



Université Assane SECK de Ziguinchor

**UE: Magnétisme et ondes dans le vide (PH2310)
2014 - 2015**

Dr. Ababacar NDIAYE

Enseignant-Chercheur

Département de Physique

UFR Sciences et Technologies

Organisation du cours

Crédits : 5

Volume horaire : 24 CM – 24 TD – 12 TP

Plan du cours

Chapitre I: Champ Magnétique

Chapitre II: Dipôle Magnétique

Chapitre III: Particule Chargée dans un Champ Electrique ou Magnétique

Chapitre IV: Electromagnétisme et Induction Electromagnétique

Chapitre V: Ondes Electromagnétiques dans le vide

Introduction générale (1)

Un peu d'histoire

Développement historique des phénomènes magnétiques

Electrostatique : Etude des interactions entre charges fixes réparties de manière continue ou discrète.

Cela a conduit à la définition du champ et du potentiel électrostatiques. Lors de cette analyse, tout mouvement de charges était exclu.

Magnétisme : On considère les interactions entre charges électriques en mouvement. Certains phénomènes magnétiques ont été découverts à la même époque que ceux liés à l'électrisation.

Dans l'antiquité, on connaissait le pouvoir attracteur de la « pierre d'aimant » ou magnétite constituée essentiellement d'oxyde de fer Fe_3O_4 . Aristote parle aussi de l'aimantation temporaire du fer doux.

Plus tard, au cours du moyen âge, on a constaté qu'un aimant libre à la surface de la terre prenait une orientation privilégiée proche de celle d'un méridien, ce qui a conduit à l'appellation nord et sud des extrémités d'un aimant. Cette orientation a été largement exploitée en navigation.

La boussole, par exemple, a été mise au point par les chinois il y a environ 1000³ans.

Introduction générale (2)

D'autres faits expérimentaux ont été notés comme la **répulsion** des pôles de même nom et de l'**attraction** de ceux de nom différent.

Ce n'est qu'au début du XIXe siècle que le magnétisme connut des progrès rapides avec la mise en évidence en 1820 par Hans Christian Oersted (1777-1851) de l'**effet d'un courant électrique sur un aimant** : ce dernier s'oriente perpendiculairement au fil traversé par un courant et le sens de l'orientation change avec celui du courant.

André Marie **Ampère** (1775-1836), Pierre Simon de **Laplace** (1749-1827), Jean Baptiste **Biot** (1774-1862) et Félix **Savart** (1791-1841) multiplient les observations et construisent le modèle associé aux effets du champ magnétique.

Les corps magnétiques peuvent **créer des effets magnétiques mais aussi en subir**. L'expérience de Laplace montre qu'une barre mobile sur des rails formant un circuit électrique se déplace lorsqu'on approche un aimant : la barre traversée par un courant subit un effet magnétique de la part de l'aimant.

Introduction générale (3)

A partir de 1890, Joseph John Thomson (1856-1940) étudie les rayons cathodiques ou faisceaux d'électrons émis par une cathode ; il **montre l'action d'un champ magnétique sur des électrons**.

Ces observations conduisent à exprimer la force d'origine magnétique subie par une particule chargée animée d'une vitesse v . Ce sera le point de départ pour définir le champ magnétique dans la suite de ce cours.

Ces observations peuvent être faites indépendamment des phénomènes électrostatiques car la plupart des corps magnétiques sont électriquement neutres.



Université Assane SECK de Ziguinchor

UE: Magnétisme et ondes dans le vide (PH2310)

Champ magnétique

Dr. Ababacar NDIAYE

Enseignant-Chercheur

Département de Physique

UFR Sciences et Technologies

I. Définition du champ magnétique

I.1. Observations expérimentales des actions magnétiques

Soit une particule chargée dans un champ magnétique (aimant par ex.), on a :

- pas de force subie par elle pour une direction particulière de la vitesse notée \vec{v} ,
- pour toute autre direction de la vitesse \vec{v} , la force est perpendiculaire à la fois à \vec{u} et \vec{v} ,
- l'intensité de la force est proportionnelle à :
 - . la vitesse de la particule ,
 - . au sinus de l'angle entre \vec{v} et \vec{u} .

I.2. Force de Lorentz

Les observations conduisent à écrire cette force, sous la forme suivante :

$$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

On définit ainsi le champ magnétique \vec{B} par son action sur une particule de charge q et animée d'une vitesse \vec{v} tout comme le champ électrostatique avait été défini par son action sur une particule de charge q au repos.

On notera que les champs électrique et magnétique dépendent du référentiel dans lequel on les considère (puisque la vitesse en dépend).

I.3. Ordre de grandeur

Dans les unités du système international, la force s' exprime en newton (N), la charge en coulombs (C) et la vitesse en mètre par seconde (ms^{-1}). L'unité du champ magnétique est donc parfaitement déterminée à partir de sa définition ; on l'appelle tesla, de symbole T.

Dans certains cas on utilise une autre unité : le gauss de symbole G tel que $1\text{G} = 10^{-4}\text{T}$

Quelques valeurs usuelles du champ magnétique :

Situation	Valeur (T)
Champ magnétique terrestre	$0,2 \cdot 10^{-4} - 0,4 \cdot 10^{-4}$
Entrefer d'un électroaimant	$0,1 - 2$
Bobine supraconductrice	$5 - 50$

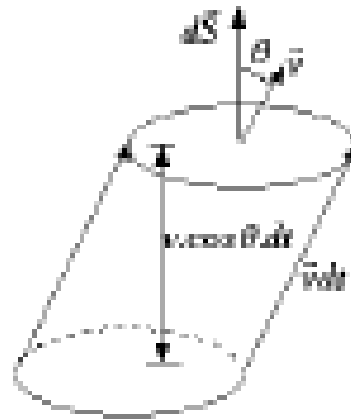
I.4. Intensité du courant

On appelle enfin *densité de courant* la grandeur $\vec{j} = \rho \vec{v}$

Il en résulte que l'élément de courant est dans ce contexte $\vec{j} dV$; ce n'est pas une propriété physique mais une conséquence des définitions.

On se place, pour alléger l'exposé, dans le cas où il n'y a qu'un seul type de charges mobiles.

$$\delta q = \rho dS v dt \cos \theta = \rho \vec{v} \cdot \vec{dS} dt = \vec{j} \cdot \vec{dS} dt$$



L'intensité est le débit de charges soit $I = \frac{\delta q}{dt} = \vec{j} \cdot \vec{dS}$.

I.4. Principe de superposition

Soient deux champs magnétiques \vec{B}_1 et \vec{B}_2 .

Une particule de charge q animée d'une vitesse \vec{v} subit une force magnétique \vec{F}_1 due à \vec{B}_1 et une force magnétique \vec{F}_2 due à \vec{B}_2 avec :

$$\vec{F}_1 = q\vec{v} \wedge \vec{B}_1 \quad \text{et} \quad \vec{F}_2 = q\vec{v} \wedge \vec{B}_2$$

Au total, elle est soumise à l'action de la somme des forces comme le stipule le principe fondamental de la dynamique:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = q\vec{v} \wedge (\vec{B}_1 + \vec{B}_2) = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

Tout se passe comme s'il n'y avait qu'un seul champ magnétique

Cela résulte de la linéarité des équations. Le principe de superposition s'applique au champ magnétique comme il s'appliquait au champ électrostatique.

II. Symétrie du champ magnétique

II.1. Invariances des lois de la magnétostatique

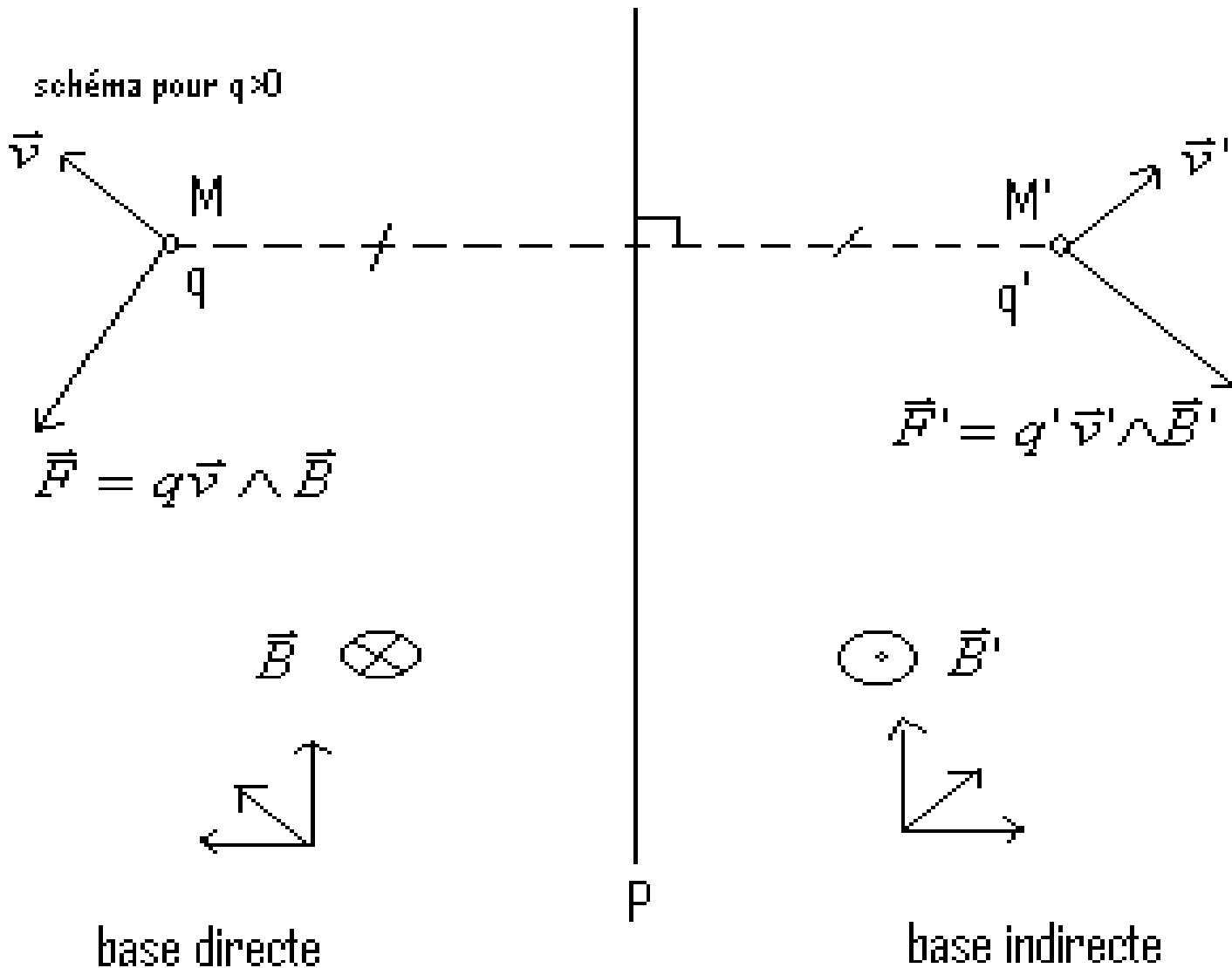
L'espace est supposée homogène isotrope : aucune direction et aucune origine n'est privilégiée.

Par conséquent, les lois de la magnétostatique doivent également respecter cette propriété d'invariance : *quel que soit le déplacement envisagé, les lois de la magnétostatique sont les mêmes avant et après déplacement.* Par exemple, *la force de Lorentz s'exprime par la même relation avant et après.*

On a utilisé cette propriété en électrostatique, on va faire de même en magnétostatique.

II.2. Caractère axial du champ magnétique – notion de pseudo-vecteur

On cherche la manière dont est transformé le champ magnétique par une symétrie par rapport à un plan.



Champ magnétique et symétrie par rapport à un plan

Soit une charge ponctuelle q placée en M où règne un champ magnétique \vec{B} et animée d'une vitesse \vec{v} . Elle subit la force : $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$.

On considère la symétrie par rapport au plan P . la charge q devient la charge $q' = q$ du fait de son caractère invariant et se trouve en M' , symétrique de M par rapport à P . Elle est animée d'une vitesse \vec{v}' symétrique de \vec{v} par rapport à P . Elle subit donc la force \vec{F}' symétrique de \vec{F} par rapport à P . L'invariance des lois de l'électromagnétisme permet d'avoir la même écriture pour la relation entre force, vitesse et champ magnétique :

$$\vec{F}' = q\vec{v}' \wedge \vec{B}'$$

La définition du produit vectoriel implique alors que : $\vec{B}' = -\vec{B} = -\text{sym}_P(\vec{B})$

L'image par la symétrie par rapport à un plan P du champ magnétique \vec{B} est égal à l'opposé du symétrique de \vec{B} par rapport au plan P .

La démonstration qui vient d'être faite correspond au cas où le champ magnétique \vec{B} est parallèle au plan P et perpendiculaire à la vitesse \vec{v} . Elle se généralise à toutes les positions relatives du champ magnétique \vec{B} .

Une telle propriété caractérise les pseudo-vecteurs ou vecteurs axiaux : ***le champ magnétique \vec{B} est un pseudo-vecteur ou un vecteur axial***. C'est dû au fait qu'il est défini par un produit vectoriel.

II.3. Distribution présentant un plan de symétrie

Soit une distribution D de densité de charges \vec{j} admettant le plan P comme plan de symétrie. D' , la distribution symétrique de D par rapport au plan P , est identique à la distribution D puisque P est un plan de symétrie. En notant \vec{j}' sa densité de charges, on a donc pour tout point M de l'espace: $\vec{j}(M) = \vec{j}'(M')$ (1) où M' est le symétrique de M par rapport au plan P .

D' autre part, on a établi au paragraphe précédent que:

$$\vec{B}'(M') = -\text{sym}_P(\vec{B}(M)) \quad (2)$$

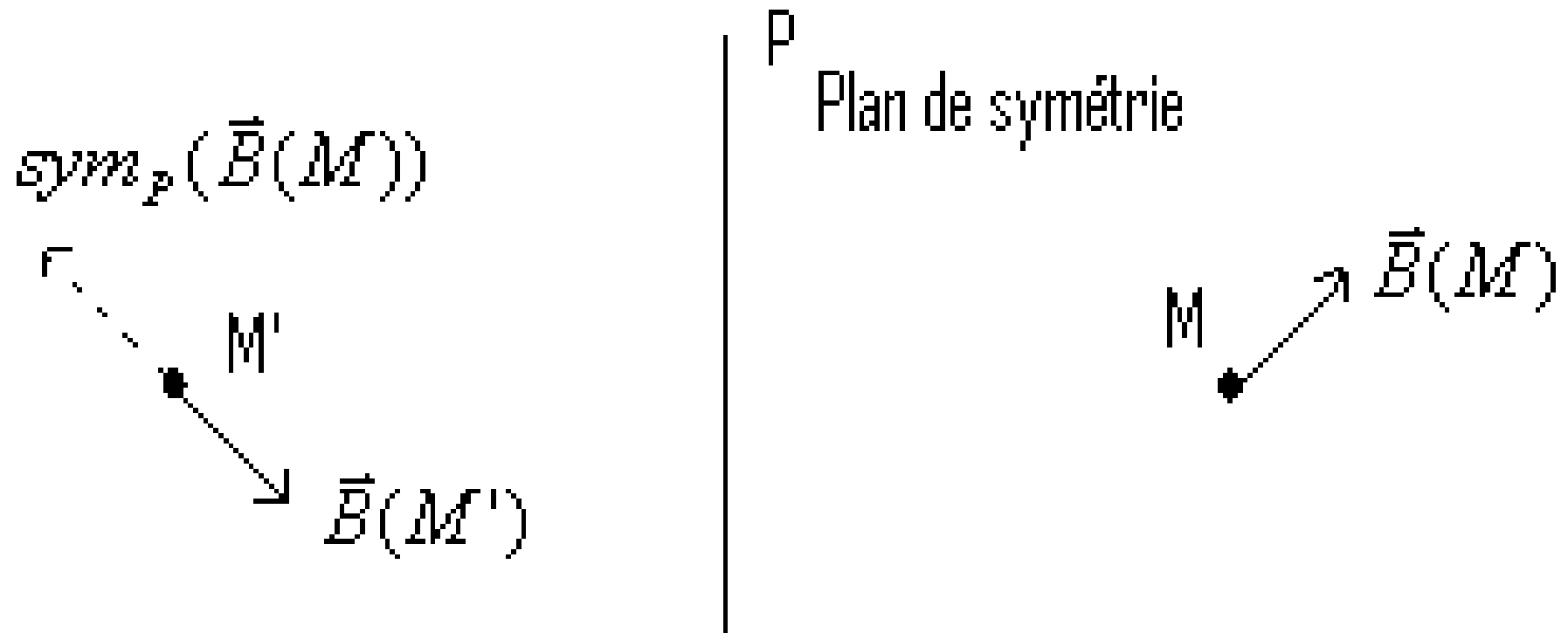
En notant le champ \vec{B}' créé par la distribution D' symétrique de D par rapport au plan P et \vec{B} le champ créé par la distribution D .

Or d'après le principe de Curie, le champ magnétique créé en M' l'est soit par D soit par D' , ce qui se traduit compte tenu de l'équation (1) par :

$$\vec{B}'(M') = \vec{B}(M')$$

En utilisant la relation (2), on obtient donc : $\vec{B}(M') = -\text{sym}_P(\vec{B}(M))$

Le champ magnétique créé en un point M' symétrique d'un point M par rapport à un plan de symétrie de la distribution est égal à l'opposé du symétrique du champ magnétique créé en M .



Champ magnétique et plan de symétrie

Si M appartient à un plan de symétrie des sources (P par exemple), $M' = M$. On en déduit donc que: $\vec{B}(M) = -sym_P(\vec{B}(M))$

Ce qui se traduit en utilisant les indices t et n respectivement pour les composantes tangentielle et normale au plan P :

$$\begin{cases} \vec{B}_t(M) = -\vec{B}_t(M) \\ \vec{B}_n(M) = \vec{B}_n(M) \end{cases}$$

D' où : $\vec{B}_t(M) = \vec{0}$

Le champ magnétique n' a donc qu' une composante normale sur les plans de symétrie de la distribution qui le crée : il est perpendiculaire au plan de symétrie de la distribution de courants qui le crée.

Le champ magnétique est perpendiculaire aux plans de symétrie de la distribution qui le crée.

II.4. Distribution présentant un plan d'antisymétrie

Soit une distribution D de densité de charges \vec{j} admettant le plan P comme plan d'antisymétrie.

D' , la distribution symétrique de D par rapport au plan P , est l'opposé de la distribution D puisque P est un plan d'antisymétrie. En notant \vec{j}' sa densité de charges, on a donc pour tout point M de l'espace:

$$\vec{j}(M) = -\vec{j}'(M') \quad (1)$$

Où M' est le symétrique de M par rapport au plan P .

On a établi que: $\vec{B}'(M') = -\text{sym}_P(\vec{B}(M))$ (2)

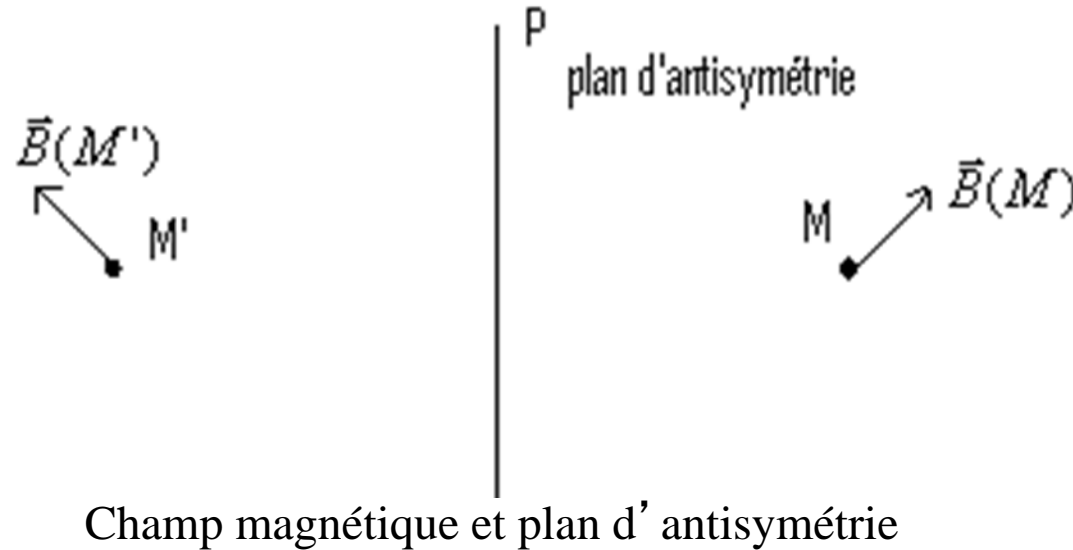
En notant \vec{B}' le champ créé par la distribution D' symétrique de D par rapport au plan P et \vec{B} le champ créé par la distribution D .

Or d'après le principe de Curie, le champ magnétique créé en M' l'est soit par D soit par D' , ce qui se traduit compte tenu de (1) par :

$$\vec{B}'(M') = -\vec{B}(M')$$

En utilisant la relation (2), on obtient donc : $\vec{B}(M') = \text{sym}_P(\vec{B}(M))$

Le champ magnétique créé en un point M' symétrique d'un point M par rapport à un plan d'antisymétrie de la distribution est égal au symétrique du champ magnétique créé en M .



Si M appartient à un plan d'antisymétrie des sources (par exemple le plan P), $M' = M$. On en déduit donc que: $\vec{B}(M) = \text{sym}_P(\vec{B}(M))$

Ce qui se traduit en utilisant les indices t et n respectivement pour les composantes tangentielle et normale au plan P :

$$\begin{cases} \vec{B}_t(M) = \vec{B}_t(M) \\ \vec{B}_n(M) = -\vec{B}_n(M) \end{cases}$$

D'où : $\vec{B}_n(M) = \vec{0}$

Le champ magnétique n'a donc que des composantes tangentielles sur les plans d'antisymétrie de la distribution qui le crée : il appartient au plan d'antisymétrie de la distribution de courants qui le crée.

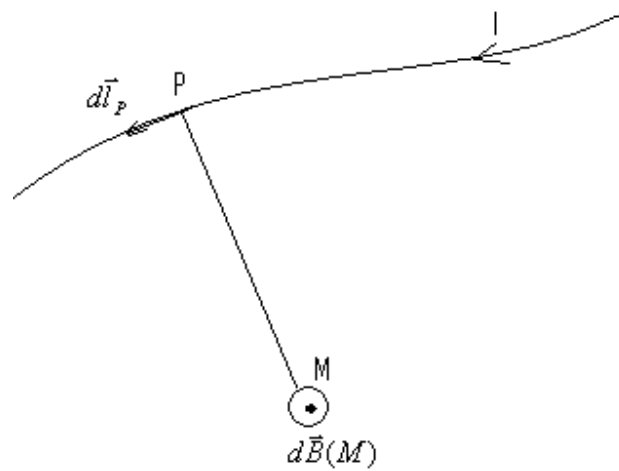
Le champ magnétique appartient aux plans d'antisymétrie de la distribution qui le crée.

III. Loi de Biot et Savart

III.1. Enoncé de la loi de Biot et Savart

La loi de Biot et Savart a été postulée puisqu'elle permettait de rendre compte de la réalité du champ magnétique observé. Elle sera admise sans démonstration pour un circuit filiforme (contraintes du programme en L2).

Soit un circuit filiforme parcouru par un courant d'intensité I . Une longueur dl_P de ce circuit a une densité linéique de courant $I d\vec{l}_P$ dans le sens de parcours du courant.



Le champ magnétique élémentaire créé par cet élément de courant s'écrit :

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} I(P) d\vec{l}_P \wedge \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

La quantité μ_0 est une constante universelle portant le nom de perméabilité du vide. Elle vaut : $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$

Elle est liée à la permittivité du vide ϵ_0 et à la vitesse de la lumière dans le vide c par la relation : $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{P \in \text{circuit}} I(P) d\vec{l}_P \wedge \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

III.2. Cas d' une charge en mouvement

Dans ce cas, l' élément de courant $Id\vec{l}_p$ s' écrit $q\vec{v}$ en notant q la valeur de la charge située au point P et \vec{v} sa vitesse.

Dans le cas où \vec{v} est quasi-constante et que sa valeur soit petite devant celle de la lumière, on obtient l' expression suivant pour le champ magnétique créé en un point M :

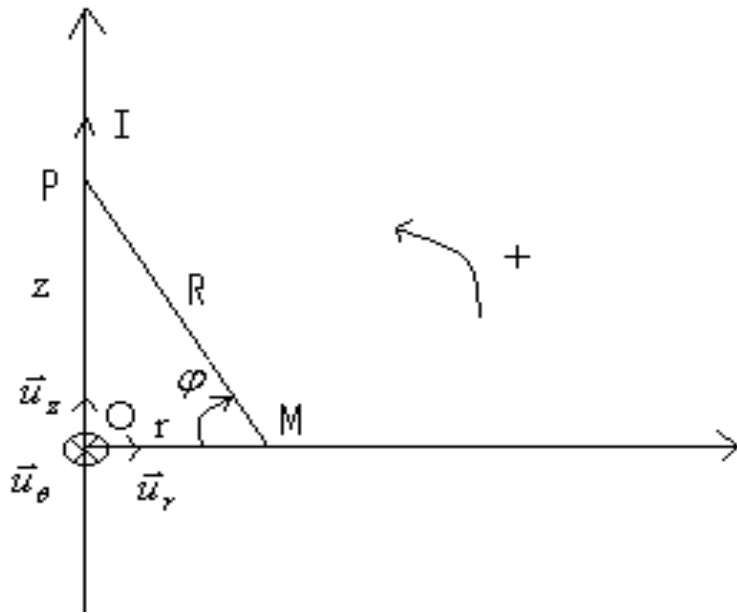
$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

On vérifie sur cet exemple que les observations expérimentales sont en accord avec l' expression proposée par Biot et Savart: le champ magnétique $\vec{B}(M)$ est perpendiculaire à la vitesse de la particule.

Si les hypothèses précédentes ne sont pas vérifiées, on ne peut pas exprimer le champ magnétique $\vec{B}(M)$ créé au point M par cette expression : il faut considérer que les charges sont relativistes. D' autre part, les courants sont variables, ce qui sera exclu ici puisqu' on s' est placé en régime statique ou permanent.

On peut noter que l'approximation de non relativité qui n'est pas valable pour une charge seule le devient dans le cadre général où on considère un ensemble de courants permanents pour lequel on considère une vitesse moyenne.

III.3 Application : cas du fil rectiligne infini



$$\begin{aligned}\vec{B}(M) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} I \vec{dl} \wedge \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} Idz \vec{u}_z \wedge \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}\end{aligned}$$

$$\text{Or } \overrightarrow{PM} = r\vec{u}_r - z\vec{u}_z$$

Donc $\vec{u}_z \wedge \overrightarrow{PM} = r\vec{u}_\theta$ et en utilisant les notations de la figure ci-dessus :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} Idz \frac{r}{R^3} \vec{u}_\theta$$

On a deux variables non indépendantes z et R (r est une constante puisqu'elle repère le point où on calcule le champ et non les points de la distribution sur lesquels on intègre).

On va effectuer un changement de variables et utiliser φ comme nouvelle et unique variable. On notera qu'il s'agit d'un angle orienté comme indiqué sur le schéma (pour lequel $\varphi < 0$).

On a : $\cos \varphi = \frac{r}{R} \quad \text{donc} \quad R = \frac{r}{\cos \varphi}$

$$\tan \varphi = -\frac{z}{r} \quad \text{donc} \quad z = -r \tan \varphi \quad \text{et} \quad dz = -r(1 + \tan^2 \varphi) d\varphi = -\frac{r}{\cos^2 \varphi} d\varphi$$

$$\varphi \text{ varie de } +\frac{\pi}{2} \text{ à } -\frac{\pi}{2} \text{ quand } z \text{ varie } -\infty \text{ à } +\infty$$

Donc :

$$\begin{aligned} \vec{B}(M) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{+\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{-r}{\cos^2 \varphi} d\varphi \frac{r \cos^3 \varphi}{r^3} \vec{u}_\theta \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \varphi}{r} d\varphi \vec{u}_\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} [\sin \varphi]_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \vec{u}_\theta \end{aligned}$$

Soit finalement :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

III.4 Interactions magnétiques

III.4.1 Action d'un champ magnétique sur une particule chargée

La définition du champ magnétique est obtenue à partir de son action sur une particule de charge q animée d'une vitesse : $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$

C'est aussi à partir de cette force de Lorentz qu'on peut définir les interactions magnétiques.

III.4.2. Force de Laplace

Soit un circuit filiforme parcouru par une intensité I . Les porteurs de charges de ce circuit subissent la force exprimée au paragraphe précédent soit, compte tenu de la distribution linéique de charges envisagée ici :

$$d\vec{F} = Id\vec{l} \wedge \vec{B}$$

On justifiera à partir de l'effet Hall que cette force subie par les porteurs de charges d'un circuit filiforme se transmet à l'élément de circuit. Cette force dite force de Laplace :

$$d\vec{F} = Id\vec{l} \wedge \vec{B}$$

Permet d'expliquer l'expérience du même nom. Une barre constituant un élément du circuit est parcourue par un courant d'intensité I .

La présence d'un champ magnétique conduit à l'existence d'une force perpendiculaire à la barre, expliquant le mouvement de cette dernière.

III.4.3 Définition légale de l'ampère

Elle est basée sur l'interaction entre deux fils conducteurs infinis et parallèles. D'après le calcul effectué plus haut, le fil 1 crée un champ magnétique :

$$\vec{B}_1(M) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

En notant r la distance du point M au fil rectiligne et en utilisant les coordonnées cylindriques.

Une longueur l du fil 2 subit donc une force magnétique :

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = I_2 l \vec{u}_z \wedge \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1}{d} \vec{u}_\theta = -\frac{\mu_0}{2\pi} I_1 I_2 \frac{l}{d} \vec{u}_r$$

L'ampère est l'intensité d'un courant constant qui, maintenu dans deux conducteurs rectilignes, infinis, parallèles, de section circulaire négligeable et distants de 1 m produit une force d'interaction entre ces deux conducteurs égale à $2 \cdot 10^{-7}$ N par mètre de conducteurs.

On fixe en même temps la constante μ_0 ou valeur de la perméabilité du vide à $4\pi 10^{-7} \text{H.m}^{-1}$

IV. Propriétés du champ magnétique

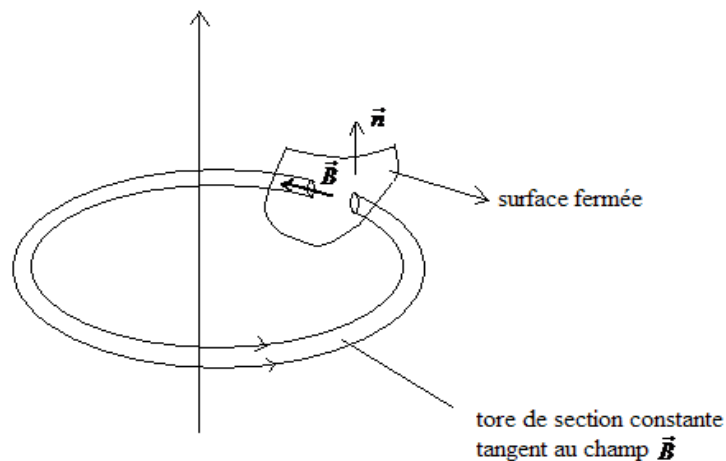
IV.1 Conservation du flux

IV.1.1 Cas du fil rectiligne infini

On a établi précédemment à partir de la loi de Biot et Savart que le champ magnétique créé par un fil pouvait s'écrire en coordonnées cylindriques :

$$\vec{B}_1(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\varphi$$

Soit un tore de section S constante centré sur l'axe du fil parcouru par un courant. Le flux du champ magnétique à travers toute section du tore est le même: le champ est colinéaire au vecteur surface orienté et la valeur du champ ne dépend que de la distance au fil qui est constante.



Le tore intercepte une surface fermée un nombre pair de fois, le flux étant alternativement entrant et sortant. Les contributions au flux sur la surface fermée sont donc opposées et au total s'annulent.

Pour décrire la totalité d'une surface fermée, il suffit de faire la même chose avec d'autres tores.

Le flux du champ magnétique créé par un fil infini à travers une surface fermée est donc nul.

IV.1.2 Cas d'un élément de courant

Soit un élément de courant $I \vec{dl} = I dl \vec{u}_z$ situé à l'origine O.

On a les mêmes propriétés de symétrie que pour le cas du fil rectiligne du paragraphe précédent. Il crée en $M(r, \theta, z)$ le champ magnétique élémentaire

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \vec{u}_z \wedge (r\vec{u}_r - z\vec{u}_z)}{(r^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi} \frac{r}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \vec{u}_\theta$$

On prend un tore identique à celui du paragraphe précédent et le flux du champ magnétique élémentaire sera le même à travers toute section du tore.

On obtient donc le même résultat au final: le flux du champ magnétique élémentaire à travers une surface fermée est nul.

IV.1.3 Généralisation

D'après la loi de Biot et Savart, le champ magnétique dans le cas général résulte de la superposition des champs élémentaires :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{P \in D} I d\vec{l}_P \wedge \frac{\vec{PM}}{PM^3}$$

En notant D la distribution.

Le calcul du flux à travers une surface orientée est une opération linéaire :

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_{M \in S} \vec{B}(M) \cdot d\vec{S}_M = \int_{M \in S} \int_{P \in D} \frac{\mu_0}{4\pi} I d\vec{l}_P \wedge \frac{\vec{PM}}{PM^3} \cdot d\vec{S}_M \\ &= \int_{M \in S} \int_{P \in D} d\vec{B}_P \cdot d\vec{S}_M = \int_{P \in D} \int_{M \in S} d\vec{B}_P \cdot d\vec{S}_M = 0 \end{aligned}$$

Car P et M sont indépendants l'un de l'autre, on peut donc intervertir l'ordre des intégrales. On intègre sur la distribution des contributions de flux élémentaires nulles d'après le paragraphe précédent.

Le flux du champ magnétique à travers toute surface fermée est nul. On dit que le champ magnétique est à flux conservatif.

IV.2 Circulation du champ magnétique – Théorème d'Ampère

IV.2.1 Exemple du fil rectiligne infini

On a établi que le champ créé par un fil rectiligne infini s'exprime en coordonnées cylindriques par :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\varphi$$

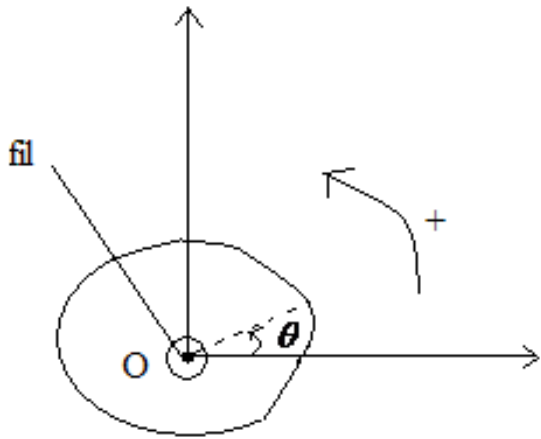
Le calcul de la circulation du champ magnétique le long d'un contour C donne en coordonnées cylindriques :

$$\oint_{M \in C} \vec{B}(M) \cdot d\vec{OM} = \oint_C \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\varphi \cdot (dr\vec{u}_r + r d\varphi \vec{u}_\varphi + dz\vec{u}_z) = \oint_C \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint_C d\varphi$$

On doit distinguer le cas où le contour C encercle le fil rectiligne infini et le cas où il ne l'encercle pas :

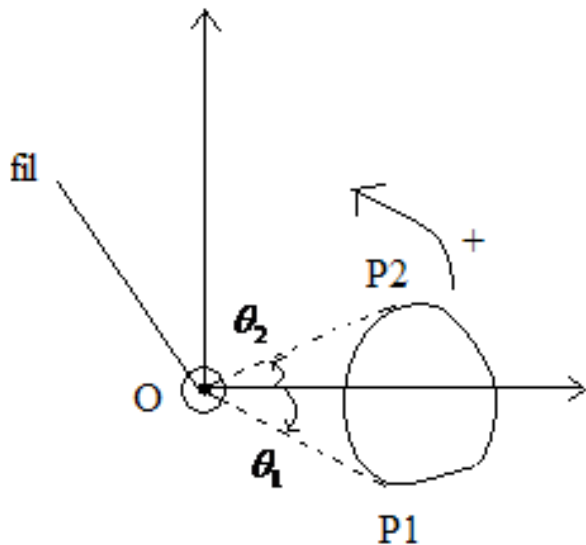
- le contour C encercle le fil rectiligne infini : on dit que C enlace le fil. Dans ce cas, on prend l'origine du repère à l'intérieur du fil et

$$\oint_{M \in C} d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi$$



- le contour C n'encercle pas le fil rectiligne infini. On a alors la situation ci-contre.

$$\oint_{M \hat{=} C} dq = \oint_{q(P_1)}^{q(P_2)} dq + \oint_{q(P_2)}^{q(P_1)} dq = (q_2 - q_1) + (q_1 - q_2) = 0$$



On en déduit : $\oint_{M \hat{=} C} \vec{B}(M) \cdot d\vec{OM} = 0$

IV.2.2 Énoncé du Théorème d'Ampère

Ce résultat se généralise à toute distribution de courants par le théorème d'Ampère.

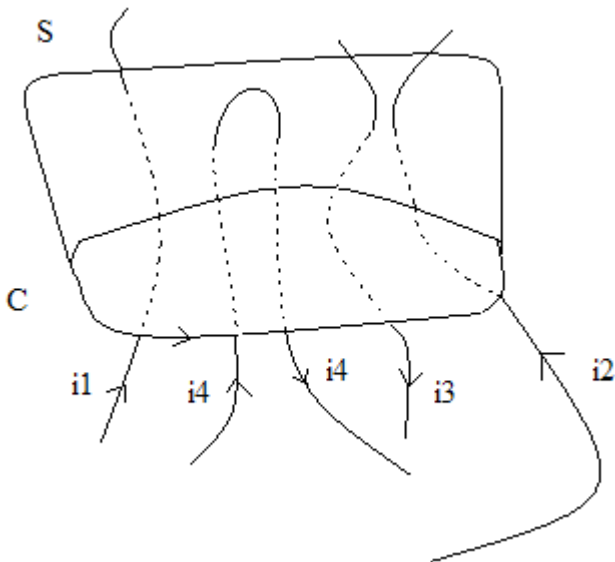
La circulation du champ magnétique le long d'un contour fermé C est égale au produit de μ_0 par l'intensité totale qui traverse une surface quelconque s appuyant sur C :

$$\oint_{M \in C} \vec{B}(M) \cdot d\vec{OM} = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$$

Sur l'exemple de la figure ci-contre,

$$I_{\text{enlacé}} = i_1 + i_2 - i_3 + i_4 - i_4 = i_1 + i_2 - i_3$$

Ce résultat est admis ici et sera établi à partir des équations de Maxwell.



IV.3 Topographie

Comme pour le champ électrostatique, on étudie la topographie du champ magnétique et on trace les cartes de champs. On définit donc les lignes de champ et les tubes de champ comme pour n'importe quel champ vectoriel.

IV.3.1 Lignes de champ

On rappelle qu'une ligne de champ est définie comme la courbe constamment tangente au champ, ici au champ magnétique.

$$\vec{B}(M) \wedge d\overrightarrow{OM} = \vec{0} \text{ ou } \vec{B}(M) = k(M)\overrightarrow{OM}$$

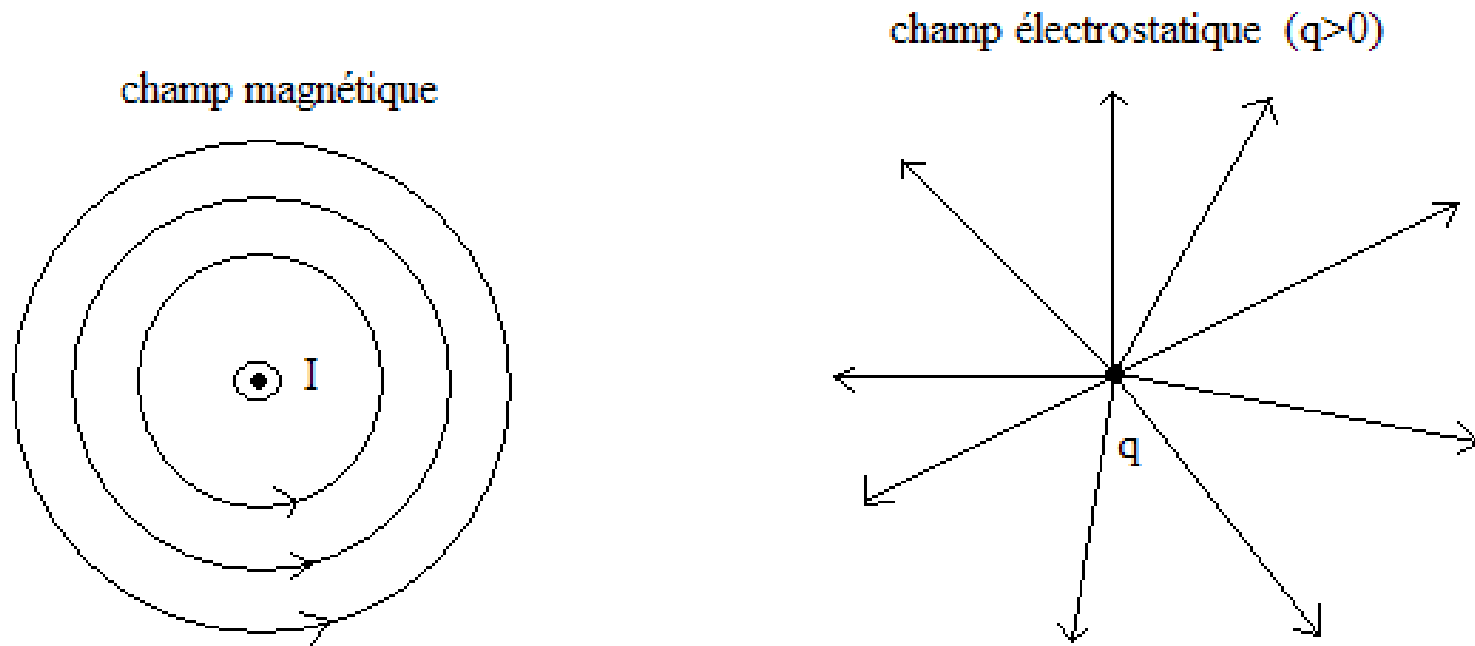
Où $k(M)$ est un réel dépendant de M .

IV.3.2 Propriétés des lignes de champ

Au paragraphe 1, on a vu que localement le champ magnétique a la même structure que le champ magnétique créé par un fil rectiligne infini. Il est donc ortho-radial et tourne autour des courants qui le créent. Les lignes de champ du champ magnétique s'enroulent donc autour des

sources qui le créent.

Cette propriété peut être représentée par les figures suivantes :



Allures des lignes de champ au voisinage de la source

Cette propriété des lignes de champ permet de distinguer les champs électrostatique et magnétique à partir du calcul de leur flux à travers une surface fermée ou du calcul de leur circulation le long d'un contour fermé.

V. Exemples de champs magnétiques

V.1 Méthodes de calculs

V.1.1. Démarche générale

Le calcul d'un champ magnétique s'obtient en effectuant successivement les étapes suivantes :

- Etude des invariances :

Cela permet de choisir le système de coordonnées adapté au problème : *cartésiennes ou cylindriques en cas d'invariance par translation* et *cylindriques ou sphériques en cas d'invariance par rotation*. Les invariances fournissent également les variables dont dépend le champ.

- Analyse des symétries :

La connaissance des plans de symétrie et d'antisymétrie permet de déterminer l'orientation du champ magnétique en un point : *le champ magnétique appartient aux plans d'antisymétrie et est perpendiculaire aux plans de symétrie de la distribution de courants*.

- Choix d'une méthode de calcul parmi les deux exposées dans la suite. Elles ne sont qu'au nombre de deux et non trois comme pour le champ électrostatique puisqu'on n'a pas défini de quantité analogue au potentiel électrostatique. Cette notion existe et pourrait fournir une troisième méthode de calcul du champ magnétique.

V.1.2 Calcul direct par la loi de Biot et Savart

Il s'agit d'intégrer la loi de Biot et Savart sur la distribution envisagée. A priori, il est nécessaire de calculer trois intégrales correspondant aux composantes du champ sur une base fixe. Il ne faut pas oublier alors que l'étude des symétries peut avoir fourni des informations sur la direction du champ et donc que certaines composantes de celui-ci sont nulles. On évitera dans ce cas d'effectuer le calcul pour arriver dans le meilleur des cas (c'est-à-dire si aucune erreur de calcul n'a été commise !) à une valeur nulle.

V.1.3 Utilisation du théorème d' Ampère

Le théorème d' Ampère joue un rôle analogue pour le champ magnétique à celui que joue le théorème de Gauss pour le champ électrostatique. Il ne sera utilisable que lorsque l' étude des symétries et des invariances aura fourni la direction du champ, limité le nombre de variables dont il dépend et que seule manquera l'information relative à sa norme. Dans ce cas, il sera un outil précieux et performant.

Après avoir déterminé les invariances et les symétries et après avoir opté pour cette méthode, il convient de réaliser les deux étapes suivantes.

* Détermination du contour d' Ampère :

Celui-ci est défini de manière à rendre simple le calcul de la circulation. On choisira donc un contour composé de parties soit tangentes, soit perpendiculaires au champ. Dans le premier cas, la circulation le long de cette partie du contour ne fait pas intervenir d' angle (les deux vecteurs sont colinéaires).

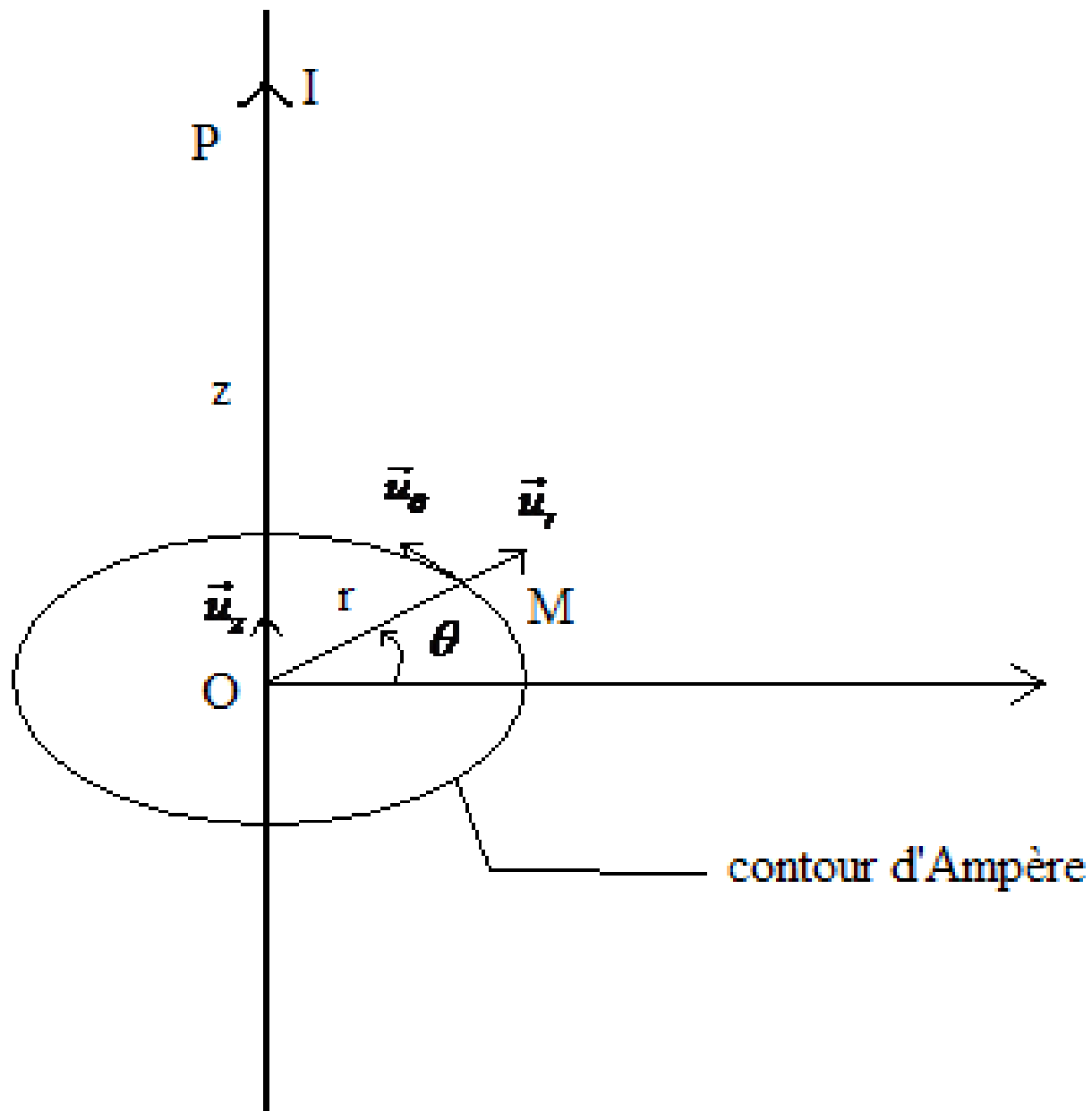
Dans le second, la circulation est nulle: le vecteur déplacement élémentaire et le champ magnétique sont perpendiculaires, leur produit scalaire est nul. Il est d'autre part nécessaire de bien tenir compte du fait suivant: le contour d'Ampère (comme c'était le cas pour la surface de Gauss) doit passer par le point où on cherche à calculer le champ.

* Calcul :

Il consiste à appliquer le théorème d'Ampère compte tenu des résultats antérieurs.

V.2 Fil rectiligne infini

Soit un fil infini parcouru par un courant I . on cherche le champ magnétique créé par ce fil en tout point de l'espace. Cet exemple, explicitement au programme, a déjà été traité par le calcul direct; ici on le reprend en utilisant les propriétés du champ.



V.2.1 Etude des invariances

Le problème privilégie une seule direction celle du fil: on choisit les coordonnées cylindriques en prenant l'axe du fil pour axe Oz.

Le fil est infini, la distribution est invariante par translation suivant l'axe Oz. \vec{B} ne dépend donc pas de z .

Elle est également invariante par rotation autour de l'axe Oz donc \vec{B} ne dépend pas non plus de ϕ .

Les invariances de la distribution impliquent donc:

$$\vec{B}(M) = \vec{B}(r)$$

V.2.2 Etude des symétries

Le plan passant par M et contenant l'axe Oz est un plan de symétrie de la distribution. Le champ magnétique en M est donc perpendiculaire à ce plan: il est ortho-radial.

On note que la recherche des plans de symétrie est plus intéressant dans le cas du champ magnétique que celle des plans d'antisymétrie: on a directement l'orientation du champ.

Par exemple, le plan passant par M et perpendiculaire à l'axe Oz est un plan d'antisymétrie, mais cette information ne donne pas la direction du champ magnétique en M: il appartient à ce plan.

Au final $\vec{B}(M) = B(r)\vec{u}_q$

V.2.3 Calcul de la norme du champ magnétique

On applique le Théorème d'Ampère : $\oint_{M \hat{=} C} \vec{B}(M) \cdot d\vec{OM} = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$

On choisit le contour tel que la distance du fil à M soit constante et que le champ soit colinéaire à $d\vec{OM}$. C' est le cercle de centre le centre du fil et de distance r du fil passant par M.

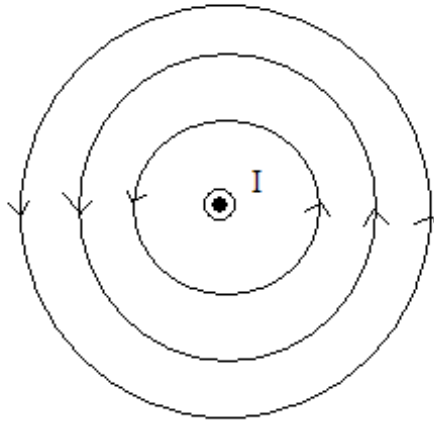
On a donc : $d\vec{OM} = r dq \vec{u}_q$ et

$$\oint_{M \hat{=} C} \vec{B}(M) \cdot d\vec{OM} = \int_0^{2\pi} B(r) r dq = 2\pi r B(r) = \mu_0 I_{\text{enlacé}} = \mu_0 I$$

On en déduit :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_q = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \vec{u}_z \wedge \frac{\vec{OM}}{r^2}$$

Le champ est ortho-radial donc les lignes de champ sont des cercles dont le centre est situé sur l'axe Oz et leur sens est donné par l'orientation du courant dans le fil.



V.3 Spire circulaire

Soit une spire de centre O, d'axe Oz et de rayon R.

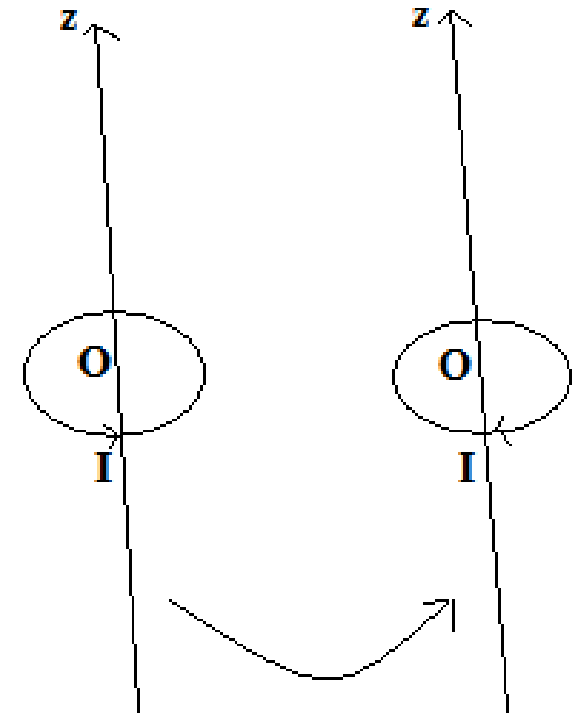
V.3.1 Symétries et invariances pour un point quelconque

On choisit les coordonnées cylindriques car l'axe de la spire est un axe privilégié. La distribution est invariante par toute rotation autour de l'axe Oz ; le champ est indépendant de θ .

Le plan passant par M et contenant l'axe de la spire est un plan d'antisymétrie des sources (les courants tournent dans deux sens différents avant et après symétrie par rapport au plan).

\vec{B} appartient à chacun de ces plans donc le champ a une composante radiale et une composante axiale.

En un point quelconque, les symétries de la distribution ne sont donc pas suffisantes pour simplifier l'expression donnée par la loi de Biot et Savart. Il faut recourir à une intégration numérique pour calculer la valeur du champ magnétique, ce qui est toujours théoriquement possible. Dans la suite on se limite au calcul du champ magnétique sur l'axe de la spire circulaire.



V.3.2 Symétries et invariances pour un point de l'axe

Comme on se place sur l'axe, la seule variable du problème est z donc :

$$\vec{B} = \vec{B}(z)$$

Tout plan contenant l'axe est plan d'antisymétrie donc le champ magnétique appartient à chacun de ces plans et est dirigé le long de l'axe Oz .

Au final $\vec{B}(M \in Oz) = B(z)\vec{u}_z$

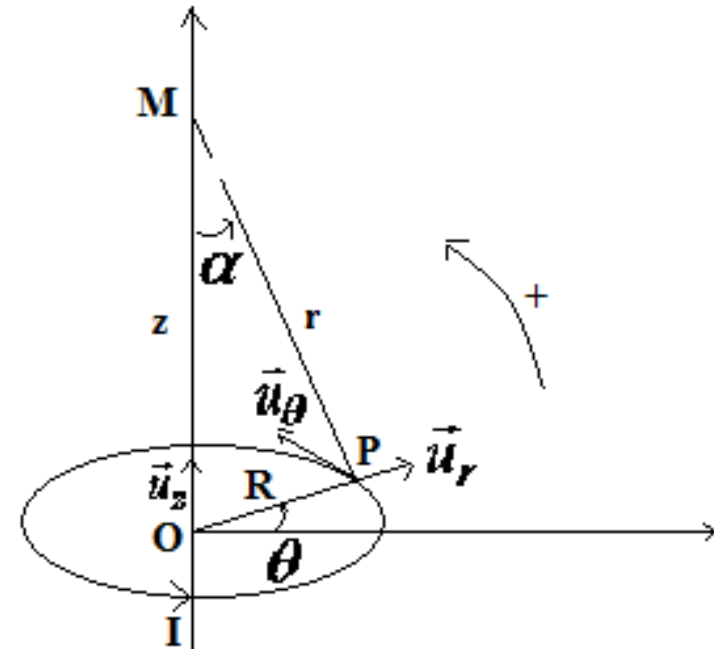
Le plan P de la spire étant un plan de symétrie de la distribution de courant et \vec{B} porté par \vec{u}_z $\vec{B}(M') = \vec{B}(M)$ pour M' symétrique de M par rapport à P ou encore $B(z) = B(-z)$. Dans la suite on pourra donc limiter les calculs au cas de $z > 0$.

V.3.3 Calcul de la valeur du champ par la loi de Biot et Savart

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{P \in \text{spire}} I d\vec{l}_P \wedge \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

Or la seule composante non nulle d'après l'étude des invariances est la composante axiale: on n'effectue l'intégration que pour B_z :

$$\begin{aligned} B_z &= \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{P \in \text{spire}} I \left(d\vec{l}_P \wedge \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3} \right) \cdot \vec{u}_z \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{P \in \text{spire}} I \left(\frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3} \wedge \vec{u}_z \right) \cdot d\vec{l}_P \end{aligned}$$



$$B_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\text{spire}} \frac{\sin \alpha}{PM^2} \cdot dl_P$$

Car $\overrightarrow{PM} \wedge \vec{u}_z = PM \sin \alpha \vec{u}_\theta$ parallèle à $d\vec{l}_P$
 On peut retrouver ce résultat à partir des projections:

$$d\vec{l}_P = d\vec{u}_\theta \text{ et } \overrightarrow{PM} = -R\vec{u}_r + z\vec{u}_z$$

donc

$$d\vec{l}_P \wedge \overrightarrow{PM} = -R d\vec{u}_\theta \wedge \vec{u}_r + z d\vec{u}_\theta \wedge \vec{u}_z = R d\vec{u}_z + z d\vec{u}_r$$

On en déduit:

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{P \in \text{spire}} \frac{R dl}{PM^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{P \in \text{spire}} I \frac{\sin \alpha}{PM^2} dl$$

Alors comme $PM = r = \frac{R}{\sin \alpha}$ prend la même valeur pour tout point de la spire et $dl = R d\theta$, on intègre sur θ entre 0 et 2π soit:

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\sin^3 \alpha}{R} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{\mu_0 I \sin^3 \alpha}{2R} \text{ soit } \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{\sin^3 \alpha}{R} \vec{u}_z$$

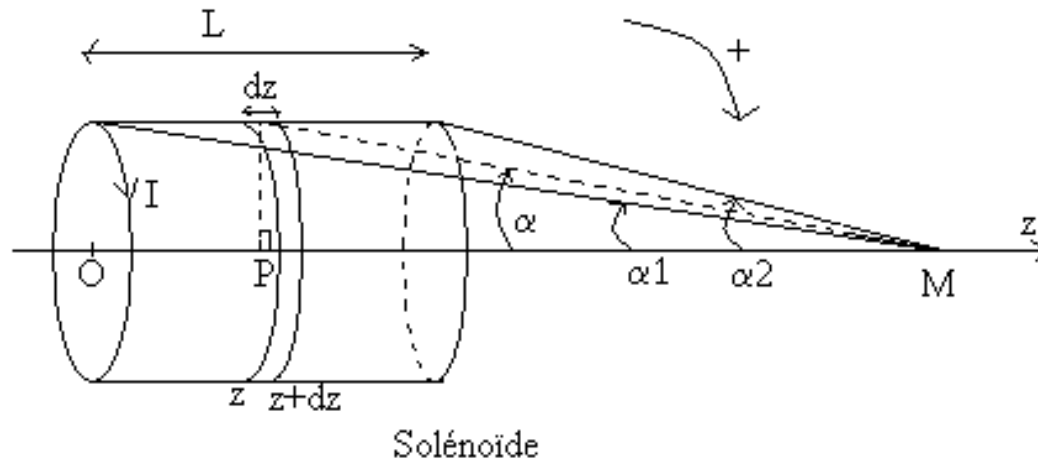
En remarquant que $\sin \alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}}$, on peut aussi l'exprimer en fonction de z :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{u}_z$$

V. 4 Solénoïde

Calcul du champ magnétique sur l'axe

Un solénoïde est formé de N spires identiques, de même axe, parcourues par un même courant, dans le même sens.



On définit le nombre de spires par unité de longueur :
 en notant L la longueur du solénoïde, les spires sont circulaires. Calculer le champ magnétique créé sur l'axe du solénoïde.
 Les propriétés d'invariance et de symétrie sont les mêmes que pour une spire unique :

le champ est donc parallèle à l'axe et ne dépend que de la position du point sur l'axe.

On utilise alors le résultat obtenu pour une spire et on applique le principe de superposition. Soit $z = OP$.

La tranche d'épaisseur dz du solénoïde comprise entre z et $z + dz$ est parcourue par une intensité élémentaire $dI = nI dz$ et crée le champ élémentaire :

$$dB = n \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \alpha dz$$

Avec $\tan \alpha = \frac{R}{PM}$

$$PM = OM - OP = OM - z = \frac{R}{\tan \alpha} \text{ donc } dz = \frac{R}{\sin^2 \alpha} d\alpha$$

D'où

$$dB = n \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \alpha \frac{R}{\sin^2 \alpha} d\alpha = \frac{\mu_0 n I}{2} \sin \alpha d\alpha = -\frac{\mu_0 n I}{2} d(\cos \alpha)$$

On en déduit par intégration entre α_1 et α_2 :

$$B = \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2)$$

Avec l'origine de l'axe des z au milieu du solénoïde, on a :

$$\cos \alpha_1 = \frac{z + \frac{L}{2}}{\sqrt{R^2 + \left(z + \frac{L}{2}\right)^2}} \quad \text{et} \quad \cos \alpha_2 = \frac{z - \frac{L}{2}}{\sqrt{R^2 + \left(z - \frac{L}{2}\right)^2}}$$

On en déduit :

$$B = \frac{\mu_0 n I}{2} \left(\frac{z + \frac{L}{2}}{\sqrt{R^2 + \left(z + \frac{L}{2}\right)^2}} - \frac{z - \frac{L}{2}}{\sqrt{R^2 + \left(z - \frac{L}{2}\right)^2}} \right)$$

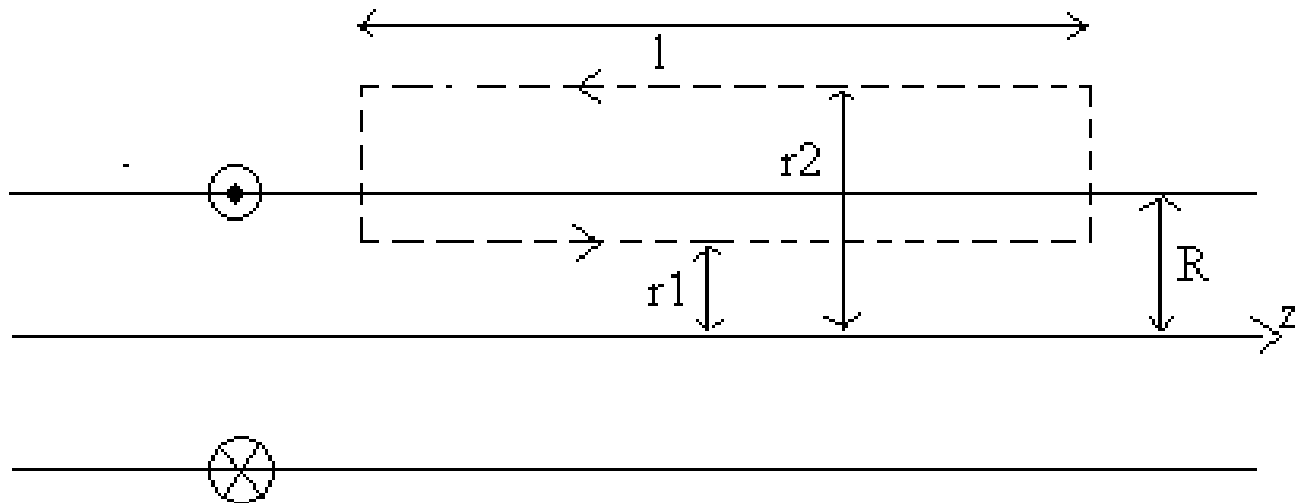
V.5.4.2 Champ en tout point

Le système est invariant par translation le long de l'axe Oz du solénoïde : on se place en coordonnées cylindriques et on a :

$$\vec{B}(M) = \vec{B}(r, \theta)$$

La section du solénoïde est circulaire, le système est donc invariant par rotation autour de l'axe Oz, on a : $\vec{B}(M) = B(r)\vec{u}_z$

On peut alors appliquer le théorème d'Ampère pour établir que le champ ne prend que deux valeurs possibles suivant le point M est à l'intérieur ou à l'extérieur du solénoïde et pour obtenir les valeurs correspondantes du champ.



Soit un contour C fermé contenu dans un plan contenant l'axe Oz et constitué de deux parallèles à Oz distantes respectivement de r_1 et r_2 de l'axe et de deux perpendiculaires à Oz.

Les contributions des deux perpendiculaires à Oz à la circulation du champ magnétique le long de ce contour sont nulles: le champ est perpendiculaire aux déplacements élémentaires.

En notant alors l la longueur des parallèles à Oz, on obtient:

$$\oint_{M \in C} \vec{B}(M) \cdot d\vec{OM} = B(r_1)l - B(r_2)l = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$$

Il existe trois cas :

● si $r_1 < r_2 < R$, $I_{\text{enlacé}} = 0$ et on en déduit :

$B(r_1) = B(r_2)$, le champ magnétique créé à l'intérieur d'un solénoïde infini ne dépend pas de r : il est donc uniforme. On le note B_{int} .

● si $R < r_1 < r_2$, $I_{\text{enlacé}} = 0$ et on en déduit :

$B(r_1) = B(r_2)$, le champ magnétique créé à l'extérieur d'un solénoïde infini est également uniforme. On le note B_{ext} .

● si $r_1 < R < r_2$ (cf figure précédente), $I_{\text{enlacé}} = n l I$ et le champ magnétique est orienté dans le sens de . Compte tenu de l'orientation du contour donné sur la figure précédente, on en déduit:

$$B(r_1)l - B(r_2)l = (B_{\text{int}} - B_{\text{ext}})l = \mu_0 n I l$$

Donc $B_{\text{int}} - B_{\text{ext}} = \mu_0 n I$

Dans le cas d'un solénoïde de section circulaire, on a calculé la valeur du champ sur l'axe et on peut écrire :

$$B_{\text{int}} = \mu_0 n I$$

Et en déduire

$$B_{\text{ext}} = 0$$

Et par la relation liant B_{ext} et B_{int} que

$$B_{\text{int}} = \mu_0 n I$$

On remarque que dans le cas d'une section de forme quelconque, le champ magnétique vérifie: $\vec{B} = B(r, \theta) \vec{u}_z$

En choisissant des contours dans un plan $\theta = \text{constante}$, le calcul précédent à partir de la bobine torique est valable. Le résultat est donc indépendant de la forme de la section du solénoïde.