Chapitre 6 : Problème du flot minimum

Y. DIENG, Département Informatique
UFR ST, Université Assane Seck de Ziguinchor

13. september 2021

1 Introduction

De même qu'il est possible de modéliser une carte routière par un graphe orienté pour trouver le plus court chemin d'un point à un autre, de même on peut interpréter un graphe orienté comme un `réseau de transport` et l'utiliser pour répondre à des questions ayant trait à des flux de produits.

Imaginons un produit s'écoulant à travers un système depuis une source, où il est produit, vers un puits, où il est consommé. La source génère le produit avec un certain débit constant et le puits consomme le produit avec le même débit. Le `flot` de produit à un endroit quelconque du système est intuitivement la vitesse à laquelle ce produit se déplace. Les réseaux de transport peuvent servir à modéliser la circulation de liquides à travers des tuyaux, de pièces détachées à travers des chaînes de montage, de courant à travers des réseaux électriques, de données à travers des réseaux de communication, etc.

Chaque arc d'un réseau de flot peut être vu comme un conduit emprunté par le pro- duit. Chaque conduit à une capacité fixe, qui représente le débit maximum que peut atteindre le produit à travers le conduit ; par exemple, 200 litres de liquide par heure dans un tuyau ou 20 ampères de courant à travers un câble. Les sommets sont les jonctions des conduits et, excepté pour la source et le puits, le produit s'écoule d'un sommet à l'autre sans gain ni perte. Autrement dit, le débit à l'entrée d'un sommet doit être égal au débit en sortie. Cette propriété a pour nom `conservation de flot` et équivaut à la loi de Kirchhoff dans le cas du courant électrique.

Le problème du flot maximum est le suivant : on veut connaître la plus grande vitesse à laquelle le produit peut voyager entre la source et le puits, sans violer aucune contrainte de capacité. C'est l'un des problèmes de réseau de transport les plus simples et, comme nous le verrons dans ce chapitre, ce problème peut être résolu par des algorithmes efficaces. Par ailleurs, les techniques de bases utilisées par ces algorithmes peuvent être adaptées à la résolution d'autres problèmes ayant trait aux réseaux de flot.

2 Réseaux de transport

Dans cette section, nous allons considérer les réseaux de transport sous l'angle de la théorie des graphes, étudier leurs propriétés et définir précisément le problème du flot maximum. Nous introduisons également quelques notations utiles.

2.1 Flot et réseaux de transport

Un réseau de transport $G = (V, E)$ est un graphe orienté dans lequel chaque arc (u, v) de E se voit attribuer une capacité $c(u, v) \leq 0$. Si $(u, v) \notin E$, on suppose que $c(u, v) = 0$. Dans un réseau de transport, deux sommets ont un statut particulier : la source s et le puits t. Par commodité, on suppose que chaque sommet se trouve sur un certain chemin reliant la source au puits. Autrement dit, pour tout sommet v de E, il existe un chemin $s \rightsquigarrow v \rightsquigarrow t$. Le graphe est donc connexe et $|E| \geq |V| - 1$.

Nous pouvons désormais définir les flots plus formellement. Soit $G = (V, E)$ un réseau de transport avec une fonction de capacité c. Soit s la source du réseau et t le puits. Un flot de G est une fonction à valeurs réelles $f : V \times V \to R$ qui satisfait aux trois propriétés suivantes :

`Contrainte de capacité:` Pour tout $u, v \in V$, on exige $f(u, v) \leq c(u, v)$.
`Symétrie :` Pour tout $u, v \in V$, on exige $f(u, v) = -f(v, u)$.
`Conservation du flot :` Pour tout $u \in V - \{s, t\}$, on exige

$$\sum_{v \in V} f(u, v) = 0$$

La quantité $f(u, v)$, qui peut être positive, nulle ou négative, est appelée flux du sommet u au sommet v. La valeur d'un flot f est définie par

$$|f| = \sum_{s \in V} f(s, v)$$

autrement dit, le flot total partant de la source. (Ici, la notation $|.|$ indique la valeur de flot, pas une valeur absolue ni un cardinal d'ensemble). Dans le problème du flot maximum, on part d'un réseau de flot G de source s et de puits t et on souhaite trouver un flot de valeur `maximume`.

La contrainte de capacité dit simplement que le flux d'un sommet vers un autre ne doit pas excéder la capacité donnée. La propriété de symétrie est une commodité notationnelle qui dit que le flux d'un sommet u vers un sommet v est égal à l'opposé du flux allant en sens inverse. La propriété de conservation du flot dit que le flot total sortant d'un sommet autre que la source ou le puits à pour valeur 0. En s'aidant de la symétrie, on peut réécrire la propriété de conservation du flot sous la forme

$$\sum_{u \in V} f(u, v) = 0$$

pour tout sommet v de $V - \{s, t\}$. Une autre manière de le dire est que le flot total rentrant en dans un sommet vaut 0.

Si ni (u, v) ni (v, u) n'est dans E, alors il ne peut y avoir de flot entre u et v.

Par ailleurs, le flux positif total rentrant dans un sommet est défini par :

$$\sum_{u \in V, f(u,v) > 0} f(u, v).$$

Le flux positif total sortant d'un sommet est défini symétriquement. Le flux net total en un sommet est égal au flux positif total sortant du sommet, moins le flux positif total entrant dans le sommet. Une interprétation de la propriété de conservation du flux est que le flux positif total entrant dans un sommet autre que la source ou le puits doit être égal au flux positif total sortant du sommet. Cette propriété, selon laquelle le flux net total en un sommet doit valoir 0, porte souvent le nom informel de `flux entrant égale flux sortant`.

3 Méthode de Ford-Fulkerson

Cette section présente la méthode de `Ford-Fulkerson`, qui permet de résoudre le problème du flot maximum. Nous préférons l'appeler `méthode` plutôt que `algorithme`, car elle comporte plusieurs implémentations de temps d'exécution différents. La méthode de Ford-Fulkerson dépend de trois concepts majeurs, qui transcendent la méthode et sont applicables à de nombreux algorithmes et problèmes de flot ; ces concepts sont `les réseaux résiduels, les chemins améliorant et les coupes`. Ces idées sont essentielles pour le théorème important du flot maximum & coupe minimum, qui caractérise la valeur d'un flot maximum en terme de coupes du réseau de transport. Cette section se terminera avec une présentation d'un implémentation particulière de la méthode de Ford-Fulkerson et l'analyse de son temps d'exécution.

La méthode de Ford-Fulkerson est itérative. On commence avec $f(u, v) = 0$ pour tout $u, v \in V$, ce qui donne un flot initial de valeur 0. A chaque itération, on augmente la valeur de flot en trouvant un `chemin améliorant`, qu'on peut voir simplement comme un chemin reliant la source s au puits t le long duquel on peut augmenter la quantité de flot. On réitère ce processus jusqu'à ce que l'on ne trouve plus de chemin améliorant. Le théorème du flot maximum & coupe minimum montre que ce processus finit par engendrer un flot maximum.

```
METHODE-FORD-FULKERSON(G, s, t)
1 initialiser flot f à 0
2 tant que il existe un chemin améliorant p
3       faire augmenter le flot f le long de p
4 retourner f
```

3.1 Réseaux résiduels

Intuitivement, étant donné un réseau de transport et un flot, le réseau résiduel est constitué des arcs qui peuvent supporter un flot plus important.

Plus formellement, supposons qu'on ait un réseau de flux $G = (V, E)$ de source s et de puits t. Soit f un flot de G et considérons un couple de sommets $u, v \in V$. La quantité de flux supplémentaire qu'il est possible d'ajouter entre u et v sans dépasser la capacité $c(u, v)$ est la capacité résiduelle de (u, v), donnée par

$$c_f(u, v) = c(u, v) - f(u, v). \qquad (6.1)$$

Par exemple, si $c(u, v) = 16$ et $f(u, v) = 11$, on peut convoyer $c_f(u, v) = 5$ unités de flux supplémentaires sans excéder la contrainte de capacité sur l'arc (u, v). Quand le flux net $f(u, v)$ est négatif, la capacité résiduelle $c_f(u, v)$ est supérieure à la capacité $c(u, v)$. Par exemple, si $c(u, v) = 16$ et $f(u, v) = -4$, la capacité résiduelle $c_f(u, v)$ vaut 20. On peut interpréter cela de la manière suivante : il existe un flux de 4 unités de v vers u, qui peut être annulé en envoyant un flux de 4 unités de u vers v. On peut ensuite envoyer 16 unités supplémentaires de u vers v sans violer la contrainte de capacité sur l'arc (u, v). On a donc pu ajouter 20 unités de flux, en commencant avec un flux $f(u, v) = -4$, avant d'atteindre la contrainte de capacité.

Etant donné un réseau de transport $G = (V, E)$ et un flot f , le `réseau résiduel` de G induit par f est $G_f = (V, E_f)$,où

$$E_f = \{(u, v) \in V \times V : c_f(u, v) > 0\} \ .$$

Autrement dit, chaque arc du réseau résiduel, ou arc résiduel, peut admettre un flux strictement positif.

Les arcs de E_f sont soit des arcs de E,soit leurs inverses. Si $f(u, v) < c(u, v)$ pour un arc (u, v) de E, alors $c_f(u, v) = c(u, v) - f(u, v) > 0$ et $(u, v) \in E_f$. Si $f(u, v) > 0$ pour un arc $(u, v) \in E$, alors $f(v, u) < 0$. Dans ce cas, $c_f(v, u) = c(v, u) - f(v, u) > 0$, et donc $(v, u) \in E_f$. Si ni (u, v) ni (v, u) n'apparaît dans le réseau original, alors $c(u, v) = c(v, u) = 0$, $f(u, v) = f(v, u) = 0$ et $c_f(u, v) = c_f(v, u) = 0$. On en conclut qu'un arc (u, v) ne peut apparâtre dans un réeau résiduel que si au moins l'un des arcs (u, v) et (v, u) figure dans le réseau original ; on a donc

$$|E_f| \leq 2|A| \ .$$

Observez que le réseau résiduel G_f est lui-même un réseau de transport dont les capacités sont données par c_f . Le lemme suivant montre la relation entre un flot d'un réseau résiduel et un flot du réseau originel.

Lemme 1. *Soit $G = (V, E)$ un réseau de transport de source s et de puits t et soit f un flot de G. Soit G_f le réseau résiduel de G induit par f et soit f' un flot de G_f . Alors, la somme $f + f'$ est un flot de G de valeur $|f + f'| = |f| + |f'|$.*

3.2 Chemins améliorants

Définition 1. *Etant donnés un réseau de transport $G = (V, E)$ et un flot f , un chemin améliorant p est un chemin élémentaire de s vers t dans le réseau résiduel G_f . D'après la définition du réseau résiduel, chaque arc (u, v) d'un chemin améliorant admet un flot positif supplémentaire de u vers v tout en restant soumis à la contrainte de capacité sur cet arc.*

La plus grande quantité de flux transportable à travers les arcs d'un chemin améliorant p s'appelle la capacité résiduelle de p, et est définie par

$$c_f(p) = min\{c_f(u, v) : (u, v)\ appartient\ a\ p\} \ .$$

Le lemme suivant précise la définition précédente.

Lemme 2. *Soit $G = (V, E)$ un réseau de transport, soit f un flot de G et soit p un chemin améliorant de G_f . On définit une fonction $f_p : V \times V \to \Re$ par :*

$$f_p(u, v) = \begin{cases} c_f(p) & si\ (u, v) \in p \\ -c_f(p) & si\ (u, v) \notin p \\ 0 & sinon. \end{cases} \qquad (6.2)$$

Alors f_p est un flot de G_f de valeur $|f_p| = c_f(p) \geq 0$.

Le corrolaire suivant montre qu'en ajoutant f_p à f, on obtient un autre flot de G dont la valeur est pus proche du maximum.

Corollaire 1. *Soit $G = (V, E)$ un réseau de transport, soit f un flot de G et soit p un chemin améliorant de G_f . Soit f_p une fonction définie comme dans l'équation (6.2). On définir une fonction $f' : V \times V vers R$ par $f' = f + f_p$. Alors, f' est un flot de G de valeur $|f'| = |f| + |fp| > |f|$.*

Bevis. La preuve decoule directement des lemme 2 et Lemme 1.

Coupe dans un réseau de transport

La méthode de `Ford-Fulkerson` augmente progressivement le flot dans les chemins améliorant, jusqu'à atteindre un flot maximum. Le théorème `flot maximum & coupe minimum`, que nous allons bientôt démontrer, nous apprend qu'un flot est maximum si et seulement si son réseau résiduel ne contient aucun chemin améliorant.

Pour démontrer ce théorème, il faut cependant commencer par définir la notion de coupe dans un réseau de transport.

Une coupe dans un réseau $G = (V, E, c, s, t)$ est un couple d'ensemble de sommets de forme $(X, Y = V - X)$ avec $X \subseteq V$ tel que $s \in X$ et $t \in Y$.

Si f est un flot, alors le flot net à travers la coupure (X, Y) est défini par $f(X, Y)$. La capacité de la coupe (X, Y) est $c(X, Y) = \sum_{x \in X, y \in Y} c(x, y)$. On remarque que la capacité d'une coupe (X, Y) se calcule uniquement à partir des arcs allant de X à Y. Les arcs reliant Y à X n'entrent pas en ligne de compte pour le calcul de $c(X, Y)$. Une coupe minimum d'un réseau est une coupe dont la capacité est minimale rapportée à toutes les coupes du réseau.

Le lemme suivant montre que le flot net traversant une coupe est toujours le même, et qu'il est égal à la valeur du flot.

Lemme 3. *Soit f un flot dans un réseau de transport G de source s et de puits t et soit (X, Y) une coupe de G. Alors, le flot net à travers (X, Y) est $f(X, Y) = |f|$.*

Corollaire 2. *La valeur d'un flot f dans un réseau de transport G est majorée par la capacité d'une coupe quelconque de G.*

Une conséquence immédiate du corollaire 2 est que le flot maximum d'un réseau est majoré par la capacité d'une coupe minimum du réseau.

L'important théorème `flot maximum & coupe minimum`, ci-après, dit que la valeur d'un flot maximum est en fait égale à la capacité d'une coupe minimum.

Théorème 1. *(flot maximum & coupe minimum) Si f est un flot dans un réseau de transport $G = (V, E, s, t)$ de source s et de puits t, alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *f est un flot maximum dans G.*
2. *Le réseau résiduel G_f ne contient aucun chemin améliorant.*
3. *$|f| = c(X, Y)$ pour une certaine coupe (X, Y) de G.*

Algorithme de base de Ford-Fulkerson

A chaque itération de la méthode de Ford-Fulkerson, on trouve un certain chemin améliorant p et on augmente le flux f sur chaque arc de p d'un montant égal à la capacité résiduelle $c_f(p)$. L'implémentation suivante de cette méthode calcule le flot maximum dans un graphe $G = (V, E)$, en actualisant le flux $f[u, v]$ entre chaque couple u, v de sommets qui sont reliés par un arc. Si u et v ne sont reliés par aucun arc dans aucune direction, on suppose implicitement que $f[u, v] = 0$. Les capacités $c(u, v)$ sont censées être données avec le graphe, et $c(u, v) = 0$ si $(u, v) \notin E$. La capacité résiduelle $c_f(u, v)$ est calculée selon la formule (6.1). L'expression $c_f(p)$ dans le code n'est en fait qu'une variable temporaire qui mémorise la capacité résiduelle du chemin p.

```
FORD-FULKERSON(G, s, t)
1 pour chaque arc (u, v) de E
2   faire f[u,v] ← 0
3         f[v,u] ← 0
4 tant que il existe un chemin p de s à t dans le réseau résiduel Gf
5   faire cf(p) ← min{cf (u,v) : (u,v) is in p}
6        pour chaque arc (u, v) de p
7            faire f[u,v] ← f[u,v] + cf(p)
8                  f[v,u] ← -f[u,v]
```

Analyse de Ford-Fulkerson

Le temps d'exécution de FORD-FULKERSON dépend de la facon dont on détermine le chemin améliorant p à la ligne 4. En cas de choix malheureux, l'algorithme peut même ne jamais se terminer : la valeur du flot augmente par paliers, mais elle n'est pas certaine de converger vers la valeur de flot maximum. En revanche, si le chemin améliorant est choisi à l'aide d'une recherche en largeur, l'algorithme s'exécute dans un temps polynomial. Avant de le démontrer, nous allons chercher une borne simple pour le cas où le chemin améliorant est choisi arbitrairement et où toutes les capacités sont entières.

Le plus souvent en pratique, le problème du flot maximum est posé avec des valeurs entières pour les capacités. Lorsque les capacités sont des nombres rationnels, une mise à l'échelle idoine permet de les rendre entières. Avec cette hypothèse, une implémentation directe de FORD-FULKERSON s'exécute en temps $O(E|f^*|)$, où f^* est le flot maximum trouvé par l'algorithme. L'analyse est la suivante. Les lignes 1-3 prennent un temps $\Theta(E)$. La boucle tant que des lignes 4-8 est exécutée au plus $|f^*|$ fois, puisque la valeur du flot augmente d'au moins une unité à chaque itération.