魔法球问题

**作者：张浩宇**

有n个柱子最多能有个数，我们可以通过二分图的最小路径覆盖来打表找规律，（或者贪心？可以证明贪心法与构造法结果一致，所以贪心是正确的），接下来我们先证明其存在一种方案使得n个柱子能有个数，随后证明不能有第个数。

前置验证：

将n=1,2,3,4的情况使用二分图最小路径覆盖暴力验证，符合上述结论。（用于归纳）

方案为别为

【1】

①1

【2】

① 3 1

② 2

【3】

① 5 4

② 6 3 1

③ 7 2

【4】

①11 5 4

②10 6 3 1

③ 9 7 2

④ 8

存在性（构造法）：

1. 对于n为奇数（奇偶确定之后，取消了下取整符号）

方案：

我们从上向下看，将柱子从左到右排成一排编号1到n，最上层**从左到右**分别是 =  到  = 。次上层**从右到左**分别为  = 到  = 。此后每过2层最左边和最右边的柱子都不再放数，将现在的2到n-1号柱子重新标号为1到n-2，第3到n层方案同柱子数为n-2时的方案。

合法性证明：n=1,2,3,4暴力证明其合法。

对于n=k（k为奇数）上2层之后中间的n-2个柱子与k-2时的方案相同，合法性已经证明。

对于最上层和次上层，对于**从左向右**第i个柱子上两层相邻之和为 +  = 所以上两层合法性得证。

由于柱子1和柱子n只有最上2层，将柱子2到n-1重新编号为1到n-2。对于第二层与第三层接触部分第二层**从左到右**分别为 =  到  = 。第三层**从左到右**分别  =  到  =  。第i号（**新标号**）柱子之和为 +  = 。合法性得证。

1. 对于n为偶数

方案：

我们从上向下看，将柱子从左到右排成一排编号1到n，将 = 放到单独的柱子n号，将 =  到  =  放到1至n-1号柱子上。1到n-1号柱子的第2到n 层同柱子数为n-1时的方案。

合法性：

第n柱子只有一个数，合法。

第2到n层同柱子数为n-1时，已证合法。

第一层的1到n-1号柱子与第二层的1到n-1号柱子：第二层1到n-1的数字分别为 =  到  = 

第i号柱子之和为 +  =  合法。

最优性：

n=1,2,3,4已暴力验证，得证

1. 对于n为奇数

共有 = 个新的数字，由于最大值与次大值相加 +  =  ，小于，最小值与次小值相加 +  = ，其他值相加均小于，大于，所以新数内部只能形成一对，所以必须占据个柱子。所以所有小于等于最小值的值均不在柱顶。

由于n个柱子已被占用，不存在空柱子，要使 = 能被放入，必须有另一个数与之和为完全平方数。若两数之和为则另外一个数为 -  = 。由于没有空柱子，每个数放入时必须与小于其的数相连，同理对于所需的另一个数大于等于当前数，所以不存在方案使得两数之和大于等于。若两数之和为则另外一个数为 -  = 。由于 到  占据了所有的柱子，所以不存在位于最上层的，同理对于所需的另一个数不在最上层。

综上所述，当n为奇数时，不能被放入。

1. 对于n为偶数

共有 = 个新的数字，由于最大值与次大值相加 +  =  ，小于，最小值与次小值相加 +  = ，所以其他值相加均小于，大于，所以新数内部不能形成配对，所以必须占据个柱子。所以所有小于最小值的值均不在柱顶。

由于n个柱子已被占用，不存在空柱子，要使 = 能被放入，必须有另一个数与之和为完全平方数。若两数之和为则另外一个数为 -  = 。由于没有空柱子，每个数放入时必须与小于其的数相连，同理对于所需的另一个数大于当前数，所以不存在方案使得两数之和大于等于。若两数之和为则另外一个数为 -  = 。由于 到  占据了所有的柱子，所以不存在位于最上层的，同理对于所需的另一个数不在最上层。

综上所述，当n为偶数时，不能被放入。