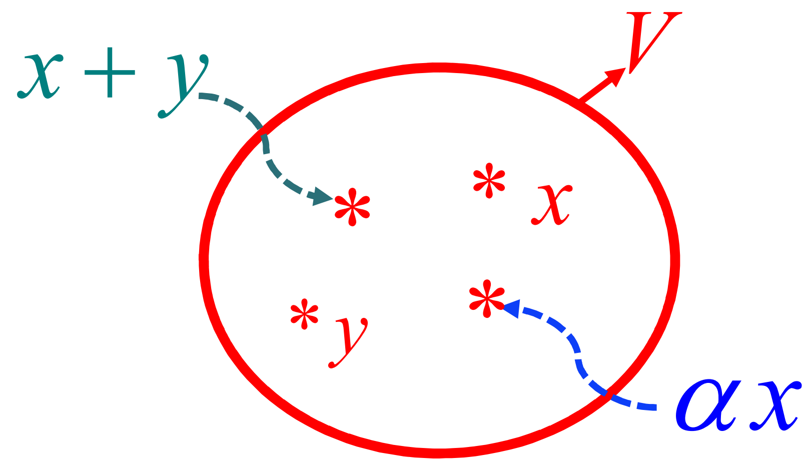
KHÔNG GIAN VECTOR

$$+ : \quad V \times V \to V$$
$$(x, y) \to x + y$$

$$. : \quad \mathrm{K} \times V \to V$$
$$(\alpha, x) \to \alpha x$$

$$V \neq \varnothing$$

Một tập **V** khác rỗng trên đó có hai phép toán: **cộng** và **nhân**



1) $\forall x, y \in V \to x + y \in V$

2) $\left.\begin{array}{l} \forall x \in V \\ \forall \alpha \in \mathrm{K} \end{array}\right\} \to \alpha x \in V$

3) $\forall x, y \in V \to x + y = y + x$

4) $\forall x, y, z \in V \to (x+y)+z = x+(y+z)$

5) $\left.\begin{array}{l} \exists 0_V \in V \\ \forall x \in V \end{array}\right\} \to x + 0_V = 0_V + x = x$

6) $\left.\begin{array}{l} \exists x \in V \\ \exists (-x) \in V \end{array}\right\} \to x + (-x) = (-x) + x = 0_V$

7) $\left.\begin{array}{l} \forall x, y \in V \\ \forall \alpha \in \mathrm{K} \end{array}\right\} \to \alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$

8) $\left.\begin{array}{l} \forall x \in V \\ \forall \alpha, \beta \in \mathrm{K} \end{array}\right\} \to (\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$

9) $\left.\begin{array}{l} \forall x \in V \\ \forall \alpha, \beta \in \mathrm{K} \end{array}\right\} \to (\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$

10) $\forall x \in V \to 1.x = x$

0_V: duy nhất

$-x$: duy nhất

$$\alpha x = 0 \to \left[\begin{array}{l} \alpha = 0 \\ x = 0 \end{array}\right.$$

0_V: phần tử trung hòa; $\quad -x$: phần tử đối; $\quad 1$: vô hướng đơn vị

1) $\forall x,y \in V \rightarrow x+y \in V$

2) $\left.\begin{matrix}\forall x \in V \\ \forall \alpha \in \mathrm{K}\end{matrix}\right\} \rightarrow \alpha x \in V$

3) $\forall x,y \in V \rightarrow x+y=y+x$

4) $\forall x,y,z \in V \rightarrow (x+y)+z=x+(y+z)$

5) $\left.\begin{matrix}\exists 0_V \in V \\ \forall x \in V\end{matrix}\right\} \rightarrow x+0_V=0_V+x=x$

6) $\left.\begin{matrix}\exists x \in V \\ \exists(-x) \in V\end{matrix}\right\} \rightarrow x+(-x)=(-x)+x=0_V$

7) $\left.\begin{matrix}\forall x,y \in V \\ \forall \alpha \in \mathrm{K}\end{matrix}\right\} \rightarrow \alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$

8) $\left.\begin{matrix}\forall x \in V \\ \forall \alpha,\beta \in \mathrm{K}\end{matrix}\right\} \rightarrow (\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$

9) $\left.\begin{matrix}\forall x \in V \\ \forall \alpha,\beta \in \mathrm{K}\end{matrix}\right\} \rightarrow (\alpha\beta)x=\alpha(\beta x)$

10) $\forall x \in V \rightarrow 1.x=x$

$\mathrm{VD1}:\begin{cases}V \equiv \{u \mid u \in R\} \\ \mathrm{K} \equiv R\end{cases}$

Các phép cộng và nhân thông thường trên R

(1) Với $\begin{cases}\forall x,y,z \in V \\ \forall \alpha,\beta \in \mathrm{K}(\equiv R)\end{cases}$

(2) Kiểm tra 1),...,10)

(3) Thỏa

Tập các số thực R là một R- không gian vector

$0_V=0, \quad -u$

$\mathrm{VD2}:\begin{cases}V \equiv \{u(x,y) \mid x,y \in R\},(V \equiv R^2) \\ \mathrm{K} \equiv R\end{cases}$

Các phép cộng và nhân thông thường vector 2 chiều trên R

(1) $\begin{cases}\forall u_1(x_1,y_1),u_2(x_2,y_2),u_3(x_3,y_3) \in V \\ \forall \alpha,\beta \in \mathrm{K}(\equiv R)\end{cases}$

(2) 1),...,10)

(3)

Tập R² là một không gian vector $\left(0_V=(0,0),\ -u=(-x,-y)\right)$

R^n là không gian vector,

$V \equiv \{u(x_1,x_2,\ldots,x_n) \mid x_i \in R,\ i=\overline{1,n}\}, \quad (V \equiv R^n)$

$0_V=\Big(\underbrace{0,0,\ldots,0}_{n}\Big), \quad -u=(-x_1,\ldots,-x_n)$

1) $\forall x,y \in V \rightarrow x+y \in V$

2) $\left.\begin{array}{l}\forall x \in V\\ \forall \alpha \in \mathrm{K}\end{array}\right\} \rightarrow \alpha x \in V$

3) $\forall x,y \in V \rightarrow x+y=y+x$

4) $\forall x,y,z \in V \rightarrow (x+y)+z=x+(y+z)$

5) $\left.\begin{array}{l}\exists 0_V \in V\\ \forall x \in V\end{array}\right\} \rightarrow x+0_V=0_V+x=x$

6) $\left.\begin{array}{l}\exists x \in V\\ \exists (-x) \in V\end{array}\right\} \rightarrow x+(-x)=(-x)+x=0_V$

7) $\left.\begin{array}{l}\forall x,y \in V\\ \forall \alpha \in \mathrm{K}\end{array}\right\} \rightarrow \alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$

8) $\left.\begin{array}{l}\forall x \in V\\ \forall \alpha,\beta \in \mathrm{K}\end{array}\right\} \rightarrow (\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$

9) $\left.\begin{array}{l}\forall x \in V\\ \forall \alpha,\beta \in \mathrm{K}\end{array}\right\} \rightarrow (\alpha\beta)x=\alpha(\beta x)$

10) $\forall x \in V \rightarrow 1.x=x$

VD3: $V=\left\{a+bx+cx^2 \,\middle|\, a,b,c \in R\right\},\ \left(V \equiv P_2(x)\right)$

Các phép cộng và nhân đa thức thông thường trên R

(1) $\downarrow$

$$\begin{cases} f_1(x)=a_0+a_1x+a_2x^2 \in V;\ a_0,a_1,a_2 \in R\\ f_2(x)=b_0+b_1x+b_2x^2 \in V;\ b_0,b_1,b_2 \in R\\ f_1(x)=c_0+c_1x+c_2x^2 \in V;\ c_0,c_1,c_2 \in R \end{cases}$$

(2) $\downarrow$

$\boxed{\text{1),...,10)}}$

(3) $\downarrow$

$P_2(x)$ là một không gian vector

$0_V=(a,b,c)=(0,0,0);\ -u=(-a,-b,-c)$

$$V=\left\{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \,\middle|\, a_i \in R,\ i=\overline{1,n}\right\},\ \left(V \equiv P_n(x)\right)$$

$$0_V=(a_0,\dots,a_n)=(0,\dots,0)=0,\ -u=(-a_0,\dots,-a_n)$$

$P_n(x)$ là một không gian vector

1) $\forall x, y \in V \to x + y \in V$

2) $\left.\begin{array}{l}\forall x \in V \\ \forall \alpha \in K\end{array}\right\} \to \alpha x \in V$

3) $\forall x, y \in V \to x + y = y + x$

4) $\forall x, y, z \in V \to (x+y)+z = x+(y+z)$

5) $\left.\begin{array}{l}\exists 0_V \in V \\ \forall x \in V\end{array}\right\} \to x + 0_V = 0_V + x = x$

6) $\left.\begin{array}{l}\exists x \in V \\ \exists(-x) \in V\end{array}\right\} \to x + (-x) = (-x) + x = 0_V$

7) $\left.\begin{array}{l}\forall x, y \in V \\ \forall \alpha \in K\end{array}\right\} \to \alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$

8) $\left.\begin{array}{l}\forall x \in V \\ \forall \alpha, \beta \in K\end{array}\right\} \to (\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$

9) $\left.\begin{array}{l}\forall x \in V \\ \forall \alpha, \beta \in K\end{array}\right\} \to (\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$

10) $\forall x \in V \to 1.x = x$

VD4: $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in R \right\}, \ (V \equiv M_2(R))$

Các phép cộng và nhân ma trận thông thường trên R

(1)

$$\begin{cases} u_1 = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ z_1 & t_1 \end{pmatrix} \in V; \quad x_1, y_1, z_1, t_1 \in R \\ u_2 = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ z_2 & t_2 \end{pmatrix} \in V; \quad x_2, y_2, z_2, t_2 \in R \\ u_3 = \begin{pmatrix} x_3 & y_3 \\ z_3 & t_3 \end{pmatrix} \in V; \quad x_3, y_3, z_3, t_3 \in R \end{cases}$$

$M_2(R)$ là một không gian vector $\quad 0_V = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad -u = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$

$M_{m \times n}(R)$ là một không gian vector

Kiểm tra các tập sau có là KGVT không

1) $\forall x, y \in V \rightarrow x+y \in V$

2) $\left.\begin{array}{l}\forall x \in V \\ \forall \alpha \in \mathrm{K}\end{array}\right\} \rightarrow \alpha x \in V$

3) $\forall x, y \in V \rightarrow x+y=y+x$

4) $\forall x, y, z \in V \rightarrow (x+y)+z=x+(y+z)$

5) $\left.\begin{array}{l}\exists 0_V \in V \\ \forall x \in V\end{array}\right\} \rightarrow x+0_V=0_V+x=x$

6) $\left.\begin{array}{l}\exists x \in V \\ \exists(-x) \in V\end{array}\right\} \rightarrow x+(-x)=(-x)+x=0_V$

7) $\left.\begin{array}{l}\forall x, y \in V \\ \forall \alpha \in \mathrm{K}\end{array}\right\} \rightarrow \alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$

8) $\left.\begin{array}{l}\forall x \in V \\ \forall \alpha, \beta \in \mathrm{K}\end{array}\right\} \rightarrow (\alpha+\beta) x=\alpha x+\beta x$

9) $\left.\begin{array}{l}\forall x \in V \\ \forall \alpha, \beta \in \mathrm{K}\end{array}\right\} \rightarrow (\alpha \beta) x=\alpha(\beta x)$

10) $\forall x \in V \rightarrow 1.x=x$

VD5: $\begin{cases} V=\{x \mid x \in R\} \\ K=Q \end{cases}$ (Yes)

VD6: $\begin{cases} V=\{x \mid x \in Q\} \\ K=R \end{cases}$ (No)

VD7: $V=\left\{\left(x_1, x_2, x_3\right) \mid x_i \in R, i=\overline{1,3} \wedge x_1+2 x_2-3 x_3=0\right\}$ (Yes)

VD8: $V=\{(x, y, z) \mid x, y, z \in R\}$ (No)

$$pc(+):(x, y, z)+\left(x', y', z'\right)=\left(x+x', y+y', z+z'\right)$$

$$pn(.): \alpha(x, y, z)=(|\alpha| x,|\alpha| y,|\alpha| z)$$

VD9: $V=\left\{\left(x_1, x_2\right) \mid x_1, x_2 \in R \wedge x_1>0, x_2>0\right\}$ (Yes)

$$pc(+):(x, y)+\left(x', y'\right)=\left(x y, x' y'\right)$$

$$pn(.): \alpha(x, y)=\left(x^\alpha, y^\alpha\right)$$

KHÔNG GIAN VECTOR CON

W là không gian vector con của V ⇐

$$\begin{cases} W \neq \varnothing \\ W \subset V \\ \forall x, y \in W \ \rightarrow \ x + y \in W \\ \forall x \in W, \forall \alpha \in R \ \rightarrow \alpha x \in W \end{cases}$$

VD10: Chứng minh W là KGVT con của R^3

$$W = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in R^3 \,\middle|\, x_1 = 2x_2 \right\}$$

$* \ u = (2,1,0) \in W \ \Rightarrow \ W \neq \varnothing$

$* \ W \subset R^3$

$$* \begin{cases} \forall u_1 = (x_1, x_2, x_3) \in W \ \rightarrow \ x_1 = 2x_2 \\ \forall u_2 = (y_1, y_2, y_3) \in W \ \rightarrow \ y_1 = 2y_2 \end{cases}$$

$$u_1 + u_2 = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$$

$$x_1 + y_1 = 2x_2 + 2y_2 = 2(x_2 + y_2)$$

$$\rightarrow \ u_1 + u_2 \in W$$

$$* \begin{cases} \forall u_1 = (x_1, x_2, x_3) \in W \ \rightarrow \ x_1 = 2x_2 \\ \forall \alpha \in R \end{cases}$$

$$\alpha u_1 = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3)$$

$$\alpha x_1 = \alpha 2x_2 = 2(2x_2)$$

$$\rightarrow \ \alpha u_1 \in W$$

Vậy W là KGVT con của R^3

$$\text{VD11: } W=\left\{(x_1,x_2,x_3)\in R^3 \mid x_1+x_2=0\right\}$$

$$*\ u=(-1,1,0)\in W \Rightarrow W\neq\varnothing$$

$$*\ W\subset R^3$$

$$*\ \begin{cases}\forall u_1=(x_1,x_2,x_3)\in W \to x_1+x_2=0\\ \forall u_2=(y_1,y_2,y_3)\in W \to y_1+y_2=0\end{cases}$$

$$u_1+u_2=(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3)$$

$$(x_1+y_1)+(x_2+y_2)=(x_1+x_2)+(y_1+y_2)=0+0=0$$

$$\to u_1+u_2\in W$$

$$*\ \begin{cases}\forall u_1=(x_1,x_2,x_3)\in W \to x_1+x_2=0\\ \forall \alpha\in R\end{cases}$$

$$\alpha u_1=(\alpha x_1,\alpha x_2,\alpha x_3)$$

$$\alpha x_1+\alpha x_2=\alpha(x_1+x_2)=\alpha 0=0$$

$$\to \alpha u_1\in W$$

Vậy W là KGVT con của R^3

$$\text{VD12: } W=\left\{(x_1,x_2,0) \mid x_1,\ x_2\in R\right\}$$

$$*\ u=(0,0,0)\in W \Rightarrow W\neq\varnothing$$

$$*\ W\subset R^3$$

$$*\ \begin{cases}\forall u_1=(x_1,x_2,0)\in W \to x_1,x_2\in R\\ \forall u_2=(y_1,y_2,0)\in W \to y_1,\ y_2\in R\end{cases}$$

$$u_1+u_2=(x_1+y_1,x_2+y_2,0)$$

$$x_1,y_1\in R \Rightarrow x_1+y_1\in R$$

$$x_2,y_2\in R \Rightarrow x_2+y_2\in R$$

$$\to u_1+u_2\in W$$

$$*\ \begin{cases}\forall u_1=(x_1,x_2,0)\in W \to x_1,x_2\in R\\ \forall \alpha\in R\end{cases}$$

$$\alpha u_1=(\alpha x_1,\alpha x_2,0)$$

$$x_1,\alpha\in R \Rightarrow \alpha x_1\in R$$

$$x_2,\alpha\in R \Rightarrow \alpha x_2\in R$$

$$\to \alpha u_1\in W$$

Vậy W là KGVT con của R^3

VD13: $W=\{(x_1,x_2,x_3)\in R^3 \,|\, 2x_1-5x_2+3x_3=0\}$

$*\ u=(0,0,0)\in W \Rightarrow W\neq\varnothing$

$*\ W\subset R^3$

$$*\ \begin{cases}\forall u_1=(x_1,x_2,x_3)\in W \to 2x_1-5x_2+3x_3=0\\ \forall u_2=(y_1,y_2,y_3)\in W \to 2y_1-5y_2+3y_3=0\end{cases}$$

$$u_1+u_2=(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3)$$

$$2(x_1+y_1)-5(x_2+y_2)+3(x_3+y_3)=$$

$$(2x_1-5x_2+3x_3)+(2y_1-5y_2+3y_3)=0+0=0$$

$\to u_1+u_2\in W$

$$*\ \begin{cases}\forall u_1=(x_1,x_2,x_3)\in W \to 2x_1-5x_2+3x_3=0\\ \forall \alpha\in R\end{cases}$$

$$\alpha u_1=(\alpha x_1,\alpha x_2,\alpha x_3)$$

$$2\alpha x_1-5\alpha x_2+3\alpha x_3=\alpha(2x_1-5x_2+3x_3)=\alpha 0=0$$

$\to \alpha u_1\in W$

Vậy W là KGVT con của R^3

VD14: $W=\{(x_1,x_2,x_1x_2) \,|\, x_1,\ x_2\in R\}$

$*\ u=(0,0,0)\in W \Rightarrow W\neq\varnothing$

$*\ W\subset R^3$

$$*\ \begin{cases}\forall u_1=(x_1,x_2,x_1x_2)\in W \to x_1,\ x_2\in R\\ \forall u_2=(y_1,y_2,y_1y_2)\in W \to y_1,\ y_2\in R\end{cases}$$

$$u_1+u_2=(x_1+y_1,x_2+y_2,x_1x_2+y_1y_2)$$

$$(x_1+y_1)(x_2+y_2)=$$

$$=x_1x_2+y_1y_2+x_1y_2+x_2y_1\neq x_1x_2+y_1y_2$$

$\to u_1+u_2\notin W$

Vậy W **không** là KGVT con của R^3

VD15: $W=\left\{\left(x_1,x_2\right)\in R^2 \middle| x_1=x_2\right\}$ (Yes)

VD16: $W=\left\{\left(x_1,x_2\right)\in R^2 \middle| 3x_1-x_2=5\right\}$ (No)

VD17: $W=\left\{\left(x_1,x_2,x_3\right)\in R^3 \middle| x_1\, x_2x_3=0\right\}$ (No)

VD18: $W=\left\{\left(x_1,x_2,x_3\right)\in R^3 \middle| \begin{cases} x_1-3x_2+x_3=0 \\ 2x_2-x_3=0 \end{cases}\right\}$ (Yes)

TỔ HỢP TUYẾN TÍNH - ĐỘC LẬP TUYẾN TÍNH - PHỤ THUỘC TUYẾN TÍNH

Tổ hợp tuyến tính: $v = c_1u_1 + c_2u_2 + \ldots + c_nu_n = \sum_{i=1}^{n} c_iu_i; \quad c_i \in R, \ i = \overline{1,n}$

$\sum_{i=1}^{n} c_iu_i = 0_V$ — Tất cả $C_i = 0$ → **Độc lập tuyến tính**

$\sum_{i=1}^{n} c_iu_i = 0_V$ — Có ít nhất một $C_i \neq 0$ → **Phụ thuộc tuyến tính**

- ✓ Nếu hệ $S = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ là ĐLTT thì mọi hệ con của nó là cũng ĐLTT
- ✓ Hệ S có chứa một hệ con PTTT thì S là PTTT
- ✓ Hệ S là PTTT khi và chỉ khi tồn tại ít nhất một vector u_i là THTT của những vector còn lại

$$c_1(1,5)+c_2(2,8)=(v_1,v_2)$$

$$\rightarrow \begin{cases} c_1+2c_2=v_1 \\ 5c_1+8c_2=v_2 \end{cases}$$

$$\rightarrow A_T=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} v=\sum_{i=1}^{n} c_i u_i \\ 0_V=\sum_{i=1}^{n} c_i u_i \end{cases} \rightarrow A_T X = B \leftarrow \begin{cases} A_T=\begin{pmatrix} (u_1)_1 & (u_2)_1 & . \\ . & . & . \\ (u_1)_m & (u_2)_m & . \end{pmatrix} \\ B=\begin{pmatrix} v_1 \\ . \\ v_m \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 0 \\ . \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Gauss-Jordan

Hệ có nghiệm khi và chỉ khi $\rho(\overline{A})=\rho(A)$

(*định lí Kronecker-Capelli*)

+ Vô nghiệm $\rho(\overline{A})\neq\rho(A)$

+ Nghiệm duy nhất $\rho(\overline{A})=\rho(A)=n$

+ Vô số nghiệm $\rho(\overline{A})=\rho(A)<n$

Cramer

$$AX=B \longleftrightarrow x_j=\frac{|A_j|}{|A|}$$

$|A|\neq 0$ hệ phương trình tuyến tính là hệ Cramer

$|A|=0$ và tất cả $|A_j|=0$ hệ phương trình tuyến tính có vô số nghiệm

$|A|=0$ và có ít nhất một $|A_j|\neq 0$ hệ phương trình tuyến tính vô nghiệm

Khi hệ có vô số nghiệm, ta sử dụng phương pháp Gauss-Jordan để giải

Tổ hợp tuyến tính ?

$$a)\ \begin{cases} v(7,-1) \\ u_1(2,1) \\ u_2(1,-1) \end{cases} \rightarrow v = c_1u_1 + c_2u_2$$

$$\xrightarrow[c_2=?]{c_1=?} v = ?u_1 + ?u_2$$

$$c)\ \begin{cases} v(0,0,1) \\ u_1(1,1,0) \\ u_2(1,-1,0) \end{cases}$$

$$b)\ \begin{cases} v(7,-3,0) \\ u_1(1,1,0) \\ u_2(1,-1,0) \end{cases}$$

Độc lập tuyến tính hoặc phụ thuộc tuyến tính?

$$d)\ \begin{cases} u_1(1,2) \\ u_2(1,1) \end{cases} \qquad e)\ \begin{cases} u_1(3,-6) \\ u_2(-2,4) \end{cases} \qquad f)\ S = \{2x, 3y\}$$

$$g)\ S = \{x+y, 2x+3y\}$$

Gauss-Jordan

Hệ có nghiệm khi và chỉ khi $\rho(\overline{A}) = \rho(A)$

(định lí Kronecker-Capelli)

+ Vô nghiệm $\rho(\overline{A}) \neq \rho(A)$

+ Nghiệm duy nhất $\rho(\overline{A}) = \rho(A) = n$

+ Vô số nghiệm $\rho(\overline{A}) = \rho(A) < n$

Cramer

$$AX = B \longleftrightarrow x_j = \frac{|A_j|}{|A|}$$

$|A| \neq 0$ hệ phương trình tuyến tính là hệ Cramer

$|A| = 0$ và tất cả $|A_j| = 0$ hệ phương trình tuyến tính có vô số nghiệm

$|A| = 0$ và có ít nhất một $|A_j| \neq 0$ hệ phương trình tuyến tính vô nghiệm

Khi hệ có vô số nghiệm, ta sử dụng phương pháp Gauss-Jordan để giải

HẠNG CỦA HỆ VECTOR

$S = \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_n\} \subset V \quad \rightarrow \quad \rho(S) =$ Số vector ĐLTT cực đại trong S

$$\left.\begin{array}{l} S = \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_n\} \\ u_1 = \left(a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \dots, a_m^{(1)}\right) \\ \dots\dots \\ u_n = \left(a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \dots, a_m^{(n)}\right) \end{array}\right\} \rightarrow A = \begin{pmatrix} a_1^{(1)} & \dots & a_m^{(1)} \\ . & \dots & . \\ a_1^{(n)} & \dots & a_m^{(n)} \end{pmatrix} \rightarrow \rho(S) = \rho(A)$$

$*\rho(S) = N_{vector\ of\ S} \quad \rightarrow$ Hệ S là ĐLTT

$*\rho(S) < N_{vector\ of\ S} \quad \rightarrow$ Trong S có hệ con chứa $\rho(S)$ vector ĐLTT

Những hệ con chứa nhiều hơn $\rho(S)$ vector là PTTT

TẬP SINH – CƠ SỞ – SỐ CHIỀU

B là tập sinh của (hay sinh ra) V

(V=<B>, V=Span(B))

$$\begin{cases} B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}, u_i \in V, i = \overline{1,n} \\ \forall v \in V \Rightarrow v = \sum_{i=1}^{n} c_i u_i \end{cases}$$

B là cơ sở V

$$\begin{cases} B \text{ là tập sinh của V} \\ B \text{ là ĐLTT} \end{cases}$$

Số chiều của V

dim V = số vector của B

(một số không đổi)

$$B = \{(1,0,0);(0,1,0);(0,0,1)\} \subset R^3$$

$$\forall v(v_1, v_2, v_3) \in R^3$$

$$v = c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3$$

$$\to (v_1, v_2, v_3) = c_1(1,0,0) + c_2(0,1,0) + c_3(0,0,1)$$

$$\to c_1 = v_1, c_2 = v_2, c_3 = v_3 \to v = v_1u_1 + v_2u_2 + v_3u_3$$

B là tập sinh của R^3

$$c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3 = 0_V$$

$$\to c_1(1,0,0) + c_2(0,1,0) + c_3(0,0,1) = (0,0,0)$$

$\to c_1 = 0, c_2 = 0, c_3 = 0 \to$ B là ĐLTT

➡ B là cơ sở của R^3 $\quad \dim R^3 = 3$

$$R^n \to \begin{cases} B = \{u_1 = (1,0,\dots,0); u_2 = (0,1,\dots,0); \dots; u_n = (0,0,\dots,1)\} \\ \dim R^n = n \end{cases}$$

$$B=\left\{u_0=1,u_1=x,u_2=x^2,\ldots,u_n=x^n\right\}\subset P_n\left(x\right)$$

$$\forall f\left(x\right)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n\in P_n\left(x\right)$$

$$f\left(x\right)=c_0u_0+c_1u_1+c_2u_2+\ldots+c_nu_n$$

B là tập sinh của P_n

$$\to a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n=c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_nx^n$$

$$\to c_0=a_0,\ c_1=a_1,\ c_2=a_2,\ldots,c_n=a_n$$

$$c_0u_0+c_1u_1+c_2u_2+\ldots+c_nu_n=0_V\ \to c_0+c_1x+c_2x^3+\ldots+c_nx^n=0_V$$

$$\to c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_nx^n=0+0x+0x^2+\ldots+0x^n$$

B là ĐLTT

$$\to c_0=0,\ c_1=0,\ c_2=0,\ldots,\ c_n=0$$

B là cơ sở của $P_n\left(x\right)$

$$\dim P_n\left(x\right)=n+1$$

Tính chất của cơ sở & số chiều

$* \dim V = n$

là một số không đổi

$* B = \{u_1, \dots, u_n\}$ là cơ sở của V

$\forall v \in V, \quad v = c_1 u_1 + \dots + c_n u_n$

$\to c_1, \dots, c_n$ là duy nhất

$$* \begin{cases} N_S > \dim V \to \text{ S là PTTT} \\ N_S < \dim V \to \text{ S không thể là hệ sinh ra V} \\ N_S = \dim V \to \text{ S là một cơ sở của V khi và chỉ khi S là ĐLTT} \end{cases}$$

Gauss-Jordan

Hệ có nghiệm khi và chỉ khi $\rho(\bar{A}) = \rho(A)$

(định lí Kronecker-Capelli)

+ Vô nghiệm $\rho(\bar{A}) \neq \rho(A)$

+ Nghiệm duy nhất $\rho(\bar{A}) = \rho(A) = n$

+ Vô số nghiệm $\rho(\bar{A}) = \rho(A) < n$

Cramer

$$AX = B \longleftrightarrow x_j = \frac{|A_j|}{|A|}$$

$|A| \neq 0$ hệ phương trình tuyến tính là hệ Cramer

$|A| = 0$ và tất cả $|A_j| = 0$ hệ phương trình tuyến tính có vô số nghiệm

$|A| = 0$ và có ít nhất một $|A_j| \neq 0$ hệ phương trình tuyến tính vô nghiệm

Khi hệ có vô số nghiệm, ta sử dụng phương pháp Gauss-Jordan để giải

Tập sinh ?

$$A=\{(1,1,1);(1,2,1);(2,3,1)\}\subset R^3 \quad (Yes)$$

$$B=\{(1,1,1);(1,2,3);(3,2,1)\}\subset R^3 \quad (No)$$

$$C=\{x^2+x+1,2x^2+3x+1,x^2+2x\}\subset P_2(x) \quad (No)$$

D là tập sinh của V,
CMR D1 là tập sinh của V

$$D=\{x,y,z\} \xrightarrow{CMR} D_1=\{2x,x+y,z\}$$

Cơ sở ?

$$E=\{(1,2,1);(1,7,5)\}\subset R^3 \quad (No)$$

$$F=\{(1,1,2);(1,2,1);(3,2,2)\}\subset R^3 \quad (Yes)$$

$$G=\{x^2+x+1,2x^2+x+1,x^2+2x+1\} \quad (No)$$

H là cơ sở của V
CMR H1 là cơ sở của V

$$H=\{x,y,z\} \xrightarrow{CMR} H_1=\{2x+y+z,x+2y+z,x+y+z\}$$

$$I=\{(1,2,3);(1,1,1);(3,4,2);(7,2,1)\}\subset R^3 \quad (No)$$

CƠ SỞ – SỐ CHIỀU CỦA KGVT CON

Chứng minh W là KGVT con của R^4
Tìm cơ sơ và số chiều của W

$$W_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) | x_1 + x_2 = 2x_3, x_1 - x_2 = 2x_4\}$$

$$W_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) | x_1 + x_2 + x_3 = 0, x_1 - x_2 + x_4 = 0\}$$

$$W_3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) | x_1 + x_2 = 0, x_3 + x_4 = 0\}$$

$$W_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) | x_1 + x_2 = 2x_3, x_1 - x_2 = 2x_4\}$$
$$= \{(x_3 + x_4, x_3 - x_4, x_3, x_4)\}$$

$*x(0,0,0,0) \in W_1 \ \rightarrow \ W_1 \neq \varnothing$

$*W_1 \subset R^4$

$$\left.\begin{array}{l} *\forall x(x_3 + x_4, x_3 - x_4, x_3, x_4) \in W_1 \\ \forall y(y_3 + y_4, y_3 - y_4, y_3, y_4) \in W_1 \\ \forall \alpha \in R \end{array}\right\}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x + y = \begin{pmatrix} (x_3 + y_3) + (x_4 + y_4), (x_3 + y_3) - (x_4 + y_4), \\ x_3 + y_3, x_4 + y_4 \end{pmatrix} \in W_1 \\ \alpha x = (\alpha x_3 + \alpha x_4, \alpha x_3 - \alpha x_4, \alpha x_3, \alpha x_4) \in W_1 \end{cases}$$

W là KGVT con của R^4

$\forall x(x_3 + x_4, x_3 - x_4, x_3, x_4) \in W_1$

$\rightarrow x = x_3(1,1,1,0) + x_4(1,-1,0,1)$

$\rightarrow B = \{u_1 = (1,1,1,0), u_2 = (1,-1,0,1)\}$

$\rightarrow B$ là tập sinh của W_1

$c_1 u_1 + c_2 u_2 = 0_V$

$\rightarrow c_1(1,1,1,0) + c_2(1,-1,0,1) = (0,0,0,0)$

$\rightarrow c_1 = c_2 = 0$

$\rightarrow B$: là ĐLTT

Vậy cơ sở của W_1 là B và $\dim W_1 = 2$

TỌA ĐỘ – MA TRẬN CHUYỂN ĐỔI CƠ SỞ

$$\left.\begin{array}{l} B=\{u_1,\dots,u_n\} \text{ là cơ sở của } V \\ v\in V \rightarrow v=c_1u_1+\dots+c_nu_n \end{array}\right\}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \rightarrow (v)_B=\begin{pmatrix} c_1 & \dots & c_n \end{pmatrix} \\ \text{là vector tọa độ của v đối với cơ sở B} \\ \rightarrow [v]_B=\begin{pmatrix} c_1 \\ . \\ c_n \end{pmatrix} \\ \text{là ma trận tọa độ của v trong cơ sở B} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} B=\{u_1,\dots,u_n\},\ B'=\{u'_1,\dots,u'_n\} \\ \rightarrow \begin{cases} u'_1=c_{11}u_1+c_{21}u_2+\dots+c_{n1}u_n \\ \dots\dots \\ u'_n=c_{1n}u_1+c_{2n}u_2+\dots+c_{nn}u_n \end{cases} \end{array}\right\} \rightarrow P_{B\to B'}=\begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ . & \dots & . \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

là ma trận chuyển cơ sở từ B sang B’

$$[v]_B=P_{B\to B'}[v]_{B'}$$

$$v=c_1u_1+\dots+c_nu_n \rightarrow v=U.C$$

$$U=\begin{pmatrix} u_1 & . & u_n \\ \downarrow & . & \downarrow \\ & . & \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} c_1 \\ . \\ c_n \end{pmatrix},\ v=\begin{pmatrix} v_1 \\ . \\ v_n \end{pmatrix}$$

$$P_{B\to B'}=B^{-1}B'$$

Chú ý: đưa B và B’ về dạng ma trận cột

$$P_{B'\to B}=\left(P_{B\to B'}\right)^{-1}=\left(B^{-1}B'\right)^{-1}=B'^{-1}B$$

$$\left.\begin{array}{l} *B=\{u_1(0,1),u_2(1,1)\} \\ v(2,3) \end{array}\right\}$$

$$\to v=c_1u_1+c_2u_2$$

$$\begin{cases} 0c_1+1c_2=2 \\ c_1+c_2=3 \end{cases} \to \begin{cases} c_1=1 \\ c_2=2 \end{cases}$$

$$\to [v]_B=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$a)\ \begin{cases} B=\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,1)\} \\ [v]_B=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \to v=? \\ v=(3,1,-2)\to [v]_B=? \end{cases}$$

$$b)\ \begin{cases} B=\{x^2+x+1,x^2+2x+1,x^2+x+2\} \\ [p(x)]_B=\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \to p(x)=? \\ p(x)=x^2 \to [p(x)]_B=? \end{cases}$$

$$c)\ \left.\begin{array}{l} B=\{(1,0),(0,1)\} \\ B_1=\{(1,1),(2,-3)\} \end{array}\right\} \to P_{B\to B_1=?}$$

$$d)\ \left.\begin{array}{l} B=\{(1,1,1),(1,0,1),(1,1,0)\} \\ B'=\{(1,1,2),(1,1,2),(1,1,2)\} \end{array}\right\} \to \begin{cases} P_{B\to B'}=?,\ \ P_{B'\to B}=? \\ v=(2,1,3)\to [v]_B=?,\ [v]_{B'}=? \end{cases}$$

TÍNH CHẤT

$$\left.\begin{matrix}[x]_B = \begin{pmatrix} c_1 \\ . \\ c_n \end{pmatrix} \\ [y]_B = \begin{pmatrix} c'_1 \\ . \\ c'_n \end{pmatrix}\end{matrix}\right\} \rightarrow \begin{cases} x = y \rightarrow \begin{cases} c_1 = c'_1 \\ \dots \\ c_n = c'_n \end{cases} \\ [x+y]_B = \begin{pmatrix} c_1 + c'_1 \\ . \\ c_n + c'_n \end{pmatrix} \\ [\alpha x]_B = \begin{pmatrix} \alpha c_1 \\ . \\ \alpha c_n \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$P_{B\to B'} \rightarrow \exists \left(P_{B\to B'}\right)^{-1}$$

$$P_{B'\to B} = \left(P_{B\to B'}\right)^{-1}$$

$$P_{B\to B''} = P_{B\to B'}.P_{B'\to B''}$$

KHÔNG GIAN EUCLIDE

$\forall u, v, w \in V,\ \alpha \in R$

$\downarrow$

$\langle u, v \rangle = \alpha$

$\uparrow$

Tích vô hướng

1. $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$
2. $\langle u + w, v \rangle = \langle u, v \rangle + \langle w, v \rangle$
3. $\langle \beta u, v \rangle = \beta \langle v, u \rangle, \forall \beta \in R$
4. $\langle u, u \rangle \geq 0,\ \langle u, u \rangle = 0 \leftrightarrow u = 0_V$

Không gian hữu hạn chiều và tồn tại tích vô hướng → không gian Euclide

$$\left.\begin{matrix} u(x_1, .., x_n) \\ v(y_1, .., y_n) \end{matrix}\right\} \rightarrow \begin{cases} \langle u, v \rangle = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n \\ \|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle} = x_1^2 + \ldots + x_n^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \|u\| \geq 0 \\ \|u\| = 0 \leftrightarrow u = 0_V \\ \|\alpha u\| = |\alpha| \|u\| \\ \|\langle u, v \rangle\| \leq \|u\| \|v\| \\ \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \end{cases}$$

$$S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \leftarrow \begin{cases} \langle u_i, u_j \rangle = 0 \leftrightarrow u_i \perp u_j,\ \forall i, j\ \&\ i \neq j \\ \|u_i\| = 1, \forall i \end{cases}$$

Hệ vector trực chuẩn

Chứng minh và tính tích vô hướng

$$a)\ \begin{cases} u = (u_1, u_2),\ v = (v_1, v_2) \in R^2 \\ \langle u, v \rangle = u_1 v_1 + 2u_1 v_2 + 2u_2 v_1 + 10 u_2 v_2 \\ u = (1, -2),\ v = (-3, 5) \rightarrow \langle u, v \rangle = ? \end{cases}$$

Chứng minh hệ vector trực chuẩn

$$b)\ S = \left\{ u_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), u_2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right\}$$

CHUYỂN ĐỔI CƠ SỞ
(Gram-Schmidt)

$S = \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_n\}$

Cơ sở tổng quát

$\downarrow$

$S_\perp = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$

Cơ sở trực giao

$\downarrow$

$S_e = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$

Cơ sở trực chuẩn

$\leftarrow$

$$\begin{cases} v_1 = u_1 \\ v_2 = u_2 - \dfrac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 \\ v_3 = u_3 - \dfrac{\langle u_3, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 - \dfrac{\langle u_3, v_2 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} v_2 \\ \dots\dots \\ v_n = u_n - \dfrac{\langle u_n, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 - \dfrac{\langle u_n, v_2 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} v_2 - \dots - \dfrac{\langle u_n, v_{n-1} \rangle}{\langle v_{n-1}, v_{n-1} \rangle} v_{n-1} \end{cases}$$

$$e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}, e_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|}, e_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|}, \dots, e_n = \frac{v_n}{\|v_n\|}$$

Tìm cơ sở trực chuẩn của cơ sở sau

$S = \{(0,1,-1), (-1,2,0), (2,1,1)\}$

$\downarrow$

$S_\perp = ?$

$\downarrow$

$S_e = ?$

TÍNH CHẤT – ĐỊNH LÝ

- Nếu $S=\{u_1,u_2,...,u_n\}$ là trực giao không chứa vector không thì S là ĐLTT
- Nếu $S=\{u_1,u_2,...,u_n\}$ là trực chuẩn thì S là ĐLTT
- Nếu $S=\{u_1,u_2,...,u_n\}$ là trực giao thì $\left\|u_1^2+u_2^2+...u_n^2\right\|=\left\|u_1^2\right\|+\left\|u_2^2\right\|+...+\left\|u_n^2\right\|$
- Nếu B và E là 2 cơ sở trực chuẩn thì $\left(P_{B\to E}\right)^T=\left(P_{B\to E}\right)^{-1}=P_{E\to B}$
- Nếu $B=\{u_1,u_2,...,u_n\}$ là một cơ sở trực chuẩn của không gian Euclide V thì với $\forall v\left(v_1,v_2,...,v_n\right)\in V$ ta có: $v=\left\langle v,u_1\right\rangle u_1+\left\langle v,u_2\right\rangle u_2+...+\left\langle v,u_n\right\rangle u_n$
- Mọi không gian Euclide khác $\{0_V\}$ đều tồn tại ít nhất một cơ sở trực chuẩn

VÍ DỤ

<u>Bài 4.4</u> Tìm hạng của các hệ véctơ sau, từ đó suy ra tính độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính của hệ:

a) $u_1 = (1, 2, -1)$, $u_2 = (0, 1, 1)$, $u_3 = (2, 3, -3)$ trong $\mathbb{R}^3$.

b) $u_1 = (1, 2, -1)$, $u_2 = (1, 1, -2)$, $u_3 = (1, 1, 2)$ trong $\mathbb{R}^3$.

c) $u_1 = (1, 2, -1)$, $u_2 = (1, 1, -2)$, $u_3 = (0, 3, 3)$,

$u_4 = (2, 3, -3)$ trong $\mathbb{R}^3$.

d) $u_1 = (1, -1, 0, 0)$, $u_2 = (0, 1, -1, 0)$, $u_3 = (0, 0, 1, -1)$,

$u_4 = (-1, 0, 0, 1)$ trong $\mathbb{R}^4$.

Bài 4.5 Trong các tập véctơ sau , xét xem tập nào là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

a) $M = \{ u_1 =(1, 2, 1) , u_2 = (1, 7, 5)\}$

b) $M = \{ u_1 =(1, 2, 3), u_2 = (1, 1, 1) , u_3 =(3,4,2) ,$

$u_4 = (7, 2,1)\}$

c) $M = \{ u_1 =(1, 2, 3), u_2 =(2, 3, 4) , u_3 =(3, 4, 5) \}$

d) $M = \{ u_1 = (1, 1, 2) , u_2 =(1,2,1), u_3 =(3 , 2, 2) \}$

Bài 4.6 Trong mỗi trường hợp sau đây, hãy xác định tham số m để:

a) $M = \{ (0, 1, 1), (1, 2, 1), (1, 3, m)\}$ sinh ra $\mathbb{R}^3$.

b) $M = \{ (1, 2, -1), (0, 3, 1), (1, 5, 0), (3, 9, m)\}$ không sinh ra $\mathbb{R}^3$.

c) $M=\{(m,3,1), (0,m-1, 2), (0, 0, m+1)\}$ không là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

<u>Bài 4.7</u> Trong $\mathbb{R}^4$, cho các không gian véctơ con:

$W_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4: x_1 + x_2 = 2x_3, x_1 - x_2 = 2x_4\}$

$W_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4: x_1 = x_2 = x_3\}$

Tìm một cơ sở của W_1, một cơ sở của W_2.

Bài 4.8 Trong $\mathbb{R}^4$ cho tập

$$B = \{(1, 2, -1, -2), (2,3, 0, -1), (1, 2, 1, 4),(1,3, -1, 0)\}.$$

Chứng minh rằng B là cơ sở của $\mathbb{R}^4$ và tìm tọa độ của véctơ x = (7, 14, -1,2) đối với cơ sở này.

Bài 4.9 Cho $B = \{ u_1, u_2, u_3 \}$ là một cơ sở của không gian véctơ V trên $\mathbb{R}^3$ và đặt

$$E = \{v_1 = mu_1 + u_2 + 3u_3,\ v_2 = mu_1 - 2u_2 + u_3,\ v_3 = u_1 - u_2 + u_3 \}$$

a) Xác định m để E là cơ sở của V.

b) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ B sang E.

Bài 4.10 Trong $\mathbb{R}^3$ cho hai hệ véctơ

$$B = \{ u_1 =(1,2,3), u_2 =(1,1,2), u_3 =(1,1,1)\}$$

$$E = \{ v_1 = (2,1,-1) ,\ v_2 = (3,2,-5),\ v_3 =(1, -1, m)\}.$$

a) Chứng minh B là cơ sở của $\mathbb{R}^3$. Xác định m để E là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ B sang E.

Bài 4.11

Trong mỗi trường hợp sau, hãy tìm một cơ sở và số chiều của không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất:

a) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + \ \ x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 5x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$

d) $AX = 0$ với $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -3 \\ 2 & 3 & 1 & -6 \\ -2 & -5 & 1 & 6 \\ 3 & -1 & 7 & -9 \end{pmatrix}$

Bài 4.12 Trong không gian $\mathbb{R}^3$ xét tích vô hướng Euclide. Hãy áp dụng quá trình trực giao Gram-schmidt để biến cơ sở $\{u_1, u_2, u_3\}$ thành cơ sở trực chuẩn.

a) $u_1 = (1,1,1)$, $u_2 = (1,-1,0)$, $u_3 = (1,2,1)$.

b) $u_1 = (1,0,0)$, $u_2 = (3,1,-2)$, $u_3 = (0,1,1)$.

Bài 13: Tìm một sơ sở trực chuẩn của không gian con của $\mathbb{R}^3$

$$W = \left\{ \left(x_1, x_2, x_3 \right) \in \mathbb{R}^3 / 2x_1 + 3x_2 = 5x_3 \right\}$$