BAN HỌC TẬP CÔNG NGHỆ PHẦN MỀM

TRAINING CUỐI KỲ HỌC KỲ I NĂM HỌC 2022 – 2023

Sharing is learning

BAN HỌC TẬP

Khoa Công nghệ Phần mềm

Trường Đại học Công nghệ Thông tin

Đại học Quốc gia thành phố Hồ Chí Minh

CONTACT

bht.cnpm.uit@gmail.com

fb.com/bhtcnpm

fb.com/groups/bht.cnpm.uit

TRAINING

ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

Thời gian: 19:30 ngày 16/02/2023

Địa điểm: Microsoft Team - w2dsy1q

Trainers: Bùi Thái Hoàng – KTPM2022.1

<u>Câu 1</u>. *(1,5 điểm)*

Trên R^6 cho tập hợp $W = \left\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)\middle| \begin{matrix} x_1+x_2+x_3-2x_4-3x_5-x_6=0 \\ 2x_1+x_2+3x_3-2x_4-9x_5-2x_6=0 \\ 3x_1+2x_2+x_3-4x_4-3x_5-3x_6=0 \end{matrix}\right\}$

Hãy tìm cơ sở và xác định số chiều cho W.

Ta có: $\overline{A} = \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & -3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & -2 & -9 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & -4 & -3 & -3 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 2 & 6 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 9 & 0 & 0 \end{array}\right]$

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} x_1+x_2+x_3-2x_4-3x_5-x_6=0 \\ -x_2+x_3+2x_4-3x_5=0 \\ -3x_3+9x_5=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=x_6 \\ x_2=2x_4 \\ x_3=3x_5 \\ x_4,x_5,x_6\in R \end{cases}$

Tập W= $\{(x_6,2x_4,3x_5,x_4,x_5,x_6)|x_4,x_5,x_6\in R\}$

$\Rightarrow$ W $= x_4(0,2,0,1,0,0)+x_5(0,0,3,0,1,0)+x_6(1,0,0,0,0,1)$

$\Rightarrow S=\{(0,2,0,1,0,0);(0,0,3,0,1,0);(1,0,0,0,0,1)\}$

+) S là hệ sinh của W

+) Xét A $= \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathrm{r}(A)=n_S=3 \Rightarrow S$ độc lập tuyến tính

Vậy S là cơ sở của W

dim W = dim S = n_S = 3

<u>Câu 2</u>. *(2,5 điểm)*

Trên R^3 cho tập hợp $\alpha = \{\alpha_1 = (1,2,3), \alpha_2 = (3,1,2), \alpha_3 = (2,3,1)\}$ và

tập hợp $\beta = \{\beta_1 = (3,0,-3), \beta_2 = (-6,2,-2), \beta_3 = (2,0,4)\}$.

a/ Chứng tỏ rằng α và β là cơ sở của R^3.

b/ Cho $x = (1,-5,4) \in R^3$. Hãy tìm tọa độ của x theo cơ sở $\alpha, [x]_\alpha$.

c/ Tìm ma trận chuyển cơ sở từ α sang β. Sử dụng kết quả vừa tìm được để tìm $[x]_\beta$

a) $\alpha = \{\alpha_1 = (1,2,3), \alpha_2 = (3,1,2), \alpha_3 = (2,3,1)\}$

Ta có $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ $\Rightarrow \det A = 18 \neq 0 \Rightarrow \alpha$ độc lập tuyến tính **(1)**

$\dim R^3 = \dim\alpha = n_\alpha = 3$ (2)

Vậy Từ (1) và (2) $\Rightarrow \alpha$ là cơ sở của R^3

$\beta = \{\beta_1 = (3,0,-3), \beta_2 = (-6,2,-2), \beta_3 = (2,0,4)\}$

Ta có $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -6 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ $\Rightarrow \det B = 36 \neq 0 \Rightarrow \beta$ độc lập tuyến tính **(3)**

$\dim R^3 = \dim\beta = n_\beta = 3$ (4)

Vậy Từ (3) và (4) $\Rightarrow \beta$ là cơ sở của R^3

b) Xét $x = a\alpha_1 + b\alpha_2 + c\alpha_3$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} a + 3b + 2c = 1 \\ 2a + b + 3c = -5 \\ 3a + 2b + c = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = -3 \end{cases} \Rightarrow [x]_\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$

c) Biểu diễn $\alpha \to \beta$ ta được:

$$\beta_1 = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 \ (1)$$
$$\beta_2 = b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + b_3\alpha_3 \ (2)$$
$$\beta_3 = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 \ (3)$$

Lần lượt giải các hệ phương trình (1), (2), (3) ta có:

$$(1) \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 3a_2 + 2a_3 = 3 \\ 2a_1 + a_2 + 3a_3 = 0 \\ 3a_1 + 2a_2 + a_3 = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = -2 \\ a_2 = 1 \\ a_3 = 1 \end{cases}$$

$$(2) \Rightarrow \begin{cases} b_1 + 3b_2 + 2b_3 = -6 \\ 2b_1 + b_2 + 3b_3 = 2 \\ 3b_1 + 2b_2 + b_3 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = 1 \\ b_2 = -3 \\ b_3 = 1 \end{cases}$$

$$(3) \Rightarrow \begin{cases} c_1 + 3c_2 + 2c_3 = 2 \\ 2c_1 + c_2 + 3c_3 = 0 \\ 3c_1 + 2c_2 + c_3 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 1 \\ c_3 = -1 \end{cases}$$

Vậy: $A_{\alpha\to\beta} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

Ta có $[x]_\alpha = A_{\alpha\to\beta}[x]_\beta$

Hệ phương trình $\Rightarrow \begin{cases} -2a_1 + a_2 + a_3 = 1 \\ a_1 + -3a_2 + a_3 = 2 \\ a_1 + a_2 - a_3 = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = -3 \\ a_2 = -\frac{5}{2} \\ a_3 = -\frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow [x]_\beta = \begin{bmatrix} -3 \\ -\frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$

Câu 3. *(2 điểm)*

Cho $p(x), q(x) \in P_2[x]$, chứng minh rằng $< p, q > = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$là một tích vô hướng trong $P_2[x]$. Hãy trực chuẩn hóa cơ sở {1,x-1, x^2 -1}

+) $< p, p > = \int_{-1}^{1} p(x)p(x)dx = \int_{-1}^{1} p(x)^2 dx \geq 0$

Gọi F(x) là nguyên hàm của $p(x)^2$

$\Rightarrow F'(x) = p(x)^2 \geq 0$ với $x \in [-1; 1]$

$\Rightarrow$ Fđồng biến trên đoạn $[-1; 1]$

$\Rightarrow F(1) - F(-1) \geq 0$

<p,p> = 0 khi p(x) = 0 vì$\int_{-1}^{1} 0dx = 0$

+) $< p, q >= \int_{-1}^{1} p(x).q(x)dx = \int_{-1}^{1} q(x).p(x)dx = < q, p >$

+) $< p + q, z >$

$= \int_{-1}^{1} (p(x) + q(x)).z(x)dx = \int_{-1}^{1} z(x).p(x) + z(x).q(x)dx = \int_{-1}^{1} z(x).p(x)dx + \int_{-1}^{1} z(x).q(x)dx =< p, z >+< q, z >$

+) $< \alpha.p, q >= \int_{-1}^{1} \alpha.p(x)q(x)dx = \alpha \int_{-1}^{1} p(x).q(x)dx = \alpha < p, q >$

Vậy $< p, q > = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$ là một tích vô hướng

+) Đặt $\begin{cases} e_1 = 1 \\ e_2 = x - 1 \\ e_3 = x^2 - 1 \end{cases}$

$$u_1 = e_1 = 1$$

$$u_2 = e_2 - \frac{< e_2, u_1 > u_1}{\|u_1\|^2} = x - 1 - \frac{\int_{-1}^{1}(x-1)dx}{\int_{-1}^{1} dx} = x - 1 + 1 = x$$

$$u_3 = e_3 - \frac{< e_3, u_1 > u_1}{\|u_1\|^2} - \frac{< e_3, u_2 > u_2}{\|u_2\|^2} = x^2 - 1 - \frac{\int_{-1}^{1}(x^2-1)dx}{\int_{-1}^{1} dx} - \frac{\int_{-1}^{1}(x^2-1)xdx}{\int_{-1}^{1} x^2dx} x = x^2 - \frac{1}{3}$$

Vậy ta có cơ sở trực giao $\left\{1, x, x^2 - \frac{1}{3}\right\}$

$$\|u_1\| = \sqrt{< u_1, u_1 >} = \sqrt{\int_{-1}^{1} dx} = \sqrt{2} \qquad \|u_2\| = \sqrt{< u_2, u_2 >} = \sqrt{\int_{-1}^{1} x^2dx} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\|u_3\| = \sqrt{< u_3, u_3 >} = \sqrt{\int_{-1}^{1} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dx} = \frac{2\sqrt{10}}{15}$$

Vậy ta có cơ sở trực chuẩn là $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3x}{\sqrt{6}}, \frac{15}{2\sqrt{10}}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)\right\}$

<u>Câu 4</u>. *(2 điểm)*

Cho ma trận thực $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Hãy chéo hóa A, rồi sau đó tính A^{2021}.

$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow (A-I\lambda) = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 3-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$

Xét phương trình $|A-I\lambda|=0$

$-\lambda^3 + trace(A)\lambda^2 - (A_{11} + A_{22} + A_{33})\lambda + \det(A) = 0$

$trace(A)$==3+3+3=9

$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=8$

$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=8$

$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=8$

$-\lambda^3 + 9\lambda^2 - 24\lambda + 20 = 0$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = 2\ (\text{BDS} = 2) \\ \lambda = 5\ (\text{BDS} = 1) \end{array}\right.$

Mà tổng trị riêng = tổng các thành phần trên đường chéo chính

Suy ra: 5+2+2=9

Vậy λ=2 có BDS = 2

λ=5 có BDS = 1

Xét λ=2 ta có:

(A-Iλ)=(A-2I)= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ta có hệ phương trình: $x_1 + x_2 - x_3$=0 $\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 + x_3 \\ x_2, x_3 \in R \\ x_2^2 + x_3^2 \neq 0 \end{cases}$

E(2)= $\left\{ (-x_2 + x_3, x_2, x_3) \,\middle|\, \begin{matrix} x_2, x_3 \in R \\ x_2^2 + x_3^2 \neq 0 \end{matrix} \right\}$

= $\left\{ x_2(-1,1,0) + x_3(1,0,1) \,\middle|\, \begin{matrix} x_2, x_3 \in R \\ x_2^2 + x_3^2 \neq 0 \end{matrix} \right\}$

⇒ S={(-1,1,0);(1,0,1)} là hệ sinh của E(2)

Dễ thấy S có 2 vector không tỉ lệ nên S độc lập tuyến tính

Vậy S là cơ sở của E(2)

⇒ dim E(2) = dim S=n_S=2⇒ BHH = BDS = 2

Xét λ=5 ta có:

(A-Iλ)=(A-5I)= $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = -x_3 \\ x_3 \in R\backslash 0 \end{cases}$

E(5)= $\{(-x_3, -x_3, x_3) |\ x_3 \in R\backslash 0\}$

= $\{(-1, -1, 1) |\ x_3 \in R\backslash 0\}$

⇒ S={(-1,-1,1)} là hệ sinh của E(5)

Dễ thấy S chỉ có 1 vector nên S độc lập tuyến tính

Vậy S là cơ sở của E(5)

⇒dimE(5) = dim S = n_S = 1 ⇒ BHH = BDS = 1

Nên A chéo hóa được

Ta có: P=$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

D=$P^{-1}.A.P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

$$A^{2021} = P.\mathrm{D}^{2021}.P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{2021} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{2021} & 0 \\ 0 & 0 & 5^{2021} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

<u>Câu 5</u>. *(2,0 điểm)*

Đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc, tìm cơ sở ứng với dạng chính tắc đó.

$$F(x,y,z) = x^2 + 6y^2 - 2z^2 + 4xy - 6xz$$

F(x,y,z)= x^2+6y^2-2z^2+ 4xy - 6xz

$= (x+2y-3z)^2 + 2y^2 - 11z^2 + 12yz = (x+2y-3z)^2 + \frac{1}{2}(2y+6z)^2 - 29z^2$

Đặt: $\begin{cases} u = x + 2y - 3z \\ v = 2y + 6z \\ t = z \end{cases}$ (2) $\Rightarrow$(1)= $u^2 + \frac{1}{2} v^2 - 29t^2$

Gọi β là cơ sở ứng với dạng chính tắc vừa tìm của dạng toàn phương F(x,y,z) là cơ sở của R^3 và β_0 là cở sở chính tắc của R^3

Ta có: $[x]_{\beta_0} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ và $[x]_{\beta} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ t \end{bmatrix}$

(2) suy ra: $\begin{bmatrix} u \\ v \\ t \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

$\Rightarrow P_{\beta\to\beta_0} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow P_{\beta_0\to\beta} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 9 \\ 0 & \frac{1}{2} & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Vậy β={(1,0,0)(-1, $\frac{1}{2}$,0)(9,-3,1)}

ĐIỂM DANH VÀ GỬI PHẢN HỒI

BAN HỌC TẬP CÔNG NGHỆ PHẦN MỀM

TRAINING CUỐI KỲ HỌC KỲ I NĂM HỌC 2022 – 2023

ĐOÀN KHOA
CÔNG NGHỆ PHẦN MỀM
BAN HỌC TẬP

Sharing is learning

HẾT

CẢM ƠN CÁC BẠN ĐÃ THEO DÕI
CHÚC CÁC BẠN CÓ KẾT QUẢ THI THẬT TỐT!

BAN HỌC TẬP

Khoa Công nghệ Phần mềm

Trường Đại học Công nghệ Thông tin

Đại học Quốc gia thành phố Hồ Chí Minh

CONTACT

bht.cnpm.uit@gmail.com

fb.com/bhtcnpm

fb.com/groups/bht.cnpm.uit