Exercices sur les Graphes

Youssou DIENG*

27 janvier 2022

Table des matières

Table des figures

Résumé

Feuille de TD n°2 : Exercices proposés dans le cadre du cours de graphe.

1 Représentations des graphes

Exercice 1. ***Question 1*** *Représenter le graphe correspondant à la matrice d'adjacence A suivante :*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Question 2 *Est-ce que les matrices suivantes sont les matrices d'incidence d'un graphe simple non orienté. Si c'est le cas, représenter ce graphe. Sinon, donner la raison.*

*Enseignant - Chercheur au département Informatique, Université Assane Seck de Ziguinchor (Sénégal)

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercice 2. *Dans chacun des exemples suivants, dites si la matrice utilisée peut être une matrice d'adja-cence, d'incidence ou ne pas représenter un graphe. Dans les deux premiers cas, dessinez ungraphe correspondant, dans le dernier cas, justifiez pourquoi.*

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Exercice 3. *Les figure suivantes représentent chacun un graphe différent, avec une représentation différente. Dans chaque cas, on demande de répondre aux questions suivantes (sans passer par une autre représentation).*

Fig A :

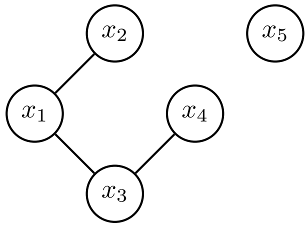


Fig B :
$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
$E = \{12, 34, 15\}$
Fig C :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

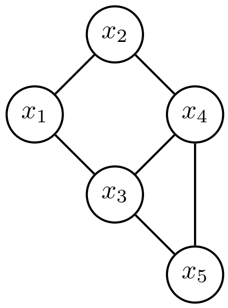
Fig D :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Fig E :
— *1 :[2,3,4]*
— *2 :[1,3,4]*
— *3 :[1,2,4]*
— *4 :[1,2,3]*
— *5 : []*

1. *Quelle représentation du graphe a-t-on ?*
2. *Quels sont les voisins du sommet 1 ?*
3. *Quel est le nombre de voisins du sommet 4 ?*
4. *Est-ce que 5 est un sommet isolé ?*
5. *Combien y-a-t-il d'arêtes dans le graphe ?*
6. *Est-ce que les sommets 3 et 4 sont adjacents ?*

Exercice 4. ***Question 1 :*** *Soit la représentation graphique du graphe ci-dessou.*



Donner :

1. *sa définition ensembliste*
2. *sa matrice adjacence*
3. *sa matrice d'incidence*
4. *sa liste d'adjacence*

Question 2 : *Soit la définition ensembliste du graphe ci-dessou.*
$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
$E = \{12, 45, 34, 14, 35\}$
Donner :

1. *sa représentation graphique*
2. *sa matrice adjacence*
3. *sa matrice d'incidence*
4. *sa liste d'adjacence*

Question 3 : *Soit la matrice adjacence ci-dessou.*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Donner :

1. *sa représentation graphique*
2. *sa définition ensembliste*
3. *sa matrice d'incidence*
4. *sa liste d'adjacence*

Question 4 : *Soit la Matrice d'incidence ci-dessou.*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Donner :

1. *sa représentation graphique*
2. *sa définition ensembliste*
3. *sa matrice adjacence*
4. *sa liste d'adjacence*

Question 5 : *Soit la Liste d'adjacence ci-dessou.*
— *1 :[2,3,5]*
— *2 :[1,4]*
— *3 :[1,5]*
— *4 :[2,5]*
— *5 : [1,3,4]*
Donner :

1. *sa représentation graphique*
2. *sa définition ensembliste*
3. *sa matrice adjacence*
4. *sa Matrice d'incidence*

2 Algorithmes élémentaire de graphe

2.1 Cas d'une représentation par Matrice d'adjacence

Exercice 5. *On considère la représentation machine d'un graphe G d'ordre n (simples, non orientés) vue en cours, à savoir matrice d'adjacence.*

Question 1 *Donner un algorithme permettant de déterminer si deux sommets donnés i, j sont voisins.*

Question 2 *Donner un algorithme permettant de déterminer le degré d'un sommets donnés i.*

Question 3 *Donner un algorithme permettant de déterminer la somme des degrés des sommets G.*

Question 4 *Donner un algorithme permettant d'afficher la liste des voisins d'un sommet i donné de G.*

Question 5 *Donner un algorithme permettant de déterminer si deux sommets donnés i, j ont au moins un voisin commun (autre que i et j si i et j sont voisins).*

Question 6 *Donner un algorithme permettant, pour deux sommets i, j donnés, de d'afficher la liste des sommets du voisinage commun de i et de j.*

Question 7 *Donner le temps de calcul de chacun de ces algorithmes.*

2.2 Cas d'une représentation par liste d'adjacence

2.2.1 Implémentation par un Tableau

Exercice 6. *Soit G un graphe d'ordre n et une implémentation par un* `Tableau`.

`Pour rappel :` *Dans une implémentation par un Tableau, les sommets de la liste d'adjacence sont rangés consécutivement dans un tableau. Un tableau*

`Succ` est rempli dans l'ordre avec les listes de successeurs des sommets 1, 2, ..., n (tableau des listes de successeurs). Pour délimiter les listes, un tableau `Head` à n éléments donne pour tout sommet l'indice dans `Succ` où commencent ses successeurs (tableau des têtes de liste). Les successeur d'un sommet y sont rangés dans `Succ` entre l'indice $Head[y]$ à $Head[y+1]-1$ inclus. Si un sommet y n'a pas de successeurs, on a $Head[y] = Head[y+1]$. Pour éviter les test pour le cas particulier $y = n$, on pose par convention $Head[n+1] = m+1$.

Question 1 *Donner un algorithme permettant de déterminer si deux sommets donnés i, j sont voisins.*

Question 2 *Donner un algorithme permettant de déterminer le degré d'un sommets donnés i.*

Question 3 *Donner un algorithme permettant de déterminer la somme des degrés des sommets G.*

Question 4 *Donner un algorithme permettant d'afficher la liste des voisins d'un sommet i donné de G.*

Question 5 *Donner un algorithme permettant de déterminer si deux sommets donnés i, j ont au moins un voisin commun (autre que i et j si i et j sont voisins).*

Question 6 *Donner un algorithme permettant, pour deux sommets i, j donnés, de d'afficher la liste des sommets du voisinage commun de i et de j.*

Question 7 *Donner le temps de calcul de chacun de ces algorithmes.*

2.2.2 Implémentation par des listes chainées

Exercice 7. *Soit G un graphe d'ordre n et une implémentation par des `Listes chainées`.*

`Pour rappel :` Dans une Implémentation par des Listes chainées : les sommets sont représentés par un tableau Adj de $\mid V \mid$ listes chainées, une liste pour chauque sommet de V. Pour chaque sommet $u \in V$, la liste $Adj[u]$ est une liste de sommet de V tel qu'il existe un arc $(u, v) \in E$. Ainsi, $Adj[u]$ est constitué de tous les sommets adjacents a u dans G. L'ordre du chainage des sommets de chaque liste est généralement arbitraire.

Question 1 *Donner un algorithme permettant de déterminer si deux sommets donnés i, j sont voisins.*

Question 2 *Donner un algorithme permettant de déterminer le degré d'un sommets donnés i.*

Question 3 *Donner un algorithme permettant de déterminer la somme des degrés des sommets G.*

Question 4 *Donner un algorithme permettant d'afficher la liste des voisins d'un sommet i donné de G.*

Question 5 *Donner un algorithme permettant de déterminer si deux sommets donnés i, j ont au moins un voisin commun (autre que i et j si i et j sont voisins).*

Question 6 *Donner un algorithme permettant, pour deux sommets i, j donnés, de d'afficher la liste des sommets du voisinage commun de i et de j.*

Question 7 *Donner le temps de calcul de chacun de ces algorithmes.*

Références

[1] Nadia Brauner, Université Grenoble Alpes Exercices de Graphe*,*

[2] Béla Bollabas, Graduate Texts in Mathematics ISBN 0 387 98491 7 *Springer, 1998,*

[3] Michel Gondran, Michel Minoux, Graphes et algorithmes ISSN 0 399 4198 *EYROLLES, 1985,*

[4] Philippe Lacomme, Christian Prins, Marc Sevaux, Algorithmes de Graphes ISBN 2 212 11385 4 *EYROLLES, 1994,*