自古枪兵幸运 E 解题报告

June 12, 2014

题目大意

题目大意

有 N 种消耗 1 点能量的设施和 M 种消耗为 2 点能量的设施，每一种都可以建造任意个。

题目大意

有 N 种消耗 1 点能量的设施和 M 种消耗为 2 点能量的设施，每一种都可以建造任意个。

求总共消耗 K 点能量来建造设施的方案数 $\mod P$。

数据范围

- 对于 30% 的数据，$K \leq 10^5$。
- 对于 60% 的数据，$N, M \leq 10^3$，$P \leq 2 * 10^4$。
- 对于 100% 的数据，$T \leq 20$，$N, M \leq 10^5$，$K \leq 10^{12}$，$P \leq 10^6$。

动态规划算法

动态规划算法

设我们花费 t 点能量建造小型设施的方案数为 f_t，建设大型设施的方案数为 g_t。

动态规划算法

设我们花费 t 点能量建造小型设施的方案数为 f_t，建设大型设施的方案数为 g_t。

很显然，花费 k 点能量建造设施的方案数，可以表示为：

$$\sum_{i=0,2,4,6\ldots}^{k} f_{k-i} \cdot g_i$$

动态规划算法

设我们花费 t 点能量建造小型设施的方案数为 f_t，建设大型设施的方案数为 g_t。

很显然，花费 k 点能量建造设施的方案数，可以表示为：

$$\sum_{i=0,2,4,6\ldots}^{k} f_{k-i} \cdot g_i$$

通过动态规划，我们可以递推地计算出 f_t 和 g_t。

动态规划算法

设我们花费 t 点能量建造小型设施的方案数为 f_t，建设大型设施的方案数为 g_t。

很显然，花费 k 点能量建造设施的方案数，可以表示为：

$$\sum_{i=0,2,4,6\ldots}^{k} f_{k-i} \cdot g_i$$

通过动态规划，我们可以递推地计算出 f_t 和 g_t。

这样，我们可以得到一个时间复杂度为 $O(k)$ 的算法，可以通过 30% 的测试数据。

简单的组合数解法

简单的组合数解法

然而，通过观察我们发现，f_i 的结果可以被表示为 $c1 + c2 + c3 + \ldots + ck = i$ 的解的形式。

简单的组合数解法

然而，通过观察我们发现，f_i 的结果可以被表示为 $c1 + c2 + c3 + \ldots + ck = i$ 的解的形式。

这是一个经典的组合数学问题，通过隔板法可以得知他的结果为 $\binom{i+k-1}{k-1}$。

简单的组合数解法

然而，通过观察我们发现，f_i 的结果可以被表示为 $c1 + c2 + c3 + \ldots + ck = i$ 的解的形式。

这是一个经典的组合数学问题，通过隔板法可以得知他的结果为 $\binom{i+k-1}{k-1}$。

于是，前式可以表示为：

$$\sum_{i=0,2,4,6\ldots}^{k} f_{k-i} \cdot g_i = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \binom{k-2i+n-1}{n-1} \cdot \binom{i+m-1}{m-1}$$

简单的组合数解法

然而，通过观察我们发现，f_i 的结果可以被表示为 $c1 + c2 + c3 + \ldots + ck = i$ 的解的形式。

这是一个经典的组合数学问题，通过隔板法可以得知他的结果为 $\binom{i+k-1}{k-1}$。

于是，前式可以表示为：

$$\sum_{i=0,2,4,6\ldots}^{k} f_{k-i} \cdot g_i = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \binom{k-2i+n-1}{n-1} \cdot \binom{i+m-1}{m-1}$$

这样的转化并不会降低复杂度，然而为我们之后的优化提供了思路。

一些处理技巧

一些处理技巧

观察在 $\mod P$ 意义下的组合数，我们可以发现，对于 P^t 大于 m 的情况下：

$$\binom{n}{m} \equiv \binom{n+P^t}{m} \pmod P$$

一些处理技巧

一些处理技巧

通过将组合数展开

$$\binom{n+P^t}{m} = \frac{(x+P^t-y+1)+(x+P^t-y+2)+\ldots(x+P^t)}{y!}$$

我们可以很显然的证明刚才的那个式子。

一些处理技巧

一些处理技巧

回到原式，我们可以发现，i 和 $i + P^t$ 的值在 $modP$ 的意义上也是同余的。

一些处理技巧

回到原式，我们可以发现，i 和 $i + P^t$ 的值在 $modP$ 的意义上也是同余的。

所以，我们可以把求和式分为 P^t 组，每一组分别进行统计。

$$result = \sum_{i=0}^{P^t-1} \binom{n-k+2i-1}{n-1} \binom{m+i-1}{m-1} \lfloor \frac{\lfloor k/2 \rfloor - i}{P^t} + 1 \rfloor$$

一些处理技巧

回到原式，我们可以发现，i 和 $i+P^t$ 的值在 $modP$ 的意义上也是同余的。

所以，我们可以把求和式分为 P^t 组，每一组分别进行统计。

$$result = \sum_{i=0}^{P^t-1} \binom{n-k+2i-1}{n-1}\binom{m+i-1}{m-1}\lfloor\frac{\lfloor k/2\rfloor - i}{P^t}+1\rfloor$$

由于需要保证 $P^t > \max(n,m)$，P^t 最大需要为 $\max(n,m)^2$，总复杂度为 $\max(n,m)^2 + P$。

生成函数简介

生成函数简介

在继续接下来的解题之前，我们先介绍一下利用生成函数来求解计数问题的方法。

生成函数简介

在继续接下来的解题之前，我们先介绍一下利用生成函数来求解计数问题的方法。

生成函数是一个定义在一个无穷数列 $h_0, h_1, h_2 \dots$ 上的无穷级数

$$h_0 + h_1 x + h_2 x^2 + \dots$$

生成函数简介

生成函数简介

对于原题，我们可以把它转化为 $f_1+f_2+f_3+\ldots+f_n+g_1+g_2+g_3+\ldots+g_m$ 方程组解的个数。其中 f 为正整数，g 为偶数。

生成函数简介

对于原题，我们可以把它转化为 $f_1+f_2+f_3+\ldots+f_n+g_1+g_2+g_3+\ldots+g_m$ 方程组解的个数。其中 f 为正整数，g 为偶数。

我们建立这样的两个生成函数。

$$F(x)=1+x+x^2+x^3+\ldots\ G(x)=1+x^2+x^4+x^6+\ldots$$

生成函数简介

对于原题，我们可以把它转化为 $f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_n + g_1 + g_2 + g_3 + \ldots + g_m$ 方程组解的个数。其中 f 为正整数，g 为偶数。

我们建立这样的两个生成函数。

$$F(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots \quad G(x) = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots$$

接下来，我们对 $F(x)^n \cdot G(x)^m$ 进行展开。

对于原题，我们可以把它转化为 $f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_n + g_1 + g_2 + g_3 + \ldots + g_m$ 方程组解的个数。其中 f 为正整数，g 为偶数。

我们建立这样的两个生成函数。

$$F(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots \quad G(x) = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots$$

接下来，我们对 $F(x)^n \cdot G(x)^m$ 进行展开。

可以发现，在这个方程组中，每一项都可以看作在原始式子上乘上 $F(x)$ 或 $G(x)$。最终方程组解的个数，即是计算这些式子之间组合产生 x^k 的方案数。

生成函数简介

对于原题，我们可以把它转化为 $f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_n + g_1 + g_2 + g_3 + \ldots + g_m$ 方程组解的个数。其中 f 为正整数，g 为偶数。

我们建立这样的两个生成函数。

$$F(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots G(x) = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots$$

接下来，我们对 $F(x)^n \cdot G(x)^m$ 进行展开。

可以发现，在这个方程组中，每一项都可以看作在原始式子上乘上 $F(x)$ 或 $G(x)$。最终方程组解的个数，即是计算这些式子之间组合产生 x^k 的方案数。

也就是说，展开的多项式中 x^k 的系数，就是题中所要求的方案数。

初步分析

初步分析

显然，对于这样的生成函数直接进行计算是不现实的：为了计算所需的 x^k，我们需要计算到生成函数的第 $k+1$ 项。

初步分析

显然，对于这样的生成函数直接进行计算是不现实的：为了计算所需的 x^k，我们需要计算到生成函数的第 $k+1$ 项。

从数学上考虑，一方面，生成函数是一个代数对象，可以通过代数手段求得问题可行解的方案数。而另一方面，生成函数又是一个无限可微分函数的泰勒级数。

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

初步分析

初步分析

于是，原式就可以被写成这样的形式

$$F(x)^n \cdot G(x)^m = (\frac{1}{1-x})^n(\frac{1}{1-x^2})^m = \frac{1}{(1-x)^{n+m}(1+x)^m}$$

初步分析

于是，原式就可以被写成这样的形式

$$F(x)^n \cdot G(x)^m = (\frac{1}{1-x})^n(\frac{1}{1-x^2})^m = \frac{1}{(1-x)^{n+m}(1+x)^m}$$

尽管我们暂时不知道如何计算这样的式子，但是我们可以知道，这个式子可以被写成这样的形式。

$$\frac{1}{(1-x)^{n+m}(1+x)^m} = \sum_{i=1}^{n+m} \frac{c_i}{(1-x)^i} + \sum_{i=1}^{m} \frac{d_i}{(1+x)^i}$$

其中 c_i 和 d_i 都是未知的系数。

初步分析

初步分析

考察其中的每一项，可以发现，每一个 $(\frac{1}{1-x})^i$ 可以理解成 $e_1 + e_2 + \ldots + e_i = k$ 的整数解个数。

初步分析

考察其中的每一项，可以发现，每一个 $(\frac{1}{1-x})^i$ 可以理解成 $e_1 + e_2 + \ldots + e_i = k$ 的整数解个数。

同样，使用之前提到的组合数学知识，我们可以算出这个式子为 $\sum_{i=1} \binom{n+i-1}{i-1} x^i$

初步分析

考察其中的每一项，可以发现，每一个 $(\frac{1}{1-x})^i$ 可以理解成 $e_1 + e_2 + \ldots + e_i = k$ 的整数解个数。

同样，使用之前提到的组合数学知识，我们可以算出这个式子为 $\sum_{i=1} \binom{n+i-1}{i-1} x^i$

类似的，$(\frac{1}{1+x})^i$ 可以表示为 $\sum_{i=1} (-1)^i \binom{n+i-1}{i-1} x^i$

初步分析

考察其中的每一项，可以发现，每一个 $(\frac{1}{1-x})^i$ 可以理解成 $e_1 + e_2 + \ldots + e_i = k$ 的整数解个数。

同样，使用之前提到的组合数学知识，我们可以算出这个式子为 $\sum_{i=1} \binom{n+i-1}{i-1} x^i$

类似的，$(\frac{1}{1+x})^i$ 可以表示为 $\sum_{i=1} (-1)^i \binom{n+i-1}{i-1} x^i$

由此，x^k 就可以表示为

$$\sum_{i=1}^{n+m} c_i \binom{k+i-1}{i-1} + (-1)^k \sum_{i=1}^{m} d_i \binom{k+i-1}{i-1}$$

初步分析

考察其中的每一项，可以发现，每一个 $(\frac{1}{1-x})^i$ 可以理解成 $e_1 + e_2 + \ldots + e_i = k$ 的整数解个数。

同样，使用之前提到的组合数学知识，我们可以算出这个式子为 $\sum_{i=1} \binom{n+i-1}{i-1} x^i$

类似的，$(\frac{1}{1+x})^i$ 可以表示为 $\sum_{i=1} (-1)^i \binom{n+i-1}{i-1} x^i$

由此，x^k 就可以表示为

$$\sum_{i=1}^{n+m} c_i \binom{k+i-1}{i-1} + (-1)^k \sum_{i=1}^{m} d_i \binom{k+i-1}{i-1}$$

通过高斯消元算法计算 c_i、d_i，可以在 $O(n+m)^3$ 的时间复杂度内求得答案。

生成函数系数的特点

生成函数系数的特点

尽管刚才的算法在复杂度上并没有太大的优势。但是通过这样的算法，我们可以得到新的思路。

生成函数系数的特点

尽管刚才的算法在复杂度上并没有太大的优势。但是通过这样的算法，我们可以得到新的思路。

通过观察所得出的系数，我们可以得出这样的规律。

$$\frac{1}{(1+x)^a(1-x)^b} = \sum_{i=1}^{a} \frac{1}{(1+x)^i} \binom{a+b-i-1}{a-i} \frac{1}{2^{a+b-i}} + \sum_{i=1}^{b} \frac{1}{(1-x)^i} \binom{a+b-i-1}{b-i} \frac{1}{2^{a+b-i}}$$

在接下来的篇目中，我们将证明它的正确性。

进一步分析

进一步分析

两边同时乘上 $(1+x)^a(1-x)^b$，我们可以得到

$$
\begin{aligned}
1 &= \sum_{i=1}^{a}(1-x)^b(1+x)^{a-i}\binom{a+b-i-1}{a-i}\frac{1}{2^{a+b-i}} \\
&+ \sum_{i=1}^{b}(1-x)^{b-i}(1+x)^{a}\binom{a+b-i-1}{b-i}\frac{1}{2^{a+b-i}}
\end{aligned}
$$

进一步分析

两边同时乘上 $(1+x)^a(1-x)^b$，我们可以得到

$$1=\sum_{i=1}^{a}(1-x)^b(1+x)^{a-i}\binom{a+b-i-1}{a-i}\frac{1}{2^{a+b-i}}$$
$$+\sum_{i=1}^{b}(1-x)^{b-i}(1+x)^a\binom{a+b-i-1}{b-i}\frac{1}{2^{a+b-i}}$$

在两边分别用 t 代替 $a-i$ 和 $b-i$，得到

$$1=\sum_{t=0}^{a-1}(1-x)^b(1+x)^t\binom{t+b-1}{t}\frac{1}{2^{t+b}}$$
$$+\sum_{t=0}^{b-1}(1-x)^t(1+x)^a\binom{t+a-1}{t}\frac{1}{2^{t+a}}$$

归纳

归纳

使用数学归纳法。显然，在 $a=1,b=0$ 或 $a=0,b=1$ 的情况下原式成立。假设我们已经证明了在 a,b 的情况下成立，那么，考察 $a+1,b$ 的情况。由于和为一个常数，我们考察每一次的改变量必须为 0：

$$\begin{aligned}\delta=&(1-x)^b(1+x)^a\binom{a+b-1}{t}\frac{1}{2^{a+b}}\\&-\sum_{t=0}^{b-1}(1-x)^t(1+x)^a\binom{t+a-1}{t}\frac{1}{2^{t+a}}\\&+\sum_{t=0}^{b-1}(1-x)^t(1+x)^{a+1}\binom{t+a-1}{t}\frac{1}{2^{t+a+1}}\\=&\frac{(1+x)^a}{2^a}[\sum_{t=0}^{b-1}(\frac{1-x}{2})^t(\frac{1+x}{2}\binom{t+a}{t}-\binom{t+a-1}{t}))\\&+(\frac{1-x}{2})^b\binom{a+b-1}{a}]\end{aligned}$$

归纳

归纳

现在我们需要证明

$$\sum_{t=0}^{b-1}(\frac{1-x}{2})^t(\frac{1+x}{2}\binom{t+a}{t}-\binom{t+a-1}{t})$$
$$=-(\frac{1-x}{2})^b\binom{a+b-1}{a}$$

归纳

现在我们需要证明

$$\sum_{t=0}^{b-1}(\frac{1-x}{2})^t(\frac{1+x}{2}\binom{t+a}{t}-\binom{t+a-1}{t})$$
$$=-(\frac{1-x}{2})^b\binom{a+b-1}{a}$$

同样，对于 $b=1$ 的情况下显然易证。对于 $b>1$ 的情况，左边增量为 $(\frac{1-x}{2})^b(\frac{1+x}{2}\binom{a+b}{b}-\binom{a+b-1}{b})$

归纳

现在我们需要证明

$$\sum_{t=0}^{b-1}(\frac{1-x}{2})^t(\frac{1+x}{2}\binom{t+a}{t}-\binom{t+a-1}{t})$$

$$=-(\frac{1-x}{2})^b\binom{a+b-1}{a}$$

同样，对于 $b=1$ 的情况下显然易证。对于 $b>1$ 的情况，左边增量为 $(\frac{1-x}{2})^b(\frac{1+x}{2}\binom{a+b}{b}-\binom{a+b-1}{b})$

加上右边得 $(\frac{1-x}{2})^b(\frac{1+x}{2}\binom{a+b}{b}-\binom{a+b-1}{b}-\binom{a+b-1}{a})$

归纳

归纳

由于 $\binom{a+b-1}{a}=\binom{a+b-1}{b-1}$，上式

$$
\begin{aligned}
&= (\frac{1-x}{2})^b(\frac{1+x}{2}\binom{a+b}{b}-\binom{a+b-1}{b}-\binom{a+b-1}{b-1}) \\
&= (\frac{1-x}{2})^b(\frac{1+x}{2}\binom{a+b}{b}-\binom{a+b}{b}) \\
&= (\frac{1-x}{2})^b\frac{x-1}{2}\binom{a+b}{b} \\
&= -(\frac{1-x}{2})^{b+1}\binom{a+b}{a}
\end{aligned}
$$

归纳

由于 $\binom{a+b-1}{a}=\binom{a+b-1}{b-1}$，上式

$$
\begin{aligned}
&=(\frac{1-x}{2})^b(\frac{1+x}{2}\binom{a+b}{b}-\binom{a+b-1}{b}-\binom{a+b-1}{b-1}) \\
&=(\frac{1-x}{2})^b(\frac{1+x}{2}\binom{a+b}{b}-\binom{a+b}{b}) \\
&=(\frac{1-x}{2})^b\frac{x-1}{2}\binom{a+b}{b} \\
&=-(\frac{1-x}{2})^{b+1}\binom{a+b}{a}
\end{aligned}
$$

这样，可以证明在 $a>1,b>1$ 的情况下，若 $a-1,b$ 成立，则 a,b 一定成立。

利用类似的方法，我们也可以证明若 $a,b-1$ 成立，则 a,b 一定成立。由此，原式得证。

归纳

归纳

在解决了上述的若干问题之后，让我们回到问题本身，我们可以计算得到：

$$c_i = \frac{\binom{n+2m-i-1}{n+m-i}}{2^{n+2m-i}}, \qquad d_i = \frac{\binom{n+2m-i-1}{m-i}}{2^{n+2m-i}}$$

归纳

在解决了上述的若干问题之后，让我们回到问题本身，我们可以计算得到：

$$c_i = \frac{\binom{n+2m-i-1}{n+m-i}}{2^{n+2m-i}}, \qquad d_i = \frac{\binom{n+2m-i-1}{m-i}}{2^{n+2m-i}}$$

而最终的结果则可以表示为

$$result = \sum_{i=1}^{n+m} \binom{k+i-1}{i-1} \frac{\binom{n+2m-i-1}{n+m-i}}{2^{n+2m-i}} + (-1)^k \sum_{i=1}^{m} \binom{k+i-1}{i-1} \frac{\binom{n+2m-i-1}{m-i}}{2^{n+2m-i}}$$

处理技巧

处理技巧

关于组合数取模的问题，由于 P 为素数，且没有加减法运算，只要将数字表示为 $a * P^b$ 的形式进行计算即可。

处理技巧

关于组合数取模的问题，由于 P 为素数，且没有加减法运算，只要将数字表示为 $a * P^b$ 的形式进行计算即可。

由于逆元是一个积性函数，可以使用线性筛预处理完成，所以整个运算的复杂度为 $O(N + M)$。