CHAPITRE 1

ESPACES PROBABILISÉS

1.1. EXPÉRIENCE ALÉATOIRE

1.1.1. Epreuves

On dit qu'une expérience est aléatoire lorsqu'en la répétant dans les mêmes conditions, le résultat n'est pas toujours le même ; par exemple, si on tire une carte au hasard dans un jeu de 52 cartes...

Mathématiquement, une expérience aléatoire est décrite par la donnée de l'ensemble des résultats possibles de l'expérience, appelé *ensemble des épreuves* et noté Ω.

Dans l'exemple du jeu de cartes, on prendrait $\Omega = \{1, 2, ..., 52\}$ (en numérotant les cartes). Ω peut être un ensemble très complexe et difficile à décrire ; imaginons que l'on choisisse une photo au hasard dans un magasin de développement rapide. Le résultat est alors une image avec des paramètres quantitatifs, dimensions, ..., et d'autres qualitatifs : impression que donne l'image, qualité artistique... L'espace Ω est alors un espace abstrait contenant toutes les informations sur l'expérience.

1.1.2. Evénements

Il s'agit d'une notion fondamentale en théorie des probabilités. Un événement A est une partie de Ω mais pas toujours n'importe quelle partie de Ω. Dans le deuxième exemple, même si Ω n'est pas très explicite, on peut regarder l'événement « il y a un objet rouge sur la photo » ou « il s'agit d'une photo sur papier mat ».

On peut faire le lien avec les notations de la théorie des ensembles en disant qu'une épreuve ω appartient à l'ensemble A si l'événement A est réalisé lors de l'épreuve ω. On utilisera alors les opérations ensemblistes : passage au complémentaire, intersection et réunion ; en particulier, ω appartient à $A \cup B$ si et seulement si l'un au moins des deux événements A ou B, est réalisé lors de l'épreuve ω.

Ces opérations sur les ensembles interviennent naturellement dans la pratique ; par exemple, pour un système constitué d'éléments en série, l'événement « le système fonctionne » s'exprime comme une intersection :

$$\{\text{le système fonctionne}\} = \{\text{le } 1^{\text{er}} \text{ élé. fonctionne}\} \cap$$
$$\cap \ \{\text{le } 2^{\text{e}} \text{ élé. fonctionne}\} \cdots \cap \ \{\text{le } k\text{-ième élé. fonctionne}\}$$

Scanné avec CamScanner

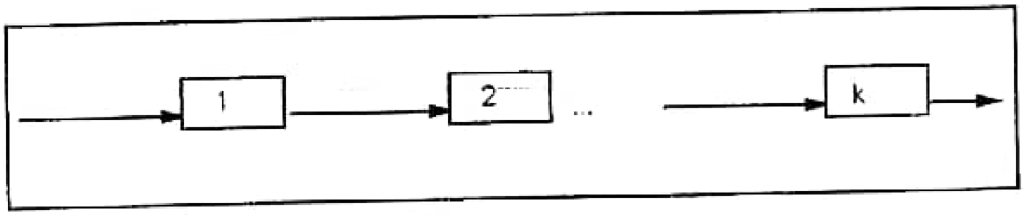

Figure 1.1.

Au contraire, si les éléments sont disposés en parallèle, le système fonctionne dès que l'un des éléments fonctionne et il s'agit d'une réunion.

Les événements peuvent être disjoints ; on dit aussi qu'ils sont incompatibles ou aussi qu'ils s'excluent mutuellement.

Exemple : Considérons une maladie causée par un virus et pour laquelle il y a trois possibilités qui s'excluent mutuellement : être immunisé, être porteur chronique ou n'avoir jamais rencontré le virus. Si on se rend compte que la maladie peut être causée par deux virus, les événements A, B, C qui suivent ne sont pas disjoints :

A = {le patient est porteur chronique d'au moins un virus }
B = {le patient est immunisé contre les deux virus }
C = {il y a au moins un virus que le patient n'a jamais rencontré }

Ce que l'on demande aux événements c'est que, si A et B sont des événements, alors :

A^c (le complémentaire de A),
$A \cap B$ (intersection)
$A \cup B$ (réunion)

soient aussi des événements. Dans la suite on notera $B \backslash A$ l'ensemble $B \cap A^c$ dessiné en pointillé sur la figure 1.2.

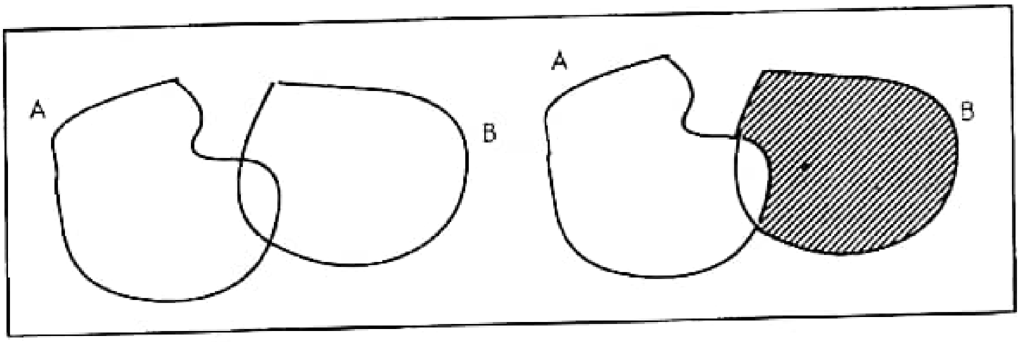

Figure 1.2.

On demande aussi que $\varnothing$ et Ω, événement impossible et événement certain, soient des événements ; et enfin que $\cup A_n$ et $\cap A_n$ soient aussi des événements

Scanné avec CamScanner

lorsque les A_n sont des événements. Cette dernière propriété est importante lorsque Ω n'est plus un ensemble fini. On parle alors de σ-algèbre d'événements :

Définition : On dit que $\mathcal{A}$ est une σ-algèbre si

1) $\varnothing \in \mathcal{A}$
2) $A \in \mathcal{A}$
   $B \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A},\ A \cup B \in \mathcal{A},\ A \cap B \in \mathcal{A}$
3) $\forall n \geqslant 1 \quad A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

1.1.3. Exemples

Exemple 1) La σ-algèbre d'événements, engendrée par une partition.

Si
$$\Omega = \{1, 2, \ldots, 52\} \quad \text{et} \quad A_1 = \{3, 6, 9, \ldots\},$$
$$A_2 = \{1, 4, 7, \ldots\}, \quad A_3 = \{2, 5, 8, \ldots\}$$

En utilisant les opérations de passage au complémentaire, réunion finie, intersection finie, cette partition de Ω engendre la σ-algèbre

$$\mathcal{A} = \{\varnothing, \Omega, A_1, A_2, A_3, A_1 \cup A_2, A_1 \cup A_3, A_2 \cup A_3\}$$

On pourrait faire la même chose avec

$$\Omega = [0, 1] \quad A_1 = [0, 1/3], \quad A_2 =]1/3, 2/3], \quad A_3 =]2/3, 1]$$

Exemple 2) La σ-algèbre engendrée par les ouverts de $[0, 1]$: les boréliens de $[0, 1]$. Il s'agit de la plus petite σ-algèbre contenant tous les ouverts ; c'est aussi la plus petite σ-algèbre contenant tous les intervalles. On remarque qu'un point est un élément de la σ-algèbre,

$$\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right[$$

L'ensemble des rationnels de $[0, 1]$ qui est une réunion dénombrable de points est donc aussi un borélien ; par ailleurs il n'est ni ouvert ni fermé.

1.2. MESURE DES ÉVÉNEMENTS : PROBABILITÉ

Avant d'effectuer l'expérience on ne sait pas si l'événement A sera réalisé ou non ; la donnée d'une probabilité permet de mesurer les chances pour que A se réalise.

1.2.1. Définition

P est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ si P est une application de $\mathcal{A}$ dans

Scanné avec CamScanner

$[0, 1]$ vérifiant :

1) $P(\Omega) = 1$

2) $P\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n P(A_n)$ si les événements A_n sont 2 à 2 disjoints et forment une suite finie ou dénombrable.

1.2.2. Propriétés de P

— En utilisant 2) avec A et A^c, on obtient

$$P(A) + P(A^c) = P(\Omega) = 1$$

relation que l'on écrit

$$\boxed{P(A^c) = 1 - P(A)}$$

En particulier

$$\boxed{P(\varnothing) = 0}$$

— Si A et B sont deux événements, $A \cup B$ se décompose en réunion disjointe :

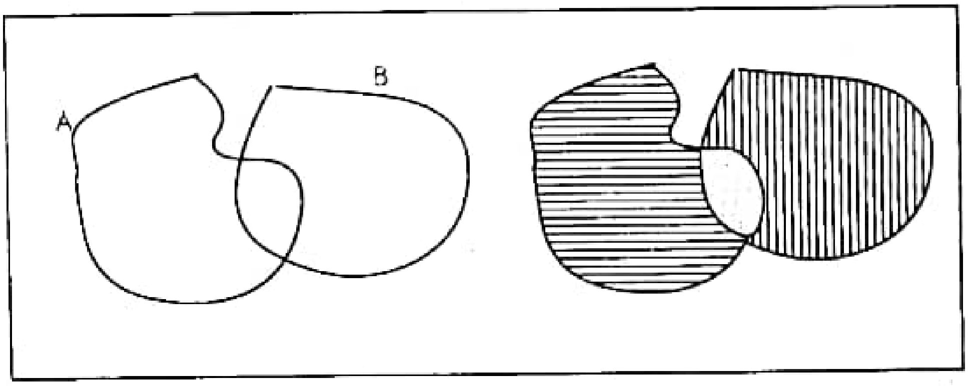

Figure 1.3.

On en déduit la formule utile,

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

— Si $A \supset B$, $A = B \cup (A \backslash B)$

et

$$\boxed{P(A \backslash B) = P(A) - P(B) \quad \text{si} \quad A \supset B}$$

Scanné avec CamScanner

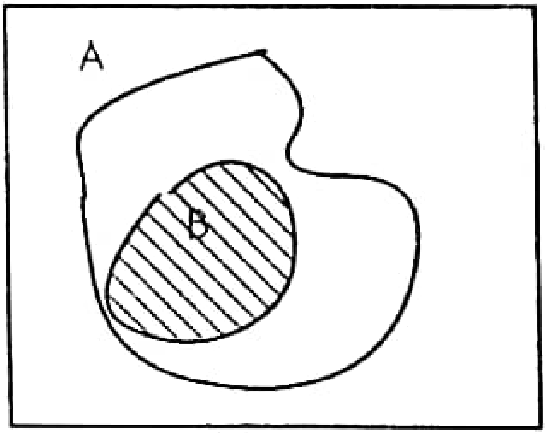

Figure 1.4.

— Si la suite d'événements A_n est croissante

$$\cup A_n = A_1 \cup (A_2 \backslash A_1) \cup \cdots = A_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n \cup \cdots$$

avec

$$\begin{aligned} B_2 &= A_2 \backslash A_1 \\ B_3 &= A_3 \backslash (A_1 \cup B_2) = A_3 \backslash A_2 \\ &\cdots \\ B_n &= A_n \backslash A_{n-1} \\ &\cdots \end{aligned}$$

Les événements B_n sont deux à deux disjoints et on obtient

$$P\left(\bigcup_n A_n\right) = \lim_n P(A_n)$$

On a le même résultat dans le cas d'une suite décroissante : la probabilité de l'intersection des A_n est la limite des probabilités.

Exemples :

Exemple 1)

$$\begin{aligned} \Omega &= \{1, 2, \ldots, 52\} \\ \mathcal{A} &= \mathcal{P}(\Omega) \quad \text{et} \quad P(\{k\}) = 1/52 \end{aligned}$$

On a alors

$$P(A) = \text{card}(A)/52$$

Tous les points de Ω ont la même probabilité : on dit que la probabilité est uniforme.

Scanné avec CamScanner

Exemple 2)

$$\Omega = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$$

avec les probabilités respectives 1/9, 2/9, 2/9, 4/9.

Ω est un ensemble à 4 éléments ; P n'est pas uniforme.

1.2.3. Formules d'analyse combinatoire

Ces formules sont maintenant au programme des classes de Terminales ; en voici un bref rappel :

Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments, est égal à $n!$.

Le nombre de façons de choisir p objets parmi n, noté C_n^p, est

$$\boxed{C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}} \quad \text{pour} \quad 0 \leq p \leq n$$

Le nombre de façons de choisir p objets parmi n, en tenant compte de l'ordre est noté A_n^p

$$\boxed{A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}} \quad \text{pour} \quad 0 \leq p \leq n$$

1.3. INDÉPENDANCE ET PROBABILITÉ CONDITIONNELLE

1.3.1. Définition

A et B sont dits indépendants si $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont dits indépendants si

$$P(B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n) = P(B_1)\,P(B_2) \ldots P(B_n)$$

dès que B_i est égal à A_i ou son complémentaire.

On remarquera la différence avec « les événements sont 2 à 2 indépendants » (voir E.1.5).

1.3.2. Probabilité conditionnelle

On va maintenant définir la probabilité conditionnelle notée $P(A/B)$, probabilité pour que A se réalise sachant que B est réalisé. Regardons sur un exemple où tous les chiffres sont fictifs. Si dans la population la proportion de

Scanné avec CamScanner

personnes qui fument est de 60 %, que l'on connaît la proportion de cancers de la gorge parmi les fumeurs et parmi les non-fumeurs, on en déduit le schéma :

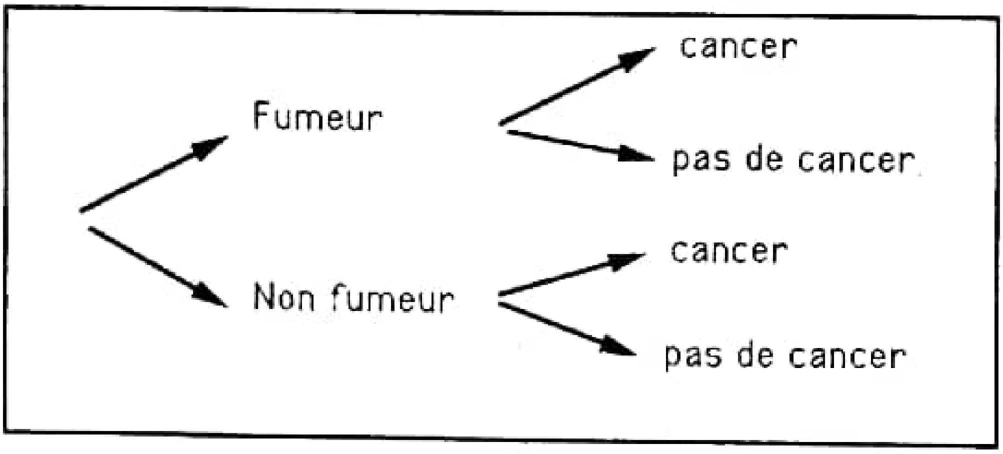

Figure 1.5.

La proportion de cancers dans la population totale est égale à la probabilité pour qu'une personne tirée au hasard soit atteinte ; de même la proportion de cancers parmi la population des fumeurs est égale à la probabilité pour qu'une personne tirée au hasard parmi les fumeurs soit atteinte ;

$$\text{proport. de cancers parmi les fumeurs} = \frac{\text{Nbre de fumeurs atteints/Nbre total}}{\text{Nbre de fumeurs/Nbre total}}$$

Définition : Si $P(B) \neq 0$, on pose $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

$P(A/B)$ est appelée probabilité conditionnelle de A sachant B.

Remarque : On utilisera souvent la relation

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A/B)\,P(B)}$$

Application : Construction d'une probabilité par la donnée de probabilités conditionnelles. Considérons un labyrinthe avec une entrée et 9 sorties ; on ne fait pas de retour en arrière et à chaque bifurcation on tire la direction à pile ou face (Fig. 1.6) :

Dans ces conditions

$$P(\text{on sort par } 1) = 1/2$$
$$P(\text{on sort par } 2) = (1/2)(1/2)(1/2)$$
$$\dots$$

Sur cet exemple, les tirages effectués à chaque bifurcation sont indépendants.

Scanné avec CamScanner

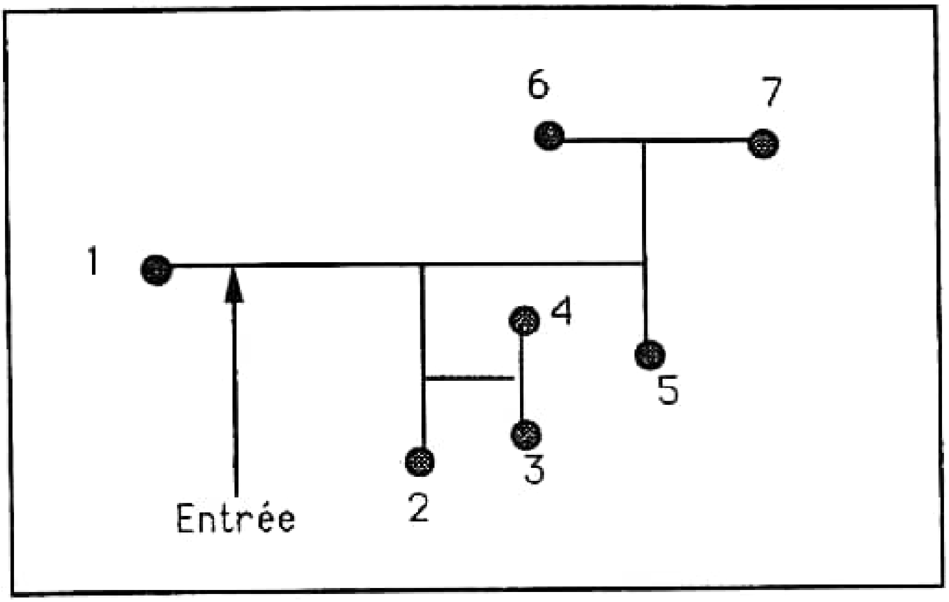

Figure 1.6.

1.3.3. Formule de Bayes

En utilisant la décomposition en événements disjoints

$$P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B)$$

on a

$$\boxed{P(A/B) = \frac{P(B/A)\,P(A)}{P(B/A)\,P(A) + P(B/A^c)\,P(A^c)}}$$

On remarque que cette formule renverse le conditionnement.

1.3.4. Généralisation et exemple

Si $B_1, B_2, \ldots, B_k$ forment une partition de Ω, comme sur la figure 1.7 où $k = 5$,

alors on peut écrire

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \cdots + P(A \cap B_k)$$

et

$$P(B_1/A) = \frac{P(A/B_1)\,P(B_1)}{P(A/B_1)\,P(B_1) + \cdots + P(A/B_k)\,P(B_k)}$$

Scanné avec CamScanner

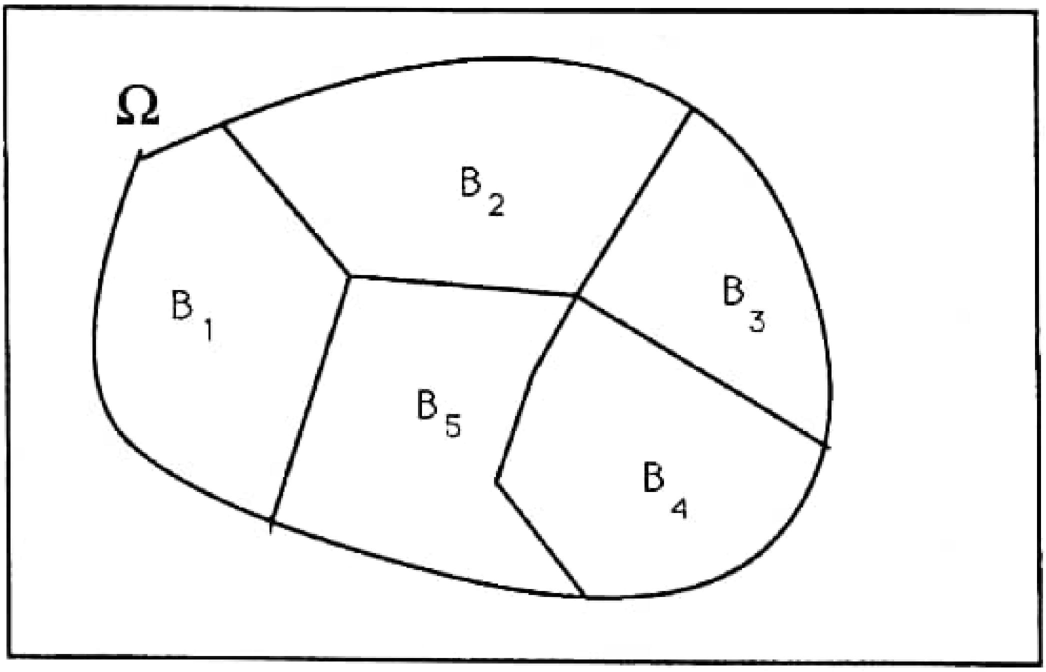

Figure 1.7.

Exemple : Une image peut comporter soit un objet rouge, soit un objet jaune soit un objet vert et ceci avec les probabilités respectives 0,5, 1/3, 1/6. Un système permet de détecter automatiquement. mais cette détection n'est pas certaine et se fait avec la probabilité 0,1 si il s'agit de l'objet rouge 0,2 et 0,9 respectivement pour les objets jaune et vert. On fait un essai et la réponse est positive ; quel objet a le plus de chances d'être présent ? Pour traiter cet exemple on pose

B_1 = {présence de l'objet rouge }
B_2 = {présence de l'objet jaune }
B_3 = {présence de l'objet vert }

L'énoncé nous donne

$$P(B_1) = 0{,}5 \qquad P(B_2) = 1/3 \qquad P(B_3) = 1/6$$
$$P(A/B_1) = 0{,}1 \qquad P(A/B_2) = 0{,}2 \qquad P(A/B_3) = 0{,}9$$

On en déduit $P(B_1/A) = 3/16$, $P(B_2/A) = 4/16$ et $P(B_3/A) = 9/16$. C'est donc l'objet vert qui a le plus de chances d'être présent.

Scanné avec CamScanner

1.4. EXPÉRIENCE ALÉATOIRE DE DURÉE ILLIMITÉE

1.4.1. Jeu de pile ou face de durée illimitée

En notant 0 si on obtient pile et 1 si on obtient face, l'espace des épreuves au temps n varie avec n :

$$\begin{array}{ll} \text{au temps } 1 & \Omega_1 = \{0,1\} \\ \text{au temps } 2 & \Omega_2 = \{00, 01, 10, 11\} = \{0, 1\}^2 \\ \text{au temps } n & \Omega_n = \{0, 1\}^n \end{array}$$

La probabilité au temps $n+1$ est compatible avec la probabilité au temps n au sens où c'est une extension. Dans ce cas, un théorème de Kolmogorov nous dit qu'il existe une probabilité sur $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ qui prolonge toutes ces probabilités, théorème que nous admettrons ; l'énoncé est donné en annexe ; pour la démonstration, voir par exemple, « Bases mathématiques du calcul des probabilités » de J. Neveu Ed. Masson).

1.4.2. Jeu de pile ou face et codage binaire : construction de la mesure de Lebesgue

Si x est un nombre réel de $[0, 1]$, on le code en binaire de la manière suivante :

$$\begin{array}{ll} \text{si } x \in [0, 1/2[& \text{le premier chiffre binaire est } 0 \\ \text{si } x \in [1/2, 1] & \text{le premier chiffre binaire est } 1 \end{array}$$

pour le deuxième chiffre binaire on applique le procédé ci-dessus à $2(x - x_1)$ en appelant x_1 ce premier chiffre binaire :

$$\begin{array}{ll} x \in [0, 1/4[& \to 00 \\ x \in [1/4, 1/2[& \to 01 \\ x \in [1/2, 3/4[& \to 10 \\ x \in [3/4, 1[& \to 11 \end{array}$$

Cela correspond à la division des intervalles :

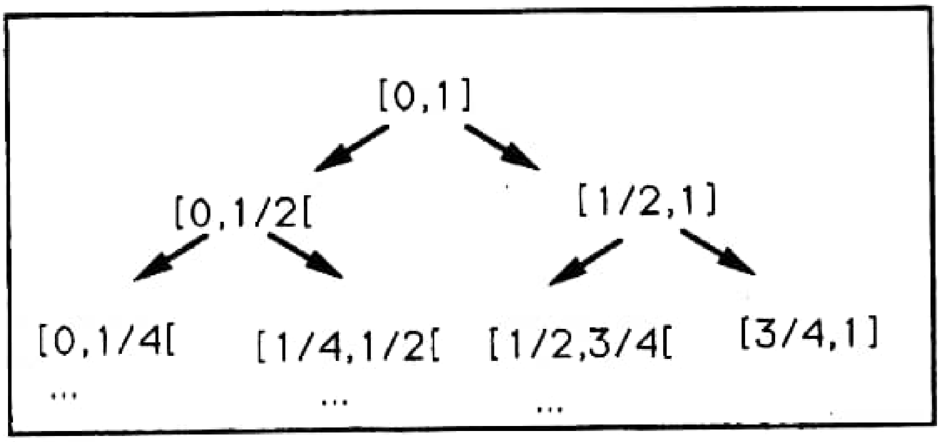

Figure 1.8.

On continue indéfiniment pour obtenir le codage binaire d'un point x quelconque.

Réciproquement, étant donné une suite infinie de 0, 1 notée x_n, on peut lui associer un nombre réel entre 0 et 1 en posant

$$\phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n}$$

Ces deux applications sont inverses l'une de l'autre mais un point peut avoir plusieurs codages binaires : 1/2 s'obtient comme l'image de la suite $(1, 0, \ldots)$ et de la suite $(0, 1, 1, \ldots)$. De manière générale, les suites

$$(x_1 x_2, \ldots, x_n, 0, 1, 1 \ldots)$$

et

$$(x_1 x_2, \ldots, x_n, 1, 0, 0 \ldots)$$

ont même image. Retirons les suites qui n'ont que des 0 à partir d'un certain rang, soit S cet ensemble de suites ; l'application devient une bijection sur $[0, 1]$. Si on met sur $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, la probabilité du jeu de pile ou face, l'ensemble des suites qui n'ont que des 0 à partir d'un certain rang, est de probabilité nulle :

$$S = \bigcup_n \{\text{ens. des suites qui n'ont que des 0 à partir du rang } n\}$$

S est donc dénombrable ; la probabilité de n'importe quel point de S est nulle :

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots) = \lim_{p \to \infty} 1/2^p = 0$$

On construit alors une mesure sur $[0, 1]$, appelée mesure de Lebesgue en posant

$$\lambda(A) = P(\text{ens. des suites } x_1, \ldots, x_n \ldots \text{ telles que } \phi(x_1, x_2, \ldots) \in A)$$

Avec cette définition,

$$\lambda([0, 1/2[) = \lambda([0, 1/2]) = P(\text{ens. des suites qui commencent par } 0) = 1/2$$

et de façon générale

$$\lambda([k/2^n, (k+1)/2^n[) = 1/2^n$$

Tout intervalle peut être approché par des intervalles du type $[k/2^n, (k+1)/2^n[$ et on obtient

$$\lambda([a, b[) = \lambda([a, b]) = \lambda(]a, b[) = b - a$$

La mesure de Lebesgue peut ensuite être prolongée à $\mathbb{R}$ par translation.

D'autre part si on considère les rationnels de $[0, 1]$, on a

$$\lambda(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) = \sum \lambda(q_n) = \sum 0 = 0$$

Scanné avec CamScanner

Si on tire un nombre réel au hasard entre 0 et 1, on a 100 % de chances d'obtenir un irrationnel. L'événement « on a tiré un nombre rationnel entre 0 et 1 » est possible mais improbable ; l'expérience est en fait impossible à réaliser puisqu'il faudrait manipuler autre chose que des nombres décimaux.

1.5. CHAÎNES DE MARKOV HOMOGÈNES

1.5.1. Introduction et définitions

Il s'agit d'un modèle simple qui permet de décrire une évolution aléatoire à temps discret. L'expérience est de durée illimitée comme dans le jeu de Pile ou Face. L'évolution ne dépend du passé que par le dernier instant.

Soit E un ensemble fini ou dénombrable dont les éléments sont notés e_1, e_2, ..., appelé ensemble des états.

Définitions :

1) Soit π une matrice $k \times k$ si E a k éléments, infinie si E est infini ; π est appelé une probabilité de transition entre les états si ses éléments $\pi_{i,j}$ vérifient

$$\begin{cases} 0 \leqslant \pi_{i,j} \leqslant 1 & \forall i, j \\ \sum_j \pi_{i,j} = 1 & \forall i \end{cases}$$

2) On dit que le système évolue suivant une chaîne de Markov homogène si il existe une probabilité de transition π telle que

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}(\text{état } b \text{ à l'instant } n+1/\text{état } a_0 \text{ à l'instant } 0, \text{ état } a_1 \text{ à l'instant } 1, \ldots, \\ &\qquad\qquad\qquad \text{état } a_n \text{ à l'instant } n) \\ &\qquad = \mathrm{P}(\text{état } b \text{ à l'instant } 1/\text{état } a_n \text{ à l'instant } 0) \\ &\qquad = \pi_{a_n, b} \text{ si on confond } \pi_{e_i, e_j} \text{ avec } \pi_{i,j} \end{aligned}$$

Remarque : Pour une définition plus générale de système markovien (espace d'états non nécessairement discret, espace de temps non nécessairement discret, chaînes non homogènes dans le temps) on pourra consulter le livre de Dynkin « Théorie des processus markoviens » Ed. Dunod.

Représentation : Lorsque l'espace d'états E est fini, on peut représenter l'évolution du système de façon concise par un graphe où figurent les probabilités de transition entre états ; l'exemple le plus simple est celui d'un canal de transmission qui transmet des symboles binaires 0, 1 avec une proportion ε d'erreurs. Si les symboles binaires passent dans plusieurs canaux successifs,

Scanné avec CamScanner

l'évolution est markovienne suivant le graphe :

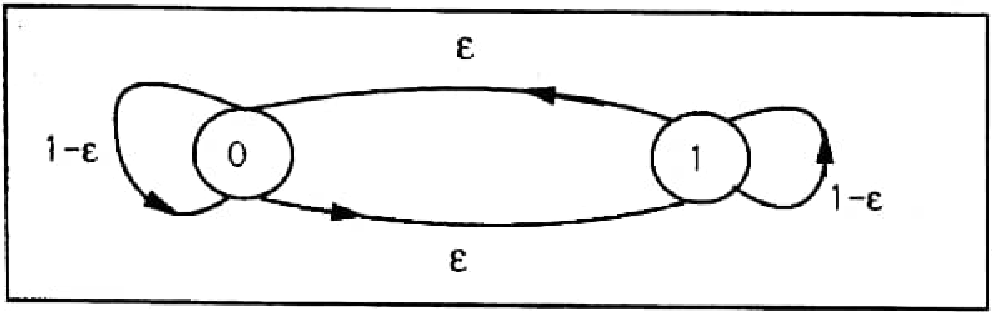

Figure 1.9.

1.5.2. Exemple

Voici un exemple en marketing : on s'intéresse à la part de marché d'un certain produit. Pour une personne prise au hasard, on considère l'expérience associée aux différents achats :

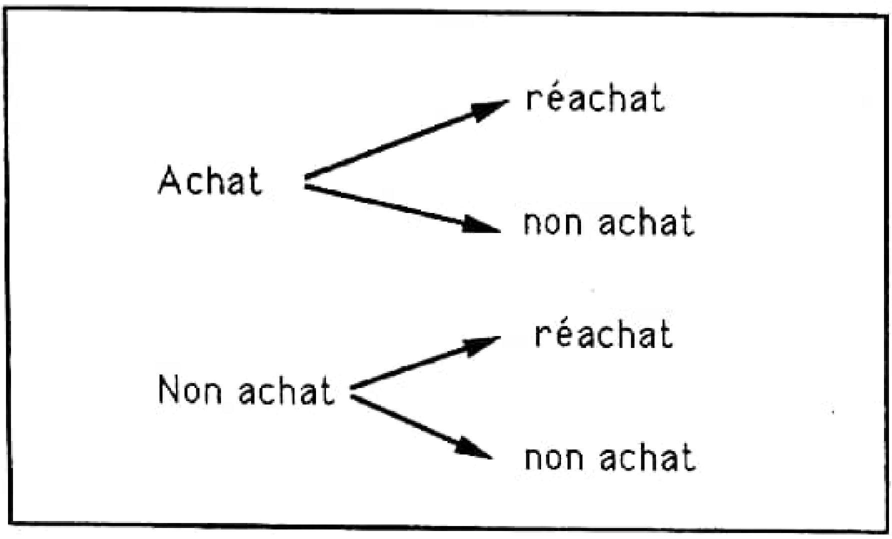

Figure 1.10.

Si l'on note 1 lorsque la personne achète le produit et 0 lorsqu'elle ne l'achète pas, on peut décrire l'expérience par une suite de 0 et 1.

Supposons que la probabilité de passage d'un état, 0 ou 1, à un état, 0 ou 1, ne dépende pas de l'instant où il a lieu ni des instants précédents (on dit que l'on a une chaine de Markov homogène). On peut alors faire des calculs de probabilité sur l'instant N, regarder l'évolution...

Supposons p et p' non égaux à 0 ou 1 (dans le cas contraire l'évolution est plus simple à étudier). La matrice de transition entre états est la matrice 2×2 suivante :

$$\pi = \begin{pmatrix} p' & 1 - p' \\ p & 1 - p \end{pmatrix}$$

Appelons μ la loi initiale c'est-à-dire

$${}^t\mu = (\mu_0, \mu_1) = (\mathrm{P}(0 \text{ à l'instant } 0), \mathrm{P}(1 \text{ à l'instant } 0))$$

μ_1 est la part de marché initiale.

Par récurrence sur n, on montre que la loi à l'instant n vérifie l'équation matricielle

$$(\mathrm{P}(0 \text{ à l'instant } n), \mathrm{P}(1 \text{ à l'instant } n)) = {}^t\mu\, \pi^n$$

En utilisant les valeurs propres et vecteurs propres de π on montre alors la convergence de la loi de l'état à l'instant n vers (ν_0, ν_1) :

$$\nu_0 = \frac{1}{1 + \dfrac{1-p'}{1-p}} \qquad \nu_1 = \frac{\dfrac{1-p'}{1-p}}{1 + \dfrac{1-p'}{1-p}}$$

${}^t\nu$ vérifie la propriété d'invariance : ${}^t\nu\pi = \nu$ et la convergence a lieu quelle que soit la loi initiale ce qui veut dire que la part de marché se stabilise sur ν_1 quelle que soit la part de marché initiale. Certaines des propriétés rencontrées sur cet exemple sont toujours vraies ; plus précisément on a toujours la relation matricielle,

$$(\mathrm{P}(e_1 \text{ à l'instant } n)\, \mathrm{P}(e_2 \text{ à l'instant } n), \ldots, \mathrm{P}(e_k \text{ à l'instant } n)) =$$
$$= (\mathrm{P}(e_1 \text{ à l'instant } 0), \mathrm{P}(e_2 \text{ à l'instant } 0), \ldots)\, \pi^n$$

et si la loi de l'état à l'instant n converge, alors la limite est une probabilité invariante par π :

$$(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k) = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k)\, \pi$$

La convergence n'a pas toujours lieu ; en effet si E a 3 éléments et que l'on prend la matrice de transition π :

$$\pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

la probabilité invariante par π est $(1/3, 1/3, 1/3)$; si on part du premier état e_1, $\mathrm{P}(e_1$ à l'instant $n)$ est égal à 1 si n est multiple de 3, à 0 sinon.

Scanné avec CamScanner

1.5.3. Notions fondamentales dans l'étude des chaînes

L'une des notions fondamentales est la façon dont on passe d'un état à l'autre, plus précisément on définit ρ_{xy} par

$$\rho_{xy} = \mathrm{P}\,(\text{on passe par } y/\text{état } x \text{ à l'instant } t = 0\ )$$

En particulier, ρ_{xx} est la probabilité de revenir en x sachant que l'on est parti de x.

On dit que deux états communiquent si ρ_{xy} et ρ_{yx} sont tous deux non nuls.

Un état x est dit de période d si en partant de x les retours à x n'ont lieu qu'à des instants multiples de d au sens où

$$d = \text{pgcd}\ \{n \text{ tel que } n \geq 1 \text{ et } \mathrm{P}\,(\text{état } x \text{ à l'instant } n/\text{état } x \text{ à l'instant } t = 0\ )\}$$

L'état x est dit *apériodique* si $d = 1$.

1.5.4. Principaux résultats

1.5.4.1. *Etats récurrents et états transients*

Proposition : Si ρ_{xx} est égal à 1 alors on passe, avec probabilité 1, une infinité de fois par x en partant de x et x est appelé un état récurrent. Si ρ_{xx} est strictement inférieur à 1 alors, en partant de x, on ne passe, avec probabilité 1, qu'un nombre fini de fois par x ; dans ce cas x est appelé un état transient.

Démonstration succincte : On note $\mathrm{P}_y(\mathrm{A})$ la probabilité d'un événement A conditionnellement au fait que l'on part de y. On montre alors l'égalité,

$$\mathrm{P}_y(\text{on passe au moins une fois par } x\ ) = \rho_{yx}$$

On considère maintenant l'événement « on passe au moins deux fois par x ».

$$\mathrm{A}\ y \text{ fixé}\ ,\quad \mathrm{A} \mapsto \mathrm{P}_y(\mathrm{A}) \text{ étant une probabilité}\ ,$$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_y(&\text{on passe au moins 2 fois par } x\ ) = \\ &= \mathrm{P}_y(\text{on passe au moins 2 fois par } x/\text{on passe au moins 1 fois par } x\ ) \\ &\quad \times \mathrm{P}_y(\text{on passe au moins 1 fois par } x\ )\end{aligned}$$

On montre alors l'égalité

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_y(&\text{on passe au moins 2 fois par } x/\text{on passe au moins 1 fois par } x\ ) = \\ &= \mathrm{P}\,(\text{on passe au moins 1 fois par } x/\text{on part de } x\ ) \\ &= \rho_{xx}\end{aligned}$$

et on en déduit

$$\mathrm{P}_y(\text{on passe au moins 2 fois par } x\ ) = \rho_{yx}\,\rho_{xx}$$

Scanné avec CamScanner

On montre de même

$$P_y(\text{on passe au moins } n \text{ fois par } x) = \rho_{yx}\,\rho_{xx}^{n-1}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} P_y(\text{on passe une infinité de fois par } x) &= \\ &= P_y\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\{\text{on passe au moins } n \text{ fois par } x\}\right) \\ &= \lim_{n\to+\infty} P_y(\text{on passe au moins } n \text{ fois par } x) \\ &= \begin{vmatrix} 0 & \text{si} & \rho_{xx} < 1 \\ \rho_{yx} & \text{si} & \rho_{xx} = 1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat avancé en prenant $y = x$.

1.5.4.2. *Classification des états*

Un état x est soit récurrent soit transient ; il a une période notée d ; si il est récurrent, l'instant de premier retour est fini avec la probabilité 1 mais peut être d'espérance infinie (voir chap. 2 pour la définition de l'espérance).

Proposition : Soient x et y deux états distincts ; si x et y communiquent alors ils sont de même nature, plus précisément :

a) ils sont tous deux récurrents ou tous deux transients ;

b) ils ont même période ;

c) si ils sont récurrents, les temps de retour sont tous deux d'espérance finie ou tous d'espérance infinie.

On trouvera la démonstration dans « Processus stochastiques » de Chrétienne et Faure.

On en déduit la classification des états en états transients regroupés dans l'ensemble E_T et états récurrents qui communiquent :

$$E = E_T \cup (C_1 \cup \cdots \cup C_i \ldots)$$

Chaque classe C_j est constituée d'états qui communiquent ; deux classes C_i, C_j distinctes ne communiquent pas et lorsqu'on rentre dans une classe C_j on n'en sort plus.

Par exemple, si on considère la matrice de transition suivante :

$$\pi = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/8 & 0 & 7/8 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 & 1/5 & 1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$$

Scanné avec CamScanner

On trouve que les états 4 et 6 sont transients
1 et 2 sont récurrents et communiquent
3 et 5 sont récurrents et communiquent.

1.5.4.3. *Probabilité invariante*

On trouvera dans l'ouvrage cité ci-dessus le théorème suivant

Théorème : Si tous les états sont :

— récurrents,
— apériodiques
— avec un temps moyen de retour fini

alors il existe une probabilité invariante unique et quel que soit l'état de départ, lorsque n tend vers l'infini, la loi de l'état à l'instant n se stabilise sur cette probabilité invariante.

EXERCICES

E.1.1. En suivant les notations du paragraphe 1.1.2, on considère le système suivant, constitué de trois branches en parallèle.

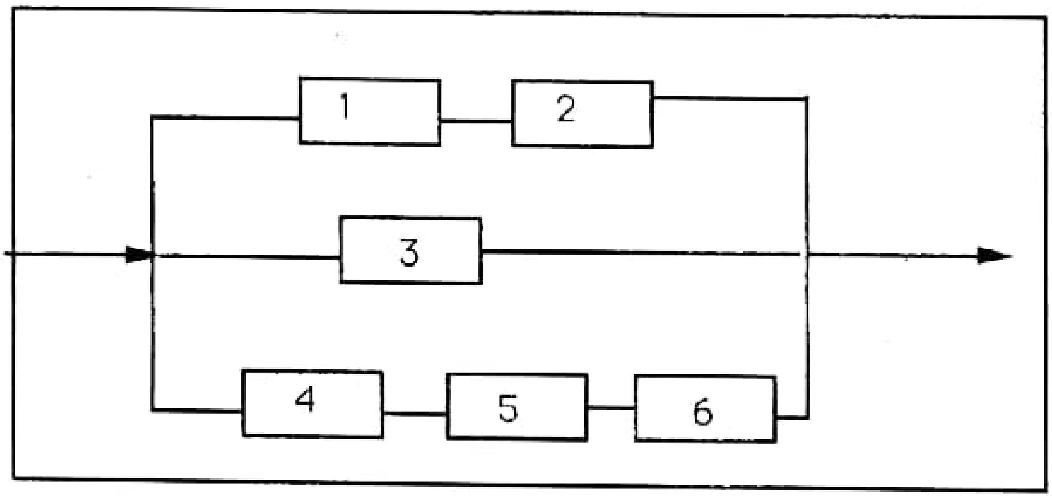

Figure E.1.1.

Exprimer l'événement A = {le système fonctionne} en utilisant les événements B_i = {l'élément i fonctionne}.

Scanné avec CamScanner

E.1.2. On tire une carte au hasard dans un jeu de 52 cartes. Les événements

A = {la carte représente un personnage}
B = {il s'agit d'un carreau}
C = {la couleur est noire}

Sont-ils disjoints ? Calculer leur probabilité respective ainsi que celles des intersections 2 à 2.

E.1.3. On reprend l'exercice E.1.2. Les événements A et B sont-ils indépendants ?

E.1.4. Montrer que si A et B sont indépendants alors A et B^c sont indépendants ainsi que A^c et B, A^c et B^c.

E.1.5. Montrer que si $A_1, A_2, \ldots, A_k$ sont indépendants alors $A_1, A_2, \ldots, A_{k-1}$ sont indépendants (ce qui montre la cohérence de la définition).

E.1.6. Soient a, b, c des réels entre 0 et 1. A quelle condition peut-on les interpréter comme des probabilités conditionnelles :

$$a = P(A/A \cup B) \quad b = P(B/B \cup C) \quad c = P(C/A \cup C)$$

où A, B, C sont des événements deux à deux disjoints ?

On rencontre ce problème en Marketing : a est la préférence du client pour un objet lorsqu'il est mis en présence de 2 objets...

E.1.7. Deux boîtes B_1, B_2 contiennent des boules noires et des boules rouges : 10 noires, 5 rouges pour B_1, 3 noires, 7 rouges pour B_2. On choisit une boîte au hasard puis une boule au hasard dans la boîte. Quelle est la probabilité d'obtenir une rouge ?

E.1.8. Un nouveau test est utilisé pour déceler une maladie. On constate que lorsque le patient est malade, le test est positif dans 90 % des cas alors que si le patient n'est pas malade, il est négatif dans 85 % des cas. Un patient se présente. Le test est positif. Quelle est la probabilité pour qu'il soit atteint si on sait qu'il y a 5 % de personnes atteintes dans la population.

E.1.9. On tire deux cartes au hasard dans un jeu de 32 cartes. Calculer la probabilité d'obtenir deux rois conditionnellement au fait qu'il y a une carte rouge et une carte noire.

E.1.10. On considère un système constitué de deux appareils en parallèle (de sorte que le système fonctionne dès que l'un des appareils fonctionne). Chaque appareil est muni d'un système de détection de panne. Le système de détection n'est pas parfait mais il est fiable, c'est-à-dire qu'il ne tombe pas en panne.

Le réparateur quant à lui ne peut réparer qu'un appareil à la fois.

Tracer le graphe de transition entre états, analogue à la figure 1.9 sans indiquer les probabilités, si on appelle état 1 « les 2 appareils fonctionnent », état 2 « un appareil est en panne et la panne est détectée », état 3 « un appareil est en panne

Scanné avec CamScanner

et la panne n'est pas détectée », état 4 « les deux appareils sont en panne ». (Quand on est dans l'état 4, le système ne fonctionne plus et il y a alarme.)

E.1.11. On considère un réseau de stations qui émettent des informations sur un canal partagé. Le temps est discret : $t = 0, 1, \ldots$ A chaque instant, les stations essaient ou non d'envoyer un message et le canal ne transmet qu'un message à la fois. Dans le protocole ALOHA, si il y a conflit pour l'accès au canal, les stations réessaient chacune de transmettre leur message avec la probabilité p et ceci jusqu'au succès final (p est un paramètre). On appelle a_j la probabilité de j nouvelles arrivées (indépendantes du temps). Montrer que l'on a une évolution markovienne, si on appelle état k « il y a k messages en attente qui essaient de passer sur le canal », de probabilité de transition π donnée par :

$$\begin{cases} \pi_{0,j} = a_j \, ; \quad j = 0, 1, \ldots \\ \pi_{i,i-1} = a_0 \, i p (1-p)^{i-1} \\ \pi_{i,i} = a_1 (1-p)^i + a_0 [1 - i p (1-p)^{i-1}] \\ \pi_{i,i+1} = a_1 [1 - (1-p)^i] \\ \pi_{i,i+j} = a_j \quad \text{si} \quad j \geq 2 \end{cases}$$

Scanné avec CamScanner

CORRIGÉ DES EXERCICES

Chapitre 1

E.1.1. $A = [B_1 \cap B_2] \cup B_3 \cup [B_4 \cap B_5 \cap B_6]$

E.1.2. $A \cap B = \{\text{personnage du carreau}\} \neq \varnothing$

$$A \cap C = \{\text{personnage à trèfle ou à pique}\} \neq \varnothing$$
$$B \cap C = \varnothing$$
$$P(A) = 3/13 \quad P(B) = 1/4 \quad P(C) = 1/2$$
$$P(A \cap B) = 3/52 \quad P(A \cap C) = 3/26 \quad P(B \cap C) = 0$$

E.1.3. $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$; A et B sont donc indépendants ce qui confirme l'intuition.

E.1.4. $P(A \cap B^c) + P(A \cap B) = P(A)$

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) = P(A)[1 - P(B)] = P(A)\,P(B^c)$$

A et B^c sont donc indépendants ; il en sera donc de même pour A^c et B, A^c et B^c.

E.1.5. Soit $B_1, \ldots, B_{k-1}$ une suite d'événements tels que $B_i = A_i$ ou A_i^c

$$P(B_1 \cap B_2 \ldots \cap B_{k-1}) =$$
$$= P(B_1 \cap B_2 \ldots \cap B_{k-1} \cap A_k) + P(B_1 \cap B_2 \ldots \cap B_{k-1} \cap A_k^c)$$

$B_1, \ldots, B_{k-1}$ sont donc indépendants et toute sous famille finie sera aussi constituée d'événements indépendants.

E.1.6. On doit avoir $a = \dfrac{P(A)}{P(A)+P(B)} \ldots$ Il est donc nécessaire d'avoir $(1-a)(1-b)(1-c) = abc$. Réciproquement si cette condition est remplie, en prenant

$$P(A) = \frac{1}{1 + \dfrac{1-a}{a} + \dfrac{1-b}{b} \times \dfrac{1-a}{a}},$$

on a bien $a = \dfrac{P(A)}{P(A)+P(B)} \ldots$ et $P(A) + P(B) + P(C) = 1$.

E.1.7.

$$P(\text{rouge}) = P(\text{rouge/boîte } 1)\,P(\text{boîte } 1) + P(\text{rouge/boîte } 2)\,P(\text{boîte } 2)$$
$$= 31/60$$

Scanné avec CamScanner

E.1.8.

$$P(\text{atteint/test positif}) = (0{,}05 \times 0{,}9)/[0{,}05 \times 0{,}9 + 0{,}95 \times 0{,}15] = 31{,}6\ \%$$

E.1.9.

$$P(1 \text{ carte rouge et } 1 \text{ carte noire}) = 2\left[\frac{1}{2} \times \frac{26}{51}\right] = \frac{26}{51} = 50{,}98\ \%$$

$$P(\text{roi rouge et roi noir}) = 2\left[\frac{2}{52} \times \frac{2}{51}\right] = \frac{2}{13 \times 51} = 0{,}3\ \%$$

$$P(2 \text{ rois}/1 \text{ rouge et } 1 \text{ noir}) = 1/169 = 0{,}6\ \%$$

E.1.10.

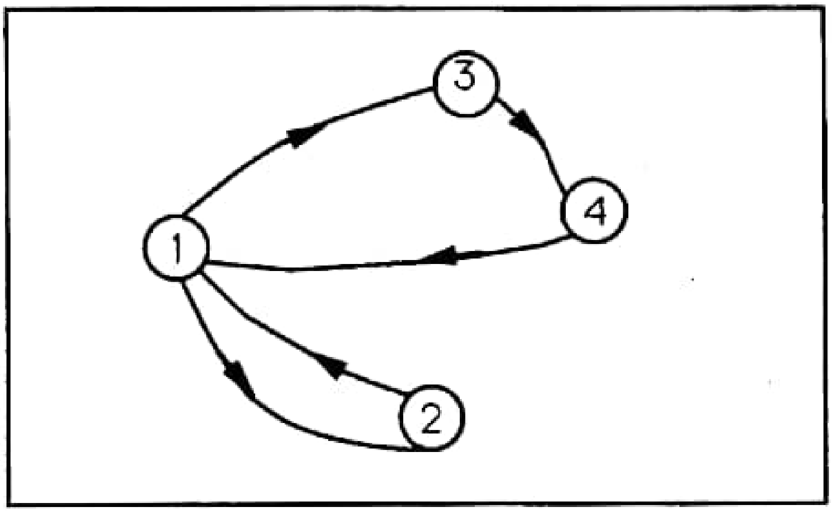

Figure E.1.10.

E.1.11. Si au temps t, il y a n messages en attente (en conflit), chacun essaie de repasser au temps $t + 1$. Le nombre de messages en attente diminue de un, à condition qu'il n'y ait pas d'arrivée et qu'un seul émette.

Si un seul nouveau message se présente, il passe sur le canal de transmission à condition que les messages en attente n'émettent pas.

Chapitre 2

E.2.1. Y suit une loi uniforme sur $\{0, 1, 2\}$ (proba. 1/3 pour chaque valeur).

E.2.2. $\dfrac{P(X = k + 1)}{P(X = k)} > 1 \Leftrightarrow k \leq 5$. Le maximum a lieu pour $k = 6$.

E.2.3. $P(X = 1) = 11/12$; $P(X = 2) = 1/12$;
$P(Y = -1) = 5/6$; $P(Y = 10) = 1/12$; $P(Y = 100) = 1/72$;
$P(Y = -10) = \dfrac{5}{72}$

E.2.4. $P(aX < t) = P\left(X < \dfrac{t}{a}\right) = 1 - e^{-\lambda \frac{t}{a}}$ si $a > 0$.

Scanné avec CamScanner