

Đề CK Giải Tích Năm 2020-2021

Câu 1. Thay đổi thứ tự lấy tích phân sau

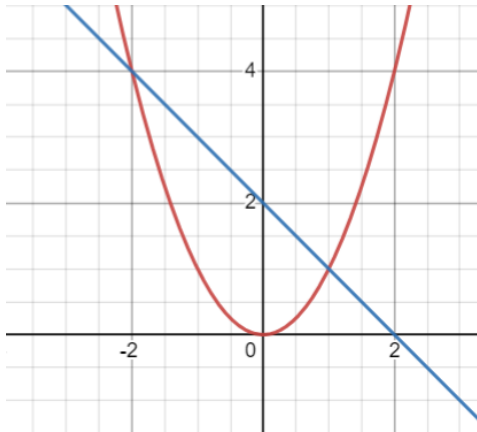
$$I = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x, y) dy$$

Giải:

Ta có: $D = D1 \cup D2$

$$D1 = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\}$$

$$D2 = \{1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2 - x\}$$



Theo đồ thị ta có:

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ \sqrt{y} \leq x \leq 2 - y \end{cases}$$

$$I = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x, y) dx$$

Câu 2. Tính tích phân $I =$

$\iiint_{\Omega} \sqrt{4 - y^2 - z^2} dx dy dz$, trong đó Ω là khối vật thể giới hạn bởi

$$\begin{cases} y^2 + z^2 \leq 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \end{cases}$$

Giải:

Đặt $\begin{cases} y = r \cos \varphi \\ z = r \sin \varphi \end{cases}$, ta được:

$$0 \leq r \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$\text{và } x^2 \leq 4 - y^2 - z^2 \Leftrightarrow -\sqrt{4 - r^2} \leq x \leq \sqrt{4 - r^2}$$

$$\text{Khi đó, } I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_{-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} \sqrt{4 - r^2} r dx = 7\pi$$

Câu 3. Tính $I = \int_C (x^2 - xy)dl$, với (C) là đường tròn : $x^2 + y^2 + 2x = 0$

Giải:

Ta có: $x^2 + y^2 + 2x = 0 \Rightarrow (x + 1)^2 + y^2 = 1$

$\Rightarrow C$ là đường tròn tâm $A(-1,0)$ và bán kính $r = 1$

Đặt $\begin{cases} x = -1 + \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi$

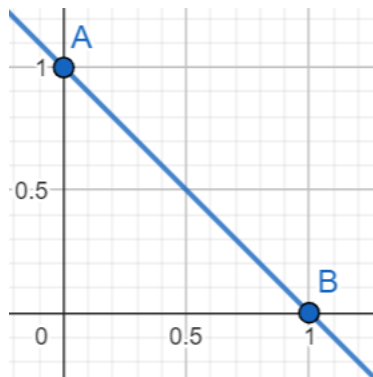
$\Rightarrow \begin{cases} x' = -\sin t \\ y' = \cos t \end{cases}$

Vì phân cung $dl = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt = dt$

$$I = \int_C (x^2 - xy)dl = \int_0^{2\pi} ((-1 + \cos t)^2 - (-1 + \cos t) \cdot \sin t) dt = 3\pi$$

Câu 4. Tính $I = \int_L (y + 2x + 1) dx + (y - 1)dy$, L là đoạn thẳng nối từ $A(0,1)$ đến $B(1,0)$

Giải:



Có: $\begin{cases} y = -x + 1 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow dy = -dx$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 (-x + 1 + 2x + 1) dx - (-x + 1 - 1) dx \\ &= \int_0^1 2 + 2x dx = 3 \end{aligned}$$

Câu 5.

a) $(x - x^2y^2)dy + ydx = 0$

Giải:

Ta xem pt là một hàm $x = x(y)$

$$\Leftrightarrow y \cdot \frac{dx}{dy} + (x - x^2 y^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow y \cdot x' + x - x^2 y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x' + \frac{1}{y}x = y \cdot x^2 (*) \rightarrow \text{Pt Bernoulli}$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} p(x) = \frac{1}{y} \\ q(x) = y \\ \alpha = 2 \end{cases}$$

TH1: $y = 0 \rightarrow$ là nghiệm của pt

TH2: $y \neq 0$. Vì $\alpha \neq 0$ và $\alpha \neq 1$ nên ta nhân 2 vế cho x^{-2}

$$(*) \Leftrightarrow x' \cdot x^{-2} + \frac{1}{y} \cdot x \cdot x^{-2} = y \cdot x^2 \cdot x^{-2}$$

$$\Leftrightarrow x' \cdot x^{-2} + \frac{1}{y} \cdot x^{-1} = y$$

$$\text{Đặt } z = x^{-1} \rightarrow z' = -x^{-2} \cdot x' \rightarrow x' = -z' \cdot x^2$$

$$(*) \rightarrow -z' \cdot x^2 \cdot x^{-2} + \frac{1}{y} z = y$$

$$\Leftrightarrow z' - \frac{1}{y} \cdot z = -y \rightarrow \text{ptttktn}$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} p(x) = -\frac{1}{y} \\ q(x) = -y \end{cases}$$

Sử dụng công thức nghiệm ta được

$$z = e^{-\int -\frac{1}{y} dy} (C + \int -y \cdot e^{\int -\frac{1}{y} dy} dy)$$

$$\Leftrightarrow z = e^{\ln y} (C + \int -y \cdot e^{-\ln y} dy)$$

$$\Leftrightarrow z = y(C + \int -y \cdot \frac{1}{y} dy)$$

$$z = y(C - y) \Leftrightarrow \frac{1}{x} = yC - y^2$$

b) $y'' - 3y' + 2y = (x + 2) \cdot e^x$

Giải:

B1: Xét PTTN: $y'' - 3y' + 2y = 0$

$$PT\acute{D}T: k^2 - 3k + 2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k_1 = 1 \\ k_2 = 2 \end{cases}$$

$$\rightarrow \text{Nghiệm TQ } \bar{y} = C_1 \cdot e^{1x} + C_2 \cdot e^{2x}$$

B2: Tìm nghiệm riêng của PTKTN $y'' - 3y' + 2y = (x + 2) \cdot e^x$

Ta có $f(x) = (x + 2) \cdot e^x \rightarrow P_n(x) = x + 2, \gamma = 1$

Vì $\gamma = 1$ là nghiệm của ptđt \rightarrow Nghiệm riêng của PTKTN có dạng

$$Y = x \cdot e^x \cdot Q_n(x) = x \cdot e^x(ax + b) = ax^2 \cdot e^x + bx \cdot e^x$$

$$\rightarrow Y' = 2ax \cdot e^x + ax^2 \cdot e^x + b \cdot e^x + bx \cdot e^x$$

$$\rightarrow Y'' = 2(2ax \cdot e^x + ax^2 \cdot e^x) + 2ae^x + ax^2 \cdot e^x + bxe^x$$

Thay vào ptktn ta được:

$$-2ax = x \rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

$$2a - b = 2 \rightarrow b = -3$$

$$\rightarrow Y = x \cdot e^x \cdot \left(-\frac{1}{2}x - 3\right)$$

B3: Nghiệm tổng quát của PTKTN:

$$y = \bar{y} + Y = C_1 \cdot e^{1x} + C_2 \cdot e^{2x} + x \cdot e^x \cdot \left(-\frac{1}{2}x - 3\right)$$

