BAN HỌC TẬP CÔNG NGHỆ PHẦN MỀM

TRAINING CUỐI KỲ HỌC KỲ I NĂM HỌC 2022 – 2023

ĐOÀN KHOA CÔNG NGHỆ PHẦN MỀM
BAN HỌC TẬP
Sharing is learning

BAN HỌC TẬP

Khoa Công nghệ Phần mềm

Trường Đại học Công nghệ Thông tin

Đại học Quốc gia thành phố Hồ Chí Minh

CONTACT

bht.cnpm.uit@gmail.com

fb.com/bhtcnpm

fb.com/groups/bht.cnpm.uit

TRAINING

GIẢI TÍCH

Thời gian: **19h30 ngày 10-02-2023**

Địa điểm: Microsoft Teams – W2DSY1Q

Trainers:

- Nguyễn Lâm Thanh Triết – KTPM2022.3
- Nguyễn Hoài Như KTPM2022.2

ĐOÀN KHOA CÔNG NGHỆ PHẦN MỀM

BAN HỌC TẬP

Sharing is learning

NỘI DUNG TRAINING

I. TÍCH PHÂN BỘI 2 – BỘI 3
II. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG 1 – 2.
III. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN 1 - 2

I. TÍCH PHÂN BỘI 2 – 3

A. Tích phân bội 2 (Tích phân kép).
1. Tính chất.
2. Phương pháp tính và ví dụ.

B. Tích phân bội 3.
❖ Phương pháp tính và ví dụ.

C. Ứng dụng tích phân bội.
❖Các công thức.
❖Ví dụ.

A. TÍCH PHÂN BỘI 2.

1. Tính chất.

Giả thiết các tích phân dưới đây đều tồn tại.

- *Tính chất 1.* $\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_D f(u,v)dudv$
- *Tính chất 2.* $\iint_D (f \pm g)dxdy = \iint_D fdxdy \pm \iint_D gdxdy$

$$\iint_D k.fdxdy = k.\iint_D fdxdy \ (k \in \mathbb{R})$$

- *Tính chất 3.* $\iint_D fdxdy = \iint_{D_1} fdxdy + \iint_{D_2} fdxdy$

A. TÍCH PHÂN BỘI 2.

2. Phương pháp tính.

2.1. Đưa về phương pháp lặp.

a) Định lý Fubini

Giả sử $I = \iint_D f dxdy$ tồn tại, trong đó

D $= \{(x, y): a \le x \le b,\ \ y_1(x) \le y \le y_2(x)\}$, và với mỗi $x \in [a; b]$ cố định,

$\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f dy$ tồn tại.

Khi đó ta có: $\int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy\right) dx = \boxed{\int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy}$

Tương tự, nếu miền D là D $= \{(x, y): x_1(y) \le x \le x_2(y),\ \ c \le y \le d\}$

Khi đó ta có: $I = \boxed{\int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx}$

A. TÍCH PHÂN BỘI 2.

❖ Các trường hợp đặc biệt

- Nếu **các cận của $\boldsymbol{x, y}$ đều là số thực**: $\mathrm{D} = \{(x, y)\colon a \le x \le b, c \le y \le d\}$
  thì $\iint_D \mathrm{f(x,y)}dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f dy = \int_c^d dy \int_a^b f dx$

- Nếu $\mathrm{D} = \{(x, y)\colon a \le x \le b,\ \ y_1(x) \le y \le y_2(x)\}$ và $\boldsymbol{f(x, y) = u(x).v(y)}$
  thì $\iint_D f(x, y)dxdy = \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} u(x)\, dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} v(y)\, dy$ và ngược lại.

- Nếu $\mathrm{D} = \{(x, y)\colon a \le x \le b, c \le y \le d\}$ và $f(x, y) = u(x).v(y)$
  thì $\iint_D f dxdy = \int_a^b u(x)\, dx \times \int_c^d v(y)\, dy$

- Nếu D là các miền phức tạp thì ta chia D ra thành những miền đơn giản.

A. TÍCH PHÂN BỘI 2.

VD1: Tính $\iint_D 2xcosydxdy$, biết $\mathrm{D} = \left\{(x,y): -1 \le x \le 2,\ \frac{\pi}{4} \le y \le \frac{\pi}{2}\right\}$

Có: $\iint_D 2xcosydxdy = 2\int_{-1}^{2} xdx \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} cosydy = \frac{6-3\sqrt{2}}{2}$

VD2: Tính $\iint_D (2x+y)dxdy$, biết $D = \{(x,y): y \le x \le 1-y, -2 \le y \le 0\}$

Có: $\iint_D (2x+\mathrm{y})dxdy = \int_{-2}^{0}(\int_{y}^{1-y}(2x+y)dx)dy = \int_{-2}^{0}[(x^2+yx)|_y^{1-y}]dy$

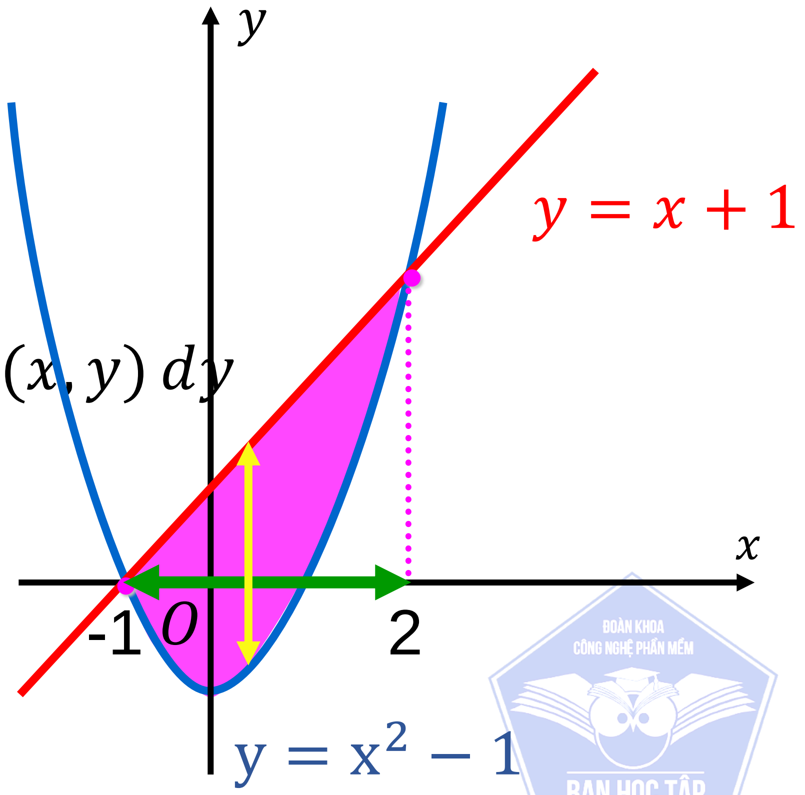
$$= \int_{-2}^{0}(-2y^2 - y + 1)dy = \frac{-4}{3}$$

A. TÍCH PHÂN BỘI 2.

VD3: Đưa $\iint_D f(x,y)dxdy$ về tích phân lặp, biết miền D bị giới hạn bởi các đường: $y = x + 1$ và $y = x^2 - 1$

Có: $D = \{(x,y): -1 \leq x \leq 2, x^2 - 1 \leq y \leq x + 1\}$

Ta được tích phân: $\iint_D f(x,y)dxdy = \int_{-1}^{2} dx \int_{x^2-1}^{x+1} f(x,y)\, dy$

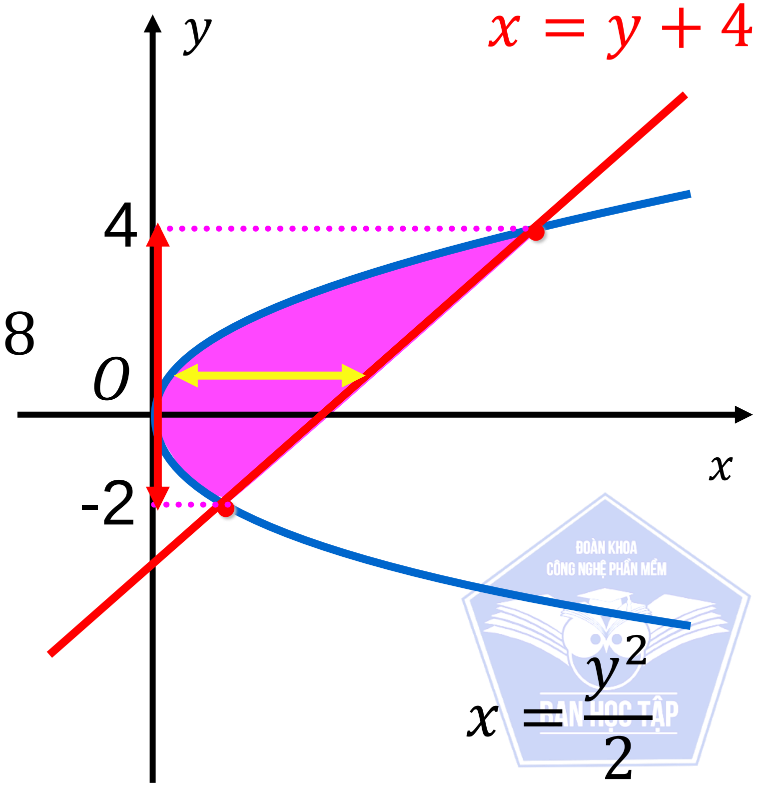


A. TÍCH PHÂN BỘI 2.

VD4: Tính $\iint_D ydxdy$, biết miền D bị giới hạn bởi các đường: $y = x - 4$ và $y^2 = 2x$

Có: $D = \left\{(x, y): \frac{y^2}{2} \le x \le y + 4, -2 \le y \le 4\right\}$

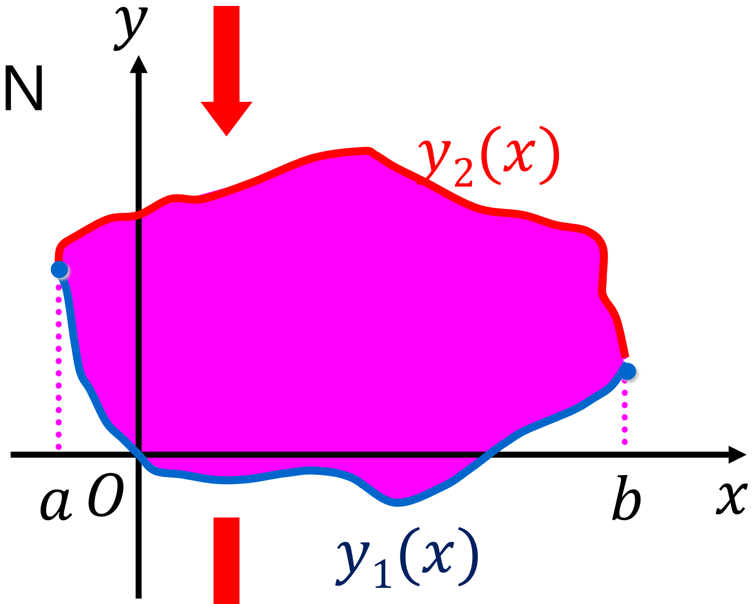
Ta được tích phân: $\iint_D ydxdy = \int_{-2}^{4} ydy \int_{\frac{y^2}{2}}^{y+4} dx = 18$



A. TÍCH PHÂN BỘI 2.

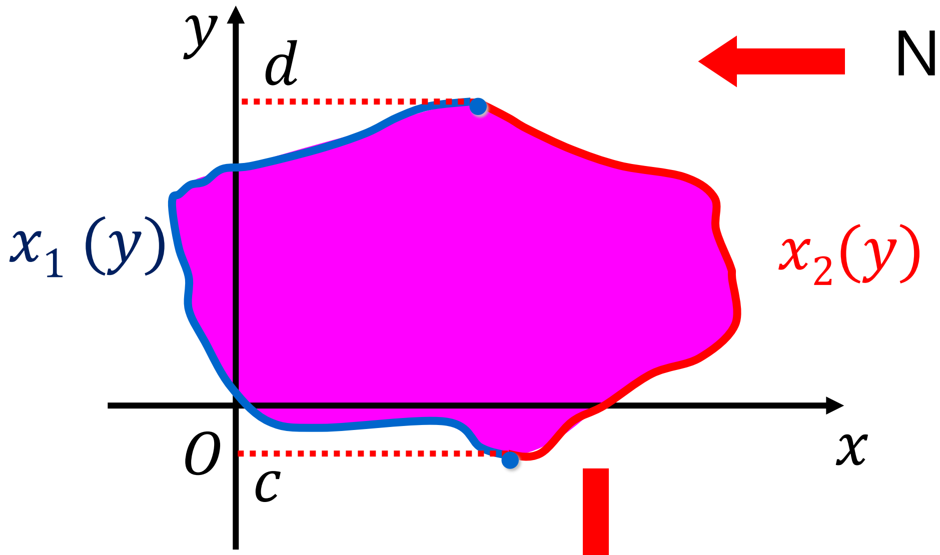
b) Đổi thứ tự lấy tích phân.

NHÌN LÊN



$$\int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$$

NHÌN NGANG



$$\int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$$

A. TÍCH PHÂN BỘI 2.

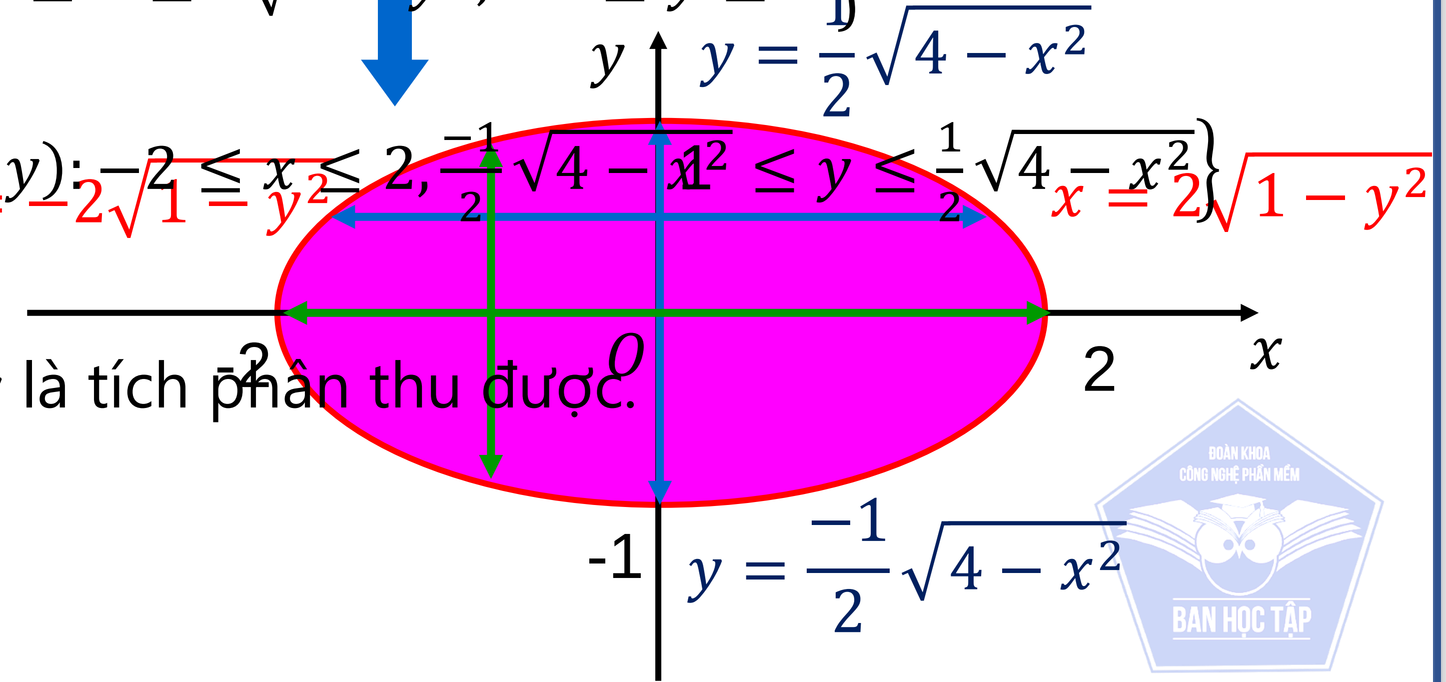
VD5: Đổi thứ tự lấy tích phân trong tích phân sau:

$\int_{-1}^{1} dy \int_{-2\sqrt{1-y^2}}^{2\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\, dx$.

Có: Miền D $= \left\{(x,y): -2\sqrt{1-y^2} \le x \le 2\sqrt{1-y^2}, -1 \le y \le 1\right\}$

Miền D được viết lại là: D $= \left\{(x,y): -2 \le x \le 2, \frac{-1}{2}\sqrt{4-x^2} \le y \le \frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}\right\}$

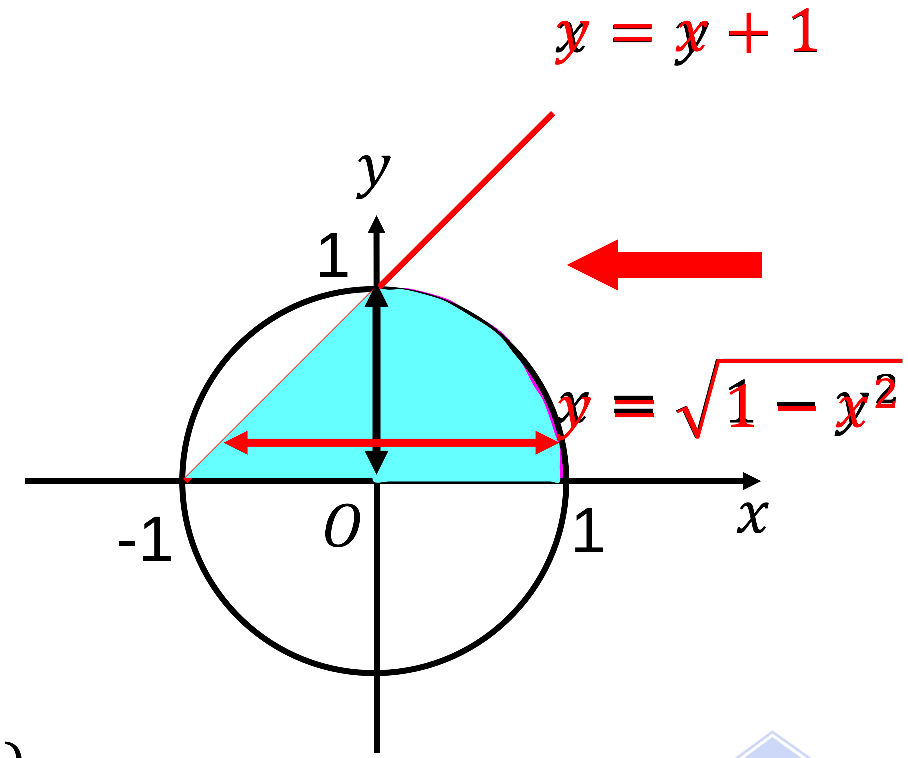
Khi đó: $\int_{-2}^{2} dx \int_{\frac{-1}{2}\sqrt{4-x^2}}^{\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\, dy$ là tích phân thu được.



A. TÍCH PHÂN BỘI 2.

VD6: Đổi thứ tự lấy tích phân trong tích phân sau

$\int_{-1}^{0} dx \int_{0}^{x+1} f(x,y)\, dy + \int_{0}^{1} dx \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\, dy$



D=D_1 U D_2 là

$$D_1 = \{(x,y): -1 \le x \le 0, 0 \le y \le x+1\}$$

$$D_2 = \left\{(x,y): 0 \le x \le 1, 0 \le y \le \sqrt{1-x^2}\,\right\}$$

Miền D được viết lại là:

$$\mathrm{D} = \left\{(x,y): y-1 \le x \le \sqrt{1-y^2}, 0 \le y \le 1\right\}$$

Tích phân thu được là: $\int_{0}^{1} dy \int_{y-1}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\, dx$

A. TÍCH PHÂN BỘI 2.

2.2. Phương pháp đổi biến.

a) Đổi biến trong tọa độ cực.

❖Phương pháp:

Đặt $\boxed{\begin{cases} x = rcos\varphi + x_0 \\ y = rsin\varphi + y_0 \end{cases}}$, thông thường $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

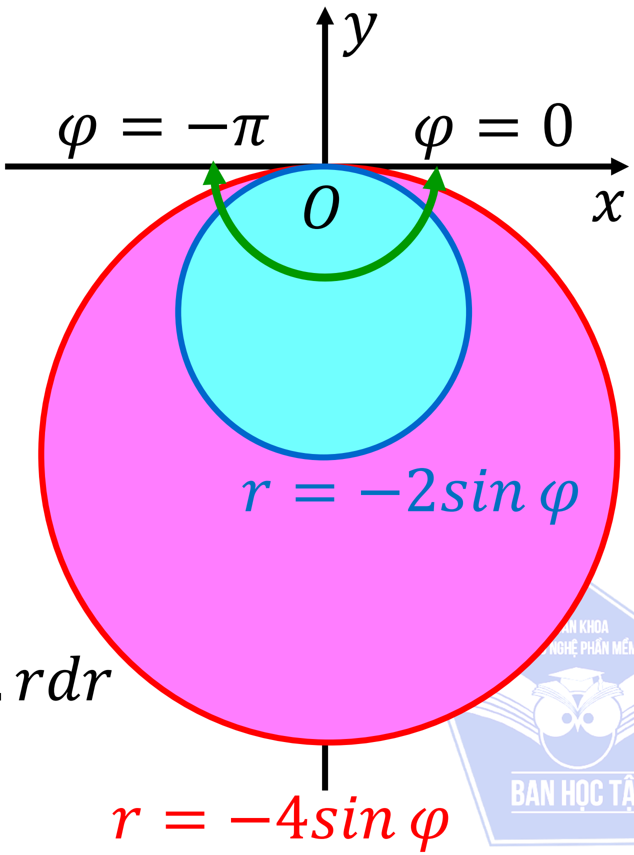
Miền D lúc này thành $\boxed{\begin{cases} \alpha \le \varphi \le \beta \\ r_1(\varphi) \le r \le r_2(\varphi) \end{cases}}$

Lúc này ta có công thức đổi biến:

$$\boxed{\iint\limits_{D_{xy}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(rcos\varphi + x_0, rsin\varphi + y_0).r\,dr}$$

A. TÍCH PHÂN BỘI 2.

VD7: Biểu diễn tích phân $\iint_D f(x,y)dxdy$ trong tọa độ cực, biết D nằm ngoài (C_1): $x^2+y^2+2y=0$ và nằm trong (C_2):$x^2+(y+2)^2=4$.



Đặt $\begin{cases} x=rcos\varphi \\ y=rsin\varphi \end{cases}$, thay vào (C_1) ta được: $r=-2\sin\varphi$,

thay vào (C_2) ta được: $r=-4\sin\varphi$

Theo điều kiện đề bài ta có: $-2\sin\varphi \le r \le -4\sin\varphi$.

Do $r>0$ nên $2\sin\varphi<0$, suy ra -$\pi \le \varphi \le 0$.

Tích phân được biểu diễn thành:

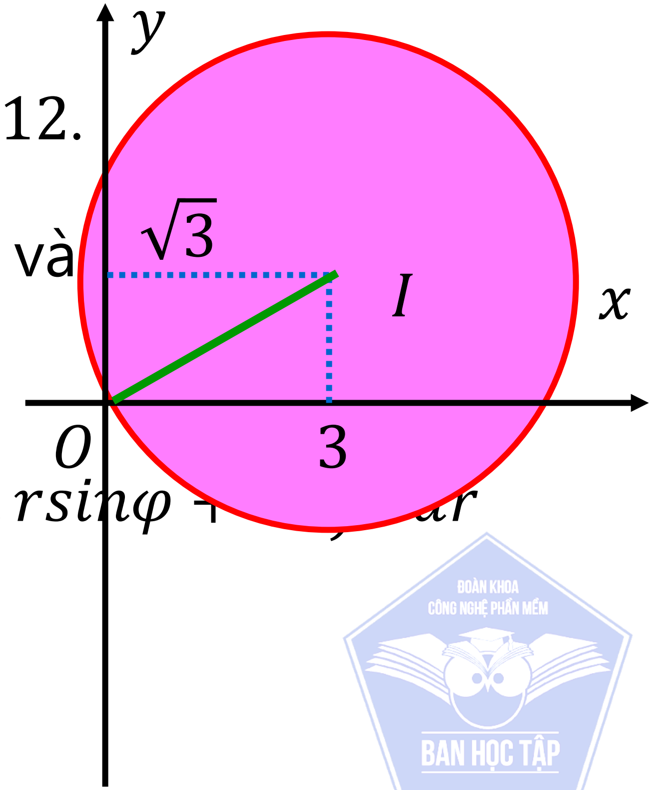
$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_{-\pi}^{0} d\varphi \int_{-2sin\varphi}^{-4sin\varphi} f(rcos\varphi, rsin\varphi).rdr$$

A. TÍCH PHÂN BỘI 2.

VD8: Biểu diễn tích phân $\iint_D f(x,y)dxdy$ trong tọa độ cực, biết D là hình tròn $x^2 + y^2 \leq 6x + 2\sqrt{3}y$.

Biến đổi bất phương trình, ta được: $(x-3)^2 + (y-\sqrt{3})^2 \leq 12$.

Đặt $\begin{cases} x = 3 + rcos\varphi \\ y = \sqrt{3} + rsin\varphi \end{cases}$, ta được $r^2 \leq 12$. Suy ra $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ và



Tích phân được biểu diễn thành: $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{12}} f\big(rcos\varphi + 3, rsin\varphi +$

A. TÍCH PHÂN BỘI 2.

VD9: Tính $I = \iint_D x\,dx\,dy$, biết $D = \{x^2 + y^2 + 2x \le 0,\ x + y \le\ 0\}$

Đặt $\begin{cases} x = r cos\varphi \\ y = r sin\varphi \end{cases}$, ta được: $\begin{cases} 0 \le r \le -2cos\varphi \\ \frac{3\pi}{4} \le \varphi \le \frac{3\pi}{2} \end{cases}$

Tích phân thành: $I = \iint_D x\,dx\,dy = \int_0^{-2cos\varphi} dr \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}} -2cos\varphi . r d\varphi = \frac{-8+9\pi}{12}$

A. TÍCH PHÂN BỘI 2.

VD10: Tính $I = \frac{1}{2}\iint_D \sqrt{16 - x^2 - 4y^2}\, dx\, dy,$

$D = \{x^2 + 4y^2 \geq 4,\ x^2 + 4y^2 \leq 16,\ x \leq 0,\ y \geq 0\}.$

Ta có: $I = \iint_D \sqrt{4 - (y^2 + \frac{x^2}{4})}\, dx\, dy,$ đặt $\begin{cases} x = 2rcos\varphi \\ y = rsin\varphi \end{cases}$, ta được: $1 \leq r \leq 2$

Do $x \leq 0,\ y \geq 0$ nên ta có: $\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi$

Tích phân thu được là: $I = \iint_D \sqrt{4 - (y^2 + \frac{x^2}{4})}\, dx\, dy = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\varphi \int_1^2 \sqrt{4 - r^2}.r\, dr$

$= \frac{9\pi}{2}$

A. TÍCH PHÂN BỘI 2.

b) Công thức biến đổi tổng quát.

Đặt $x = x(u,v)$ và $y = y(u,v)$, ta gọi định thức

$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}$ là Jacobian (Jacobi).

Chú ý: $J^{-1} = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix}$

Ta có công thức: $\boxed{\iint_{D_{xy}} f(x,y)dxdy = \iint_{D_{uv}} f\big(x(u,v),y(u,v)\big).|J|dudv}$

($f(x,y)$ khả tích trên D_{xy} và $J \neq 0$)

A. TÍCH PHÂN BỘI 2.

VD11: Tính $I = \iint_D (x^2 - y^2)\, dx\, dy$, với miền D là hình chữ nhật được giới hạn bởi các đường thẳng:

$$x + y = 1, x + y = 3, x - y = 2, x - y = 5.$$

Đặt $\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$, ta có $\begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{u-v}{2} \end{cases}$, $J = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{vmatrix} = \frac{-1}{2}$

Ta có: Miền D thành HCN: $\{1 \le u \le 3, 2 \le v \le 5\}$

Tích phân sau khi biến đổi là: $\frac{1}{2}\int_1^3 udu \int_2^5 vdv = 21.$

A. TÍCH PHÂN BỘI 2.

VD12: Tính $I = \iint_D xy\,dx\,dy$, trong đó miền D được giới hạn bởi 4 parabol:

$y = x^2, y = 2x^2, x = y^2, x = 3y^2$.

Đặt $\begin{cases} u = \dfrac{x^2}{y} \\ v = \dfrac{y^2}{x} \end{cases}$, ta có miền D: $\{1 \le u \le 2, 1 \le v \le 3\}$.

$$J^{-1} = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{2x}{y} & \dfrac{-x^2}{y^2} \\ \dfrac{-y^2}{x^2} & \dfrac{2y}{x} \end{vmatrix} = 3 \Rightarrow J = \frac{1}{3}$$

Khi đó, tích phân sau khi biến đổi là $\frac{1}{3}\int_1^2 udu \int_1^3 vdv = 2$.

B. TÍCH PHÂN BỘI 3.

❖ **Phương pháp tính**

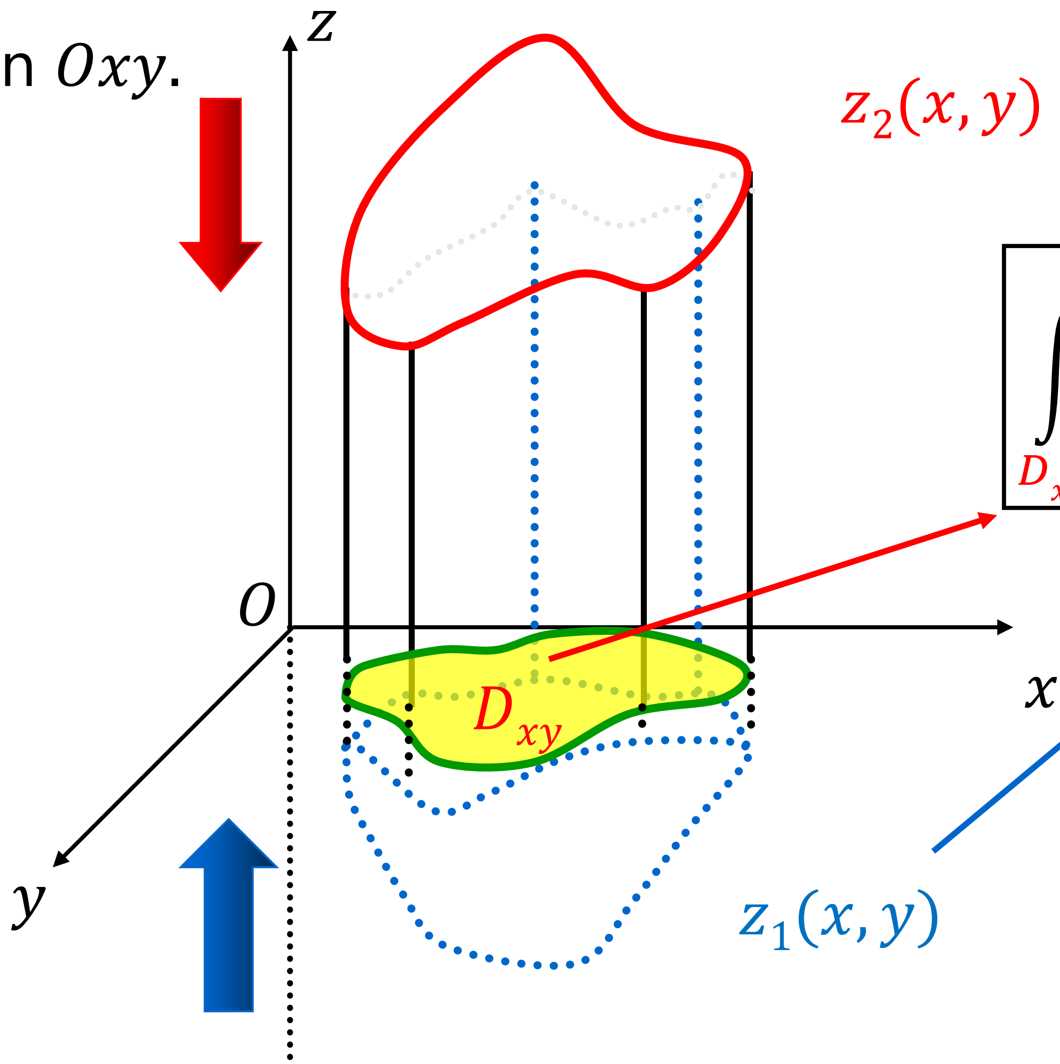
Tích phân bội 3 là $\boxed{\iiint_V f(x,y,z)dxdydz}$

a) Đưa về phương pháp lặp.

(Chiếu miền V lên các mặt phẳng tọa độ.)

B. TÍCH PHÂN BỘI 3.

Chiếu V lên Oxy.



$$\iint\limits_{D_{xy}} dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz$$

B. TÍCH PHÂN BỘI 3.

Tương tự, chiếu V lên Oxz ta được:

$$\boxed{\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_{D_{xz}} dxdz \int\limits_{y_1(x,z)}^{y_2(x,z)} f(x,y,z)dy}$$

Chiếu V lên Oyz ta được:

$$\boxed{\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_{D_{yz}} dydz \int\limits_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} f(x,y,z)dx}$$

B. TÍCH PHÂN BỘI 3.

VD1: Tính $I = \iiint_V 8xyzdxdydz$, biết V =[1; 2] × [−1; 3] × [0; 2].

$$I = \iiint\limits_V 8xyzdxdydz = \int_1^2 2xdx \times \int_{-1}^3 2ydy \times \int_0^2 2zdz = 96.$$

VD2: Tính $I = \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 dy \int_0^2 (1+2z)dz$

$$I = \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 dy \int_0^2 (1+2z)dz = \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 (z+z^2|_0^2)dy = \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 6dy = 8$$

B. TÍCH PHÂN BỘI 3.

VD3: Tính $I = \iiint_V xdxdydz$, trong đó

$$V = \{x + 2y + 3z \leq 6, x \leq 0, y \leq 0, z \leq 0\}$$

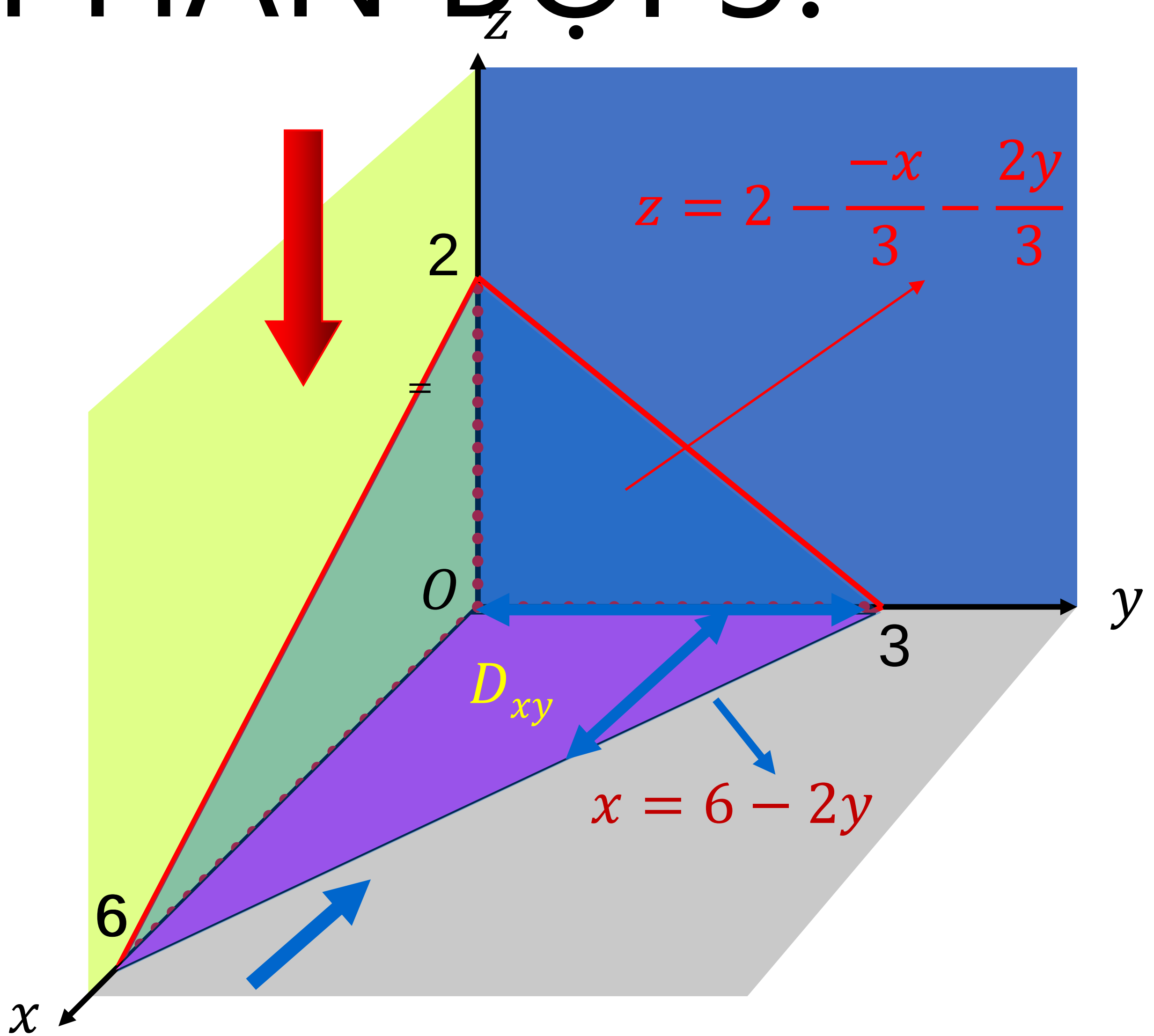
$$x + 2y + 3z = 6 \Rightarrow \frac{x}{6} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 1$$

Ta có miền V là: $\{0 \leq x \leq 6 - 2y, 0 \leq y \leq 3, 0 \leq z \leq 2 - \frac{2\mathrm{y}}{3} - \frac{\mathrm{x}}{3}\}$

Khi đó

$$I = \iiint_V xdxdydz = \int_0^3 dy \int_0^{6-2y} dx \int_0^{-\frac{2y}{3}-\frac{x}{3}} xdz = \frac{1}{3}\int_0^3 dy \int_0^{6-2y} x(6 - x - 2y)dx = 9.$$

B. TÍCH PHÂN BỘI 3.



B. TÍCH PHÂN BỘI 3.

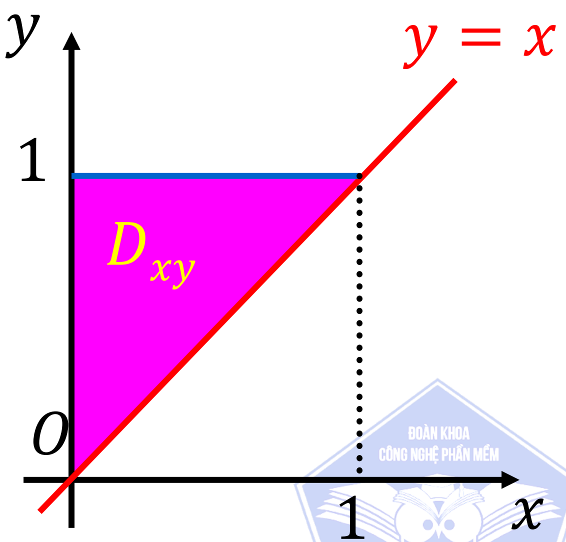
VD4: Tính $I = \iiint_V x^2 y dx dy dz$,
$$V = \{0 \le z \le x^2 + y^2, x - y \le 0, y \le 1, x \ge 0\}$$

Chiếu miền V lên Oxy ta được:

$$V = \{0 \le z \le x^2 + y^2, 0 \le x \le 1, x \le y \le 1\}$$

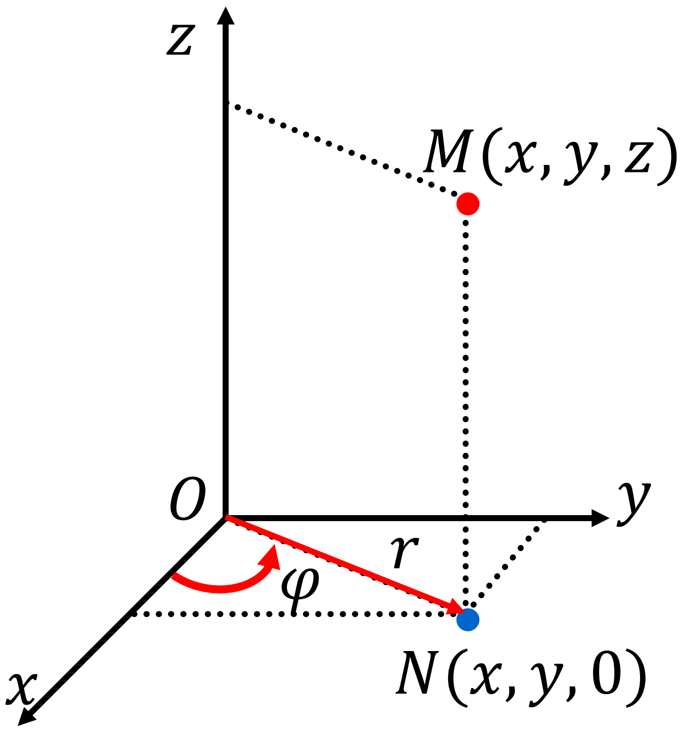
Do đó:

$$I = \int_0^1 x^2 dx \int_x^1 y dy \int_0^{x^2+y^2} dz = \frac{8}{105}$$



B. TÍCH PHÂN BỘI 3.

b) Đổi biến trong tọa độ trụ.



Phương pháp:

Đặt $\boxed{\begin{cases} x = rcos\varphi + x_0 \\ y = rsin\varphi + y_0 \end{cases}}$, thông thường $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

Miền V trở thành:

$$V_{\varphi rz} = \begin{cases} \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2 \\ r_1(\varphi) \le r \le r_2(\varphi) \\ z_1(r, \varphi) \le z \le z_2(r, \varphi) \end{cases}$$

Công thức đổi biến trong tọa độ trụ là:

$$\boxed{\iiint\limits_{V} f(x, y, z)dxdydz = \iiint\limits_{V_{\varphi rz}} f(rcos\,\varphi, rsin\varphi, z)rd\varphi drdz}$$

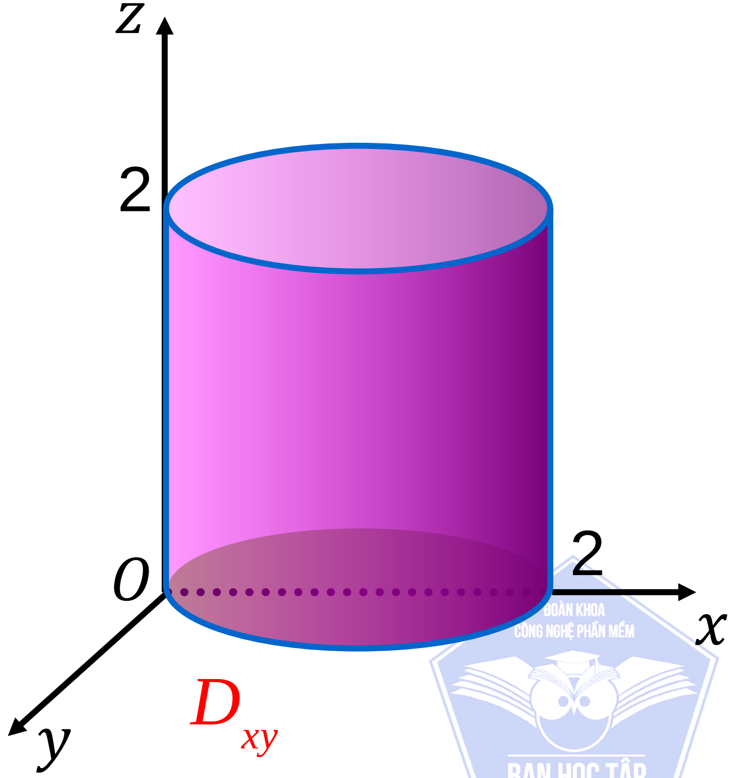
B. TÍCH PHÂN BỘI 3.

VD5: Tính $I = \iiint_V z\sqrt{x^2 + y^2}dxdydz$, biết

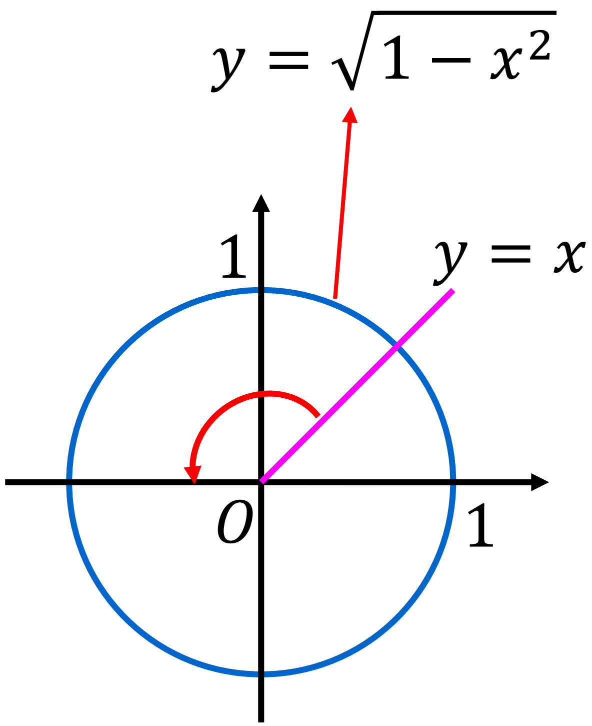
$V = \{x^2 + y^2 \le 2y, 0 \le z \le 2\}$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$, ta được $V_{\varphi rz} = \begin{cases} 0 \le \varphi \le \pi \\ 0 \le r \le 2\sin\varphi \\ 0 \le z \le 2 \end{cases}$

Khi đó, $I = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^2 zdz \int_0^{2\sin\varphi} r^2 dr = \frac{64}{9}$



B. TÍCH PHÂN BỘI 3.



VD6: Tính $I = \iiint_V \; xdxdydz,$

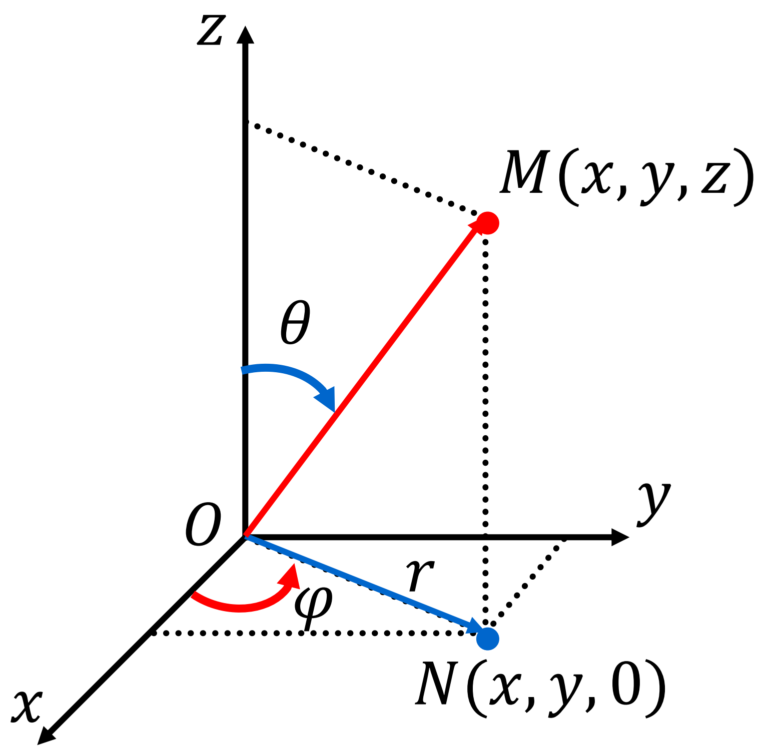
$V = \{y \geq 0, x \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}, 0 \leq z \leq x^2 + y^2\}$

Chiếu miền V lên Oxy, đặt $\begin{cases} x = rcos\varphi \\ \text{y} = rsin\varphi \end{cases}$

Ta được: $\begin{cases} \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \pi \\ 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq z \leq r^2 \end{cases}$, suy ra $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} cos\varphi d\varphi \int_0^{r^2} dz \int_0^1 r^2 \, dr = \frac{-\sqrt{2}}{10}$

B. TÍCH PHÂN BỘI 3.

c) Đổi biến trong tọa độ cầu.



Phương pháp:

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases}$ (với $\theta \in [0;\pi]$), ta được $V_{r\varphi\theta}$:

$$\begin{cases} r_1(\varphi,\theta) \le r \le r_2(\varphi,\theta) \\ \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2 \\ \theta_1 \le \theta \le \theta_2 \end{cases}$$

Công thức đổi biến trong tọa độ cầu là:

$$\boxed{\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V_{r\varphi\theta}} f.r^2\sin\theta\, dx\, dy\, d\theta}$$

(Với $f = f(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)$)

B. TÍCH PHÂN BỘI 3.

VD7: Tính $I = \iiint_V \frac{dxdydz}{x^2+y^2+z^2}$, biết $V = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 2y,\ z \leq 0\}$

Đặt $\begin{cases} x = rcos\varphi sin\theta \\ y = rsin\varphi sin\theta \\ z = rcos\theta \end{cases}$, ta được $\begin{cases} 0 \leq r \leq 2sin\varphi sin\theta \\ \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \varphi \leq \pi \end{cases}$

Vậy $I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} sin\theta\, d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{2sin\varphi sin\theta} dr = \pi.$

B. TÍCH PHÂN BỘI 3.

d) Công thức biến đổi tổng quát.

Giả sử ta có $x = x(u, v, w), y = y(u, v, w), z = z(u, v, w)$ có đạo hàm riêng liên tục trong miền V_{uvw} đóng và bị chặn trong không gian uvw.

Ta gọi Jacobian (Jacobi) là định thức $J = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix}$ (tương tự,

$J^{-1} = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y & u'_z \\ v'_x & v'_y & v'_z \\ w'_x & w'_y & w'_z \end{vmatrix}$)

Nếu $J \neq 0$ thì ta có công thức biến đổi tổng quát:

$$\boxed{\iiint\limits_V f(x, y, z) dxdydz = \iiint\limits_{V_{uvw}} f.|J|.dudvdw}$$

B. TÍCH PHÂN BỘI 3.

VD8: Tính $I = \iiint_V \; xy^2z^3dxdydz$, V: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + z^2 \le 4$

Đặt: $\begin{cases} x = 4u \\ y = 3v \\ z = w \end{cases}$, ta được $J = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 12$ và miền V thành $u^2 + v^2 + w^2 \le 4$

Do đó, $I = 12 \iiint_{Vuvw} (4u)(3v)^2w^3dudvdw$

Đặt $\begin{cases} u = \; rcos\varphi sin\theta \\ v = rsin\varphi sin\theta \\ w = rcos\theta \end{cases}$, ta được $\begin{cases} 0 \le r \le 2 \\ 0 \le \theta \le \pi \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$

$$I = 12 \iiint_{Vuvw} (4u)(3v)^2w^3dudvdw$$

$$=432 \int_0^2 r^8dr \int_0^{2\pi} (\cos\varphi \sin^2\varphi)d\varphi \int_0^{\pi} (\cos^3\theta \sin^4\theta)d\theta \; = 0$$

B. TÍCH PHÂN BỘI 3.

VD9: Tính $I = \iiint_V zdxdydz$, V là khối hộp chữ nhật được giới hạn bởi 6 mặt:

$$x + 2z = \pm 1, x + 2y + z = \pm 3, x + 2y + 2z = \pm 4$$

Đặt $\begin{cases} u = x + 2z \\ v = x + 2y + z \\ w = x + 2y + 2z \end{cases}$, $J^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \Rightarrow J = \frac{1}{2}$

Khi đó, miền V trở thành: $[1; -1] \times [3; -3] \times [4; -4]$

$$I = \frac{1}{2} \iiint\limits_{V_{uvw}} (w - v)dudvdw = 0$$

C. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN BỘI

❖ Các công thức:

+Diện tích hình phẳng: $S_D = \iint_D 1dxdy$

+Thể tích vật thể bất kỳ :

$$V_\Omega = \iiint_\Omega 1dxdydz$$

+Tính khối lượng: $p(x,y)$ **là hàm mật độ của vật:**

$$m_D = \iint_D p(x,y)dxdy$$

+Tính trọng tâm (x_T, y_T):

$$x_T = \frac{1}{m_D}\iint_D x.p(x,y)dxdy$$

$$y_T = \frac{1}{m_D}\iint_D y.p(x,y)dxdy$$

C. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN BỘI

VD1: Tính thể tích Ω là khối vật thể giới hạn bởi: $\Omega: \begin{cases} x^2+z^2 \le 4 \\ x^2+y^2+z^2 \le 16 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ z = r\sin\varphi \\ y = y \end{cases} \Rightarrow J = r$, đổi cận lấy tích phân $\begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le 2 \\ -\sqrt{16-x^2-z^2} \le y \le \sqrt{16-x^2-z^2} \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 rdr \int_{-\sqrt{16-r^2}}^{\sqrt{16-r^2}} dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 2r\sqrt{16-r^2}dr$$

Đặt $\sqrt{16-r^2} = t \to 16 - r^2 = t^2 \to -2rdr = 2tdt \to rdr = -tdt$

$$\Rightarrow I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\sqrt{12}}^4 2t^2 dt$$

$$= \int_0^{2\pi} 2\left(\frac{4^3}{3} - \frac{\left(\sqrt{12}\right)^3}{3}\right)d\varphi = \int_0^{2\pi} 2\left(\frac{64}{3} - \frac{12\sqrt{12}}{3}\right)d\varphi = 4\pi\left(\frac{64-12\sqrt{12}}{3}\right)$$

C. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN BỘI

VD2: Tính thể tích Ω là khối vật thể giới hạn bởi: Ω: $\begin{cases} x = y^2 + z^2 \\ y^2 + z^2 = 1 \\ x = 2y^2 + z^2 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} y = r cos\varphi \\ z = r sin\varphi \Rightarrow J = r \\ x = x \end{cases}$

Đổi cận lấy tích phân $\begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 1 \\ y^2 + z^2 \leq x \leq 2y^2 + z^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 1 \\ 1 \leq x \leq 1 + r^2 \cos^2 \varphi \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r dr \int_1^{1+r^2 \cos^2 \varphi} dx = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^3 \cos^2 \varphi \, dr = \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \, d\varphi = \frac{\pi}{4}$$

C. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN BỘI

VD3: Tính thể tích Ω là khối vật thể giới hạn bởi: $\Omega: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \le 9 \\ x^2 + y^2 \le 4 \\ z \ge \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} x = rcos\varphi \\ y = rsin\varphi \\ z = z \end{cases} => J = r$. Đổi cận $\begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le 2 \\ \sqrt{x^2 + y^2} \le z \le \sqrt{9 - x^2 - y^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le 2 \\ r \le z \le \sqrt{9 - r^2} \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 rdr \int_r^{\sqrt{9-r^2}} dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r(\sqrt{9 - r^2} - r)dr$$

XÉT $\int_0^2 r(\sqrt{9 - r^2} - r)dr = \int_0^2 r\left(\sqrt{9 - r^2}\right) - r^2dr = \int_0^2 r\left(\sqrt{9 - r^2}\right) dr - \frac{r^3}{3} \Big|_0^2$

Đặt $t = \sqrt{9 - r^2} \Rightarrow t^2 = 9 - r^2 \Rightarrow 2t\, dt = -2rdr \Rightarrow tdt = -rdr = \ldots$

II. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG 1 – 2.

A. Tích phân đường 1.
1. Định nghĩa.
2. Cách tính.
3. Ứng dụng.

B. Tích phân đường 2.
1. Định nghĩa.
2. Phương pháp tính.
3. Công thức Green.
4. Điều kiện để tích phân đường không phụ thuộc vào đường đi.

A. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG 1.

1. Định nghĩa.

Tích phân đường loại 1 được kí hiệu là :

$$\boxed{\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y)ds}$$

ds: được gọi là vi phân cung

❖ Nhận xét:

1. Tích phân đường loại 1 không phụ thuộc hướng của cung $\overset{\frown}{AB}$
2. Tích phân đường loại 1 có tính chất giống tính chất của tích phân xác định

A. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG 1.

2. Cách tính. **Có:** $\boldsymbol{I = \int_C f(x,y)ds}$.

Trường hợp 1: $(C) : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \; t_1 \le t \le t_2$

Vi phân cung $ds = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt$

$$\Rightarrow I = \boxed{\int_{t_1}^{t_2} f\big(x(t), y(t)\big) . \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt}$$

Trường hợp 2: $(C): y = y(x), a \le x \le b$ ($x = x(y)$, $c \le y \le d$ làm tương tự)

Vi phân cung $ds = \sqrt{1 + [y'(x)]^2}\, dx$ $\Rightarrow I = \boxed{\int_a^b f\big(x, y(x)\big) . \sqrt{1 + [y'(x)]^2}\, dx}$

A. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG 1.

2. Cách tính. **Có:** $\boldsymbol{I = \int_C f(x,y)ds}$.

Trường hợp 3: Trong KG 3 chiều (C) : $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), t_1 \le t \le t_2 \\ z = z(t) \end{cases}$

Vi phân cung $ds = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\, dt$

$$\Rightarrow I = \boxed{\int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t), z(t)) . \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\, dt}$$

A. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG 1.

2. Cách tính.

❖ Đặc biệt:

(1) Với C là đường tròn: $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$

- $\Rightarrow$ Dạng tham số: $\begin{cases} x = a + R.cost \\ y = b + R.sint \end{cases}$, $0 \le t \le 2\pi$

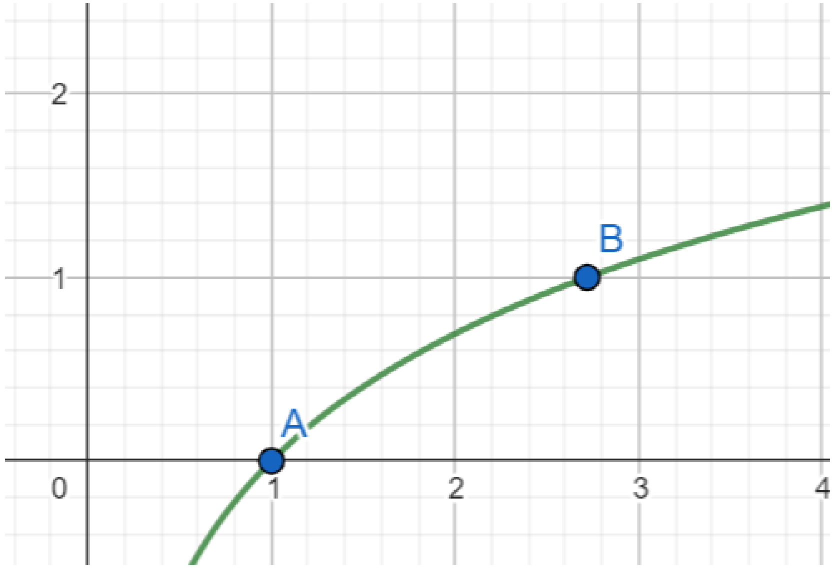
(2) Với C là đường elip: $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$

- $\Rightarrow$ Dạng tham số: $\begin{cases} x = x_0 + a.cost \\ y = y_0 + b.sint \end{cases}$, $0 \le t \le 2\pi$

A. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG 1.

VD1: Tính $I = \int_{\widehat{AB}} x^2 ds$ với $\widehat{AB}$ là cung $y = lnx$ nối $A(1,0)$ đến $B(e,1)$

$\widehat{AB}: \begin{cases} y = lnx \\ 1 \leq x \leq e \end{cases}$

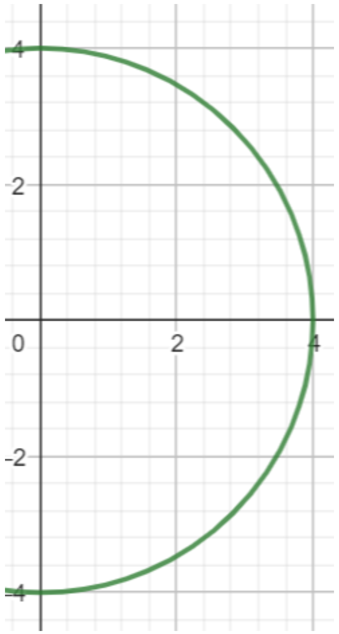


Suy ra : $y'(x) = \frac{1}{x}$

$ds = \sqrt{1 + [y'(x)]^2}\, dx = \sqrt{1 + (\frac{1}{x})^2} dx$

$\Rightarrow I = \int_1^e x^2 . \sqrt{1 + (\frac{1}{x})^2} dx = 7,15$

A. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG 1.



VD2: Tính $I = \int_C xy^4 ds$, với C là nửa bên phải đường tròn $x^2 + y^2 = 16 , x \geq 0$

Phương trình tham số của C : $\begin{cases} x = 4\cos t \\ y = 4\sin t \end{cases} , \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

$$ds = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt = \sqrt{(-4sint)^2 + (4cost)^2} dt = 4dt$$

$$\Rightarrow I = \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4\cos t\,.(4\sin t)^4 \,.4dt = \frac{2}{5}.4^6$$

A. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG 1.

3. Ứng dụng.

1) Nếu cung $\overset{\frown}{AB}$ có khối lượng riêng tại $M(x,y)$ là $\rho(x,y)$ thì **khối lượng** của nó là

$$\boxed{m = \int_{\overset{\frown}{AB}} \rho(x,y)ds}$$

và **trọng tâm** $\boldsymbol{G}$ của $\overset{\frown}{AB}$ là: $\boxed{x_G = \frac{1}{m}.\int_{\overset{\frown}{AB}} x.\rho(x,y)ds}$, $\boxed{y_G = \frac{1}{m}.\int_{\overset{\frown}{AB}} y.\rho(x,y)ds}$

2) **Chiều dài** của cung $\overset{\frown}{AB}$ được tính bởi công thức là: $\boxed{s = \int_{\overset{\frown}{AB}} ds}$

A. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG 1.

VD3: Tính khối lượng của $L: y = e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}, 0 \leq x \leq 2, \rho(x,y) = \frac{1}{y}$

Có : $y' = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}$

$\Rightarrow ds = \sqrt{1 + (\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}})^2}dx = \sqrt{(\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}})^2}dx = \left(\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\right)dx$

$\Rightarrow I = \int_0^2 \frac{\left(\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}+\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\right)dx}{e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}} = \frac{1}{2}\int_0^2 1\, dx = 1$

B. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG 2.

1. Định nghĩa.

Tích phân đường loại 2 được kí hiệu là: $\boxed{\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)dy}$

❖ **Nhận xét:**

a) TPĐL2 có các tính chất như tích phân xác định.

b) TPĐL2 **phụ thuộc vào hướng** của $\overset{\frown}{AB}$. Nếu đổi chiều lấy tích phân thì tích phân đổi dấu.

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)dy = -\int\limits_{\overset{\frown}{BA}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)dy$$

B. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG 2.

1. Định nghĩa.

Tích phân đường loại 2 được kí hiệu là: $\boxed{\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)dy}$

❖ **Nhận xét:**

c) Nếu $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{CB}$ thì

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$

$$= \int_{\overset{\frown}{AC}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + \int_{\overset{\frown}{CB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

B. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG 2.

2. Phương pháp tính.

2.1. Đường cong (C) có phương trình tham số:

$$C: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \ t = a \text{ ứng với điểm đầu}, t = b \text{ ứng với điểm cuối}$$

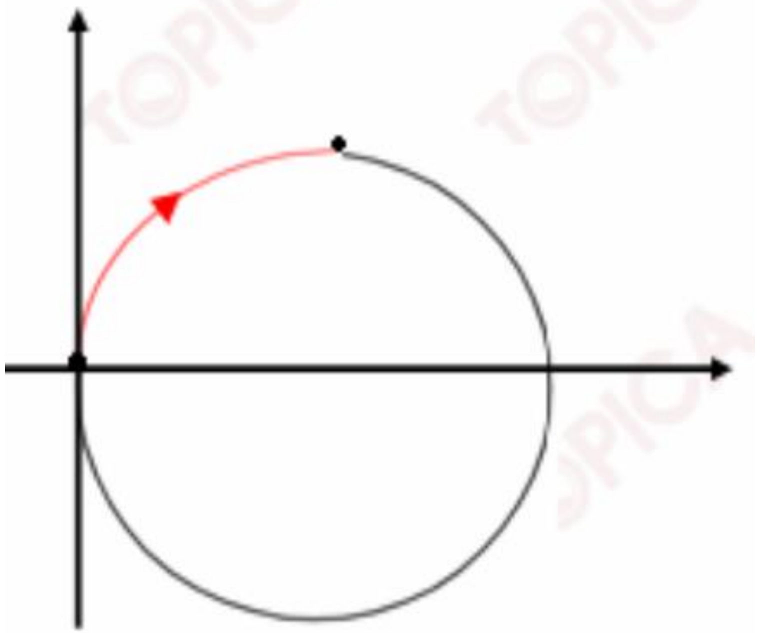
$$\Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{dx} = x'(t)dt \\ \boldsymbol{dy} = y'(t)dt \end{cases}$$

$$\int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)dy = \int_a^b P\big(x(t),y(t)\big)\,.\,x'(t)dt + Q\big(x(t),y(t)\big)\,.\,y'(t)dt$$

B. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG 2.

VD1: Tính $I = \int_C ydx + xdy$, trong đó C là cung $x^2 + y^2 = 2x$ từ $O(0,0)$, tới $A(1,1)$ theo chiều kim đồng hồ

Xét $x^2 + y^2 = 2x \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1$



Ta có: $C: \begin{cases} x = 1 + \cos t & \Rightarrow dx = -\sin t\, dt \\ y = \sin t & \Rightarrow dy = \cos t\, dt \end{cases}$

❖ Nhận xét: t chạy từ π đến $\frac{\pi}{2}$

$$I = \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} [-\sin t\,.\sin t + (1 + \cos t).\cos t]\, dt$$

$$= \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} (\cos t + \cos 2t) dt = 1$$

B. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG 2.

2. Phương pháp tính.

2.2. Đường cong (C) có phương trình tổng quát:

TH1: (C): $y = y(x)$, $x = a$ là điểm đầu , $x = b$ là điểm cuối $\Rightarrow dy = y'(x)dx$

$$\int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)dy = \int_a^b [P\big(x, y(x)\big) + Q\big(x, y(x)\big).y'(x)]dx$$

TH2: (C): $x = x(y)$, $y = a$ là điểm đầu , $y = b$ là điểm cuối $\Rightarrow dx = x'(y)dy$

$$\int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)dy = \int_a^b [P(x(y), y).x'(y) + Q(x(y), y)]dy$$

B. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG 2.

VD2: Tính $I = \int_C ydx + x^2dy$, trong đó (C) là cung parabol $y = x^2$ đi từ $A(1;1)$ đến $O(0,0)$

Ta có : $(C): = x^2 \Rightarrow dy = 2xdx$, x chạy từ 1 tới 0 $\Rightarrow I = \int_1^0 (x^2 + 2x^3)dx = -\frac{5}{6}$

VD3: Tính $I = \int_C 2ydx$, trong đó (C) là cung parabol $x = y^3 + y$ đi từ $A(-2;-1)$ đến $B(2;1)$

Ta có : $(C)\begin{cases} x = y^3 + y \Rightarrow dx = (3y^2 + 1)dy \\ -1 \le y \le 1 \end{cases} \Rightarrow I = \int_{-1}^{1} 2y(3y^2 + 1)dy = \cdots = 0$

B. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG 2.

❖ Chú ý: Tích phân đường loại 2 trong không gian

- Các hàm $P(x, y, z), Q(x, y, z)$ và $R(x, y, z)$ liên tục trên tập mở D chứa cung trơn AB
- Cung AB có phương trình tham số: $x = x(t), y = y(t), z = z(t), a \leq t \leq b$
- $\int_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy + Rdz = \int_a^b P\big(x(t), y(t), z(t)\big).x'(t)dt$

$$+Q\big(x(t), y(t), z(t)\big).y'(t)dt + R\big(x(t), y(t), z(t)\big).z'(t)dt$$

B. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG 2.

VD4: Tính $I = \int_C ydx + zdy + xdz$ với C là đường cong $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt, 0 \le t \le 2\pi$ theo ***hướng tăng dần*** của biến t.

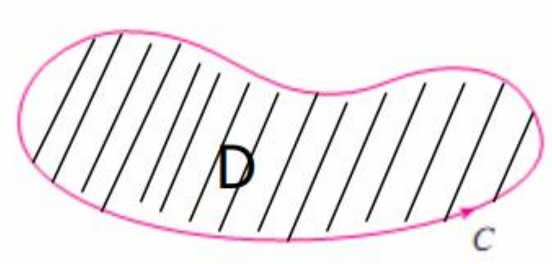
$$I = \int_0^{2\pi} a\sin t\,.(-a\sin t\; dt) + bt.(a\cos t\; dt) + a\cos t.(bdt)$$

$$= \int_0^{2\pi} (-a^2 \sin^2 t + abt\cos t + ab\cos t\,)dt = -\pi a^2$$

B. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG 2.

3. Công thức Green.

- C là biên của miền D (**C là đường cong kín**). **Chiều dương** qui ước trên C là chiều mà **đi theo chiều này** ta thấy miền D gần nhất **ở phía bên tay trái**. Ngược lại là chiều âm.
- Miền D được gọi là **miền đơn liên** nếu các biên kín của D có thể co về một điểm P thuộc D mà không bị các biên khác cản trở. Ngược lại D được gọi là miền đa liên.
- Chú ý: Trong đa số trường hợp, **chiều dương qui ước là ngược chiều kim đồng hồ**. Trong trường hợp tổng quát điều này không đúng.



Miền đơn liên

Miền đa liên

B. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG 2.

3. Công thức Green.

D là miền đóng, bị chặn trong mặt phẳng Oxy với biên C trơn từng khúc, có chiều dương. $P(x,y), Q(x,y)$ và các đạo hàm riêng cấp 1 liên tục trong miền mở chứa D.

$$\boxed{\oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D ({Q'}_x - {P'}_y)dxdy}$$

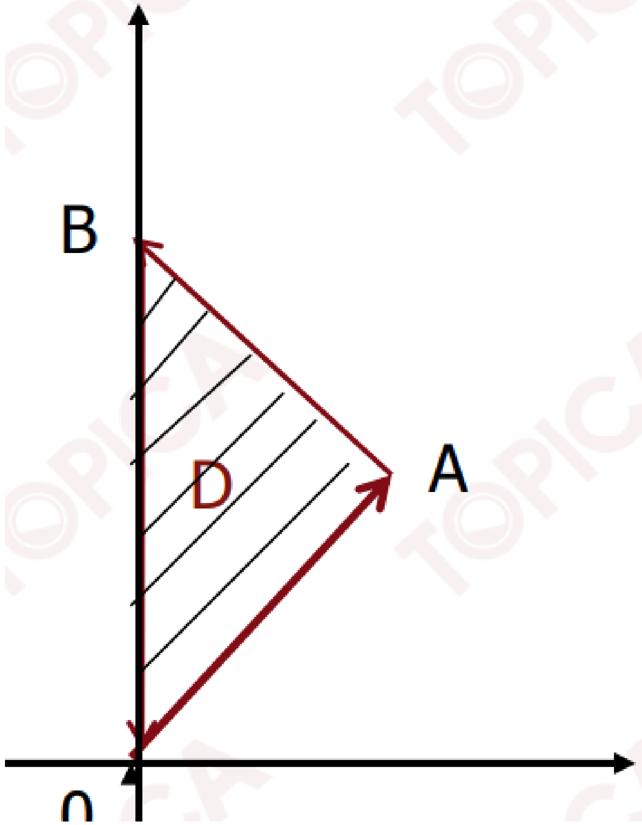
Điều kiện để sử dụng công thức GREEN :

- C là **cung kín**.
- $P(x,y), Q(x,y)$ và các đạo hàm riêng cấp 1 liên tục trên miền D có biên C.

B. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG 2.

VD1: Tính $I = \int_C (x^2 + 3y)dx + 2ydy$, trong đó C là biên tam giác OAB, với $O(0,0); A(1,1); B(0,2)$ ngược chiều kim đồng hồ.

Cung C kín có chiều dương



Đặt $\begin{cases} P(x,y) = x^2 + 3y \\ Q(x,y) = 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P'_y = 3 \\ Q'_x = 0 \end{cases}$

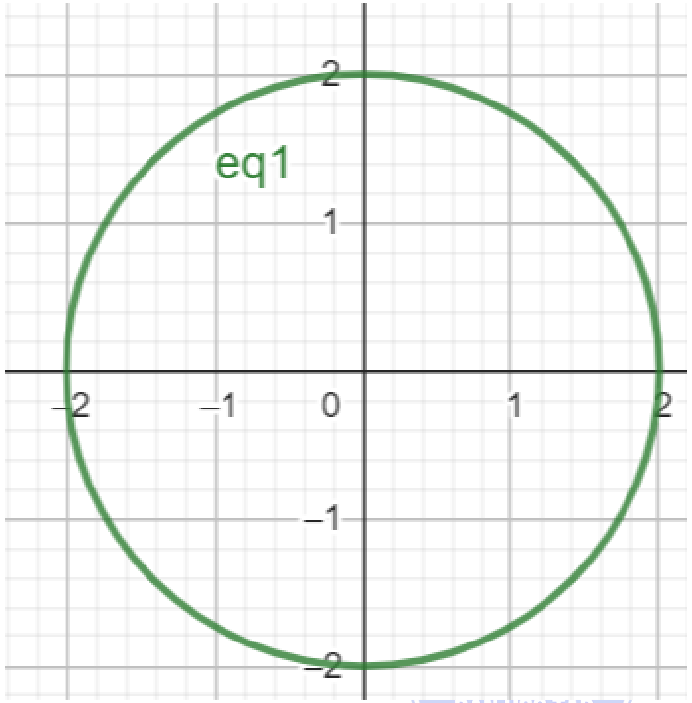
Áp dụng CT Green, ta có:

$$I = \int_C Pdx + Qdy = \iint_D (Q'_x - P'_y)dxdy$$

$$= \iint_D (0-3)dxdy = \int_0^1 dx \int_x^{2-x} -3dy = -3$$

B. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG 2.

VD2: Tính $I = \oint_C e^{-x^2}(-2xsin\, y\,.dx + \cos y.dy)$, trong đó C: $x^2 + y^2 = 4$ ngược chiều kim đồng hồ



Đặt $\begin{cases} P(x,y) = -2xe^{-x^2}.\sin y & \Rightarrow P'_y = -2xe^{-x^2}.\cos y \\ Q(x,y) = e^{-x^2}.\cos y & \Rightarrow Q'_x = -2xe^{-x^2}.\cos y \end{cases}$

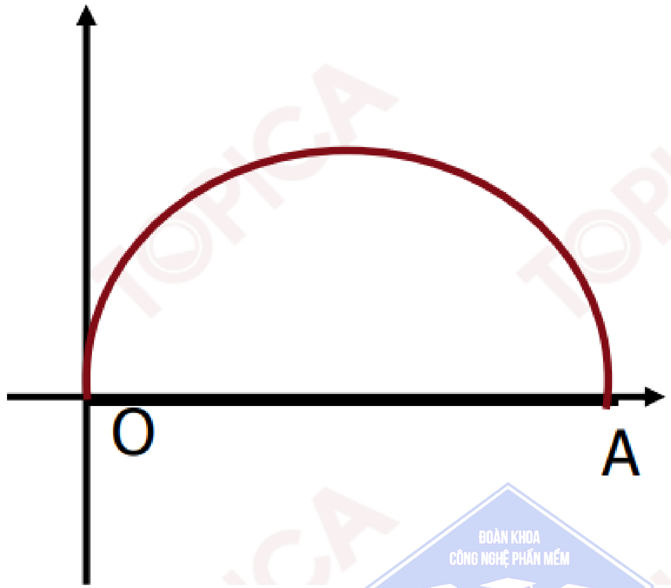
Áp dụng công thức GREEN ta có :

$$I = \iint_D Q'_x - P'_y dxdy = \iint_D 0dxdy = 0$$

B. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG 2.

VD3: Tính $I = \int_C (x-y)^2 dx + (x+y)^2 dy$, trong đó C là nửa trên đường tròn $x^2 + y^2 = 2x$ cùng chiều kim đồng hồ.

Cung C không kín



$$I = \int_C = \oint_{C\cup\overline{AO}} - \int_{\overline{AO}} = I_1 - I_2$$

Tính I_1

Đặt $\begin{cases} P(x,y) = (x-y)^2 \Rightarrow P'_y = -2(x-y) \\ Q(x,y) = (x+y)^2 \Rightarrow Q'_x = 2(x+y) \end{cases}$

Áp dụng công thức GREEN:

$$I_1 = \oint_{C\cup\overline{AO}} = \iint_D Q'_x - P'_y dxdy = 4.\iint_D xdxdy$$

B. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG 2.

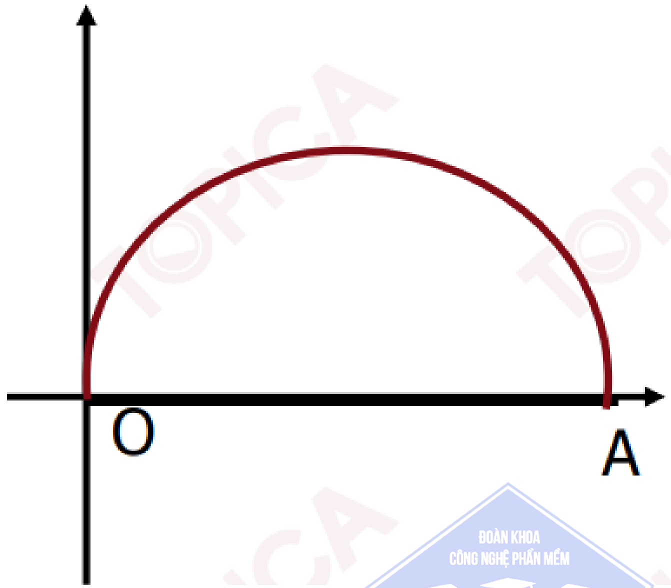
VD3: Tính $I = \int_C (x-y)^2 dx + (x+y)^2 dy$, trong đó C là nửa trên đường tròn $x^2 + y^2 = 2x$ cùng chiều kim đồng hồ.

Có $D = \{0 \le (x-1)\text{^}2 + y\text{^}2 \le 1\}$

Đặt $\begin{cases} x = 1 + \mathrm{r}\cos t \\ y = r\sin t \\ \pi \le t \le 0 \end{cases} \Rightarrow J = r$

Từ tập $D \Rightarrow 0 \le r \le 1$

$$\Rightarrow I_1 = 4.\int_\pi^0 dt \int_0^1 (1 + r\cos t).r.dt = \cdots = -2\pi$$



B. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG 2.

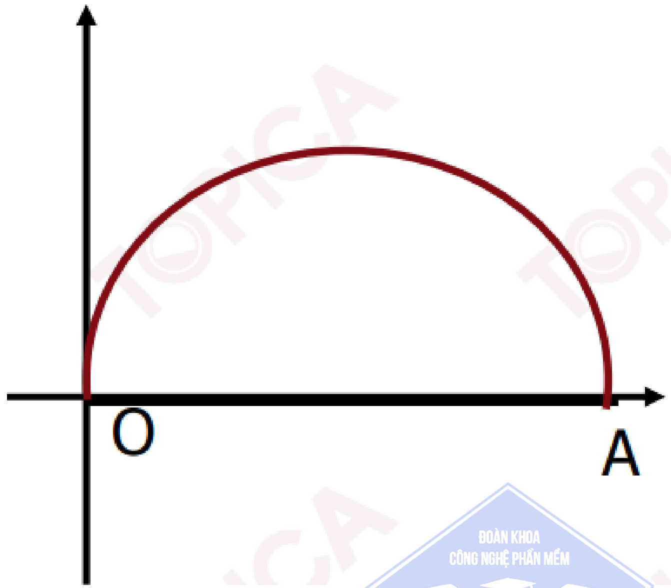
VD3: Tính $I = \int_C (x-y)^2dx + (x+y)^2dy$, trong đó C là nửa trên đường tròn $x^2 + y^2 = 2x$ cùng chiều kim đồng hồ.

Tính I_2

$$\overline{AO}\begin{cases} y = 0 \\ 2 \le x \le 0 \end{cases}$$

$$I_2 = \int_{\overline{AO}} = \int_2^0 (x-0)^2dx + (x+0)^2.0.dx = -\frac{8}{3}$$

Vậy $I = I_1 - I_2 = -2\pi + \frac{8}{3}$



B. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG 2.

4. Điều kiện để tích phân đường không phụ thuộc vào đường đi.

- Cho hàm $P(x,y), Q(x,y)$ và các đạo hàm cấp 1 của chúng liên tục trong miền mở đơn liên D chứa cung AB.
- Các mệnh đề sau đây là tương đương.

1. $Q'_x = P'_y$

2. Tích phân $I = \int_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy$ không phụ thuộc vào đường cong trơn từng khúc nối cung AB nằm trong D

3. Tích phân trên mọi đường cong kín C, trơn từng khúc trong D bằng 0.

$$\boxed{I = \oint_C Pdx + Qdy = 0}$$

4. Tồn tại hàm $U(x,y)$ là vi phân toàn phần của $Pdx + Qdy$, tức là

$$dU(x,y) = Pdx + Qdy$$

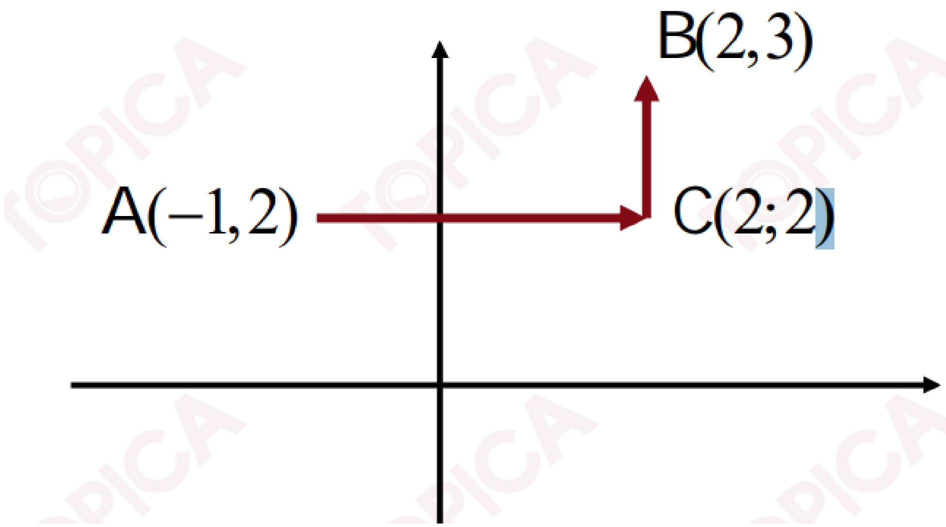
B. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG 2.

VD1: Tính $I = \int_{(-1,2)}^{(2,3)} ydx + xdy$

Đặt $P = x, Q = y \Rightarrow Q'_x = P'_y = 1$

$\Rightarrow$ Tích phân không phụ thuộc vào đường đi

$I = \int_{\overline{AC}} + \int_{\overline{CB}} = \int_{-1}^{2} 2dx + \int_{2}^{3} 2dx = 8$



B. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG 2.

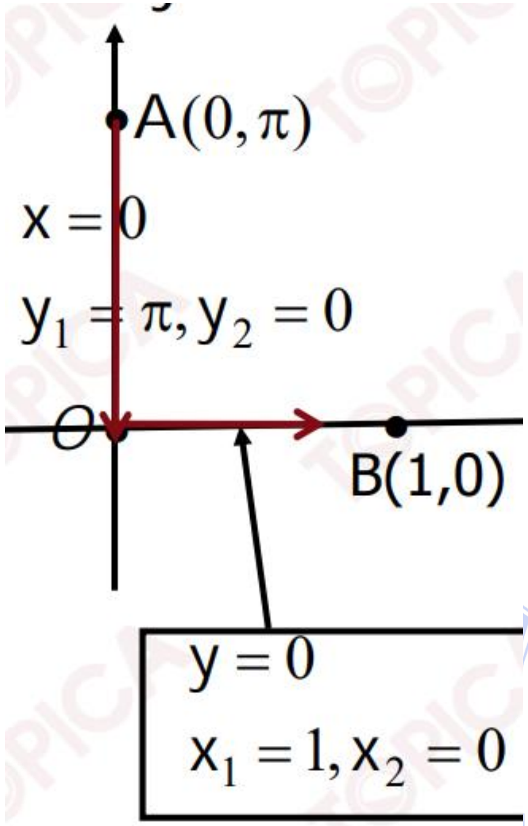
VD2: Tính $I = \int_{(0,\pi)}^{(1,0)} (2ye^{xy} + e^x.\cos y)dx + (2xe^{xy} - e^x.\sin y)dy$

Đặt $\begin{cases} P = 2ye^{xy} + e^x.\cos y \\ Q = 2xe^{xy} - e^x.\sin y \end{cases}$

$\Rightarrow Q'_x = P'_y = 2e^{xy} + 2xye^{xy} - e^x.siny$

$\Rightarrow$ Tích phân không phụ thuộc vào đường đi

$$I = \int_{\overline{AO}} + \int_{\overline{OB}} = \int_{\pi}^{0} -\sin y dy + \int_{0}^{1} e^x dx = e + 1$$



III. PT VI PHÂN 1-2.

A. Phương trình vi phân 1.
1. Định nghĩa.
2. Các loại PTVP cấp 1 thường gặp.

B. Phương trình vi phân 2 với hệ số hằng C.
1. Định nghĩa.
2. Phương pháp giải.

A. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN 1.

1. Định nghĩa.

❖ Là phương trình có chứa đạo hàm cấp 1

❖ Dạng tổng quát

$\boldsymbol{F(x, y, y') = 0}$ hoặc $y' = f(x, y)$

Trong đó:

➢ x: Biến độc lập.

➢ $y = y(x)$: hàm phải tìm.

➢ $y' = \frac{dy}{dx}$: đạo hàm riêng cấp 1 của y theo x.

VD:

\+ $y' = x^4 + \sin(3x)$

\+ $x^2 e^y dx - cosy.tanx.dy = 0$

A. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN 1.

1. Định nghĩa.

❖ Nghiệm của phương trình

- Nghiệm tổng quát

- Với mọi hàm số có dạng $y = \varphi(x, C)$

(C: hằng số tùy ý)

- Ví dụ: $y = x^3 - sinx + C$

- Nghiệm riêng

- Tìm C = C_0 cụ thể

- Ví dụ: $C = 1 \Rightarrow y = x^2 + 1$

⇒TÌM C DỰA VÀO ĐIỀU KIỆN CỦA ĐỀ

A. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN 1.

2.Các loại PTVP cấp 1 thường gặp.

a) Phương trình có biến phân li (phương trình tách biến).

$$\boxed{f(x)dx + g(y)dy = 0}$$

❖ **Cách giải**: LẤY TÍCH PHÂN 2 VẾ PHƯƠNG TRÌNH

$$\boxed{\int f(x)dx + \int g(y)dy = C}$$

VD1: Tìm NTQ của phương trình: $(3x^2 + 1)dx + cosydy = 0$

Lấy tích phân 2 vế phương trình

$$\int (3x^2 + 1)\, dx + \int \cos y\, dy = C \Rightarrow x^3 + x + \sin y = C$$

$$\Rightarrow y = \arcsin(-x^3 - x + C)$$

A. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN 1.

❖ 2 dạng PTVP có thể đưa về phương trình tách biến.

$$\boxed{M(x).Q(y)dx + N(x).P(y)dy = 0}$$

Xét 2 trường hợp:

- TH1: $N(x).Q(y) = 0$, thế ngược lại kiểm tra x_N, y_Q có là nghiệm của PT không. ⇒Nghiệm riêng của PT.
- TH2: Chia 2 vế cho $N(x).Q(y) \neq 0$

$$\Rightarrow \frac{M(x)}{N(x)}dx + \frac{P(y)}{Q(y)}dy = 0$$

A. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN 1.

❖ 2 dạng PTVP có thể đưa về phương trình tách biến.

$$\boxed{y = f(ax + by + c)}$$

Đặt $z(x) = ax + by + c \Rightarrow y' = \frac{z' - a}{b}$

VD2: Tìm NTQ của pt $x.y^2.dy = -(y+1).dx$

Xét $x.(y+1) = 0$, ta được 2 nghiệm $x = 0$ và $y = -1$. Đây là 2 nghiệm riêng của PT.

$$\frac{y^2}{y+1} \cdot dy + \frac{dx}{x} = 0 \Rightarrow \int \frac{y^2}{y+1} \cdot dy + \int \frac{dx}{x} = C \Rightarrow \frac{y^2}{2} - y + \ln|y+1| + \ln|x| = C$$

⇒Trường hợp này, việc biến đổi để được $y = y(x, C)$ rất khó nên ta sẽ để nguyên dạng $\varphi(x, y, C) = 0$. Ta gọi đây là nghiệm tổng quát của phương trình vi phân.

A. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN 1.

VD3: Tìm nghiệm riêng của phương trình

$$y' = x^2 + 2xy + y^2 - 1\,, y(0) = 1$$

Có: $y' = (x+y)^2 - 1$

Đặt $z = x + y \Rightarrow y' = z' - 1$ (đạo hàm theo x) thay vào pt trên, ta được

$z' - 1 = z^2 - 1 \Rightarrow \frac{dz}{z^2} = dx \Rightarrow -\frac{1}{z} = x + C \Rightarrow -\frac{1}{x+C} = x + y$

$y = -x - \frac{1}{x+C}$

Thay vào điều kiện đầu ta được: 1 = -C

Nghiệm riêng cần tìm là : $y = \frac{1}{1-x} - x$

A. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN 1.

b) Phương trình đẳng cấp.

$$\boxed{y' = f(x,y) = \varphi(\frac{y}{x})}$$

❖ Cách giải : Đặt $\boldsymbol{u = \frac{y}{x}} \to y = u.x$ (u là hàm theo biến x)

➔ $y'_x = u'.x + u.x' = u'.x + u$

Khi đó : $u'.x + u = y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) = \varphi(u)$ hay $u'.x + u = \varphi(u)$

$$\frac{du}{dx} \cdot x = \varphi(u) - u \to \frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x} \; hay \; \boxed{\frac{du}{\varphi(u) - u} - \frac{dx}{x} = 0}$$

$$\Rightarrow Pt \text{ tách biến} \to \text{giải } u \text{ theo } x \to \text{thế ngược lại } u = \frac{y}{x}$$

A. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN 1.

VD4: Tìm NTQ của pt sau; $y' = e^{-\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$

Đặt $u = \frac{y}{x} \rightarrow y = u.x \rightarrow y' = u'.x + u = e^{-u} + u \rightarrow u'.x = e^{-u}$

$$\frac{dx}{x} - \frac{du}{e^{-u}} = 0$$

$$\int \frac{dx}{x} - \int \frac{du}{e^{-u}} = C \rightarrow ln|x| - e^{u} = C \langle = \rangle \ln|x| - e^{\frac{y}{x}} = C$$

➔ Nghiệm tổng quát: $e^{\frac{y}{x}} = \ln|x| + C$

Sharing is learning

A. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN 1.

VD5: Tìm NTQ của phương trình sau: $y' = \frac{y}{x} + \cos\left(\frac{y}{x}\right)$

Đặt $u = \frac{y}{x} \rightarrow y = u.x \rightarrow y' = u'.x + u = u + cosu \Rightarrow \frac{du}{cosu} = \frac{dx}{x}$

$\Rightarrow \int \frac{du}{cosu} = \int \frac{dx}{x} + lnC \Rightarrow \tan\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = Cx \Rightarrow y = x(2arctanCx - \frac{\pi}{2} + k2\pi)$

A. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN 1.

❖ Hai dạng PTVP có thể đưa về phương trình đẳng cấp.

$$\boxed{f(x,y)dx + g(x,y)dy = 0}$$

Trong đó, f, g là các hàm đẳng cấp cùng bậc tức là tồn tại số nguyên k sao cho

$$f(tx,ty) = t^k f(x,y), g(tx,ty) = t^k g(x,y)$$

$$\boxed{y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)}$$

Ta xét HPT $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$D \neq 0$: Hệ PT có nghiệm duy nhất

$$x = x_0, y = y_0$$

Đặt $X = x - x_0, Y = y - y_0$

$D = 0$: PT thành dạng

$$\boxed{y' = g(a_2x + b_2y)}$$

A. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN 1.

VD6: Tìm NTQ của pt $(x^2+y^2)dx - xydy = 0$

Đây là phương trình đẳng cấp bậc 2

Chia 2 vế cho x^2

$$\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) dx - \frac{y}{x} dy = 0 \Rightarrow y' = \frac{1}{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$$

$$\text{Đặt } u = \frac{y}{x} \rightarrow y = u.x \ \rightarrow y' = u'.x + u = \frac{1}{u} + u$$

$$\Rightarrow \int udu = \int \frac{dx}{x} + C \Rightarrow \frac{u^2}{2} = lnx + C$$

$$\Rightarrow y^2 = 2x^2 lnx + C$$

A. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN 1.

VD7: Tìm NTQ của phương trình: $(2x - 2y - 1)dx + (x - y + 1)dy = 0$

Ta viết lại phương trình thành:

$$y' = -\frac{2(x-y)-1}{(x-y)+1}$$

Nên $D = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$

Ta được: $y' = -2 + \frac{3}{(x-y)+1}$ (Dạng $y' = f(ax + by + c)$)

Đặt $z = x - y + 1$

NTQ của PT là $3x + C = x - y + 1 + ln|x - y|$

Sharing is learning

A. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN 1.

c) Phương trình vi phân tuyến tính.

- PT không thuần nhất: $\boxed{y' + p(x)y = q(x)}$

$(x' + p(y)x = q(y)$ giải tương tự)

- PT thuần nhất: $\boxed{y' + p(x)y = 0}$

❖ Cách giải: Nhân 2 vế phương trình với $e^{\int p(x)dx}$

$$y'e^{\int p(x)dx} + y\left(p(x)e^{\int p(x)dx}\right) = q(x)e^{\int p(x)dx}$$

$$\Leftrightarrow \left(ye^{\int p(x)dx}\right)' = q(x)e^{\int p(x)dx}$$

Hoặc dùng công thức $\boxed{y = e^{-\int p(x)dx}.\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right)}$

A. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN 1.

VD8: Tìm NTQ của pt $y' - 2xy = 1 - 2x^2$

Ta có

$$\begin{cases} p(x) = -2x \\ q(x) = 1 - 2x^2 \end{cases}$$

Sử dụng công thức nghiệm ta được

$$y = e^{-\int p(x)dx}.\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right)$$

$$y = e^{x^2}\left(\int (1 - 2x^2).e^{-x^2}dx + C\right)$$

$$y = e^{x^2}\left(\int e^{-x^2}dx + \int xe^{-x^2}d(-x^2) + C\right)$$

$$y = x + Ce^{x^2}$$

A. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN 1.

VD9: Tìm NTQ của pt $y' - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^3$, ĐK: $x > -1$

$$\begin{cases} p(x) = -\frac{2}{x+1} \\ q(x) = (x+1)^3 \end{cases}$$

$$y = e^{-\int -\frac{2}{x+1}dx}\left(C + \int (x+1)^3 e^{-\int \frac{2}{x+1}dx}\right)$$

$$\Rightarrow \int p(x) = \int -\frac{2}{x+1}dx = -2\ln(x+1) \Rightarrow e^{2\ln(x+1)} = (x+1)^2$$

$$\Rightarrow \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx = \int (x+1)^3 . e^{\int -\frac{2}{x+1}dx}dx = \int (x+1)^3 . e^{-2\ln(x+1)}dx$$

$$\Rightarrow \int (x+1)^3 . (x+1)^{-2}dx = \int (x+1)dx = \frac{x^2}{2} + x$$

$$\Rightarrow y = (x+1)^2\left(C + \frac{x^2}{2} + x\right)$$

A. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN 1.

VD10: Tìm NTQ của PT: $y'(x+y^2)=y$

Ta biến đổi để đưa về thành PT khi xem $x=x(y)$

$$x'=\frac{x+y^2}{y}\Rightarrow x'-x.\frac{1}{y}=y$$

Dùng công thức nghiệm ta được

$$x=e^{\int\frac{1}{y}dy}\left(\int y\,e^{\int\frac{1}{y}dy}dy+C\right)$$

$$x=y(\int y.\frac{1}{y}dy+C)\ \Rightarrow {\color{red}x=y^2+Cy}$$

A. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN 1.

d) Phương trình Bernoulli

$$\boxed{y' + p(x)y = q(x).y^{\alpha}}$$

($\alpha \neq 0$ vì nếu $\alpha = 0$ thì ta được PT tuyến tính, $\alpha \neq 1$ vì nếu $\alpha = 1$ thì ta được PT tách biến.)

❖ Cách giải

- Nếu $\alpha = 0 \vee \alpha = 1$: *pt là PTVP tuyến tính cấp 1 hoặc pt tách biến*
- Nếu $\alpha \neq 0$ và $\alpha \neq 1$: *Chia 2 vế phương trình cho* $y^{\alpha} \neq 0$ *hoặc nhân* $y^{-\alpha}$

$$\Leftrightarrow y'.y^{-\alpha} + p(x).y^{1-\alpha} = q(x)$$

- Đặt $z = y^{1-\alpha} \Rightarrow z' = (1-\alpha).y'.y^{-\alpha} \Rightarrow y' = \frac{z'.y^{\alpha}}{1-\alpha}$
- Thay vào PT trên ta được

$$\frac{z'.y^{\alpha}}{1-\alpha} + yp(x) = q(x).y^{\alpha}$$

$\rightarrow$ *Đưa hệ số của* z' *về* $= 1 \rightarrow z' + z(1-\alpha)p(x) = (1-\alpha)q(x)$

A. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN 1.

VD11: $y' - 2xy = 3x^3y^2$

TH1: $y^2 = 0 \Leftrightarrow y = 0 \rightarrow là\, nghiệm\, của\, pt$

TH2: $y^2 \neq 0$

$$\begin{cases} p(x) = -2x \\ q(x) = 3x^3 \\ y^\alpha = y^2 \rightarrow \alpha = 2 \end{cases}$$

Đặt $z = y^{-1} \Longrightarrow z' = -y^{-2}.y'$

$$\Rightarrow -z' - 2xz = 3x^3 \Leftrightarrow z' + 2xz = -3x^3$$

$$\Rightarrow z = e^{\int -2xdx}(C + \int(-3x^3)e^{\int 2xdx}\, dx$$

$+)\int 2xdx = x^2$

$+)\int(-3x^3)e^{\int 2xdx} = \int(-3x^3)e^{x^2}dx \rightarrow Đổi\, biến\, đặt\, t = x^2, ta\, được{:}\ -3\int t.e^t dt$

$\rightarrow Tích\, phân\, từng\, phần, ta\, được{:} \rightarrow\ -\dfrac{3}{2}e^t(t-1) \rightarrow z = e^{-x^2}\left(C \pm \dfrac{3}{2}.e^{x^2}(x^2-1)\right)$

A. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN 1.

VD12: $y' - 2ytanx = -y^2\sin^2 x \to y' - 2tanx.y = -\sin^2 x.y^2$

Đây là pt Bernoulli $\begin{cases} p(x) = -2tanx \\ q(x) = -\sin^2 x \\ y^\alpha = y^2 \to \alpha = 2 \end{cases}$

TH1: $y^2 = 0 \Leftrightarrow y = 0 \to$ là nghiệm của phương trình.

TH2: $y^2 \neq 0$

Đặt $z' = y^{-1} \Rightarrow y' = -z'.y^2$

$-z'y^2 - 2tanx.y = -y^2\sin^2 x$

$z' + 2tanx.z = \sin^2 x \to$ PTVP tuyến tính.

Áp dụng công thức nghiệm ta được:

$$z = e^{\int -2tanxdx}\left(\int \sin^2 x.e^{\int 2tanxdx}dx + C\right) \Rightarrow y = \frac{1}{\cos^2 x(tanx - x + C)}$$

A. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN 1.

e) Phương trình vi phân toàn phần.

$$\boxed{P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0}$$

Vi phân toàn phần:

$$du(x,y) = u'(x).dx + u'(y).dy$$

$$\rightarrow P(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x} = u'(x), Q(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y} = u'(y)$$

$$\Longrightarrow \text{Điều kiện để có } PTVPTP: \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \; hay \; (P'_y = Q'_x)$$

A. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN 1.

❖ Cách giải

Ta tìm nghiệm pt dưới dạng $U(x,y) = C$ trong đó hàm $U(x,y)$ được tìm bằng 2 cách

- **Cách 1:** Chọn điểm (x_0, y_0) sao cho tại đó 2 hàm P, Q liên tục thì NTQ:
  - $U(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy = C$
  - Hoặc $U(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy = C$
- **Cách 2:** Ta tìm $U(x,y)$ sao cho
  - $U'_x = P(x,y), U'_y = Q(x,y)$

A. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN 1.

VD13: Tìm nghiệm của $(x+y)dx+(x-y)dy=0, y(0)=0$

$$\begin{cases} P(x,y)=x+y \to P'_y=1 \\ Q(x,y)=x-y \to Q'_x=1 \end{cases} \to P'_y=Q'_x \to PT \text{ là } PTVPTP$$

Chọn $(0,0)$ là điểm để $P(0,0)$ và $Q(0,0)$ xác định.

$$\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy=C \to \int_0^x xdx+\int_0^y (x-y)dy=C$$

$$\Leftrightarrow \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^x+\left.\left(xy-\frac{y^2}{2}\right)\right|_0^y=C \Leftrightarrow NTQ: \frac{x^2}{2}+xy-\frac{y^2}{2}=C$$

Ta có: $y(0)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

Thay $x=0, y=0$ vào nghiệm tổng quát của PT được $C=0. \Rightarrow \frac{x^2}{2}+xy-\frac{y^2}{2}=0$

A. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN 1.

VD14: Tìm NTQ của PT $(e^{x+y} + 2y)dx + (e^{x+y} + 2x - 2)dy = 0$

$$\begin{cases} P = e^{x+y} + 2y \rightarrow P'(y) = e^{x+y} + 2 \\ Q = e^{x+y} + 2x - 2 \rightarrow Q'(x) = e^{x+y} + 2 \end{cases} \Rightarrow P'_y = Q'_x.$$

Cách 1: Chọn $(x_0, y_0) = (0,0)$

$$\int_0^x (e^{x+y} + 2y)dx + \int_0^y (e^{0+y} + 2.0 - 2)dy = C$$

$$\left((e^{x+y} + 2xy) - (e^y - 0)\right) + \left((e^y - 2y) - (e^0 - 0)\right) = C \Rightarrow e^{x+y} + 2xy - 2y = C$$

Cách 2: $\begin{cases} U'(x) = e^{x+y} + 2 & (1) \\ U'(y) = e^{x+y} + 2x - 2 & (2) \end{cases}$

Từ $(1) \Rightarrow U = e^{x+y} + 2y.x + C_1$ và từ $(2) \Rightarrow U = e^{x+y} + 2x.y - 2y + C_2$

So sánh 2 đẳng thức trên, ta được: $U = e^{x+y} + 2xy - 2y$

Vậy NTQ của PT đã cho là $e^{x+y} + 2xy - 2y = C$

B. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN 2.

1. Định nghĩa.

Là PT có chứa đạo hàm riêng cấp 2, các hệ số của biến trong PT là hằng số.

Dạng tổng quát: $\boxed{F(x, y, y', y'')}$

Trong đó:

x: biến độc lập

$y = y(x)$: hàm cần tìm

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$$

Sharing is learning

B. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN 2.

2. Phương trình vi phân cấp 2 với hệ số hằng.

Dạng: $\boxed{y'' + py' + q.y = f(x)}$ $\;$ $với\;\; p, q = const$

❖ Cách giải:

- Bước 1:

Xét pt thuần nhất: $y'' + py' + q.y = 0$

Xét pt đặc trưng: $k^2 + p.k + q = 0 \rightarrow bấm\ máy\ tìm\ nghiệm\ k$

+ Có 2 nghiệm k_1, k_2 $\quad y = C_1.e^{k_1 x} + C_2.e^{k_2 x} = y_1 + y_2$

+ Có nghiệm kép: $y = (C_1 + C_2 x).e^{kx}, y_1 = e^{kx}, y_2 = x.e^{kx}$

+ Vô nghiệm thực, có nghiệm phức liên hợp: $\alpha \pm \beta, \beta\ luôn\ lấy\ dương$

NTQ: $y = e^{\alpha x}[(C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x))]$

Nghiệm riêng: $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x, y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$

B. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN 2.

VD1: $y'' - 5y' + 6y = 0 \rightarrow k^2 - 5k + 6 = 0 \rightarrow y = C_1.e^{2x} + C_2.e^{3x}$

VD2: $y'' + 4y' + 4y = 0 \rightarrow k^2 + 4k + 4 = 0 \rightarrow y = e^{-2x}(C_1 + C_2x)$

VD3: $y'' + y = 0 \rightarrow k^2 + 1 = 0 \rightarrow \ y = C_1 cosx + C_2 sinx$

B. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN 2.

- Bước 2: Tìm nghiệm riêng của PT không thuần nhất
  - $y'' + py' + q.y = f(x)$

TH1: $f(x) = e^{\gamma x}.P_n(x), P_n(x)$: đa thức bậc n theo biến x.

- Nếu γ không là nghiệm của PT đặc trưng thì nghiệm riêng có dạng:

$\boxed{Y = e^{\gamma x}.Q_n(x)}$, $Q_n(x)$: đa thức bậc n, hệ số tìm bằng phương pháp hệ số bất định hoặc đồng nhất thức. $\Rightarrow P$ bậc nào thì Q bậc đó.

❖ Nếu γ là nghiệm đơn

$$Y = x.e^{\gamma x}.Q_n(x)$$

❖ Nếu γ là nghiệm kép

$$Y = x^2.e^{\gamma x}.Q_n(x)$$

Một số đa thức bậc n cần nhớ

+ Bậc 0: $a =$ hằng số

+ Bậc 1: $ax + b\ (a \neq 0)$

+ Bậc 2: $ax^2 + bx + c\ (a \neq 0)$

+ Bậc 3: $ax^3 + bx^2 + cx + d\ (a \neq 0)$

B. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN 2.

+TH2: $f(x) = e^{\theta x}(P_n(x)\cos(\varphi x) + Q_m(x)\sin(\varphi x))$

Đặt $l = max\{n, m\}$: bậc cao nhất của 2 đa thức

- $\theta \pm \varphi i$ không là nghiệm của PT đặc trưng.

$Y = e^{\theta x}(H_l(x)\cos(\varphi x) + R_l(x)\sin(\varphi x)),$

$(H, R$ cùng bậc)

- $\theta \pm \varphi i$ là nghiệm của PT đặc trưng.

$\mathrm{y} = x.e^{\theta x}(H_l(x)\cos(\varphi x) + R_l(x)\sin(\varphi x))$

B. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN 2.

VD4: Tìm nghiệm riêng của PT sau: $y'' - 5y' + 6y = 5.$

B1: Ta có PTTN: $y'' - 5y' + 6y = 0$

PT đặc trưng: $k^2 - 5k + 6 = 0 \rightarrow \left[\begin{array}{l} k_1 = 3 \\ k_2 = 2 \end{array}\right.$ ⇒NTQ: $y = C_1.e^{2x} + C_2.e^{3x}$

B2: Xét $f(x) = 5 = e^{0x}.5 \rightarrow \begin{cases} \gamma = 0 \\ P_n(x) = 5 \rightarrow bậc\ 0 \end{cases}$

$Vì\ \gamma = 0$ không là nghiệm của PTDT nên nghiệm riêng của PTKTN có dạng:

$Y = e^{0x}.A = A$, (A là đa thức bậc 0 phải tìm)→ $Y' = 0 \rightarrow Y'' = 0$

Thế vào PTKTN ta được: $0 - 5.0 + 6.A = 5 \rightarrow A = \frac{5}{6}$

Nghiệm riêng của PTKTN là $Y = \frac{5}{6}$

B. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN 2.

VD5: Tìm nghiệm riêng của PT: $y'' - 3y' + 2y = 5.sin2x$

B1: PTTN $y'' - 3y' + 2y = 0 \rightarrow PTĐT : k^2 - 3k + 2 = 0 \rightarrow \left[\begin{array}{l} k_1 = 1 \\ k_2 = 2 \end{array}\right. \rightarrow NTQ: \mathcal{y} = C_1.e^{2x} + C_2.e^{1x}$

B2: Xét $f(x) = 5sin2x$ →TH2

$\rightarrow f(x) = e^{0x}(0.cos2x + 5.sin2x) \rightarrow \ \theta \pm \varphi i = 0 \pm 2i$ →Không là nghiệm của PTDT

$$\rightarrow Y = e^{0x}(A.cos2x + B.sin2x) = Acos2x + B.sin2x$$

$$\rightarrow Y' = -2A.sin2x + 2B.cos2x \rightarrow Y'' = -4A.cos2x - 4B.sin2x$$

Thế Y, Y', Y'' vào PTKTN, ta được:

$$-4A.cos2x - 4B.sin2x - 3(-2A.sin2x + 2B.cos2x) + 2(Acos2x + B.sin2x) = 5sin2x$$

→Gom hệ số sau đó dùng đồng nhất thức ta được:

$$A = \frac{3}{4}, B = -\frac{1}{4} \rightarrow Y = \frac{3}{4}cos2x - \frac{1}{4}sin2x$$

B3: Nghiệm tổng quát của pt không thuần nhất: $y = \mathcal{y} + Y$

B. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN 2.

*Chú ý: Nếu f(x) có cả TH1 và TH2 (có cả e^x và $\sin, \cos$,…) thì ta sử dụng nguyên lí chồng nghiệm

⇒ Tìm từng nghiệm riêng rồi cộng lại

Tức là nếu y_1 là nghiệm của pt $y'' + qy' + py = f_1(x)$, y_2 là nghiệm của phương trình $y'' + qy' + py = f_2(x)$, thì $y = y_1 + y_2$ là nghiệm của phương trình $y'' + qy' + py = f_1(x) + f_2(x)$

B. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN 2.

VD6: $y'' - 3y' + 2y = 3x + 5.sin2x$

+B1: PTTN $y'' - 3y' + 2y = 0 \rightarrow PTĐT : k^2 - 3k + 2 = 0 \rightarrow \left[\begin{array}{l} k_1 = 1 \\ k_2 = 2 \end{array}\right.$

$\rightarrow NTQ$: $y = C_1.e^{2x} + C_2.e^{1x}$

+B2: $f(x) = 3x + 5.sin2x = f_1(x) + f_2(x)$

-$f_1(x) = 3x = e^{0x}.3x \rightarrow \begin{cases} \gamma = 0 \\ P_n(x) = 3x \rightarrow bậc\ 1 \end{cases} \rightarrow Y_{r1} = e^{0x}.C = C = ax + b \rightarrow Y' = a, Y'' = 0$

Thế Y, Y', Y'' vào PTKTN, ta được: $a = \frac{3}{2}, b = 0 \rightarrow Y_{r1} = \frac{3}{2}x$

-$f_2(x) = 5sin2x$ →TH2

$\rightarrow f_2(x) = e^{0x}(0.cos2x + 5.sin2x) \rightarrow \theta \pm \varphi i = 0 \pm 2i \rightarrow$ Không là nghiệm của PTDT.

$\rightarrow Y_{r2} = e^{0x}(A.cos2x + B.sin2x) = Acos2x + B.sin2x \rightarrow Y' = -2A.sin2x + 2B.cos2x$

$\rightarrow Y'' = -4A.cos2x - 4B.sin2x$

B. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN 2.

Thế Y, Y', Y'' vào PTKTN, ta được:

$$-4A.cos2x - 4B.sin2x - 3(-2A.sin2x + 2B.cos2x) + 2(Acos2x + B.sin2x) = 5sin2x$$

Gom hệ số sau đó dùng đồng nhất thức ta được: $A = \frac{3}{4}, B = -\frac{1}{4}$

$$\rightarrow Y_{r2} = \frac{3}{4}cos2x - \frac{1}{4}sin2x \rightarrow Y = Y_{r1} + Y_{r2} = \frac{3}{2}x + \frac{3}{4}cos2x - \frac{1}{4}sin2x$$

là nghiệm riêng của PTKTN

+B3: NTQ của PTKTN:

$$y = \mathcal{y} + Y = C_1.e^{2x} + C_2.e^{1x} + \frac{3}{2}x + \frac{3}{4}cos2x - \frac{1}{4}sin2x$$

QR CODE TRAIN ONL

ĐOÀN KHOA CÔNG NGHỆ PHẦN MỀM

BAN HỌC TẬP

BAN HỌC TẬP CÔNG NGHỆ PHẦN MỀM

TRAINING CUỐI KỲ HỌC KỲ I NĂM HỌC 2022 – 2023

Sharing is learning

HẾT

CẢM ƠN CÁC BẠN ĐÃ THEO DÕI
CHÚC CÁC BẠN CÓ KẾT QUẢ THI THẬT TỐT!

BAN HỌC TẬP

Khoa Công nghệ Phần mềm
Trường Đại học Công nghệ Thông tin
Đại học Quốc gia thành phố Hồ Chí Minh

CONTACT

bht.cnpm.uit@gmail.com
fb.com/bhtcnpm
fb.com/groups/bht.cnpm.uit