

GROUPE DE TRAVAIL L2I

Mouhamet A. Ndiaye

Abdoulaye Gaye

Ndoya Ndong

Djim Diasse

Niako Kebe

Exercice 1

Définir les ensembles suivants en compréhension :

1. $A = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64\}$
2. $B = \{1, 2, 7, 14\}$
3. $C = \{4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20\}$

Exercice 2

Définir les ensembles suivants en extension

1. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x(x + 5) = 14\}$
2. $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x(2x + 3) = 14\}$
3. $C = \{x \in \mathbb{N}_{10} \mid x^4 - 1 \text{ est divisible par } 5\}$

Exercice 3

(Paradoxe de Bertrand Russell (1872-1970)). Soit X l'ensemble de tous les éléments qui ne sont pas éléments d'eux-mêmes.

A-t-on $X \in X$? A-t-on $X \notin X$?

REMARQUE 1.1. Dit autrement : le barbier qui rase tous les barbiers qui ne se rasent pas eux-mêmes...se rase-t-il lui-même ?

REMARQUE 1.2. On en déduit donc que l'on ne peut pas parler de l'ensemble de tous les ensembles (cet ensemble devrait s'appartenir lui-même). Il ne faut pas négliger l'impact d'une telle révélation

EXEMPLE 1.4. Si $A = \{1, 2, 3\}$, alors $P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

EXEMPLE 1.5. Si $A = \emptyset$, $P(A) = \{\emptyset\}$, $P(P(A)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. Cela n'est pas qu'un jeu de l'esprit :

- On définit 0 comme étant \emptyset ,
- 1 correspond alors à $P(\emptyset)$,
- 2 est alors $P(P(\emptyset))$,
- etc.

Exercice 4

On considère $A = \{1, 2\}$. Dire quelles assertions sont exactes :

- $1 \in A$,
- $1 \notin A$,
- $\{1\} \in A$,
- $\{1\} \notin A$,
- $\emptyset \in A$,
- $\emptyset \notin A$.

Exercice 5

Reprendre l'exercice précédent, avec $A = \{\{1\}, \{2\}\}$.

Exercice 6

(Diagramme de Venn). A partir des affirmations

1. les poètes sont des gens heureux,
 2. tous les docteurs sont riches et
 3. nul être heureux n'est riche,
- déterminer la validité de chacune des conclusions suivantes
1. Aucun poète n'est riche.
 2. Les docteurs sont des gens heureux.
 3. Nul ne peut être à la fois docteur et poète.

Exercice 7

Est-ce que $\{a\} \subset \{a, b, c\}$? Former la liste des parties de $\{a, b, c\}$.

Exercice 8

Montrer que $P(A) \subseteq P(B)$ quand $A \subseteq B$.

Exercice 9

Soit $B = \{0, 1\}$.

1. A-t-on $B \subset B$?
2. Quels sont les éléments de $P(B)$?
3. Quels sont les éléments de $P(P(B))$?

Exercice 10

Soit les affirmations :

- J'ai planté tous mes arbres onéreux l'an passé.
- Tous mes arbres fruitiers sont dans mon verger.
- Aucun des arbres fruitiers n'a été planté l'an passé.
- J'ai un orme, qui est un arbre onéreux, mais pas dans mon verger.

Dire si les affirmations suivantes sont justes ou fausses ou impossibles à répondre.

1. Aucun de mes arbres fruitiers n'est onéreux.
2. Tous mes arbres plantés l'an passé l'ont été dans le verger.
3. J'ai planté au moins un arbre l'an passé.

Réponse : Exercice 1

Les puissances de 2 inférieures ou égales à 64. 2) Les diviseurs de 14. 3) Les entiers inférieurs ou égaux à 20 qui ont au moins 3 diviseurs (les nombres non premiers entre 2 et 20).

Réponse : Exercice 2

$A = \{2, -7\}$, $B = \{2\}$, et $C = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$ (factoriser $x^4 - 1$).

Abdoulaye Gaye