\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left(X_n\right)$ avec :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(X_n\right) &= \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n}\mathbb{P}\left(\frac{k}{2^n} \leq X < \frac{k+1}{2^n}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n}\left(F_X\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - F_X\left(\frac{k}{2^n}\right)\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n}\int_{\frac{k}{2^n}}^{\frac{k+1}{2^n}} f\left(t\right) dt\end{aligned}$$

On peut alors écrire que :

$$\begin{aligned}\left|\int_0^n tf\left(t\right) dt - \mathbb{E}\left(X_n\right)\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n2^n-1} \int_{\frac{k}{2^n}}^{\frac{k+1}{2^n}} \left(t - \frac{k}{2^n}\right) f\left(t\right) dt\right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n2^n-1} \int_{\frac{k}{2^n}}^{\frac{k+1}{2^n}} \left(t - \frac{k}{2^n}\right) f\left(t\right) dt \\ &\leq \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n2^n-1} \int_{\frac{k}{2^n}}^{\frac{k+1}{2^n}} f\left(t\right) dt = \frac{1}{2^n}\int_0^n f\left(t\right) dt\end{aligned}$$

et tenant compte de :

$$0 \leq \int_0^n f\left(t\right) dt \leq \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(t\right) dt = 1$$

on déduit que :

$$\left|\int_0^n tf\left(t\right) dt - \mathbb{E}\left(X_n\right)\right| \leq \frac{1}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

et :

$$\mathbb{E}\left(X^+\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left(X_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n tf\left(t\right) dt = \int_0^{+\infty} tf\left(t\right) dt$$

De manière analogue, on vérifie que la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires réelles étagées positives définie par :

$$Y_n = \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n}\chi_{B_{n,k}}$$

où :

$$B_{n,k} = \left(-\frac{k+1}{2^n} < X \leq -\frac{k}{2^n}\right)$$

converge en croissant vers X^- et $\mathbb{E}(X^-) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(Y_n)$ avec :

$$\mathbb{E}(Y_n) = \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \int_{-\frac{k+1}{2^n}}^{-\frac{k}{2^n}} f(t)\,dt$$

et :

$$\left| \int_{-n}^{0} -tf(t)\,dt - \mathbb{E}(Y_n) \right| \leq \sum_{k=0}^{n2^n-1} \int_{-\frac{k+1}{2^n}}^{-\frac{k}{2^n}} \left(-t - \frac{k}{2^n} \right) f(t)\,dt \leq \frac{1}{2^n}$$

ce qui donne $\mathbb{E}(X^-) = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} - tf(t)\,dt.$

Enfin :

$$\mathbb{E}(|X|) = \mathbb{E}\left(X^+\right) + \mathbb{E}\left(X^-\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} |t|\, f(t)\,dt$$

■

Théorème 23.14 *Si X est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ possédant une densité f et intégrable, on a alors :*

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,dt$$

Démonstration. En reprenant la démonstration du théorème précédent, on a pour X possédant une densité f et intégrable :

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}\left(X^+\right) - \mathbb{E}\left(X^-\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,dt$$

■

Exercice 23.13 *Déterminer l'espérance d'une variable aléatoire à densité qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, une loi de Gauss de paramètres $\sigma > 0$ et $\mu \in \mathbb{R}$.*

Solution 23.13 *Laissée au lecteur.*

Exercice 23.14 *Montrer que si X est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ possédant une densité f, on a alors :*

$$\mathbb{E}\left(X^2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,dt$$

et si de plus X est intégrable, alors :

$$\mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X)\,\chi_\Omega)^2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - \mathbb{E}(X))^2 f(t)\,dt$$

Solution 23.14 *Laissée au lecteur.*

On admet le théorème suivant.

Théorème 23.15 *Si X est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ possédant une densité f, $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne telle que la variable aléatoire $\varphi \circ X$ soit intégrable, on a alors :*

$$\mathbb{E}(\varphi \circ X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\, f(t)\,dt$$

23.4 Variance, écart type, covariance

Pour ce paragraphe, X est une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$.

Définition 23.9 *On dit que X est de carré intégrable si la variable aléatoire X^2 est intégrable.*

Théorème 23.16 *L'ensemble $\mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ des variables aléatoires de carré intégrable sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ des variables aléatoires réelles intégrables sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$. Pour X, Y dans $\mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ la variable aléatoire XY est dans $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ et l'application :*

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \left(\mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})\right)^2 & \to & \mathbb{R} \\ (X, Y) & \mapsto & \mathbb{E}(XY) \end{array}$$

est une forme bilinéaire, symétrique et positive sur $\mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$.

Définition 23.10 *La variance d'une variable aléatoire $X \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ est le réel défini par :*

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right)$$

et son écart type de X est le réel :

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$$

Si $X \neq 0$ dans $\mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$, la variable aléatoire centrée réduite associée à X est la variable aléatoire définie par $X' = \dfrac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$.

Théorème 23.17 *Si $X \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ est discrète avec $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in I\}$ où I est une partie de $\mathbb{N}$, on a alors :*

$$\mathbb{V}(X) = \sum_{i \in I} (x_i - \mathbb{E}(X))^2 \, \mathbb{P}(X = x_i)$$

Exercice 23.15 *Déterminer la variance, après avoir justifié son existence, d'une variable aléatoire discrète suivant une loi uniforme discrète, une loi de Bernoulli, une loi binomiale, une loi géométrique, une loi de Poisson.*

Solution 23.15 *Laissée au lecteur.*

Théorème 23.18 *Si $X \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ est une variable aléatoire possédant une densité f, on a alors :*

$$\mathbb{V}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - \mathbb{E}(X))^2 f(t) \, dt$$

Exercice 23.16 *Déterminer la variance, après avoir justifié son existence, d'une variable aléatoire à densité qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, une loi de Gauss de paramètres $\sigma > 0$ et $\mu \in \mathbb{R}$.*

Solution 23.16 *Laissée au lecteur.*

Théorème 23.19 *Pour $X \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$, on a :*

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - (\mathbb{E}(X))^2$$

(formule de Köenig) et :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \ \mathbb{V}(aX + b) = a^2 \mathbb{V}(X)$$

De la formule de Köenig, on déduit que $\mathbb{E}\left(X^2\right) \leq \left(\mathbb{E}\left(X\right)\right)^2$, l'égalité étant réalisée si, et seulement si, la variance est nulle. Dans le cas discret avec $\mathbb{P}\left(X = x_i\right) > 0$ pour tout $i \in I$, l'égalité $\mathbb{E}\left(X^2\right) = \left(\mathbb{E}\left(X\right)\right)^2$ équivaut à $x_i = \mathbb{E}\left(X\right)$ pour tout $i \in I$.

Définition 23.11 *La covariance de deux variables aléatoires X et Y dans $\mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}\left(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P}\right)$ est le réel défini par :*

$$\mathrm{Cov}\left(X, Y\right) = \mathbb{E}\left(\left(X - \mathbb{E}\left(X\right)\right)\left(Y - \mathbb{E}\left(Y\right)\right)\right)$$

et le coefficient de corrélation de X et Y est la réel :

$$\rho\left(X, Y\right) = \frac{\mathrm{Cov}\left(X, Y\right)}{\sigma\left(X\right)\sigma\left(Y\right)}$$

Pour X, Y dans $\mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}\left(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P}\right)$ la variable aléatoire XY est dans $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}\left(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P}\right)$ et $\mathrm{Cov}\left(X, Y\right)$ est bien défini.

On peut remarquer que pour $Y = X$, on retrouve la variance.

En utilisant la linéarité de l'espérance, on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}\left(X, Y\right) &= \mathbb{E}\left(XY - \mathbb{E}\left(X\right)Y - \mathbb{E}\left(Y\right)X + \mathbb{E}\left(X\right)\mathbb{E}\left(Y\right)\right) \\ &= \mathbb{E}\left(XY\right) - \mathbb{E}\left(X\right)\mathbb{E}\left(Y\right)\end{aligned}$$

Définition 23.12 *On dit que deux variables aléatoires X et Y dans $\mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}\left(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P}\right)$ sont non corrélées si* $\mathrm{Cov}\left(X, Y\right) = 0$ *(ce qui équivaut à $\mathbb{E}\left(XY\right) = \mathbb{E}\left(X\right)\mathbb{E}\left(Y\right)$).*

Exercice 23.17 *Montrer que pour X et Y dans $\mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}\left(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P}\right)$, on a $\left|\rho\left(X, Y\right)\right| \leq 1$.*

Solution 23.17 *Laissée au lecteur.*

Théorème 23.20 *Pour X et Y dans $\mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}\left(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P}\right)$, on a :*

$$\mathrm{Cov}\left(X, Y\right) = \mathbb{E}\left(XY\right) - \mathbb{E}\left(X\right)\mathbb{E}\left(Y\right)$$

et l'application :

$$\begin{array}{rccc}\psi : & \left(\mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}\left(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P}\right)\right)^2 & \to & \mathbb{R} \\ & \left(X, Y\right) & \mapsto & \mathrm{Cov}\left(X, Y\right)\end{array}$$

est une forme bilinéaire, symétrique et positive sur $\mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}\left(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P}\right)$.

Dire que X et Y dans $\mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}\left(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P}\right)$ sont non corrélées revient à dire que $\mathbb{E}\left(XY\right) = \mathbb{E}\left(X\right)\mathbb{E}\left(Y\right)$.

Théorème 23.21 *Soient $X_1, \cdots, X_n$ dans $\mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}\left(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P}\right)$ et $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ des réels On a :*

$$\mathbb{V}\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k X_k\right) = \sum_{k=1}^{n}\lambda_k^2 \mathbb{V}\left(X_k\right) + 2\sum_{1 \leq j < k \leq n}\mathrm{Cov}\left(X_j, Y_k\right)$$

et dans le cas particulier où les variables aléatoires X_k sont deux à deux non corrélées, on a :

$$\mathbb{V}\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k X_k\right) = \sum_{k=1}^{n}\lambda_k^2 \mathbb{V}\left(X_k\right)$$

23.5 Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev

Théorème 23.22 (Markov) *Soit X une variable aléatoire réelle positive sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$. Pour tout réel $\varepsilon > 0$, on a :*

$$\mathbb{P}(X \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{\varepsilon}$$

Exercice 23.18 *Montrer l'inégalité de Markov dans le cas discret.*

Solution 23.18 *Comme $x_i \geq 0$ pour tout $i \in I \subset \mathbb{N}$, on a :*

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i \in I} \mathbb{P}(X = x_i) x_i \geq \sum_{\substack{i \in I \\ x_i \geq \varepsilon}} \mathbb{P}(X = x_i) x_i \\ &\geq x \sum_{\substack{i \in I \\ x_i \geq \varepsilon}} \mathbb{P}(X = x_i) = x\mathbb{P}(X \geq \varepsilon). \end{aligned}$$

Théorème 23.23 (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev) *Soit $X \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$. Pour tout réel $\varepsilon > 0$, on a :*

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}.$$

Démonstration. On applique l'inégalité de Markov à la variable aléatoire réelle positive $Y = (X - \mathbb{E}(X))^2$. On a :

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon) = p\left(Y \geq \varepsilon^2\right) \leq \frac{\mathbb{E}(Y)}{\varepsilon^2} = \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}.$$

■

En prenant $\varepsilon = t\sigma(X)$ avec $t > 0$, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev s'écrit :

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq t\sigma(X)) \leq \frac{1}{t^2}$$

ou encore :

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| < t\sigma(X)) \geq 1 - \frac{1}{t^2}$$

et peut s'interpréter en disant que la variance de X est une mesure de la dispersion des valeurs de X autour de la moyenne $\mathbb{E}(X)$.

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev peut être utilisée pour montrer le théorème de Bernstein relatif à l'approximation uniforme sur $[0, 1]$ d'une fonction continue par une suite de fonctions polynomiales.

Exercice 23.19 *À tout entier naturel non nul n et tout réel $x \in [0, 1]$ on associe la variable aléatoire $X_{n,x}$ qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, x)$, c'est-à-dire que $X_{n,x}$ est à valeurs dans $\{0, 1, \cdots, n\}$ et sa loi de probabilité est définie par :*

$$\forall j \in \{0, 1, \cdots, n\}, \ \mathbb{P}(X_{n,x} = j) = C_n^j x^j (1 - x)^{n-j}.$$

À toute fonction f continue sur $[0, 1]$ et à valeurs réelles, on associe la variable aléatoire $Y_{n,x} = f\left(\frac{X_{n,x}}{n}\right)$. En notant $\{y_0, \cdots, y_p\}$ les valeurs prises par $Y_{n,x}$, on a :

$$\forall k \in \{0, \cdots, p\}, \ \mathbb{P}(Y_{n,x} = k) = \sum_{\substack{0 \leq j \leq n \\ f\left(\frac{j}{n}\right) = y_k}} \mathbb{P}(X_{n,x} = j).$$

1. *Montrer que l'espérance de $Y_{n,x}$ est donnée par :*

$$\mathbb{E}\left(Y_{n,x}\right) = B_n\left(f\right)\left(x\right),$$

où B_n est l'opérateur de Bernstein.

2. *Pour $\varepsilon > 0$, on désigne par $\eta > 0$ un réel tel que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ pour x, y dans $[0,1]$ vérifiant $|x - y| < \eta$ (uniforme continuité de f sur $[0,1]$) et, pour x fixé dans $[0,1]$, on note :*

$$\left\{\begin{array}{l} J_{1,x} = \left\{ j \in \{0,1,\cdots,n\} \mid \left| f\left(\dfrac{j}{n}\right) - f(x)\right| < \varepsilon \right\} \\ J_{2,x} = \left\{ j \in \{0,1,\cdots,n\} \mid \left| f\left(\dfrac{j}{n}\right) - f(x)\right| \geq \varepsilon \right\} \end{array}\right.$$

   (a) *Montrer que :*

$$\left|B_n\left(f\right)\left(x\right) - f\left(x\right)\right| \leq \varepsilon + 2\left\|f\right\|_\infty \sum_{j\in J_{2,x}} \mathbb{P}\left(X_{n,x} = j\right).$$

   (b) *Montrer que :*

$$\left|B_n\left(f\right)\left(x\right) - f\left(x\right)\right| \leq \varepsilon + 2\left\|f\right\|_\infty \mathbb{P}\left(\left|Y_{n,x} - f\left(x\right)\right| \geq \varepsilon\right).$$

   (c) *Montrer que :*

$$\left|B_n\left(f\right)\left(x\right) - f\left(x\right)\right| \leq \varepsilon + 2\left\|f\right\|_\infty \mathbb{P}\left(\left|X_{n,x} - nx\right| \geq n\cdot\eta\right).$$

   (d) *En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que :*

$$\left|B_n\left(f\right)\left(x\right) - f\left(x\right)\right| \leq \varepsilon + \frac{\left\|f\right\|_\infty}{2n\cdot\eta^2}$$

   et conclure.

Solution 23.19

1. *L'espérance de $Y_{n,x}$ est donnée par :*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(Y_{n,x}\right) &= \sum_{k=0}^{p} y_k \mathbb{P}\left(Y_{n,x} = k\right) = \sum_{k=0}^{p} y_k \sum_{\substack{0\leq j\leq n \\ f\left(\frac{j}{n}\right) = y_k}} \mathbb{P}\left(X_{n,x} = j\right) \\
&= \sum_{k=0}^{p} \sum_{\substack{0\leq j\leq n \\ f\left(\frac{j}{n}\right) = y_k}} f\left(\frac{j}{n}\right) \mathbb{P}\left(X_{n,x} = j\right) = \sum_{j=0}^{n} f\left(\frac{j}{n}\right) \mathbb{P}\left(X_{n,x} = j\right) \\
&= \sum_{j=0}^{n} f\left(\frac{j}{n}\right) C_n^j x^j \left(1 - x\right)^{n-j} = B_n\left(f\right)\left(x\right)
\end{aligned}$$

(les ensembles $\left\{ j \in \{0,\cdots,n\} \mid f\left(\dfrac{j}{n}\right) = y_k \right\}$ forment une partition de $\{0,\cdots,n\}$).

2.

(a) *Avec* $\sum\limits_{j=0}^{n} C_n^j x^j (1-x)^{n-j} = \sum\limits_{j=0}^{n} \mathbb{P}(X_{n,x} = j) = 1$, *on peut écrire que :*

$$\begin{aligned} |B_n(f)(x) - f(x)| &= \left| \sum_{j=0}^{n} \left(f\left(\frac{j}{n}\right) - f(x) \right) C_n^j x^j (1-x)^{n-j} \right| \\ &\leq \varepsilon \sum_{j \in J_{1,x}} C_n^j x^j (1-x)^{n-j} + 2 \|f\|_\infty \sum_{j \in J_{2,x}} C_n^j x^j (1-x)^{n-j} \\ &\leq \varepsilon + 2 \|f\|_\infty \sum_{j \in J_{2,x}} \mathbb{P}(X_{n,x} = j). \end{aligned}$$

(b) *On a :*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|Y_{n,x} - f(x)| \geq \varepsilon) &= \sum_{\substack{0 \leq k \leq p \\ |y_k - f(x)| \geq \varepsilon}} \mathbb{P}(Y_{n,x} = k) \\ &= \sum_{\substack{0 \leq k \leq p \\ |y_k - f(x)| \geq \varepsilon}} \sum_{\substack{0 \leq j \leq n \\ f\left(\frac{j}{n}\right) = y_k}} \mathbb{P}(X_{n,x} = j) \\ &= \sum_{\substack{0 \leq j \leq n \\ \left|f\left(\frac{j}{n}\right) - f(x)\right| \geq \varepsilon}} \mathbb{P}(X_{n,x} = j) = \sum_{j \in J_{2,x}} \mathbb{P}(X_{n,x} = j) \end{aligned}$$

et l'inégalité précédente s'écrit :

$$|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon + 2 \|f\|_\infty \mathbb{P}(|Y_{n,x} - f(x)| \geq \varepsilon).$$

(c) *Comme l'événement* $|Y_{n,x} - f(x)|$ *implique* $\left| \dfrac{X_{n,x}}{n} - x \right| \geq \eta$, *on a :*

$$\mathbb{P}(|Y_{n,x} - f(x)| \geq \varepsilon) \leq \mathbb{P}(|X_{n,x} - nx| \geq n \cdot \eta)$$

et l'égalité annoncée.

(d) *Avec* $nx = \mathbb{E}(X_{n,x})$ *et l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a :*

$$\mathbb{P}(|X_{n,x} - nx| \geq n \cdot \eta) \leq \frac{\mathbb{V}(X_{n,x})}{n^2 \eta^2} = \frac{x(1-x)}{n \cdot \eta^2} \leq \frac{1}{4n \cdot \eta^2},$$

ce qui donne :

$$|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon + \frac{\|f\|_\infty}{2n \cdot \eta^2} < 2\varepsilon$$

pour $n \geq n_0$ *où* n_0 *est un entier indépendant de* x. *La convergence uniforme vers* f *sur* $[0,1]$ *de la suite* $(B_n(f))_{n \geq 1}$ *s'en déduit alors.*

Exercice 23.20 *Soit* $I = [0, b]$ *avec* $b > 0$. *Si* f *est une fonction continue sur* I, *on la prolonge en une fonction continue sur* $\mathbb{R}^+$ *en posant* $f(x) = f(b)$ *pour* x *supérieur ou égal à* b.

1. *Montrer que pour toute fonction* f *appartenant à* $\mathcal{C}(I)$ *et pour tout entier naturel* n *strictement positif on peut définir une fonction* $u_n(f)$ *appartenant à* $\mathcal{C}(I)$ *en posant :*

$$\forall x \in I,\ u_n(f)(x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{+\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{n^k}{k!} x^k.$$

2. *Montrer, en s'inspirant de l'exercice précédent, que pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{C}(I)$ la suite de fonctions $(u_n(f))_{n\geq 1}$ converge uniformément vers f sur I (une démonstration directe de ce résultat est possible mais peu évidente).*

Solution 23.20 *Soient $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0,b]$ et $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ uniformément continue et bornée. Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi de Poisson de paramètre nx.*
On a :

$$\mathbb{E}(X) = nx,\ \mathbb{E}\left(\frac{X}{n}\right) = x,\ \mathbb{V}(X) = nx,\ \mathbb{V}\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{x}{n}$$

et :

$$u_n(f)(x) = e^{-nx}\sum_{k=0}^{+\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{n^k}{k!}x^k = \mathbb{E}\left(f\left(\frac{X}{n}\right)\right).$$

Avec l'uniforme continuité de f sur $\mathbb{R}^+$, on peut trouver, pour tout réel $\varepsilon > 0$, un réel $\eta > 0$ tel que :

$$\forall (x_1, x_2) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^+,\ |x_1 - x_2| \leq \eta \ \Rightarrow\ |f(x_1) - f(x_2)| \leq \varepsilon.$$

On a alors pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in [0,b]$, en notant χ_A la fonction caractéristique de l'ensemble A et en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\begin{aligned}
|u_n(f)(x) - f(x)| &= \left|\mathbb{E}\left(f\left(\frac{X}{n}\right) - f(x)\right)\right| \\
&\leq \mathbb{E}\left(\left|f\left(\frac{X}{n}\right) - f(x)\right| \cdot \chi_{\left|\frac{X}{n}-x\right|\leq\eta}\right) + \mathbb{E}\left(\left|f\left(\frac{X}{n}\right) - f(x)\right| \cdot \chi_{\left|\frac{X}{n}-x\right|>\eta}\right) \\
&\leq \varepsilon + 2\|f\|_\infty \mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n} - x\right| > \eta\right) \leq \varepsilon + 2\|f\|_\infty \frac{\mathbb{V}\left(\frac{X}{n}\right)}{\eta^2} \\
&\leq \varepsilon + \frac{2\|f\|_\infty x}{n\eta^2} \leq \varepsilon + \frac{2b\|f\|_\infty}{\eta^2}\frac{1}{n} \leq 2\varepsilon
\end{aligned}$$

pour n assez grand (uniformément par rapport à x). Et c'est terminé.

23.6 Variables aléatoires réelles indépendantes

Définition 23.13 *Soient $n \geq 2$ et $X_1, X_2, \cdots, X_n$ des variables aléatoires réelle sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$. On dit que ces variables aléatoires sont mutuellement indépendantes si pour tous boréliens $B_1, B_2, \cdots, B_n$, on a :*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}(X_i \in B_i)\right) = \prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}(X_i \in B_i).$$

L'événement $\bigcap_{i=1}^{n}(X_i \in B_i)$ sera aussi noté $(X_1 \in B_1, \cdots, X_n \in B_n)$.

Théorème 23.24 *Soient $n \geq 2$ et $X_1, X_2, \cdots, X_n$ des variables aléatoires réelle discrètes sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$. Ces variables aléatoires sont mutuellement indépendantes si, et seulement si, pour tous boréliens $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ dans $\prod_{i=1}^{n} X_i(\Omega)$, on a :*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}(X_i = x_i)\right) = \prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}(X_i = x_i).$$

Démonstration. La condition nécessaire est évidente en prenant pour boréliens des $B_i = \{x_i\}$.

Montrons que la condition est suffisante.

Avec :

$$\begin{aligned}\bigcap_{i=1}^{n}(X_i \in B_i) &= \bigcup_{x_1 \in B_1}\left((X_1 = x_1) \cap \bigcap_{i=2}^{n}(X_i \in B_i)\right)\\ &= \bigcup_{x_1 \in B_1 \cap X_1(\Omega)}\left((X_1 = x_1) \cap \bigcap_{i=2}^{n}(X_i \in B_i)\right)\end{aligned}$$

l'ensemble $B_1 \cap X_1(\Omega)$ étant dénombrable puisque X_1 est discrète, on déduit que :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}(X_i = x_i)\right) = \sum_{x_1 \in B_1 \cap X_1(\Omega)} \mathbb{P}\left((X_1 = x_1) \cap \bigcap_{i=2}^{n}(X_i \in B_i)\right)$$

En itérant ce procédé un nombre fini de fois, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}(X_i = x_i)\right) &= \sum_{x_1 \in B_1 \cap X_1(\Omega)} \cdots \sum_{x_n \in B_n \cap X_n(\Omega)} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}(X_i = x_i)\right)\\ &= \sum_{x_1 \in B_1 \cap X_1(\Omega)} \cdots \sum_{x_n \in B_n \cap X_n(\Omega)} \prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}(X_i = x_i)\\ &= \left(\sum_{x_1 \in B_1 \cap X_1(\Omega)} \mathbb{P}(X_1 = x_1)\right) \cdots \left(\sum_{x_n \in B_n \cap X_n(\Omega)} \mathbb{P}(X_n = x_n)\right)\\ &= \prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}(X_i \in B_i \cap X_i(\Omega)) = \prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}(X_i \in B_i).\end{aligned}$$

■

Exercice 23.21 *Soient $n \geq 3$ et $X_1, X_2, \cdots, X_n$ des variables aléatoires réelle discrètes sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ mutuellement indépendantes.*

1. *Montrer que les variables aléatoires $X_1 + X_2, X_3, \cdots, X_n$ sont mutuellement indépendantes.*
2. *En déduire que pour tout entier r compris entre 2 et $n-1$, les variables aléatoires $X_1 + \cdots + X_r, X_{r+1}, \cdots, X_n$ sont mutuellement indépendantes.*

Solution 23.21

1. *Pour tout réel x, on a :*

$$(X_1 + X_2 = x) = \bigcup_{x_1 \in X_1(\Omega)} (X_1 = x_i) \cap (X_2 = x - x_1)$$

l'ensemble $X_1(\Omega)$ étant dénombrable puisque X_1 est discrète. On a donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 + X_2 = x) &= \sum_{x_1 \in X_1(\Omega)} \mathbb{P}((X_1 = x_i) \cap (X_2 = x - x_1))\\ &= \sum_{x_1 \in X_1(\Omega)} \mathbb{P}(X_1 = x_i)\,\mathbb{P}(X_2 = x - x_1)\end{aligned}$$

Pour x réel et $(x_3, \cdots, x_n)$ dans $\prod_{i=3}^{n} X_i(\Omega)$, on a :

$$(X_1 + X_2 = x) \cap \bigcap_{i=3}^{n} (X_i = x_i) = \bigcup_{x_1 \in X_1(\Omega)} (X_1 = x_i) \cap (X_2 = x - x_1) \cap \bigcap_{i=3}^{n} (X_i = x_i)$$

donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left((X_1 + X_2 = x) \cap \bigcap_{i=3}^{n} (X_i = x_i) \right) &= \sum_{x_1 \in X_1(\Omega)} \mathbb{P}\left((X_1 = x_i) \cap (X_2 = x - x_1) \cap \bigcap_{i=3}^{n} (X_i = x_i) \right) \\
&= \sum_{x_1 \in X_1(\Omega)} \mathbb{P}(X_1 = x_i)\, \mathbb{P}(X_2 = x - x_1) \prod_{i=3}^{n} \mathbb{P}(X_i = x_i) \\
&= \left(\sum_{x_1 \in X_1(\Omega)} \mathbb{P}(X_1 = x_i)\, \mathbb{P}(X_2 = x - x_1) \right) \prod_{i=3}^{n} \mathbb{P}(X_i = x_i) \\
&= \mathbb{P}(X_1 + X_2 = x) \prod_{i=3}^{n} \mathbb{P}(X_i = x_i)
\end{aligned}$$

et $X_1 + X_2, X_3, \cdots, X_n$ sont mutuellement indépendantes.

2. *Par récurrence fini sur r compris entre 2 et $n - 1$.*

Théorème 23.25 *Si X et Y sont deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ intégrables et indépendantes, elles sont alors non corrélées et on a :*

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\, \mathbb{E}(Y)$$

et :

$$\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(X)$$

23.7 Convergence en probabilité et en loi

Définition 23.14 *Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ et X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$. On dit que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers X si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(|X_n - X|) \geq \varepsilon = 0.$$

Théorème 23.26 (loi faible des grands nombres) *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles dans $\mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ deux à deux indépendantes et de même loi X. La suite $\left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} X_n \right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers $\mathbb{E}(X)$.*

En fait, on peut affaiblir les hypothèses $X_n \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ pour obtenir un résultat plus fort !

Théorème 23.27 (loi forte des grands nombres) *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles dans $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ deux à deux indépendantes et de même loi X. La suite $\left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} X_n \right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers $\mathbb{E}(X)$.*

Définition 23.15 *Soient* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de variables aléatoires réelles sur* $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$, $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite des fonctions de répartition associées et* X *une variable aléatoire réelle sur* $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$. *On dit que la suite* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge en loi vers* X *si :*

$$\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = F(x)$$

en tout point de continuité x *de la fonction de répartition* F *de* X.

Exercice 23.22 *Soit* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite de variables aléatoires réelles sur* $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ *telle que, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *la variable aléatoire* X_n *suit une loi binomiale de paramètres* n *et* $\frac{\lambda}{n}$, *où* $\lambda > 0$ *est donné.. Montrer que* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge en loi vers une variable aléatoire* X *suivant une loi de Poisson de paramètre* λ *(convergence de la loi binomiale vers la loi de Poisson).*

Solution 23.22 *Laissée au lecteur.*

Définition 23.16 *On dit qu'une suite* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de variables aléatoires réelles est une suite de variables aléatoires réelles indépendantes si pour tout* $n \geq 2$, *les variables aléatoires* $X_1, \cdots, X_n$ *sont mutuellement indépendantes.*

Théorème 23.28 (central limite) *Soit* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de variables aléatoires réelles dans* $\mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ *indépendantes et de même loi* X. *La suite de variables aléatoire* $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(X_k - \mathbb{E}(X))}{\sigma(X)\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge en loi vers une variable aléatoire* X *suivant une loi de Gauss de paramètres* 0 *et* 1.

24

Courbes de l'espace affine euclidien $\mathbb{R}^n$

24.1 Représentation paramétrique d'une courbe de $\mathbb{R}^n$

Définition 24.1 *On appelle courbe paramétrée (ou arc paramétré) de classes $\mathcal{C}^k$ $(k \geq 1)$ dans l'espace $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$, une application k fois continûment dérivable :*

$$\begin{array}{rccc} \gamma: & I & \rightarrow & \mathbb{R}^n \\ & t & \longmapsto & \gamma(t) = (\gamma_1(t), ..., \gamma_n(t)) \end{array}$$

où I est un intervalle réel non réduit à un point.

Un tel arc est noté (γ, I), I est l'ensemble des paramètres et $\gamma(I)$ est la trace (ou le support ou la trajectoire) de la courbe.

Soit M un point de la trace de (γ, I). Si $\gamma^{-1}(M)$ est un ensemble fini alors son cardinal $p = \mathrm{card}(\gamma^{-1}(M))$ est l'ordre de multiplicité de M.

Un point simple de la trajectoire est un point de multiplicité 1.

L'arc (γ, I) est simple si tous les points de sa trace sont simples. Ce qui revient à dire que γ est injective.

On dit que $t \in I$ est régulier si $\gamma'(t) \neq 0$, dans le cas contraire on dit qu'il est singulier.

Si $\gamma(t)$ est un point simple, on dit qu'il est régulier (ou ordinaire) [Resp. singulier (ou stationnaire)] si t est régulier [Resp. singulier].

L'arc (γ, I) est une immersion si tous ses points sont réguliers.

Si $t \in I$ est régulier, on dit alors que $\gamma'(t)$ est le vecteur tangent (ou vecteur vitesse) à la courbe en t (ou en $\gamma(t)$ si le point est simple). La droite passant par $\gamma(t)$ et dirigée par $\gamma'(t)$ est la tangente à la courbe en t (ou en $\gamma(t)$ si le point est simple).

Si $k \geq 2$ et si $\gamma''(t)$ est proportionnel à $\gamma'(t)$ on dit alors qu'on a un point d'inflexion en t (ou en $\gamma(t)$ si le point est simple).

On dit que t (ou $\gamma(t)$ si le point est simple) est birégulier si ce n'est pas un point d'inflexion.

Si $\gamma(t)$ est un point simple, régulier qui n'est pas un point d'inflexion alors le plan passant par $\gamma(t)$ est engendré par $\gamma'(t)$ et $\gamma''(t)$ est le plan osculateur à l'arc en $\gamma(t)$.

Remarque 24.1 *Pour $I = [a, b]$, dire que est de classe $\mathcal{C}^k$ signifie qu'elle est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $]a, b[$ et k fois continûment dérivable à droite [Resp. gauche] en a [Resp. en b].*

Remarque 24.2 *Il faut distinguer l'arc paramétré, qui est une fonction, de sa trace, qui est une partie de $\mathbb{R}^n$.*

Par exemples dans $\mathbb{R}^2$, les arcs distincts :

$$\begin{array}{llll}\gamma_1 : & [-\pi, \pi] & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & (a\cos(t), b\sin(t)) \\ \gamma_2 : & [-\pi, \pi] & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & (a\cos(2t), b\sin(2t)) \\ \gamma_3 : & \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty] & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & \left(a\dfrac{1-t^2}{1+t^2}, b\dfrac{2t}{1+t^2}\right)\end{array}$$

*ont la même trace une ellipse (figure **??**). L'arc γ_3 se déduit de γ_1 par le changement de variable $t \longmapsto \tan\left(\dfrac{t}{2}\right)$.*

On peut remarquer qu'avec la deuxième paramétrisation l'ellipse est parcourue deux fois plus vite ($\gamma_2'(t) = 2\gamma_1'(t)$).

24.2 Arcs géométriques

On rappelle qu'un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme ($k \geq 1$) entre deux intervalles réels I et J est une application bijective $\varphi : I \to J$ de classe $\mathcal{C}^k$ ainsi que son inverse.

Pour $k = 0$, on parle d'homéomorphisme.

Un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme entre deux intervalles réels est strictement monotone, c'est à dire que sa dérivée a un signe constant.

Définition 24.2 *Deux arcs paramétrés (f, I) et (g, J) de classe $\mathcal{C}^k$ sont dits $\mathcal{C}^k$-équivalents s'il existe un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme $\varphi : I \to J$ tel que $f = g \circ \varphi$.*

On dit que φ est un changement de paramètre.

Les classes d'équivalences définies par cette relation d'équivalence sont les arcs géométriques. C'est-à-dire qu'un arc géométrique est un ensemble d'arcs paramétrés $\mathcal{C}^k$-équivalents.

Un représentant d'un arc géométrique est une paramétrisation (ou représentation) admissible de cet arc.

Théorème 24.1 *Deux arcs paramétrés $\mathcal{C}^k$-équivalents ont la même trace.*

Définition 24.3 *La trace d'un arc géométrique est la trace de l'un de ses représentants.*

Remarque 24.3 *Une paramétrisation admissible d'un arc géométrique étant choisie, on dira pour abréger que l'arc est défini par la paramétrisation $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ et on notera encore γ l'arc géométrique.*

Remarque 24.4 *Deux arcs paramétrés équivalents ont la même trace mais la réciproque est fausse comme le montre l'exemple de γ_1 et γ_2 du paragraphe **??** (γ_1 est injective sur $]-\pi, \pi[$ contrairement à γ_2).*

Théorème 24.2 *Soit γ un arc géométrique de classe $\mathcal{C}^k$ et régulier, avec $k \geq 2$. Si tous les points de γ sont d'inflexion alors γ est un segment de droite.*

Démonstration. Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ une paramétrisation de l'arc géométrique. Il existe une fonction λ de classe $\mathcal{C}^{k-2}$ telle que :

$$\forall t \in I, \quad \gamma''(t) = \lambda(t)\gamma'(t)$$

On a alors pour tout $i = 1, 2, \cdots, n$, $\gamma_i''(t) = \lambda(t)\gamma_i'(t)$. On en déduit alors qu'il existe une fonction φ telle que :

$$\gamma_i(t) = \varphi(t)\gamma_i'(a) + \gamma_i(a)$$

où $a \in I$ est fixé.

Ce qui revient à dire que :

$$\forall t \in I, \quad \gamma(t) = \varphi(t)\gamma'(a) + \gamma(a)$$

et γ est un segment de droite. ∎

On peut définir la notion d'arc géométrique orienté comme suit.

Définition 24.4 *Deux arcs paramétrés (f, I) et (g, J) de classe $\mathcal{C}^k$ sont dits positivement $\mathcal{C}^k$-équivalents s'il existe un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme strictement croissant $\varphi : I \to J$ tel que $f = g \circ \varphi$.*

Les classes d'équivalences définies par cette relation sont les arcs géométriques orientés.

Si un arc géométrique est représenté par une application γ, alors toute autre paramétrisation déduite par un changement de paramètre strictement croissant a la même orientation et toute paramétrisation déduite par un changement de paramètre strictement décroissant a l'orientation inverse.

Un arc géométrique est la réunion d'au plus deux classes d'orientation. On oriente l'arc en choisissant l'une de ces classes.

Le théorème qui suit donne une caractérisation des arcs géométriques qui n'admettent qu'une seule orientation.

Théorème 24.3 *L'arc géométrique γ de classe $\mathcal{C}^k$ défini par une paramétrisation $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ admet une seule orientation si et seulement s'il existe un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme strictement décroissant $\varphi : I \to J$ tel que $\gamma = \gamma \circ \varphi$.*

Démonstration. Si $\gamma = \gamma \circ \varphi$ avec $\varphi : I \to J$ strictement décroissant, alors toute autre paramétrisation de γ est positivement équivalente à γ ou à $\gamma \circ \varphi = \gamma$ et γ admet une seule orientation.

Réciproquement si γ admet une seule orientation, alors la paramétrisation $\gamma \circ \varphi : t \in J \longmapsto \gamma(-t)$ est positivement équivalente à (γ, I), c'est-à-dire qu'il existe un $\mathcal{C}^k$–difféomorphisme strictement croissant $\varphi : J \to I$ tel que $\gamma \circ \varphi = \gamma \circ \psi$ et on a bien $\gamma = \gamma \circ (\psi \circ \varphi^{-1})$ avec $\psi \circ \varphi^{-1}$ strictement décroissant. ∎

Exemple 24.1 *L'arc géométrique paramétré par :*

$$\begin{array}{llll} \gamma_1 : & [0, \pi] & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & (\sin(t), \cos^2(t)) \end{array}$$

n'admet qu'une orientation ($\gamma = \gamma \circ \varphi$, où $\varphi : t \longmapsto \pi - t$).

24.3 Paramétrisations normales. Abscisse curviligne

Si γ est un arc géométrique les définitions d'ordre de multiplicité d'un point, de point régulier ou singulier et de droite tangente en un point simple de la trace ne dépendent pas du choix d'une paramétrisation.

Définition 24.5 *Soit γ un arc géométrique de classe $\mathcal{C}^k$ et régulier (immersion), avec $k \geq 1$. On appelle paramétrisation normale de γ une paramétrisation $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ qui vérifie :*

$$\forall s \in I, \quad \|\gamma'(s)\| = 1$$

Pour une telle paramétrisation le paramètre s est appelé l'abscisse curviligne.

Le théorème qui suit nous dit qu'on peut toujours trouver une paramétrisation normale d'un arc géométrique régulier.

Si γ est un arc géométrique représenté par une paramétrisation $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$, alors l'image de γ par une isométrie φ est l'arc paramétré par $\varphi \circ \gamma : I \to \mathbb{R}^n$.On le note $\varphi \circ \gamma$. Si de plus la paramétrisation $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ est normale alors il en est de même de $\varphi \circ \gamma : I \to \mathbb{R}^n$. En effet, en notant u l'isométrie vectorielle associée à φ, on a :

$$\forall t \in I, \quad \left\|(\varphi \circ \gamma)'(t)\right\| = \|u(\gamma'(t))\| = \|\gamma'(t)\| = 1$$

Théorème 24.4 *Soit $f : I \to \mathbb{R}^n$ une paramétrisation d'un arc géométrique γ de classe $\mathcal{C}^k$ et régulier. Pour $a \in I$ fixé on pose :*

$$\forall t \in I, \quad s(t) = \int_a^t \|f'(u)\|\, du$$

Alors $s : I \to J = s(I)$ est un changement de paramètre admissible pour γ et en notant σ l'inverse de s, les paramétrisations :

$$\begin{array}{l} s \in b + J \longmapsto \gamma_1(s) = f \circ \sigma(s - b) \\ s \in b - J \longmapsto \gamma_2(s) = f \circ \sigma(b - s) \end{array}$$

sont des paramétrisations normales de γ où b est une constante réelle.

Toute paramétrisation normale de γ est de la forme γ_1 si elle définit la même orientation que f et de la forme γ_2 dans le cas contraire.

Démonstration. L'arc γ étant régulier, $f'(t)$ ne s'annule jamais et on a $s'(t) = \|f'(t)\| > 0$ pour tout $t \in I$. Donc s est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme.

γ_1 et γ_2 sont donc des paramétrisations admissibles de γ.

On a alors :

$$\forall s = s(t) \in J, \sigma'(s) = \frac{1}{s'(t)} = \frac{1}{\|f'(t)\|}$$

$$\forall s = b + s(t) \in b + J, \gamma_1'(s) = \sigma'(s(t))\, f'(\sigma(s(t))) = \frac{1}{\|f'(t)\|} f'(t)$$

On a donc bien une paramétrisation normale.

Si g est une paramétrisation normale de γ, alors $g = \gamma_1 \circ \varphi$ et pour toute valeur du paramètre t on a :

$$1 = \|g'(t)\| = |\varphi'(t)|\, \|\gamma_1'(\varphi(t))\| = |\varphi'(t)|$$

Avec la continuité de φ', on a nécessairement $\varphi' = 1$ et $\varphi(t) = t + c$ si g définit la même orientation que f ou $\varphi' = -1$ et $\varphi(t) = -t + c$ sinon. ∎

Définition 24.6 *Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ une paramétrisation d'un arc géométrique γ de classe $\mathcal{C}^k$ et régulier. Pour $a \in I$ fixé l'application s définie par :*

$$\forall t \in I, \quad s(t) = \int_a^t \|\gamma'(u)\|\, du$$

est l'abscisse curviligne comptée à partir de $\gamma(a)$ de l'arc géométrique orienté défini par (γ, I).

Remarque 24.5 *Un changement d'orientation de l'arc change le signe de l'abscisse curviligne.*

Neuvième partie

Problèmes d'analyse

25

Une construction des fonctions logarithmes

25.1 Énoncé

Le but du problème est de montrer, avec un minimum de moyens, le résultat suivant :

Théorème 25.1 *Pour tout réel* $a > 1$, *il existe une unique fonction* $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *telle que :*
— f *est strictement croissante ;*
— $f(a) = 1$ *;*
— *pour tous* x, y *dans* $]0, +\infty[$, $f(xy) = f(x) + f(y)$.

Un résultat analogue pour $0 < a < 1$ s'en déduira.

Les fonctions puissances rationnelles $x \mapsto x^r$, où $r \in \mathbb{Q}$ et $x \in]0, +\infty[$ sont supposées construites.

1. Montrer que si f est une fonction vérifiant les conditions du théorème 25.1, alors :
   (a) $f(1) = 0$;
   (b) pour tout x dans $]0, +\infty[$ et tout n dans $\mathbb{N}$, $f(x^n) = nf(x)$;
   (c) pour tout x dans $]0, +\infty[$ et tout r dans $\mathbb{Q}$, $f(x^r) = rf(x)$;
   (d) pour tout r dans $\mathbb{Q}$, $f(a^r) = r$.
2. Montrer que pour tout x dans $]0, +\infty[$, il existe un entier $m \in \mathbb{Z}$ tel que $a^m \leq x < a^{m+1}$.
3. Pour tout x dans $]0, +\infty[$, on désigne par E_x la partie de $\mathbb{Q}$ définie par :

$$E_x = \{r \in \mathbb{Q} \mid a^r \leq x\}.$$

   (a) Montrer que E_x n'est pas vide.
   (b) Montrer que E_x est majoré.
4. On désigne par g la fonction définie par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \ g(x) = \sup(E_x) \tag{25.1}$$

et f est une fonction qui vérifie les conditions du théorème 25.1, en supposant qu'une telle fonction existe.

   (a) Justifier la définition de la fonction g.

(b) Montrer que :

$$\forall x \in \left]0, +\infty\right[,\ g(x) \leq f(x).$$

(c) Soit x un réel strictement positif.

i. Montrer que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un rationnel r tel que :

$$f(x) < r < g(x) + \varepsilon.$$

ii. En déduire que $f(x) = g(x)$.

On a donc montré que si f est une fonction qui vérifie les conditions du théorème 25.1, c'est nécessairement la fonction g.

5. Il nous reste à montrer que, réciproquement la fonction g définie par (25.1) convient bien.

(a) Montrer que $g(a) = 1$.

(b) Montrer que si r, s sont deux nombres rationnels tels que $a^r \leq x \leq a^s$, alors $r \leq g(x) \leq s$.

(c) Soient x, y deux réels strictement positifs et n un entier naturel non nul. On désigne par p et q deux entiers relatifs tels que $a^p \leq x^n < a^{p+1}$ et $a^q \leq y^n < a^{q+1}$ (question 2).

i. Montrer que :

$$|g(xy) - g(x) - g(y)| \leq \frac{2}{n}.$$

ii. En déduire que $g(xy) = g(x) + g(y)$.

(d)

i. Montrer que $g(x) > 0$ pour tout réel $x > 1$.

ii. En déduire que la fonction g est strictement croissante.

La fonction g ainsi définie, pour $a > 1$, est appelée logarithme de base a et notée $\log_a$. On a donc :

$$\forall x \in \left]0, +\infty\right[,\ \log_a(x) = \sup\left\{r \in \mathbb{Q} \mid a^r \leq x\right\}$$

et c'est l'unique fonction vérifiant les conditions du théorème 25.1.

6. Montrer que pour tout réel $a \in \left]0, 1\right[$, il existe une unique fonction $f : \left]0, +\infty\right[\to \mathbb{R}$ telle que :
   - f est strictement décroissante ;
   - $f(a) = 1$;
   - pour tous x, y dans $\left]0, +\infty\right[$, $f(xy) = f(x) + f(y)$.

   On note encore $\log_a$ cette fonction.

7. Montrer que, pour tout réel $a > 0$, la fonction $\log_a$ est continue sur $\left]0, +\infty\right[$.

8. Montrer que, pour tout réel $a > 0$, la fonction $\log_a$ réalise un homéomorphisme de $\left]0, +\infty\right[$ sur $\mathbb{R}$.

9. Montrer que, pour tout réel $a > 0$, la fonction $\log_a$ est dérivable sur $\left]0, +\infty\right[$ de dérivée $\log_a'(x) = \dfrac{\alpha}{x}$ où α est une constante réelle non nulle.

25.2 Solution

1.

(a) De $f(1) = f(1 \cdot 1) = 2f(1)$, on déduit que $f(1) = 0$.

(b) On procède par récurrence sur $n \geq 0$.
Pour $n = 0$, on a $f(x^0) = f(1) = 0 \cdot f(x)$ et pour $n = 1$, c'est une trivialité.
En supposant le résultat acquis au rang $n \geq 1$, on a pour $x > 0$:

$$f\left(x^{n+1}\right) = f(x^n \cdot x) = f(x^n) + f(x) = nf(x) + f(x) = (n+1) f(x).$$

(c) Pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$0 = f(1) = f\left(x^n x^{-n}\right) = f(x^n) + f\left(x^{-n}\right),$$

de sorte que $f(x^{-n}) = -f(x^n) = -nf(x)$. On a donc $f(x^p) = pf(x)$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$.
En écrivant, pour $q \in \mathbb{N}^*$, que $f(x) = f\left(\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^q\right) = qf\left(x^{\frac{1}{q}}\right)$, on déduit que $f\left(x^{\frac{1}{q}}\right) = \frac{1}{q} f(x)$ et pour tout $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ avec $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, on a :

$$f(x^r) = f\left(\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p\right) = pf\left(x^{\frac{1}{q}}\right) = \frac{p}{q} f(x) = rf(x).$$

(d) En prenant $x = a$ dans ce qui précède, on a $f(a^r) = rf(a) = r$.

2. Si $x \geq 1$, comme $\lim\limits_{n \to +\infty} a^n = +\infty$ (on a $a > 1$), on peut trouver des entiers naturels n tels que $x < a^n$ et en désignant par $m + 1 \geq 1$ le plus petit de ces entiers, on a $a^m \leq x < a^{m+1}$.
Si $0 < x < 1$, comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{a^n} = 0$, on peut trouver des entiers naturels n tels que $\frac{1}{a^n} \leq x$ et en désignant par $p + 1 \geq 1$ le plus petit de ces entiers, on a $\frac{1}{a^{p+1}} \leq x < \frac{1}{a^p}$, soit $a^m \leq x < a^{m+1}$ avec $m = -p - 1$.

3.

(a) Si $m \in \mathbb{Z}$ est tel que $a^m \leq x < a^{m+1}$, alors $m \in E_x$.

(b) Soit $m \in \mathbb{Z}$ tel que $a^m \leq x < a^{m+1}$. Pour tout $r = \frac{p}{q} \in E_x$ avec $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, on a $a^p \leq x^q < a^{q(m+1)}$ et $0 < a^{p-q(m+1)} < 1$, ce qui impose $p - q(m+1) < 1$ puisque $a > 1$. On a donc $r = \frac{p}{q} < m + 1$ pour tout $r \in E_x$ et $m + 1$ est un majorant de E_x.

4.

(a) L'ensemble E_x est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$, il admet donc une borne supérieure $g(x) \in \mathbb{R}$.

(b) Il s'agit de montrer que $f(x)$ est un majorant de E_x.
Pour tout $r \in E_x$, on a $a^r \leq x$ et avec la croissance de f, on déduit que $f(a^r) \leq f(x)$ qui, compte tenu de $f(a^r) = r$, donne $r \leq f(x)$. En conséquence $f(x)$ est un majorant de E_x et $f(x) \leq g(x)$ par définition de la borne supérieure.

(c)

i. En utilisant la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, on déduit que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un rationnel r tel que $g(x) < r < g(x) + \varepsilon$ et nécessairement $r \notin E_x$, c'est-à-dire que $a^r > x$ qui donne $r > f(x)$ compte tenu de la stricte croissance de f et de $f(a^r) = r$.
On a donc bien $f(x) < r < g(x) + \varepsilon$.

ii. On vient de voir que pour tout réel $\varepsilon > 0$, on a $f(x) < g(x) + \varepsilon$, ce qui entraîne $f(x) \leq g(x)$ en faisant tendre ε vers 0. On a donc $f(x) = g(x)$.

5.

(a) On a :
$$E_a = \{r \in \mathbb{Q} \mid a^r \leq a\}_a = \left\{r \in \mathbb{Q} \mid a^{r-1} \leq 1\right\}$$
avec $a > 1$, ce qui équivaut à $E_a =]-\infty, 1] \cap \mathbb{Q}$ et alors $g(a) = \sup(E_a) = 1$.

(b) Si $a^r \leq x \leq a^s$, alors $r \in E_x$ et $r \leq g(x)$. De plus, pour tout $t \in E_x$, on a $a^t \leq x \leq a^s$, donc $a^{t-s} \leq 1$ et $t - s \leq 0$ puisque $a > 1$, c'est-à-dire que s majore E_x et $g(x) \leq s$ par définition de la borne supérieure.

(c)

i. En utilisant le résultat de la question précédentes, on déduit des inégalités $a^{\frac{p}{n}} \leq x < a^{\frac{p+1}{n}}$, $a^{\frac{q}{n}} \leq y < a^{\frac{q+1}{n}}$ et $a^{\frac{p+q}{n}} \leq xy < a^{\frac{p+q+2}{n}}$ que $\frac{p}{n} \leq g(x) \leq \frac{p+1}{n}$, $\frac{q}{n} \leq g(x) \leq \frac{q+1}{n}$ et $\frac{p+q}{n} \leq g(xy) \leq \frac{p+q+2}{n}$, ce qui entraîne :
$$-\frac{2}{n} \leq g(xy) - g(x) - g(y) \leq \frac{2}{n}.$$

ii. Comme $n \in \mathbb{N}^*$ est quelconque dans les inégalités précédentes, en le faisant tendre vers l'infini, on déduit que $g(xy) = g(x) + g(y)$.

(d)

i. Avec $\lim\limits_{n \to +\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$ (voir l'exercice 3.37 pour une démonstration qui n'utilise pas la fonction ln) et $x > 1$, on déduit qu'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $a^{\frac{1}{n}} < x$. Le nombre rationnel $\frac{1}{n}$ est donc dans E_x et $g(x) \geq \frac{1}{n} > 0$.

ii. Pour $0 < x < y$, on a $\frac{y}{x} > 1$, donc $g\left(\frac{y}{x}\right) > 0$ et :
$$g(y) = g\left(x\frac{y}{x}\right) = g(x) + g\left(\frac{y}{x}\right) > g(x).$$

6. Si f est une fonction qui vérifie ces conditions on a alors $f(1) = 0$ (même démonstration qu'en 1a). De $0 = f(1) = f\left(a\frac{1}{a}\right) = f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right)$, on déduit que $f\left(\frac{1}{a}\right) = -f(a) = -1$ et la fonction $-f$ vérifie les conditions du théorème 25.1 avec $-f\left(\frac{1}{a}\right) = 1$, ce qui équivaut à dire que $-f = \log_{\frac{1}{a}}$. Réciproquement la fonction $-\log_{\frac{1}{a}}$ convient. L'unique solution de ce problème est donc $\log_a = -\log_{\frac{1}{a}}$.

7. Avec $\log_a(x) - \log_a(y) = \log_a\left(\dfrac{x}{y}\right)$ pour $x > 0$ et $y > 0$, il suffit de montrer la continuité en 1. En effet si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels strictement positifs qui converge vers x, alors la suite $\left(\dfrac{x_n}{x}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1 et la continuité de $\log_a$ en 1 nous donne :

$$\lim_{n\to+\infty}(\log_a(x_n) - \log_a(x)) = \lim_{n\to+\infty}\log_a\left(\frac{x_n}{x}\right) = \log_a(1) = 0.$$

Avec $\log_a = -\log_{\frac{1}{a}}$, il nous suffit de montrer ce résultat pour $a > 1$.
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels strictement positifs qui converge vers 1. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0,\ 1 - \varepsilon < x_n < 1 + \varepsilon.$$

Par ailleurs, comme $\lim\limits_{m\to+\infty} a^{\frac{1}{m}} = 1$ avec $a^{\frac{1}{m}} > 1$ pour $a > 1$, il existe un entier m_0 tel que :

$$\forall m \geq m_0,\ 1 < a^{\frac{1}{m}} < 1 + \varepsilon,\ 1 - \varepsilon < a^{-\frac{1}{m}} < 1.$$

26

Une construction des fonctions exponentielles

26.1 Énoncé

Pour tout réel $a > 0$, la fonction $r \mapsto a^r = \sqrt[q]{a^p}$, où $r = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ avec $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, est supposée construite. Cette fonction réalise un morphisme du groupe additif $(\mathbb{Q}, +)$ dans le groupe multiplicatif $(\mathbb{R}^{+,*}, \cdot)$ et elle constante égale à 1 pour $a = 1$, strictement croissante pour $a > 1$ et strictement décroissante pour $a < 1$.

– I – Résultats préliminaires

Les questions qui suivent doivent être résolues sans utiliser les fonctions ln ou exp.
Pour cette partie a désigne un réel strictement positif.

1. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\sqrt[n]{a}\right) = 1$.
2. Soit $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres rationnels convergente vers 0. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(a^{r_n}\right) = 1$.
3. Pour tout entier $n \geq 1$, on définit la fonction u_n par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+,*},\ u_n(x) = n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right)$$

   (a) Montrer que la fonction $v_n = u_n - u_{n+1}$ est strictement décroissante sur $]0, 1[$, strictement croissante sur $]1, \infty[$ avec $v_n(1) = 0$.
   (b) En déduire que, pour tout réel $x \in \mathbb{R}^{+,*} \setminus \{1\}$, la suite $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante.
   (c) Montrer que la suite $\left(n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right)\right)_{n \geq 1}$ converge vers un réel $\lambda(a)$ avec $\lambda(a) = 0$ pour $a = 1$, $\lambda(a) > 0$ pour $a > 1$ et $\lambda(a) < 0$ pour $0 < a < 1$.
4. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles et monotone. Montrer que f est continue en 0 si, et seulement si, $\lim\limits_{n \to +\infty} f\left(\dfrac{1}{n}\right) = f(0)$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} f\left(-\dfrac{1}{n}\right) = f(0)$.

– II – L'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x) f(y)$ sur $\mathbb{R}$

On se donne une fonction f définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles et telle que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) f(y). \tag{26.1}$$

On peut remarquer que la fonction identiquement nulle vérifie bien cette équation fonctionnelle.

1. Montrer que si la fonction f s'annule en un point α, c'est alors la fonction identiquement nulle.

   On suppose à partir de cette question que f n'est pas la fonction nulle.
2. Calculer $f(0)$.
3. Montrer que f est à valeurs strictement positives.
4. Montrer que pour tout réel x, on a $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$.

   On note $a = f(1)$.
5. Montrer que, pour tout réel x et pour tout entier naturel n, on a $f(nx) = (f(x))^n$.
6. En déduire que pour tout entier naturel non nul n, on a $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \sqrt[n]{a}$, puis que pour tout nombre rationnel r, on a $f(r) = a^r$.
7. Montrer que f est croissante [resp. strictement croissante] si, et seulement si, $f(x) \geq 1$ [resp. $f(x) > 1$] pour tout réel $x > 0$. De manière analogue, on vérifie que f est décroissante [resp. strictement décroissante] si, et seulement si, $f(x) \leq 1$ [resp. $f(x) < 1$] pour tout réel $x > 0$.
8. Que peut-on dire si $a = 1$ et $f(x) \geq 1$ [resp. $f(x) \leq 1$] pour tout réel $x > 0$?
9. Donner un exemple de fonction f vérifiant l'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x) f(y)$ telle que $a = f(1) > 1$, la restriction de f à $\mathbb{Q}$ est strictement croissante et la restriction de f à $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est constante égale à 1.
10. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(f\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(f\left(-\dfrac{1}{n}\right)\right) = 1$.
11. On suppose que f est monotone.
    (a) Montrer que f est continue en 0.
    (b) En déduire que f est continue sur $\mathbb{R}$.
    (c) En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f' = \lambda(a) f$, où la constante réelle est celle définie en **I.3c**.
12. On suppose que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est alors monotone. Les conditions : f monotone, f continue en 0, f continue sur $\mathbb{R}$ et f dérivable sur $\mathbb{R}$ sont donc équivalentes.
13. Montrer que, pour tout réel $a > 0$, il existe au plus une fonction monotone f vérifiant l'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x) f(y)$ et telle que $f(1) = a$.
14. On suppose toujours que f est monotone.

    Montrer que si $a > 1$ [resp. $0 < a < 1$] alors f est strictement croissante avec $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ [resp. strictement décroissante avec $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$].

    En déduire que f réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^{+,*}$, sa fonction réciproque f^{-1} réalisant un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^{+,*}$ avec les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} f^{-1}(1) = 0 \\ f^{-1}(a) = 1 \\ \forall x \in \mathbb{R}^{+,*},\ \left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{\lambda(a)} \dfrac{1}{x} \\ \forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}^{+,*}\right)^2,\ f^{-1}(xy) = f^{-1}(x) + f^{-1}(y) \end{cases}$$

– III – Les fonctions exponentielles de base a

On se donne un réel $a > 0$ et on va construire une fonction monotone f qui vérifie l'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x) f(y)$ sur $\mathbb{R}$ avec $f(1) = a$. Si $a = 1$, on sait que $f = 1$ est la seule solution. On suppose donc $a \neq 1$.

1. Montrer que pour toute suite convergente $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres rationnels, la suite réelle $(a^{r_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
2. Montrer que si $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites de nombres rationnels convergentes vers le même réel x, alors les suites réelles $(a^{r_n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a^{s_n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers le même réels.
3. On peut donc définir la fonction f_a sur $\mathbb{R}$ par :
$$f_a(x) = \lim_{n\to+\infty} a^{r_n}$$
où $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres rationnels qui converge vers x. Montrer que cette fonction vérifie bien l'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x) f(y)$ sur $\mathbb{R}$ avec $f(1) = a$.

On note alors $f_a(x) = a^x$ et on dit que la fonction f_a est la fonction exponentielle de base a.

Pour $a \neq 1$, sa fonction réciproque est la fonction logarithme de base a et elle est notée $\log_a$. Elle est définie par :
$$\begin{cases} \log_a(1) = 0 \\ \forall x \in \mathbb{R}^{+,*},\ (\log_a)'(x) = \dfrac{1}{\lambda(a)} \dfrac{1}{x} \end{cases}$$
ce qui donne :
$$\forall x \in \mathbb{R}^{+,*},\ \log_a(x) = \frac{1}{\lambda(a)} \int_1^x \frac{dt}{t}.$$
Le logarithme népérien est la fonction ln définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R}^{+,*},\ \ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}.$$
On a alors :
$$\forall x \in \mathbb{R}^{+,*},\ \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\lambda(a)}$$
et la condition $\log_a(a) = 1$ donne $\lambda(a) = \ln(a)$.

Le nombre e est défini par $\ln(e) = 1$ (ou $\lambda(e) = 1$), de sorte que la fonction e^x est définie par $e^0 = 1$ et $(e^x)' = e^x$. On retrouve bien les définitions habituelles.

26.2 Solution

– I – Résultats préliminaires

1. Avec $\sqrt[n]{1} = 1$ et $\sqrt[n]{\dfrac{1}{a}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{a}}$, il suffit de montrer le résultat pour $a > 1$. On suppose donc que $a > 1$.
En posant $u_n = \sqrt[n]{a} - 1$, on a $u_n > 0$ pour tout $n \geq 1$ et en utilisant la formule du binôme de Newton, on a :
$$a = (1+u_n)^n > 1 + nu_n,$$
et :
$$0 < u_n < \frac{a-1}{n}$$

et en conséquence $\lim_{n\to+\infty}(u_n)=0$ encore équivalent à $\lim_{n\to+\infty}(\sqrt[n]{a})=1$.
On peut aussi procéder comme suit. La suite $(\sqrt[n]{a})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante ($\sqrt[n+1]{a}<\sqrt[n]{a}$ équivaut à $a<a^{\frac{n+1}{n}}=a\sqrt[n]{a}$ encore équivalent à $\sqrt[n]{a}>1$) et minorée par 1, elle converge donc vers un réel $\ell\geq 1$. Si $\ell>1$, pour $\lambda\in\,]1,\ell[$ il existe un entier n_0 tel que $\sqrt[n]{a}>\lambda$ pour tout $n\geq n_0$, ce qui entraîne $a>\lambda^n$ pour tout $n\geq n_0$ qui est incompatible avec $\lim_{n\to+\infty}a^n=+\infty$.

2. Avec $1^{r_n}=1$ et $\left(\frac{1}{a}\right)^{r_n}=\frac{1}{a^{r_n}}$, il suffit de montrer le résultat pour $a>1$. On suppose donc que $a>1$.
Comme $\lim_{n\to+\infty}(r_n)=0$, pour tout entier $k\geq 1$, il existe un entier n_k tel que :

$$\forall n\geq n_k,\ -\frac{1}{k}<r_n<\frac{1}{k}$$

et avec la stricte croissance de la fonction $r\mapsto a^r$ sur $\mathbb{Q}$, on déduit que :

$$\forall n\geq n_k,\ a^{-\frac{1}{k}}=\frac{1}{\sqrt[k]{a}}<a^{r_n}<a^{\frac{1}{k}}=\sqrt[k]{a}$$

soit :

$$\forall n\geq n_k,-\left(1-\frac{1}{\sqrt[k]{a}}\right)<a^{r_n}-1<\sqrt[k]{a}-1$$

et avec $\lim_{k\to+\infty}(\sqrt[k]{a})=1$, on déduit que pour tout réel $\varepsilon>0$, il existe un entier $k_0\geq 1$ tel que :

$$\forall k\geq k_0,\ 0<1-\frac{1}{\sqrt[k]{a}}<\varepsilon \text{ et } 0<\sqrt[k]{a}-1<\varepsilon,$$

ce qui donne :

$$\forall n\geq n_{k_0},-\varepsilon<-\left(1-\frac{1}{\sqrt[k_0]{a}}\right)<a^{r_n}-1<\sqrt[k_0]{a}-1<\varepsilon$$

et signifie que $\lim_{n\to+\infty}(a^{r_n}-1)=0$. On a donc $\lim_{n\to+\infty}(a^{r_n})=1$.

3.

(a) La fonction v_n est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}^{+,*}$ avec, pour tout réel $x>0$:

$$v_n'(x)=x^{\frac{1}{n}-1}-x^{\frac{1}{n+1}-1}=x^{-\frac{n-1}{n}}-x^{-\frac{n}{n+1}}=x^{-\frac{n}{n+1}}\left(x^{\frac{1}{n(n+1)}}-1\right).$$

La fonction v_n est donc strictement décroissante sur $]0,1[$, strictement croissante sur $]1,\infty[$ avec $v_n(1)=0$.

(b) Il en résulte que $v_n(x)>0$ pour tout $x\in\mathbb{R}^{+,*}\setminus\{1\}$, ce qui équivaut à $u_n(x)<u_{n+1}(x)$ et la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante. Pour $x=1$, la suite $(u_n(1))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante égale à 0.

(c) Avec $u_n(1)=0$, $u_n\left(\frac{1}{a}\right)=n\left(\frac{1}{\sqrt[n]{a}}-1\right)=-\frac{n(\sqrt[n]{a}-1)}{\sqrt[n]{a}}$ et $\lim_{n\to+\infty}(\sqrt[n]{a})=1$, il suffit de montrer le résultat pour $a>1$. On suppose donc que $a>1$.
Dans ce cas la suite $(u_n(a))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante minorée par 0, elle est convergente vers un réel $\lambda(a)\geq 0$. En fait, avec :

$$a-1=(\sqrt[n]{a})^n-1=(\sqrt[n]{a}-1)\left((\sqrt[n]{a})^{n-1}+\cdots+\sqrt[n]{a}+1\right)$$

et $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k < a$ pour $a > 1$, $n \geq 2$ et $0 \leq k \leq n-1$ (c'est équivalent à $a^k < a^n$ ou à $a^k\left(a^{n-k}-1\right) > 0$), on déduit que $a - 1 < n\left(\sqrt[n]{a}-1\right)a$ et $u_n(a) > \dfrac{a-1}{a}$ qui donne $\lambda(a) \geq \dfrac{a-1}{a} > 0$.

Pour $0 < a = \dfrac{1}{b} < 1$ avec $b > 1$, on a :

$$u_n(a) = u_n\left(\frac{1}{b}\right) = -\frac{u_n(b)}{\sqrt[n]{b}} \underset{n\to+\infty}{\to} = -\lambda(b) < 0.$$

4. Supposons f croissante.
Si f est continue en 0 (et non nécessairement monotone), alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(0)$ pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente vers 0. En particulier, $\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(\dfrac{1}{n}\right) = f(0)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(-\dfrac{1}{n}\right) = f(0)$.
Réciproquement, si $\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(\dfrac{1}{n}\right) = f(0)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(-\dfrac{1}{n}\right) = f(0)$, alors pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier $n_0 \geq 1$ tel que :
$$\forall n \geq n_0,\ -\varepsilon < f\left(-\frac{1}{n}\right) - f(0) \text{ et } f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0) < \varepsilon.$$
Avec la croissance de f, on déduit que pour tout x dans $\left]-\dfrac{1}{n_0}, \dfrac{1}{n_0}\right[$, on a :
$$-\varepsilon < f\left(-\frac{1}{n_0}\right) - f(0) \leq f(x) - f(0) \leq f\left(\frac{1}{n_0}\right) - f(0) < \varepsilon$$
soit :
$$\left(|x| < \eta = \frac{1}{n_0}\right) \Rightarrow \left(|f(x) - f(0)| < \varepsilon\right).$$
La fonction f est donc continue en 0.

– II – L'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x)f(y)$ sur $\mathbb{R}$

1. Si $f(\alpha) = 0$, on a alors pour tout réel x :
$$f(x) = f(x - \alpha + \alpha) = f(x-\alpha)f(\alpha) = 0$$
c'est-à-dire que $f = 0$.
2. On a $f(0) = f(0+0) = f(0)^2$ avec $f(0)$ non nul puisque $f \neq 0$, ce qui équivaut à $f(0) = 1$.
3. Pour tout réel x, on a $f(x) \neq 0$ et :
$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right)^2 > 0.$$
4. Pour tout réel x, on a :
$$1 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x)f(-x)$$
ce qui entraîne $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$.

5. On procède par récurrence sur $n \geq 0$. Pour $n = 0$, on a $f(0) = 1 = (f(x))^0$ et pour $n = 1$, le résultat est trivial. En supposant que $f(nx) = (f(x))^n$ pour $n \geq 1$, on a $f((n+1)x) = f(nx) f(x) = (f(x))^n f(x) = (f(x))^{n+1}$.
6. Avec $a = f(1) = f\left(n\frac{1}{n}\right) = \left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$ et $f\left(\frac{1}{n}\right) > 0$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, on déduit que $f\left(\frac{1}{n}\right) = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$.

   Si $r = \dfrac{p}{q}$ est un nombre rationnel positif avec $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, on a alors :

   $$f(r) = f\left(p\frac{1}{q}\right)\left(f\left(\frac{1}{q}\right)\right)^p = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p = a^{\frac{p}{q}} = a^r.$$

   Si $r = -s$ est un nombre rationnel négatif, on a alors :

   $$f(r) = f(-s) = \frac{1}{f(s)} = \frac{1}{a^s} = a^{-s} = a^r.$$

   Le résultat est donc valable pour tout nombre rationnel.
7. Supposons que $f(x) \geq 1$ pour tout réel $x > 0$. Pour $x \geq y$, on a :

   $$\frac{f(x)}{f(y)} = f(x) f(-y) = f(x-y) \geq 1$$

   donc $f(x) \geq f(y)$ et f est croissante. Réciproquement si f est croissante alors $f(x) \geq f(0) = 1$ pour tout $x > 0$. Le cas des inégalités strictes se traite de manière analogue.
8. Si $a = f(1) = 1$ et $f(x) \geq 1$ pour tout réel $x > 0$, alors f est constante égale à 1. En effet, pour tout entier relatif n, on a $f(n) = a^n = 1$ et pour tout réel x de partie entière n, on a $n \leq x < n+1$ et $1 = f(n) \leq f(x) \leq f(n+1) = 1$, soit $f(x) = 1$.
9. On considère $\mathbb{R}$ comme un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel et on désigne $(e_i)_{i \in I}$ une $\mathbb{Q}$-base de $\mathbb{R}$ (utilisation du lemme de Zorn). On définit sur $\mathbb{R}$ l'application $\mathbb{Q}$-linéaire g par $g(e_j) = 1$ et $g(e_i) = 0$ pour tout $i \in I \setminus \{j\}$ où j est fixé dans I, cette fonction g vérifie l'équation fonctionnelle $g(x+y) = g(x) + g(y)$, est à valeurs dans $\mathbb{Q}$ et l'application f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2^{g(x)}$ vérifie l'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x) f(y)$ avec :

   $$f(x) = f\left(\sum r_i e_i\right) = 2^{g(\sum r_i e_i)} = 2^{\sum r_i g(e_i)} = 2^{r_j}$$

   les sommes considérées étant finies et les r_i rationnels. On a en particulier $f(e_j) = 2$ et $f(e_i) = 1$ pour $i \in I \setminus \{j\}$. Prenant $e_j = 1$ que l'on complète en une base, on a $a = f(1) = 2 > 1$, $f(r) = 2^r$ pour tout $r \in \mathbb{Q}$ et $f(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
10. On a $f\left(\frac{1}{n}\right) = \sqrt[n]{a}$ et en première partie, on a vu que $\lim\limits_{n \to +\infty} (\sqrt[n]{a}) = 1$.

    Avec $f\left(-\frac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{\sqrt[n]{a}}$, on déduit qu'on a aussi $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(f\left(-\frac{1}{n}\right)\right) = 1$.
11.

    (a) La fonction f étant monotone sur $\mathbb{R}$ avec $\lim\limits_{n \to +\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = f(0)$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} f\left(-\frac{1}{n}\right) = f(0)$, on déduit des résultats de la première partie qu'elle est continue en 0.

(b) Pour tout réels x_0 et x, on a :

$$\begin{aligned}|f(x)-f(x_0)| &= |f(x-x_0+x_0)-f(x_0)| = |f(x-x_0)f(x_0)-f(x_0)| \\ &= |f(x_0)|\,|f(x-x_0)-1| \underset{x\to x_0}{\to} 0\end{aligned}$$

La fonction f est donc continue sur $\mathbb{R}$.

(c) La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}$ est intégrable sur tout segment et pour tout réel x, on a :

$$\int_0^1 f(x+y)\,dy = \int_0^1 f(x)\,f(y)\,dy = f(x)\int_0^1 f(y)\,dy$$

et le changement de variable $t = x+y$, nous donne :

$$\int_x^{x+1} f(t)\,dt = f(x)\int_0^1 f(y)\,dy$$

soit, en notant $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ la primitive de f nulle en 0 :

$$f(x) = \frac{F(x+1)-F(x)}{F(1)}$$

(on a $F(1) > 0$ car f est continue à valeurs strictement positives). La fonction F étant dérivable (de dérivée égale à f), on en déduit que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
En dérivant la relation (26.1) par rapport à y, à x fixé, on a $f'(x+y) = f(x)\,f'(y)$ et $y=0$ donne $f'(x) = f'(0)\,f(x)$ avec

$$f'(0) = \lim_{n\to+\infty} \frac{f\left(\frac{1}{n}\right)-f(0)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} n\left(\sqrt[n]{a}-1\right) = \lambda(a).$$

12. Si f est dérivable sur $\mathbb{R}$, le raisonnement précédent nous dit que $f' = \lambda(a)\,f$ avec f à valeurs strictement positives, il en résulte que f est monotone (et même strictement monotone pour $a \neq 1$). On a donc montré que :
f monotone $\Rightarrow$ f continue en $0 \Rightarrow f$ continue sur $\mathbb{R} \Rightarrow f$ dérivable sur $\mathbb{R} \Rightarrow f$ dérivable sur $\mathbb{R}$.
Ces conditions sont donc équivalentes.

13. On a vu qu'une telle fonction coïncide avec la fonction $r \mapsto a^r$ sur $\mathbb{Q}$ et qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$. Deux telles fonctions sont donc continues sur $\mathbb{R}$ et coïncident sur $\mathbb{Q}$, elles sont donc égales.

14. Si $a > 1$, on a alors $\lambda(a) > 0$ et f est strictement croissante. On a alors $\displaystyle\lim_{\substack{n\to+\infty\\ n\in\mathbb{N}}} f(n) = \lim_{n\to+\infty} a^n = +\infty$ et f n'est pas majorée, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Avec $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$, on déduit que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. On procède de même pour $0 < a < 1$.
La fonction f est donc de classe $\mathcal{C}^1$, strictement monotone de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^{+,*}$, elle réalise donc un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^{+,*}$, sa fonction réciproque f^{-1} étant de classe $\mathcal{C}^1$ strictement monotone de $\mathbb{R}^{+,*}$ sur $\mathbb{R}$ et on a les propriétés suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l} f(0) = 1 \Leftrightarrow f^{-1}(1) = 0 \\ f(1) = a \Leftrightarrow f^{-1}(a) = 1 \\ \forall x = f(y) \in \mathbb{R}^{+,*},\ \left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{f'(y)} = \dfrac{1}{\lambda(a)}\dfrac{1}{f(y)} = \dfrac{1}{\lambda(a)}\dfrac{1}{x} \end{array}\right.$$

et pour tous $x = f(u)$ et $y = f(v)$ dans $\mathbb{R}^{+,*}$ on a :

$$f^{-1}(xy) = f^{-1}(f(u)f(v)) = f^{-1}(f(u+v)) = u+v = f^{-1}(x) + f^{-1}(y)$$

– II – Les fonctions exponentielles de base a

1. On suppose que $a > 1$. Le cas où $a < 1$, se traite de manière analogue.

   (a) On montre que la suite réelle $(a^{r_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Pour tous n, m dans $\mathbb{N}$, on a :

   $$|a^{r_m} - a^{r_n}| = a^{r_n}\left|a^{r_m - r_n} - 1\right|.$$

   Pour tout entier $k \geq 1$, il existe un entier n_k tel que :

   $$\forall n \geq n_k,\ \forall m \geq n_k,\ -\frac{1}{k} < r_m - r_n < \frac{1}{k}$$

   et avec la stricte croissance de la fonction a^r sur $\mathbb{Q}$, on déduit que :

   $$\forall n \geq n_k,\ \forall m \geq n_k,\ a^{-\frac{1}{k}} = \frac{1}{\sqrt[k]{a}} < a^{r_m - r_n} < a^{\frac{1}{k}} = \sqrt[k]{a}$$

   soit :

   $$\forall n \geq n_k,\ \forall m \geq n_k,\ -\left(1 - \frac{1}{\sqrt[k]{a}}\right) < a^{r_m - r_n} - 1 < \sqrt[k]{a} - 1$$

   et avec $\lim\limits_{k\to+\infty}(\sqrt[k]{a}) = 1$, on déduit que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier $k_0 \geq 1$ tel que :

   $$\forall k \geq k_0,\ 0 < 1 - \frac{1}{\sqrt[k]{a}} < \varepsilon \text{ et } 0 < \sqrt[k]{a} - 1 < \varepsilon.$$

   On a donc :

   $$\forall n \geq n_{k_0},\ \forall m \geq n_{k_0},\ -\varepsilon < -\left(1 - \frac{1}{\sqrt[k_0]{a}}\right) < a^{r_m - r_n} - 1 < \sqrt[k_0]{a} - 1 < \varepsilon.$$

   La suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est convergente est bornée, il existe donc un réel $M > 0$ tel que $0 < a^{r_n} \leq M$ pour tout entier n. On a donc :

   $$\forall n \geq n_{k_0},\ \forall m \geq n_{k_0},\ -M\varepsilon < a^{r_n}\left(a^{r_m - r_n} - 1\right) < M\varepsilon$$

   ce qui signifie que la suite $(a^{r_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, donc convergente.

   (b) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = \lim\limits_{n\to+\infty} s_n = x$, on a alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(r_n - s_n) = 0$ et en première partie on a vu que cela entraîne $\lim\limits_{n\to+\infty}(a^{r_n - s_n} - 1) = 0$, soit $\lim\limits_{n\to+\infty}(a^{r_n} - a^{s_n}) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} a^{r_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} a^{s_n}$.

   (c) La fonction f_a est bien définie puisque la limite existe et ne dépend pas du choix d'une suite de nombres rationnels qui converge vers x.
   Pour $x = \lim\limits_{n\to+\infty} r_n$ et $y = \lim\limits_{n\to+\infty} s_n$, où $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites de nombres rationnels, on a $x + y = \lim\limits_{n\to+\infty}(r_n + s_n)$ et :

   $$\begin{aligned} f_a(x+y) &= \lim_{n\to+\infty} a^{r_n + s_n} = \lim_{n\to+\infty}(a^{r_n} a^{s_n}) \\ &= \lim_{n\to+\infty}(a^{r_n}) \lim_{n\to+\infty}(a^{s_n}) = f_a(x) f_a(x). \end{aligned}$$

27

Calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

27.1 Énoncé

Le but de ce problème est de calculer de deux façons la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

– I – Convergence de la série $\sum \frac{1}{n^2}$

Pour cette partie, $(S_n)_{n\geq 1}$ est la suite définie par :

$$\forall n \geq 1,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

1. Démontrer que, pour tout entier $k \geq 2$, on a la majoration
$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$
En déduire la convergence de la série $\sum \frac{1}{n^2}$ et donner un majorant de la somme $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.
2. On considère la suite $(T_n)_{n\geq 1}$, définie par :
$$\forall n \geq 1,\ T_n = S_n + \frac{1}{n}.$$
Démontrer que les suites $(S_n)_{n\geq 1}$ et $(T_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes et donner un encadrement d'amplitude 10^{-1} de la limite commune S de ces deux suites.
3. Montrer, par comparaison à une intégrale, la convergence de la suite $(S_n)_{n\geq 1}$.

– II – Utilisation de polynômes

1. Rappeler, pour tout entier naturel non nul n, une expression complexe des racines n-èmes de l'unité.

2. Montrer que la fonction homographique $h : z \mapsto \dfrac{z+1}{z-1}$ réalise une bijection de $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ sur lui même.
3. Soit $P : z \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ une fonction polynomiale de degré $n \geq 1$ et $(z_k)_{1\leq k\leq n}$ toutes ses racines complexes distinctes ou confondues. Exprimer les quantités $\sigma_1 = \sum_{k=1}^{n} z_k$ et $\sigma_2 = \sum_{1\leq k<j\leq n} z_k z_j$ en fonction de certains des coefficients de P.
4. Montrer que pour tout réel $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, on a :
$$\operatorname{cotan}(x) < \frac{1}{x} < \frac{1}{\sin(x)}. \tag{27.1}$$
5.
   (a) Montrer que, pour tout entier naturel n, les racines complexes de l'équation :
   $$(z+1)^{2n+1} = (z-1)^{2n+1} \tag{27.2}$$
   sont données par :
   $$z_k = i \operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \quad (k \neq 0 \text{ et } -n \leq k \leq n)$$
   (b) Montrer que l'équation (27.2) peut s'écrire :
   $$\sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1} z^{2n-2k} = 0 \tag{27.3}$$
   c'est-à-dire que si $z \in \mathbb{C}$ est solution de (27.2), alors $u = z^2$ est solution de :
   $$P_n(u) = \sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1} u^{n-k} = 0 \tag{27.4}$$
   (c) Montrer que :
   $$T_n = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{n(2n-1)}{3}.$$
   (d) En déduire que :
   $$R_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = \frac{2n(n+1)}{3}.$$
   (e) En utilisant l'encadrement (27.1), déduire de ce qui précède que :
   $$\frac{n(2n-1)}{3} < \frac{(2n+1)^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < \frac{n(2n+2)}{3}.$$
   (f) Conclure.

L'idée de cette preuve est due à Ioannis Papadimitriou (The American Mathematical Monthly, Vol. 80, avril 1973, pages 424-425).

– III – Utilisation du noyau de Dirichlet

Pour cette partie, x est un réel dans $]0,\pi[$, n un entier naturel non nul et on note :

$$J_n(x)=\sum_{k=1}^{n}e^{ikx},\ C_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\cos(kx),\ S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\sin(kx),$$

$$T_n(x)=\sum_{k=1}^{n}k\cos(kx),\ F_n(x)=1+2\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)\cos(kx).$$

($\dfrac{1}{2}+C_n(x)$ est le noyau de Dirichlet).

1. Montrer que :
$$J_n(x)=e^{i\frac{n+1}{2}x}\frac{\sin\left(\frac{n}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$
2. Montrer que :
$$C_n(x)=\cos\left(\frac{n+1}{2}x\right)\frac{\sin\left(\frac{n}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)},\ S_n(x)=\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\frac{\sin\left(\frac{n}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$
3. Montrer que :
$$2C_n(x)=\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}-1.$$
4. Montrer que :
$$T_n(x)=\frac{n+1}{2}\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}-\frac{1}{2}\frac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}.$$
5. Montrer que :
$$F_n(x)=\frac{1}{n+1}\frac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}.$$
Ce résultat est-il encore valable pour $x=0$ et pour $x=\pi$?
6. Calculer $I_k=\displaystyle\int_0^{\pi}x\cos(kx)\,dx$ pour tout entier $k\geq 1$.
7. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\leq\ln(n)+1$.
8. On note $G_n=\displaystyle\int_0^{\pi}xF_n(x)\,dx$. Montrer qu'il existe une suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ convergente vers 0 telle que :
$$G_n=\frac{\pi^2}{2}+2\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k-1}{k^2}+\alpha_n.$$
9. En utilisant **5.** montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}G_n=0$.
10. Conclure.

– IV – Utilisation des intégrales de Wallis

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(t)\,dt,\ \ J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2n}(t)\,dt \text{ et } K_n = \frac{4^n\,(n!)^2}{(2n))} J_n.$$

1. Calculer les intégrales I_0 et J_0.
2.
   (a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $I_{n+1} = \dfrac{2n+1}{2n+2} I_n$.

   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $I_n = \dfrac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \dfrac{\pi}{2}$.
3. Soit $n \geq 1$.

   (a) Démontrer la relation :
   $$I_n = n\,(2n-1)\,J_{n-1} - 2n^2 J_n.$$
   (b) En déduire que :
   $$K_{n-1} - K_n = \frac{\pi}{4n^2}.$$
   (c) Démontrer la relation :
   $$\frac{\pi}{4} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = J_0 - K_n.$$
4.
   (a) Démontrer que, pour tout réel $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a : $x \leq \dfrac{\pi}{2} \sin x$.

   (b) En déduire que, pour tout entier n, on a :
   $$0 \leq J_n \leq \frac{\pi^2 I_n}{8\,(n+1)},\ \text{ puis } 0 \leq K_n \leq \frac{\pi^3}{16\,(n+1)}$$
   (c) Retrouver la valeur de S.

27.2 Solution

– I – Convergence de la série $\sum \frac{1}{n^2}$

1. Pour $k \geq 2$, on a :
   $$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k\,(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$
   Pour $n \geq 2$, on a :
   $$\begin{aligned} S_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} &\leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \\ &\leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \\ &\leq 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = 2 - \frac{1}{n} \leq 2. \end{aligned}$$

La suite $(S_n)_{n\geq 1}$ est donc une suite croissante (sommes de réels positifs) majorée par 2 et en conséquence convergente de limite $S \in \left]0,2\right]$.
De manière plus générale, pour $\alpha > 1$ et $n \geq 2$, on a :

$$\begin{aligned}
S_n(\alpha) = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} &\leq 1 + \frac{1}{\alpha-1} \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{(k-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{k^{\alpha-1}} \right) \\
&\leq 1 + \frac{1}{\alpha-1} \left(\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)^{\alpha-1}} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^{\alpha-1}} \right) \\
&\leq 1 + \frac{1}{\alpha-1} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^{\alpha-1}} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^{\alpha-1}} \right) \\
&\leq 1 + \frac{1}{\alpha-1} - \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}} \leq 1 + \frac{1}{\alpha-1}.
\end{aligned}$$

l'inégalité, pour $k \geq 2$:

$$\frac{1}{k^\alpha} < \frac{1}{\alpha-1} \left(\frac{1}{(k-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{k^{\alpha-1}} \right).$$

venant de :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k^\alpha} < \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^\alpha} &= \left[-\frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{t^{\alpha-1}} \right]_{k-1}^{k} \\
&= \frac{1}{\alpha-1} \left(\frac{1}{(k-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{k^{\alpha-1}} \right)
\end{aligned}$$

2. La suite $(S_n)_{n\geq 1}$ est croissante puisque chaque terme S_n est somme de réels positifs.
Pour tout $n \geq 1$, on a :

$$T_{n+1} - T_n = \frac{1}{(n+1)^2} - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = -\frac{1}{n(n+1)^2} < 0$$

ce qui signifie que la suite $(T_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.
Puis avec :

$$\lim_{n\to+\infty} (T_n - S_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

on conclut que ces deux suites sont adjacentes et en conséquence convergentes vers une même limite S.
En choisissant n tel que $\dfrac{1}{n} \leq \varepsilon$, les encadrements $S_n \leq S \leq T_n$, nous permettent de donner des valeurs approchées de S d'amplitude ε. Par exemple, pour $n = 10$, on obtient :

$$S_{10} = \frac{1968\,329}{1270\,080} \approx 1.549 \leq S \leq T_{10} = \frac{2095\,337}{1270\,080} \approx 1.649.$$

On peut montrer de manière un plus générale, en utilisant le théorème sur les suites adjacentes, que, pour tout réel $\alpha \geq 2$, la série $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ est convergente. Pour ce faire on utilise les suites $(S_n(\alpha))_{n\geq 1}$ et $(T_n(\alpha))_{n\geq 1}$ définies par :

$$S_n(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \text{ et } T_n(\alpha) = S_n(\alpha) + \frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

La suite $(S_n(\alpha))_{n\geq 1}$ est croissante puisque chaque terme $S_n(\alpha)$ est somme de réels positifs.
Pour tout $n \geq 1$, on a :

$$T_{n+1}(\alpha) - T_n(\alpha) = \frac{1}{(n+1)^{\alpha}} - \left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}\right)$$

avec :

$$\frac{1}{(n+1)^{\alpha}} < \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}\right)$$

ce qui donne :

$$T_{n+1}(\alpha) - T_n(\alpha) < \left(\frac{1}{\alpha-1} - 1\right)\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}\right) \leq 0$$

pour $\alpha \geq 2$ (dans ce cas $\frac{1}{\alpha-1} - 1 = \frac{2-\alpha}{\alpha-1} \leq 0$), ce qui signifie que la suite $(T_n(\alpha))_{n\geq 1}$ est décroissante.
Enfin avec :

$$\lim_{n\to+\infty}(T_n(\alpha) - S_n(\alpha)) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^{\alpha-1}} = 0,$$

on conclut que ces deux suites sont adjacentes et donc convergentes vers une même limite.

3. La fonction $t \to \frac{1}{t^2}$ étant décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, on a :

$$\forall k \geq 2,\ \int_{k-1}^{k}\frac{dt}{t^2} \geq \int_{k-1}^{k}\frac{dt}{k^2} = \frac{1}{k^2}$$

et pour tout $n \geq 2$, on a :

$$S_n = 1 + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{dt}{t^2} = 1 + \int_{1}^{n}\frac{dt}{t^2} = 2 - \frac{1}{n^{\alpha-1}} \leq 2.$$

La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante majorée et en conséquence convergente.

– II – Utilisation de polynômes

1. Les racines n-èmes de l'unité sont données par :

$$\zeta_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}\ \ (0 \leq k \leq n-1).$$

2. La fonction h est bien définie sur $\mathcal{D} = \mathbb{C}\setminus\{1\}$ et pour tout $z \in \mathcal{D}$, on a :

$$h(z) = \frac{z+1}{z-1} = 1 \Leftrightarrow z+1 = z-1 \Leftrightarrow 1 = -1,$$

ce qui est impossible. La fonction h est donc à valeurs dans $\mathcal{D}$. De plus pour tout $Z \in \mathcal{D}$, l'équation $Z = \frac{z+1}{z-1}$ a pour unique solution $z = \frac{Z+1}{Z-1}$ dans $\mathcal{D}$, ce qui signifie que h réalise une bijection de $\mathcal{D}$ sur lui même.

3. On a :

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k = a_n \prod_{k=1}^{n} (z - z_k)$$

et en développant le produit, on obtient :

$$P(z) = a_n \left(z^n - \sigma_1 z^{n-1} + \sigma_2 z^{n-2} + \cdots + (-1)^n \sigma_n\right)$$

où $\sigma_n = \prod_{k=1}^{n} z_k$. L'identification des coefficients de z^{n-1} et z^{n-2} nous donne alors :

$$\sigma_1 = \sum_{k=1}^{n} z_k = -\frac{a_{n-1}}{a_n},\ \sigma_2 = \sum_{1 \leq k < j \leq n} z_k z_j = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

(on $a_n \neq 0$ puisque P est de degré n).

4. En utilisant le théorème des accroissements finis, on a, pour tout réel $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$:

$$\begin{cases} 0 < \sin(x) = \sin(x) - \sin(0) = x \cos(c_x) < x \\ \tan(x) = \tan(x) - \tan(0) = x\left(1 + \tan^2(d_x)\right) > x > 0 \end{cases}$$

avec $0 < c_x, d_x < x$, ce qui donne :

$$0 < \sin(x) < x < \tan(x)$$

ou encore :

$$\operatorname{cotan}(x) = \frac{1}{\tan(x)} < \frac{1}{x} < \frac{1}{\sin(x)}.$$

5.

(a) Si $z \in \mathbb{C}$ est solution de (27.2), on a alors $z \neq 1$ et $Z = \frac{z+1}{z-1}$ est solution de $Z^{2n+1} = 1$, c'est donc une racine $(2n+1)$-ème de l'unité, c'est-à-dire qu'il existe un entier p compris entre 0 et $2n$ tel que :

$$Z = e^{i\frac{2p\pi}{2n+1}}.$$

En écrivant tout entier p compris entre $n+1$ et $2n$, sous la forme $p = 2n+1-k$ avec k compris entre 1 et n, on a :

$$e^{i\frac{2p\pi}{2n+1}} = e^{i\frac{2(2n+1-k)\pi}{2n+1}} = e^{2i\pi} e^{-i\frac{2k\pi}{2n+1}} = e^{-i\frac{2k\pi}{2n+1}}.$$

On a donc :

$$Z \in \left\{e^{i\frac{2k\pi}{2n+1}} \mid 0 \leq k \leq n\right\} \cup \left\{e^{-i\frac{2k\pi}{2n+1}} \mid 1 \leq k \leq n\right\}$$

ou encore :

$$Z \in S_n = \left\{e^{i\frac{2k\pi}{2n+1}} \mid -n \leq k \leq n\right\}.$$

En écrivant que :

$$\left(z \neq 1 \text{ et } Z = \frac{z+1}{z-1}\right) \Leftrightarrow \left(Z \neq 1 \text{ et } z = \frac{Z+1}{Z-1}\right)$$

(la fonction homographique $z \mapsto \dfrac{z+1}{z-1}$ réalise une bijection de $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ sur lui même), on déduit que si $z \in \mathbb{C}$ est solution de (27.2), alors $Z \in S_n \setminus \{1\}$ et il existe un entier k non nul compris entre $-n$ et n tel que :

$$z = \frac{e^{i\frac{2k\pi}{2n+1}} + 1}{e^{i\frac{2k\pi}{2n+1}} - 1} = \frac{e^{i\frac{k\pi}{2n+1}} + e^{-i\frac{k\pi}{2n+1}}}{e^{i\frac{k\pi}{2n+1}} - e^{-i\frac{k\pi}{2n+1}}} = \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}{i\sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$$
$$= -i\,\mathrm{cotan}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$$

La fonction cotan étant impaire, cela s'écrit aussi :

$$z = z_k = i\,\mathrm{cotan}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\ (k \neq 0 \text{ et } -n \leq k \leq n).$$

La fonction tan qui est strictement croissante sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ est injective et en conséquence $z_k \neq z_j$ pour $k \neq j$ dans $\{-n, \cdots, -1, 1, \cdots, n\}$ (les z_k sont bien dans $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$) c'est-à-dire qu'on a obtenu $2n$ racines distinctes de l'équation (27.2). Comme cette équation est exactement de degré $2n$ (en développant avec la formule du binôme cette équation s'écrit $2(2n+1)z^{2n} + \cdots = 0$), on a bien toutes les racines.

(b) En écrivant que :

$$\begin{cases} (z+1)^{2n+1} = \sum\limits_{j=0}^{n} C_{2n+1}^{j} z^{2n+1-j} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k} z^{2n+1-2k} + \sum\limits_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1} z^{2n+1-(2k+1)} \\ (z-1)^{2n+1} = \sum\limits_{j=0}^{n} C_{2n+1}^{j} (-1)^j z^{2n+1-j} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k} z^{2n+1-2k} - \sum\limits_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1} z^{2n+1-(2k+1)} \end{cases}$$

on déduit que :

$$Q_{2n}(z) = (z+1)^{2n+1} - (z-1)^{2n+1} = 2\sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1} z^{2n-2k}$$

et l'équation (27.2) est bien équivalente à l'équation (27.3) (on détaillé les pointillés de la question précédente).

(c) Comme $Q_{2n}(z) = P_n(z^2)$, on déduit que les $u_k = z_k^2 = -\,\mathrm{cotan}^2\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right)$, où k est compris entre 1 et n sont des racines de P_n. Comme P_n est de degré n et les u_k, pour k compris entre 1 et n, sont deux à deux distincts (la fonction cotan est strictement décroissante sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et à valeurs strictement positives), on a ainsi toutes les racines de P_n. La somme des racines du polynôme P_n est :

$$\sigma_1 = \sum_{k=1}^{n} u_k = -\sum_{k=1}^{n} \mathrm{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = -\frac{C_{2n+1}^{3}}{C_{2n+1}^{1}} = -\frac{n(2n-1)}{3}.$$

On a donc :

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{n(2n-1)}{3}.$$

Pour $n = 1$, on a bien $\mathrm{cotan}^2\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{3}$.

(d) En écrivant que, pour tout k compris entre 1 et n, on a :

$$\operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)=\frac{\cos^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}=\frac{1-\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}=\frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}-1,$$

on déduit que :

$$R_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}=T_n+n=\frac{n\left(2n-1\right)}{3}+n=\frac{2n\left(n+1\right)}{3}$$

(e) En utilisant l'encadrement (27.1), on a pour tout k compris entre 1 et n :

$$\operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)<\frac{\left(2n+1\right)^2}{k^2\pi^2}<\frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$$

et en sommant :

$$\frac{n\left(2n-1\right)}{3}=T_n<\frac{\left(2n+1\right)^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}<R_n=\frac{2n\left(n+1\right)}{3}.$$

(f) L'inégalité précédente s'écrit :

$$\forall n\geq 1,\ \pi^2\frac{n\left(2n-1\right)}{3\left(2n+1\right)^2}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}<\pi^2\frac{2n\left(n+1\right)}{3\left(2n+1\right)^2}$$

et faisant tendre n vers $+\infty$, on en déduit que

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

Comme la série est à termes positifs, on peut écrire que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{\left(2p\right)^2}+\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{\left(2p+1\right)^2}.$$

On a aussi :

$$\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{\left(2p+1\right)^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}-\frac{1}{4}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2}=\frac{3}{4}\frac{\pi^2}{6}=\frac{3\pi^2}{24}.$$

– III – Utilisation du noyau de Dirichlet

1. Comme $e^{ix}\neq 1$, on a :

$$J_n\left(x\right)=e^{ix}\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{ix}\right)^k=e^{ix}\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}}=e^{ix}\frac{e^{i\frac{n}{2}x}}{e^{i\frac{x}{2}}}\frac{e^{-i\frac{n}{2}x}-e^{i\frac{n}{2}x}}{e^{-i\frac{x}{2}}-e^{i\frac{x}{2}}}$$
$$=e^{i\frac{n+1}{2}x}\frac{\sin\left(\frac{n}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

2. On a $C_n(x) = \Re(J_n(x))$ et $S_n(x) = \Im(J_n(x))$, ce qui donne :

$$C_n(x) = \cos\left(\frac{n+1}{2}x\right)\frac{\sin\left(\frac{n}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)},\ S_n(x) = \sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\frac{\sin\left(\frac{n}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

3. Avec :

$$2\sin\left(\frac{n}{2}x\right)\cos\left(\frac{n+1}{2}x\right) = \sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

$(2\sin(a)\cos(b) = \sin(a+b) + \sin(a-b))$, on a :

$$2C_n(x) = \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} - 1.$$

4. On a :

$$\begin{aligned} T_n(x) = S_n'(x) &= \frac{n+1}{2}\cos\left(\frac{n+1}{2}x\right)\frac{\sin\left(\frac{n}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &+\frac{n}{2}\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\frac{\cos\left(\frac{n}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\frac{\sin\left(\frac{n}{2}x\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &= \frac{n+1}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\left(\cos\left(\frac{n+1}{2}x\right)\sin\left(\frac{n}{2}x\right) + \sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\cos\left(\frac{n}{2}x\right)\right) \\ &-\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}\left(\cos\left(\frac{n}{2}x\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{n}{2}x\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

avec :

$$\cos\left(\frac{n+1}{2}x\right)\sin\left(\frac{n}{2}x\right) + \sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\cos\left(\frac{n}{2}x\right) = \sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)$$

et :

$$\cos\left(\frac{n}{2}x\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{n}{2}x\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)$$

ce qui donne :

$$T_n(x) = \frac{n+1}{2}\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} - \frac{1}{2}\frac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

5. On a :

$$F_n(x) = 1 + 2C_n(x) - \frac{2}{n+1}T_n(x)$$

avec :

$$2C_n(x) + 1 = \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

(question **3.**) et :

$$\frac{2}{n+1}T_n(x) = \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} - \frac{1}{n+1}\frac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)},$$

ce qui donne :

$$F_n(x) = \frac{1}{n+1}\frac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

6. Une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} I_k = \int_0^{\pi} x \cos(kx)\, dx &= \left[\frac{x}{k}\sin(kx)\right]_0^{\pi} - \frac{1}{k}\int_0^{\pi} \sin(kx)\, dx \\ &= \frac{1}{k^2}\left[\cos(kx)\right]_0^{\pi} = \frac{(-1)^k - 1}{k^2}. \end{aligned}$$

7. En écrivant que, pour $k \geq 2$, on a :

$$k - 1 \leq t \leq k \Rightarrow \frac{1}{k} \leq \frac{1}{t} \Rightarrow \frac{1}{k} = \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t},$$

on déduit que :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t} = \int_1^n \frac{dt}{t} = \ln(n)$$

et $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln(n) + 1$.

8. La fonction F_n est en fait définie et continue sur $\mathbb{R}$, donc G_n est bien définie. On a :

$$\begin{aligned} G_n &= \int_0^{\pi} x \left(1 + 2\sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{k}{n+1}\right)\cos(kx)\right) dx \\ &= \int_0^{\pi} x dx + 2\sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{k}{n+1}\right)\int_0^{\pi} x\cos(kx)\, dx \\ &= \frac{\pi^2}{2} + 2\sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{k}{n+1}\right)\left(\frac{(-1)^k - 1}{k^2}\right) \end{aligned}$$

soit :

$$G_n = \frac{\pi^2}{2} + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k - 1}{k^2} - \frac{2}{n+1}\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k - 1}{k}$$

avec :

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k - 1}{k}\right| \leq 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 2\left(\ln(n) + 1\right).$$

On a donc :

$$G_n = \frac{\pi^2}{2} + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k - 1}{k^2} + \alpha_n$$

avec :

$$|\alpha_n| = \frac{2}{n+1}\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k - 1}{k}\right| \leq 4\frac{\ln(n) + 1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

9. En remarquant que :

$$\frac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} \underset{x\to 0}{\backsim} \frac{\left(\frac{n+1}{2}x\right)^2}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} = (n+1)^2$$

on déduit que la fonction $h_n : x \mapsto \dfrac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$ se prolonge par continuité en 0. Cette fonction est de plus définie en π. On peut donc écrire que :

$$G_n = \frac{1}{n+1}\int_0^{\pi} x \frac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} dx.$$

Pour $0 \leq x \leq \pi$ on a $\sin\left(\dfrac{x}{2}\right) \geq \dfrac{x}{\pi}$, donc :

$$0 \leq G_n \leq \frac{\pi^2}{n+1} \int_0^{\pi} \frac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{x} dx = \frac{\pi^2}{n+1} \int_0^{\frac{n+1}{2}\pi} \frac{\sin^2(u)}{u} du$$

avec :

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{n+1}{2}\pi} \frac{\sin^2(u)}{u} du &= \int_0^1 \frac{\sin^2(u)}{u} du + \int_1^{\frac{n+1}{2}\pi} \frac{\sin^2(u)}{u} du \\ &\leq \int_0^1 du + \int_1^{\frac{n+1}{2}\pi} \frac{du}{u} = 1 + \ln\left(\frac{n+1}{2}\pi\right) \end{aligned}$$

(sur $[0,1]$, on a $0 \leq \dfrac{\sin(u)}{u} \leq 1$), ce qui donne :

$$0 \leq G_n \leq \frac{\pi^2}{n+1}\left(1 + \ln\left(\frac{n+1}{2}\pi\right)\right)$$

et $\lim\limits_{n \to +\infty} G_n = 0$.

10. De **8.** et $\lim\limits_{n \to +\infty} G_n = 0$, on déduit que :

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k - 1}{k^2} = -\frac{\pi^2}{4},$$

soit :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{4}. \tag{27.5}$$

En notant $S = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$, on a :

$$S = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^2} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} + \frac{S}{4}$$

soit $\sum\limits_{p=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(2p+1)^2} = \dfrac{3}{4} S$ et :

$$T = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^2} - \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{1}{4}S - \frac{3}{4}S = -\frac{1}{2}S.$$

L'égalité (27.5) donne alors $-\dfrac{1}{2}S - S = -\dfrac{\pi^2}{4}$, soit $S = \dfrac{\pi^2}{6}$ et $T = -\dfrac{\pi^2}{12}$.

– III – Utilisation des intégrales de Wallis

1. On a $I_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et $I_0 = \dfrac{\pi^3}{24}$.
2.

(a) Une intégration par parties donne :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}(t)\cos(t)\,dt = (2n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(t)\sin^2(t)\,dt$$
$$= (2n+1)(I_n - I_{n+1})$$

et :

$$I_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} I_n.$$

(b) On procède par récurrence sur $n \geq 0$.
Pour $n = 0$, c'est vrai.
Supposant le résultat acquis au rang $n \geq 0$, on a :

$$I_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2}\frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{(2n+2)!}{4^{n+1}((n+1)!)^2}\frac{\pi}{2}$$

On a donc, pour tout $n \geq 0$:

$$I_n = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{J_n}{K_n}\frac{\pi}{2}.$$

3.

(a) Une intégration par parties donne pour $n \geq 1$:

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(t)\,dt = \left[t\cos^{2n}(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2n\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin(t)\cos^{2n-1}(t)\,dt$$
$$= 2n\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin(t)\cos^{2n-1}(t)\,dt = 2nI'_n$$

puis une deuxième intégration par parties donne :

$$I'_n = \left[\frac{t^2}{2}\sin(t)\cos^{2n-1}(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$- \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t^2}{2}\left(\cos^{2n}(t) - (2n-1)\sin^2(t)\cos^{2n-2}(t)\right)dt$$
$$= (2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t^2}{2}\sin^2(t)\cos^{2n-2}(t)\,dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t^2}{2}\cos^{2n}(t)\,dt$$
$$= (2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t^2}{2}\left(1-\cos^2(t)\right)\cos^{2n-2}(t)\,dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t^2}{2}\cos^{2n}(t)\,dt$$
$$= (2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t^2}{2}\cos^{2n-2}(t)\,dt - n\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\cos^{2n}(t)\,dt$$

ce qui entraîne :

$$I_n = n(2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\cos^{2n-2}(t)\,dt - 2n^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\cos^{2n}(t)\,dt$$
$$= n(2n-1)J_{n-1} - 2n^2 J_n.$$

(b) On a :

$$\begin{aligned} K_{n-1} - K_n &= \frac{4^{n-1}\left((n-1)!\right)^2}{(2n)!}\left(2n\left(2n-1\right)J_{n-1} - 4n^2 J_n\right) \\ &= \frac{4^{n-1}\left((n-1)!\right)^2}{(2n)!} 2I_n \\ &= \frac{4^{n-1}\left((n-1)!\right)^2}{(2n)!} 2\frac{(2n)!}{4^n\left(n!\right)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4n^2} \end{aligned}$$

(c) Il en résulte que :

$$\frac{\pi}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{n}\left(K_{k-1} - K_k\right) = K_0 - K_n = J_0 - K_n.$$

4.

(a) La fonction sin étant convexe sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, son graphe est au dessus de la corde d'extrémités $(0,0)$ et $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$, ce qui se traduit par $\sin(x) \geq \frac{2}{\pi}x$.

(b) Pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a :

$$0 \leq t^2 \cos^{2n}(t) \leq \frac{\pi^2}{4}\sin^2(t)\cos^{2n}(t) \leq \frac{\pi^2}{4}\left(1 - \cos^2(t)\right)\cos^{2n}(t)$$

et en intégrant :

$$0 \leq J_n \leq \frac{\pi^2}{4}\left(I_n - I_{n+1}\right) = \frac{\pi^2}{4}\left(1 - \frac{2n+1}{2n+2}\right)I_n = \frac{\pi^2 I_n}{8\left(n+1\right)}.$$

Tenant compte de $I_n = \frac{J_n}{K_n}\frac{\pi}{2}$, cela s'écrit :

$$0 \leq J_n \leq \frac{\pi^2}{8\left(n+1\right)}\frac{J_n}{K_n}\frac{\pi}{2}$$

soit :

$$0 \leq K_n \leq \frac{\pi^3}{16\left(n+1\right)}.$$

(c) De ce dernier encadrement, on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} K_n = 0$ et avec **IV.3.c.** on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\pi}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = J_0 = \frac{\pi^3}{24}$$

et $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

28

Nombres de Bernoulli et fonction dzéta de Riemann

28.1 Énoncé

– I – Polynômes et nombre de Bernoulli

On dit qu'une suite de polynômes $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de polynômes de Bernoulli si elle vérifie les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} B_0 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ B'_{n+1} = B_n, \\ \forall n \geq 2,\ B_n(0) = B_n(1). \end{cases} \tag{28.1}$$

On vérifie facilement par récurrence que tous les B_n sont bien des fonctions polynomiales.

1. Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes de Bernoulli.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, B_n est un polynôme de degré n et calculer son coefficient dominant.
   (b) Montrer que :
   $$\forall n \geq 1,\ \int_0^1 B_n(t)\,dt = 0$$
   (c) Montrer que la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniquement déterminée.
   On dira que $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite des polynômes de Bernoulli.
2. Montrer que :
$$\begin{cases} B_1(X) = X - \dfrac{1}{2} \\ B_2(X) = \dfrac{1}{2}X^2 - \dfrac{1}{2}X + \dfrac{1}{12} \end{cases}$$
3. Calculer B_3 et B_4.
4. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ B_n(X) = (-1)^n B_n(1-X).$$
5. On définit la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des nombres de Bernoulli par :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = B_n(0).$$

(a) Calculer b_0, b_1, b_2, b_3 et b_4.

(b) Montrer que $b_n = 0$ pour tout entier $n \geq 3$ qui est impair.

– II – Application au calcul de $\zeta(2k)$

Pour tout entier naturel non nul k, on définit la fonction g_k de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} \forall x \in [0, 2\pi[\,,\ g_k(x) = B_{2k}\left(\dfrac{x}{2\pi}\right) \\ g_k \text{ est } 2\pi\text{-périodique} \end{cases}$$

On désigne par $(\alpha_n(k))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n(k))_{n\in\mathbb{N}^*}$ les suites réelles définies par :

$$\begin{cases} \alpha_0(k) = \displaystyle\int_0^1 B_{2k}(t)\,dt \\ \forall n \geq 1,\ \alpha_n(k) = 2\displaystyle\int_0^1 B_{2k}(t)\cos(2\pi nt)\,dt, \\ \forall n \geq 1,\ \beta_n(k) = 2\displaystyle\int_0^1 B_{2k}(t)\sin(2\pi nt)\,dt \end{cases}$$

1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction g_k est paire.
2. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction g_k est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que la fonction g_1 est classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ et que pour tout entier relatif p, cette fonction se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[2p\pi, 2(p+1)\pi]$ (elle est donc de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$).
4. Montrer que, pour tout entier $k \geq 2$, la fonction g_k est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
5. Montrer que :
$$\forall n \geq 1,\ \forall k \geq 1,\ \beta_n(k) = 0.$$
6. Montrer que, pour tout entier $k \geq 1$ et tout réel x, on a :
$$g_k(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n(k)\cos(nx). \tag{28.2}$$
7. Calculer $\alpha_0(k)$.
8. Montrer que :
$$\forall n \geq 1,\ \alpha_n(1) = \frac{2}{(2\pi n)^2}.$$
9. Montrer que :
$$\forall n \geq 1,\ \forall k \geq 2,\ \alpha_n(k) = -\frac{1}{(2\pi n)^2}\alpha_n(k-1).$$
10. En déduire la valeur de $\alpha_n(k)$ pour tout $n \geq 1$ et tout $k \geq 2$.
11. Déterminer, pour tout $k \geq 1$, une relation entre $\zeta(2k) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{2k}}$ et b_{2k}.
12. Calculer $\zeta(2) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ et $\zeta(4) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}$.

– III – Application au calcul de $\sum_{k=1}^{n} k^p$

Pour tout entier naturel p, on désigne par Δ l'application qui associe à tout polynôme P de $\mathbb{R}_{p+1}[X]$ le polynôme $Q = \Delta(P)$ défini par :

$$Q(X) = P(X+1) - P(X)$$

et par E_{p+1} le sous-ensemble de $\mathbb{R}_{p+1}[X]$ formé des polynômes P de degré au plus égal à $p+1$ qui vérifient $\int_0^1 P(x)\,dx = 0$.

1. Montrer que E_{p+1} est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_{p+1}[X]$ et préciser sa dimension.
2. Montrer que l'application Δ est linéaire de $\mathbb{R}_{p+1}[X]$ dans $\mathbb{R}_p[X]$ et déterminer son noyau.
3. Montrer que l'application Δ réalise un isomorphisme de E_{p+1} sur $\mathbb{R}_p[X]$.
4. Montrer que, pour tout entier naturel p, B_{p+1} est l'unique polynôme de E_{p+1} qui vérifie $\Delta(P) = \frac{X^p}{p!}$.
5. Montrer que pour tout entier $p \geq 1$ et tout entier $n \geq 1$, on a :
$$\sum_{k=1}^{n} k^p = p!\left(B_{p+1}(n+1) - b_{p+1}\right).$$
6. Calculer $\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} k^2$ et $\sum_{k=1}^{n} k^3$.

28.2 Solution

– I – Polynômes et nombre de Bernoulli

1.
   (a) On procède par récurrence sur $n \geq 0$.
   Pour $n = 0$, B_0 est bien un polynôme de degré 0 de coefficient dominant $\alpha_{0,0} = 1$.
   En supposant que, pour $n \geq 0$, B_n est un polynôme de degré n de coefficient dominant $\alpha_{n,n} \neq 0$, soit $B_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_{n,k} X^k$, on déduit de l'égalité $B'_{n+1} = B_n$, que :
$$B_{n+1}(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_{n,k}}{k+1} X^{k+1} + \alpha_{n+1,0} = \alpha_{n+1,0} + \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\alpha_{n,j-1}}{j} X^j \tag{28.3}$$
   c'est-à-dire que B_{n+1} est un polynôme de degré $n+1$ de coefficient dominant $\alpha_{n+1,n+1} = \frac{\alpha_{n,n}}{n+1} \neq 0$. Cette dernière relation de récurrence nous dit que $\alpha_{n,n} = \frac{1}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En effet, le résultat est vrai pour $n = 0$ et en le supposant acquis au rang $n \geq 0$, on a $\alpha_{n+1,n+1} = \frac{\alpha_{n,n}}{n+1} = \frac{1}{(n+1)\,n!} = \frac{1}{(n+1)!}$.

(b) Pour tout $n \geq 1$, on a :

$$\int_0^1 B_n(t)\,dt = \int_0^1 B'_{n+1}(t)\,dt = B_{n+1}(1) - B_{n+1}(0) = 0 \tag{28.4}$$

puisque $B_m(0) = B_m(1)$ pour $m \geq 2$.

(c) Cette dernière identité combinée avec (28.3) permet de montrer que la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniquement déterminée. En effet, on a $B_0 = 1$ et supposant B_n construit, la relation (28.3) nous dit que les coefficients $\alpha_{n+1,j} = \dfrac{\alpha_{n,j-1}}{j}$ sont uniquement déterminés pour tout j compris entre 1 et $n+1$. Enfin avec :

$$0 = \int_0^1 B_{n+1}(t)\,dt = \alpha_{n+1,0} + \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\alpha_{n,j-1}}{j(j+1)}$$

on déduit que :

$$\alpha_{n+1,0} = -\sum_{j=1}^{n+1} \frac{\alpha_{n,j-1}}{j(j+1)}.$$

On peut aussi remarque que $\varphi_{n+1}(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_{n,k}}{k+1} X^{k+1}$ est la primitive de B_n nulle en 0 et $B_{n+1} = \varphi_{n+1} + \alpha_{n+1,0}$ avec $\alpha_{n+1,0} = -\displaystyle\int_0^1 \varphi_{n+1}(t)\,dt$, ce qui détermine de manière unique la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et donne un algorithme de construction.

2. En utilisant les notations précédentes, on a :

$$\begin{cases} \varphi_1(X) = X, \\ \alpha_{1,0} = -\displaystyle\int_0^1 \varphi_1(t)\,dt = -\int_0^1 t\,dt = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

et :

$$B_1(X) = \varphi_1(X) + \alpha_{1,0} = X - \frac{1}{2}.$$

De même, on a :

$$\begin{cases} \varphi_2(X) = \dfrac{1}{2}X^2 - \dfrac{1}{2}X, \\ \alpha_{2,0} = -\displaystyle\int_0^1 \varphi_2(t)\,dt = -\int_0^1 \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t}{2}\right) dt = -\frac{1}{12} \end{cases}$$

et :

$$B_2(X) = \varphi_2(X) + \alpha_{2,0} = \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X + \frac{1}{12}.$$

3. On a :

$$\begin{cases} \varphi_3(X) = \dfrac{1}{6}X^3 - \dfrac{1}{4}X^2 + \dfrac{1}{12}X, \\ \alpha_{3,0} = -\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{4} + \frac{t}{12}\right) dt = 0 \end{cases}$$

et :

$$B_3(X) = \frac{1}{6}X^3 - \frac{1}{4}X^2 + \frac{1}{12}X.$$

De même :

$$\begin{cases} \varphi_4(X) = \dfrac{1}{24}X^4 - \dfrac{1}{12}X^3 + \dfrac{1}{24}X^2, \\ \alpha_{3,0} = -\displaystyle\int_0^1 \left(\dfrac{t^4}{24} - \dfrac{t^3}{12} + \dfrac{t^2}{24}\right) dt = -\dfrac{1}{720} \end{cases}$$

et :

$$B_4(X) = \frac{1}{24}X^4 - \frac{1}{12}X^3 + \frac{1}{24}X^2 - \frac{1}{720}.$$

4. Soit $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ C_n(X) = (-1)^n B_n(1-X).$$

Pour montrer que cette suite est la suite des polynômes de Bernoulli, il suffit de prouver qu'elle vérifie les conditions (28.1) compte tenu de l'unicité prouvée en **I.1c**.
Pour $n = 0$, on a $C_0(X) = B_0(1-X) = 1$.
Pour tout $n \geq 0$, on a :

$$C'_{n+1}(X) = (-1)^{n+1}\left(-B'_{n+1}(1-X)\right) = (-1)^n B_n(1-X) = C_n(X)$$

et pour $n \geq 2$:

$$C_n(0) = (-1)^n B_n(1) = (-1)^n B_n(0) = C_n(1).$$

Ce qui donne le résultat attendu.

5.

(a) Les calculs des questions **I.2.** et **I.3.** nous donne :

$$b_0 = 1,\ b_1 = -\frac{1}{2},\ b_2 = \frac{1}{12},\ b_3 = 0,\ b_4 = -\frac{1}{720}.$$

(b) De $B_n(X) = (-1)^n B_n(1-X)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = B_n(0) = (-1)^n B_n(1)$$

et de $B_n(0) = B_n(1)$ pour $n \geq 2$, que :

$$\forall n \geq 2,\ b_n = (-1)^n b_n.$$

Il en résulte que $b_n = -b_n$ pour $n \geq 3$ qui est impair et $b_n = 0$ dans ce cas.

– II – Application au calcul de $\zeta(2k)$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{Z}$ tel que $x \in [2p\pi, 2(p+1)\pi[$.
Si $x = 2p\pi$, comme g_k est 2π-périodique, on a $g_k(-x) = g_k(x) = g_k(0) = b_{2k}$.
Si $x \in]2p\pi, 2(p+1)\pi[$, il s'écrit $x = 2p\pi + h$ avec $h \in]0, 2\pi[$ et

$$g_k(x) = g_k(2p\pi + h) = g_k(h) = B_{2k}\left(\frac{h}{2\pi}\right)$$

et en écrivant que $-x = -2p\pi - h = -2(p+1)\pi + 2\pi - h$ avec $2\pi - h \in]0, 2\pi[$, on a :

$$\begin{aligned} g_k(-x) &= g_k(2\pi - h) = B_{2k}\left(\frac{2\pi - h}{2\pi}\right) \\ &= B_{2k}\left(1 - \frac{h}{2\pi}\right) = B_{2k}\left(\frac{h}{2\pi}\right) = g_k(x) \end{aligned}$$

en utilisant le résultat de la question **I.4**.

2. Pour tout $k \geq 1$, la fonction B_{2k} qui est polynomiale est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. De la définition de g_k, il résulte alors que cette fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.
Pour tout entier relatif p, on a :

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 2p\pi^+} g_k(x) = \lim_{h \to 0^+} g_k(2p\pi + h) = \lim_{h \to 0^+} g_k(h) = \lim_{h \to 0^+} B_{2k}\left(\frac{h}{2\pi}\right) \\ = B_{2k}(0) = g_k(0) = g_k(2p\pi)\end{aligned}$$

et en considérant que $2k \geq 2$, on a :

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 2p\pi^-} g_k(x) = \lim_{h \to 2\pi^-} g_k(2(p-1)\pi + h) = \lim_{h \to 2\pi^-} g_k(h) = \lim_{h \to 2\pi^-} B_{2k}\left(\frac{h}{2\pi}\right) \\ = B_{2k}(1) = B_{2k}(0) = g_k(0) = g_k(2p\pi).\end{aligned}$$

On a donc ainsi montré que g_k est continue en tout point de $2\pi\mathbb{Z}$.
En définitive, g_k est continue sur $\mathbb{R}$.

3. On a déjà vu que la fonction g_1 est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.
On rappelle que si f est une fonction à valeurs réelles continue sur un intervalle réel I, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \setminus \{a\}$, où a est un point de I et telle que $\lim\limits_{x \to a} f'(x) = \ell$, elle se prolonge alors en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I avec $f'(a) = \ell$ (c'est une conséquence immédiate du théorème des accroissements finis).
On se donne dans un premier temps un entier $k \geq 1$.
Pour $p \in \mathbb{Z}$, tout réel $x \in]2p\pi, 2(p+1)\pi[$ s'écrit $x = 2p\pi + h$ avec $h \in]0, 2\pi[$ et de :

$$g_k(x) = g_k(h) = B_{2k}\left(\frac{h}{2\pi}\right) = B_{2k}\left(\frac{x - 2p\pi}{2\pi}\right)$$

on déduit que :

$$g_k'(x) = \frac{1}{2\pi} B_{2k}'\left(\frac{x - 2p\pi}{2\pi}\right) = \frac{1}{2\pi} B_{2k-1}\left(\frac{x - 2p\pi}{2\pi}\right)$$

et :

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 2p\pi^+} g_k'(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{x \to 2p\pi^+} B_{2k-1}\left(\frac{x - 2p\pi}{2\pi}\right) = \frac{1}{2\pi} B_{2k-1}(0) \\ \lim_{x \to 2(p+1)\pi^-} g_k'(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{x \to 2(p+1)\pi^-} B_{2k-1}\left(\frac{x - 2p\pi}{2\pi}\right) = \frac{1}{2\pi} B_{2k-1}(1)\end{aligned}$$

Pour $k = 1$, on a $B_{2k-1}(0) = B_1(0) = -\frac{1}{2}$ et $B_{2k-1}(1) = B_1(1) = \frac{1}{2}$, ce qui donne :

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 2p\pi^+} g_1'(x) = -\frac{1}{4\pi} \\ \lim_{x \to 2(p+1)\pi^-} g_1'(x) = \frac{1}{4\pi}\end{aligned}$$

La fonction g_1 est donc dérivable à droite en $2p\pi$, à gauche en $2(p+1)\pi$ et sa fonction dérivée est continue sur $[2p\pi, 2(p+1)\pi]$.

4. Pour $k \geq 2$, on $2k - 1 \geq 3$, donc $B_{2k-1}(1) = B_{2k-1}(0) = b_{2k-1} = 0$ (question **I.5.b.**) et les calculs précédents nous disent que $\lim\limits_{x \to 2p\pi} g_k'(x) = 0$, donc g_k est dérivable en $2p\pi$ de dérivée $g_k'(2p\pi) = 0$ et g_k' est continue en $2p\pi$.
En définitive, g_k est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

5. Le changement de variable $t = \dfrac{x}{2\pi}$ nous donne pour tout $k \geq 1$:

$$\begin{cases} \alpha_0(k) = \displaystyle\int_0^1 B_{2k}(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g_k(x)\,dx \\ \forall n \geq 1,\ \alpha_n(k) = \displaystyle\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g_k(x)\cos(nx)\,dx, \\ \forall n \geq 1,\ \beta_n(k) = \displaystyle\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g_k(x)\sin(nx)\,dx \end{cases}$$

c'est-à-dire que les réels $\alpha_n(k)$ pour $n \geq 0$ et $\beta_n(k)$ pour $n \geq 1$ sont les coefficients de Fourier de la fonction g_k. Comme cette fonction est paire, on a nécessairement $\beta_n(k) = 0$ pour tout $n \geq 1$.

6. Pour $k \geq 1$ la fonction g_k étant continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ (et même de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ pour $k \geq 2$), le théorème de Dirichlet nous dit que sa série de Fourier converge normalement vers g_k sur $\mathbb{R}$, ce qui donne le résultat annoncé.

7. On a pour $k \geq 1$:

$$\alpha_0(k) = \int_0^1 B_{2k}(t)\,dt = \int_0^1 B'_{2k+1}(t)\,dt = B_{2k+1}(1) - B_{2k+1}(0) = 0.$$

8. Pour $k \geq 1$ et $n \geq 1$, une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_n(k)}{2} &= \int_0^1 B_{2k}(t)\cos(2\pi nt)\,dt \\ &= \left[B_{2k}(t)\frac{\sin(2\pi nt)}{2\pi n}\right]_0^1 - \int_0^1 B'_{2k}(t)\frac{\sin(2\pi nt)}{2\pi n}dt \\ &= -\frac{1}{2\pi n}\int_0^1 B_{2k-1}(t)\sin(2\pi nt)\,dt \end{aligned}$$

et une deuxième intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_n(k)}{2} &= -\frac{1}{2\pi n}\left(\left[-B_{2k-1}(t)\frac{\cos(2\pi nt)}{2\pi n}\right]_0^1 + \int_0^1 B'_{2k-1}(t)\frac{\cos(2\pi nt)}{2\pi n}dt\right) \\ &= \frac{1}{(2\pi n)^2}\left(B_{2k-1}(1) - B_{2k-1}(0) - \int_0^1 B_{2(k-1)}(t)\cos(2\pi nt)\,dt\right) \end{aligned}$$

Pour $k = 1$, cela donne :

$$\frac{\alpha_n(1)}{2} = \frac{1}{(2\pi n)^2}\left(B_1(1) - B_1(0) - \int_0^1 \cos(2\pi nt)\,dt\right) = \frac{1}{(2\pi n)^2}$$

soit $\alpha_n(1) = \dfrac{2}{(2\pi n)^2}$.

9. Pour $k \geq 2$, on a $B_{2k-1}(1) = B_{2k-1}(0)$ et le calcul précédent donne :

$$\alpha_n(k) = -\frac{1}{(2\pi n)^2}\alpha_n(k-1).$$

10. Par récurrence sur $k \geq 1$, on déduit que :

$$\alpha_n(k) = (-1)^{k+1} \frac{2}{(2\pi n)^{2k}}.$$

Pour $k = 1$, c'est vérifié et en supposant le résultat acquis au rang $k - 1 \geq 1$, on a :

$$\alpha_n(k) = -\frac{1}{(2\pi n)^2} (-1)^k \frac{2}{(2\pi n)^{2(k-1)}} = (-1)^{k+1} \frac{2}{(2\pi n)^{2k}}.$$

11. L'identité (28.2) pour $x = 0$ nous donne :

$$b_{2k} = B_{2k}(0) = g_k(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n(k) = \frac{2(-1)^{k+1}}{(2\pi)^{2k}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^{2k}}$$

soit :

$$\zeta(2k) = (-1)^{k+1} \frac{b_{2k}(2\pi)^{2k}}{2}.$$

12. Pour $k = 1$ et $k = 2$, on a $b_2 = \dfrac{1}{12}$, $b_4 = -\dfrac{1}{720}$ et :

$$\zeta(2) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{12}\frac{4\pi^2}{2} = \frac{\pi^2}{6},$$
$$\zeta(4) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{1}{720}\frac{16\pi^4}{2} = \frac{\pi^4}{90}.$$

– III – Application au calcul de $\sum_{k=1}^{n} k^p$

1. L'application $\varphi : P \mapsto \displaystyle\int_0^1 P(x)\,dx$ est une forme linéaire non nul sur $\mathbb{R}_{p+1}[X]$ et son noyau, qui n'est autre que E_{p+1}, est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_{p+1}[X]$ de dimension $(p+2) - 1 = p + 1$.
2. On a $\Delta(1) = 0$ et pour tout entier $k \geq 1$:

$$\Delta(X^k) = (X+1)^k - X^k = \sum_{j=0}^{k} C_k^j X^j - X^k = \sum_{j=0}^{k-1} C_k^j X^j$$

est un polynôme de degré $k - 1$. Il en résulte que Δ est une application de $\mathbb{R}_{p+1}[X]$ dans $\mathbb{R}_p[X]$. On vérifie facilement que Δ est linéaire, elle réalise donc un morphisme d'espaces vectoriels de E_{p+1} dans $\mathbb{R}_p[X]$. Dire que $P \in \mathbb{R}_{p+1}[X]$ est dans le noyau de Δ signifie que $P(X+1) = P(X)$. On a alors $P(1) = P(0)$ et par récurrence $P(n) = P(0)$ pour tout entier $n \geq 0$, ce qui entraîne que le polynôme $P(X) - P(0)$ a une infinité de racines et c'est nécessairement le polynôme nul. Le noyau de $\Delta : \mathbb{R}_{p+1}[X] \to \mathbb{R}_p[X]$ est donc formé des polynômes constants, soit $\ker(\Delta) = \mathbb{R}$, en identifiant l'ensemble des polynômes constants à $\mathbb{R}$.

3. Le noyau de la restriction de Δ à E_{p+1} est $E_{p+1} \cap \ker(\Delta) = \{0\}$ puisque $P = \lambda \in E_{p+1} \cap \ker(\Delta)$ entraîne $\lambda = \int_0^1 P(x)\,dx = 0$. L'application Δ est donc injective de E_{p+1} dans $\mathbb{R}_p[X]$ et c'est un isomorphisme puisque ces deux espaces sont de même dimension égale à $p+1$.
4. Comme Δ est bijective de E_{p+1} sur $\mathbb{R}_p[X]$, il existe un unique $P \in E_{p+1}$ tel que $\Delta(P) = \frac{X^p}{p!}$. Il suffit donc de montrer que B_{p+1} convient (on a déjà vu dans la première partie que B_{p+1} est de degré $p+1$ et que $\int_0^1 B_{p+1}(x)\,dx = 0$). Pour ce faire, on procède par récurrence sur $p \geq 0$.
   Pour $p = 0$, on a $B_1(X) = X - \frac{1}{2}$ et :
   $$\Delta(B_1) = B_1(X+1) - B_1(X) = 1 = \frac{X^0}{0!}.$$
   En supposant le résultat acquis au rang $p \geq 0$, on peut écrire, pour tout réel x, que :
   $$\begin{aligned}\Delta(B_{p+2})(x) &= \int_x^{x+1} B'_{p+2}(t)\,dt = \int_x^{x+1} B_{p+1}(t)\,dt \\ &= \int_0^{x+1} B_{p+1}(t)\,dt - \int_0^x B_{p+1}(t)\,dt\end{aligned}$$
   avec :
   $$\begin{aligned}\int_0^{x+1} B_{p+1}(t)\,dt &= \int_0^1 B_{p+1}(t)\,dt + \int_1^{x+1} B_{p+1}(t)\,dt \\ &= \int_1^{x+1} B_{p+1}(t)\,dt = \int_0^x B_{p+1}(u+1)\,du\end{aligned}$$
   ce qui donne, en utilisant l'hypothèse de récurrence :
   $$\Delta(B_{p+2})(x) = \int_0^x (B_{p+1}(t+1) - B_{p+1}(t))\,dt = \int_0^x \frac{t^p}{p!}dt = \frac{x^{p+1}}{(p+1)!}.$$
   On a donc bien $\Delta(B_{p+2}) = \frac{X^{p+1}}{(p+1)!}$.
5. On a donc pour tout entier $p \geq 1$ et tout réel x :
   $$B_{p+1}(x+1) - B_{p+1}(x) = \frac{x^p}{p!}.$$
   En prenant pour x les valeurs entières successives $k = 0, 1, \cdots, n-1, n$, où n est un entier naturel non nul, on a :
   $$B_{p+1}(k+1) - B_{p+1}(k) = \frac{k^p}{p!} \ \ (0 \leq k \leq n)$$
   et en sommant toutes ces égalités, il vient :
   $$B_{p+1}(n+1) - B_{p+1}(0) = \sum_{k=1}^{n} (B_{p+1}(k+1) - B_{p+1}(k)) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^p}{p!}$$
   ou encore :
   $$\sum_{k=1}^{n} k^p = p!\,(B_{p+1}(n+1) - b_{p+1}).$$

6. Pour $p = 1, 2, 3$, on a :

$$\left\{\begin{array}{l} B_2(n+1) - b_2 = \dfrac{(n+1)^2}{2} - \dfrac{n+1}{2} = \dfrac{n(n+1)}{2} \\ B_3(n+1) - b_3 = \dfrac{(n+1)^3}{6} - \dfrac{(n+1)^2}{4} + \dfrac{n+1}{12} = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{12} \\ B_4(n+1) - b_4 = \dfrac{(n+1)^4}{24} - \dfrac{(n+1)^3}{12} + \dfrac{(n+1)^2}{24} = \dfrac{n^2(n+1)^2}{24} \end{array}\right.$$

et :

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 \end{array}\right.$$

29

Une formule sommatoire d'Euler

29.1 Énoncé

L'évaluation asymptotique des sommes partielles de certaines séries numériques utilise souvent la comparaison à une intégrale impropre. La formule de sommation étudiée avec ce problème permet d'obtenir une expression exacte de l'erreur d'approximation.

Pour tout réel x, on désigne par $[x]$ la partie entière de x. On rappelle que c'est l'entier relatif défini par ;

$$[x] \leq x < [x] + 1.$$

1. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, à valeurs réelles et définie sur un intervalle réel $[p, q+1]$, où p, q sont deux entiers naturels tels que $p < q$.

   (a) Montrer que :

   $$\sum_{k=p+1}^{q} f(k) = qf(q+1) - pf(p) - \int_p^{q+1} [t] f'(t)\, dt. \tag{29.1}$$

   (b) Montrer que :

   $$\int_p^{q+1} f(t)\, dt = (q+1) f(q+1) - pf(p) - \int_p^{q+1} tf'(t)\, dt. \tag{29.2}$$

   (c) Montrer que :

   $$\sum_{k=p+1}^{q+1} f(k) = \int_p^{q+1} f(t)\, dt + \int_p^{q+1} (t - [t]) f'(t)\, dt. \tag{29.3}$$

2. Montrer que pour tout réel s strictement positif, l'intégrale :

   $$I(s) = \int_1^{+\infty} \frac{t - [t]}{t^{s+1}} dt$$

   est convergente et que pour tout entier naturel non nul n, on a :

   $$\int_n^{+\infty} \frac{t - [t]}{t^{s+1}} dt \leq \frac{s}{n^s}.$$

3. Montrer que :
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln(n)+\gamma+O\left(\frac{1}{n}\right),$$
où γ est la constante d'Euler définie par :
$$\gamma=1-\int_{1}^{+\infty}\frac{t-[t]}{t^2}dt=\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n)\right)$$
(on a $\gamma=0.577\,215\,664\ 9...$).
4. Montrer que pour tout réel s strictement positif et différent de 1, on a :
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^s}=\frac{1}{1-s}\frac{1}{n^{s-1}}+\gamma(s)+O\left(\frac{1}{n^s}\right),$$
où $\gamma(s)$ est la constante définie par :
$$\gamma(s)=\frac{s}{s-1}-s\int_{1}^{+\infty}\frac{t-[t]}{t^{s+1}}dt=\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^s}-\frac{1}{1-s}\frac{1}{n^{s-1}}\right).$$

29.2 Solution

1.

(a) On a :
$$\int_{p}^{q+1}[t]\,f'(t)\,dt=\sum_{k=p}^{q}\int_{k}^{k+1}kf'(t)\,dt=\sum_{k=p}^{q}k\left(f(k+1)-f(k)\right)$$
$$=qf(q+1)-pf(p)-\sum_{k=p+1}^{q}f(k).$$

(b) Une intégration par parties donne :
$$\int_{p}^{q+1}f(t)\,dt=[tf(t)]_{p}^{q+1}-\int_{p}^{q+1}tf'(t)\,dt$$
$$=(q+1)\,f(q+1)-pf(p)-\int_{p}^{q+1}tf'(t)\,dt$$

(c) En faisant $(29.1)-(29.2)$, on obtient :
$$\sum_{k=p+1}^{q}f(k)=\int_{p}^{q+1}f(t)\,dt+\int_{p}^{q+1}(t-[t])\,f'(t)\,dt-f(q+1),$$
soit :
$$\sum_{k=p+1}^{q+1}f(k)=\int_{p}^{q+1}f(t)\,dt+\int_{p}^{q+1}(t-[t])\,f'(t)\,dt.$$

2. Pour tout réel $t > 1$, on a $0 \leq \dfrac{t - [t]}{t^{s+1}} \leq \dfrac{1}{t^{s+1}}$ et la convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{s+1}} dt$ pour $s > 0$ entraîne celle de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t - [t]}{t^{s+1}} dt$. De plus, pour tout $n \geq 1$, on a :

$$0 \leq \int_n^{+\infty} \frac{t - [t]}{t^{s+1}} dt \leq \int_n^{+\infty} \frac{1}{t^{s+1}} dt = \frac{1}{s} \frac{1}{n^s}.$$

3. On désigne par f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+,*}$ par $f(t) = \dfrac{1}{t}$. La formule (29.3) appliquée à cette fonction f sur l'intervalle $[1, n]$ ($p = 1$, $q = n - 1$) donne :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = \int_1^n \frac{dt}{t} - \int_1^n \frac{t - [t]}{t^2} dt$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + 1 - \int_1^{+\infty} \frac{t - [t]}{t^2} dt + \int_n^{+\infty} \frac{t - [t]}{t^2} dt.$$

En notant $\gamma = 1 - \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t - [t]}{t^2} dt$ cela s'écrit :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \int_n^{+\infty} \frac{t - [t]}{t^2} dt$$

et avec $\displaystyle\int_n^{+\infty} \frac{t - [t]}{t^2} dt \leq \frac{1}{n}$, on a bien :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

et $\gamma = \displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \right)$.

4. On désigne, pour $s > 0$ et $s \neq 1$, par f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+,*}$ par $f(t) = \dfrac{1}{t^s}$. La formule (29.3) appliquée à cette fonction f sur l'intervalle $[1, n]$ ($p = 1$, $q = n - 1$) donne :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^s} = \int_1^n \frac{dt}{t^s} - s \int_1^n \frac{t - [t]}{t^{s+1}} dt$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s} = \frac{1}{1 - s} \left(\frac{1}{n^{s-1}} - 1 \right) + 1 - s \int_1^{+\infty} \frac{t - [t]}{t^{s+1}} dt + s \int_n^{+\infty} \frac{t - [t]}{t^{s+1}} dt.$$

En notant :

$$\gamma(s) = 1 - \frac{1}{1 - s} - s \int_1^{+\infty} \frac{t - [t]}{t^{s+1}} dt = \frac{s}{s - 1} - s \int_1^{+\infty} \frac{t - [t]}{t^{s+1}} dt,$$

cela s'écrit :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s} = \frac{1}{1-s}\frac{1}{n^{s-1}} + \gamma(s) + s\int_n^{+\infty} \frac{t-[t]}{t^{s+1}}dt$$

et avec $s\displaystyle\int_n^{+\infty} \frac{t-[t]}{t^{s+1}}dt \leq \frac{1}{n^s}$, on a bien :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s} = \frac{1}{1-s}\frac{1}{n^{s-1}} + \gamma(s) + O\left(\frac{1}{n^s}\right)$$

et $\gamma(s) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s} - \frac{1}{1-s}\frac{1}{n^{s-1}}\right)$.
Pour $s > 1$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{s-1}} = 0$ et :

$$\gamma(s) = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s),$$

où ζ désigne la fonction dzéta de Riemann. On a donc, pour $s > 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s} = \frac{1}{1-s}\frac{1}{n^{s-1}} + \zeta(s) + O\left(\frac{1}{n^s}\right).$$

Par exemple, pour $s = 2$, on a $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$ et :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

30

Un problème sur les séries

30.1 Énoncé

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que pour toute série réelle convergente $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} f(u_n)$ est encore convergente.

On se propose de montrer qu'il existe alors un voisinage ouvert de 0 sur lequel f est linéaire.

1. Montrer que $f(0) = 0$.
2. Montrer que f est continue en 0.
3. On suppose, pour cette question seulement, que la fonction f est paire. Montrer qu'il existe un réel $\delta > 0$ tel que :

$$\forall x \in \left]-\delta, \delta\right[,\ f(x) = 0,$$

   c'est-à-dire que sur un voisinage ouvert de 0, la fonction f est identiquement nulle.
4. On revient maintenant au cas général. Montrer qu'il existe un réel $\delta_1 > 0$ tel que f soit impaire sur $\left]-\delta_1, \delta_1\right[$.
5. Montrer qu'il existe un réel $\delta > 0$ tel que :

$$\forall (x, y) \in \left]-\delta, \delta\right[^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y).$$

6. On se fixe un réel $\delta > 0$ comme dans la question précédente.
   (a) Montrer que si x est un réel et n un entier naturel tels que $2^n x$ soit dans $\left]-\delta, \delta\right[$, alors $f(2^n x) = 2^n f(x)$.
   (b) Montrer qu'on peut définir une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = 2^n f\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

   où, pour x donné dans $\mathbb{R}$, n est un entier naturel tel que $\frac{x}{2^n} \in \left]-\delta, \delta\right[$.
   (c) Montrer qu'il existe un réel α tel que $g(x) = \alpha x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   (d) En déduire que $f(x) = \alpha x$ pour tout $x \in \left]-\delta, \delta\right[$.
7. Ce résultat est-il encore vrai pour f transformant toute série absolument convergente en série convergente.

30.2 Solution

1. En considérant la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite constante égale à 0, on déduit que la série $\sum f(0)$ est convergente et nécessairement $f(0)=0$.
2. Dire que f n'est pas continue en 0 signifie, compte tenu de $f(0)=0$, qu'il existe un réel $\varepsilon>0$ tel que :
$$\forall \eta>0,\ \exists x\in\left]-\eta,\eta\right[\mid |f(x)|>\varepsilon.$$
Prenant pour η les valeurs successives $\eta=\dfrac{1}{n^2}$, on construit une suite réelle $(u_n)_{n\geq 1}$ telle que :
$$\forall n\geq 1,\ |u_n|\leq \frac{1}{n^2},\ |f(u_n)|>\varepsilon.$$
Mais dans ce cas on obtient alors une série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ absolument convergente telle que la série $\sum f(u_n)$ soit divergente (les inégalités $|f(u_n)|>\varepsilon$ nous disent que la suite $(f(u_n))_{n\geq 1}$ ne peut pas converger vers 0), ce qui est contraire à l'hypothèse de départ.
3. Supposons le contraire, soit compte tenu de la parité de f avec $f(0)=0$, que :
$$\forall \delta>0,\ \exists x\in\left]0,\delta\right[,\ f(x)\neq 0.$$
Prenant pour η les valeurs successives $\eta=\dfrac{1}{n}$, on construit une suite réelle $(x_n)_{n\geq 1}$ telle que :
$$\forall n\geq 1,\ 0<x_n<\frac{1}{n},\ f(x_n)\neq 0.$$
On associe à cette suite une suite d'entiers naturels non nuls $(p_n)_{n\geq 1}$ telle que :
$$\forall n\geq 1,\ p_n\,|f(x_n)|\geq 1$$
(c'est possible puisque $\mathbb{R}$ est archimédien).
On définit alors la suite $u=(u_n)_{n\geq 1}$ par :
$$u=(x_1,-x_1,\cdots,x_1,-x_1,x_2,-x_2,\cdots,x_2,-x_2,\cdots,x_k,-x_k,\cdots,x_k,-x_k,\cdots)$$
où, pour tout $k\geq 1$, le couple $(x_k,-x_k)$ est répété p_k fois.
En désignant par $(S_n)_{n\geq 1}$ la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$, on a alors :
$$S_n=\begin{cases} 0 \text{ si } n=2r\\ x_{q_r} \text{ si } r=2r+1\end{cases}$$
avec $\lim\limits_{r\to+\infty} q_r=+\infty$, ce qui entraîne, compte tenu de $0<x_{q_r}<\dfrac{1}{q_r}$ que $\lim\limits_{r\to+\infty} x_{q_r}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=0$, c'est-à-dire que la série $\sum u_n$ est convergente.
Mais, pour ce qui est de la série $\sum f(u_n)$, compte tenu de la parité de f, en désignant par $(T_n)_{n\geq 1}$ la suite des sommes partielles de cette série, on a :
$$\left|T_{2(p_1+\cdots+p_{k+1})}-T_{2(p_1+\cdots+p_k)}\right|=2p_{k+1}\,|f(x_{k+1})|\geq 2.$$
Mais la convergence de la série $\sum f(u_n)$ vers un réel T nous dit que la suite $\left(T_{\varphi(k)}\right)_{n\geq 1}=\left(T_{2(p_1+\cdots+p_k)}\right)_{k\geq 1}$ extraite de la suite $(T_n)_{n\geq 1}$ doit aussi converger vers T et la suite $\left(T_{\varphi(k+1)}-T_{\varphi(k)}\right)_{n\geq 1}$ doit alors converger vers 0, ce qui est incompatible avec les inégalités $\left|T_{\varphi(k+1)}-T_{\varphi(k)}\right|\geq 2$.
En définitive, f est identiquement nulle sur un voisinage ouvert de 0.

4. La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) + f(-x)$ est paire et vérifie las mêmes hypothèses que f, elle est donc identiquement nulle sur un voisinage ouvert $]-\delta_1, \delta_1[$ de 0 et sur ce voisinage, f est impaire.
5. Supposons le contraire. On construit alors deux suites réelles $(x_n)_{n\geq 1}$ et $(y_n)_{n\geq 1}$ à valeurs dans $]-\delta_1, \delta_1[$ et de limite nulle telles que :
$$\forall n \geq 1,\ \alpha_n = |f(x_n + y_n) - f(x_n) - f(y_n)| \neq 0.$$
On associe à ces suites une suite d'entiers naturels non nuls $(p_n)_{n\geq 1}$ telle que :
$$\forall n \geq 1,\ p_n \alpha_n \geq 1$$
et on définit la suite $u = (u_n)_{n\geq 1}$ par :
$$\begin{aligned} u = (x_1 + y_1, -x_1, -y_1, \cdots, x_1 + y_1, -x_1, -y_1,\\ x_2 + y_2, -x_2, -y_2, \cdots, x_2 + y_2, -x_2, -y_2,\\ \cdots, x_k + y_k, -x_k, -y_k, \cdots, x_k + y_k, -x_k, -y_k, \cdots) \end{aligned}$$
où, pour tout $k \geq 1$, le triplet $(x_k + y_k, -x_k, -y_k)$ est répété p_k fois.
En désignant par $(S_n)_{n\geq 1}$ la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$, on a alors :
$$S_n = \begin{cases} 0 \text{ si } n = 3r \\ x_{q_r} + y_{q_r} \text{ si } r = 3r + 1 \\ y_{q_r} \text{ si } r = 3r + 2 \end{cases}$$
avec $\lim\limits_{r\to+\infty} q_r = +\infty$, ce qui entraîne, compte tenu de $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 0$, c'est-à-dire que la série $\sum u_n$ est convergente.
Mais, pour ce qui est de la série $\sum f(u_n)$, compte tenu de l'imparité de f, en désignant par $(T_n)_{n\geq 1}$ la suite des sommes partielles de cette série, on a :
$$\left|T_{3(p_1+\cdots+p_{k+1})} - T_{3(p_1+\cdots+p_k)}\right| = 3p_{k+1}\alpha_{k+1} \geq 3.$$
Mais la convergence de la série $\sum f(u_n)$ vers un réel T nous dit que la suite $\left(T_{\varphi(k)}\right)_{n\geq 1} = \left(T_{3(p_1+\cdots+p_k)}\right)_{k\geq 1}$ extraite de la suite $(T_n)_{n\geq 1}$ doit aussi converger vers T et la suite $\left(T_{\varphi(k+1)} - T_{\varphi(k)}\right)_{n\geq 1}$ doit alors converger vers 0, ce qui est incompatible avec les inégalités $\left|T_{\varphi(k+1)} - T_{\varphi(k)}\right| \geq 3$.
En définitive, on a le résultat souhaité avec $\delta \in]0, \delta_1[$.
6.
   (a) On procède par récurrence sur $n \geq 0$ à x fixé.
   Pour $n = 0$ c'est clair.
   En supposant le résultat acquis au rang $n - 1 \geq 0$, si $2^n x \in]-\delta, \delta[$, alors $2^{n-1}x \in]-\delta, \delta[$ et :
   $$f(2^n x) = f\left(2^{n-1}x + 2^{n-1}x\right) = 2f\left(2^{n-1}x\right) = 2^n f(x).$$
   (b) Si $m > n$ sont deux entiers naturels tel que $\dfrac{x}{2^n}$ et $\dfrac{x}{2^m}$ soient dans $]-\delta, \delta[$, alors :
   $$2^n f\left(\frac{x}{2^n}\right) = 2^n f\left(2^{m-n}\frac{x}{2^m}\right) = 2^n 2^{m-n} f\left(\frac{x}{2^m}\right) = 2^m f\left(\frac{x}{2^m}\right).$$
   La fonction g est donc bien définie (i. e. la définition de $g(x)$ ne dépend pas du choix de l'entier n tel que $\dfrac{x}{2^n} \in]-\delta, \delta[$).

(c) La fonction g coïncide avec f sur $]-\delta, \delta[$, elle est donc continue en 0 avec $g(0) = 0$.
Pour x, y dans $\mathbb{R}$ et n dans $\mathbb{N}$ tel que $\frac{x}{2^n}$ et $\frac{y}{2^n}$ soient dans $\left]-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}\right[$, les trois réels $\frac{x}{2^n}$, $\frac{y}{2^n}$ et $\frac{x+y}{2^n}$ sont dans $]-\delta, \delta[$ et :

$$\begin{aligned} g(x+y) = 2^n f\left(\frac{x}{2^n} + \frac{y}{2^n}\right) = 2^n f\left(\frac{x}{2^n}\right) + 2^n f\left(\frac{y}{2^n}\right) = \\ = g(x) + g(y). \end{aligned}$$

La fonction g est donc une fonction continue en un point (en 0) et vérifiant l'équation fonctionnelle de Cauchy $g(x+y) = g(x) + g(y)$ sur $\mathbb{R}$, on sait alors que c'est nécessairement une fonction linéaire définie par $g(x) = \alpha x$.
Comme $f = g$ sur $]-\delta, \delta[$, on a bien le résultat souhaité.

7. La fonction f définie par $f(x) = x^2$ transforme toute série absolument convergente $\sum u_n$ en série convergente puisque $|u_n|^2 \leq |u_n|$ pour n assez grand. Le résultat n'est donc plus valable.

31

Limite supérieure et limite inférieure

31.1 Énoncé

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$v_n = \sup_{p\geq n} u_p,\ w_n = \inf_{p\geq n} u_p.$$

1. Justifier la définition des suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante minorée et la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante majorée. On en déduit que ces deux suites sont convergentes et on note

$$\left\{\begin{array}{l} \limsup\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n, \\ \liminf\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n, \end{array}\right.$$

   ces limites étant respectivement appelées la limite supérieure et la limite inférieure de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On les note aussi parfois $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}(u_n)$ et $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}}(u_n)$.

   On a donc :

$$\left\{\begin{array}{l} \ell_1 = \liminf\limits_{n\to+\infty} u_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\left(\inf\limits_{p\geq n} u_p\right), \\ \ell_2 = \limsup\limits_{n\to+\infty} u_n = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}}\left(\sup\limits_{p\geq n} u_p\right). \end{array}\right.$$

3. Montrer que ℓ_1 et ℓ_2 sont des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Montrer que pour toute valeur d'adhérence ℓ de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a

$$\ell_1 \leq \ell \leq \ell_2.$$

   C'est-à-dire que $\ell_2 = \limsup\limits_{n\to+\infty} u_n$ est plus grande valeur d'adhérence et $\ell_1 = \liminf\limits_{n\to+\infty} u_n$ la plus petite valeur d'adhérence de la suite bornée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si, et seulement si, $\liminf\limits_{n\to+\infty} u_n = \limsup\limits_{n\to+\infty} u_n$.
6. On suppose pour cette question que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à valeurs réelles positives. Montrer que si la suite $\left(\sqrt[n]{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée, alors la série $\sum u_n$ est divergente, sinon elle est convergente pour $\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} < 1$ et divergente pour $\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} > 1$ (théorème de Cauchy).

7. Déduire de la question précédente que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est :
$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$
avec $\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$ si la suite $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée.

31.2 Solution

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornée, il en est de même des ensembles $E_n = \{u_p \mid p \geq n\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et en conséquence E_n admet une borne supérieure v_n et une borne inférieure w_n et on a :
$$w_n = \inf(E_n) \leq v_n = \sup(E_n).$$
2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornée, en notant $m = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $M = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$, on a :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall p \geq n,\ m \leq u_p \leq M,$$
c'est-à-dire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, m est un minorant de E_n et M un majorant de E_n, ce qui entraîne :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ m \leq w_n = \inf(E_n) \leq v_n = \sup(E_n) \leq M$$
Les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc bornées.
En écrivant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que :
$$E_{n+1} \subset E_n = \{u_n\} \cup E_{n+1},$$
on déduit que :
$$\begin{cases} w_n = \inf(E_n) \leq w_{n+1} = \inf(E_{n+1}) \\ v_{n+1} = \sup(E_{n+1}) \leq v_n = \sup(E_n) \end{cases}$$
c'est-à-dire que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante. Comme ces suites sont bornées, elles sont alors convergentes.
3. De $\ell_1 = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} (w_n)$ avec $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante, on déduit que pour tout réel $\varepsilon > 0$ il existe un entier n_ε tel que :
$$\forall n \geq n_\varepsilon,\ \ell_1 - \varepsilon < w_n = \inf_{p\geq n} u_p \leq \ell_1$$
et par définition de la borne inférieure, pour tout $n \geq n_\varepsilon$, il existe un entier $p \geq n$ tel que :
$$w_n \leq u_p < w_n + \varepsilon \leq \ell_1 + \varepsilon.$$
On a donc montré que pour tout réel $\varepsilon > 0$ et tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un entier $p \geq n$ tel que :
$$\ell_1 - \varepsilon < u_p < \ell_1 + \varepsilon$$
(pour ε donné, on a soit $n \geq n_\varepsilon$ et on trouvé un tel entier $p \geq n$, soit $0 \leq n < n_\varepsilon$ et on prend alors p qui correspond à n_ε). On peut alors extraire de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite qui converge vers ℓ_1 en procédant comme suit : prenant $\varepsilon = 1$ et $n = 0$, on a $p = \varphi(0) \geq 0$ tel que $\ell_1 - 1 < u_{\varphi(0)} < \ell_1 + 1$, puis pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$ et $n = \varphi(0) + 1$ on a $p = \varphi(1) > \varphi(0)$ tel que $\ell_1 - \frac{1}{2} < u_{\varphi(1)} < \ell_1 + \frac{1}{2}$ et continuant ainsi de suite on construit une suite strictement

croissante d'entiers naturels $(\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\ell_1 - \frac{1}{n+1} < u_{\varphi(n)} < \ell_1 + \frac{1}{n+1}$ (les entiers $\varphi(0) < \cdots < \varphi(k)$ étant construit en prenant $\varepsilon = \frac{1}{k+2}$ et $n = \varphi(k)+1$ on obtient $\varphi(k+1)$). On a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} = \ell_1$.

On montre de manière analogue que ℓ_2 est valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4. Soit $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)}$ une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $(\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante d'entiers naturels (l'existence de valeurs d'adhérence d'une suite bornée est assurée par le théorème de Bolzano-Weierstrass). En passant à la limite dans l'encadrement :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_{\varphi(n)} \leq u_{\varphi(n)} \leq v_{\varphi(n)},$$
on obtient l'encadrement $\ell_1 \leq \ell \leq \ell_2$.
Dans le cas où la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée, soit elle n'est pas majorée et $+\infty$ est valeur d'adhérence, soit elle n'est pas minorée et $-\infty$ est valeur d'adhérence. Donc une suite réelle a toujours des valeurs d'adhérence dans $\overline{\mathbb{R}}$ et on peut définir sa limite supérieure [resp. inférieure] dans $\overline{\mathbb{R}}$ comme la plus grand [resp. petite] de ses valeurs d'adhérence.

5. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, sa limite ℓ est l'unique valeur d'adhérence et $\ell_1 = \ell_2$. Réciproquement, si $\ell_1 = \ell_2$, toute valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant comprise entre ℓ_1 et ℓ_2, il ne peut y en avoir qu'une et comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, elle est nécessairement convergente (théorème 3.20).

6. Si $\left(\sqrt[n]{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée, on aura alors $\sqrt[n]{u_n} > 1$ pour une infinité d'indices n, donc aussi $u_n > 1$ pour ces indices et la série $\sum u_n$ est divergente puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut converger vers 0.
Si elle est majorée, elle est alors bornée puisque positive et on peut définir sa limite supérieure ℓ (en fait dans le cas où la suite n'est pas majorée sa limite supérieure est $+\infty$).
Supposons $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sup\limits_{p\geq n}\sqrt[p]{u_p}\right) < 1$. On peut alors trouver un entier λ tel que $\ell < \lambda < 1$ et un entier n_0 tel que :
$$\forall n \geq n_0,\ \ell \leq \sup_{p\geq n}\sqrt[p]{u_p} \leq \lambda$$
ce qui entraîne que :
$$\forall n \geq n_0,\ 0 \leq \sqrt[n]{u_n} \leq \lambda$$
et revient à dire que :
$$\forall n \geq n_0,\ 0 \leq u_n \leq \lambda^n.$$
Le corollaire 6.10 nous dit alors que la série $\sum u_n$ est convergente comme la série géométrique $\sum \lambda^n$.
Supposons $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sup\limits_{p\geq n}\sqrt[p]{u_p}\right) > 1$. On peut alors trouver un entier λ tel que $1 < \lambda < \ell$ et un entier n_0 tel que :
$$\forall n \geq n_0,\ v_n = \sup_{p\geq n}\sqrt[p]{u_p} > \lambda.$$
Par définition de la borne supérieure, on peut trouver pour tout entier $n \geq n_0$ un entier $p_n \geq n$ tel que $1 < \lambda < \sqrt[p_n]{u_{p_n}} \leq v_n$ et on aura $u_{p_n} > 1$ pour cet entier $p_n \geq n$. Dans une telle situation la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut converger vers 0 et la série $\sum u_n$ est divergente.

7. Si la suite $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée, il en est de même de $\left(\sqrt[n]{|a_n z^n|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ et la série $\sum |a_n z^n|$ est divergente. On a donc $R = 0 = \dfrac{1}{+\infty} = \dfrac{1}{\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$ dans ce cas.
Si $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, il en est de même de $\left(\sqrt[n]{|a_n z^n|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ et la série $\sum |a_n z^n|$ est convergente pour $\limsup\limits_{n\to+\infty} |z| \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ et divergente pour $\limsup\limits_{n\to+\infty} |z| \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, ce qui revient à dire que $\sum |a_n z^n|$ est convergente pour $|z| < \dfrac{1}{\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$ et divergente pour $|z| > \dfrac{1}{\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$. On a donc bien $R = \dfrac{1}{\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$.

32

Calculs du nombre π

32.1 Énoncé

On se propose de montrer que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{4}{8n+1}-\frac{2}{8n+4}-\frac{1}{8n+5}-\frac{1}{8n+6}\right)\frac{1}{16^n}=\pi.$$

1. Justifier la convergence de cette série. On notera S sa somme.
2. Montrer que, pour tout entier naturel non nul q, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{8n+q}\frac{1}{16^n}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^q=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{t^{q-1}}{1-t^8}dt.$$

3. Montrer que :

$$S=4\sqrt{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{1+t^4}dt-8\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{t^3}{(1-t^2)(1+t^4)}dt.$$

4. Montrer que :

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{1+t^4}dt=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}\ln(5)+\arctan(2)\right).$$

5. Montrer que :

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{t^3}{(1-t^2)(1+t^4)}dt=\frac{1}{8}\ln(2)-\frac{1}{4}\arctan\left(\frac{1}{2}\right).$$

6. Conclure.

32.2 Solution

1. La terme général est majoré en valeur absolue par $\frac{8}{16^n}$, la série géométrique $\sum\left(\frac{1}{16}\right)^n$ étant convergente.
2. On a :

$$\frac{t^{q-1}}{1-t^8}=\sum_{n=0}^{+\infty}t^{8n+q-1}$$

la convergence étant uniforme sur $\left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, ce qui donne :

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{t^{q-1}}{1-t^8} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} t^{8n+q-1} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{8n+q} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{8n+q}$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{8n+q} \frac{1}{16^n} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{q}$$

3. Prenons pour valeurs successives de q, 1, 4, 5 et 6, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{8n+1} \frac{1}{16^n} \frac{1}{\sqrt{2}} = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{1-t^8} dt$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{8n+4} \frac{1}{16^n} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{8n+4} \frac{1}{16^n} = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{t^3}{1-t^8} dt$$
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{8n+5} \frac{1}{16^n} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^5 = \frac{1}{4\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{8n+5} \frac{1}{16^n} = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{t^4}{1-t^8} dt$$
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{8n+6} \frac{1}{16^n} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^6 = \frac{1}{8} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{8n+6} \frac{1}{16^n} = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{t^5}{1-t^8} dt$$

et la série qui nous intéresse vaut $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} f(t)\, dt$ où on a posé :

$$f(t) = \left(4\sqrt{2} - 8t^3 - 4\sqrt{2}t^4 - 8t^5\right) \frac{1}{1-t^8}$$
$$= \frac{4\sqrt{2}\left(1-t^4\right) - 8t^3\left(1+t^2\right)}{\left(1-t^2\right)\left(1+t^2\right)\left(1+t^4\right)}$$
$$= \frac{4\sqrt{2}}{1+t^4} - \frac{8t^3}{\left(1-t^2\right)\left(1+t^4\right)}$$

4. On a :

$$1 + t^4 = \left(1+t^2\right)^2 - 2t^2 = \left(1 - \sqrt{2}t + t^2\right)\left(1 + \sqrt{2}t + t^2\right)$$

et la décomposition en éléments simples :

$$\frac{1}{1+t^4} = \frac{at+b}{1-\sqrt{2}t+t^2} + \frac{ct+d}{1+\sqrt{2}t+t^2}.$$

Par parité et unicité de la décomposition, on a $c = -a$ et $d = b$. Prenant $t = 0$, on a $1 = 2b$, soit $b = \frac{1}{2}$, puis $t = i$, donne $\frac{1}{2} = -\frac{ai+b}{\sqrt{2}i} + \frac{-ai+b}{\sqrt{2}i} = -\sqrt{2}a$ et $a = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$. Ce qui donne :

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{1+t^4} dt = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{t+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}t+t^2} dt - \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{t-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}t+t^2} dt\right)$$

avec :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{t+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}t+t^2} dt &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{2t+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}t+t^2} dt + \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{1+\sqrt{2}t+t^2} dt \\
&= \frac{1}{2}\left[\ln\left(1+\sqrt{2}t+t^2\right)\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} + \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\left(t+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}} dt \\
&= \frac{1}{2}\left[\ln\left(1+\sqrt{2}t+t^2\right)\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} + \sqrt{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\left(\sqrt{2}t+1\right)^2+1} dt \\
&= \frac{1}{2}\left[\ln\left(1+\sqrt{2}t+t^2\right)\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} + \left[\arctan\left(\sqrt{2}t+1\right)\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{2}\right) + \arctan(2) - \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{t-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}t+t^2} dt &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{2t-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}t+t^2} dt - \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{1-\sqrt{2}t+t^2} dt \\
&= \frac{1}{2}\left[\ln\left(1-\sqrt{2}t+t^2\right)\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} - \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\left(t-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}} dt \\
&= \frac{1}{2}\left[\ln\left(1-\sqrt{2}t+t^2\right)\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} - \sqrt{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\left(\sqrt{2}t-1\right)^2+1} dt \\
&= \frac{1}{2}\left[\ln\left(1-\sqrt{2}t+t^2\right)\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} - \left[\arctan\left(\sqrt{2}t-1\right)\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

En définitive :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{1+t^4} dt &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{2}\right) + \arctan(2) - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{\pi}{4}\right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}\ln(5) + \arctan(2)\right)
\end{aligned}$$

5. Le changement de variable $x = t^2$ donne :

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{t^3}{(1-t^2)(1+t^4)} dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{(1-x)(1+x^2)} dx$$

et la décomposition en éléments simples :

$$g(x) = \frac{x}{(1-x)(1+x^2)} = \frac{a}{1-x} + \frac{cx+d}{1+x^2}$$

avec $a = \lim_{x \to 1} (1-x) g(x) = \frac{1}{2}$, $0 = \lim_{x \to +\infty} x g(x) = -a + c$, donc $c = a$ et $x = 0$ donne $d = -a$. On a donc :

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{t^3}{(1-t^2)(1+t^4)} dt &= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x} + \frac{x-1}{1+x^2} dx \\ &= \frac{1}{4} \left(\ln(2) + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{5}{4}\right) - \arctan\left(\frac{1}{2}\right) \right) \\ &= \frac{1}{8} \ln(5) - \frac{1}{4} \arctan\left(\frac{1}{2}\right).\end{aligned}$$

6. En conclusion :

$$\begin{aligned}S &= 4\sqrt{2} \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2} \ln(5) + \arctan(2) \right) \right) - 8 \left(\frac{1}{8} \ln(5) - \frac{1}{4} \arctan\left(\frac{1}{2}\right) \right) \\ &= 2 \left(\arctan(2) + \arctan\left(\frac{1}{2}\right) \right) = 2\frac{\pi}{2} = \pi\end{aligned}$$

en utilisant l'égalité $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$ pour $x > 0$.

7. Cette série converge très vite vers π, par exemple, $n = 20$ donne (avec Maple) :

$$\begin{cases} S \backsimeq 3.1415926535897932384626433832\,51 \\ \pi \backsimeq 3.1415926535897932384626433832\,80 \end{cases}$$

soit 28 décimales exactes.

Bibliographie

[1] G. Auliac, J. Y. Caby. *Analyse pour le Capes et l'Agrégation interne.* Ellipses (2002).

[2] B. Balaguer. *La leçon d'analyse au Capes de Mathématiques.* Ellipses (1999).

[3] R. P. Boas. *A primer of real functions.* Carus mathematical monograph 13. Wiley (1960).

[4] L. Bonavero, J. P. Demailly. *Fonctions holomorphes et surfaces de Riemann.* www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/manuscripts/variable_complexe.pdf.

[5] T. J. Bromwich. *An introduction to the theory of infinite series.* A. M. S. Chelsea Publishing. Third edition. (1991)

[6] H. Cartan. *Théorie élémentaire des fonctions analytiques.* Hermann (1961).

[7] B. Candelpergher. *Fonctions d'une variable complexe.* Armand Colin (1995).

[8] J. Chaillou, J. Henry. *Problèmes de topologie.* Masson (1975).

[9] A. Chambert-Loir, S. Fermigier. *Analyse 2.* Masson (1995).

[10] M. Crouzeix, A. Mignot. *Analyse numérique des équations différentielles.* Masson. (1984).

[11] D. Cruz-Uribe, SFO, C. J. Neugebauer. *An elementary proof of error estimates for trapezoidal rule.* Mathematics Magazine, Vol. 76, Numéro 4, Octobre 2003.

[12] J. F. Dantzer. *Mathématiques pour l'agrégation interne. Analyse et probabilités.* Vuibert. (2007).

[13] C. Dechamps, A. Warusfel. *Mathématiques tout en un. Série E. Ramis. Volumes 1 et 2.* Dunod. (1999).

[14] J. Dieudonne. *Calcul infinitésimal.* Hermann (1968).

[15] J. Dieudonne. *Eléments d'analyse, tome 1* . Gauthier Villars (1972).

[16] D. Duverney. *Théorie des nombres.* Dunod. (1998).

[17] P. Doukhan, J. C. Sifre. *Cours d'analyse. Analyse réelle et intégration.* Dunod. (2001).

[18] J. M. Ferrard, H. Lemberg. *Mathématiques concrètes, illustrées par la TI-92 et la TI-89.* Springer (1998).

[19] B. Gostiaux. *Cours de Mathématiques Spéciales. Volumes 1 à 4.* P. U. F. (1995).

[20] X. Gourdon. *Les Maths en tête. Analyse.* Ellipses (1994).

[21] S. Gonnord, N. Tosel. *Topologie et analyse fonctionnelle.* Ellipses (1996).

[22] F. Gramain. *Nombres premiers et polynômes irréductibles.* Revue des Mathématiques Spéciales (Octobre 2000).

[23] G. H. Hardy, E. M. Wright. *An introduction to the theory of numbers.* Oxford (1979).

[24] R. Jean. *Mesure et intégration.* Presses de l'Université du Québec (1975).

[25] W. J. Kaczor, M. T. Nowak. *Problems in mathematical analysis II.* American Mathematical Society (2001).

[26] P. P. Korovkin. *Linear operators and approximation theory.* Hindustan Publishing corp. (India). 1960.

[27] E. Landau. *Foundations of analysis.* Chelsea.

[28] E. Landau. *Differential and integral calculus.* Chelsea(1960).

[29] J. Lelong-Ferrand. *Les fondements de la géométrie.* Presses universitaires de France (1985).

[30] S. Lang. *Real analysis.* Addison-Wesley (1969).

[31] L. Lavrentiev, B Chabat. *Méthodes de la théorie des fonctions d'une variable complexe.* Mir (1972).

[32] E. Leichtnam, X Schauer. *Exercices corrigés de Mathématiques, volume 3.* Ellipses (1982).

[33] F. Liret, D. Martinais. *Cours de mathématiques. Analyse 1-ère et 2-ème année.* Dunod (1997).

[34] K. Madere. *Préparation à l'oral de l'agrégation. Développements d'analyse.* Ellipses (1997).

[35] I. P. Natanson. *Constructive function theory. Vol. 1 à 3* Ungar (1965).

[36] I. Niven — *Irrational numbers.* The Carus Mathematical Monographs (1956).

[37] A. Pommellet. *Agrégation de Mathématiques. Cours d'analyse.* Ellipses (1994).

[38] Ramis, Deschamps, Odoux. *Analyse 2, exercices avec solutions.* Masson. (1972).

[39] R. M. S.. *Revue des mathématiques de l'enseignement supérieur. Numéro 3.* Vuibert (2001/2002).

[40] M. Rogalski. *Carrefours entre analyse algèbre et géométrie.* Ellipses (2001).

[41] J. E. Rombaldi. *Problèmes corrigés d'analyse numérique.* Masson (1996).

[42] J. E. Rombaldi. *Analyse matricielle.* EDP Sciences (2000).

[43] J. E. Rombaldi. *Éléments d'analyse réelle.* EDP Sciences (2004).

[44] J. E. Rombaldi. *Interpolation et approximation.* Vuibert (2005).

[45] W. Rudin. *Principes d'analyse mathématique.* Ediscience (1995).

[46] W. Rudin. *Analyse fonctionnelle.* Ediscience (1995).

[47] W. Rudin. *Analyse réelle et complexe.* Masson (1975).

[48] P. Samuel. *Théorie algébrique des nombres.* Hermann (1971).

[49] E. M. Stein, R. Shakarchi. *Fourier analysis. An introduction.* Princeton University Press. (2003).

[50] A. Tissier. *Agrégation interne de Mathématiques. Mathématiques générales.* Bréal. (1991).