Introducción a la geometría proyectiva

Ejercicios resueltos

Geometría Multivista

UNAM 2022-2

Gibran Zazueta Cruz

1. Ejercicio 1

Utilice álgebra elemental (por ejemplo, Cramer) para determinar que las rectas definidas por $r_1 = [a_1, b_1, c_1]^T$ **y** $r_2 = [a_2, b_2, c_2]^T$ **intersecan en el punto** $p = [b_1c_2 - b_2c_1, a_2c_1 - a_1c_2, a_1b_2 - a_2b_1]^T$

Para encontrar la intersección se igualan las rectas a 0 y se forma el sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c1 \\ -c2 \end{bmatrix}$$

Se resuelve el Sistema lineal de ecuaciones con Cramer

$$x = \frac{\begin{bmatrix} -c_1 & b_1 \\ -c_2 & b_2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}} = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - b_1a_2}$$

$$y = \frac{\begin{bmatrix} a_1 & -c_1 \\ a_2 & -c_2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}} = \frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_1b_2 - b_1a_2}$$

Se obtiene que se intersecan en el punto p

$$p = \left[\frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - b_1a_2}, \frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_1b_2 - b_1a_2}, 1\right]^T$$

Que es igual a:

$$p = [b_1c_2 - b_2c_1, a_2c_1 - a_1c_2, a_1b_2 - b_1a_2]^T$$

2. Ejercicio 2

Verifique que el punto de intersección p entre las rectas $r_1 = [a_1, b_1, c_1]^T$ Y $r_2 = [a_2, b_2, c_2]^T$ es de la forma $p = r_1 \times r_2$, donde "$\times$" denota el producto vectorial. (Nótese que la simplicidad de esta fórmula para calcular el punto de intersección de dos rectas es una consecuencia de la representación de rectas y puntos como vectores homogéneos).

Se obtiene el producto vectorial

$$p = r_1 \times r_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = (b_1c_2 - b_2c_1)\, i - (a_2c_1 - a_1c_2)\, j + (a_1b_2 - b_1a_2)\, k$$

$$p = [b_1c_2 - b_2c_1, a_2c_1 - a_1c_2, a_1b_2 - b_1a_2]^T$$

El resultado concuerda con el punto del Ejercicio 1 por lo que se comprueba la obtención del punto de intersección.

3. Ejercicio 3

(Ejemplo 2.3, pág. 27 de Hartley y Zisserman 5) El punto no homogéneo $P_0 = [1, 1]^T$ es el punto de intersección de las rectas $x = 1$ e $y = 1$. Utilice la fórmula del Ejercicio 2 para encontrar la representación homogénea del punto p_0. .

Se tienen las rectas

$$r_1 = [1, 0, -1]^T$$
$$r_2 = [0, 1, -1]^T$$

Se obtiene la intersección con el producto vectorial

$$p = r1 \times r2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1)\, i - (-1)\, j + (1)\, k$$

$$p = [1, 1, 1]^T$$

4. Ejercicio 4

(Ejemplo 1, pág. 4 de Birchfield 6) Demuestre que el punto de intersección de las rectas $r_1 = [4, 2, 2]^T$ y $r_2 = [6, 5, 1]^T$ es el punto $p = [-1, 1, 1]^T$

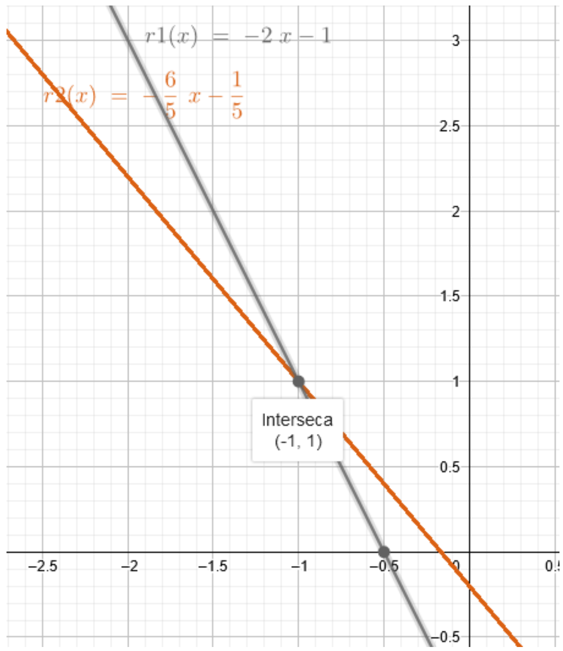
Usando producto cruz:

$$p = r1 \times r2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & 2 & 2 \\ 6 & 5 & 1 \end{vmatrix} = (2-10)\,i - (4-12)\,j + (20-12)\,k$$

$$P = [-8, 8, 8]^T$$

$$p = [-1, 1, 1]^T$$

Se muestra el gráfico del punto de intersección=



5. Ejercicio 5

(Ecuación de la recta que pasa por dos puntos) Demuestre que la ecuación de la recta r que pasa por los puntos $p_1 = [x_1, y_1, z_1]^T$ y $p_2 = [x_2, y_2, z_2]^T$ cumple que $r = p_1 \times p_2$

Se calcula r

$$r = p_1 \times p_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = (y_1 z_2 - y_2 z_1)\,i - (x_1 z_2 - x_2 z_1)\,j + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\,k$$

$$r = \begin{bmatrix} y_1 z_2 - y_2 z_1 \\ x_2 z_1 - x_1 z_2 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{bmatrix}$$

Sustituyendo p_1 en la recta. El punto p_1 está en la recta si y solo si $x^T r = 0$

$$[x_1, y_1, z_1] \begin{bmatrix} y_1 z_2 - y_2 z_1 \\ x_2 z_1 - x_1 z_2 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{bmatrix} = 0$$

$$(y_1z_2 - y_2z_1)\,x_1 - (x_1z_2 - x_2z_1)\,y_1 + (x_1y_2 - x_2y_1)\,z_1 = 0$$
$$y_1z_2x_1 - y_2z_1x_1 - (x_1z_2y_1 - x_2z_1y_1) + x_1y_2z_1 - x_2y_1z_1 = 0$$
$$(x_1y_1z_2 - x_1y_1z_2) + (x_1y_2z_1 - x_1y_2z_1) + (x_2y_1z_1 - x_2y_1z_1)$$
$$0 = 0$$

El punto p_1 cumple con la ecuación

Se hace lo mismo para el punto p_2

$$(y_1z_2 - y_2z_1)\,x_2 - (x_1z_2 - x_2z_1)\,y_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)\,z_2 = 0$$
$$y_1z_2x_2 - y_2z_1x_2 - (x_1z_2y_2 - x_2z_1y_2) + x_1y_2z_2 - x_2y_1z_2 = 0$$
$$(x_2y_1z_2 - x_2y_1z_2) + (x_2y_2z_1 - x_2y_2z_1) + (x_2y_1z_2 - x_2y_1z_2)$$
$$0 = 0$$

Se comprueba que la recta r pasa por p_1 y p_2.

6. Ejercicio 6

(Colinealidad) Demuestre que la condición para que los tres puntos $p_1 = [x_1, y_1, z_1]^T$, $p_2 = [x_2, y_2, z_2]^T$ y $p_3 = [x_3, y_3, z_3]^T$ pertenezcan a la misma recta (o que sean colineales) es $p_3^T(p_1 \times p_2) = 0$, o sea que $det[p_1\ p_2\ p_3] = 0$

Se busca la recta a la que pertenecen $p1, p2$

$$r = p_1 \times p_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = (y_1z_2 - y_2z_1)\,i - (x_1z_2 - x_2z_1)\,j + (x_1y_2 - x_2y_1)\,k$$

La condición para que p3 pertenezca a la recta r es:

$$r^T p_3 = 0$$
$$(y_1z_2 - y_2z_1)\,(x_3) - (x_1z_2 - x_2z_1)\,(y_3) + (x_1y_2 - x_2y_1)\,(z_3) = 0$$

Donde lo anterior es igual al determinante

$$det[p1\,p2\,p3] = (y_1z_2 - y_2z_1)\,(x_3) - (x_1z_2 - x_2z_1)\,(y_3) + (x_1y_2 - x_2y_1)\,(z_3) = 0$$

7. Ejercicio 7

(Concurrencia) Demuestre que la condición para que las tres rectas $r_1 = [a_1, b_1, c_1]^T$, $r_2 = [a_2, b_2, c_2]^T$ y $r_3 = [a_3, b_3, c_3]^T$ se intercepten en un mismo punto (o sea, que sean concurrentes) es que $det[r_1 \ r_2 \ r_3] = 0$

Se busca el punto donde $r1, r2$ se intersecan

$$p = r1 \times r2 = [b_1c_2 - b_2c_1, a_2c_1 - a_1c_2, a_1b_2 - b_1a_2]^T$$

El punto no homogéneo $\left(\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-b_1a_2}, \frac{a_2c_1-a_1c_2}{a_1b_2-b_1a_2}\right)$ debe satisfacer la ecuación $r_3 = a_3\,(x) + b_3\,(y) + c_3 = 0$

$$a_3\left(\frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - b_1a_2}\right) + b_3\left(\frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_1b_2 - b_1a_2}\right) + c_3 = 0$$
$$a_3\,(b_1c_2 - b_2c_1) + b_3\,(a_2c_1 - a_1c_2) + c_3(a_1b_2 - b_1a_2) = 0$$

Lo anterior es igual al determinante

$$det\,[r1\,r2\,r3] = a_3\,(b_1c_2 - b_2c_1) + b_3\,(a_2c_1 - a_1c_2) + c_3\,(a_1b_2 - b_1a_2) = 0$$

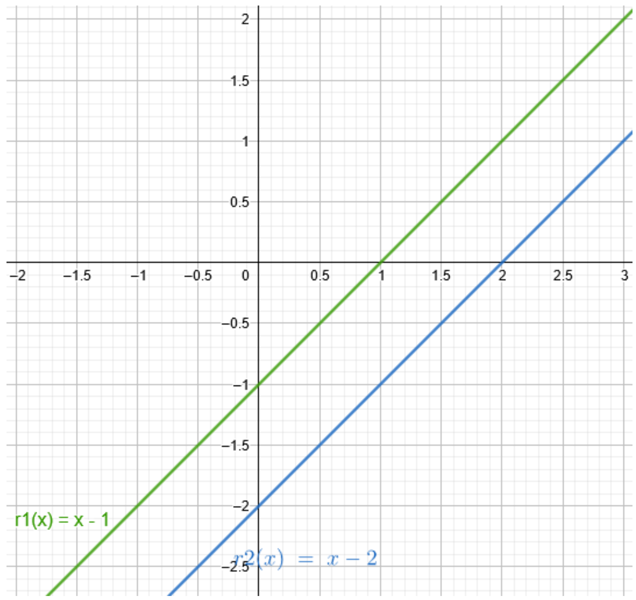
¡

Por lo que, para que las rectas sean concurrentes, el determínate $[r1\,r2\,r3]$ debe ser 0.

8. Ejercicio 8

(Ejemplo 2.5, pág. 28 de Hartley y Zisserman 8) Sean las rectas paralelas $x = 1$ y $x = 2$ del plano euclidiano R^2, obtener el punto de intersección en el infinito en la dirección del eje y .

$$r1 = [1, 0, -1]^T$$
$$r1 = [1, 0, -2]^T$$



Se encuentra la intersección

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0i - (-1)\,j + 0k$$

$$p = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como la 3ra coordenada es igual a 0 el punto no tiene un representante finito

9. Ejercicio 9

Para 'homogenizar'(3), introducimos las siguientes sustituciones $x \to \frac{x_1}{x_3}$, $y \to \frac{x_2}{x_3}$

a) Comprobar que la correspondiente ecuación en coordenadas homogéneas es de la forma

$$ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 + dx_1x_3 + ex_2x_3 + fx_3^2 = 0$$

Ecuación General de la cónica en coordenadas no homogéneas:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

Se sustituye $x = \frac{x_1}{x_3}; y = \frac{x_2}{x_3}$

$$a\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^2 + b\left(\frac{x_1}{x_3}\right)\left(\frac{x_2}{x_3}\right) + c\left(\frac{x_2}{x_3}\right)^2 + d\left(\frac{x_1}{x_3}\right) + e\left(\frac{x_2}{x_3}\right) + f = 0$$

$$(x_3)^2\left(a\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^2 + b\left(\frac{x_1}{x_3}\right)\left(\frac{x_2}{x_3}\right) + c\left(\frac{x_2}{x_3}\right)^2 + d\left(\frac{x_1}{x_3}\right) + e\left(\frac{x_2}{x_3}\right) + f\right) = (x_3)^2\,0$$

$$a\left(x_1\right)^2+bx_1x_2+c\left(x_2\right)^2+dx_1x_3+ex_2x_3+f\left(x_3\right)^2=0$$

Resulta la ecuación (4) por lo que se comprueba que esta es la ecuación en coordenadas homogéneas

b) Demuestre que (4) es una ecuación polinómica homogénea de grado 2.

La ecuación es homogénea de grado 2 si para cada $p\left(\alpha x,\alpha y,\alpha z\right)=\alpha^2 p\left(x,y,z\right)$

$$\begin{aligned}p\left(\alpha x,\alpha y,\alpha z\right)&=a\left(\alpha x_1\right)^2+b\alpha x_1\alpha x_2+c\left(\alpha x_2\right)^2+d\alpha x_1\alpha x_3+e\alpha x_2\alpha x_3+f\left(\alpha x_3\right)^2\\&=\alpha^2\left(a\left(x_1\right)^2+bx_1x_2+c\left(x_2\right)^2+dx_1x_3+ex_2x_3+f\left(x_3\right)^2\right)(1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha^2 p\left(x,y,z\right)&=\alpha^2 a\left(x_1\right)^2+\alpha^2 bx_1x_2+\alpha^2 c\left(x_2\right)^2+\alpha^2 dx_1x_3+\alpha^2 ex_2x_3+\alpha^2 f\left(x_3\right)^2\\&=\alpha^2\left(a\left(x_1\right)^2+bx_1x_2+c\left(x_2\right)^2+dx_1x_3+ex_2x_3+f\left(x_3\right)^2\right)(2)\end{aligned}$$

Como $(1)=(2)$ se concluye que la ecuación (4) es homogénea de grado 2

c) Verificar que (4) se puede expresar en notación matricial por la ecuación

$$x^TCx=0$$

donde $x=\left[x_1,x_2,x_3\right]^T$ ***y C es la matriz simétrica de los coeficientes de la cónica, definida por***

$$C=\begin{bmatrix}a & a/2 & d/2\\ b/2 & c & e/2\\ d/2 & e/2 & f\end{bmatrix}$$

La expresión tiene la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2}\\ \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2}\\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=0$$

$$\begin{bmatrix}ax_1+\frac{b}{2}x_2+\frac{d}{2}x_3 & \frac{b}{2}x_1+cx_2+\frac{e}{2}x_3 & \frac{d}{2}x_1+\frac{e}{2}x_2+fx_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=0$$

$$a\left(x_1\right)^2+\tfrac{b}{2}x_1x_2+\tfrac{d}{2}x_1x_3+?\tfrac{b}{2}x_1+cx_2+\tfrac{e}{2}x_3\quad\tfrac{d}{2}x_1+\tfrac{e}{2}x_2+fx_3=0$$

$$a\left(x_1\right)^2+\frac{b}{2}x_1x_2+\frac{d}{2}x_1x_3+\frac{b}{2}x_1x_2+c\left(x_2\right)^2+\frac{e}{2}x_2x_3+\frac{d}{2}x_1x_3+\frac{e}{2}x_2x_3+f\left(x_3\right)^2=0$$

Se obtiene la ecuación (4)

$$a\left(x_1\right)^2+bx_1x_2+c\left(x_2\right)^2+dx_1x_3+ex_2x_3+f\left(x_3\right)^2=0$$

Se concluye que (4) se puede expresar como

$$x^TCx=0$$

10. Ejercicio 10

(Resultado 2.7, pág. 31 de Hartley y Zisserman 21) Demuestre que la ecuación de la recta tangente r a la cónica C en un punto x está dada por $r = Cx$.

Para probar que $r = Cx$ primero se debe mostrar que si x pertenece a C también pertenece a r.

Se sabe que si un punto pertenece a una recta debe cumplir que $r^T x = 0$

Si esta recta es tangente a la cónica

$$(Cx)^T x = 0$$
$$x^T C^T x = 0$$

Como C es simétrica, reescribimos

$$x^T Cx = 0$$

Esta ecuación cumple que x pertenece a la cónica

Ahora, si existe otro punto distinto $'y'$ que pertenece tanto a la recta tangente como a la cónica $(y^T Cy = 0, r^T y = 0)$, se tiene:

$$(Cx)^T y = 0$$
$$x^T Cy = y^T Cx = 0$$

La combinación lineal de los dos puntos se escribe como:

$$r(\alpha) = x + \alpha y$$

Si se cumple que

$$(x + \alpha y)^T C (x + \alpha y) = 0 \forall \alpha \in R$$

Esto muestra que la recta r (combinación lineal de los dos puntos) pertenece a la cónica. Efectivamente:

$$(x + \alpha y)^T Cx + (x + \alpha y)^T C (\alpha y) = 0$$
$$x^T Cx + \alpha y^T Cx + \alpha x^T Cy + \alpha^2 y^T Cy = 0$$
$$0 + \alpha (0) + \alpha (0) + \alpha^2 (0) = 0$$

Entonces todos los puntos que unen a x y y deben estar en C. Esto solo sucede si la cónica es degenerada, por ejemplo, en el caso de una recta.

11. Ejercicio 11

Estudiar concepto de cónica degenerada y el Ejemplo 2.8, pág. 32 de Hartley y Zisserman. Considerar el caso particular de las rectas $l = \begin{bmatrix}1 & 0 & -1\end{bmatrix}^T, m = \begin{bmatrix}0 & 1 & -1\end{bmatrix}^T$**, y compruebe que:**

a) $C = lm^T + ml^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

$$C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

b) det[c] =0

$$det[c] = 0 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + -1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$det[o] = -1(2-1) - 1(-1) = 0$$

c)$x^T C x$ **conduce a** $x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3 + x_3^2 = 0$

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 - x_3 \\ x_1 - x_3 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$x_1(x_2 - x_3) + x_2(x_1 - x_3) + x_3(-x_1 - x_2 + 2x_3) = 0$$

$$x_1x_2 - x_1x_3 + x_1x_2 - x_2x_3 - x_1x_3 - x_2x_3 + 2x_3^2 = 0$$

$$2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 + 2x_3^2 = 0$$

$$x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3 + x_3^2 = 0$$

d) La ecuación $x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3 + x_3^2 = 0$ **de** P^2 **transformada al plano** R_2 **es** $(x-1)(y-1) = 0$
Se divide la ecuacion entre x_3^2

$$\frac{x_1}{x_3}\frac{x_2}{x_3} - \frac{x_1}{x_3} - \frac{x_2}{x_3} + 1 = 0$$

Se sabe que

$$x = \frac{x_1}{x_3}, y = \frac{x_2}{x_3}$$

$$xy - x - y + 1 = 0$$

$$x(y-1) - (y-1) = 0$$

$$(x-1)(y-1) = 0$$

e) La solución del sistema Cx=0 es la recta $\alpha[111]^T$
Se tiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Donde el determinante de la matatriz es 0 Se reduce por columnas

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0$, existen α infinitas soluciones $\begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{bmatrix}$

El punto de intersección entre las rectas es l y m es $[111]^T$
Se utiliza el producto cruz

$$p = lxm = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$p = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

12. Ejercicio 12

Si los cuatro pares de puntos correspondientes, $(X_i, Y_i) \leftrightarrow (x_i, y_i)$**, para** $i = 1, 2, 3, 4$**, satisfacen las ecuaciones (5), y suponiendo que** $h_{33} = 1$**, demuestre que de (5) resulta el siguiente sistema de ecuaciones lineales...**
Se busca despejar x y y de las ecuaciones 5

$$x(h_{31}X + h_{32}Y + h_{33}) = h_{11}X + h_{12}Y + h_{13}$$

$$y(h_{31}X + h_{32}Y + h_{33}) = h_{21}X + h_{22}Y + h_{23}$$

$$h_{33}x = h_{11}X + h_{12}Y + h_{13} - h_{31}Xx - h_{32}Y$$

$$h_{33}y = h_{21}X + h_{22}Y + h_{23} - h_{31}Xy - h_{32}Yy$$

Se sustituye $h_{33} = 1$ y se completan los términos h en ambas ecuaciones

$$x = h_{11}X + h_{12}Y + h_{13} + h_{21}0 + h_{22}0 + H_{23}0 - h_{31}Xx - h_{32}Y$$

$$y = h_{11}0 + h_{12}0 + h_{13}0 + h_{21}X + h_{22}Y + h_{23} - h_{31}Xy - h_{32}Yy$$

Por lo tango se tiene el sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} X & Y & 1 & 0 & 0 & 0 & -xX & -yY \\ 0 & 0 & 0 & X & Y & 1 & -xX & -yY \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{11} \\ h_{12} \\ h_{13} \\ h_{21} \\ h_{22} \\ h_{23} \\ h_{31} \\ h_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Para los 4 puntos el sistema queda como:

$$\begin{bmatrix} X_1 & Y_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -x_1X_1 & -y_1Y_1 \\ 0 & 0 & 0 & X_1 & Y_1 & 1 & -x_1X_1 & -y_1Y_1 \\ X_2 & Y_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -x_2X_2 & -y_2Y_2 \\ 0 & 0 & 0 & X_2 & Y_2 & 1 & -x_2X_2 & -y_2Y_2 \\ X_3 & Y_3 & 1 & 0 & 0 & 0 & -x_3X_3 & -y_3Y_3 \\ 0 & 0 & 0 & X_3 & Y_3 & 1 & -x_3X_3 & -y_3Y_3 \\ X_4 & Y_4 & 1 & 0 & 0 & 0 & -x_4X_4 & -y_4Y_4 \\ 0 & 0 & 0 & X_4 & Y_4 & 1 & -x_4X_4 & -y_4Y_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{11} \\ h_{12} \\ h_{13} \\ h_{21} \\ h_{22} \\ h_{23} \\ h_{31} \\ h_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ x_3 \\ y_3 \\ x_4 \\ y_4 \end{bmatrix}$$

13. Ejercicio 13

Probar que las cónicas duales $R^T C^* R = 0$ del plano proyectivo de partida se transforman proyectivamente en cónicas duales $r^T C^{*\prime} r = 0$ del plano proyectivo de llegada donde $C^{*\prime} = HC^*H^T$.

$$r = H^{-T}R$$
$$H^T r = R$$

Se sustituye en la ecuación del plano proyectivo de partida

$$(H^T r)^T C^* (H^T r) = 0$$

$$(r^T H) C^* (H^T r) = 0$$

$$r^T(HC^*H^T)r = 0$$

donde el término entre paréntesis es igual a $C^{*\prime}$, la ecuación queda:

$$r^T C^{*\prime} r = 0$$

14. Ejercicio 14

Demuestre que la distancia Euclidiana entre dos puntos $P_i = [X_i, Y_i, Z_i]^T$ y $P_j = [X_j, Y_j, Z_j]^T$ (para i, j =1,2,3,4) calculada a partir de sus correspondientes puntos del plano Euclidiano R^2 se expresa por la fórmula $\Delta_{ij} = \sqrt{\left(\frac{X_i}{Z_i} - \frac{Y_i}{Z_i}\right)^2 + \left(\frac{X_j}{Z_j}, \frac{Y_j}{Z_j}\right)^2}$

Se expresa P_i y P_j en R^2

$$P_i = \left[\frac{X_i}{Z_i}, \frac{Y_i}{Z_i}\right], P_j = \left[\frac{X_j}{Z_j}, \frac{Y_j}{Z_j}\right]$$

Se calcula la distancia euclidiana entre dos puntos con pitágoras.

$$\Delta_{ij} = \sqrt{\left(\frac{X_i}{Z_i} - \frac{Y_i}{Z_i}\right)^2 + \left(\frac{X_j}{Z_j}, \frac{Y_j}{Z_j}\right)^2}$$

La expresión anterior es la solicitada.

15. Ejercicio 15

Escriba cinco posibles fórmulas para razón cruzada de cuatro puntos colineales P_1, P_2, P_3, P_4 de P^2 , ¿Cuántas fórmulas posibles pudieran encontrarse?

Se considera que se fijan los 2 primeros puntos de los paréntesis

$$Cr(P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{\Delta_{13}\Delta_{24}}{\Delta_{14}\Delta_{23}}$$

$$Cr(P_1, P_2, P_4, P_3) = \frac{\Delta_{14}\Delta_{23}}{\Delta_{13}\Delta_{24}}$$

$$Cr(P_1, P_3, P_2, P_4) = \frac{\Delta_{12}\Delta_{34}}{\Delta_{14}\Delta_{32}}$$

$$Cr(P_1, P_3, P_4, P_2) = \frac{\Delta_{14}\Delta_{32}}{\Delta_{12}\Delta_{34}}$$

$$Cr(P_1, P_4, P_2, P_3) = \frac{\Delta_{12}\Delta_{43}}{\Delta_{13}\Delta_{42}}$$

¿Cuántas fórmulas posibles podrían formularse
El número total de formulas es igual al total de combinaciones posibles de 4 números ($4! = 24$)

16. Ejercicio 16

Demuestre que la transformación proyectiva sobre la recta R es de la forma $x = \frac{h_{11}X+h_{12}}{h_{21}X+h_{22}}$ **la cual es la forma bidimensional de la ecuación(5).**

La transformación $p = HP$ sobre la recta proyectiva P^1 se representa con el sistema de ecuaciones:

$$x_1 = h_{11}X_1 + h_{12}X_2$$

$$x_2 = h_{21}X_1 + h_{22}X_2$$

como $x = \frac{x_1}{x_2}$

$$x = \frac{x_1}{x_2} = \frac{h_{11}X_1 + h_{12}X_2}{h_{21}X_1 + h_{22}X_2}$$

Se multiplica por $\frac{X_2}{X_2}$

$$x = \frac{x_1}{x_2}(1) = \frac{h_{11}X_1 + h_{12}X_2}{h_{21}X_1 + h_{22}X_2}(\frac{X_2}{X_2})$$

Se sabe que $X = \frac{X_1}{X_2}$

$$x = \frac{h_{11}X + h_{12}}{h_{21}X + h_{22}}$$

17. Ejercicio 17

Demuestre que la distancia Euclidiana entre dos puntos $P_i = [X_i, Y_i]^T$ **y** $P_j = [X_j, Y_j]^T$ **de** P^1 **(para i, j =1,2,3,4) calculada a partir de sus correspondientes puntos de la recta Euclidiana R se calcula por la fórmula** $\Delta_{ij} = \frac{1}{|Y_iYj|}det[PiPj]$

Los puntos en ‘R son:

$$P_i = \frac{X_i}{Y_i}, P_j = \frac{X_j}{Y_j}$$

Se calcula distancia como el valor absoluto de la diferencia numérica de sus coordenadas

$$\Delta_{ij} = \left|\frac{X_i}{Y_i} - \frac{X_j}{Y_j}\right| = \left|\frac{X_iY_j - X_jY_i}{Y_iYj}\right|$$

Donde $X_iY_j - X_jY_i = det[P_iPj]$, por lo que la distancia se puede expresar:

$$\Delta_{ij} = \frac{1}{|Y_iYj|}det[PiPj]$$

18. Ejercicio 18

Demuestre que $Cr(P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{det[P_1P_3]det[P_2P_4]}{det[P_2P_3]det[P_1P_4]}$

Si las delta se pueden calcular como:

$$\Delta_{ij} = \frac{1}{|Y_iYj|}det[PiPj]$$

Entonces la relación cruzada es:

$$Cr = \frac{(\frac{det[P_1P_3]}{|Y_1Y_3|})(\frac{det[P_2P_4]}{|Y_2Y_4|})}{(\frac{det[P_2P_3]}{|Y_2Y_3|})(\frac{det[P_1P_4]}{|Y_1Y_4|})}$$

$$Cr = \frac{\frac{det[P_1P_3]det[P_2P_4]}{|Y_1Y_2Y_3Y_4|}}{\frac{det[P_2P_3]det[P_1P_4]}{|Y_1Y_2Y_3Y_4|}}$$

$$Cr = \frac{det[P_1P_3]det[P_2P_4]}{det[P_2P_3]det[P_1P_4]}$$

19. Ejercicio 19

Demuestre que bajo la transformación proyectiva $p = HP$ **se cumple que** $Cr(p1, p2, p3, p4) = Cr(P1, P2, P3, P4)$

Se tienen los puntos:

$$p_1 = HP_1$$

$$p_2 = HP_2$$

$$p_3 = HP_3$$

$$p_4 = HP_4$$

Se calcula Cr como

$$Cr(p1, p2, p3, p4) = \frac{det[HP_1HP_3]det[HP_2HP_4]}{det[HP_2HP_3]det[HP_1HP_4]}$$

Se extrae factor comun

$$Cr(p1, p2, p3, p4) = \frac{H^2det[P_1P_3]H^2det[P_2P_4]}{H^2det[P_2P_3]H^2det[P_1P_4]}$$

$$Cr(p1, p2, p3, p4) = (\frac{H^4}{H^4})(\frac{det[P_1P_3]det[P_2P_4]}{det[P_2P_3]det[P_1P_4]})$$

Se comprueba que

$$Cr(p1, p2, p3, p4) = Cr(P1, P2, P3, P4)$$

20. Ejercicio 20

Demuestre que una transformación es una transformación de semejanza, sí y solo sí, esta mantiene invariantes los puntos absolutos $i = [1, i, 0]^T$ y $j = [1, -i, 0]^T$

$$H_{semejanza} p_{abs} = \begin{bmatrix} \alpha cos\theta & -\alpha sin\theta & h_{13} \\ \alpha sin\theta & \alpha cos\theta & h_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \pm i \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$H_{semejanza} i = \begin{bmatrix} \alpha cos\theta - \alpha sin\theta(\pm i) \\ -\alpha sin\theta + \alpha cos\theta(\pm i) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se sacan constantes de la matriz y se usa notación de Euler

$$H_{semejanza} p_{abs} = \pm\alpha \begin{bmatrix} cos\theta - sin\theta \\ i(cos\theta - i\sin\theta) \\ 0 \end{bmatrix} = \pm\alpha \begin{bmatrix} e^{-i\theta} \\ ie^{-i\theta} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$H_{semejanza} i = \alpha e^{-i\theta} \begin{bmatrix} 1 \\ \pm i \\ 0 \end{bmatrix}$$

La transformación de semejanza mantiene a ambos puntos absolutos.

21. Ejercicio 21

(El objetivo de este ejercicio es obtener una fórmula clásica para determinar el ángulo entre las correspondientes proyecciones de las rectas r_1 y r_2 en el plano Euclidiano)
Dadas las rectas $r_1 = [a_1, -1, 0]^T$ y $r_2 = [a_2, -1, 0]^T$ del plano proyectivo P^2:

a)Verifique que sus correspondientes ecuaciones cartesianas (en el plano Euclidiano R^2) son $a_1 x - y = 0$ y $a_2 x - y = 0$, respectivamente.

Una recta $ax + by + c = 0$ del plano euclidiano R^2 se identifica por un vector $[a, b, c]^T$
Entonces para r_1

$$(a_1)x + (-1)y + (0) = 0$$

$$a_1 x - y = 0$$

Similarmente, para r_2

$$(a_2)x + (-1)y + (0) = 0$$

$$a_2 x - y = 0$$

b)Compruebe que sus ecuaciones vectoriales son, respectivamente, $r_1(\alpha) = \alpha[1, a_1]^T$ y $r_2(\alpha) = \alpha[1, a_2]^T$

Si x es igual a un parémetro α y y es una función de α

$$y = a_1\alpha$$

$$x = \alpha$$

La ecuación vectorial es

$$r_1(\alpha) = \alpha[1, a_1]^T$$

Similarmente para r_2

$$r_2(\alpha) = \alpha[1, a_2]^T$$

c)El ángulo θ entre las rectas r_1 y r_2 coincide con el ángulo entre los vectores directores $v_1 = [1.a_1]$ y $v_2 = [1.a_2]$. Demuestre que $tan\theta = \frac{|v_2 \times v_1|}{v_2 \cdot v_1} = \frac{a_1 - a_2}{1 + a_1 a_2}$

Se desarrolla $tan\theta$

$$tan\theta = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_2 & a_1 \end{vmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 \\ a_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \end{bmatrix}} = \frac{a_1 - a_2}{1 + a_1 a_2}$$

22. Ejercicio 22

El objetivo de este ejercicio es obtener una fórmula clásica para determinar el ángulo entre las rectas r1 y r2 en el plano proyectivo y comparar con la obtenida en el Ejercicio 21)

Dadas las rectas $r_1 = [a_1, -1, 0]^T$ y $r_2 = [a_2, -1, 0]^T$ del plano proyectivo P^2:

a) Comprobar que los puntos de intersección p_i entre las rectas r_i y la recta ideal r_∞ son de la forma $p_i = [1, a_i, 0]^T$ $(i = 1, 2)$.

Para encontrar la intersección se hace el producto cruz con $r_{\text{ínf}} = [0, 0, 1]^T$

$$p_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ a_1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = i(1) - j(-a_1) + 0$$

$$p_1 = [1, a_1, 0]^T$$

$$p_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ a_2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = i(1) - j(-a_2) + 0$$

$$p_2 = [1, a_2, 0]^T$$

b) Comprobar que la razón cruzada entre los puntos $p_1 = [1, a_1, 0]^T, p_1 = [1, a_2, 0]^T, i = [1, i, 0]^T$ y $j = [1, -i, 0]^T$ está dada por

$$Cr(p_1, p_2, i, j) = e^{2i\left(tan^{-1}\left(\frac{a_1 - a_2}{a_1 a_2 + 1}\right)\right)}$$

$$Cr(p_1,p_2,i,j) = \frac{\Delta_{p_1 i}\Delta_{p_2 j}}{\Delta_{p_2 i}\Delta_{p_1 j}}$$

$$Cr(p_1,p_2,i,j) = \frac{(p_1-i)(p_2-j)}{(p_2-i)(p_1-j)} = \frac{(a_1-i)(a_2+i)}{(a_2-i)(a_1+i)}$$

$$Cr(p_1,p_2,i,j) = \frac{a_1a_2+a_1i-a_2i+1}{a_1a_2+a_2i-a_ii+1}$$

$$Cr(p_1,p_2,i,j) = \frac{a_1a_2+1+i(a_1-a_2)}{a_1a_2+1+i(a_2-a_i)} \tag{1}$$

Se convierte el numerador y denominador de 1 a polares

$$\theta_1 = tan^{-1}\left(\frac{a_1-a_2}{a_1a_2+1}\right)$$

$$\theta_2 = tan^{-1}\left(\frac{a_2-a_1}{a_1a_2+1}\right)$$

$$Cr(p_1,p_2,i,j) = \frac{e^{i\left(tan^{-1}\left(\frac{a_1-a_2}{a_1a_2+1}\right)\right)}}{e^{i\left(tan^{-1}\left(\frac{a_2-a_1}{a_1a_2+1}\right)\right)}}$$

$$Cr(p_1,p_2,i,j) = e^{i\left(tan^{-1}\left(\frac{a_1-a_2}{a_1a_2+1}\right)-tan^{-1}\left(\frac{a_2-a_1}{a_1a_2+1}\right)\right)}$$

$$Cr(p_1,p_2,i,j) = e^{2i\left(tan^{-1}\left(\frac{a_1-a_2}{a_1a_2+1}\right)\right)}$$

c)Comprobar de (26) y (27) resulta (25).

De 27

$$Cr(p_1,p_2,i,j) = e^{2i\left(tan^{-1}\left(\frac{a_1-a_2}{a_1a_2+1}\right)\right)}$$

$$\frac{1}{2i}ln\left(Cr(p_1,p_2,i,j)\right) = \left(tan^{-1}\left(\frac{a_1-a_2}{a_1a_2+1}\right)\right)$$

De 26

$$\theta = tan^{-1}\left(\frac{a_1-a_2}{a_1a_2+1}\right)$$

$$\frac{1}{2i}ln\left(Cr(p_1,p_2,i,j)\right) = \theta$$

La ecuación obtenida es (25)

23. Ejercicio 23

El objetivo de este ejercicio es visualizar la interpretación geométrica Euclidiana de la recta r que pasa por dos puntos no ideales P_1 y P_2 de P^3 Sea r la recta de P^3 que pasa por los puntos $P_1 = [1,1,0,1]^T$ y $P_2 = [0,1,1,1]^T$

a) Escribir la ecuación de la recta r usando la fórmula (10).

$$r = [l_{41}, l_{42}, l_{43}, l_{23}, l_{31}, l_{12}]$$

$$l_{41} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1; \quad l_{42} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad l_{43} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$l_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1; \quad l_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1; \quad l_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$r = [-1, 0, 1, 1, -1, 1]$$

b) Hallar los puntos P_1 y P_2 , correspondientes de $R^3 = \{(x,y,z)\}$, en coordenadas no homogéneas.

$$\overline{P}_1 = [1,1,0]^T, \quad \overline{P}_2 = [0,1,1]^T$$

c) Hallar la ecuación vectorial de la recta r que pasa por los puntos $\overline{P}_1$ y $\overline{P}_2$

$$r = p + \lambda \overline{P}_1 \overline{P}_2$$

Se encuentra el vector director:

$$\overline{P}_1 \overline{P}_2 = \overline{P}_2 - \overline{P}_1 = [-1, 0, 1]^T$$

La ecuación de la recta se escribe como

$$r = [1,1,0] + \lambda[-1,0,1]$$

d)Hallar la ecuación cartesiana $Ax + By + Cz = 0$ del plano que pasa por el origen y por los puntos $\overline{P}_1$ y $\overline{P}_2$

$$n \cdot (x, y, z)$$

$$n = \overline{P}_1 \times \overline{P}_2$$

$$n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1, -1, 1)$$

$$x - y + z = 0$$

e) Ilustrar gráficamente en el primer octante del espacio Cartesiano $R^3 = (x, y, z)$***, a los puntos*** $\overline{P}_1$ ***y*** $\overline{P}_2$***, al plano que pasa por el origen y por los puntos*** $\overline{P}_1$ ***y*** $\overline{P}_2$ ***, y al vector normal a dicho plano*** $n = \overline{P}_1 \times \overline{P}_2$

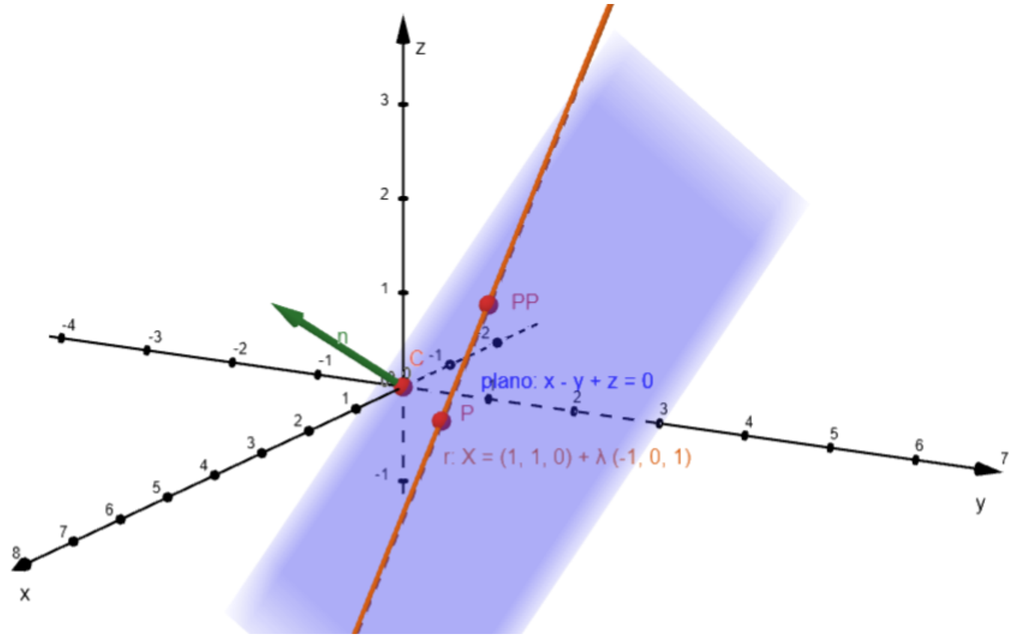


Figura 1: Plano

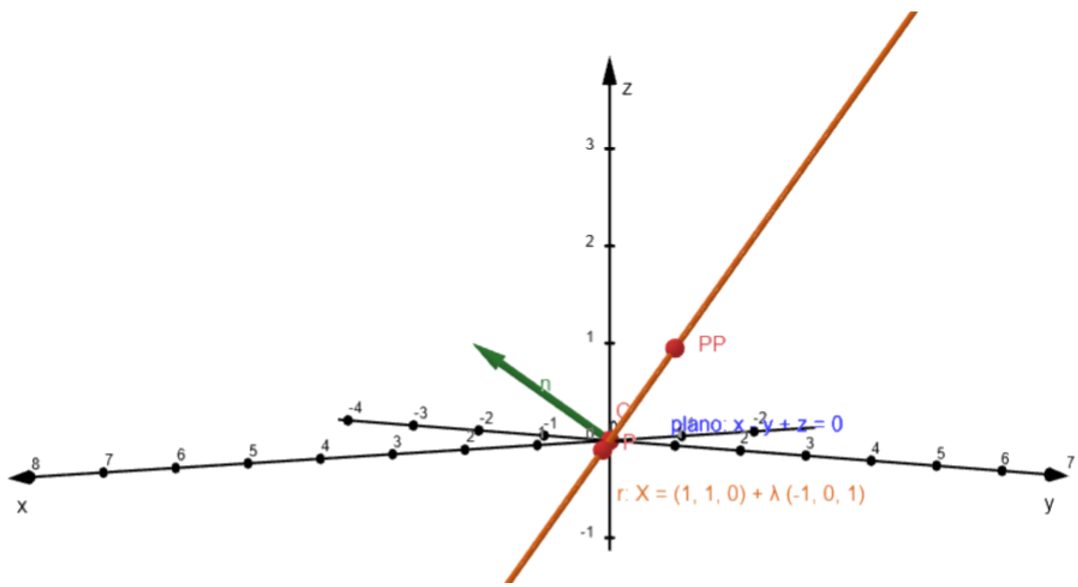


Figura 2: Recta

24. Ejercicio 24

(Sucesión de pasos que conduce a la ecuación del plano que pasa por tres puntos dehomogéneas) P^3 **a partir del vector normal en coordenadas no homogéneas)**

a) Verificar que, si $D \neq 0$, el sistema (13) se puede expresar en notación matricial como sigue:
‘

Se desarrolla el sistema:

$$x_1\left(\frac{A}{D}\right)+y_1\left(\frac{B}{D}\right)+z_1\left(\frac{C}{D}\right)=-1$$

$$x_2\left(\frac{A}{D}\right)+y_2\left(\frac{B}{D}\right)+z_2\left(\frac{C}{D}\right)=-1$$

$$x_3\left(\frac{A}{D}\right)+y_3\left(\frac{B}{D}\right)+z_3\left(\frac{C}{D}\right)=-1$$

Se multiplica por D

$$x_1A+y_1B+z_1C=0$$

$$x_2A+y_2B+z_2C=0$$

$$x_3A+y_3B+z_3C=0$$

Se verifica que la matriz representa al sistema de ecuaciones.

b) Suponiendo que $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$ aplicar Cramer, para comprobar que las componentes $\bar{n_x}\bar{n_y}\bar{n_z}$ del vector normal $\bar{n}=[\bar{n_x}\bar{n_y}\bar{n_z}]^T$ satisfacen las siguientes relaciones...

Se aplica Cramer al sistema de ecuaciones:

$$n_x=\frac{A}{D}=\frac{\begin{vmatrix} -1 & y_1 & z_1 \\ -1 & y_2 & z_2 \\ -1 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}}$$

$$n_y=\frac{B}{D}=\frac{\begin{vmatrix} x_1 & -1 & z_1 \\ x_2 & -1 & z_2 \\ x_3 & -1 & z_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}}$$

$$n_z=\frac{C}{D}=\frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & -1 \\ x_2 & y_2 & -1 \\ x_3 & y_3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}}$$

c)Homogeneizar el vector normal $\bar{n} = [\bar{n_x}\bar{n_y}\bar{n_z}]^T$ ***mediante los cambios*** $x_i = \frac{X_i}{W_i}$***,*** $y_i = \frac{Y_i}{W_i}$ ***y*** $z_i = \frac{Z_i}{W_i}$ ***aplicando propiedades de los determinantes, obtener la siguiente ecuación del plano que pasa por los puntos*** $P_1 = [X_1, Y_1, Z_1]^T$***,*** $P_2 = [X_2, Y_2, Z_2]^T$ ***y*** $P_3 = [X_3, Y_3, Z_3]^T$

Se aplica la sustitución y homogenización

$$\bar{n} = \left[\frac{\begin{vmatrix} -1 & \frac{Y_1}{W_1} & \frac{Z_1}{W_1} \\ -1 & \frac{Y_2}{W_2} & \frac{Z_1}{W_2} \\ -1 & \frac{Y_3}{W_3} & \frac{Z_3}{W_3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{X_1}{W_1} & \frac{Y_1}{W_1} & \frac{Z_1}{W_1} \\ \frac{X_2}{W_2} & \frac{Y_2}{W_2} & \frac{Z_2}{W_2} \\ \frac{X_3}{W_3} & \frac{Y_3}{W_3} & \frac{Z_3}{W_3} \end{vmatrix}}, \frac{\begin{vmatrix} \frac{X_1}{W_1} & -1 & \frac{Z_1}{W_1} \\ \frac{X_2}{W_2} & -1 & \frac{Z_2}{W_2} \\ \frac{X_3}{W_3} & -1 & \frac{Z_3}{W_3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{X_1}{W_1} & \frac{Y_1}{W_1} & \frac{Z_1}{W_1} \\ \frac{X_2}{W_2} & \frac{Y_2}{W_2} & \frac{Z_2}{W_2} \\ \frac{X_3}{W_3} & \frac{Y_3}{W_3} & \frac{Z_3}{W_3} \end{vmatrix}}, \frac{\begin{vmatrix} \frac{X_1}{W_1} & \frac{Y_1}{W_1} & -1 \\ \frac{X_2}{W_2} & \frac{Y_2}{W_2} & -1 \\ \frac{X_3}{W_3} & \frac{Y_3}{W_3} & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{X_1}{W_1} & \frac{Y_1}{W_1} & \frac{Z_1}{W_1} \\ \frac{X_2}{W_2} & \frac{Y_2}{W_2} & \frac{Z_2}{W_2} \\ \frac{X_3}{W_3} & \frac{Y_3}{W_3} & \frac{Z_3}{W_3} \end{vmatrix}}, 1\right]^T$$

Se multiplica la primera fila por W_1, la segunda por W_2 y la tercera por W_3, tomando en cuenta la propiedad $det\left(\begin{bmatrix} r & r \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = rdet\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right)$

$$\bar{n} = \left[\frac{W_1W_2W_3\begin{vmatrix} -W_1 & Y_1 & Z_1 \\ -W_2 & Y_2 & Z_2 \\ -W_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}}{W_1W_2W_3\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}}, \frac{W_1W_2W_3\begin{vmatrix} X_1 & -W_1 & Z_1 \\ X_2 & -W_2 & Z_2 \\ X_3 & -W_3 & Z_3 \end{vmatrix}}{W_1W_2W_3\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}}, \frac{W_1W_2W_3\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & -W_1 \\ X_2 & Y_2 & -W_2 \\ X_3 & Y_3 & -W_3 \end{vmatrix}}{W_1W_2W_3\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}}, 1\right]^T$$

$$\bar{n} = \left[\frac{\begin{vmatrix} -W_1 & Y_1 & Z_1 \\ -W_2 & Y_2 & Z_2 \\ -W_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}}, \frac{\begin{vmatrix} X_1 & -W_1 & Z_1 \\ X_2 & -W_2 & Z_2 \\ X_3 & -W_3 & Z_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}}, \frac{\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & -W_1 \\ X_2 & Y_2 & -W_2 \\ X_3 & Y_3 & -W_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}}, 1\right]^T$$

Se multiplica por $\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}$

$$\bar{n} = \left[\begin{vmatrix} -W_1 & Y_1 & Z_1 \\ -W_2 & Y_2 & Z_2 \\ -W_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} X_1 & -W_1 & Z_1 \\ X_2 & -W_2 & Z_2 \\ X_3 & -W_3 & Z_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & -W_1 \\ X_2 & Y_2 & -W_2 \\ X_3 & Y_3 & -W_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}\right]^T$$

Se transpone tomando en cuenta que $det(A) = det(A^T)$

$$\bar{n} = \left[\begin{vmatrix} -W_1 & -W_2 & -W_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ -W_1 & -W_2 & -W_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ -W_1 & -W_2 & -W_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{vmatrix}\right]^T$$

Finalmente, se intercambian las filas correspondientes para que encontrar (16). Se toma en cuenta que al hacer el intercambio hay un cambio de signo en el determinante

$$\bar{n} = \left[-\begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ -W_1 & -W_2 & -W_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \\ -W_1 & -W_2 & -W_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ -W_1 & -W_2 & -W_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{vmatrix} \right]^T$$

Y se multiplican las filas de W corresponddientes por -1.

$$\bar{n} = \left[\begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ W_1 & W_2 & W_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \\ W_1 & W_2 & W_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ W_1 & W_2 & W_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{vmatrix} \right]^T$$

Se obtiene (16)

25. Ejercicio 25

(Tres planos concurrentes en un punto) Deduzca, por dualidad con (16), la fórmula del punto de intersección p entre los planos $n_1 = [n_1^1, n_2^1, n_3^1, n_4^1]$, $n_2 = [n_1^2, n_2^2, n_3^2, n_4^2]$ y $n_3 = [n_1^3, n_2^3, n_3^3, n_4^3]$ de P^3 .

Por dualidad la misma fórmula anterior se puede usar para encontrar el punto de intersección entre 3 planos.

Se tiene el sistema de ecuaciones

$$n_1^1 X + n_2^1 Y + n_3^1 Z + n_4^1 W = 0$$

$$n_1^2 X + n_2^2 Y + n_3^2 Z + n_4^2 W = 0$$

$$n_1^3 X + n_2^3 Y + n_3^3 Z + n_4^3 W = 0$$

$$\begin{bmatrix} n_1^1 & n_2^1 & n_3^1 \\ n_1^2 & n_2^2 & n_3^2 \\ n_1^3 & n_2^3 & n_3^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X/W \\ Y/W \\ Z/W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -n_4^1 \\ -n_4^2 \\ -n_4^3 \end{bmatrix}$$

Se resuelve con Cramer

$$\bar{p_x} = \frac{\begin{vmatrix} -n_4^1 & n_2^1 & n_3^1 \\ -n_4^2 & n_2^2 & n_3^2 \\ -n_4^3 & n_2^3 & n_3^3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n_1^1 & n_2^1 & n_3^1 \\ n_1^2 & n_2^2 & n_3^2 \\ n_1^3 & n_2^3 & n_3^3 \end{vmatrix}}, \quad \bar{p_y} = \frac{\begin{vmatrix} n_1^1 & -n_4^1 & n_3^1 \\ n_1^2 & -n_4^2 & n_3^2 \\ n_1^3 & -n_4^3 & n_3^3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n_1^1 & n_2^1 & n_3^1 \\ n_1^2 & n_2^2 & n_3^2 \\ n_1^3 & n_2^3 & n_3^3 \end{vmatrix}}, \quad \bar{p_z} = \frac{\begin{vmatrix} n_1^1 & n_2^1 & -n_4^1 \\ n_1^2 & n_2^2 & -n_4^2 \\ n_1^3 & n_2^3 & -n_4^3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n_1^1 & n_2^1 & n_3^1 \\ n_1^2 & n_2^2 & n_3^2 \\ n_1^3 & n_2^3 & n_3^3 \end{vmatrix}}$$

Se tiene el vector $\bar{p}$

$$\bar{p} = \left[\frac{\begin{vmatrix} -n_4^1 & n_2^1 & n_3^1 \\ -n_4^2 & n_2^2 & n_3^2 \\ -n_4^3 & n_2^3 & n_3^3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n_1^1 & n_2^1 & n_3^1 \\ n_1^2 & n_2^2 & n_3^2 \\ n_1^3 & n_2^3 & n_3^3 \end{vmatrix}}, \frac{\begin{vmatrix} n_1^1 & -n_4^1 & n_3^1 \\ n_1^2 & -n_4^2 & n_3^2 \\ n_1^3 & -n_4^3 & n_3^3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n_1^1 & n_2^1 & n_3^1 \\ n_1^2 & n_2^2 & n_3^2 \\ n_1^3 & n_2^3 & n_3^3 \end{vmatrix}}, \frac{\begin{vmatrix} n_1^1 & n_2^1 & -n_4^1 \\ n_1^2 & n_2^2 & -n_4^2 \\ n_1^3 & n_2^3 & -n_4^3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n_1^1 & n_2^1 & n_3^1 \\ n_1^2 & n_2^2 & n_3^2 \\ n_1^3 & n_2^3 & n_3^3 \end{vmatrix}}, 1 \right]^T$$

$$\bar{p} = \left[\begin{vmatrix} -n_4^1 & n_2^1 & n_3^1 \\ -n_4^2 & n_2^2 & n_3^2 \\ -n_4^3 & n_2^3 & n_3^3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} n_1^1 & -n_4^1 & n_3^1 \\ n_1^2 & -n_4^2 & n_3^2 \\ n_1^3 & -n_4^3 & n_3^3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} n_1^1 & n_2^1 & -n_4^1 \\ n_1^2 & n_2^2 & -n_4^2 \\ n_1^3 & n_2^3 & -n_4^3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} n_1^1 & n_2^1 & n_3^1 \\ n_1^2 & n_2^2 & n_3^2 \\ n_1^3 & n_2^3 & n_3^3 \end{vmatrix} \right]^T$$

Se realiza la transposición y cambio de filas

$$\bar{p} = \left[\begin{vmatrix} n_2^1 & n_2^2 & n_2^3 \\ n_4^1 & n_4^2 & n_4^3 \\ n_3^1 & n_3^2 & n_3^3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} n_1^1 & n_1^2 & n_1^3 \\ n_3^1 & n_3^2 & n_3^3 \\ n_4^1 & n_4^2 & n_4^3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} n_1^1 & n_1^2 & n_1^3 \\ n_4^1 & n_4^2 & n_4^3 \\ n_2^1 & n_2^2 & n_2^3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} n_1^1 & n_1^2 & n_1^3 \\ n_2^1 & n_2^2 & n_2^3 \\ n_3^1 & n_3^2 & n_3^3 \end{vmatrix} \right]^T$$

La anterior es la fórmula del punto de intersección de 3 planos.