# Chương 1: Cơ sở logic

Nguyễn Minh Trí

Trường Đại học Công nghệ Thông tin

Ngày 4 tháng 3 năm 2023

## 1.1 Logic mệnh đề

Trong toán học, ta quan tâm đến những khẳng định có giá trị chân lí xác định (hoặc đúng hoặc sai, không thể vừa đúng vừa sai). Các khẳng định như vậy gọi là **mệnh đề**.

**Ví dụ 1.1**

1. Các khẳng định sau là mệnh đề:
   - "$1 + 2 = 4$" là mệnh đề sai.
   - "20 là số chẵn" là mệnh đề đúng.
2. Các khẳng định sau không phải là mệnh đề:
   - "Ngày mai trời mưa"
   - "$n$ là số nguyên tố"

- Kí hiệu các mệnh đề: $P, Q, R, \cdots$
- Mệnh đề $P$ đúng: $P$ có **giá trị chân lí** là 1 (hay **chân trị** là 1), viết là $P = 1$.
- Mệnh đề $P$ sai: $P$ có giá trị chân lí là 0 (hay chân trị là 0), viết là $P = 0$.

- **Mệnh đề phức hợp**: mệnh đề được xây dựng từ các mệnh đề khác nhờ liên kết bằng các liên từ (và, hoặc, khi và chỉ khi, nếu ... thì...) hoặc trạng từ "không".
- **Mệnh đề sơ cấp** (nguyên thủy): mệnh đề không thể xây dựng từ các mệnh đề khác thông qua liên từ hoặc trạng từ "không".

**Định nghĩa 1.2** Cho mệnh đề $P$, phủ định của $P$, kí hiệu $\neg P$ hoặc $\overline{P}$ (đọc là "không $P$" hoặc "phủ định của $P$").
Bảng chân trị của phép phủ định

| $P$ | $\overline{P}$ |
|---|---|
| 1 | 0 |
| 0 | 1 |

**Ví dụ 1.3**

- Cho mệnh đề $P: 2+3=5$. Khi đó $\overline{P}$ : ................
- Cho mệnh đề $Q: 2+3<5$. Khi đó $\overline{Q}$ : ................

**Định nghĩa 1.4** **Phép hội** của hai mệnh đề $P$ và $Q$, kí hiệu $P \wedge Q$ (đọc là "$P$ và $Q$") là mệnh đề đúng khi cả $P$ và $Q$ cùng đúng và sai trong các trường hợp còn lại.

| $P$ | $Q$ | $P \wedge Q$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 |

**Ví dụ 1.5**

1. Cho $P$ : "Số 5 là số nguyên tố." và $Q$ : "5 là số chẵn."
   Khi đó $P \wedge Q$ : "Số 5 là số nguyên tố và 5 là số chẵn."
2. Cho $Q$ : "$\pi > 3$" và $R$ : "$\pi < 4$".
   Khi đó $Q \wedge R$ : "$3 < \pi < 4$"

**Định nghĩa 1.6** **Phép tuyển** của hai mệnh đề $P$ và $Q$, kí hiệu $P \vee Q$ (đọc là "$P$ hoặc $Q$") là mệnh đề **sai** khi cả $P$ và $Q$ cùng sai và **đúng** trong các trường hợp còn lại.

| $P$ | $Q$ | $P \vee Q$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 |

### Ví dụ 1.7

1. Cho $P$ : "Số 5 là số nguyên tố." và $Q$ : "Số 5 là số chẵn."
   Khi đó $P \vee Q$ : "Số 5 là số nguyên tố hoặc 5 là số chẵn."
2. Cho $Q$ : "$\pi > 3$" và $R$ : "$\pi < 4$".
   Khi đó $Q \vee R$ : "$\pi > 3$ hoặc $\pi < 4$"

**Định nghĩa 1.8** Mệnh đề $P$ kéo theo $Q$, kí hiệu $P \rightarrow Q$, đọc là "Nếu $P$ thì $Q$", là mệnh đề sai khi $P$ đúng và $Q$ sai; và đúng trong các trường hợp còn lại.

| $P$ | $Q$ | $P \rightarrow Q$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 |

### Ví dụ 1.9

1. Cho $P$ : "Số 5 là số nguyên tố." và $Q$ : "Số 5 là số chẵn."
   Khi đó $P \rightarrow Q$: "Nếu 5 là số nguyên tố thì 5 là số chẵn."
2. Cho $Q$ : "$\pi > 3$" và $R$ : "$\pi < 4$".
   Khi đó $Q \rightarrow R$ : "Nếu $\pi > 3$ thì $\pi < 4$"

**Định nghĩa 1.10** Mệnh đề "nếu $P$ thì $Q$ và ngược lại", kí hiệu $P \leftrightarrow Q$, đọc là "$P$ khi và chỉ khi $Q$, $P$ nếu và chỉ nếu $Q$", là mệnh đề đúng khi $P, Q$ cùng đúng hoặc cùng sai; và sai trong các trường hợp còn lại.

| $P$ | $Q$ | $P \leftrightarrow Q$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 |

**Ví dụ 1.11**

1. Cho $P$ : "Số 5 là số nguyên tố." và $Q$ : "Số 5 là số chẵn."
   Khi đó $P \leftrightarrow Q$ : "Số 5 là số nguyên tố khi và chỉ khi 5 là số chẵn."
2. Cho $Q$ : "$\pi > 3$" và $R$ : "$\pi < 4$".
   Khi đó $Q \leftrightarrow R$ : "$\pi > 3$ nếu và chỉ nếu $\pi < 4$"

## 1.2 Biểu thức mệnh đề

**Định nghĩa 1.12** Biểu thức mệnh đề (biểu thức logic, dạng mệnh đề) được cấu tạo từ

- Các mệnh đề (hằng mệnh đề)
- Các biến mệnh đề $p, q, r, \ldots$ có thể lấy giá trị là các mệnh đề nào đó
- Các phép toán trên các hằng mệnh đề và các biến mệnh đề và các dấu ( ) để chỉ rõ thứ tự thực hiện các phép toán.

**Ví dụ 1.13** Cho một biểu thức mệnh đề

$$E(p, q, r) = (p \wedge q) \vee ((\overline{r}) \rightarrow P)$$

trong đó $P$ là hằng mệnh đề; $p, q, r$ là các biến mệnh đề.
Cho $E, F$ là hai biểu thức mệnh đề. Khi đó

$$\overline{E}, E \wedge F, E \vee F, E \rightarrow F, E \leftrightarrow F$$

cũng là các biểu thức mệnh đề.

Độ ưu tiên của các phép toán logic

- Mức 1: ()
- Mức 2: phép phủ định
- Mức 3: phép hội
- Mức 4: phép tuyển
- Mức 5: phép kéo theo
- Mức 6: phép tương đương

**Định nghĩa 1.14** **Bảng chân trị**: Bảng liệt kê chân trị của biểu thức mệnh đề theo các trường hợp về chân trị của tất cả các biến mệnh đề trong biểu thức mệnh đề hay theo các bộ giá trị của bộ biến mệnh đề.

**Ví dụ 1.15** Bảng chân trị của hai biểu thức mệnh đề $p \to q$ và $\overline{p} \vee q$

| $p$ | $q$ | $\overline{p}$ | $p \to q$ | $\overline{p} \vee q$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |

**Ví dụ 1.16** Bảng chân trị của biểu thức mệnh đề $p \wedge \overline{(q \vee r)}$

| $p$ | $q$ | $r$ | $q \vee r$ | $\overline{(q \vee r)}$ | $p \wedge \overline{(q \vee r)}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |

**Ví dụ 1.17** Bảng chân trị của biểu thức mệnh đề

a. $(p \wedge q) \vee \overline{(p \to p)}$

b. $(p \vee q) \to \overline{(p \wedge p)}$

c. $(p \to q) \wedge \overline{(p \wedge r)}$

**Giải.** ..............................................................

..............................................................

..............................................................

..............................................................

..............................................................

..............................................................

..............................................................

..............................................................

..............................................................

..............................................................

..............................................................

..............................................................

..............................................................

**Định nghĩa 1.18** Hai biểu thức mệnh đề $E$ và $F$ được gọi là **tương đương logic** nếu chúng có cùng bảng chân trị. Ký hiệu: $E \Leftrightarrow F$ (hay $E \equiv F$).

**Ví dụ 1.19** Chứng minh các tương đương logic sau bằng bảng chân trị

a. $p \to q \Leftrightarrow \overline{q} \to \overline{p}$.

b. $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

c. $p \to (q \vee r) \Leftrightarrow (p \to q) \vee (p \to r)$

**Giải.** a. Xét bảng chân trị

| $p$ | $q$ | $\overline{p}$ | $\overline{q}$ | $p \to q$ | $\overline{q} \to \overline{p}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |

..............................................................

..............................................................

..............................................................

..............................................................

..............................................................

..................................................................
..................................................................
..................................................................
..................................................................
..................................................................
..................................................................
..................................................................
..................................................................
..................................................................
..................................................................
..................................................................
..................................................................
..................................................................
..................................................................
..................................................................

- Một biểu thức mệnh đề được gọi là **hằng đúng** (hay **luật**) nếu nó luôn có chân trị bằng 1.
- Một biểu thức mệnh đề được gọi là **hằng sai** (mâu thuẫn) nếu nó luôn có chân trị bằng 0.

**Ví dụ 1.20**

a. Chứng minh $\overline{(p \vee q)} \leftrightarrow (\overline{p} \wedge \overline{q})$ là một hằng đúng.
b. Chứng minh $(p \wedge q) \wedge \overline{(p \vee q)}$ là một hằng sai.

**Giải.**

..................................................................
..................................................................
..................................................................
..................................................................
..................................................................
..................................................................
..................................................................
..................................................................

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**Theorem 1.21** *Hai biểu thức mệnh đề $E$ và $F$ tương đương logic khi và chỉ khi $E \leftrightarrow F$ là một hằng đúng.*

**Ví dụ 1.22** Chứng minh rằng

$$(\overline{p} \wedge q) \vee \overline{(p \vee q)} \Leftrightarrow \overline{p}$$

**Giải.** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**Định nghĩa 1.23** Biểu thức mệnh đề $F$ được gọi là **hệ quả logic** của biểu thức mệnh đề $E$ nếu $E \to F$ là hằng đúng. Kí hiệu: $E \Rightarrow F$.

**Ví dụ 1.24** Chứng minh hệ quả logic sau:

a. $\overline{(p \vee q)} \Rightarrow \overline{p}$.

b. $(p \to (q \to r)) \Rightarrow (p \to q) \to (p \to r)$

**Giải.** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

## Các luật logic thường gặp

| | |
|---|---|
| Phủ định 2 lần: | $\overline{\overline{p}} \Leftrightarrow p$ |
| DeMorgan: | $\overline{(p \wedge q)} \Leftrightarrow \overline{p} \vee \overline{q}$ |
| | $\overline{(p \vee q)} \Leftrightarrow \overline{p} \wedge \overline{q}$ |
| Giao hoán: | $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p; p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ |
| Kết hợp: | $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r); (p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$ |
| Phân phối: | $(p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r)$ |
| | $(p \vee q) \wedge r \Leftrightarrow (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$ |
| Lũy đẳng | $p \wedge p \Leftrightarrow p; p \vee p \Leftrightarrow p$ |
| | $p \to q \Leftrightarrow \overline{p} \vee q$ |
| | $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \to q) \wedge (q \to p)$ |
| | $p \wedge 0 \Leftrightarrow 0; \quad p \wedge 1 \Leftrightarrow p$ |
| | $p \vee 0 \Leftrightarrow p; \quad p \vee 1 \Leftrightarrow 1$ |
| | $p \wedge \overline{p} \Leftrightarrow 0; \quad p \vee \overline{p} \Leftrightarrow 1$ |
| | $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$ |
| | $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$ |

**Ví dụ 1.25** Chứng minh rằng

$$(\overline{p} \wedge q \wedge r) \vee (\overline{p} \wedge \overline{q} \wedge r) \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge r$$

**Giải.**

$$\begin{aligned}
&(\overline{p} \wedge q \wedge r) \vee (\overline{p} \wedge \overline{q} \wedge r) \vee (q \wedge r)\\
&\Leftrightarrow [(\overline{p} \wedge q) \vee (\overline{p} \wedge \overline{q})] \wedge r \vee (q \wedge r)\\
&\Leftrightarrow [\overline{p} \wedge (q \vee \overline{q})] \wedge r \vee (q \wedge r)\\
&\Leftrightarrow (\overline{p} \wedge 1) \wedge r \vee (q \wedge r)\\
&\Leftrightarrow \overline{p} \wedge r \vee (q \wedge r)\\
&\Leftrightarrow (\overline{p} \vee q) \wedge r\\
&\Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge r
\end{aligned}$$

**Ví dụ 1.26** Chứng minh rằng

a. $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \Leftrightarrow (p \vee q) \rightarrow r$

b. $(p \wedge q) \rightarrow r \Leftrightarrow (\overline{p} \vee \overline{q}) \vee r$

c. $(p \vee q) \wedge (\overline{p} \wedge (\overline{p} \wedge q)) \Leftrightarrow \overline{p} \wedge q$

**Giải.** ..................................................................

..................................................................

..................................................................

..................................................................

..................................................................

..................................................................

..................................................................

..................................................................

..................................................................

..................................................................

..................................................................

..................................................................

..................................................................

## 1.3 Qui tắc suy diễn

**Định nghĩa 1.27** Nếu biểu thức mệnh đề

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \to q$$

là một hằng đúng thì ta gọi nó là một quy tắc suy diễn.

- Các biểu thức mệnh đề $p_1, p_2, \ldots, p_n$: **giả thiết** (hay **tiền đề**)
- Biểu thức mệnh đề $q$: **kết luận**.

**Ví dụ 1.28** Giả sử ta có các mệnh đề:

- $p_1$: Nếu An chăm học thì An đạt môn CTRR.
- $p_2$: Nếu An không đi chơi thì An chăm học.
- $p_3$: An trượt môn CTRR.

Dùng các qui tắc suy diễn để suy ra kết luận sau là đúng:

$$q: \text{An đi chơi.}$$

**Giải.**

- Đặt các mệnh đề
  $p$ :"An chăm học"; $q$ :"An hay đi chơi"; $r$ :"An đạt môn TRR".

- Các mệnh đề trở thành:
  $p_1 = p \to r; \quad p_2 = \overline{q} \to p; \quad p_3 = \overline{r}$
- Chứng minh biểu thức mệnh đề sau đây là một hằng đúng:

$$[(p \to r) \wedge (\overline{q} \to p) \wedge \overline{r}] \to q$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**Ví dụ 1.29** Kiểm tra tính đúng đắn của quy tắc suy luận sau: "Nếu bạn là một lập trình viên thì bạn thông minh. Bạn thông minh và giàu có. Vì vậy, nếu bạn giàu thì bạn là một lập trình viên."

**Giải.** ...........................................................................

## Biểu diễn quy tắc suy diễn

- Cách 1. Biểu thức hằng đúng

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \rightarrow q \Leftrightarrow 1$$

- Cách 2. Dòng suy diễn

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \Rightarrow q$$

- Cách 3. Mô hình suy diễn

$$\begin{array}{ll} & p_1 \\ & p_2 \\ & \vdots \\ & p_n \\ \hline \therefore & q \end{array}$$

## Các quy tắc suy diễn

### Qui tắc khẳng định (Modus Pones)

Qui tắc này được thể hiện bởi hằng đúng

$$[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$$

hoặc dưới dạng sơ đồ

$$\begin{array}{ll} & p \rightarrow q \\ & p \\ \hline \therefore & q \end{array}$$

**Ví dụ 1.30**

- Nếu An chăm học thì An đạt môn CTRR
- An chăm học.

**Suy ra:** An đạt môn CTRR.

## Các quy tắc suy diễn

### Tam đoạn luận (Syllogism)

Biểu thức hằng đúng

$$[(p \to q) \land (q \to r)] \to (p \to r)$$

hoặc dạng sơ đồ

$$\begin{array}{rl} & p \to q \\ & q \to r \\ \hline \therefore & p \to r \end{array}$$

**Ví dụ 1.31**

- Nếu hôm nay trời mưa thì Chi không đi cắm trại.
- Nếu hôm nay Chi không đi cắm trại thì Chi ở nhà xem phim.

**Suy ra:** Nếu hôm nay trời mưa thì Chi ở nhà xem phim.

## Các quy tắc suy diễn

### Qui tắc phủ định (Modus Tollens)

Biểu thức hằng đúng

$$[(p \to q) \land \neg q] \to \overline{p}$$

hoặc dạng sơ đồ

$$\begin{array}{rl} & p \to q \\ & \overline{q} \\ \hline \therefore & \overline{p} \end{array}$$

**Ví dụ 1.32**

- Nếu $n$ chia hết cho 2 thì $n$ có chữ số tận cùng là chữ số chẵn.
- $n$ có chữ số tận cùng là chữ số lẻ.

**Suy ra:** $n$ không chia hết cho 2.

## Qui tắc tam đoạn luận rời

Biểu thức hằng đúng

$$[(p \vee q) \wedge \overline{p}] \to q$$

hoặc dạng sơ đồ

$$\begin{array}{ll} & p \vee q \\ & \overline{p} \\ \hline \therefore & q \end{array}$$

**Ví dụ 1.33**

- An đi xem phim hoặc An lên thư viện đọc sách.
- An không đi xem phim.

**Suy ra:** An lên thư viện đọc sách.

## Qui tắc cộng

Biểu thức hằng đúng

$$p \to (p \vee q)$$

hoặc dạng sơ đồ

$$\begin{array}{ll} & p \\ \hline \therefore & p \vee q \end{array}$$

**Ví dụ 1.34**

- An đang làm bài tập.

**Suy ra:** An đang làm bài tập hoặc An đang chơi game.

## Qui tắc đơn giản

Biểu thức hằng đúng

$$p \wedge q \to p$$

hoặc dạng sơ đồ

$$\begin{array}{ll} & p \wedge q \\ \hline \therefore & p \end{array}$$

### Ví dụ 1.35

- An đang làm bài tập và An đang nghe nhạc.

**Suy ra:** An đang làm bài tập.

## Qui tắc nối

Qui tắc này được thể hiện bởi hằng đúng

$$(p) \wedge (q) \to (p \wedge q)$$

hoặc dưới dạng sơ đồ

$$\begin{array}{ll} & p \\ & q \\ \hline \therefore & p \wedge q \end{array}$$

### Ví dụ 1.36

- An đang làm bài tập.
- An đang nghe nhạc.

**Suy ra:** An đang làm bài tập và An đang nghe nhạc.

## Qui tắc mâu thuẫn

Ta có tương đương logic

$$[(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \to q] \Leftrightarrow [(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n \wedge \overline{q}) \to 0]$$

Nếu ta thêm $\overline{q}$ vào các tiền đề cho trước mà dẫn đến một mâu thuẫn thì $q$ là hệ quả logic của các tiền đề cho trước.
**Ví dụ 1.37** Sử dụng quy tắc mâu thuẫn để chứng minh

$$\begin{array}{ll} & p \to r \\ & \overline{p} \to q \\ & q \to s \\ \hline \therefore & \overline{r} \to s \end{array}$$

**Giải.** Phủ định của kết luận tương đương với:

$$\overline{\overline{r} \to s} \Leftrightarrow \overline{r \vee s} \Leftrightarrow \overline{r} \wedge \overline{s}$$

Thêm $\overline{r} \wedge \overline{s}$ vào các tiền đề và chứng minh suy luận sau là đúng

$$\begin{array}{ll} & p \to r \\ & \overline{p} \to q \\ & q \to s \\ & \overline{r} \wedge \overline{s} \\ \hline \therefore & 0 \end{array}$$

Ta có các bước sau đây:

$$\begin{array}{lll} & \overline{p} \to q & \\ & q \to s & \\ \hline \therefore & \overline{p} \to s & \text{(Tam đoạn luận)} \\ & \overline{s} & \\ \hline \therefore & \overline{\overline{p}} & \text{(Phủ định)} \\ & p \to r & \\ \hline \therefore & r & \text{(Khẳng định)} \\ & \overline{r} & \\ \hline \therefore & 0 & \text{(đúng)} \end{array}$$

## Qui tắc chứng minh theo từng trường hợp

Dạng biểu thức hằng đúng

$$[(p \to r) \wedge (q \to r)] \to [(p \vee q) \to r]$$

Ý nghĩa: Nếu một giả thiết có thể tách thành 2 trường hợp $p$ đúng hoặc $q$ đúng, và ta chứng minh được $p \to r$ đúng và $q \to r$ đúng. Khi đó $r$ cũng đúng với cả 2 trường hợp.

**Ví dụ 1.38** Chứng minh tích 3 số tự nhiên liên tiếp chia hết cho 3.

## Phản ví dụ

- Để chứng minh một phép suy luận là không đúng, ta chỉ cần tìm một phản ví dụ.
- Để tìm một phản ví dụ, ta chỉ cần tìm một trường hợp về chân trị của các biến mệnh đề sao cho các **tiền đề** trong phép suy luận là **đúng** nhưng **kết luận là sai**.

**Ví dụ 1.39** Hãy tìm phản ví dụ cho suy luận dưới đây:
Ông Minh nói rằng nếu không được tăng lương thì ông ta sẽ nghỉ việc. Mặt khác, nếu ông ấy nghỉ việc và vợ ông ấy bị mất việc thì phải bán xe. Biết rằng nếu vợ ông Minh hay đi làm trễ thì trước sau gì cũng sẽ bị mất việc và cuối cùng ông Minh đã được tăng lương. Suy ra nếu ông Minh không bán xe thì vợ ông ta đã không đi làm trễ.

**Giải.** Đặt các biến mệnh đề:

- $p$ : Ông Minh được tăng lương.
- $q$ : Ông Minh xin nghỉ việc.
- $r$ : Vợ ông Minh bị mất việc.
- $s$ : Ông Minh bán xe.
- $t$ : Vợ ông Minh đi làm trễ.

Mô hình suy diễn

$$\begin{array}{ll} & \overline{p} \to q \\ & (q \wedge r) \to s \\ & t \to r \\ & p \\ \hline \therefore & \overline{s} \to \overline{t} \end{array}$$

Tìm phản ví dụ sau cho các tiền đề là đúng và kết luận sai

$$\begin{cases} \overline{p} \to q = 1 \\ (q \wedge r) \to s = 1 \\ t \to r = 1 \\ p = 1 \\ \overline{s} \to \overline{t} = 0 \end{cases} \quad \text{do đó} \quad \begin{cases} s = 0 \\ t = 1 \\ p = 1 \\ r = 1 \\ q = 0 \end{cases}$$

**Chú ý:** Nếu hệ trên vô nghiệm thì suy luận trên là đúng. Nếu hệ trên có nghiệm thì suy luận trên là sai.

**Ví dụ 1.40** Kiểm tra tính đúng đắn của các mô hình suy diễn sau

a.
$$\begin{array}{ll} & p \to \overline{q} \\ & p \wedge r \\ & q \vee r \\ \hline \therefore & r \end{array}$$

b.
$$\begin{array}{ll} & p \vee q \\ & r \to \overline{q} \\ & \overline{p} \\ & (\overline{r} \wedge q) \to s \\ \hline \therefore & s \end{array}$$

c.
$$\begin{array}{ll} & \overline{q} \to \overline{p} \\ & \overline{r} \to \overline{s} \\ & \overline{p \wedge t} \to \overline{r \wedge q} \\ & t \to \overline{p} \\ \hline \therefore & \overline{s} \vee \overline{p} \end{array}$$

**Giải.** ..........................................................

..........................................................

..........................................................

..........................................................

..........................................................

..........................................................

..........................................................

..........................................................

..........................................................

..........................................................

..........................................................

..........................................................

..........................................................

..........................................................

...............................................................................

...............................................................................

...............................................................................

...............................................................................

...............................................................................

...............................................................................

...............................................................................

...............................................................................

...............................................................................

...............................................................................

...............................................................................

...............................................................................

...............................................................................

...............................................................................

...............................................................................

**Ví dụ 1.41** Kiểm tra tính đúng đắn của lập luận sau: Nếu ngày mai tôi đi làm thì tôi phải thức dậy trước 7 giờ sáng. Nếu tôi đi xem phim thì tôi sẽ về nhà trễ. Nếu tôi về nhà trễ và thức dậy trước 7 giờ sáng thì tôi sẽ không ngủ ngon. Tôi muốn ngủ ngon. Vì vậy, ngày mai tôi sẽ không đi làm hoặc tôi sẽ không đi xem phim.

**Giải.** Đặt các biến mệnh đề

- $p$ : ngày mai tôi sẽ đi làm
- $q$ : tôi phải thức dậy trước 7 giờ sáng
- $r$ : tôi đi xem phim
- $s$ : tôi về nhà trễ
- $t$ : tôi ngủ ngon

Mô hình suy diễn

$$\begin{array}{ll} & p \to q \\ & r \to s \\ & (s \wedge q) \to \overline{t} \\ & t \\ \hline \therefore & \overline{p} \vee \overline{r} \end{array}$$

Giả sử $p \to q, r \to s, (s \wedge q) \to \overline{t}, t$ đều đúng và $\overline{p} \vee \overline{r}$ sai

$$\begin{cases} p \to q = 1 \\ r \to s = 1 \\ (s \wedge q) \to \overline{t} = 1 \\ t = 1 \\ \overline{p} \vee \overline{r} = 0 \end{cases} \text{hay} \begin{cases} p \to q = 1 \\ r \to s = 1 \\ (s \wedge q) \to \overline{t} = 1 \\ t = 1 \\ \overline{p} = 0 \\ \overline{r} = 0 \end{cases} \text{hay} \begin{cases} q = 1 \\ s = 1 \\ (s \wedge q) \to \overline{t} = 1 \text{ (mâu thuẫn} \\ t = 1 \\ p = 1 \\ r = 1 \end{cases}$$

Như vậy, suy luận đã cho là đúng.

**Chú ý:** Ta có thể dùng bảng giá trị chân lý để kiểm tra tính đúng đắn của suy luận bên trên.

**Ví dụ 1.42** Kiểm tra tính đúng đắn của suy luận sau: Tôi không là một lập trình viên. Nếu tôi biết thiết kế web thì tôi là một lập trình viên. Nếu tôi giàu thì tôi biết thiết kế web. Vì vậy, tôi không giàu.

**Giải.** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

## 1.4 Vị từ và lượng từ

**Định nghĩa 1.43** Cho $p(x)$ là một phát biểu liên quan đến biến $x$ và một tập $D$. Ta nói $p(x)$ là một **vị từ** nếu với mỗi $a \in D$, ta có $p(a)$ là một mệnh đề.
Tổng quát: Một vị từ $p(x_1, x_2, \ldots)$ là một phát biểu liên quan đến các biến $x_i \in D_i$ nếu với mỗi $a_i \in D_i$, ta có $p(a_1, a_2, \ldots)$ là một mệnh đề.

**Ví dụ 1.44**

1. $p(n)$ : "$n$ là một số nguyên tố" ($n$ là số tự nhiên).
2. $p(x)$ : "$x^2 + 2x^2 + 1 < 0$" ($x$ là số thực).
3. $p(x, y)$ : "$x + y < 0$" ($x, y$ là các số thực).

**Định nghĩa 1.45** Cho các vị từ $p(x), q(x)$ theo biến $x \in A$. Ta có các phép toán:

| | |
|---|---|
| Phủ định: | $\overline{p(x)}$ |
| Phép hội: | $p(x) \wedge q(x)$ |
| Phép tuyển: | $p(x) \vee q(x)$ |
| Phép kéo theo: | $p(x) \rightarrow q(x)$ |
| Phép kéo theo 2 chiều: | $p(x) \leftrightarrow q(x)$ |

**Ví dụ 1.46** Cho các vị từ

- $p(x)$ : "$x^2$ là một số hữu tỉ"
- $q(x)$ : "$x$ là một số hữu tỉ"

Khi đó

- $\overline{p(x)}$ : "$x^2$ **không** là một số hữu tỉ"
- $p(x) \wedge q(x)$ : "$x^2$ là một số hữu tỉ **và** $x$ là một số hữu tỉ"
- $p(x) \vee q(x)$ : "$x^2$ là một số hữu tỉ **hoặc** $x$ là một số hữu tỉ"
- $p(x) \rightarrow q(x)$ : "**Nếu** $x^2$ là một số hữu tỉ **thì** $x$ là một số hữu tỉ"
- $p(x) \leftrightarrow q(x)$ : "$x^2$ là một số hữu tỉ **khi và chỉ khi** $x$ là một số hữu tỉ"

## Lượng từ

Cho một vị từ $p(x)$ với $x \in A$.

- TH1: Với mọi $a \in A$, mệnh đề $p(a)$ là luôn đúng.
- TH2: Có một vài $a \in A$ sao cho mệnh đề $p(a)$ là đúng với.

Nếu TH1 xảy ra thì ta có mệnh đề "với mọi $x \in A, p(x)$" là đúng. Kí hiệu

$$\forall x \in x, p(x)$$

Nếu TH2 xảy ra thì ta có mệnh đề "tồn tại $x \in A, p(x)$" là đúng. Kí hiệu

$$\exists x \in A, p(x)$$

- Các mệnh đề "$\forall x \in A, p(x)$" và "$\exists x \in A, p(x)$" được gọi là các **lượng từ hóa** của vị từ $p(x)$.
- Kí hiệu $\forall$ : **lượng từ phổ dụng**;
- Kí hiệu $\exists$ : **lượng từ tồn tại**.

**Ví dụ 1.47** Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

- $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 1 > 0$ ...........
- $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 4x + 5 \neq 0$ ...........
- $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 3x - 4 = 0$ ...........
- $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 < 0$ ...........

Xét một vị từ theo 2 biến $p(x, y)$ với $x \in A, y \in B$. Ta có 4 mệnh đề:

$$\forall x \in A, \forall y \in B, p(x, y)$$

$$\exists x \in A, \forall y \in B, p(x, y)$$

$$\forall x \in A, \exists y \in B, p(x, y)$$

$$\exists x \in A, \exists y \in B, p(x, y)$$

**Ví dụ 1.48** Cho vị từ $p(x, y) : x + y = 1$ với $x, y \in \mathbb{R}$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề

a. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y = 1$

b. $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x + y = 1$

**Giải.** a. Cho $x$ là một số thực bất kì, ta có thể lấy $y = 1 - x$, khi đó $x + y = 1$. Do đó mệnh đề đã cho là đúng.
b. Giả sử mệnh đề đã cho là đúng, tức là có một số $y_0$ nào đó sao cho $x + y_0 = 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Vì mệnh đề trên đúng với mọi $x$ nên mệnh đề vẫn đúng khi cho $x = 0$ hoặc $x = 1$, tức là $0 + y_0 = 1$ và $1 + y_0 = 1$. Điều này suy ra $y_0 = 1$ và $y_0 = 0$, đây là một điều vô lí. Do đó, mệnh đề đã cho là sai.

**Theorem 1.49** *Cho $p(x, y)$ là một vị từ theo hai biến $x, y$. Các mệnh đề sau là đúng*

$$[\forall x \in A, \forall y \in B, p(x, y)] \Leftrightarrow [\forall y \in B, \forall x \in A, p(x, y)]$$

$$[\exists x \in A, \exists y \in B, p(x, y)] \Leftrightarrow [\exists y \in B, \exists x \in A, p(x, y)]$$

$$[\exists x \in A, \forall y \in B, p(x, y)] \Rightarrow [\forall y \in B, \exists x \in A, p(x, y)]$$

## Phủ định mệnh đề lượng từ hóa

Phủ định của mệnh đề lượng từ hóa vị từ $p(x, y, \ldots)$ có được bằng các thay $\forall$ bằng $\exists$, thay $\exists$ bằng $\forall$ và vị từ $p(x, y, \ldots)$ thành $\overline{p(x, y, \ldots)}$.

$$\overline{\forall x \in A, p(x)} \Leftrightarrow \exists x \in A, \overline{p(x)}$$

$$\overline{\exists x \in A, p(x)} \Leftrightarrow \forall x \in A, \overline{p(x)}$$

$$\overline{\forall x \in A, \forall y \in B, p(x, y)} \Leftrightarrow \exists x \in A, \exists y \in B, \overline{p(x, y)}$$

$$\overline{\forall x \in A, \exists y \in B, p(x, y)} \Leftrightarrow \exists x \in A, \forall y \in B, \overline{p(x, y)}$$

$$\overline{\exists x \in A, \forall y \in B, p(x, y)} \Leftrightarrow \forall x \in A, \exists y \in B, \overline{p(x, y)}$$

$$\overline{\exists x \in A, \exists y \in B, p(x, y)} \Leftrightarrow \forall x \in A, \forall y \in B, \overline{p(x, y)}$$

**Ví dụ 1.50** Phủ định mệnh đề $$A = \text{"}\forall x \in \mathbb{R}, 4x + 2 < 0\text{"}$$
là $$\overline{A} = \text{"}\exists x \in R, 4x + 2 \geq 0\text{"}$$

**Ví dụ 1.51** Cho mệnh đề

$$B = \text{"}\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, (x^2 = y^2) \to (x = y)\text{"}$$

Hãy cho biết chân trị của mệnh đề $B$.
**Giải.** Với mọi $x \in \mathbb{R}$, chọn $y = x$, khi đó

$$\begin{aligned} & (x^2 = y^2) \to (x = y) \\ \Leftrightarrow & (x^2 = x^2) \to (x = x) \\ \Leftrightarrow & 1 \to 1 \\ \Leftrightarrow & 1 \end{aligned}$$

Như vậy $B \equiv 1$ (hay $B$ đúng).
**Ví dụ 1.52** Viết dạng phủ định của mệnh đề $A$ và cho biết chân trị của dạng phủ định đó

a. $A = \text{"}\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, (x^2 = y^2) \to (x = y)\text{"}$
b. $A = \text{"}\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, (xy < 0) \to (x + y = 1)\text{"}$

**Giải.** a. Dạng phủ định

$$\begin{aligned} \overline{A} &= \overline{\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, (x^2 = y^2) \to (x = y)} \\ &= \exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \overline{(x^2 = y^2) \to (x = y)} \\ &= \exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (x^2 = y^2) \to \overline{(x = y)} \\ &= \exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (x^2 = y^2) \to (x \neq y) \end{aligned}$$

Lấy $x \in \mathbb{R}$, chọn $y = x$, khi đó

$$\begin{aligned} & (x^2 = y^2) \to (x \neq y) \\ \Leftrightarrow & (x^2 = x^2) \to (x \neq x) \\ \Leftrightarrow & 1 \to 0 \\ \Leftrightarrow & 0 \end{aligned}$$

Vậy $\overline{A} \equiv 0$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

## 1.5 Nguyên lí qui nạp

Cho $n_0 \in \mathbb{N}$ và $p(n)$ là một vị từ theo biến $n \in \mathbb{N}$. Để chứng minh tính đúng đắn của mệnh đề

$$\forall n \geq n_0, p(n)$$

ta có thể dùng các dạng nguyên lý quy nạp như sau:

### Nguyên lý quy nạp yếu (giả thiết đúng với $k$)

Mô hình suy diễn

$$\begin{array}{ll} \text{(cơ sở)} & p(n_0) \\ \text{(giả thiết quy nạp)} & \forall k \geq n_0, p(k) \to p(k+1) \\ \hline & \therefore \forall n \geq n_0, p(n) \end{array}$$

## Nguyên lý quy nạp mạnh (giả thiết đúng đến $k$)

Mô hình suy diễn

$$
\begin{array}{ll}
\text{(cơ sở)} & p(n_0) \\
\text{(giả thiết quy nạp)} & \forall k \geq n_0, (p(n_0) \wedge p(n_0+1) \wedge \ldots \wedge p(k)) \to p(k+1) \\
\hline
 & \therefore \forall n \geq n_0, p(n)
\end{array}
$$

**Ví dụ 1.53** Chứng minh $6^n + 7^n - 1 \,\vdots\, 3$ với mọi số $n \in \mathbb{N}$.

**Giải.** ...........................................................................

## BÀI TẬP

**Bài 1.1** Lập bảng chân trị của các biểu thức mệnh đề sau:

a. $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$ b. $(p \rightarrow q) \vee \overline{q}$ c. $\overline{p} \leftrightarrow (p \wedge q)$

d. $(p \vee r) \rightarrow (r \vee \overline{p})$ e. $\overline{\overline{p} \wedge \overline{q}}$

**Bài 1.2** Chứng minh các sự tương đương logic

a. $(p \vee q) \wedge \overline{\overline{p} \wedge q} \wedge \overline{p \wedge \overline{q}} \Leftrightarrow p \wedge q$ b. $[(p \vee q) \wedge (p \vee \overline{q})] \vee q \Leftrightarrow p \vee q$

c. $\overline{p \vee q} \vee [(\overline{p} \wedge q) \vee \overline{q}] \Leftrightarrow \overline{p \wedge q}$ d. $(p \rightarrow q) \wedge [\overline{q} \wedge (r \vee \overline{q})] \Leftrightarrow \overline{q \vee p}$

e. $(p \wedge q\overline{\wedge r}) \Leftrightarrow (\overline{p \rightarrow q}) \vee (p \wedge \overline{r})$ f. $(p \rightarrow q) \wedge \overline{q} \wedge (q \rightarrow r) \Leftrightarrow (\overline{q} \wedge \overline{p})$

g. $(p \wedge \overline{q \wedge r}) \Leftrightarrow \overline{p \rightarrow q} \vee (p \wedge \overline{r})$ h. $(\overline{p} \vee q) \wedge (p \rightarrow r) \Leftrightarrow p \rightarrow (q \wedge r)$

i. $(p \rightarrow q) \wedge \overline{q} \wedge (q \rightarrow r) \Leftrightarrow \overline{q} \wedge \overline{p}$ j. $(p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow (p \rightarrow \overline{q}) \wedge \overline{r}$

k. $[(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow q) \Leftrightarrow \overline{p} \vee q \vee \overline{r}$

**Bài 1.3** Dùng các luật logic để kiểm tra các biểu thức mệnh đề sau là hằng đúng

a. $[(p \vee q) \rightarrow r] \leftrightarrow [\overline{r} \rightarrow \overline{p \vee q}]$ b. $(p \rightarrow q) \wedge \overline{q} \rightarrow \overline{p}$

c. $[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \wedge q \rightarrow r)$ d. $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \vee q \rightarrow r)$

e. $\overline{(\overline{p} \vee q) \wedge \overline{q}} \vee \overline{p}$ f. $\overline{(\overline{p} \vee q) \wedge (\overline{q} \vee r)} \vee \overline{p} \vee r$

g. $[(p \wedge q) \rightarrow r] \leftrightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$ h. $[(p \rightarrow \overline{q}) \wedge (\overline{q} \rightarrow r) \wedge p] \rightarrow (\overline{r} \rightarrow s)$

**Bài 1.4** Chứng minh suy luận sau đây là đúng:

a. $\begin{array}{l} p \\ p \rightarrow q \\ s \vee r \\ r \rightarrow \overline{q} \\ \hline \therefore s \vee t \end{array}$ b. $\begin{array}{l} (\overline{p} \vee q) \rightarrow r \\ r \rightarrow (s \vee t) \\ \overline{s} \\ \overline{u} \\ \overline{u} \rightarrow \overline{t} \\ \hline \therefore p \end{array}$ c. $\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \overline{r} \vee s \\ p \vee r \\ \hline \therefore \overline{q} \rightarrow s \end{array}$

d. $\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \overline{r} \\ \overline{q} \\ \hline \therefore \overline{p \vee r} \end{array}$ e. $\begin{array}{l} (p \rightarrow q) \rightarrow r \\ r \rightarrow s \\ \overline{s} \\ \hline \therefore p \rightarrow \overline{q} \end{array}$ f. $\begin{array}{l} p \vee q \\ p \rightarrow r \\ \overline{r} \\ \hline \therefore q \end{array}$

h. $\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ r \rightarrow s \\ (s \wedge q) \rightarrow (p \wedge t) \\ t \rightarrow \overline{p} \\ \hline \therefore \overline{p} \vee \overline{r} \end{array}$ i. $\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ r \rightarrow s \\ (s \vee q) \rightarrow t \\ \overline{t} \\ \hline \therefore \overline{p} \wedge \overline{r} \end{array}$ j. $\begin{array}{l} p \rightarrow (q \wedge r) \\ p \\ q \\ r \rightarrow (s \vee t) \\ \overline{s} \\ \hline \therefore t \end{array}$

**Bài 1.5** Suy luận sau đúng hay sai: Nếu Rita thông minh và chăm học thì cô ấy sẽ có công việc tốt. Nếu cô ấy có công việc tốt thì cô ấy sẽ hạnh phúc. Do đó, nếu Rita không hạnh phúc thì cô ấy không chăm học hoặc cô ấy không thông minh.

**Bài 1.6** Suy luận sau đúng hay sai. Nếu bò sữa nhiều và sữa tốt thì sẽ được cho ăn thêm nhiều cỏ non. Bò ăn thêm nhiều cỏ non thì sẽ mập lên. Nhưng thực tế bò không mập lên. Kết luận bò không cho nhiều sữa hoặc không cho sữa tốt.

**Bài 1.7** Suy luận sau đúng hay sai: Nếu chương trình hiệu quả, nó sẽ thực thi nhanh chóng. Chương trình có hiệu quả hoặc có lỗi. Tuy nhiên, các chương trình không thực hiện nhanh chóng. Vì vậy, nó có một lỗi.

**Bài 1.8** Suy luận sau đúng hay sai: Nếu Chi chăm học thì cô ấy sẽ thi đậu. Nếu Chi không chơi game nhiều thì cô ấy sẽ học. Chi không thi đậu. Do đó, chi chơi gamen nhiều.

**Bài 1.9** Suy luận sau đúng hay sai: Shelly học ngành trí tuệ nhân tạo hoặc ngành khoa học máy tính. Nếu Shelly học khoa học máy tính thì cô ấy phải học môn Cấu trúc rời rạc. Do đó, Shelly học ngành trí tuệ nhân tạo hoặc cô ấy phải học môn Cấu trúc rời rạc.

**Bài 1.10**
Hãy viết dạng phủ định của mệnh đề $A$ và cho biết chân trị của dạng phủ định đó:
a. $A = "\forall x \in \mathbb{R}, (x^2 < 9) \to (0 < x < 3)"$
b. $A = "\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, xy = x"$
c. $A = "\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, (xy < 0) \to (x + y = 1)"$
d. $A = "\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (x^2y^2 = 1) \vee (xy = 1)"$
e. $A = "\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, (x + 2y = 1) \vee (2x - y = 1)"$
f. $A = "\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (x + 2y = 1) \to (2x - y = 1)"$
g. $A = "\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, (x^2 = y^2) \to (x = y)"$
h. $A = "\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, (x^2 = y) \to (x = y)"$
**Bài 1.11**
**Bài 1.12** Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n$, ta có
a. $7^n - 1$ chia hết cho 6.
b. $n^3 + 2n$ chia hết cho 3.
c. $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
d. $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ chia hết cho 7.
e. $n^2 < 2^n$ với mọi $n \geq 5$
f. $2n + 1 < n^3$ với mọi $n \geq 2$
g. $n! \geq 2^n$ với mọi $n \geq 4$

# Index


biểu thức mệnh đề, 9
bảng chân trị, 10
chân trị, 3
dạng mệnh đề, 9
giá trị chân lí, 3
giả thiết, 22
hằng sai, 15
hằng đúng, 15
hệ quả logic, 17
kết luận, 22
lượng từ hóa, 46
lượng từ phổ dụng, 46
lượng từ tồn tại, 46
mệnh đề, 3
mệnh đề phức hợp, 4
mệnh đề sơ cấp, 4
tiền đề, 22
tương đương logic, 13
vị từ, 44