Chapitre 2: Algèbre booléenne et fonctions logiques

Dr Youssou FAYE

Année 2015-2016

Systèmes Logiques

- Les systèmes logiques fonctionnent en mode binaire → les variables d'entrée et de sortie ne prennent que deux valeurs : « 0 » ou « 1 »
- Ces deux valeurs peuvent être nommées de différentes façons :
- Exemple:
  - Niveau logique « 1 » : Vrai, Fermé, Marche, Haut, Allumé, Oui ;
  - Niveau logique « 0 » : Faux, Ouvert, Arrêt, Bas, Éteint, Non.
- **Logique positive :**
  - 0 → « Faux, Eteint, Non etc... »
  - 1 → « Vrai, Allumé, Oui etc... »
- **Logique négative :**
  - 0 → « Vrai, Allumé, Oui etc... »
  - 1 → « Faux, Eteint, Non etc... »

Algèbre de Boole

- L'algèbre binaire ou algèbre de Boole comprend deux éléments: 0 et 1 (base= {0, 1})
- Une algèbre de Boole est constituée:
  - D'un ensemble E,
  - De deux éléments de E: 0 et 1,
  - De deux opérations binaires sur E: + et . (respectivement OU et ET logique),
  - D'une opération unaire sur E (la négation logique).
- C'est le système algébrique constitué de l'ensemble (0,1), des **opérateurs élémentaires** et des **postulats**.
- Addition logique : appelée **OU**, symbolisée par un plus : « + » ;
- Multiplication logique : appelée **ET**, symbolisée par un point: « . » ;
- Complémentation : appelée **NON**, symbolisée par un surlignement: « ¯ »
- Chaque opérateur est représenté par un symbole et sa fonction est définie par une table de vérité.
- **Postulat ❶**: si a est une variable logique
  - $a = 0$ si et seulement si $a \neq 1$
  - $a = 1$ si et seulement si $a \neq 0$

Opérateur ET (AND)

- **L'opération ET (AND)** encore dénommé produit logique (ou intersection), notée « . » est définie par :
- Postulat ❷
  - 0.0 = 0.1 = 1.0 = 0
  - 1.1=1
- La sortie d'une fonction AND est dans l'état 1 si et seulement si toutes ses entrées sont dans l'état 1.

- Symboles

- Table de Vérité :

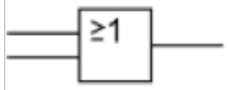
A	B	$S = A.B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

- **Propriétés du ET**
  - $(A \bullet B) \bullet C = A \bullet (B \bullet C) = A \bullet B \bullet C$, Associativité
  - $A \bullet B = B \bullet A$, Commutativité
  - $A \bullet A = A$, Idempotence
  - $A \bullet 1 = A$, 1 est l'élément neutre
  - $A \bullet 0 = 0$, 0 est l'élément absorbant

Opérateur OU inclusif (OR)

- L'opération OU (OR), encore appelée addition logique (ou disjonction), notée « + » est défini par:
- Postulat ❸
  - $1 + 1 = 1 + 0 = 0 + 1 = 1$
  - $0 + 0 = 0$
- La sortie d'une fonction OU est dans l'état 1 si au moins une de ses entrées est dans l'état 1

•Symboles



• Table de Vérité :

A	B	$S = A + B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

- **Propriétés du OU**
  - $(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$, Associativité
  - $A + B = B + A$, Commutativité
  - $A + A = A$, Idempotence
  - $A + 0 = A$, 0 est l'élément neutre
  - $A + 1 = 1$, 1 est l'élément absorbant

•D'autre part, les opérations ET et OU sont distributives l'une par rapport à l'autre :

- $A \bullet (B + C) = (A \bullet B) + (A \bullet C)$
- $A + (B \bullet C) = (A + B) \bullet (A + C)$

Opérateur NON (NOT)

- L'**opération NON**(ou complément), notée « $\overline{a}$ » est définie par :
- Postulat ❹
  - $\overline{0} = 1$
  - $\overline{1} = 0$

• Symboles

• Table de Vérité :

A	$S = \overline{A}$
0	1
1	0

- Attention:

- A partir des définitions des fonctions NON, OU et ET nous pouvons déduire

$$\overline{\overline{A}} = A$$
$$\overline{A} + A = 1$$
$$\overline{A} \bullet A = 0$$
$$A + \left(\overline{A} \bullet B\right) = A + B$$

Théorème de Morgan

- De Morgan montre qu'une fonction ET peut être fabriquée à partir des fonctions OU et NON. De même une fonction OU peut être obtenue à partir des fonctions ET et NON.

$$\overline{A \bullet B \bullet C \bullet \ldots} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C} + \ldots$$

- **Vérification** : si toutes les entrées sont à 1 les deux membres de l'équation sont nuls. Par contre si une au moins des entrées est à 0 les deux membres de l'équation sont égaux à 1. Il y a donc égalité quels que soient les états des diverses entrées.

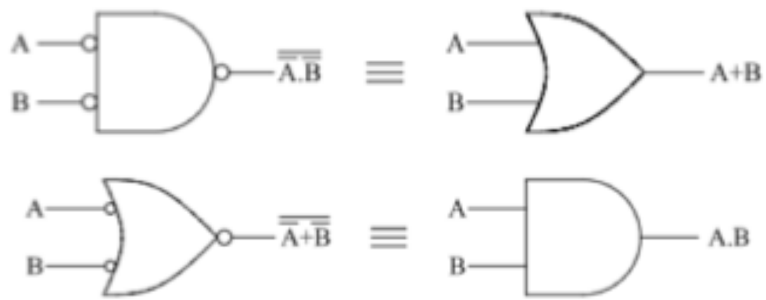
$$\overline{A + B + C + \ldots} = \overline{A} \bullet \overline{B} \bullet \overline{C} \bullet \ldots$$

- **Vérification** : si toutes les entrées sont à 0 les deux membres de l'équation sont à 1, par contre si au moins une des entrées est à 1 les deux expressions sont à 0.

- On peut montrer qu'une porte ET en logique positive fonctionne comme une porte OU en logique négative et vice versa.

$$\overline{\overline{A} \bullet \overline{B}} = \overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}} = A + B$$

$$\overline{\overline{A} + \overline{B}} = \overline{\overline{A}} \bullet \overline{\overline{B}} = A \bullet B$$



Opérateur NON-ET (NAND)

- Les deux opérateurs ET et NON peuvent être combinés en un seul opérateur NON-ET

• Symboles

• Table de Vérité :

A	B	$S = \overline{A.B}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

- En conséquence du théorème de De Morgan, on peut affirmer notamment :

1. une porte NON-OU est une porte ET avec ses entrées inversées :

2. une porte NON-ET est une porte OU avec ses entrées inversées :

Opérateur OU exclusif (XOR)

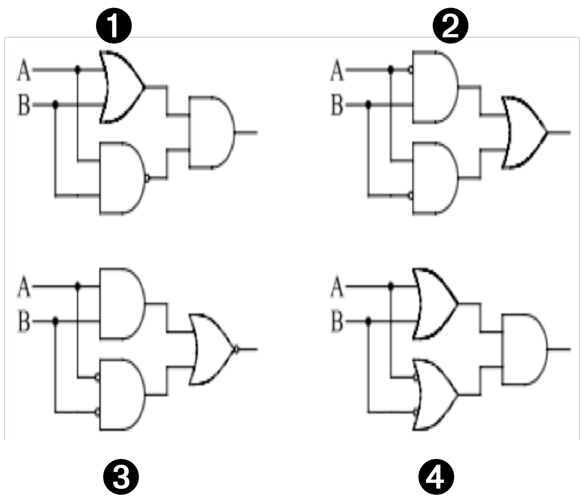
- L'opération OUX exclusif (XOR) notée «⊕» est défini par:
- 1 + 1 = 0 + 0 = 0
- 1 + 0 = 0 + 1 = 1
- La sortie d'une fonction XOR est dans l'état 1 si une entrée et seulement une est dans l'état 1

- Symboles

- Table de Vérité :

A	B	$S = A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Propriétés du XOR

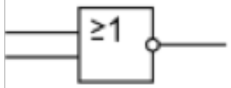


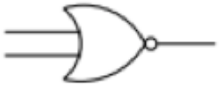
1. Nous pouvons formuler de diverses manières la définition précédente : Y= A ⊕B est égal à 1 si et seulement si A = 1 ou B = 1 mais pas simultanément. Ce que nous pouvons écri $A \oplus B = (A + B) \bullet \overline{(A \bullet B)}$
2. Nous pouvons encore dire Y=A⊕B est égal à 1 si A = 1 et B = 0 ou si B = 1 et A = 0. So $A \oplus B = (A \bullet \overline{B}) + (B \bullet \overline{A})$
3. Y=A ⊕B ne vaut 1 que si A et B sont différents. Si A et B sont égaux à 1 ou si A et B sont égaux à 0 alors Y = 0. Ce qui $A \oplus B = \overline{(A \bullet B) + (\overline{A} \bullet \overline{B})}$
4. Nous avons encore la relation suivante qui peut être démontrée en utilisant les théorèmes de De Morga $A \oplus B = (A + B) \bullet (\overline{A} + \overline{B})$

Opérateur NON-OU (NOR)

- Les deux opérateurs OU et NON peuvent être combinés en un seul opérateur NON-OU :

  - Symboles
  - Table de Vérité :

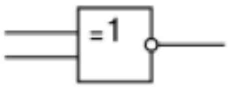


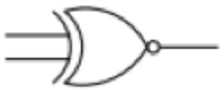


A	B	$S = \overline{A+B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Opérateur NON-OUX (XNOR)

- L'opérateurs NON-OUX est noté «$\odot$»

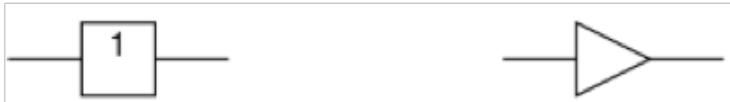




A	B	$S = A \odot B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Opérateur OUI (Identité ou de transfert)

- Symboles
- Table de Vérité :



A	$S = A$
0	0
1	1

Exemples

- Algèbre booléenne portant sur 4 éléments : E = {0, a, b, 1}

+	**0**	**a**	**b**	**1**
0	0	a	b	1
a	a	a	1	1
b	b	1	b	1
1	1	1	1	1

.	**0**	**a**	**b**	**1**
0	0	0	0	0
a	0	a	0	a
b	0	0	b	b
1	0	a	b	1

Résumé des identités

OU	$(A+B)+C=A+(B+C)=A+B+C$ $A+B=B+A$ $A+A=A$ $A+0=A$ $A+1=1$	Associativité Commutativité Idempotence Elément neutre Elément absorbant
ET	$(A \bullet B) \bullet C=A \bullet (B \bullet C)=A \bullet B \bullet C$ $A \bullet B=B \bullet A$ $A \bullet A=A$ $A \bullet 1=A$ $A \bullet 0=0$	Associativité Commutativité Idempotence Elément neutre Elément absorbant
Distributivité	$A \bullet (B+C)=(A \bullet B)+(A \bullet C)$ $A+(B \bullet C)=(A+B) \bullet (A+C)$	
NON	$\overline{\overline{A}}=A$ $\overline{A}+A=1$ $\overline{A} \bullet A=0$	
	$A+(A \bullet B)=A$ $A \bullet (A+B)=A$ $(A+B) \bullet (A+\overline{B})=A$ $A+(\overline{A} \bullet B)=A+B$	
De Morgan	$\overline{A \bullet B \bullet C \bullet \ldots}=\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}+\ldots$ $\overline{A+B+C+\ldots}=\overline{A} \bullet \overline{B} \bullet \overline{C} \bullet \ldots$	
OU exclusif	$A \oplus B=(A+B) \bullet \overline{(A \bullet B)}$ $A \oplus B=(A \bullet \overline{B})+(B \bullet \overline{A})$ $A \oplus B=\overline{(A \bullet B)+(\overline{A} \bullet \overline{B})}$ $A \oplus B=(A+B) \bullet (\overline{A}+\overline{B})$	

Les Fonctions Logiques

- **Une variable logique** est une grandeur qui peut prendre deux valeurs, habituellement notées 0 et 1. Une variable logique est aussi appelée une variable booléenne.

- **Une fonction logique** est le résultat de la combinaison d'une ou plusieurs variables logiques reliées entre elles par des opérations booléennes.

- Une "**fonction logique F**" de plusieurs variables associe à un n-uplet de variables logiques (e_0, e_1, e_2........ e_{n-1}) une valeur F (e_0, e_1, e_2........ e_{n-1})

- Cet énoncé prend généralement la forme d'un tableau où chaque ligne est une combinaisons des variables et la valeur correspondante de la fonction. Le tableau suivant donne la forme générale d'une "**table de vérité**" d'une fonctions à trois variables.

a	e	u	F(a,e,u)
0	0	0	F(0,0,0)
0	0	1	F(0,0,1)
0	1	0	F(0,1,0)
0	1	1	F(0,1,1)
1	0	0	F(1,0,0)
1	0	1	F(1,0,1)
1	1	0	F(1,1,0)
1	1	1	F(1,1,1)

- Une fonction logique est **combinatoire,** si pour une combinaison des entrées correspond un seul état de sortie indépendant du temps. Un système logique combinatoire est composé de fonction(s) logique(s)

Ecritures canoniques d'une fonction logique

- Les expressions booléennes doivent donc toujours pouvoir se mettre sous deux formes (en jouant avec les opérateurs . ou +.
  - Sous la forme d'une somme de produits logiques, appelée **forme normale disjonctive**
    - $F(A,B,C,D) = A.B + A.C.D + A.B.C.D$
  - Sous la forme de produit de sommes logiques , appelée **forme normale conjonctive**
    - $F(A,B,C,D) = (A+B).(A+\overline{B}+C+D).(A+B+D)$

- Une expression est sous sa forme canonique si toutes les variables d'entrée apparaissent sous une forme directe ou complémentée dans tous les termes qui la constitue.
  - Dans ce cas chacun des produits est appelé **minterme** pour la formes **disjonctive**
  - Dans ce cas chacun des sommes est appelé **maxterme** pour la formes **conjonctive**
- Lorsqu'une équation est écrite à partir de sa table de vérité, elle est dans sa forme canonique.

Forme canonique disjonctive: somme de produits

- Une fonction booléenne peut être représentée sous forme d'une somme de produits utilisant les mintermes. Les mintermes sont représentés par des « 1 » dans une table de vérité.
- La table suivante donne les **mintermes** d'une fonction de trois variables (a, e, u).
- A partir de ces trois variables nous pouvons construire huit produits logiques (ou minterms) $P_{i=0,7}$. Les valeurs de ces produits sont rassemblées dans le tableau suivant.

Variable			**Produits logiques**								Fonction
a	e	u	$\bar{a}\bar{e}\bar{u}$	$\bar{a}\bar{e}u$	$\bar{a}e\bar{u}$	$\bar{a}eu$	$a\bar{e}\bar{u}$	$a\bar{e}u$	$ae\bar{u}$	aeu	F(a,e,u)
0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	**1**
0	0	1	0	**1**	0	0	0	0	0	0	**1**
0	1	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	**1**
0	1	1	0	0	0	**1**	0	0	0	0	**1**
1	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	**1**
1	0	1	0	0	0	0	0	**1**	0	0	**1**
1	1	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	**1**
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	**1**	**1**

$$F(a,e,u)=(aeu)+(ae\bar{u})+(a\bar{e}u)+(a\bar{e}\bar{u})+(\bar{a}eu)+(\bar{a}e\bar{u})+(\bar{a}\bar{e}u)+(\bar{a}\bar{e}\bar{u})=\mathbf{1}$$

Forme canonique conjonctive: produit de sommes

- Une fonction booléenne peut être représentée sous forme d'un produit de sommes utilisant les maxtermes. Les maxtermes sont représentés par des « 0 » dans une table de vérité.

- La table suivante donne les **maxtermes** d'une fonction de trois variables (a, e, u)

- A partir de ces trois variables nous pouvons construire huit sommes logiques (ou maxterms) $S_{i=0,7}$. Les valeurs de ces sommes sont rassemblées dans le tableau suivant.

Variables			**Sommes logiques**								Fonction
a	e	u	$a+e+u$	$a+e+\bar{u}$	$a+\bar{e}+u$	$a+\bar{e}+\bar{u}$	$\bar{a}+e+u$	$\bar{a}+e+\bar{u}$	$\bar{a}+\bar{e}+u$	$\bar{a}+\bar{e}+\bar{u}$	F(a,e,u)
0	0	0	**0**	1	1	1	1	1	1	1	**0**
0	0	1	1	**0**	1	1	1	1	1	1	**0**
0	1	0	1	1	**0**	1	1	1	1	1	**0**
0	1	1	1	1		**0**	1	1	1	1	**0**
1	0	0	1	1	1	1	**0**	1	1	1	**0**
1	0	1	1	1	1	1	1	**0**	1	1	**0**
1	1	0	1	1	1	1	1	1	**0**	1	**0**
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**0**	**0**

$$F(a,e,u)=(a+e+u).\ (a+e+\bar{u}).(a+\bar{e}+u).(a+\bar{e}+\bar{u}).(\bar{a}+e+u).(\bar{a}+e+\bar{u}).(\bar{a}+\bar{e}+u).(\bar{a}+\bar{e}+\bar{u})=\mathbf{o}$$

Différentes formes de définition des fonctions logiques

Pour toute fonction logique, on peut écrire sa **table de vérité**, c'est-à-dire expliciter sa valeur pour chacune des combinaisons.

Soit la fonction F dont la table de vérité est dans la suivante:

a	e	u	F(a,e,u)	F
0	0	0	F(0,0,0)	**1**
0	0	1	F(0,0,1)	0
0	1	0	F(0,1,0)	**1**
0	1	1	F(0,1,1)	**1**
1	0	0	F(1,0,0)	0
1	0	1	F(1,0,1)	0
1	1	0	F(1,1,0)	0
1	1	1	F(1,1,1)	0

- F prend la valeur 1 pour la combinaison F(0,0,0), F(0,1,0), F(0,1,1).
- La fonction F prenant la valeur 0 pour toutes les autres combinaisons.
- On peut écrire : F = F(0,0,0) + F(0,1,0) + F(0,1,1)
- On peut exprimer F en fonction des variables a, e et u sous la forme :
- $\mathbf{F=\bar{a}\bar{e}\bar{u}+\bar{a}e\bar{u}+\bar{a}eu}$

- Cette façon, très générale, d'écrire une fonction booléenne est appelée somme canonique de produits. F est sous sa **forme analytique.**

Différentes formes de définition des fonctions logiques

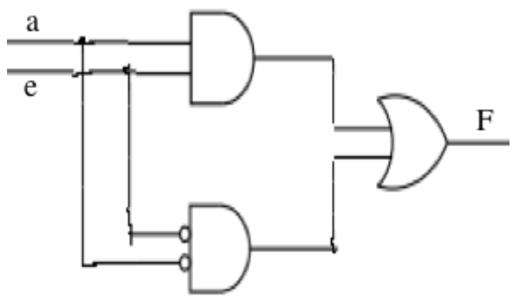
- On peut aussi remarquer que F vaut 0 pour les combinaisons F(0,0,1), F(1,0,0), F(1,0,1), F(1,1,0) et F (1,1,1). F peut donc être vue comme le produit logique de ces cinq sommes.

a	e	u	F(a,e,u)	F
0	0	0	F(0,0,0)	1
0	0	1	F(0,0,1)	**0**
0	1	0	F(0,1,0)	1
0	1	1	F(0,1,1)	1
1	0	0	F(1,0,0)	**0**
1	0	1	F(1,0,1)	**0**
1	1	0	F(1,1,0)	**0**
1	1	1	F(1,1,1)	**0**

$$F(x,y,z)=(a+e+\bar{u}).(\bar{a}+e+u).(\bar{a}+e+\bar{u}).(\bar{a}+\bar{e}+u).(\bar{a}+\bar{e}+\bar{u})$$

- La fonction logique peut être réalisée aussi sous forme de **circuit** ou **logigramme**

Exemple : $F = ae + \bar{a}\bar{e}$



Simplification des fonctions logiques

➡Simplification algébriques

- Simplifier une expression booléenne c'est lui trouver une forme plus condensée, faisant intervenir moins d'opérateurs et conduisant à une réalisation matérielle plus compacte. On peux simplifier une fonction en utilisant les relations décrites dans le tableau de résumé des identités booléennes

- **Exemple :** Soit F défini par la table de vérité suivante :

a	e	u	F(a,e,u)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

$F(a,e,u) = aeu + ae\bar{u} = ae(u+\bar{u}) = ae$

- Cette méthode, demande quelques astuces et chances, et n'est pas toujours très aisée à mettre en œuvre.
- La méthode graphique de Karnaugh est très utile pour un nombre de variables inférieur à 6.

Simplification des fonctions logiques

➡Tableaux de Karnaugh

- La méthode de simplification de Karnaugh est basé sur l'identité: $(a.b)+(a.\bar{b})=a(b+\bar{b})=a$

- Si une fonction dépend de n variables il y a 2^n produits possibles. Chacun de ces produits est représenté par une case dans un tableau. On utilise le code de Gray pour numéroter les lignes et les colonnes du tableau

- **Exemple 1 :** Tableau à 2 variables

e \ a	0	1
0		
1		

- **Exemple 2 :** Tableau à 3 variables

u \ ae	00	01	11	10
0				
1				

- **Exemple 3 :** Tableau à 4 variables

eu \ ab	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

- **Exemple 4 :** Tableau à 5 variables

uv \ abe	000	001	011	010	110	111	101	100
00								
01								
11								
10								

Simplification des fonctions logiques

➡Tableaux de Karnaugh (suite 1)

- Chaque case d'un tableau correspond au seul minterm prenant la valeur 1 pour la combinaison identifiée par la ligne et la colonne.

- Par exemple les trois cases coloriées dans les tableaux ci-dessous correspondent respectivement aux produits suivants : $\bar{a}e\bar{u}v$, $\bar{a}\bar{e}u\bar{v}$, $\bar{a}\bar{e}\,\bar{u}v$

uv \ ae	00	01	11	10
00		X		
01	X		X	
11		X		
10				

uv \ ae	00	01	11	10
00	X			
01				
11	X			
10		X		X

uv \ ae	00	01	11	10
00	X			
01		X		X
11	X			
10				

- Chaque ligne et chaque colonne est comme une structure cyclique continue : chaque case a toujours quatre voisins qu'il faut éventuellement chercher à l'autre extrémité de la ligne ou de la colonne.
- Comme illustrer dans les tableaux ci-dessus, les croix y matérialisent les voisins des cases coloriées
- Le passage de la table de vérité au tableau de Karnaugh consiste à remplir chaque case avec la valeur de la fonction pour le produit correspondant. Il est possible de n'indiquer que les 1.
- La méthode de simplification de Karnaugh consiste à rassembler les cases adjacentes contenant des 1 par groupes de 2, 4 ou 8 termes.

Simplification des fonctions logiques

➡Tableaux de Karnaugh (suite 2)

- **Exemple 1**: soit la fonction F(a,e,u) défini par la table de vérité

a	e	u	F(a,e,u)
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

- Le tableau de Karnaugh correspondant est :

u \ ae	00	01	11	10
0	1	1		
1	1			

$\bar{a}\bar{u}$

$\bar{a}\bar{e}$

- Dans un groupement de **deux termes** on élimine donc la variable qui **change d'état** et on conserve le **produit** des variables qui ne **changent pas**.
- Dans un groupement de quatre on élimine les deux variables qui changent d'état. Dans un groupement de huit on élimine trois variables, etc…
- On cherche à avoir le minimum de groupements, chaque groupement rassemblant le maximum de termes. Une même case peut intervenir dans plusieurs groupements car C + C = C.
- Pour les cases isolées on ne peut éliminer aucune variable. On conserve donc le produit caractérisant la case.
- Ce qui donne pour la fonction $F = \bar{a}\bar{u}\,(\bar{e}+e) + \bar{a}\bar{e}\,(\bar{u}+u) = \bar{a}\bar{u} + \bar{a}\bar{e}$