BAN HỌC TẬP CÔNG NGHỆ PHẦN MỀM

TRAINING CUỐI KỲ HỌC KỲ I NĂM HỌC 2022 – 2023

ĐOÀN KHOA CÔNG NGHỆ PHẦN MỀM
BAN HỌC TẬP
Sharing is learning

BAN HỌC TẬP

Khoa Công nghệ Phần mềm

Trường Đại học Công nghệ Thông tin

Đại học Quốc gia thành phố Hồ Chí Minh

CONTACT

bht.cnpm.uit@gmail.com

fb.com/bhtcnpm

fb.com/groups/bht.cnpm.uit

TRAINING

ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

Thời gian: 19h30 ngày 15/02/2023

Địa điểm: Microsoft Team - w2dsy1q

Trainers: Lê Hữu Độ - KTPM2022.1

Mai Văn Tân - KHMT2022.4

ĐOÀN KHOA CÔNG NGHỆ PHẦN MỀM

BAN HỌC TẬP

Sharing is learning

Nội dung Training

I. Không gian vector

II. Không gian Euclide

III. Trị riêng – Vector riêng – Chéo hóa ma trận

IV. Dạng toàn phương

Nội dung Training

I. **Không gian vector**
    a. Không gian vector
        i. Định nghĩa
        ii. Tính chất
    b. Không gian vector con
        i. Định nghĩa
        ii. Định lí
    c. Sự phụ thuộc tuyến tính và độc lập tuyến tính
        i. Định nghĩa
        ii. Phương pháp xét sự độc lập, phụ thuộc
        iii. Nhận xét
    d. Tập sinh, cơ sở, và số chiều của không gian vector.
        i. Định nghĩa
        ii. Hạng của một hệ vector
    e. Không gian con sinh bởi hệ vector
        i. Định lí
        ii. Không gian nghiệm của hệ phương trình thuần nhất
            i. Định lí
            ii. Định nghĩa
    f. Ma trận chuyển cơ sở, biểu diễn vector theo cơ sở
        i. Tọa độ của một vector đối với một cơ sở
        ii. Đổi cơ sở, đổi tọa độ
            i. Ma trận chuyển cơ sở
            ii. Tính chất

Nội dung Training

II. Không gian Euclide

a. Không gian Euclide
   i. Định nghĩa không gian Euclide
   ii. Công thức tính độ dài vector
   iii. Góc giữa hai vector
   iv. Khoảng cách giữa hai vector x, y

b. Hệ trực giao, trực chuẩn. Quá trình trực giao hóa, trực chuẩn hóa bằng phương pháp Gram-Schmidt
   i. Định nghĩa hệ trực giao, trực chuẩn
   ii. Phương pháp Gram-Schmidt

III. Trị riêng – Vector riêng – Chéo hóa ma trận

a. Trị riêng, vector riêng
   i. Định nghĩa
   ii. Các bước tìm giá trị riêng, vector riêng

b. Chéo hóa ma trận
   i. Định nghĩa
   ii. Điều kiện chéo hóa được của một ma trận
   iii. Cách chéo hóa ma trận

IV. Dạng toàn phương

a. Định nghĩa

b. Dạng chính tắc

c. Đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc
   i. Bằng phương phép biến đổi trực giao
   ii. Bằng phương pháp Lagrange

Không gian vector

a. Không gian vector
b. Không gian vector con
c. Sự phụ thuộc tuyến tính và độc lập tuyến tính
d. Tập sinh, cơ sở và số chiều của không gian vector
e. Không gian con sinh bởi hệ vector
f. Ma trận chuyển cơ sở, biểu diễn vector theo cơ sở

Không gian vector

a. Không gian vector

i. Định nghĩa:

- Cho một tập $V \neq \emptyset$ được gọi là không gian vector trên R nếu V thỏa mãn hai phép toán :

+ Cộng: $\forall x, y \in V$ thì $x + y \in V$
+ Nhân: $\forall x \in V, \alpha \in R$ thì $\alpha x \in V$

- Hai phép toán thõa mãn 8 tiên đề:

$(\forall x, y \in V;\ \alpha, \beta \in R)$

1. $x + y = y + x$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. $\exists \theta \in V: x + \theta = x$
4. $\exists (-x) \in V: x + (-x) = \theta$
5. $1x = x$
6. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$
7. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
8. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

Không gian vector

a. Không gian vector

ii. Tính chất:

- Véctơ θ là duy nhất
- Véctơ đối của véctơ là duy nhất
- $\forall x \in V$ ta có $0.x = \theta$
- $\forall x \in V$ ta có $-1.x = -\mathrm{x}$
- $\forall k \in R$ ta có $k.\theta = \theta$
- $\forall x \in V\ k \in R$ ta có $\mathrm{k}.x = \theta \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 0 \\ x = \theta \end{array}\right.$

Không gian vector

b. Không gian vector con

i. Định nghĩa

- Cho V là không gian vector, W là tập con của V. Khi đó W là không gian con của V khi và chỉ khi:

  i) $W \neq \emptyset$
  ii) $\forall x, y \in W$, ta có $x + y \in W$
  iii) $\forall x \in W$, $\alpha \in R$ ta có $\alpha x \in W$

- Hoặc:

  i) $W \neq \emptyset$
  ii) $\forall x, y \in W$, $\alpha \in R$ ta có $\alpha x + y \in W$

Không gian vector

b. Không gian vector con

ii. Định lý (Tiêu chuẩn không gian con)

- Cho không gian vecto V. Tập con $\emptyset \neq A \subset V$ là không gian vecto con của V khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \forall a, b \in A \text{ thì } a + b \in A \\ \forall \alpha \in R, \forall \in A \text{ thì } \alpha a \in A \end{cases}$$

Xét xem W có là không gian con của $\mathbb{R}^3$ không?

$$W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 3x_2 = 1\}$$

Ta có tính chất: mọi không gian con đều chứa vector θ

$\theta = (0,0,0)$ Mà $0 + 3.0 = 1 \neq 0 \Rightarrow \theta$ không thuộc W

$\Rightarrow$ W không là không gian con của R^3

Không gian vector

c. Sự phụ thuộc và độc lập tuyến tính

i. Định nghĩa

- Cho V là một KGVT và $a_1, a_2, \dots, a_n \in V$
- Tổ hợp tuyến tính: $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 + \dots + \lambda_n a_n \in V; \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n \in R$

  x được gọi là một tổ hợp tuyến tính của hệ vector $a_1, a_2, \dots, a_n$
- Độc lập tuyến tính: HÖvÐct¬ $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ lµ hÖ®éc lËp tuyÕn tÝnh

  $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 + \dots + \lambda_n a_n = \theta$

  Ví i $\lambda_i = 0; \forall i = \overline{1, n}$
- Phụ thuộc tuyến tính: HÖvÐct¬ $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ lµ hÖ®éc lËp tuyÕn tÝnh

  $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 + \dots + \lambda_n a_n = \theta$

  Với λ_i không đồng thời bằng 0 $\forall i = \overline{1, n}$

Không gian vector

c. Sự phụ thuộc và độc lập tuyến tính

ii. Phương pháp xét sự độc lập, phụ thuộc

Bước 1: Lập ma trận bằng cách xếp vector thành các dòng.

Bước 2:

✓ Với ma trận vuông và không vuông: Xác định hạng r(A) của A.

- Nếu r(A) = số vector thì các vector độc lập tuyến tính
- Nếu r(A) < số vector thì các vector phụ thuộc tuyến tính

✓ Với ma trận vuông: Ta tính định thức det(A)

- Nếu det(A)≠ 0 thì các vecto độc lập tuyến tính
- Nếu det(A)=0 thì các vecto phụ thuộc tuyến tính

✓ Trường hợp các vector là đa thức, ma trận,..: Dùng định nghĩa đưa về hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

- Hệ có nghiệm tầm thường ⇒ Hệ độc lập tuyến tính
- Hệ vô số nghiệm ⇒ Hệ phụ thuộc tuyến tính

Không gian vector

c. Sự phụ thuộc và độc lập tuyến tính

ii. Phương pháp xét sự độc lập, phụ thuộc

Ví dụ: Cho hệ $S = \{(1,3,2), (0,2,1), (1,2,4)\}$ trong không gian vector R^3
S là độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính?

Xét ma trận có các dòng là các vector của hệ S:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Có r(A) = 3 = số vector của hệ => Độc lập tuyến tính

Không gian vector

c. Sự phụ thuộc và độc lập tuyến tính

iii. Nhận xét

- Hệ vecto chứa vecto 0 luôn pttt
- Hệ vecto {x}, $x \neq 0$ luôn đltt
- Hệ vecto chứa 2 vector tỉ lệ luôn pttt
- Hệ vecto $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ phụ thuộc tuyến tính ⇔ tồn tại một $\mathrm{x_j}$ là thtt của các vector còn lại
- Trong KGVT R^n, mọi hệ có số vector > n ⇒ hệ đó pttt

Không gian vector

c. Sự phụ thuộc và độc lập tuyến tính

iii. Nhận xét

Ví dụ: Xét trong không gian R^4các hệ vector sau là phụ thuộc tuyến tính

$\mathrm{E}_1 = \{(0,0,0,0),(3,2,1,4),(2,1,2,10),(1,3,1,2)\}$ Có vector θ => phụ thuộc tt

$\mathrm{E}_2 = \{(1,2,1,4),(2,4,2,8),(1,3,1,2)\}$ Có 2 vector tỉ lệ=> phụ thuộc tt

$\mathrm{E}_3 = \{(1,2,3,4),(3,2,1,4),(2,1,2,10),(1,3,1,2),(3,2,1,4)\}$ Có 5 vector > n=> phụ thuộc tt

$\mathrm{E}_4 = \{(1,2,3,4),(3,2,1,4),(2,1,2,10),(2,3,2,-2)\}$ Có vector$(2,3,2,-2) = (1,2,3,4) + (3,2,1,4) - (2,1,2,10)$=> phụ thuộc tuyến tính

Không gian vector

d. Hệ sinh, cơ sở và số chiều của không gian vector

i. Hệ sinh

- Hệ vector $M = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset V$ được gọi là ***hệ sinh*** của KGVT V nếu mọi vector của V đều biểu thị tuyến tính được qua các vector của M
- Ký hiệu: V=<M>

ii. Cơ sở

- Hệ vector $M = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ được gọi là ***cơ sở*** của KGVT V

$$\begin{cases} \text{M là hệ sinh của V } (V = \langle M \rangle) \\ \text{M độc lập tuyến tính} \end{cases}$$

iii. Số chiều

- Số vector của một cơ sở V được gọi là ***số chiều*** của KGVT V
- Ký hiệu: dim V

Không gian vector

d. Hệ sinh, cơ sở và số chiều của không gian vector

$(*)$Chú ý: Cơ sở chính tắc

- Hệ vector $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ gồm các vector đơn vị của R^n là một cơ của không gian vector R^n và được gọi là cơ sở chính tắc.

$\Rightarrow \dim R^n = n$

(!) Định lý:

- Cho KGVT V có ***dimV = n.*** Khi đó mọi hệ vector gồm n vector ***độc lập tuyến tính*** đều là cơ sở của V (cách 2 c/m một hệ là cơ sở)

- Cho hệ M:

$$\begin{cases} \dim M = \dim V \\ M \text{ đltt} \end{cases}$$

=> M là cơ sở của V

Không gian vector

d. Hệ sinh, cơ sở và số chiều của không gian vector

Ví dụ: Cho $\mathrm{E} = \{(1,3,5),(3,1,8),(2,4,2)\} \subset \mathrm{R}^3$ chứng minh E là một cơ sở của không gian R^3

Xét ma trận dòng là các vector của hệ:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 8 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 8 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -8 & -7 \\ 0 & -2 & -8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -8 & -7 \\ 0 & 0 & -25 \end{pmatrix}$$

Do r(A)=3=số vector của hệ => hệ độc lập tuyến tính (1)
Mặt khác, do $\dim \mathrm{R}^3 = 3 = \dim \mathrm{E}$ (2)
Từ (1)và (2) suy ra E là một cơ sở của R^3

Không gian vector

d. Hệ sinh, cơ sở và số chiều của không gian vector

Ví dụ: Cho không gian vector P_3 là tập hợp các đa thức bậc 3 có hệ số thực theo ẩn x. Chứng minh $S = \{1, x, x^2, x^3\}$ là một cơ sở của P_3 và từ đó suy ra số chiều của P_3 ?

Vì đây là không gian vector P_3 không phải R^n => không sử dụng cách xét ma trận được => sử dụng định nghĩa.

- Chứng minh S là hệ sinh:

Xét $P(x) \in P_3$ có dạng $a + bx + cx^2 + dx^3$

Có $P(x) = a.1 + b.x + c.x^2 + d.x^3 \Rightarrow P(x) \in P^3$ luôn biểu thị tuyến tính qua được các phần tử của S

Kết luận: S là hệ sinh của P_3 (1)

- Chứng minh S độc lập tt:

Với mọi $a, b, c, d \in R$ sao cho $a + bx + cx^2 + dx^3 = 0.1 + 0.x + 0.x^2 + 0.x^3$

$\Rightarrow$ a=b=c=d=0

Kết luận: S độc lập tuyến tính (2)

Từ (1) và (2) => S là một cơ sở của P^3=> $\dim P^3 = 4$ => Tổng quát hóa: $\dim P^n = n + 1$

Không gian vector

e. Không gian con sinh bởi hệ vector

i. Định nghĩa, định lí

- **Định nghĩa 1**: Cho không gian vector V và $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ là một hệ vector của V. Ta gọi tập tất cả các tổ hợp tuyến tính của hệ S là ***bao tuyến tính*** của S

- **Ký hiệu**: spanS

$$\mathrm{SpanS} = \{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 + \cdots + \lambda_n a_n \mid \lambda_i \epsilon \mathrm{R}; a_i \in \mathrm{V}\}$$

- **Định lí 1**: spanS là một không gian con của V

- **Định nghĩa 2**: spanS được gọi là ***không gian vector con sinh bởi hệ vector*** S

Ký hiệu: $< \mathrm{S} > = < a_1, a_2, \dots, a_n > = \mathrm{spanS}$

Không gian vector

e. Không gian con sinh bởi hệ vector

ii. Không gian nghiệm của hệ phương trình thuần nhất

- Xét hệ phương trình tuyến tính thuần nhất m phương trình, n ẩn:

$$AX = 0\ (*)$$

Tập hợp: $N = \{X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n | AX = 0\}$ được gọi là ***không gian nghiệm*** của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất $(*)$

Định lý: N được gọi là không gian nghiệm của $(*)$ và dimN=n-r
Với: n là số ẩn của phương trình, r = r(A)

Không gian vector

e. Không gian con sinh bởi hệ vector

ii. Không gian nghiệm của hệ phương trình thuần nhất

Ví dụ 1: Cho $V' = \{(x_1, x_2, x_3) | x_3 = x_1 + 2x_2\} \subset R^3$:
Tìm cơ sở và số chiều của V'?

Với mọi vector $(x_1, x_2, x_3) \in V'$ ta có:
$(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_1 + 2x_2) = x_1(1,0,1) + x_2(0,1,2)$
Xét $S = \{(1,0,1), (0,1,2)\}$ ⇒S là hệ sinh của V'
Xét $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow r(A) = 2 =$ số vector S
$\Rightarrow$ S độc lập tuyến tính
Vậy $S = \{(1,0,1), (0,1,2)\}$ là một cơ sở của V'
DimV'=DimS=2

Không gian vector

e. Không gian con sinh bởi hệ vector

ii. Không gian nghiệm của hệ phương trình thuần nhất

Ví dụ 2 (Đề ĐSTT 2018-2019):

Trên R^6 cho $\mathrm{W} = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \middle| \begin{array}{c} x_5 + 4x_6 - 10x_3 + x_2 - 2x_1 = 0 \\ 11x_3 - x_4 + 3x_1 = 0 \\ x_4 - 3x_6 - 2x_2 + 2x_1 = 0 \end{array} \right\} \subset \mathrm{R}^3$:

Tìm hệ sinh,cơ sở và số chiều của W?

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -10 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 11 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 1 & -10 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -8 & -2 & 3 & 12 \\ 0 & -1 & -10 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 1 & -10 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -8 & -2 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & -38 & 1 & 6 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - 10x_3 + x_5 + 4x_6 = 0 \\ 3x_2 - 8x_3 - 2x_4 + 3x_5 + 12x_6 = 0 \\ -38x_3 + x_4 + 6x_5 + 15x_6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 + x_2 - 10x_3 + x_5 + 4x_6 = 0 \\ 3x_2 - 8x_3 - 2x_4 + 3x_5 + 12x_6 = 0 \\ x_3 = \dfrac{x_4 + 6x_5 + 15x_6}{38} \end{cases}$$

Không gian vector

e. Không gian con sinh bởi hệ vector

ii. Không gian nghiệm của hệ phương trình thuần nhất

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - 10x_3 + x_5 + 4x_6 = 0 \\ x_2 = \dfrac{8x_3 + 2x_4 - 3x_5 - 12x_6}{3} = \dfrac{8\dfrac{x_4 + 6x_5 + 15x_6}{38} + 2x_4 - 3x_5 - 12x_6}{3} = \dfrac{\dfrac{42}{19}x_4 - \dfrac{33}{19}x_5 - \dfrac{168}{19}x_6}{38} \\ x_3 = \dfrac{x_4 + 6x_5 + 15x_6}{38} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{x_2 - 10x_3 + x_5 + 4x_6}{2} = \dfrac{\dfrac{42x_4 - 33x_5 - 169x_6}{722} - 10\dfrac{x_4 + 6x_5 + 15x_6}{38} + x_5 + 4x_6}{2} = -\dfrac{37}{361}x_4 - \dfrac{1173}{1444}x_5 - \dfrac{3019}{722}x_6 \\ x_2 = \dfrac{42x_4 - 33x_5 - 169x_6}{722} \\ x_3 = \dfrac{x_4 + 6x_5 + 15x_6}{38} \end{cases}$$

Không gian vector

e. Không gian con sinh bởi hệ vector

ii. Không gian nghiệm của hệ phương trình thuần nhất

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (-\frac{37}{361}x_4 - \frac{1173}{1444}x_5 - \frac{3019}{722}x_6; \frac{42x_4 - 33x_5 - 169x_6}{722}; \frac{x_4 + 6x_5 + 15x_6}{38}; x_4; x_5; x_6)$$

$$x_4\left(-\frac{37}{361}, \frac{21}{361}, \frac{1}{38}, 1,0,0\right) + x_5\left(-\frac{1173}{1444}, \frac{-33}{722}, \frac{3}{19}, 0,1,0\right) + x_6\left(-\frac{3019}{722}, \frac{-169}{722}, \frac{15}{38}, 0,0,1\right)$$

$$Xét\ S = \{\left(-\frac{37}{361}, \frac{21}{361}, \frac{1}{38}, 1,0,0\right), \left(-\frac{1173}{1444}, \frac{-33}{722}, \frac{3}{19}, 0,1,0\right), \left(-\frac{3019}{722}, \frac{-169}{722}, \frac{15}{38}, 0,0,1\right)\}$$

Dễ thấy S là hệ sinh của W và S độc lập tt

$\Rightarrow$ S là cơ sở của W

$\Rightarrow$ DimW=DimS=3

Không gian vector

f. Ma trận chuyển cơ sở, biểu diễn vector theo cơ sở

i. Tọa độ của một vector đối với một cơ sở:

- Cho hệ $\mathrm{E} = \{\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \dots, \mathrm{e}_\mathrm{n}\}$ là một cơ sở của KGVT V.

- $\forall$x $\in$ V và bộ số thực $(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \dots, \mathrm{x}_\mathrm{n})$ sao cho $\mathrm{x} = \mathrm{x}_1\mathrm{e}_1 + \mathrm{x}_2\mathrm{e}_2 + \cdots \mathrm{x}_\mathrm{n}\mathrm{e}_\mathrm{n}$

Ta nói $(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \dots, \mathrm{x}_\mathrm{n})$ là tọa độ của x đối với cơ sở E.

- Ký hiệu: $[\mathrm{x}]_\mathrm{E} = \begin{pmatrix} \mathrm{x}_1 \\ \mathrm{x}_2 \\ \dots \\ \mathrm{x}_\mathrm{n} \end{pmatrix}$

<u>Chú ý:</u> Trong ***không gian R^n***, ta viết $\mathrm{x} = (\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \dots, \mathrm{x}_\mathrm{n})$ thì $(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \dots, \mathrm{x}_\mathrm{n})$ là tọa độ của cơ sở chính tắc.

Không gian vector

f. Ma trận chuyển cơ sở, biểu diễn vector theo cơ sở

ii. Đổi cơ sở, đổi tọa độ

(∗)Đổi cơ sở:

- Trong không gian vector V cho 2 cơ sở α và β:

$\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ $\beta = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$

Gọi $[\beta_1]_\alpha = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \dots \\ x_{n1} \end{pmatrix}$, $[\beta_2]_\alpha = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \dots \\ x_{n2} \end{pmatrix}$,…, $[\beta_n]_\alpha = \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \dots \\ x_{nn} \end{pmatrix}$ là các tọa độ của β trong α.

$$P = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

Được gọi là ma trận chuyển cơ sở từ β sang α
Ký hiệu: $P_{\beta \to \alpha}$

- **Định lý:** Nếu P là ma trận chuyển cơ sở từ β sang α thì P khả nghịch
Và P^{-1} là ma trận chuyển cơ sở từ α sang β

Không gian vector

f. Ma trận chuyển cơ sở, biểu diễn vector theo cơ sở

ii. Đổi cơ sở, đổi tọa độ

(∗)Đổi tọa độ:

Định lý: Trong không gian vector V cho 2 cơ sở α và $\beta, x \in V$:

$$[x]_\alpha = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}; [x]_\beta = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

Khi đó: $[x]_\alpha = P_{\alpha\to\beta}.[x]_\beta$

Nhận xét: $[x]_\beta = P^{-1}_{\alpha\to\beta}.[x]_\alpha$

Không gian vector

f. Ma trận chuyển cơ sở, biểu diễn vector theo cơ sở

ii. Đổi cơ sở, đổi tọa độ

$(*)$Đổi tọa độ:

Ví dụ: Cho các cơ sở của không gian vector R^3

$$A = \{(1,2,0);(1,-1,2);(0,1,1)\}$$
$$B = \{(0,-1,1);(1,2,0);(-1,1,-1)\}$$

a. Tìm ma trận chuyển cơ sở từ A sang B và ngược lại

b. Cho x thuộc R_3 có tọa độ trong B là (3,1,8). Tìm $[x]_A$

a.

$$(0,-1,1) = a_1(1,2,0) + b_1(1,-1,2) + c_1(0,1,1)$$
$$(1,2,0) = a_2(1,2,0) + b_2(1,-1,2) + c_2(0,1,1)$$
$$(-1,1,-1) = a_3(1,2,0) + b_3(1,-1,2) + c_3(0,1,1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = -\frac{2}{5}, b_1 = \frac{2}{5}, c_1 = \frac{1}{5} \\ a_2 = 1, b_2 = 0, c_2 = 0 \\ a_3 = -\frac{1}{5}, b_3 = -\frac{4}{5}, c_3 = \frac{3}{5} \end{cases}$$

Không gian vector

f. Ma trận chuyển cơ sở, biểu diễn vector theo cơ sở

ii. Đổi cơ sở, đổi tọa độ

$(*)$Đổi tọa độ:

Ta có ma trận chuyển cơ sở $A \to B$

$$\Rightarrow P_{A\to B} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & 1 & -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & 0 & -\frac{4}{5} \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \Rightarrow P_{B\to A} = P_{A\to B}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Không gian vector

f. Ma trận chuyển cơ sở, biểu diễn vector theo cơ sở

ii. Đổi cơ sở, đổi tọa độ

(∗)Đổi tọa độ:

b. Cho x thuộc R_3 có tọa độ trong B là (3,1,8). Tìm $[x]_A$

$$[x]_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow [x]_\mathrm{A} = P_{A\to\mathrm{B}}.[x]_\mathrm{B} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & 1 & -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & 0 & -\frac{4}{5} \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{5} \\ -\frac{26}{5} \\ \frac{27}{5} \end{pmatrix}$$

Không gian Euclide

a. Không gian Euclide
b. Hệ trực giao, trực chuẩn. Quá trình trực giao hóa, trực chuẩn hóa bằng phương pháp Gram-Schmidt

Không gian Euclide

a. Không gian Euclide

i. Định nghĩa không gian Euclide

Cho không gian vector V trên $\mathbb{R}$, lấy bất kỳ x, $y \in V$. Tích vô hướng của x và y là một số thực, ký hiệu là $\langle x,y\rangle$ thỏa mãn các tính chất sau:

1/ $\langle x,x\rangle \geq 0$ và $\langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

2/ $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$

3/ $\langle x+y,z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle$; $\forall z \in V$

4/ $\langle kx,y\rangle = k\langle x,y\rangle$; $\forall k \in \mathbb{R}$

Khi đó, V được gọi là không gian Euclide

Không gian Euclide

ii. Công thức tính độ dài vector

Cho E là không gian vector Euclide và $x \in V$, ta định nghĩa độ dài của vector x như sau:

$||x|| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$

Nếu $||x||=1$ thì ta nói x là vector đơn vị

iii. Góc giữa hai vector

Cho V là một không gian Euclide và $x, y \in V$. Góc giữa hai vector x và y được xác định bởi công thức:

$$\cos(\widehat{x, y}) = \frac{\langle x,y \rangle}{\|x\|\|y\|}$$

Không gian Euclide

iv. Khoảng cách giữa hai vector x, y

$d(x,y) = ||x-y|| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$

❖ Tính chất

- $||x|| \geq 0$ và $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$
- $||kx|| = |k|\,||x||;\ \forall k \in \mathbb{R}$
- $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$
- Bất đẳng thức Cauchy-Schwartz: $|\langle x,y \rangle| \leq ||x||\,||y||$

Không gian Euclide

Ví dụ: Trong $\mathbb{R}^3$ cho $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3)$ và tích vô hướng $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3$

a/ Tìm tích vô hướng u = (2,1,0) và v = (3,-2,4)

b/ Tìm độ dài vector u = (3,2,1)

c/ Tìm khoảng cách giữa vector u = (1,2,1) và v = (3,0,2)

d/ Tìm góc giữa vector u = (1,0,1) và v = (2,1,0)

Lời giải

a/ $\langle u, v\rangle = 2.3 + 2.1.(-2) + 0.4 = 2$

b/ $||u|| = \sqrt{3.3 + 2.2.2 + 1.1} = 3\sqrt{2}$

c/ $||u - v|| = \sqrt{(-2)(-2) + 2.2.2 + (-1)(-1)} = \sqrt{13}$

d/ $\cos(\widehat{u, v}) = \frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Không gian Euclide

b. Hệ trực giao, trực chuẩn. Quá trình trực giao hóa, trực chuẩn hóa bằng phương pháp Gram-Schmidt

i. Định nghĩa hệ trực giao, trực chuẩn

Một vector trong không gian Euclide được gọi là hệ trực giao nếu các vector của hệ trực giao với nhau từng đôi một: $\langle u_i, u_j \rangle = 0$, , $\forall i, j = 1, \ldots, k$, $i \neq j$

Mọi vector trong không gian Euclide được gọi là hệ trực chuẩn nếu hệ này trực giao và mọi vector của hệ đều có chuẩn bằng 1: $\| u_i \| = 1$, $\forall i = 1, \ldots, k$

Không gian Euclide

ii. Phương pháp Gram-Schmidt

Cho {e_1, e_2 ,..., e_n} là một tập các vector của không gian Euclide V, ta xây dựng được một tập trực giao {u_1, u_2,..., u_n} như sau:

$$u_1 = e_1$$

$$u_2 = e_2 - \frac{\langle e_2, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1$$

$$u_3 = e_3 - \frac{\langle e_3, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 - \frac{\langle e_3, u_2 \rangle}{\langle u_2, u_2 \rangle} u_2$$

$$u_n = e_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle e_n, u_i \rangle}{\langle u_i, u_i \rangle} u_i$$

Không gian Euclide

Tiến hành xây dựng cơ sở trực chuẩn $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ của V bằng cách chuẩn hóa các vector đã tìm được trên:

$$v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}, v_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|}, \dots, v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}$$

Ví dụ: Trong không gian Euclide $\mathbb{R}^3$ cho tích vô hướng chính tắc E ={(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)}. Hãy trực chuẩn hóa họ vector E bằng phương pháp Gram-Schmidt.

Lời giải: $u_1 = e_1 = (1,1,1)$

$$u_2 = e_2 - \frac{(e_2, u_1)}{(u_1, u_1)} u_1 = (0,1,1) - \frac{(0,1,1)(1,1,1)}{(1,1,1)(1,1,1)}(1,1,1) = (0,1,1) - \frac{2}{3}(1,1,1,) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

Không gian Euclide

Chọn $u_2 = (-2,1,1)$

$$u_3 = e_3 - \frac{(e_3, u_1)}{(u_1, u_1)} u_1 - \frac{(e_3, u_2)}{(u_2, u_2)} u_2 = (0,0,1) - \frac{(0,0,1)(1,1,1)}{(1,1,1)(1,1,1)}(1,1,1) - \frac{(0,0,1)(-2.1.1)}{(-2,1,1)(-2,1,1)}(-2,1,1)$$

$$= (0,0,1) - \frac{1}{3}(1,1,1) - \frac{1}{6}(-2,1,1) = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Chọn $u_3 = (0,-1,1)$

Vậy: cơ sở trực chuẩn $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}\right), \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)\right\}$

Trị riêng – Vector riêng – Chéo hóa ma trận

a. Trị riêng, vector riêng
b. Chéo hóa ma trận

Trị riêng – Vector riêng – Chéo hóa ma trận

a. Trị riêng, vector riêng

i. Định nghĩa giá trị riêng, vector riêng

Cho A là ma trận vuông cấp n. Nếu tồn tại vector $x \in \mathbb{R}^n, x \neq \theta$ sao cho A$x = \lambda x$. Khi đó số λ được gọi là trị riêng của A, vector x ≠ θ được gọi là vector riêng của A ứng với trị riêng λ.

ii. Các bước tìm giá trị riêng, vector riêng của ma trận vuông A:

1/ Giải phương trình đặc trưng det(A- λI) = 0 (với ẩn là λ) để tìm các trị riêng của A. Nếu λ là nghiệm đơn thì BĐS = 1, λ là nghiệm kép thì BĐS = 2.

2/ Giải hệ phương trình tuyến tính thuần nhất (A- λI)x = 0. Nghiệm không tầm thường của hệ chính là vector riêng cần tìm

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha f_1 \rightarrow 1 \text{ cơ sở } E_\lambda = \{f_1\} \rightarrow \mathrm{BHH}(\lambda) = \dim(E_\lambda) = 1 \\ x = \alpha f_1 + \beta f_2 \rightarrow 1 \text{ cơ sở } E_\lambda = \{f_1, f_2\} \rightarrow \mathrm{BHH}(\lambda) = \dim(E_\lambda) = 2 \end{array}\right.$$

Trị riêng – Vector riêng – Chéo hóa ma trận

Ví dụ: Cho A=$\begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & 3\end{bmatrix}$. Tìm trị riêng, cơ sở và chiều của không gian con riêng tương ứng.

<u>Lời giải</u>:

$\lambda^2 - trace(A)\lambda + \det(A) = 0$

Phương trình đặc trưng của A:

$$\det(A - \lambda I_2) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}1-\lambda & 4\\ 2 & 3-\lambda\end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\lambda_1 = -1\ (\text{BĐS} = 1)\\ \lambda_2 = 5\ (\text{BĐS} = 1)\end{array}\right.$$

Với λ = -1:

$$(A + I_2)x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c}2 & 4 & 0\\ 2 & 4 & 0\end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c}1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right] \Rightarrow x_1 + 2x_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases}x_1 = -2\alpha\\ x_2 = \alpha\end{cases}$$

Vậy các vector riêng ứng trị riêng λ = -1 là các vector khác không có dạng $x = \alpha\begin{bmatrix}-2\\ 1\end{bmatrix}$

$\Rightarrow 1$ cơ sở $\left\{\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}\right\}$ và BHH $= 1$.

Với λ = 5:

$$(A - 5I_2)x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c}-4 & 4 & 0\\ 2 & -2 & 0\end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c}-1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right] \Rightarrow -x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases}x_1 = \alpha\\ x_2 = \alpha\end{cases}$$

Vậy các vector riêng ứng trị riêng λ = 5 là các vector khác không có dạng $x = \alpha\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$

$\Rightarrow 1$ cơ sở $\left\{\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\right\}$ và BHH $= 1$.

Trị riêng – Vector riêng – Chéo hóa ma trận

Ví dụ: Tìm trị riêng, cơ sở và chiều của không gian con riêng tương ứng.

$$A=\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Lời giải:

Phương trình đặc trưng của A:

$$-\lambda^3 + trace(A)\lambda^2 - (A_{11} + A_{22} + A_{33})\lambda + \det(A) = 0$$

Tổng trị riêng $= trace(A)$, tích trị riêng$= \det(A)$

$$\det(A - \lambda I_3) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 + 11\lambda^2 - 35\lambda + 25 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 \text{ (BĐS} = 1) \\ \lambda_2 &= 5 \text{ (BĐS} = 2) \end{aligned}\right.$$

Trị riêng – Vector riêng – Chéo hóa ma trận

Với λ = 1:

$$(A - I_3)x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Vậy các vector riêng ứng trị riêng λ = 1 là các vector khác không có dạng $x = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$

1 cơ sở $\{(1,1,0)\}$ và BHH $= 1$

Trị riêng – Vector riêng – Chéo hóa ma trận

Với λ = 5:

$$(A-5I_3)x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2=0 \\ x_3=\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-\alpha \\ x_2=\alpha \\ x_3=\beta \end{cases}$$

Vậy các vector riêng ứng trị riêng λ = 5 là các vector khác không có dạng $x=\alpha\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ 1 cơ sở $\{(-1,1,0),(0,0,1)\}$ và BHH $=2$

Trị riêng – Vector riêng – Chéo hóa ma trận

b. Chéo hóa ma trận

i. Định nghĩa chéo hóa ma trận

Cho A là ma trận vuông, cấp n. A gọi là chéo hóa được nếu tồn tại ma trận P vuông, khả nghịch sao cho $P^{-1}AP=D$ là ma trận chéo.

Khi đó ta nói ma trận P làm chéo hóa ma trận A.

ii. Điều kiện chéo hóa được của một ma trận

Điều kiện cần và đủ để ma trận vuông A cấp n chéo hóa được là A có n vector riêng độc lập tuyến tính.

Trị riêng – Vector riêng – Chéo hóa ma trận

iii. Các bước chéo hóa ma trận

Bước 1. Giải phương trình đặc trưng $|A- \lambda I| = 0$ (với ẩn là λ) để tìm các trị riêng của A. Xác định BĐS của từng trị riêng.

Bước 2. Giải các hệ phương trình tương ứng với từng trị riêng. Tìm cơ sở của các không gian riêng để từ đó xác định BHH của từng trị riêng.

Bước 3. Nếu BHH của một trị riêng nào đó bé hơn BĐS của nó thì A không chéo hóa được. Nếu BHH của mọi trị riêng bằng BĐS của nó thì A chéo hóa được. Ma trận P có các cột là các vector riêng cơ sở của các không gian riêng. Các phần tử trên đường chéo chính của D lần lượt là các trị riêng tương ứng với các vector riêng tạo nên P.

Trị riêng – Vector riêng – Chéo hóa ma trận

Ví dụ: Tìm ma trận P làm chéo hóa ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

<u>Lời giải</u>:

Ở ví dụ trên ta đã tìm được các trị riêng, các vector riêng tương ứng

Các vector riêng độc lập tuyến tính

Các vector riêng ứng trị riêng λ = 1 là các vector khác không có dạng $x = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 1 \text{ cơ sở } \{(1,1,0)\}$

và $\text{BHH} = 1$

Trị riêng – Vector riêng – Chéo hóa ma trận

Các vector riêng ứng trị riêng λ = 5 là các vector khác không có dạng $x = \alpha\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$

$\Rightarrow 1 \text{ cơ sở } \{(-1,1,0),(0,0,1)\}$ và $\text{BHH} = 2$

Ma trận A chéo hóa được

$$\mathrm{P} = \begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\1 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \mathrm{D} = \mathrm{P}^{-1}\,\mathrm{AP} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 5 & 0\\0 & 0 & 5\end{bmatrix}$

Trị riêng – Vector riêng – Chéo hóa ma trận

Ví dụ: Cho A = $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Tính A^{2023}.

<u>Lời giải</u>:

Phương trình đặc trưng của A:

$$\det(A - \lambda I_3) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 21\lambda + 18 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 2 \ (\text{BĐS} = 1) \\ \lambda_2 = 3 \ (\text{BĐS} = 2) \end{array}\right.$$

Trị riêng – Vector riêng – Chéo hóa ma trận

Với λ = 2:

$$(A - 2I_3)x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Vậy các vector riêng ứng trị riêng λ = 2 là $x = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 1 \text{ cơ sở } \{(1,0,0)\} \text{ và BHH} = 1$

Trị riêng – Vector riêng – Chéo hóa ma trận

Với λ = 3:

$$(A - 3I_3)x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_2 = \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2\alpha \\ x_2 = \beta \\ x_3 = \alpha \end{cases}$$

Vậy các vector riêng ứng trị riêng λ = 3 là $x = \alpha \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ⇒1 cơ sở {(-2,0,1);(0,1,0)} và BHH = 2

Trị riêng – Vector riêng – Chéo hóa ma trận

Ma trận A chéo hóa được.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathrm{D} = \mathrm{P}^{-1}\,\mathrm{AP} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathrm{A} = \mathrm{PDP}^{-1} \Rightarrow \mathrm{A}^2 = \mathrm{PDP}^{-1}\mathrm{PDP}^{-1} = \mathrm{PD}^2\mathrm{P}^{-1}$$

$$\Rightarrow \mathrm{A}^{2023} = \mathrm{PD}^{2023}\mathrm{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^{2023} & 0 & 0 \\ 0 & 3^{2023} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{2023} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dạng toàn phương

a. Định nghĩa
b. Dạng chính tắc
c. Đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc

Dạng toàn phương

a. Định nghĩa

- Dạng toàn phương của n biến số $x_1, x_2, \dots, x_n$ là biểu thức có dạng:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j\,, x_{ij} \in R$$

$$\Leftrightarrow f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{11}^2x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{1n}x_1x_n +$$
$$a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{2n}x_2x_n + \cdots + a_{n1} + x_n + x_1 + \cdots + a_{nn}x_n^2$$

-Ma trận dạng toàn phương:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Dạng toàn phương

a. Định nghĩa

- Ví dụ: Cho dạng toàn phương
$f(x,y,z) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_2^2$

-Ma trận dạng toàn phương: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Dạng toàn phương

a. Định nghĩa

-Ví dụ: Cho dạng toàn phương

$f(x, y, z) = x_1^2 - 8x_1x_2 + x_1x_3 + 3x_2x_3 - x_3^2$

Tìm hạng của dạng toàn phương?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow r(A) = 3$$

Vậy hạng của dạng toàn phương là 3

Dạng toàn phương

b. Dạng chính tắc

- Định nghĩa: f là dạng toàn phương dạng chính tắc nếu nó có dạng:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$$

=> Là ma trận đường chéo $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$

Dạng toàn phương

c. Đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc

i. Bằng phương pháp biến đổi trực giao

- Trong không gian véctơ n chiều V, cho dạng toàn phương

$$\omega(x) = x^T A x$$

- Vì A là ma trận đối xứng thực nên A chéo hóa được bởi ma trận trực giao P và dạng chéo hóa của A là

$$D = P^{-1}AP$$

$\Rightarrow A = PDP^{-1} = PDP^T$ (do P trực giao nên $P^{-1} = P^T$). Khi đó

$$\omega(x) = x^T PDP^T x = (P^T x)^T D (P^T x)$$

- Đặt $y = P^T x \Leftrightarrow x = Py \ (*)$

Ta được dạng chính tắc: $\omega(x) = y^T D y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$

Dạng toàn phương

c. Đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc

i. Bằng phương pháp biến đổi trực giao

$\Rightarrow \omega(y) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2;$ với $\lambda_i; i = \overline{1, n}$ là các trị riêng của A

Như vậy, dạng toàn phương $\omega(x) = x^T A x$ luôn luôn có thể đưa về được dạng chính tắc $\omega(y) = y^T A y$ bằng cách chéo hóa trực giao ma trận A của dạng toàn phương

Phương pháp :

B1. Viết ma trận A của dạng toàn phương trong cơ sở chính tắc.

B2. Chéo hóa trực giao A bởi ma trận trực giao P và có được dạng chéo của A là ma trận D.

B3. Kết luận: Dạng chính tắc cần tìm là

$$\omega(x) = y^T D y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$$

Dạng toàn phương

c. Đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc

i. Bằng phương pháp biến đổi trực giao

Ví dụ: Đưa dạng toàn phương sau về dạng chính tắc bằng phương pháp biến đổi trực giao?

$f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$

Ta có ma trận toàn phương $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{PT}: |\mathrm{A} - \lambda\mathrm{I}| = 0$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & \lambda-2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -\lambda & -1 \end{vmatrix} = -(2-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = 2 \text{ (nghiệm đơn)} \\ \lambda = -1 \text{(nghiệp kép)} \end{array}\right.$$

Dạng toàn phương

c. Đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc

i. Bằng phương pháp biến đổi trực giao

$$-\text{ Xét }\lambda = 2, (\mathrm{A} - \lambda\mathrm{I})\mathrm{x} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \mathrm{x}_1 = \mathrm{x}_2 + \mathrm{x}_3 \\ \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3 \in \mathrm{R} \end{cases}$$

$$(x_1, x_2, x_3) = (x_2 + x_3, x_2, x_3) = x_2(1,1,0) + x_3(1,0,1)$$

$$E = \{(1,1,0), (1,0,1)\} \Rightarrow \text{Cơ sở trực giao}: u_1 = x_1 = (1,1,0), u_2 = x_2 - \frac{\langle x_2, u_1 \rangle u_1}{\|u_1\|^2} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$$

$$\text{Chọn } u_2 = (1, -1, 2)$$

$$-\text{ Xét }\lambda = -1, (\mathrm{A} - \lambda\mathrm{I})\mathrm{x} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \mathrm{x}_1 = -\mathrm{x}_3 \\ x_2 = x_3 \\ \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3 \in \mathrm{R} \end{cases}$$

$$(x_1, x_2, x_3) = (-x_3, x_3, x_3) = x_3(-1,1,1)$$

$$E = \{(-1,1,1)\} \Rightarrow \text{Cơ sở trực giao}: u_1 = x_1 = (-1,1,1)$$

Dạng toàn phương

c. Đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc

i. Bằng phương pháp biến đổi trực giao

$$\Rightarrow \text{Các trị riêng} \begin{cases} u_1 = (1,1,0) \\ u_2 = (1,-1,2) \\ u_3 = (-1,1,1) \end{cases} \Rightarrow \text{Trực chuẩn} \begin{cases} P_1 = \dfrac{u_1}{\|u_1\|} = (\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0) \\ P_2 = \dfrac{u_2}{\|u_2\|} = (\dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{-1}{\sqrt{6}}, \dfrac{2}{\sqrt{6}}) \\ P_3 = \dfrac{u_3}{\|u_3\|} = (\dfrac{-1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}) \end{cases}$$

$$\text{Đặt } P = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{-1}{\sqrt{6}} & \dfrac{2}{\sqrt{6}} \\ \dfrac{-1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, D = P^T A P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Đặt } x = Py, y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Dạng chính tắc là } f = 2y_1^2 + 2y_2^2 - y_3^2$$

Dạng toàn phương

c. Đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc

ii. Bằng phương pháp Lagrange

Bước 1: Nhóm tất cả các số hạng có chứa thừa số x1 và them bớt vào đó các số hạng có dạng $b_k x_k^2, c_k x_i x_j$ để được một bình phương đủ:

$$f(x,x) = \frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n)^2 + g_2(x,x)$$

Trong đó, $g(x,x)$ chỉ chứa các bình phương và các số hạng là tích chéo của $x_2, \dots, x_n$

Bước 2: Đặt $\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ x_2' = x_2 \\ \dots\dots \\ x_n' = x_n \end{cases}$ .Khi đó, $f(x,x) = \frac{1}{a_{11}}{x_1'}^2 + \sum_{i,j=2}^{n} a_{ij}' x_i' x_j'$

Bước 3: Lặp các bước 1, 2 đối với $\sum_{i,j=2}^{n} a_{ij}' x_i' x_j'$

Sau một số bước hữu hạn ta đưa được dạng toàn phương về dạng chính tắc

$\lambda_1 \bar{x}_1^2 + \lambda_2 \bar{x}_2^2 + \lambda_3 \bar{x}_3^2 + \dots + \lambda_n \bar{x}_n^2 \;\; (r \leq n)$

Dạng toàn phương

c. Đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc

ii. Bằng phương pháp Lagrange

Ví dụ 1: Đưa dạng toàn phương sau về dạng chính tắc bằng phương pháp Lagrange?

$f = x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$

$$f = x_1^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 5x_2^2 - 4x_3^2$$
$$= x_1^2 + 2x_1(x_2 - 2x_3) + (x_2 - 2x_3)^2 - (x_2 - 2x_3)^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2$$
$$= (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + 4x_2^2 + 8x_2x_3 - 8x_3^2 = (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + (2x_2 + x_3)^2 - 9x_3^2$$

$$\text{Đặt} \begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - 2x_3 \\ y_2 = 2x_2 + x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 - \dfrac{y_2}{2} + \dfrac{5y_3}{2} \\ x_2 = \dfrac{y_2 - y_3}{2} \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

Vậy dạng toàn phương chính tắc là $f = y_1^2 + y_2^2 - 9y_3^2$

Dạng toàn phương

c. Đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc

ii. Bằng phương pháp Lagrange

Ví dụ 2: Đưa dạng toàn phương sau về dạng chính tắc bằng phương pháp Lagrange?

$f = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$

Đặt $\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$

$f = y_1^2 - y_2^2 + (y_1+y_2)y_3 + (y_1-y_2)y_3 = y_1^2 - y_2^2 + 2y_1y_3 = (y_1+y_3)^2 - y_2^2 - y_3^2$

Đặt $\begin{cases} z_1 = y_1 + y_3 \\ z_2 = y_2 \\ z_3 = y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = z_1 - z_3 \\ y_2 = z_2 \\ y_3 = z_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = z_1 + z_2 - z_3 \\ x_2 = z_1 - z_2 - z_3 \\ x_3 = z_3 \end{cases}$

Vậy dạng toàn phương chính tắc là $f = z_1^2 - z_2^2 - z_3^2$

QR CODE

BAN HỌC TẬP CÔNG NGHỆ PHẦN MỀM

TRAINING CUỐI KỲ HỌC KỲ I NĂM HỌC 2022 – 2023

Sharing is learning

HẾT

CẢM ƠN CÁC BẠN ĐÃ THEO DÕI
CHÚC CÁC BẠN CÓ KẾT QUẢ THI THẬT TỐT!

BAN HỌC TẬP

Khoa Công nghệ Phần mềm

Trường Đại học Công nghệ Thông tin

Đại học Quốc gia thành phố Hồ Chí Minh

CONTACT

bht.cnpm.uit@gmail.com

fb.com/bhtcnpm

fb.com/groups/bht.cnpm.uit