Université Assane SECK de Ziguinchor

UE: Magnétisme et ondes dans le vide (PH2310)

Particule Chargée dans un Champ Electrique ou Magnétique

Dr. Ababacar NDIAYE

Enseignant-Chercheur
Département de Physique
UFR Sciences et Technologies

I. Force de Lorentz
Rappel de l'expression

Comme cela a été vu précédemment, une particule chargée de masse m, de charge q et animée d'une vitesse subit :

-dans un champ électrique une force: $\vec{f} = q\vec{E}$

-dans un champ magnétique une force: $\vec{f} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$

La force totale en présence d'un champ électrique et d'un champ magnétique est la somme des deux forces précédentes. On appelle force de Lorentz:

$$\vec{f} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right)$$

On note que $\vec{E}$, $\vec{B}$ et $\vec{V}$ dépendent du référentiel

II. Mouvement dans un champ électrique

II.1 Equation du mouvement

-Système: particule chargée de masse m, de vitesse initiale $\vec{v}_0$ de charge q.

-Référentiel: on choisit un référentiel galiléen par exemple le référentiel du Laboratoire.

-Bilan des forces:

$$\vec{f} = q\vec{E}$$

•Force d'origine électrique :

•Poids négligé.

-Choix de la méthode de résolution: principe fondamental de la dynamique.

$$m\vec{a} = q\vec{E}$$

En notant $\vec{a}$ l'accélération de la particule.

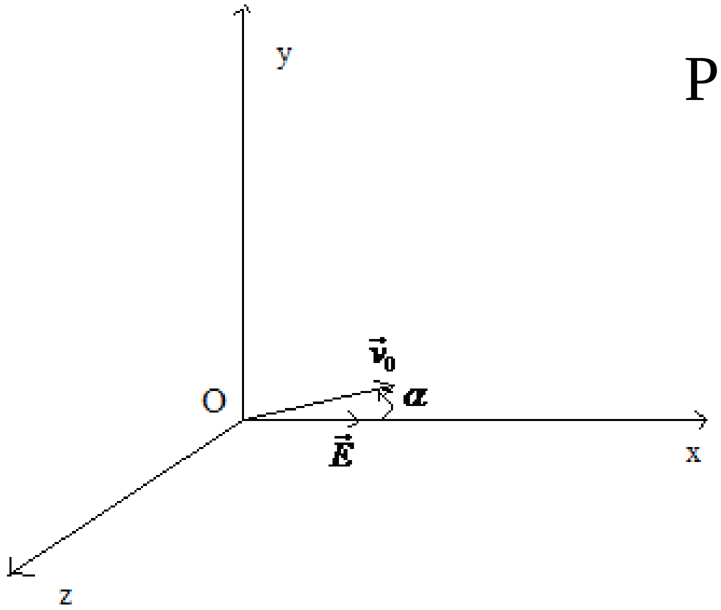
II.2 Etude de la trajectoire

Comme le champ $\vec{E}$ est indépendant du temps, on peut intégrer vectoriellement

$$\vec{v} = \frac{q\vec{E}}{m}t + \vec{v}_0$$

Et $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\frac{q}{m}\vec{E}t^2 + \vec{v}_0 t$

En prenant comme origine O la position initiale de la particule.



Par projection dans cette base, on obtient :

$$\begin{cases} x = \dfrac{qE}{2m}t^2 + v_0 t\cos\alpha \\ y = v_0 t\sin\alpha \\ z = 0 \end{cases}$$

La trajectoire s'obtient en éliminant le temps t dans les relations précédentes; le plus simple est d'obtenir t en fonction de y. on doit donc distinguer deux cas : le cas où $\alpha = 0$ et le cas où $\alpha \neq 0$, c'est-à-dire le cas où la vitesse initiale est parallèle au champ électrique et celui où elle ne lui est parallèle.

II.2.1 Trajectoire lorsque la vitesse initiale est parallèle au champ

Dans ce cas on a $\alpha = 0$ donc $\sin\alpha = 0$ et $\cos\alpha = 1$. La loi horaire du mouvement devient :

$$\begin{cases} x = \dfrac{qE}{2m}t^2 + v_0 t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

On a donc un mouvement rectiligne le long de l'axe Ox.

II.2.2 Trajectoire lorsque la vitesse initiale n'est pas parallèle au champ

On peut alors diviser par $v_0 \sin\alpha$ et obtenir $t = \dfrac{y}{v_0 \sin\alpha}$

En reportant dans l'équation horaire de x, on en déduit:

$$x = \frac{qE}{2mv_0^2 \sin^2\alpha} y + y \cot an\alpha$$

II.4 Déviation d'une particule chargée par un champ électrique

On se limite au cas où la vitesse initiale est perpendiculaire au champ électrique. Ce point ne limite en rien la généralité de l'étude: la vitesse initiale peut être décomposée en une composante parallèle au champ (qui donne lieu à une accélération) et une composante perpendiculaire qu'on va analyser ici.

D'autre part, on suppose que le champ électrique ne s'applique que dans une zone limitée de l'espace de taille L dans la direction perpendiculaire au champ ($0 < y < L$ en gardant les notations précédentes).

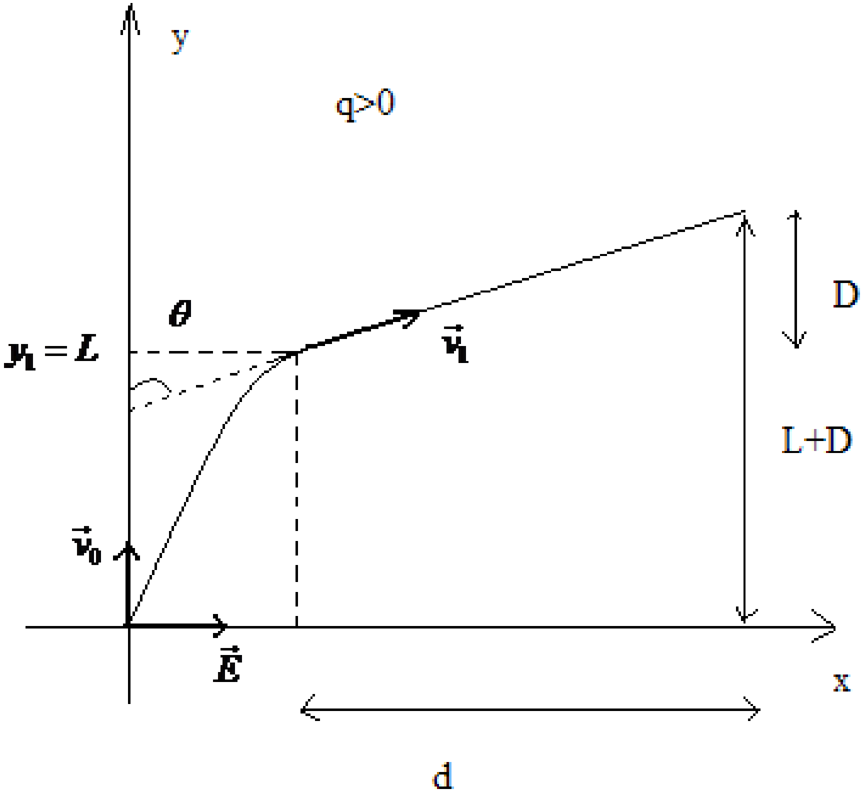
Dans ce cas, les équations horaires du mouvement sont les suivantes:

$$\begin{cases} x = \dfrac{qE}{2m} t^2 \\ y = v_0 t \end{cases}$$

La particule quitte la zone où règne le champ pour $y_1 = L$ soit à l'instant

$$t = \frac{L}{v_0}$$

Son abscisse est alors : $x_1 = \dfrac{qEL^2}{2mv_0^2}$



L'angle de déviation de la trajectoire est donné par :

$$\tan q = \tan(\vec{v}_0, \vec{v}_1) = \frac{\dot{x}_1}{\dot{y}_1}$$

$$or \;\; \dot{x} = \frac{qEt}{m} \;\; et \;\; \dot{y} = v_0$$

$$Donc \;\; \dot{x}_1 = \frac{qEL}{mv_0} \;\; et \;\; \tan q = \frac{qEL}{mv_0^2}$$

On peut également calculer la déviation d = x_1 + d sur un écran situé à une distance D des plaques de déviation car la tangente de l'angle de déviation peut aussi s'exprimer en fonction de D et de d.

$$\tan\theta = \frac{d}{D} \; d'où \; \delta = \frac{qEL}{mv_0^2}\left(\frac{L}{2} + D\right)$$

III. Mouvement d'une particule chargée dans un métal modèle de la loi d'Ohm locale

III.1 Mouvement d'une particule chargée dans un métal

Exemple: Mouvement d'un électron dans un câble électrique en cuivre.

-Application d'une ddp aux deux extrémités.

-Force de frottement proportionnelle à la vitesse(Présence des atomes et électrons).

Ce système est appelé ***modèle de Drude*** pour la conduction électrique dans les métaux.

PFD (principe fondamental de la dynamique):

-Système : particule chargée de masse m, de vitesse initiale v_0 , de charge q.

-Référentiel : référentiel galiléen par exemple celui du laboratoire.

-Bilan des forces :

•force d'origine électrique, $\vec{F} = q\vec{E}$

•poids négligé

•force de frottement: $\vec{f} = -\frac{m}{\tau}\vec{v}$ où τ correspond à l'âge moyen des porteurs, c'est-à-dire à la durée moyenne entre deux chocs.

PFD

On a : $m\vec{a} = q\vec{E} - \frac{m}{\tau}\vec{v}$ $\qquad \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{1}{\tau}\vec{v} = \frac{q}{m}\vec{E}$

L’équation sans second membre : $\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{1}{\tau}\vec{v} = \vec{0}$ admet comme solution:

$$\vec{v} = \vec{V}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

On cherche une solution particulière constante de l’équation totale (son second membre est constant). On obtient : $\vec{v} = \frac{q\tau}{m}\vec{E}$

La solution globale s’écrit : $\vec{v} = \vec{V}e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{q\tau}{m}\vec{E}$

$$\vec{v}_{\lim} = \frac{q\tau}{m}\vec{E}$$

III.2 Interprétation de la loi d'Ohm locale

L'interprétation microscopique en reliant la densité de courant $\vec{j}$ et le champ nous donne : $\vec{j} = nq\vec{v}$ où n est le nombre moyen de particules de charge q ayant une vitesse

D'après le modèle de Drude, en présence d'un champ électrique $\vec{E}$ (ou soumis à une différence de potentiel V telle que $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$), les porteurs de charges acquièrent, après un régime transitoire de durée τ, une vitesse :

$$\vec{v} = \frac{q\tau}{m}\vec{E}$$

On en déduit l'expression de la densité de courant: $\vec{j} = \frac{nq^2\tau}{m}\vec{E}$

On sait que d'après la loi d'Ohm locale:

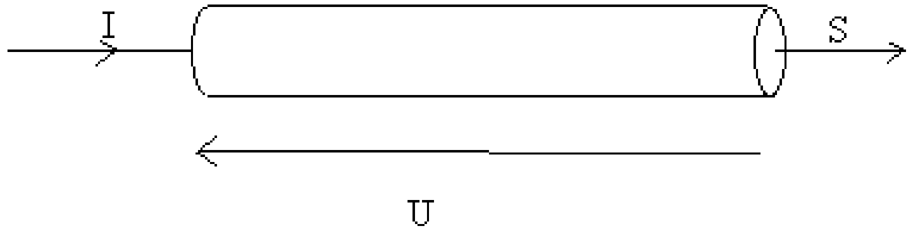
$$\vec{j} = \gamma\vec{E} \Longrightarrow \gamma = \frac{nq^2\tau}{m}$$

On notera que γ est indépendant du signe des charges: les effets de charges opposées s'ajoutent. C'est la base de la conductimétrie en chimie.

Ce modèle interdit une variation rapide du champ électrique.

III.3 Loi d'Ohm intégrale

Etablissons la loi U = RI à partir de $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ dans le cas d'un circuit filiforme.



$$I = \iint_{section} \vec{j}.d\vec{S}$$

$$I = \iint_{section} \gamma \vec{E}.d\vec{S} = \gamma \iint \vec{E}.d\vec{S}$$

La tension ou différence de potentiel se détermine en calculant la circulation du champ électrique le long du fil :

$$U \int_{fil} dV = \int_{fil} \overrightarrow{grad} V.d\overrightarrow{OM} = -\int_{fil} \vec{E}.d\overrightarrow{OM}$$

Donc : $\dfrac{U}{I} = \dfrac{-\int_{fil} \vec{E}.d\overrightarrow{OM}}{\gamma \iint_{section} \vec{E}.\overrightarrow{dS}}$

Si on augmente l'intensité du champ électrique d'un facteur λ , on aura :

$$\frac{U'}{I'} = \frac{-\lambda \int_{fil} \vec{E}.d\overrightarrow{OM}}{\lambda\gamma \iint_{section} \vec{E}.\overrightarrow{dS}} = \frac{-\int_{fil} \vec{E}.d\overrightarrow{OM}}{\gamma \iint_{section} \vec{E}.\overrightarrow{dS}} = \frac{U}{I}$$

IV. Mouvement dans un champ magnétique

Soit une particule de masse m, de charge q et de vitesse initiale $\vec{v}_0$ placée dans un champ magnétique $\vec{B}$. Etudions son mouvement.

IV.1 Equation du mouvement – fréquence cyclotron

$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B} = m\vec{a}$ soit $\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{q}{m}\vec{B} \wedge \vec{v} = \vec{\Omega} \wedge \vec{v}$

En notant que $\vec{\Omega} = -\frac{q}{m}\vec{B}$ est un vecteur constant si $\vec{B}$ l'est. On note

$$\omega_c = \left\|\vec{\Omega}\right\| = \frac{|q|}{m}B$$

$\left\|\vec{\Omega}\right\|$ est homogène à l'inverse d'un temps. C'est une fréquence ou une pulsation qu'on appelle pulsation cyclotron.

Dans ce cas : $\vec{v} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{v}_0$

Car $\vec{\Omega}$ est constant.

IV.2 Travail de la force magnétique

$\delta W = \left(q\vec{v} \wedge \vec{B}\right).d\overrightarrow{OM}$ or $d\overrightarrow{OM} = \vec{v}dt$ est colinéaire à $\vec{v}$ donc perpendiculaire à $q\vec{v} \wedge \vec{B}$ on en déduit :

La force magnétique ne travaille pas.

Conséquence: L'énergie cinétique d'une particule chargée dans un champ magnétique seul est une constante du mouvement.

IV.3 Etude de la trajectoire

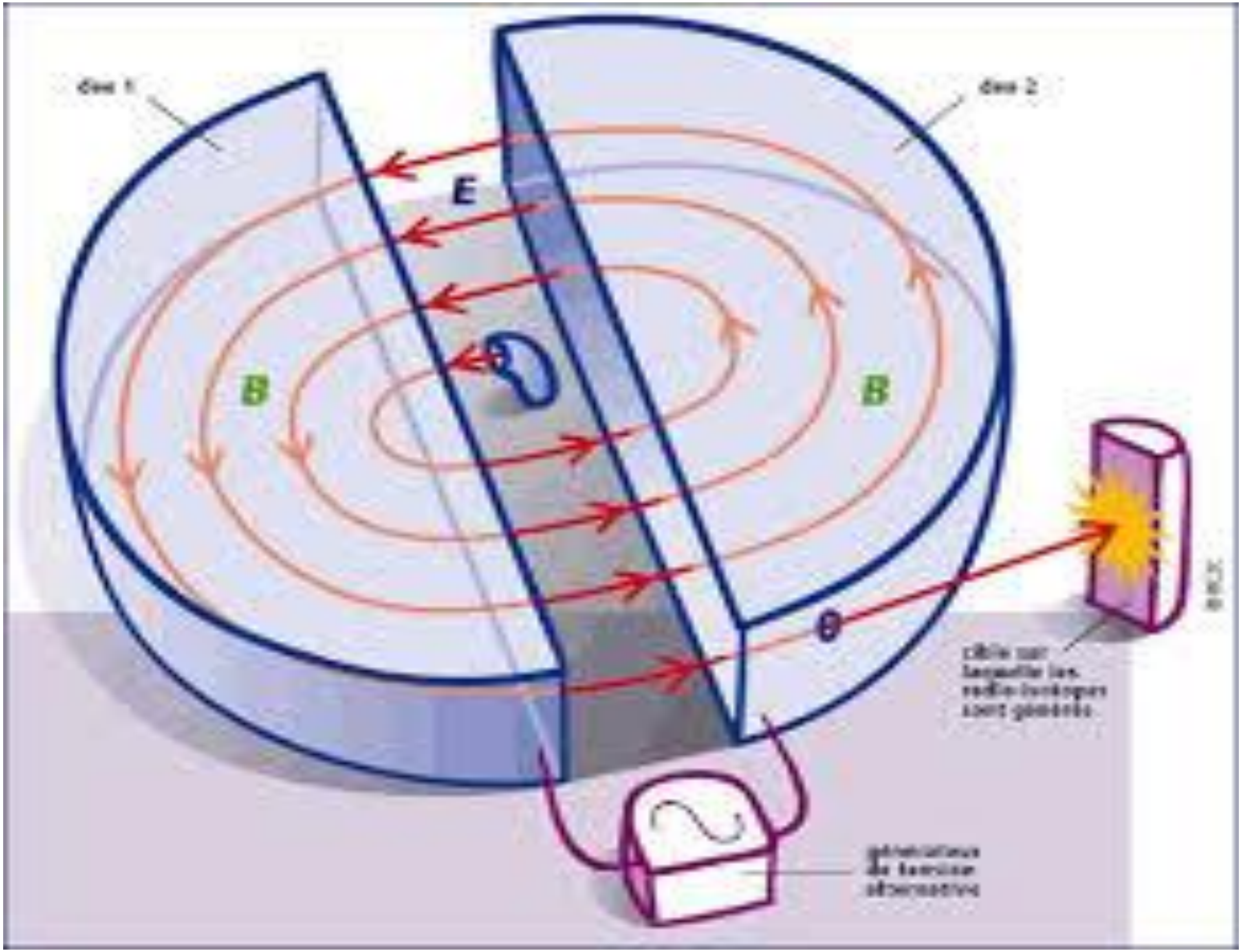
La trajectoire est composée:

-d'un mouvement de translation rectiligne uniforme parallèlement au champ $\vec{B}$ (la projection de la vitesse dans la direction du champ v_{II} est constante),

-D'un mouvement circulaire dans le plan perpendiculaire au champ magnétique $\vec{B}$ de rayon $R_\perp = \dfrac{mv_\perp}{|q|B}$, décrit la vitesse angulaire $\omega_c = \dfrac{|q|B}{m}$.

Dans le cas général, il s'agit d'un mouvement hélicoïdal. Le mouvement sera circulaire si la vitesse initiale est perpendiculaire au champ magnétique (soit $v_{II} = 0$).

Cyclotron



Equations horaires du mouvement

$$\vec{v} = \vec{v}_{II} = \vec{v}_{\perp} \quad avec \quad \vec{v}_{II} = \left(\vec{v}.\vec{B}\right)\frac{\vec{B}}{\left\|\vec{B}\right\|^2}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{v}.\vec{B}\right) = \frac{d\vec{v}}{dt}.\vec{B} = \frac{q\vec{v} \wedge \vec{B}}{m}.\vec{B} = 0$$

Donc $\vec{v}.\vec{B}$ est constant.

On en déduit que:

1. $\vec{v}_{II}$ *est* une constante du mouvement,
2. Comme $\left\|\vec{v}\right\|$ est constant, le module $v_{\perp}$ l'est aussi.
3. L'angle θ entre $\vec{B}$ *et* $\vec{v}$ est constant, car les modules des deux vecteurs le sont et que : $\vec{v}.\vec{B} = vB\cos\theta = cons\tan te$

On pouvait aussi montrer d'une autre manière que

$$\vec{v}.\vec{B} = \left(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}\right).\vec{B} + \vec{v}_0.\vec{B} = \left(-\frac{q}{m}\vec{B} \wedge \overrightarrow{OM}\right).\vec{B} + \vec{v}_0.\vec{B} = \vec{v}_0.\vec{B}$$

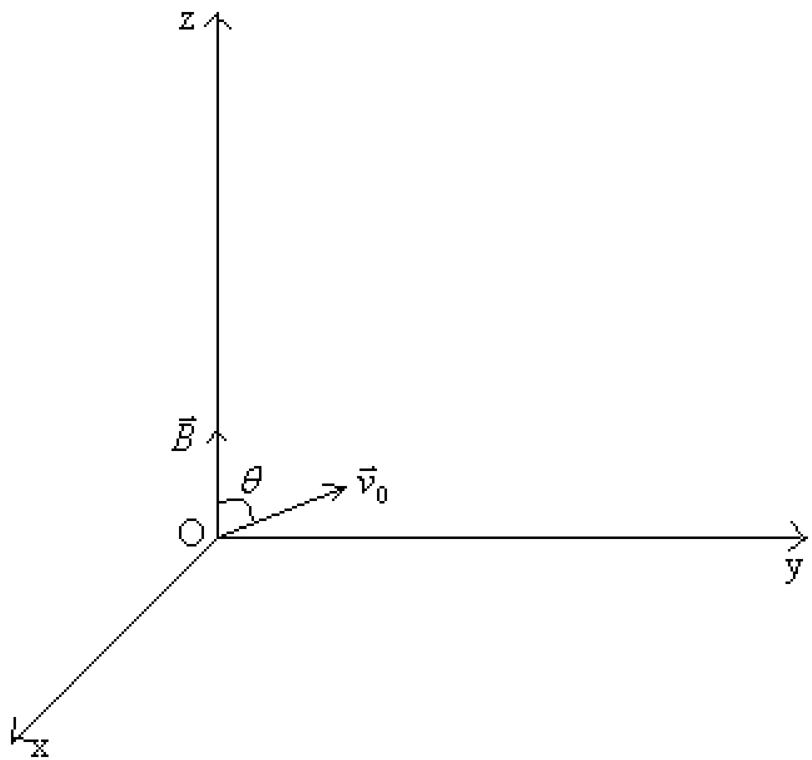
Le principe fondamental de la dynamique : $m\vec{a} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$

Se traduit dans la base $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ par:

$$m\begin{vmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{z}\end{vmatrix} = q\begin{vmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{vmatrix}\wedge\begin{vmatrix}0\\ 0\\ B\end{vmatrix} \quad soit \quad \begin{cases} m\ddot{x} = qB\dot{y} \\ m\ddot{y} = -qB\dot{x} \\ m\ddot{z} = 0 \end{cases}$$

On commence par intégrer l'équation différentielle en z : $\ddot{z} = 0$ qui donne $\dot{z} = v_0 \cos\theta = constante$ puis $z = v_0 t \cos\theta$

en utilisant les conditions initiales.



Il reste maintenant à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = qB\dot{y} \\ m\ddot{y} = -qB\dot{x} \end{cases}$$

Ces équations sont couplées. On a deux façons de les résoudre :
-Intégrer l'une, injecter le résultat dans l'autre avant de la résoudre puis reprendre la première avec la solution connue,
-Utiliser une combinaison linéaire complexe et résoudre dans l'espace des complexes.

1.Méthode de substitution :

$$m\dot{x} = qBy + C$$

où C est une constante d'intégration.

Conditions initiales :

$$\ddot{x}(0) = 0 \; et \;\; y(0) = 0 \quad donc \quad C = 0$$

On a donc $\dot{x} = \dfrac{qB}{m} y$ qu'on reporte dans l'autre équation :

$$\ddot{y} + \left(\frac{qB}{m}\right)^2 y = 0 \Leftrightarrow \ddot{y} + \omega_c^2 y = 0$$

La solution s'écrit : $y = C_1 \cos(\omega_c t) + C_2 \sin(\omega_c t)$

Détermination des constantes : conditions initiales y(0) = 0 = C_1 et

$$\dot{y} = v_0 \sin\theta = \omega_c C_2$$

Soit : $C_1 = 0$ et $C_2 = \frac{v_0 \sin\theta}{\omega_c}$

et

$$y = \frac{v_0 \sin\theta}{\omega_c}\sin(\omega_c t)$$

On reporte alors dans l'équation en   :

$$\dot{x} = \omega_c \frac{v_0 \sin\theta}{\omega_c}\sin(\omega_c t) = v_0 \sin\theta \sin(\omega_c t)$$

L'intégration donne: $x = -\frac{v_0 \sin\theta}{\omega_c}\cos(\omega_c t) + C$. Or $x(0) = C - \frac{v_0 \sin\theta}{\omega_c} = 0$

Donc $C = \frac{v_0 \sin\theta}{\omega_c}$ et $x = \frac{v_0 \sin\theta}{\omega_c}\left(1 - \cos(\omega_c t)\right)$

2. Méthode par les complexes :

On pose : $\underline{X} = x + iy$ en tenant i la quantité telle que $i^2 = -1$ soit

$$x = \mathrm{Re}\left[\underline{X}\right] et \; y = \mathrm{Im}\left[\underline{X}\right]$$

Alors, en sommant l'équation en $\ddot{x}$ et i fois l'équation en $\ddot{y}$:

$$\underline{X} = \ddot{x} + i\,\ddot{y} = \omega_c\left(\dot{y} - i\,\dot{x}\right) = -i\omega_c\,\dot{\underline{X}}$$

On a donc une équation différentielle complexe du premier ordre en $\underline{Y} = \dot{\underline{X}}$

$\dot{\underline{Y}} + i\omega_c\,\underline{Y} = 0$ dont la solution s'écrit : $\underline{Y} = \dot{\underline{X}} = A_1 e^{-i\omega_c t}$

Or les conditions initiales imposent :

$$\dot{\underline{X}}(0) = \dot{x}(0) + i\dot{y}(0) = iv_0 \sin\theta \; et \; A_1 = iv_0 \sin\theta$$

En intégrant on a : $\dot{\underline{X}} = iv_0 \sin\theta e^{-i\omega_c t}$

et

$$\underline{X} = -\frac{v_0 \sin\theta}{\omega_c} e^{-i\omega_c t} + A_2$$

Or à t = 0, on a : $\underline{X}(0) = x(0) + iy(0) = 0 = -\dfrac{v_0 \sin\theta}{\omega_c} + A_2$

donc

$$A_2 = \frac{v_0 \sin\theta}{\omega_c}$$

et:

$$\underline{X} = \frac{v_0 \sin\theta}{\omega_c}(1 - e^{-i\omega_c t}) = x + iy$$

Par identification des parties réelle et imaginaire, on retrouve les équations horaires :

$$\begin{cases} x = \dfrac{v_0 \sin\theta}{\omega_c}\left(1-\cos(\omega_c t)\right) \\ y = \dfrac{v_0 \sin\theta}{\omega_c}\sin\omega_c t \\ z = v_0 t \cos\theta \end{cases}$$

On retrouve un mouvement hélicoïdal dans le cas général et un mouvement circulaire quand la vitesse initiale est perpendiculaire au champ magnétique. En effet, on distingue :

-Une translation rectiligne uniforme le long de l'axe du champ magnétique $\vec{B}$: $z = v_0 t \cos\theta$

-Un mouvement circulaire dans le plan xOy perpendiculaire au champ. On vérifie que

$$\left(\frac{\omega_c x}{v_0 \sin\theta} - 1\right)^2 + \left(\frac{\omega_c y}{v_0 \sin\theta}\right)^2 = 1$$

ou

$$(x - x_0)^2 + y^2 = \rho^2$$

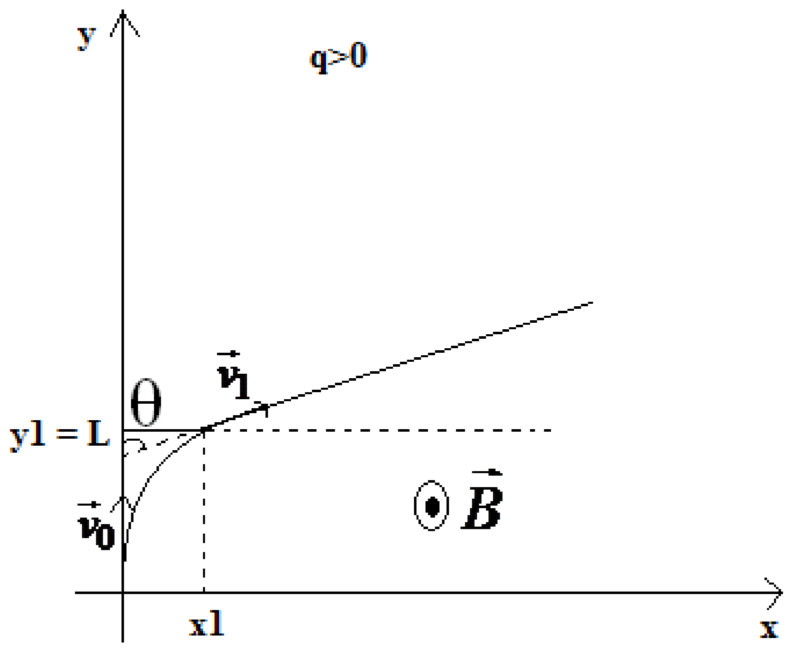
En notant $x_0 = \dfrac{v_0 \sin\theta}{\omega_c}$

On obtient donc l'équation d'un cercle de centre $C(x_0,0)$ et de rayon ρ. Ce cercle est décrit à la vitesse angulaire ω_c. On retrouve bien les mêmes résultats.

IV.4 Déviation d'une particule chargée dans un champ magnétique

On se place dans le cas d'une trajectoire circulaire, c'est-à-dire dans le cas où la vitesse initiale (qu'on prendra suivant Oy) est perpendiculaire au champ magnétique $\vec{B}$ qui est suivant Oz. On suppose que le champ n'existe que pour $0 \leq y \leq L$.

On cherche à déterminer l'angle de déviation θ de la trajectoire comme on l'a fait dans le cas d'un champ électrique.



$\tan\theta = \tan(\vec{v}_0, \vec{v}_1) = \dfrac{\dot{x}_1}{\dot{y}_1}$

La particule quitte la zone où règne le champ en y = L. Or $y = \dfrac{v_0}{\omega_c}\sin\omega_c t$ (l' angle entre la vitesse initiale et le champ vaut π/2).
Donc la particule est en y = L à l' instant:

$$t_1 = \frac{1}{\omega_c}\arcsin\frac{\omega_c L}{v_0}$$

Les composantes de la vitesse sont alors:

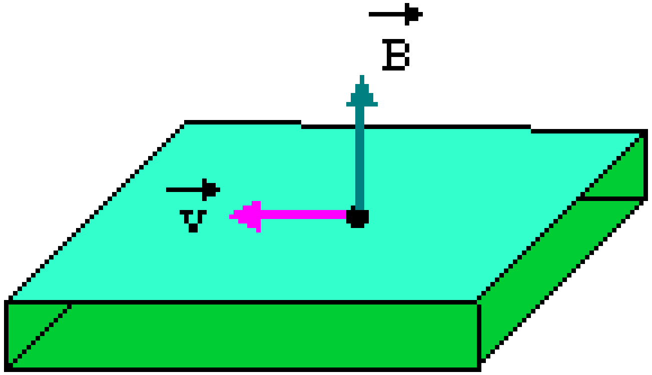
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = v_0 \sin\omega_c t_1 \\ \dot{y}_1 = v_0 \cos\omega_c t_1 \end{cases}$$

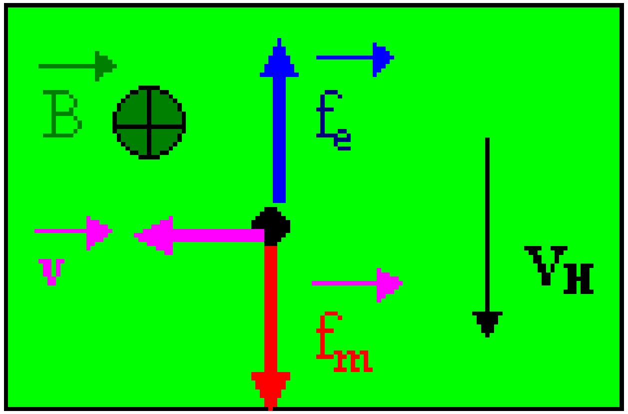
Donc $$\tan\theta = \frac{v_0 \sin\omega_c t_1}{v_0 \cos\omega_c t_1} = \tan\omega_c t_1$$

Soit $$\theta = \omega_c t_1 = \arcsin\frac{\omega_c L}{v_0}$$

Application: Télévision, moniteurs d' ordinateur, etc…

IV.5 Effet Hall





- A l'équilibre : $\vec{f_e} + \vec{f_m} = \vec{0}$

- D'où : e v B = e E et, par suite, **B = E / v = V_H / v d (V$_H$ tension HALL)**

$$\vec{v} = \frac{1}{nq}\vec{j} \quad et \quad j = \frac{I}{hd} \quad soit$$

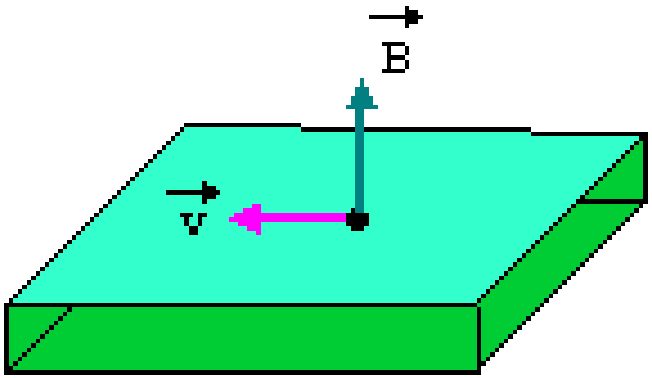
$$V_H = \frac{1}{nq}\frac{I}{hd}Bd = R_H\frac{IB}{h}$$

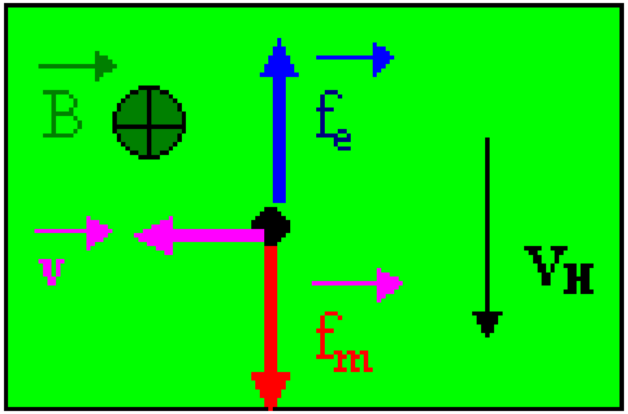
En notant la constante de Hall

$$R_H = \frac{1}{nq}$$

Cette constante est une grandeur algébrique dépendant du signe des porteurs de charges

IV.5 Effet Hall





- A l'équilibre : $\overrightarrow{f_e} + \overrightarrow{f_m} = \overrightarrow{0}$

- D'où : e v B = e E et, par suite, **B = E / v = V_H / v d (V$_H$ tension HALL)**

$$\vec{v} = \frac{1}{nq}\vec{j} \quad et \quad j = \frac{I}{hd} \quad soit$$

$$V_H = \frac{1}{nq}\frac{I}{hd}Bd = R_H\frac{IB}{h}$$

En notant la constante de Hall $R_H = \dfrac{1}{nq}$

Cette constante est une grandeur algébrique dépendant du signe des porteurs de charges