《某不科学的超数列求和 2》备忘

更新记录

解题思路

我们先简化一下题目

$$\sum_{x_1=1}^{n}\sum_{x_2=1}^{x_1}\dots\sum_{x_m=1}^{x_{m-1}}1$$

其实就是求 m 个高度为[1,n]的整数，且依次单调不降的柱子的种类数。

这个就相当于将 n-1 次上升的机会分配给 m 个柱子，允许剩余，允许为空。允许剩余就可以加 1 个空柱子，成 m+1 个柱子，于是变成了将 n-1 个物品分给 m+1 个人，可为 0，不许剩余的方案数，用隔板法即可。结果是 C_{n+m-1}^{m}

我们考虑转化 ${x_m}^{i}$ ，设 x_m 为 n，i 为 m

我们发现 $C_{n+m-1}^{m}=\frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}=\frac{\prod_{i=n}^{n+m-1}i}{m!}$

如果将 n 看做变量，m 看做常数，则得到一个关于 n 的 m 次多项式，不妨设其为 $\sum_{i=0}^{m}a_i n^i$ ，算出 a_i 复杂度 $O(m^3)$ 则可以得到

$$\begin{aligned}
&n^m\\
&=\frac{1}{a_m}\left(\sum_{i=0}^{m}a_i n^i-\sum_{i=0}^{m-1}a_i n^i\right)\\
&=\frac{1}{a_m}\left(C_{n-m+1}^{m}-\sum_{i=0}^{m-1}a_i n^i\right)\\
&=\frac{1}{a_m}\left(\sum_{x_1=1}^{n}\sum_{x_2=1}^{x_1}\dots\sum_{x_m=1}^{x_{m-1}}1-\sum_{i=0}^{m-1}a_i n^i\right)
\end{aligned}$$

将关于 n 的 m-1 次多项式继续展开，最终得到

$$n^m=\left(b_1\sum_{x_{1,1}=1}^{n}\sum_{x_{1,2}=1}^{x_{1,1}}\dots\sum_{x_{1,m}=1}^{x_{1,m-1}}1+b_2\sum_{x_{2,1}=1}^{n}\sum_{x_{2,2}=1}^{x_{2,1}}\dots\sum_{x_{2,m-1}=1}^{x_{2,m-2}}1+\dots+b_m\sum_{x_{m,1}}^{n}1+b_{m+1}\right)$$

注意要将这些系数存下来，给 m+1 次展开时使用

于是再乘上题目要求的系数，以此类推，将 1 到 k 次全部展开成一个系数数乘很多串 $\sum$ ，一次展开的复杂度为 $O(i^2)$ ，总体复杂度就是 $O(k^3)$ 以此展开的再讲所有展开后长度相等的 $\sum$ 串的系数加起来。

原题的式子变成

$$\sum_{x_1=1}^{n}\sum_{x_2=1}^{x_1}\dots\sum_{x_m=1}^{x_{m-1}}\left(b_0+b_1\sum_{x_{1,1}=1}^{x_m}1+b_2\sum_{x_{2,1}=1}^{x_m}\sum_{x_{2,2}=1}^{x_{2,1}}1+\dots+b_k\sum_{x_{k,1}}^{x_m}\sum_{x_{k,2}}^{x_{k,1}}\dots\sum_{x_{k,k}}^{x_{k,k-1}}1\right)$$
$$=\sum_{i=0}^{k}b_i C_{n+m+i-1}^{i+m}$$

再用组合数乘上系数和算出对答案的贡献，注意相邻的两个组合数之间可以用较少的几个乘除法完成转换，不必重新计算。 $C_{n+m+i-1}^{m+i}=\frac{(n+m+i-1)!}{(m+i)!(n-1)!}=\frac{\prod_{j=n}^{n+m+i-1}j}{(m+i)!}$

最后统计答案的复杂 $O(m+klog(m))$

最后按照题面中给出的字母，复杂度如下

空间复杂度 $O(m^2)$

时间复杂度 $O(k^3+m+klog(m))$

可能的错误算法

构造的数据类型

解题记录