

# 和谐宇宙 命题报告

June 12, 2014

# *terrorist*

和谐宇宙  
命题报告

Problem

Solution

Tips

Step 0

Step 1

Step 2

Step 3

Step 4

Step 5

Details

*terrorist*

和谐宇宙  
命题报告

Problem

Solution

Tips

Step 0

Step 1

Step 2

Step 3

Step 4

Step 5

Details

## 题目大意

## Problem

## Solution

Tips

Step 0

Step 1

Step 2

Step 3

Step 4

Step 5

Details

## 题目大意

- 给出一棵  $N$  个节点的树, 每条树边都有两个权值  $D$  和  $E$ , 求:

## 题目大意

- 给出一棵  $N$  个节点的树, 每条树边都有两个权值  $D$  和  $E$ , 求:

$$Risk = \sum_G \prod_{e_1 \in G} D_{e_1} \prod_{e_2 \notin G} E_{e_2} \mod P$$

## 题目大意

- 给出一棵  $N$  个节点的树, 每条树边都有两个权值  $D$  和  $E$ , 求 :

$$Risk = \sum_G \prod_{e_1 \in G} D_{e_1} \prod_{e_2 \notin G} E_{e_2} \mod P$$

$G$  是原树任意一张满足下列所有要求的子图 :

## 题目大意

- 给出一棵  $N$  个节点的树, 每条树边都有两个权值  $D$  和  $E$ , 求 :

$$Risk = \sum_G \prod_{e_1 \in G} D_{e_1} \prod_{e_2 \notin G} E_{e_2} \mod P$$

$G$  是原树任意一张满足下列所有要求的子图 :

- $G$  中不含孤立点; 图中所有点形成  $T_p$  个互不相交的指定特殊图形.

## 题目大意

- 给出一棵  $N$  个节点的树, 每条树边都有两个权值  $D$  和  $E$ , 求:

$$Risk = \sum_G \prod_{e_1 \in G} D_{e_1} \prod_{e_2 \notin G} E_{e_2} \mod P$$

$G$  是原树任意一张满足下列所有要求的子图:

- $G$  中不含孤立点; 图中所有点形成  $T_p$  个互不相交的指定特殊图形.
- 每个特殊图形为一个由至少 3 条链构成的极大连通分量, 且所有链除共用一个链头外, 无其它任何交点. 同时, 所有链的另一个链头均为原树中的叶子节点.



# *terrorist*

和谐宇宙  
命题报告

Problem

Solution

Tips

Step 0

Step 1

Step 2

Step 3

Step 4

Step 5

Details

*terrorist*

和谐宇宙  
命题报告

Problem

Solution

Tips

Step 0

Step 1

Step 2

Step 3

Step 4

Step 5

Details

## 数据范围

## 数据范围

测试点编号	$N$	$T_P$	$P$	$D_i, E_i$
1	$\leq 20$	$= 1$	$\leq 10^3$	$\leq 10$
2	$\leq 20$	$= 2$	$\leq 10^3$	$\leq 10$
3	$\leq 300$	$= 1$	$\leq 10^3$	$\leq 200$
4	$\leq 300$	$= 2$	$\leq 10^3$	$\leq 200$
5	$\leq 300$	$= 1$	$\leq 10^5$	$\leq 200$
6	$\leq 300$	$= 2$	$\leq 10^5$	$\leq 200$
7	$\leq 5 \times 10^3$	$= 1$	$\leq 10^5$	$\leq 3 \times 10^3$
8	$\leq 5 \times 10^3$	$= 2$	$\leq 10^5$	$\leq 3 \times 10^3$
9	$\leq 5 \times 10^3$	$= 1$	$\leq 10^7$	$\leq 3 \times 10^3$
10	$\leq 5 \times 10^3$	$= 1$	$\leq 10^7$	$\leq 3 \times 10^3$
11	$\leq 5 \times 10^3$	$= 2$	$\leq 10^7$	$\leq 3 \times 10^3$
12	$\leq 5 \times 10^3$	$= 2$	$\leq 10^7$	$\leq 3 \times 10^3$
13	$\leq 10^6$	$= 1$	$\leq 10^7$	$\leq 10^4$
14	$\leq 6 \times 10^5$	$= 2$	$\leq 10^7$	$\leq 10^4$
15	$\leq 10^6$	$= 1$	$< 2^{31}$	$\leq 10^4$
16	$\leq 10^6$	$= 1$	$< 2^{31}$	$\leq 10^4$
17	$\leq 10^6$	$= 1$	$< 2^{31}$	$\leq 10^4$
18	$\leq 6 \times 10^5$	$= 2$	$< 2^{31}$	$\leq 10^4$
19	$\leq 6 \times 10^5$	$= 2$	$< 2^{31}$	$\leq 10^4$
20	$\leq 6 \times 10^5$	$= 2$	$< 2^{31}$	$\leq 10^4$

# *terrorist*

和谐宇宙  
命题报告

Problem

Solution

Tips

Step 0

Step 1

Step 2

Step 3

Step 4

Step 5

Details

*terrorist*

和谐宇宙  
命题报告

Problem

Solution

Tips

Step 0

Step 1

Step 2

Step 3

Step 4

Step 5

Details

程序限制

## Problem

## Solution

Tips

Step 0

Step 1

Step 2

Step 3

Step 4

Step 5

Details

## 程序限制

- 时间限制 : 3s

## Problem

## Solution

Tips

Step 0

Step 1

Step 2

Step 3

Step 4

Step 5

Details

## 程序限制

- 时间限制 : 3s
- 空间限制 : 128M

# Tips

## 和谐宇宙 命题报告

Problem

Solution

**Tips**

Step 0

Step 1

Step 2

Step 3

Step 4

Step 5

Details



# Tips

和谐宇宙  
命题报告

Problem

Solution

**Tips**

Step 0

Step 1

Step 2

Step 3

Step 4

Step 5

Details

*Some useful ideas*

# Tips

和谐宇宙  
命题报告

Problem

Solution

Tips

Step 0

Step 1

Step 2

Step 3

Step 4

Step 5

Details

## *Some useful ideas*

- $n \leq 20$  —  $\Theta(n \cdot 2^n)$

# Tips

和谐宇宙  
命题报告

Problem

Solution

Tips

Step 0

Step 1

Step 2

Step 3

Step 4

Step 5

Details

## *Some useful ideas*

- $n \leq 20$  —  $\Theta(n \cdot 2^n)$
- $n \leq 300$  —  $\Theta(n^3)$

# Tips

和谐宇宙  
命题报告

Problem

Solution

Tips

Step 0

Step 1

Step 2

Step 3

Step 4

Step 5

Details

## *Some useful ideas*

- $n \leq 20$  —  $\Theta(n \cdot 2^n)$
- $n \leq 300$  —  $\Theta(n^3)$
- $n \leq 5 \times 10^3$  —  $\Theta(n^2)$

# Tips

和谐宇宙  
命题报告

Problem

Solution

Tips

Step 0

Step 1

Step 2

Step 3

Step 4

Step 5

Details

## *Some useful ideas*

- $n \leq 20$  —  $\Theta(n \cdot 2^n)$
- $n \leq 300$  —  $\Theta(n^3)$
- $n \leq 5 \times 10^3$  —  $\Theta(n^2)$
- $n \leq 10^6$  —  $\Theta(n)$

Problem

Solution

Tips

**Step 0**

Step 1

Step 2

Step 3

Step 4

Step 5

Details

# Force

和谐宇宙  
命题报告

Problem

Solution

Tips

Step 0

Step 1

Step 2

Step 3

Step 4

Step 5

Details

$$\Theta(n \cdot 2^n)$$

$$\Theta(n \cdot 2^n)$$

- $2^n$  枚举每条树边的状态.



$$\Theta(n \cdot 2^n)$$

- $2^n$  枚举每条树边的状态.
- 根据题中给出的定义判断合法性.

Problem

Solution

Tips

Step 0

**Step 1**

Step 2

Step 3

Step 4

Step 5

Details

Problem

Solution

Tips

Step 0

**Step 1**

Step 2

Step 3

Step 4

Step 5

Details

*Easy*

## Easy

- 先从简单情况入手： $TP = 1$ . 考虑枚举中心点  $C$ , 将  $C$  作为整棵树的根, 则  $G$  中所有链均为从  $C$  到某个叶子节点的路径.

## Easy

- 先从简单情况入手： $TP = 1$ . 考虑枚举中心点  $C$ , 将  $C$  作为整棵树的根, 则  $G$  中所有链均为从  $C$  到某个叶子节点的路径.  
 $\forall u \in V - \{C\}$ , 记:

## Easy

- 先从简单情况入手： $Tp = 1$ . 考虑枚举中心点  $C$ , 将  $C$  作为整棵树的根, 则  $G$  中所有链均为从  $C$  到某个叶子节点的路径.  
 $\forall u \in V - \{C\}$ , 记:
- $down[u]$  为在以  $u$  为根的子树中, 恰好形成一条从  $u$  到某个叶子节点的链的所有方案对应边权之积的和.

## Easy

- 先从简单情况入手： $Tp = 1$ . 考虑枚举中心点  $C$ , 将  $C$  作为整棵树的根, 则  $G$  中所有链均为从  $C$  到某个叶子节点的路径.  
 $\forall u \in V - \{C\}$ , 记:
- $down[u]$  为在以  $u$  为根的子树中, 恰好形成一条从  $u$  到某个叶子节点的链的所有方案对应边权之积的和.
- $totE[u]$  为在以  $u$  为根的子树中, 所有树边  $E$  值的积.

## Easy

- 先从简单情况入手： $Tp = 1$ . 考虑枚举中心点  $C$ , 将  $C$  作为整棵树的根, 则  $G$  中所有链均为从  $C$  到某个叶子节点的路径.  
 $\forall u \in V - \{C\}$ , 记:
- $down[u]$  为在以  $u$  为根的子树中, 恰好形成一条从  $u$  到某个叶子节点的链的所有方案对应边权之积的和.
- $totE[u]$  为在以  $u$  为根的子树中, 所有树边  $E$  值的积.
- 约定:  $downfa[u]$  为  $down[u]$  与  $D_{(fa(u), u)}$  的积.



$$\Theta(n^3)$$

## 和谐宇宙 命题报告

Problem

Solution

Tips

Step 0

**Step 1**

Step 2

Step 3

Step 4

Step 5

Details

$$\Theta(n^3)$$

和谐宇宙  
命题报告

Problem

Solution

Tips

Step 0

**Step 1**

Step 2

Step 3

Step 4

Step 5

Details

*Dp*

$$\Theta(n^3)$$

$Dp$

- $totE[u]$ 可以由  $u$  的所有儿子节点直接得到.

$$\Theta(n^3)$$

$Dp$

- $totE[u]$ 可以由  $u$  的所有儿子节点直接得到.
- $down[u]$ 也可以通过简单地枚举合法方案中在链上与  $u$  相连的  $u$  的儿子节点计算得出.

$$\Theta(n^3)$$

## 和谐宇宙 命题报告

Problem

Solution

Tips

Step 0

**Step 1**

Step 2

Step 3

Step 4

Step 5

Details

$$\Theta(n^3)$$

和谐宇宙  
命题报告

Problem

Solution

Tips

Step 0

Step 1

Step 2

Step 3

Step 4

Step 5

Details

*Transform 1*

$$\Theta(n^3)$$

### *Transform 1*

- 由于题目中要求  $C$  点在  $G$  中的度至少为 3, 然而对此直接进行求解显然比较困难.

$$\Theta(n^3)$$

### *Transform 1*

- 由于题目中要求  $C$  点在  $G$  中的度至少为 3, 然而对此直接进行求解显然比较困难.
- 因此, 不妨将其转化为所有方案的权值和减去  $C$  点度少于 3 的方案



$$\Theta(n^3)$$

## 和谐宇宙 命题报告

Problem

Solution

Tips

Step 0

**Step 1**

Step 2

Step 3

Step 4

Step 5

Details

$$\Theta(n^3)$$

和谐宇宙  
命题报告

Problem

Solution

Tips

Step 0

**Step 1**

Step 2

Step 3

Step 4

Step 5

Details

*Calc*

$$\Theta(n^3)$$

*Calc*

根据之前的分析和转化, 不难得出 :

$$\Theta(n^3)$$

### Calc

根据之前的分析和转化, 不难得出 :

$$\begin{aligned} Ans_C &= \prod_{v \in son(C)} (downfa[v] + 1) \\ &\quad - \frac{1}{2} \left( \sum_{v \in son(C)} downfa[v] \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{v \in son(C)} downfa[v]^2 \\ &\quad - \sum_{v \in son(C)} downfa[v] \\ &\quad - 1 \end{aligned}$$

Problem

Solution

Tips

Step 0

Step 1

**Step 2**

Step 3

Step 4

Step 5

Details

Problem

Solution

Tips

Step 0

Step 1

**Step 2**

Step 3

Step 4

Step 5

Details

*Simple*

### Simple

- 根据以往做树形  $Dp$  题的经验, 考虑不枚举中心点  $C$  直接求解.

### Simple

- 根据以往做树形  $Dp$  题的经验, 考虑不枚举中心点  $C$  直接求解.  
 $\forall u \in V$ , 记 :



### Simple

- 根据以往做树形  $DP$  题的经验, 考虑不枚举中心点  $C$  直接求解.  
 $\forall u \in V$ , 记:
- $up[u]$  为在原树除了以  $u$  为根的子树的部分中, 恰好形成一条从  $u$  到某个叶子节点的链的所有方案对应边权之积的和.

### Simple

- 根据以往做树形  $Dp$  题的经验, 考虑不枚举中心点  $C$  直接求解.  
 $\forall u \in V$ , 记:
- $up[u]$  为在原树除了以  $u$  为根的子树的部分中, 恰好形成一条从  $u$  到某个叶子节点的链的所有方案对应边权之积的和.
- $totup[u]$  为在原树除了以  $u$  为根的子树的部分中, 所有树边  $E$  值的积.

$$\Theta(n^2)$$

## 和谐宇宙 命题报告

Problem

Solution

Tips

Step 0

Step 1

**Step 2**

Step 3

Step 4

Step 5

Details

$$\Theta(n^2)$$

和谐宇宙  
命题报告

Problem

Solution

Tips

Step 0

Step 1

**Step 2**

Step 3

Step 4

Step 5

Details

*Dp*

$$\Theta(n^2)$$

*Dp*

- $totup[u]$ 可以由 $totup[fa(u)]$ 以及  $u$  所有兄弟节点  $v$  的 $totE[v]$ 直接得到.

$$\Theta(n^2)$$

### Dp

- $totup[u]$ 可以由 $totup[fa(u)]$ 以及  $u$  所有兄弟节点  $v$  的 $totE[v]$ 直接得到.
- $up[u]$ 也可类似的通过枚举合法方案中在链上与  $fa(u)$  相连的  $u$  的兄弟节点或者 $up[fa(u)]$ 计算得出.

$$\Theta(n^2)$$

## 和谐宇宙 命题报告

Problem

Solution

Tips

Step 0

Step 1

**Step 2**

Step 3

Step 4

Step 5

Details

$$\Theta(n^2)$$

和谐宇宙  
命题报告

Problem

Solution

Tips

Step 0

Step 1

**Step 2**

Step 3

Step 4

Step 5

Details

*Calc*



$$\Theta(n^2)$$

*Calc*

由前面的第一次优化, 类似的可以进一步得到 :

## Calc

由前面的第一次优化, 类似的可以进一步得到:

$$\begin{aligned} Ans_u &= (up[u] + 1) * \prod_{v \in son(u)} (downfa[v] + 1) \\ &\quad - \frac{1}{2} \left( up[u] + \sum_{v \in son(u)} downfa[v] \right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( up[u]^2 + \sum_{v \in son(u)} downfa[v]^2 \right) \\ &\quad - \left( up[u] + \sum_{v \in son(u)} downfa[v] \right) - 1 \end{aligned}$$

Problem

Solution

Tips

Step 0

Step 1

Step 2

**Step 3**

Step 4

Step 5

Details

*Hard*

### Hard

- 之前算法的瓶颈在于求解 $down[u]$ 、 $up[u]$ 以及 $totup[u]$ 时, 均涉及到计算在某些节点构成的全体中除自身之外的所有节点权值的乘积.

*Hard*

- 之前算法的瓶颈在于求解 $down[u]$ 、 $up[u]$ 以及 $totup[u]$ 时, 均涉及到计算在某些节点构成的全体中除自身之外的所有节点权值的乘积.
- 考虑到模数  $P$  为质数, 因此可以将其转化为所有节点权值之积乘自身权值在模  $P$  意义下的逆元.

$$\Theta(n \log P)$$

和谐宇宙  
命题报告

Problem

Solution

Tips

Step 0

Step 1

Step 2

**Step 3**

Step 4

Step 5

Details

$$\Theta(n \log P)$$

Problem

Solution

Tips

Step 0

Step 1

Step 2

**Step 3**

Step 4

Step 5

Details

## *Transform 2*



$$\Theta(n \log P)$$

## *Transform 2*

- 下面以计算 $\text{down}[u]$ 为例.

$$\Theta(n \log P)$$

## *Transform 2*

- 下面以计算 $\text{down}[u]$ 为例.
- 在之前算法的计算方法中：

# $\Theta(n \log P)$

和谐宇宙  
命题报告

Problem

Solution

Tips

Step 0

Step 1

Step 2

Step 3

Step 4

Step 5

Details

## Transform 2

- 下面以计算 $down[u]$ 为例.
- 在之前算法的计算方法中 :

$$down[u] = \sum_{v \in son(u)} downfa[v] * \prod_{v' \in son(u) - \{v\}} totE[v'] * E_{(fa(u), v')}$$

$$\Theta(n \log P)$$

## Transform 2

- 下面以计算 $down[u]$ 为例.
- 在之前算法的计算方法中：

$$down[u] = \sum_{v \in son(u)} downfa[v] * \prod_{v' \in son(u) - \{v\}} totE[v'] * E_{(fa(u), v')}$$

- 通过逆元的运用可将其改写为：

## Transform 2

- 下面以计算 $down[u]$ 为例.
- 在之前算法的计算方法中：

$$down[u] = \sum_{v \in son(u)} downfa[v] * \prod_{v' \in son(u) - \{v\}} totE[v'] * E_{(fa(u), v')}$$

- 通过逆元的运用可将其改写为：

$$down[u] = \sum_{v \in son(u)} downfa[v] * totE[u] * (totE[v] * E_{(fa(u), v)})^{-1}$$

# $\Theta(n \log P)$

和谐宇宙  
命题报告

Problem

Solution

Tips

Step 0

Step 1

Step 2

Step 3

Step 4

Step 5

Details

## Transform 2

- 下面以计算 $down[u]$ 为例.
- 在之前算法的计算方法中：

$$down[u] = \sum_{v \in son(u)} downfa[v] * \prod_{v' \in son(u) - \{v\}} totE[v'] * E_{(fa(u), v')}$$

- 通过逆元的运用可将其改写为：

$$down[u] = \sum_{v \in son(u)} downfa[v] * totE[u] * (totE[v] * E_{(fa(u), v)})^{-1}$$

- 对于 $up[u]$ 以及 $totup[u]$ 均可以用类似的方法使得更新单个节点对应权值的时间复杂度降为  $\Theta(\log P)$ .

Problem

Solution

Tips

Step 0

Step 1

Step 2

Step 3

**Step 4**

Step 5

Details

*Further*



## Further

- 不幸的是, 由于本题需要多次 *Bfs*, 且取模操作的总数达到千万级别, 而取模操作本就较为缓慢.

*Further*

- 不幸的是, 由于本题需要多次 *Bfs*, 且取模操作的总数达到千万级别, 而取模操作本就较为缓慢.
- 因此, 之前  $\Theta(n \log P)$  的算法依然无法通过此题.

*Further*

- 不幸的是, 由于本题需要多次 *Bfs*, 且取模操作的总数达到千万级别, 而取模操作本就较为缓慢.
- 因此, 之前  $\Theta(n \log P)$  的算法依然无法通过此题.
- 鉴于此题无法避免的较大常数, 优化仍要加强.

$$\Theta(n)$$

## 和谐宇宙 命题报告

Problem

Solution

Tips

Step 0

Step 1

Step 2

Step 3

**Step 4**

Step 5

Details

$$\Theta(n)$$

和谐宇宙  
命题报告

Problem

Solution

Tips

Step 0

Step 1

Step 2

Step 3

**Step 4**

Step 5

Details

## *Transform 3*

$$\Theta(n)$$

### *Transform 3*

- 考虑重新给每条树边赋予权值  $W$  为  $D * E^{-1}$ , 并且重新定义一个方案的权值为所有被选中的树边的新权值之积. 同时, 在  $Dp$  结束后将答案乘所有边  $E$  值之积.

$$\Theta(n)$$

### *Transform 3*

- 考虑重新给每条树边赋予权值  $W$  为  $D * E^{-1}$ , 并且重新定义一个方案的权值为所有被选中的树边的新权值之积. 同时, 在  $Dp$  结束后将答案乘所有边  $E$  值之积.
- 经过重赋权值, 只需对之前的算法稍作改动即可解决本题:

$$\Theta(n)$$

### Transform 3

- 考虑重新给每条树边赋予权值  $W$  为  $D * E^{-1}$ , 并且重新定义一个方案的权值为所有被选中的树边的新权值之积. 同时, 在  $Dp$  结束后将答案乘所有边  $E$  值之积.
- 经过重赋权值, 只需对之前的算法稍作改动即可解决本题:  
 $down[u]$  为在以  $u$  为根的子树中, 恰好形成一条从  $u$  到某个叶子节点的链的所有方案新权值的和.



$$\Theta(n)$$

### Transform 3

- 考虑重新给每条树边赋予权值  $W$  为  $D * E^{-1}$ , 并且重新定义一个方案的权值为所有被选中的树边的新权值之积. 同时, 在  $Dp$  结束后将答案乘所有边  $E$  值之积.
- 经过重赋权值, 只需对之前的算法稍作改动即可解决本题:  
 $down[u]$  为在以  $u$  为根的子树中, 恰好形成一条从  $u$  到某个叶子节点的链的所有方案新权值的和.  
 $up[u]$  为在原树除了以  $u$  为根的子树的部分中, 恰好形成一条从  $u$  到某个叶子节点的链的所有方案新权值的和.

$$\Theta(n)$$

### Transform 3

- 考虑重新给每条树边赋予权值  $W$  为  $D * E^{-1}$ , 并且重新定义一个方案的权值为所有被选中的树边的新权值之积. 同时, 在  $Dp$  结束后将答案乘所有边  $E$  值之积.
- 经过重赋权值, 只需对之前的算法稍作改动即可解决本题:  
 $down[u]$  为在以  $u$  为根的子树中, 恰好形成一条从  $u$  到某个叶子节点的链的所有方案新权值的和.  
 $up[u]$  为在原树除了以  $u$  为根的子树的部分中, 恰好形成一条从  $u$  到某个叶子节点的链的所有方案新权值的和.
- 由于重赋了权值,  $down[u]$  和  $up[u]$  的计算均仅需一遍  $Bfs$ , 而答案的计算则可以使用与之前类似的方法也在一遍  $Bfs$  内完成.

$$\Theta(n)$$

### Transform 3

- 考虑重新给每条树边赋予权值  $W$  为  $D * E^{-1}$ , 并且重新定义一个方案的权值为所有被选中的树边的新权值之积. 同时, 在  $Dp$  结束后将答案乘所有边  $E$  值之积.
- 经过重赋权值, 只需对之前的算法稍作改动即可解决本题:  
 $down[u]$  为在以  $u$  为根的子树中, 恰好形成一条从  $u$  到某个叶子节点的链的所有方案新权值的和.  
 $up[u]$  为在原树除了以  $u$  为根的子树的部分中, 恰好形成一条从  $u$  到某个叶子节点的链的所有方案新权值的和.
- 由于重赋了权值,  $down[u]$  和  $up[u]$  的计算均仅需一遍  $Bfs$ , 而答案的计算则可以使用与之前类似的方法也在一遍  $Bfs$  内完成.
- 至此, 对于  $Tp = 1$  的情形已经得到了解决.

Problem

Solution

Tips

Step 0

Step 1

Step 2

Step 3

Step 4

**Step 5**

Details

*Final*

## Final

- 对于  $Tp = 2$  的部分, 情况变得更为复杂一些. 首先, 考虑如何在避免重复计数的前提下进行  $Dp$  :

## Final

- 对于  $T_p = 2$  的部分, 情况变得更为复杂一些. 首先, 考虑如何在避免重复计数的前提下进行  $D_p$  :
- 若以两个特殊图形的中心点为标准, 则由于中心点可能存在一条从父节点延伸而来的链. 因此, 在  $D_p$  时无法保证两个特殊图形不相交.

## Final

- 对于  $T_p = 2$  的部分, 情况变得更为复杂一些. 首先, 考虑如何在避免重复计数的前提下进行  $D_p$  :
- 若以两个特殊图形的中心点为标准, 则由于中心点可能存在一条从父节点延伸而来的链. 因此, 在  $D_p$  时无法保证两个特殊图形不相交.
- 若以将原树分成两个连通块的边为标准, 在两个连通块中分别进行  $T_p = 1$  情形的树形  $D_p$ , 则必然造成重复计数的问题.



## Final

- 对于  $T_p = 2$  的部分, 情况变得更为复杂一些. 首先, 考虑如何在避免重复计数的前提下进行  $D_p$  :
- 若以两个特殊图形的中心点为标准, 则由于中心点可能存在一条从父节点延伸而来的链. 因此, 在  $D_p$  时无法保证两个特殊图形不相交.
- 若以将原树分成两个连通块的边为标准, 在两个连通块中分别进行  $T_p = 1$  情形的树形  $D_p$ , 则必然造成重复计数的问题.
- 经过分析, 考虑以两个特殊图形在原树中的最高点作为标准.

$$T_p = 2$$

## 和谐宇宙 命题报告

Problem

Solution

Tips

Step 0

Step 1

Step 2

Step 3

Step 4

**Step 5**

Details

$$Tp = 2$$

- 对于每个节点  $u$ , 不妨设对答案的贡献为以  $u$  为其中一个特殊图形的最高点的所有方案的权值和.

Problem

Solution

Tips

Step 0

Step 1

Step 2

Step 3

Step 4

**Step 5**

Details

$$Tp = 2$$

- 对于每个节点  $u$ , 不妨设对答案的贡献为以  $u$  为其中一个特殊图形的最高点的所有方案的权值和.
- 考虑以下两种情形 :

$$Tp = 2$$

- 对于每个节点  $u$ , 不妨设对答案的贡献为以  $u$  为其中一个特殊图形的最高点的所有方案的权值和.
- 考虑以下两种情形：

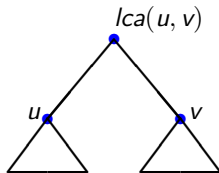


Figure 1

$$Tp = 2$$

- 对于每个节点  $u$ , 不妨设对答案的贡献为以  $u$  为其中一个特殊图形的最高点的所有方案的权值和.
- 考虑以下两种情形：

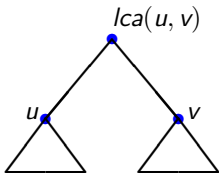


Figure 1

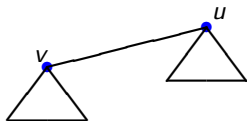


Figure 2

$$Tp = 2$$

- 对于每个节点  $u$ , 不妨设对答案的贡献为以  $u$  为其中一个特殊图形的最高点的所有方案的权值和.
- 考虑以下两种情形：

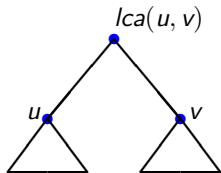


Figure 1

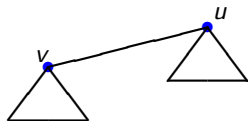


Figure 2

- 对于左图情形, 在计算点  $u$  与点  $v$  对答案的贡献时均会被计算一次.

$$Tp = 2$$

- 对于每个节点  $u$ , 不妨设对答案的贡献为以  $u$  为其中一个特殊图形的最高点的所有方案的权值和.
- 考虑以下两种情形：

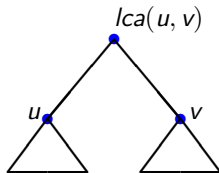


Figure 1



Figure 2

- 对于左图情形, 在计算点  $u$  与点  $v$  对答案的贡献时均会被计算一次.
- 对于右图情形, 只有在计算点  $v$  对答案的贡献时才会被计算到.



$$Tp = 2$$

- 对于每个节点  $u$ , 不妨设对答案的贡献为以  $u$  为其中一个特殊图形的最高点的所有方案的权值和.
- 考虑以下两种情形：

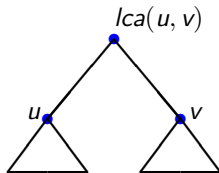


Figure 1

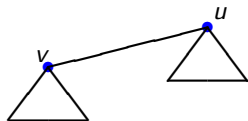


Figure 2

- 对于左图情形, 在计算点  $u$  与点  $v$  对答案的贡献时均会被计算一次.
- 对于右图情形, 只有在计算点  $v$  对答案的贡献时才会被计算到.
- 因此, 对于上图中的两种情形需要分开计数.

$$T_p = 2$$

## 和谐宇宙 命题报告

Problem

Solution

Tips

Step 0

Step 1

Step 2

Step 3

Step 4

**Step 5**

Details

$$Tp = 2$$

首先尝试朴素做法, 借用之前  $Tp = 1$  时的做法.  $\forall u \in V$ , 记 :

$$Tp = 2$$

首先尝试朴素做法, 借用之前  $Tp = 1$  时的做法.  $\forall u \in V$ , 记:

- $downall[u]$  为在以  $u$  为根的子树中, 恰好形成一个经过点  $u$  的特殊图形的所有方案新权值的和.

$$Tp = 2$$

首先尝试朴素做法, 借用之前  $Tp = 1$  时的做法.  $\forall u \in V$ , 记:

- $downall[u]$  为在以  $u$  为根的子树中, 恰好形成一个经过点  $u$  的特殊图形的所有方案新权值的和.
- $downhalf[u]$  为在以  $u$  为根的子树中, 恰好形成一个不完整的经过点  $u$  的特殊图形的所有方案新权值的和. 其中, 不完整的定义为包含中心点, 但从中心点经过  $u$  点的链仍要继续延伸.

$$T_p = 2$$

## 和谐宇宙 命题报告

Problem

Solution

Tips

Step 0

Step 1

Step 2

Step 3

Step 4

**Step 5**

Details

$$Tp = 2$$

借鉴  $Tp = 1$  的算法, 考虑对于  $downall[u]$  和  $downhalf[u]$  的转移 :

$$Tp = 2$$

借鉴  $Tp = 1$  的算法, 考虑对于  $downall[u]$  和  $downhalf[u]$  的转移 :

- $downall[u]$  由两部分组成 : 一种情况是以  $u$  点作为中心点, 可以套用之前的计算方法; 另一种情况则是中心点在  $u$  的某个儿子节点中, 可以由任意一个儿子节点  $v$  的  $downhalf[v]$  与另一个儿子节点  $v'$  的  $down[v']$ , 以及和  $u$  点相连的树边的新边权计算得出.



$$Tp = 2$$

借鉴  $Tp = 1$  的算法, 考虑对于  $downall[u]$  和  $downhalf[u]$  的转移:

- $downall[u]$  由两部分组成: 一种情况是以  $u$  点作为中心点, 可以套用之前的计算方法; 另一种情况则是中心点在  $u$  的某个儿子节点中, 可以由任意一个儿子节点  $v$  的  $downhalf[v]$  与另一个儿子节点  $v'$  的  $down[v']$ , 以及和  $u$  点相连的树边的新边权计算得出.
- $downhalf[u]$  则一部分由所有儿子节点  $v$  的  $downhalf[v]$  得到, 另一部分为所有以  $u$  为中心点并至少有两条向下的链的合法方案.

$$T_p = 2$$

## 和谐宇宙 命题报告

Problem

Solution

Tips

Step 0

Step 1

Step 2

Step 3

Step 4

**Step 5**

Details

$$T_p = 2$$

依据前面的分析可以得出以下算法：

$$T_p = 2$$

依据前面的分析可以得出以下算法：

- 首先枚举合法方案中一个特殊图形的最高点  $u$

$$T_p = 2$$

依据前面的分析可以得出以下算法：

- 首先枚举合法方案中一个特殊图形的最高点  $u$
- 在以  $u$  为根的子树中进行树形  $Dp$  计算出  $downall[u]$ .

$$Tp = 2$$

依据前面的分析可以得出以下算法：

- 首先枚举合法方案中一个特殊图形的最高点  $u$
- 在以  $u$  为根的子树中进行树形  $Dp$  计算出  $downall[u]$ .
- 然后在原树剩下的部分中进行相同树形  $Dp$ , 计算出剩余部分的所有节点  $v$  的  $downall[v]$ .

$$Tp = 2$$

依据前面的分析可以得出以下算法：

- 首先枚举合法方案中一个特殊图形的最高点  $u$
- 在以  $u$  为根的子树中进行树形  $Dp$  计算出  $downall[u]$ .
- 然后在原树剩下的部分中进行相同树形  $Dp$ , 计算出剩余部分的所有节点  $v$  的  $downall[v]$ .
- 为了避免重复计数, 在该算法中可以采取一种简单的方式计算答案：在更新答案时仅计算所有深度小于  $u$  点或者深度相同且编号大于  $u$  点的节点  $v$ .

$$Tp = 2$$

依据前面的分析可以得出以下算法：

- 首先枚举合法方案中一个特殊图形的最高点  $u$
- 在以  $u$  为根的子树中进行树形  $Dp$  计算出  $downall[u]$ .
- 然后在原树剩下的部分中进行相同树形  $Dp$ , 计算出剩余部分的所有节点  $v$  的  $downall[v]$ .
- 为了避免重复计数, 在该算法中可以采取一种简单的方式计算答案：在更新答案时仅计算所有深度小于  $u$  点或者深度相同且编号大于  $u$  点的节点  $v$ .
- 根据算法具体实现方式的差异, 时间复杂度为  $\Theta(n^3)$  或  $\Theta(n^2)$ .



$$T_p = 2$$

## 和谐宇宙 命题报告

Problem

Solution

Tips

Step 0

Step 1

Step 2

Step 3

Step 4

**Step 5**

Details

$$T_p = 2$$

与  $T_p = 1$  的情形类似, 接下来考虑不枚举  $u$  点.  $\forall u \in V$ , 记 :

$$T_p = 2$$

与  $T_p = 1$  的情形类似, 接下来考虑不枚举  $u$  点.  $\forall u \in V$ , 记:

- $downallS[u]$  为以  $u$  为根的子树中, 所有节点  $v$  的  $downall[v]$  的和.

$$T_p = 2$$

与  $T_p = 1$  的情形类似, 接下来考虑不枚举  $u$  点.  $\forall u \in V$ , 记:

- $downallS[u]$  为以  $u$  为根的子树中, 所有节点  $v$  的  $downall[v]$  的和.
- $upall[u]$  为在原树除了以  $u$  为根的子树的部分中, 恰好形成一个特殊图形且最高点不是  $u$  点祖先的所有方案新权值的和.

$$Tp = 2$$

与  $Tp = 1$  的情形类似, 接下来考虑不枚举  $u$  点.  $\forall u \in V$ , 记:

- $downallS[u]$  为以  $u$  为根的子树中, 所有节点  $v$  的  $downall[v]$  的和.
- $upall[u]$  为在原树除了以  $u$  为根的子树的部分中, 恰好形成一个特殊图形且最高点不是  $u$  点祖先的所有方案新权值的和.
- $upallH[u]$  为在原树除了以  $u$  为根的子树的部分中, 恰好形成一个特殊图形且最高点是  $u$  点祖先的所有方案新权值的和.

$$Tp = 2$$

与  $Tp = 1$  的情形类似, 接下来考虑不枚举  $u$  点.  $\forall u \in V$ , 记:

- $downallS[u]$  为以  $u$  为根的子树中, 所有节点  $v$  的  $downall[v]$  的和.
- $upall[u]$  为在原树除了以  $u$  为根的子树的部分中, 恰好形成一个特殊图形且最高点不是  $u$  点祖先的所有方案新权值的和.
- $upallH[u]$  为在原树除了以  $u$  为根的子树的部分中, 恰好形成一个特殊图形且最高点是  $u$  点祖先的所有方案新权值的和.
- $uphalf[u]$  为在原树除了以  $u$  为根的子树的部分中, 恰好形成一个不完整的特殊图形的所有方案新权值的和.

$$T_p = 2$$

## 和谐宇宙 命题报告

Problem

Solution

Tips

Step 0

Step 1

Step 2

Step 3

Step 4

**Step 5**

Details

$$Tp = 2$$

考虑对于 $downallS[u]$ 、 $upall[u]$ 、 $upallH[u]$ 以及 $uphalf[u]$ 的转移：



$$Tp = 2$$

考虑对于  $downallS[u]$ 、 $upall[u]$ 、 $upallH[u]$  以及  $uphalf[u]$  的转移：

- $downallS[u]$  可以由  $downall[u]$  以及所有儿子节点直接得到.

$$Tp = 2$$

考虑对于  $downallS[u]$ 、 $upall[u]$ 、 $upallH[u]$  以及  $uphalf[u]$  的转移：

- $downallS[u]$  可以由  $downall[u]$  以及所有儿子节点直接得到.
- $upall[u]$  也可以由  $upall[fa(u)]$  和所有兄弟节点  $v$  的  $downallS[v]$  计算得出.

$$Tp = 2$$

考虑对于  $downallS[u]$ 、 $upall[u]$ 、 $upallH[u]$  以及  $uphalf[u]$  的转移：

- $downallS[u]$  可以由  $downall[u]$  以及所有儿子节点直接得到.
- $upall[u]$  也可以由  $upall[fa(u)]$  和所有兄弟节点  $v$  的  $downallS[v]$  计算得出.
- $upallH[u]$  一部分由  $upallH[fa(u)]$  得到; 另一部分为经过  $fa(u)$  的所有方案, 其中又包括了以  $fa(u)$  为中心点和中心点在以  $u$  的某个兄弟节点为根的子树中两种情况, 这两种情况均可使用之前讨论过的方法类似地解决.

$$Tp = 2$$

考虑对于  $downallS[u]$ 、 $upall[u]$ 、 $upallH[u]$  以及  $uphalf[u]$  的转移：

- $downallS[u]$  可以由  $downall[u]$  以及所有儿子节点直接得到.
- $upall[u]$  也可以由  $upall[fa(u)]$  和所有兄弟节点  $v$  的  $downallS[v]$  计算得出.
- $upallH[u]$  一部分由  $upallH[fa(u)]$  得到; 另一部分为经过  $fa(u)$  的所有方案, 其中又包括了以  $fa(u)$  为中心点和中心点在以  $u$  的某个兄弟节点为根的子树中两种情况, 这两种情况均可使用之前讨论过的方法类似地解决.
- $uphalf[u]$  则由  $uphalf[fa(u)]$ 、所有兄弟节点  $v$  的  $downhalf[v]$  以及以  $fa(u)$  为中心点的情况构成.

$$T_p = 2$$

## 和谐宇宙 命题报告

Problem

Solution

Tips

Step 0

Step 1

Step 2

Step 3

Step 4

**Step 5**

Details

$$Tp = 2$$

最后考虑统计答案.  $\forall u \in V$ , 对于答案的贡献为 :

$$Tp = 2$$

最后考虑统计答案.  $\forall u \in V$ , 对于答案的贡献为 :

$$downall[u] * \left( upallH[u] + \frac{1}{2} upall[u] \right)$$

$$Tp = 2$$

最后考虑统计答案.  $\forall u \in V$ , 对于答案的贡献为 :

$$downall[u] * \left( upallH[u] + \frac{1}{2} upall[u] \right)$$

通过之前的所有分析, 本题已经被完整地解决.



# Details

## 和谐宇宙 命题报告

Problem

Solution

Tips

Step 0

Step 1

Step 2

Step 3

Step 4

Step 5

**Details**

# Details

和谐宇宙  
命题报告

Problem

Solution

Tips

Step 0

Step 1

Step 2

Step 3

Step 4

Step 5

Details

- 在算法开始之前, 应先选择一个度大于 1 的节点作为根, 以避免特判.

# Details

和谐宇宙  
命题报告

Problem

Solution

Tips

Step 0

Step 1

Step 2

Step 3

Step 4

Step 5

Details

- 在算法开始之前, 应先选择一个度大于 1 的节点作为根, 以避免特判.
- 此题本身有较大的常数不能避免, 应注意尽量减少  $Bfs$  的次数.

# Details

和谐宇宙  
命题报告

Problem

Solution

Tips

Step 0

Step 1

Step 2

Step 3

Step 4

Step 5

Details

- 在算法开始之前, 应先选择一个度大于 1 的节点作为根, 以避免特判.
- 此题本身有较大的常数不能避免, 应注意尽量减少  $Bfs$  的次数.
- 由于模数较大, 在计算过程中应注意及时取模, 防止运算时溢出.

# Details

和谐宇宙  
命题报告

Problem

Solution

Tips

Step 0

Step 1

Step 2

Step 3

Step 4

Step 5

Details

- 在算法开始之前, 应先选择一个度大于 1 的节点作为根, 以避免特判.
- 此题本身有较大的常数不能避免, 应注意尽量减少  $Bfs$  的次数.
- 由于模数较大, 在计算过程中应注意及时取模, 防止运算时溢出.
- ....