ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP.HCM

TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

MÔN HỌC: ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

MÃ SỐ MÔN HỌC: MA003

GV hướng dẫn: Lê Văn Sáng
Email: sanglv@uit.edu.vn
DĐ: 0967-998-101

NHỮNG CHỦ ĐỀ CHÍNH CỦA MÔN HỌC

Chương 1: **MA TRẬN – ĐỊNH THỨC**

Chương 2: **HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH**

Chương 3: **KHÔNG GIAN VECTOR**

Chương 4: **KHÔNG GIAN EUCLIDE**

Chương 5: **TRỊ RIÊNG – VECTOR RIÊNG – CHÉO HÓA MA TRẬN**

Chương 6: **DẠNG SONG TUYẾN – DẠNG TOÀN PHƯƠNG**

SỐ PHỨC

$$z = a + bi \begin{cases} a,\ b: \text{là những số thực} \\ i: \text{là số ảo, với } i^2 = -1 \\ a = \operatorname{Re}(z) \text{ là phần thực} \\ b = \operatorname{Im}(z) \text{ là phần ảo} \\ a = 0,\ b \neq 0 \to Z \text{ là số thuần ảo} \\ b = 0 \to Z \text{ là số thực} \end{cases}$$

Số liên hợp phức của $z = a + bi$ là $\overline{z} = a - bi$

$*z = 2 - 5i \rightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}(z) = 2 \\ \operatorname{Im}(z) = -5 \end{cases}$

$*z = i \rightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}(z) = 0 \\ \operatorname{Im}(z) = 1 \end{cases}$

$*z = 2 - 5i \rightarrow \overline{z} = 2 + 5i$

$*z = 3 + i \rightarrow \overline{z} = 3 - i$

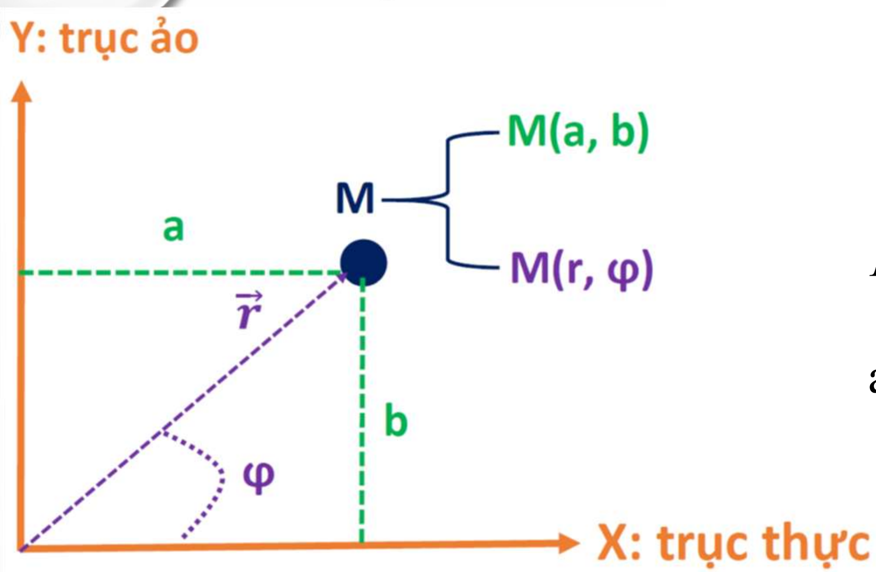
$*z = 2i \rightarrow \overline{z} = -2i$

$*z = -i \rightarrow \overline{z} = i$

$*z = -6 \rightarrow \overline{z} = -6$

$*z = 7 \rightarrow \overline{z} = 7$

Các dạng biểu diễn số phức



đại số lượng giác mũ

$$z = a + bi = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right) = re^{i\varphi}$$

$$Euler: e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi,\ \text{module: } |z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\text{argument: } \arg(z) = \varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right),\ \varphi = (0, 2\pi] \text{ or } (-\pi,\ \pi]$$

$$z_1 = z_2 \ \rightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases} \quad or \quad \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \varphi_1 = \varphi_2 + k2\pi \end{cases}$$

$$z = \sqrt{3} + i \ \rightarrow \begin{cases} a = \mathrm{Re}(z) = \sqrt{3} \\ b = \mathrm{Im}(z) = 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} r = |z| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 2 \\ \varphi = \arg(z) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

$$\rightarrow\ z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$\left.\begin{matrix} z_1 = 3 - 2i \\ z_2 = a + bi \\ z_1 = z_2 \end{matrix}\right\} \rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} z_1 = 5e^{i\frac{\pi}{4}} \\ z_2 = re^{i\varphi} \\ z_1 = z_2 \end{matrix}\right\} \rightarrow \begin{cases} r = 5 \\ \varphi = \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases}$$

Các phép toán với số phức

cộng & trừ

$z_1 = a_1 + b_1 i,\ z_2 = a_2 + b_2 i$

$*z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$

$*z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$

nhân & chia

$z_1 = a_1 + b_1 i = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) = r_1 e^{i\varphi_1}$

$z_2 = a_2 + b_2 i = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = r_2 e^{i\varphi_2}$

$$*z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$$
$$= r_1 e^{i\varphi_1}.r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$$
$$= r_1 r_2\left[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right]$$

$$*\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z}_2}{z_2\overline{z}_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$
$$= \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)},\quad r_2 \neq 0$$
$$= r_1 r_2\left[\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right]$$

$*z_1 = 3 + i,\ z_2 = -1 + 6i \ \rightarrow\ z_1 + z_2 = 2 + 7i,\ z_1 - z_2 = 4 - 5i$

$$*z_1 = 1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}},\ z_2 = 1 + i\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$z_1 z_2 = 0 + i\left(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = i\frac{4\sqrt{3}}{3}$$
$$= \frac{4\sqrt{3}}{3}e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{4\sqrt{3}}{3}e^{i\frac{\pi}{2}} = i\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1.1 + \sqrt{3}.\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{4}{3}} - \frac{1.\sqrt{3} - 1.\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$= \frac{2}{\frac{2\sqrt{3}}{3}}e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)} = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Các phép toán với số phức

lũy thừa & căn bậc n

$$*z^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}(bi) + \ldots + C_n^j a^{n-j}(bi)^j + \ldots + C_n^n (bi)^n$$

$$= r^n e^{in\varphi}$$

$$= r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

Công thức Moivre

$$\left.\begin{aligned} &*\sqrt[n]{z} = w \to w^n = z \\ &z = re^{i\varphi} \\ &w = r_w e^{i\varphi_w} \to w^n = r_w^n e^{in\varphi_w} \end{aligned}\right\} \to \begin{cases} r_w^n = r \\ n\varphi_w = \varphi + k2\pi \end{cases}$$

$$\to \sqrt[n]{z} = w = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\varphi + k2\pi}{n}} \qquad k = 0,1,2,\ldots,(n-1)$$

$$*z = (1+i)^{25} = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{25} = \sqrt{2}^{25}e^{i\frac{25\pi}{4}} = \sqrt{2}^{25}e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}^{25}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2^{12}(1+i)$$

$$*z = \sqrt[4]{\sqrt{3}+i} = \sqrt[4]{2e^{i\frac{\pi}{6}}} = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{\frac{\pi}{6}+k2\pi}{4}} = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{6}+k2\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{\pi}{6}+k2\pi}{4}\right),\ k = 0,1,2,3$$

$$*z = 3-4i \quad \to w = \sqrt{z} = ?$$

$$\left.\begin{aligned} &w = a+bi,\ (ab \neq 0) \\ &\to\ w^2 = (a^2-b^2) + i2ab \\ &w^2 = z \end{aligned}\right\} \to \begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ 2ab = -4 \end{cases} \to \left[\begin{aligned} a^2 &= -1 \\ a^2 &= 4 \end{aligned}\right. \to \left[\begin{aligned} a &= \pm 2 \\ b &= \mp 1 \end{aligned}\right. \to \left[\begin{aligned} \sqrt{z} &= 2-i \\ \sqrt{z} &= -2+i \end{aligned}\right.$$

Một số tính chất cơ bản của số phức

1. $\overline{\overline{z}} = z$ 2. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$ 3. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1 \overline{z}_2$ 4. $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$ 5. $\overline{z^n} = \overline{z}^n$

6. $|\overline{z}| = |z|$ 7. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ 8. $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$ 9. $|z^n| = |z|^n$

10. $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$ 11. $P_n(z) = 0 \rightarrow P_n(\overline{z}) = 0$

Tìm tất cả các nghiệm của đa thức $P(z) = z^4 - 3z^3 + 12z^2 - 36z + 45$ biết đa thức có một nghiệm là $2 - i$

$$P(2-i) = 0 \rightarrow P(2+i) = 0 \rightarrow P(z) \vdots \{[z-(2-i)][z-(2+i)]\}$$

$$\rightarrow P(z) = [z-(2-i)][z-(2+i)](z^2+9)$$

$$\rightarrow P(z) = 0 \rightarrow z^2 + 9 = 0 \rightarrow z^2 = -9 \rightarrow \left[\begin{array}{l} z = 3i \\ z = -3i \end{array}\right.$$

$$\longrightarrow P(z) = 0 \rightarrow \left[\begin{array}{l} z = 2 - 1 \\ z = 2 + i \\ z = 3i \\ z = -3i \end{array}\right.$$

Bài 1.1: Cho số phức z, chứng minh rằng

$$\operatorname{Re} z = \frac{\overline{z} + z}{2}; \quad \operatorname{Im} z = i\frac{\overline{z} - z}{2}$$

Bài 1.2: Tìm nghiệm thực (x,y) của phương trình

$$(3x - i)(2 + i) + (x - iy)(1 + 2y) = 5 + 6i$$

Bài 1.3: Giải hệ phương trình phức $\begin{cases} (1+i)\,z_1 - z_2 = 2 \\ 2iz_1 + (-1+i)\,z_2 = i \end{cases}$

Bài 1.4: Tìm các số phức z thỏa mãn điều kiện

a) $|z| = z$ b) $\overline{z} = z^2$

Bài 1.5: Viết các số phức sau ở dạng lượng giác và dạng mũ

a) z = -2 b) z = 3i

c) $z = -2 + 2\sqrt{3}i$ d) $z = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$

Bài 1.6: Viết số phức sau ở dạng đại số : $z = e^{-i\frac{\pi}{2}}$

Bài 1.7: Thực hiện phép tính

a) $\left(-1 + i\sqrt{3}\right)^7$ b) $\left(\dfrac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}\right)^{40}$

Ví dụ

Bài 1.8: Rút gọn

$a.\ (2-i)^5 \qquad b.\ \dfrac{(2+2i)^9}{\left(-1+i\sqrt{3}\right)^7} \qquad c.\ \dfrac{\left(-2+i\sqrt{12}\right)^{14}}{(1-i)^{19}}$

Bài 1.9: Giải các phương trình

$a.\ z^2 - 2z + 5 = 0 \qquad b.\ z^4 + z^2 + 4 - 28i = 0$

$c.\ z^4 - 4z^3 + 17z^2 - 16z + 52 = 0, \quad z_1 = 2 + 3i$

Bài 1.10: Chứng minh đẳng thức

$a.\ \xrightarrow{CMR} |z_1z_2| = |z_1||z_2|,\ \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|},\ |z^n| = |z|^n$

$b.\ \xrightarrow{CMR} \overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2,\ \overline{z_1z_2} = \overline{z}_1\overline{z},\ \overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{z_1}{z_2}$

$c.\ P_n(z) = 0 \xrightarrow{CMR} P_n(\overline{z}) = 0$

$d.\ \xrightarrow{CMR} i^{2022} = -1$

$e.\ z + \dfrac{1}{z} = 2\cos\theta \xrightarrow{CMR} z^m + \dfrac{1}{z^m} = 2\cos m\theta$

CHƯƠNG 1: MA TRẬN – ĐỊNH THỨC

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ma trận A cỡ m × n là một bảng số (thực hay phức) gồm m hàng và n cột.

$$A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$$

PHÂN BIỆT MỘT SỐ DẠNG MA TRẬN

NHỮNG TÍNH TOÁN CƠ BẢN

PHÉP BIẾN ĐỔI HÀNG

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2i \\ 6 & -i & i-1 \\ i & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -7 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 & -2 \\ 8 & -1 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & i & 2i-3 & 7 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

HÀNG

CỘT

VUÔNG

ĐƠN VỊ

KHÔNG

CHÉO

TAM GIÁC TRÊN

TAM GIÁC DƯỚI

BẬC THANG

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

CHUYỂN VỊ

LIÊN HỢP

BẰNG NHAU

ĐỐI XỨNG

PHẢN XỨNG

NGHỊCH ĐẢO

ĐỐI

NHỮNG TÍNH TOÁN CƠ BẢN

1. HÀNG

2. CỘT

3. VUÔNG

4. ĐƠN VỊ

5. KHÔNG

6. CHÉO

7. TAM GIÁC TRÊN

8. TAM GIÁC DƯỚI

9. BẬC THANG

1. $$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

2. $$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

3. $$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ . & \dots & . \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

4. $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

5. $$\begin{pmatrix} 0 & . & 0 \\ . & . & . \\ 0 & . & 0 \end{pmatrix}$$

6. $$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

7. $$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{m2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

8. $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

9. $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

1) CHUYỂN VỊ:

Ma trận chuyển vị của A = $(a_{ij})_{m\times n}$ là $A^T = (a_{ji})_{n\times m}$

2) LIÊN HỢP:

Ma trận liên hợp của A = $(a_{ij})_{m\times n}$ là $\overline{A} = (\overline{a}_{ji})_{n\times m}$

3) BẰNG NHAU:

Hai ma trận A = $(a_{ij})_{m\times n}$ và B = $(b_{ij})_{m\times n}$; A = B ⇔ $a_{ij} = b_{ij}$

4) ĐỐI:

Ma trận đối của ma trận A là –A

5) ĐỐI XỨNG:

Ma trận A là đối xứng nếu $A = A^T$, tức $a_{ij} = a_{ji}$

6) PHẢN XỨNG:

Ma trận A là phản xứng nếu $A = -A^T$, tức $a_{ij} = -a_{ji}$

7) NGHỊCH ĐẢO:

Ma trận nghịch đảo của ma trận A là A^{-1} với $A.A^{-1} = I$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{n\times m}$$

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{21}} & \cdots & \overline{a_{m1}} \\ \overline{a_{12}} & \overline{a_{22}} & \cdots & \overline{a_{m2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a_{1n}} & \overline{a_{2n}} & \cdots & \overline{a_{mn}} \end{pmatrix}_{n\times m}$$

1. $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

4. $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

5. $$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

2. $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{Đối} \quad \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & -a_{33} \end{pmatrix}$$

3. $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{12} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{13} & a'_{23} & a'_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Hai ma trận bằng nhau

2. Ma trận đối

3. Ma trận nghịch đảo

4. Ma trận đối xứng

5. Ma trận phản xứng

Tìm các ma trận chuyển vị và liên hợp của ma trận A, B và C với

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 7 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3i & 4 \\ -i & 0 \\ i-3 & 2+i \end{pmatrix} \Rightarrow B^T = \begin{pmatrix} 3i & -i & i-3 \\ 4 & 0 & 2+i \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{B} = \begin{pmatrix} -3i & i & -i-3 \\ 4 & 0 & 2-i \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ i-1 & 2i & 7 \\ 3 & 2 & 1+2i \end{pmatrix} \Rightarrow C^T = \begin{pmatrix} 1 & i-1 & 3 \\ -i & 2i & 2 \\ 0 & 7 & 1+2i \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{C} = \begin{pmatrix} 1 & -i-1 & 3 \\ i & -2i & 2 \\ 0 & 7 & 1-2i \end{pmatrix}$$

Phép tính: nhân ma trận với một số

1) $\alpha A = \alpha\left(a_{ij}\right)_{m\times n} = \left(\alpha a_{ij}\right)_{m\times n}$

2) $\alpha\beta A = (\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 7 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 8 & 14 & 0 \end{pmatrix}$$

Phép tính: cộng hai ma trận

1) $A + B = \left(a_{ij} + b_{ij}\right)_{m\times n}$

2) $A + B = B + A$

3) $(A+B)+C = A+(B+C)$

4) $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$

5) $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 7 \\ -5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 6 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 13 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 0 & 8 & 6 \\ -3 & 9 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 4 & 9 \\ -1 & 7 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -4 \\ 1 & 1 & 3 \\ -7 & 11 & -1 \end{pmatrix}$$

Phép tính: nhân hai ma trận

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nj} & \dots & b_{np} \end{pmatrix}_{n\times p} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \dots & \boxed{c_{ij}} & \dots & c_{ip} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mj} & \dots & c_{mp} \end{pmatrix}_{m\times p}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} . b_{kj}$$

$i = 1..m; j = 1..p$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & 5 & -2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 9 \\ -2 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -37 \\ 16 & 75 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = -4$$

1) $\alpha(A.B) = (\alpha A).B = A.(\alpha B)$

2) $A.B.C = (A.B)C = A(B.C)$

3) $A(B+C) = A.B + A.C$

4) $(B+C)A = B.A + C.A$

1. A.B ≠ B.A
2. A.B = A.C nhưng B ≠ C
3. A.B = 0 không suy ra A = 0 hoặc B = 0

Phép biến đổi hàng

Mục đích của phép biến đổi này là làm cho ma trận “gọn” hơn, từ đó có thể tìm dạng ma trận bậc thang, hạng của ma trận, ma trận nghịch đảo và giải hệ phương trình tuyến tính.

Có 3 phép biến đổi sơ cấp:

- đổi chỗ hai hàng
- nhân một hàng với một số α ≠ 0
- nhân một hàng với một số α ≠ 0, sau đó cộng với một hang khác

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{h_1 \leftrightarrow h_2} \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{8h_1 \to h_1} \begin{pmatrix} 16 & 40 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2h_2 - 7h_1 \to h_2} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & -37 \end{pmatrix}$$

$$A \xrightarrow{\text{Hữu hạn phép biến đổi hàng}} B$$

A và B là hai ma trận tương đương hàng

Sử dụng phép biến đổi hàng để đưa một ma trận về dạng bậc thang và tìm hạng

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 1\\ -2 & 1 & 1 & -4\\ -1 & -1 & 4 & -3\end{pmatrix}\xrightarrow[h_3+h_1\to h_3]{h_2+2h_1\to h_2}\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 1\\ 0 & -3 & 7 & -2\\ 0 & -3 & 7 & -2\end{pmatrix}\xrightarrow{h_3-h_2\to h_3}\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 1\\ 0 & -3 & 7 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow \rho(A)=2$$

$$B=\begin{pmatrix}2 & 1 & -3 & -1\\ 1 & -2 & 3 & 1\\ -4 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 4 & -1\end{pmatrix}\xrightarrow[h_3+2h_1\to h_3]{2h_2-h_1\to h_2}\begin{pmatrix}2 & 1 & -3 & -1\\ 0 & -5 & 9 & 3\\ 0 & 3 & -5 & -1\\ 0 & 2 & 4 & -1\end{pmatrix}\xrightarrow[5h_4+2h_2\to h_4]{5h_3+3h_2\to h_3}\begin{pmatrix}2 & 1 & -3 & -1\\ 0 & -5 & 9 & 3\\ 0 & 0 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 38 & 1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{h_4-19h_3\to h_4}\begin{pmatrix}2 & 1 & -3 & -1\\ 0 & -5 & 9 & 3\\ 0 & 0 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 0 & -75\end{pmatrix}\Rightarrow \rho(B)=4$$

Sử dụng phép biến đổi hàng để tìm ma trận nghịch đảo

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix} \Rightarrow \left(A\middle|I\right)=\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 3 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{h_2-2h_1\to h_2}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 3 & 1 & 0\\ 0 & -7 & -2 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{-\frac{1}{7}h_2\to h_2}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 3 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2/7 & -1/7\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{h_1-3h_2\to h_1}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 1/7 & 3/7\\ 0 & 1 & 2/7 & -1/7\end{array}\right)=\left(I\middle|A^{-1}\right) \Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}1/7 & 3/7\\ 2/7 & -1/7\end{pmatrix};\quad A.A^{-1}=I$$

$$\left(A\middle|I\right)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{h_1\leftrightarrow h_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\end{array}\right)\xrightarrow[h_3-2h_1\to h_3]{h_2-3h_1\to h_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -2\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-h_3\to h_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2\end{array}\right)\xrightarrow[h_2+3h_3\to h_2]{h_1-h_3\to h_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2\end{array}\right)=\left(I\middle|A^{-1}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ -3 & 1 & 3\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix};\quad A.A^{-1}=I$$

Các nội dung cơ bản của ma trận:

1. Nhận biết được một số dạng ma trận như: hàng, cột, vuông, đơn vị, không, chéo, tam giác trên, tam giác dưới, bậc thang, đối xứng và phản xứng

2. Tìm ma trận đối, ma trận chuyển vị, ma trận liên hợp và ma trận nghịch đảo (gặp trong phần sau)

3. Những tính toán cơ bản như: nhân một số với một ma trận, cộng hai ma trận và nhân hai ma trận. Và một số tính chất của chúng

4. Một số tính chất đặc trưng của phép tính ma trận như: tổng quát không giao hoán A.B ≠ B.A,… (gặp ở trên)

5. Thực hành phép biến đổi hàng, từ đó đưa ma trận về dạng bậc thang, tìm hạng và ma trận nghịch đảo

ĐỊNH THỨC

Định thức của một ma trận vuông A kí hiệu là |A| hoặc det(A)

* Ma trận vuông cấp 1:
định thức cấp 1

$$A = \left(a_{ij}\right)_{1\times 1} = \left(a_{11}\right) \Rightarrow \det(A) = a_{11}$$

* Ma trận vuông cấp 2:
định thức cấp 2

$$A = \left(a_{ij}\right)_{2\times 2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

* Ma trận vuông cấp 3:
định thức cấp 3

$$A = \left(a_{ij}\right)_{3\times 3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

I1

Định lý Laplace

Định thức của một ma trận vuông A cấp n được tính theo các công thức sau

Khai triển theo dòng

$$\det(A)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k}\,a_{ik}M_{ik}$$

Khai triển theo cột

$$\det(A)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+j}\,a_{kj}M_{kj}$$

a_{ij} **: là những phần tử của ma trận A**

$(-1)^{i+j}M_{ij}$**: là phần bù đại số**

$M_{ij}=\det(A_{ij})$

A_{ij}**: là những ma trận con của ma trận A**

$$a_{ij}=a_{11}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \rightarrow A_{ij}=A_{11}=\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$a_{ij}=a_{12}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \rightarrow A_{ij}=A_{12}=\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$a_{ij}=a_{13}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \rightarrow A_{ij}=A_{13}=\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

Slide 22

I1 levansang, 9/14/2022

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & -6 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (-1)^{1+1}.(-1).\begin{vmatrix} -5 & -6 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 17$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & -6 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (-1)^{1+2}.2.\begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -44$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & -6 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (-1)^{1+3}.3.\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 21$$

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} M_{ik} = 17 + (-44) + 21 = -6$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & -5 & -6 & 4 & -5 \\ 3 & -2 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= (-1).(-5).1 + 2.(-6).3 + 3.4.(-2) \\ &\quad - 3.(-5).3 - (-1).(-6)(-2) - 2.4.1 \\ &= 5 - 36 - 24 + 45 + 12 - 8 \\ &= -6 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & 5 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow (-1)^{1+1}.1.\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= 1.0.(-1) + 5.0.1 + 1.0.3 - 1.0.1 - 1.0.3 - 5.0.(-1) = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & 5 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow (-1)^{1+2}.1.\begin{vmatrix} -3 & 5 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -3 & 5 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 5 & 1 & -3 & 5 \\ -2 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= -\left[(-3).0.(-1) + 5.0.2 + 1.(-2).3 - 1.0.2 - (-3).0.3 - 5.(-2).(-1)\right] = 16$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & 5 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow (-1)^{1+3}.2.\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2.\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 2.\left[(-3).0.(-1) + 1.0.2 + 1.(-2).1 - 1.0.2 - (-3).0.1 - 1.(-2).(-1)\right] = -8$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & 5 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow (-1)^{1+4}.2.\begin{vmatrix} -3 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -2.\begin{vmatrix} -3 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 5 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= -2.\left[(-3).0.3 + 1.0.2 + 5.(-2).1 - 5.0.2 - (-3).0.1 - 1.(-2).3\right] = 8$$

Các tính chất (hệ quả) cơ bản của định thức

1. Một tính chất đã đúng khi phát biểu về hàng của định thức thì nó vẫn còn đúng khi trong phát biểu ta thay hàng bằng cột.
2. Một định thức có môt hàng (cột) toàn là số 0 thì bằng không.
3. Một định thức có hai hàng (cột) như nhau thì bằng không.
4. Một định thức có hai hàng (cột) tỉ lệ thì bằng không.
5. Nếu một định thức có một hàng (cột) là tổ hợp tuyến tính của các hàng (cột) khác thì định thức đó bằng không.
6. Định thức của một ma trận tam giác bằng tích các phần tử chéo.
7. Khi đổi chỗ hai hàng (cột) của một định thức ta được một định thức mới bằng định thức cũ đổi dấu.
8. Khi các phần tử của một hàng (cột) có một thừa số chung, ta có thể đưa thừa số chung đó ra ngoài định thức.
9. Khi nhân các phần tử của một hàng (cột) với cùng một số *k* thì được một định thức mới bằng định thức cũ nhân với *k*.
10. Khi ta cộng bội *k* của một hàng (cột) vào một hàng (cột) khác ta được một định thức mới bằng định thức cũ.
11. Khi tất cả các phần tử của một hàng (cột) có dạng tổng của hai số hạng thì định thức có thể phân tích thành tổng hai định thức.
12. $\det(A) = \det(A^T)$.
13. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, A và B là hai ma trận vuông cùng cấp.

Ma trận nghịch đảo

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} C^T$$

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij})$$

$AB = BA = I$ $\begin{cases} \text{A là ma trận khả nghịch} \\ \text{A là không suy biến} \\ \text{B là ma trận nghịch đảo của A} \\ \text{B là ma trận duy nhất} \end{cases}$

Nếu A và B là khả nghịch thì

$$\begin{cases} \det(A) \neq 0 \\ \left(A^{-1}\right)^{-1} = A \\ (kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}, \; k \neq 0 \\ \left(A^m\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^m \\ (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 8 & 1 & 0 \end{pmatrix} \det(A) = 1.5.8 + 2.3.1 + 3.2.0 - 3.5.1 - 1.3.0 - 2.2.8 = -1 \neq 0$$

$$c_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 40, \; c_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = -13, \; c_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -5$$

$$c_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = -16, \; c_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 5, \; c_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

$$c_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -9, \; c_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3, \; c_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1$$

$$C = \begin{pmatrix} 40 & -13 & -5 \\ -16 & 5 & 2 \\ -9 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad C^T = \begin{pmatrix} 40 & -16 & -9 \\ -13 & 5 & 3 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 40 & -16 & -9 \\ -13 & 5 & 3 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

CHƯƠNG 2: HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

Hệ PT $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ...+ a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ...+ a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ...+ a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$

Nghiệm

$$\left(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3, ...,\ \alpha_n\right)$$

Tất cả α = 0: Nghiệm tầm thường

Có ít nhất một α ≠ 0: Nghiệm không tầm thường

Ma trận hệ số của hệ

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ .... & & & \\ a_{m1} & a_{m1} & .... & a_{mn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ b_m \end{pmatrix} \Leftrightarrow AX = B$$

Ma trận cột hệ số tự do

$$\overline{A} = (A, B) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} & b_2 \\ .... & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & .... & a_{mn} & b_n \end{pmatrix}$$

Ma trận mở rộng hay ma trận hệ số bổ sung

Hệ có nghiệm khi và chỉ khi $\rho(\overline{A}) = \rho(A)$ (*định lí Kronecker-Capelli*)

+ Vô nghiệm $\rho(\overline{A}) \neq \rho(A)$

+ Nghiệm duy nhất $\rho(\overline{A}) = \rho(A) = n$

+ Vô số nghiệm $\rho(\overline{A}) = \rho(A) < n$

PHƯƠNG PHÁP GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

Phương pháp

Gauss-Jordan

Sử dụng phép biến đổi hang để đưa ma trận của hệ về dạng bậc thang, từ đó suy ra nghiệm.

Cramer

Số pt bằng số ẩn

$$AX = B \longleftrightarrow x_j = \frac{|A_j|}{|A|}$$

$$\begin{array}{cccccc} |A_1| & & & |A_j| & & |A_n| \end{array}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} b_1 & b_1 & b_1 \\ b_2 & b_2 & b_2 \\ . & . & . \\ b_i & b_i & b_i \\ . & . & . \\ b_n & b_n & b_n \end{array}$$

$|A| \neq 0$ hệ phương trình tuyến tính là hệ Cramer

$|A| = 0$ và tất cả $|A_j| = 0$ hệ phương trình tuyến tính có vô số nghiệm

$|A| = 0$ và có ít nhất một $|A_j| \neq 0$ hệ phương trình tuyến tính vô nghiệm

Khi hệ có vô số nghiệm, ta sử dụng phương pháp Gauss-Jordan để giải

HỆ NGHIỆM CƠ BẢN

$$AX = 0$$

có nghiệm không tầm thường

$\longrightarrow$ số ẩn tự do $n-\rho(A)$

- Xác định số ẩn tự do
- Biểu diễn nghiệm tổng quát
- Xác định các nghiệm cơ bản bằng cách lần lượt cho một ẩn tự do bằng 1 và các ẩn khác bằng 0
- Biểu diễn hệ nghiệm cơ bản

$$x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \rightarrow \begin{cases} n = 4 \\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \rho(A) = 1 \end{cases}$$

$\rightarrow$ Có 3 ẩn tự do $x_1,\ x_2,\ x_3$ $\rightarrow$ nghiệm tổng quát $\left(x_1,\ x_2,\ x_3,\ -x_1 - x_2 + 2x_3\right)$

Hệ nghiệm cơ bản

$$\left.\begin{aligned} &* x_1 = 1,\ x_2 = x_3 = 0 \rightarrow (1,\ 0,\ 0,\ -1) \\ &* x_2 = 1,\ x_1 = x_3 = 0 \rightarrow (0, 1,\ 0,\ -1) \\ &* x_3 = 1,\ x_1 = x_2 = 0 \rightarrow (0, 0, 1, 2) \end{aligned}\right\} \rightarrow \left\{(1,\ 0,\ 0,\ -1),\ (0,1,\ 0,\ -1),\ (0,0,1,2)\right\}$$

$$\rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[h_3 - 3h_1 \rightarrow h_3]{h_2 - 2h_1 \rightarrow h_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 7 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{h_4 - h_3 \rightarrow h_4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} n = 3 \\ \rho(A) = 2 \end{cases} \rightarrow \text{có 1 ẩn tự do } x_3$$

$\longrightarrow$ nghiệm tổng quát $\left(-\frac{5}{3}x_3, \frac{7}{3}x_3, x_3\right)$

$\longrightarrow$ Hệ nghiệm cơ bản $\left\{\left(-\frac{5}{3}, \frac{7}{3}, 1\right)\right\}$,