Flots dans les réseaux

Youssou Dieng

Universités: Ziguinchor

(Cours RO: L3 Informatique)

Avril 2012

Outline

Outline

Introduction

- Un système dans lequel un matériau s'écoule, tel l'eau ou l'électricité, peut être modélisé à l'aide dun graphe.
  - Une question naturelle se pose: quelle est la capacité maximale de ce système?
- Ce problème est connu sous le nom de *flot maximal* et admet plusieurs solutions algorithmiques efficaces. [Nous en présenterons ici quelques unes.]
- Les graphes concidérés ici, sont sauf mention contraire, simples et orientés

Introduction

Définition

Un flot dans un graphe $G = (X, U)$ est un vecteur $\phi = \{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_m\} \in R^m$ tel que:

- La quantité de flot ou flux sur l'arc j, est ϕ_j pour $j = 1, 2, \ldots, m$.
- Pour tout sommet $x \in X$, la 1^{iere} loi de Kirchhoff est vérifiée.
  $\sum_{j \in \omega^+(i)} \phi_j = \sum_{j \in \omega^-(i)} \phi_j$.

Flot dans les réseaux de transport

Un réseau de transport est un graphe orienté connexe $G = (X, U)$ avec:

- un sommet s sans prédecesseur appelé entrée ou sorce ($\gamma^{-}(s) = \emptyset$).
- un sommet t sans suivant appelé sortie ou puit ($\gamma^{+}(s) = \emptyset$).

Caractéristiques

- *Contrainte de capacité:* Pour tout arc $(u, v) \in U$, on a: $f(u, v) \leqslant c(u, v)$.
- *Symétrie:* Pour tout arc $(u, v) \in E$, on a: $f(u, v) = -f(v, u)$.
- *Concervation du flot :* tout sommet $u \in V \{s, t\}$ vérifie: $\sum_{v \in V} f(u, v) = 0$.
- La valeur du flot f, notée $|f|$ est la quantité $\sum_{v \in V} f(s, v)$.

Le problème du flot maximal consiste à calculer pour tout réseau un flot de valeur maximale.

Outline

Réseau résiduel

Tout flot de valeur non nulle est si il n'est pas maximal un début de réponse.

- En effet, on peut définir à partir de ce réseau G un nouveau réseau G' "*plus simple*" pour lequel tout flot maximal f' permettra de définir le flot maximal $f' + f$ sur G.

Réseau résiduel

Tout flot de valeur non nulle est si il n'est pas maximal un début de réponse.

- En effet, on peut définir à partir de ce réseau G un nouveau réseau G' *"plus simple"* pour lequel tout flot maximal f' permettra de définir le flot maximal $f' + f$ sur G.

Définition

La capacité résiduelle d'un réseau (V, U, c, s, t) *induit par un flot* f *est la fonction notée* c_f *qui associe à tout arc* $(u, v) \in E$ *le réel positif ou nul* $c(u, v) - f(u, v)$. *Le réseau résiduel dun réseau* (V, U, c, s, t) *induit par un flot* f *est le réseau* (V, U, c_f, s, t).

Réseau résiduel

Lemme

- *Si f est un flot sur un réseau G et*
- *Si g est un flot sur le réseau résiduel de G induit par f,*
- *Alors $f + g$ est un flot de G de valeur $|f + g| = |f| + |g|$.*

Réseau résiduel

Lemme

- *Si f est un flot sur un réseau G et*
- *Si g est un flot sur le réseau résiduel de G induit par f,*
- *Alors $f+g$ est un flot de G de valeur $|f+g| = |f| + |g|$.*

Proof.

- Soit f un flot sur un réseau $G = (V, E, c, s, t)$ et g un flot sur le réseau résiduel de G induit par f.
- Démontrons que la foncton $h := f + g$ est un flot de G de valeur $|f| + |g|$:
  1. *h vérifie la containte de capacité:* Par définition, pour tout arc e de E: $c_f(e) = c(e) - f(e)$ et $g(e) \leqslant c_f(e)$ et donc $h(e) = f(e) + g(e) \leqslant f(e) + (c(e) - f(e)) \leqslant c(e)$.
  2. *h vérifie la symétrie:* la somme de deux fonctions symétriques est clairement symétrique.

Réseau résiduel

3. *h conserve le flot:* Soit un sommet u autre que la source et le puits de G. La quantité $\sum_{v \in V} h(u,v)$ est égale à $\sum_{v \in V} f(u,v) + \sum v \in V g(u,v) = 0 + 0 = 0$.
4. *La valeur de h est $|f| + |g|$:* Par définition, $|h|$ est égale à $\sum_{v \in V} f(s,v) + \sum_{v \in V} g(s,v) = |f| + |g|$.

□

Outline

Chemin améliorant

Définir un flot peut se faire en choisissant simplement dans le réseau un chemin de s à t et en prenant pour valeur la capacité minimale des arcs de ce chemin.

Chemin améliorant

Définir un flot peut se faire en choisissant simplement dans le réseau un chemin de s à t et en prenant pour valeur la capacité minimale des arcs de ce chemin.

Définition

Soit $G = (V, U, c, s, t)$ un réseau et p un chemin élémentaire dans G de s à t. La capacité de p est le minimum des capacités des arcs que possède p et est noté $c(p)$. Le flot induit par p est la fonction notée f_p qui associe à tout arc $(u, v) \in V^2$ la quantité définie par:

- $c(p)$ *si* (u, v) *appartient à* p.
- $-c(p)$ *si* (v, u) *appartient à* p.
- 0 *sinon.*

Chemin améliorant

- Un chemin p allant de s à t améliore (ou est un chemin augmentant) un flot f de G si la capacité de p dans le réseau résiduel de G induit par f est > 0.
- Un chemin améliorant, est un chemin du réseau résiduel, allant de s à p et sans circuit.

Chemin améliorant

- Un chemin p allant de s à t améliore (ou est un chemin augmentant) un flot f de G si la capacité de p dans le réseau résiduel de G induit par f est > 0.
- Un chemin améliorant, est un chemin du réseau résiduel, allant de s à p et sans circuit.

Lemme

La fonction f_p induit par un chemin élémentaire p de la source au puits dans un réseaux est un flot de valeur $c(p)$.

Chemin améliorant

- Un chemin p allant de s à t améliore (ou est un chemin augmentant) un flot f de G si la capacité de p dans le réseau résiduel de G induit par f est > 0.
- Un chemin améliorant, est un chemin du réseau résiduel, allant de s à p et sans circuit.

Lemme

La fonction f_p induit par un chemin élémentaire p de la source au puits dans un réseaux est un flot de valeur $c(p)$.

Proof.

1. *f_p vérifie la contrainte de capacité.* Trivialement le flot de tout arc est inférieur à sa capacité.
2. *f_p vérifie la symétrie.* (Une conséquence triviale de la définition)

Chemin améliorant

3. f_p *conserve le flot.* Soit u un sommet de $V\{s,t\}$.

   3.1 Si u n'appartient pas à p, tout arc incident à u a un flot nul. [La somme de ces flots est donc nulle.]

   3.2 Sinon, u est nécessairement un sommet interne de p. [$\exists$ deux arcs de la forme (x,u) et (u,y) appartenant à p.]

4 *La valeur de f_p est $c(p)$.* L'unique arc de p incident à s est de la forme (s,u) avec $u \in V$. Ainsi, $|f_p| = f_p(s,u) = c(p)$.

$\square$

Outline

MaxiFlot & MiniCoupe

- Une coupe dans un réseau $G = (V, U, c, s, t)$ est un couple d'ensemble de sommets de forme $(X, Y = V - X)$ avec $X \subseteq V$ tel que $s \in X$ et $t \in Y$.
- Sa capacité, noté $c(X, Y)$ est la somme $\sum_{x \in X, y \in Y} c(x, y)$.
- Une coupe est minimale si sa capacité est au plus égale à la capacité de toute coupe de ce réseau.
- Le flot d'une coupe (X, Y) relativement à un flot f est la quantité $f(X, Y)$.

MaxiFlot & MiniCoupe

- Une coupe dans un réseau $G = (V, U, c, s, t)$ est un couple d'ensemble de sommets de forme $(X, Y = V - X)$ avec $X \subseteq V$ tel que $s \in X$ et $t \in Y$.
- Sa capacité, noté $c(X, Y)$ est la somme $\sum_{x \in X, y \in Y} c(x, y)$.
- Une coupe est minimale si sa capacité est au plus égale à la capacité de toute coupe de ce réseau.
- Le flot d'une coupe (X, Y) relativement à un flot f est la quantité $f(X, Y)$.

Lemme

Tout flot f et toute coupe (X, Y) d'un même réseau de capacité c vérifient: $|f| = f(X, Y) \leqslant c(X, Y)$.

MaxiFlot & MiniCoupe

- Une coupe dans un réseau $G = (V, U, c, s, t)$ est un couple d'ensemble de sommets de forme $(X, Y = V - X)$ avec $X \subseteq V$ tel que $s \in X$ et $t \in Y$.
- Sa capacité, noté $c(X, Y)$ est la somme $\sum_{x \in X, y \in Y} c(x, y)$.
- Une coupe est minimale si sa capacité est au plus égale à la capacité de toute coupe de ce réseau.
- Le flot d'une coupe (X, Y) relativement à un flot f est la quantité $f(X, Y)$.

Lemme

Tout flot f et toute coupe (X, Y) d'un même réseau de capacité c vérifient: $|f| = f(X, Y) \leqslant c(X, Y)$.

Proof.

Soit f un flot, $(X, V - X)$ une coupe dans un réseau

MaxiFlot & MiniCoupe

$G = (V, E, c, s, t)$. L'inégalité $f(X, Y) \leqslant c(X, Y)$ est une conséquence de l'inégalité $f(e) \leqslant c(e)$ vérifiée par toute arc e.

... $\square$

MaxiFlot & MiniCoupe

$G = (V, E, c, s, t)$. L'inégalité $f(X, Y) \leqslant c(X, Y)$ est une conséquence de l'inégalité $f(e) \leqslant c(e)$ vérifiée par toute arc e.
... $\square$

Théorème

Soit f un flot dans un réseau G. Les quatre assertions suivantes sont équivalentes:

1. *f est un flot maximal.*
2. *f n'admet aucun chemin améliorant.*
3. *Il existe une coupe dans le réseau résiduel induit par f de capacité nulle.*
4. *Il existe une coupe (X, Y) de capacité $c_G(X, Y)$ égale au flot $f(X, Y)$.*

MaxiFlot & MiniCoupe

Proof.

Soit $G = (V, E, c, s, t)$ un réseau, f un flot et H le réseau résiduel de G et f. il vient:

MaxiFlot & MiniCoupe

Proof.

Soit $G = (V, E, c, s, t)$ un réseau, f un flot et H le réseau résiduel de G et f. il vient:
$4 \Leftrightarrow 3$ Conséquence immédiate de la définition du réseau résiduel de G, H induit par f, pour toute coupe (X, Y) de G et donc de H, on a : $c_H(X, Y) = c_G(X, Y)f(X, Y)$. Ce qui suffit à conclure

MaxiFlot & MiniCoupe

Proof.

Soit $G = (V, E, c, s, t)$ un réseau, f un flot et H le réseau résiduel de G et f. il vient:
$4 \Leftrightarrow 3$ Conséquence immédiate de la définition du réseau résiduel de G, H induit par f, pour toute coupe (X, Y) de G et donc de H, on a : $c_H(X, Y) = c_G(X, Y) f(X, Y)$. Ce qui suffit à conclure
$3 \Rightarrow 1$ Du simple fait que tout arc (u, v) a un flot $f(u, v)$ au plus égal à sa capacité $c(u, v)$. On en déduit que toute coupe a un flot au plus égal à sa capacité.

MaxiFlot & MiniCoupe

Proof.

Soit $G = (V, E, c, s, t)$ un réseau, f un flot et H le réseau résiduel de G et f. il vient:
$4 \Leftrightarrow 3$ Conséquence immédiate de la définition du réseau résiduel de G, H induit par f, pour toute coupe (X, Y) de G et donc de H, on a : $c_H(X, Y) = c_G(X, Y)f(X, Y)$. Ce qui suffit à conclure
$3 \Rightarrow 1$ Du simple fait que tout arc (u, v) a un flot $f(u, v)$ au plus égal à sa capacité $c(u, v)$. On en déduit que toute coupe a un flot au plus égal à sa capacité.
Or tout flot a une valeur égale au flot d'une quelconque coupe [Lemme3]. Ainsi la valeur de tout flot est au plus égale à la capacité d'une quelconque coupe. En d'autre termes, si un flot f et une coupe (X, Y) sont tels que $|f| = c(X, Y)$, alors f est un flot maximal.

MaxiFlot & MiniCoupe

Proof.

Soit $G = (V, E, c, s, t)$ un réseau, f un flot et H le réseau résiduel de G et f. il vient:

$4 \Leftrightarrow 3$ Conséquence immédiate de la définition du réseau résiduel de G, H induit par f, pour toute coupe (X, Y) de G et donc de H, on a : $c_H(X, Y) = c_G(X, Y) f(X, Y)$. Ce qui suffit à conclure

$3 \Rightarrow 1$ Du simple fait que tout arc (u, v) a un flot $f(u, v)$ au plus égal à sa capacité $c(u, v)$. On en déduit que toute coupe a un flot au plus égal à sa capacité.

Or tout flot a une valeur égale au flot d'une quelconque coupe [Lemme3]. Ainsi la valeur de tout flot est au plus égale à la capacité d'une quelconque coupe. En d'autre termes, si un flot f et une coupe (X, Y) sont tels que $|f| = c(X, Y)$, alors f est un flot maximal.

$1 \Rightarrow 2$ Si p est un chemin améliorant du flot f, le Lemme2 indique que le flot f_p est de valeur strictement positive. Le Lemme 1 indique que $f + f_p$ est un flot de G de valeur $|f| + |fp| > |f|$

MaxiFlot & MiniCoupe

et donc que f n'est pas maximal. Ainsi, si f est maximal, il n'est amélioré par aucun chemin.

MaxiFlot & MiniCoupe

et donc que f n'est pas maximal. Ainsi, si f est maximal, il n'est amélioré par aucun chemin.
$2 \Rightarrow 3$ Supposons que f n'admet aucun chemin améliorant. Soit X l'ensemble des sommets accessibles à partir de s en utilisant des chemins à arc de capacité résiduel $c_H(u,v) > 0$.

MaxiFlot & MiniCoupe

et donc que f n'est pas maximal. Ainsi, si f est maximal, il n'est amélioré par aucun chemin.
$2 \Rightarrow 3$ Supposons que f n'admet aucun chemin améliorant. Soit X l'ensemble des sommets accessibles à partir de s en utilisant des chemins à arc de capacité résiduel $c_H(u,v) > 0$. Conséquence de la définition de chemin améliorant est que t n'appartient pas à X...De plus tout arc $(x,y) \in X \times V - X$ est de capacité résiduelle nulle c'est- à-dire vérifié $f(x,y) = c_H(x,y)$ ainsi la coupe (X,Y) a une capacité nulle dans H $(c_H(X,Y) = 0)$........... $\square$

MaxiFlot & MiniCoupe

et donc que f n'est pas maximal. Ainsi, si f est maximal, il n'est amélioré par aucun chemin.
$2 \Rightarrow 3$ Supposons que f n'admet aucun chemin améliorant. Soit X l'ensemble des sommets accessibles à partir de s en utilisant des chemins à arc de capacité résiduel $c_H(u, v) > 0$. Conséquence de la définition de chemin améliorant est que t n'appartient pas à X...De plus tout arc $(x, y) \in X \times V - X$ est de capacité résiduelle nulle c'est- à-dire vérifié $f(x, y) = c_H(x, y)$ ainsi la coupe (X, Y) a une capacité nulle dans H $(c_H(X, Y) = 0)$........... $\square$

Corollaire

Pour tout réseau, la valeur maximale des flots est égale à la capacité minimale des coupes.

Outline

Une solution au problème du flot maximal

1. **Intitulé du problème:** Flot maximum
2. **Description des paramètres:** Un graphe orienté $G = (S, A)$ où chaque arête est valuée par sa capacité, un sommet source et un sommet puits.
3. **Question:** Quel est la flot maximum qu'il est possible de faire passer dans ce réseau depuis la source vers le puits?

Une solution au problème du flot maximal

Algorithme de FordFulkerson

Fonction **FordFulkerson** $(G = (V, U, c, s, t)$: réseau): flot;

> $fmax \leftarrow$ 0;
> tantque il existe un chemin de s à t de capacité > 0 faire
>
> > calculer un chemin p élémentaire de s à t de capacité > 0;
> > $f \leftarrow$ flotInduit(G, p);
> > $G \leftarrow$ réseauRésiduel(G, f);
> > $fmax \leftarrow fmax + f$;
>
> retouner $fmax$;

Outline

Références bibliographiques

- P. Lopez, Cours de graphes, LAAS-CNRS
- http://www.laas.fr/~lopez/cours/GRAPHES/graphes.html
- Ph. Vallin and D. Vanderpooten. Aide la dcision : une approche par les cas. Ellipses, Paris, 2000.
- M. Gondron, M. Minoux, Graphes et algorithmes, Eyrolles, Paris, 1984
- C. Prins, Algorithmes de graphes, Eyrolles, Paris, 1994
- Ph. Lacomme, C. Prins, M. Sevaux, Algorithmes de graphes, Eyrolles, 2003
- B. Baynat, Ph. Chrtienne, ..., Exercices et problmes dalgorithmique, Dunod, 2003
- E. Lawler, Combinatorial Optimization Networks and matroids, Dover Publications, INC, 1976.