TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN
KHOA KHOA HỌC MÁY TÍNH

BÀI TẬP MÔN PHÂN TÍCH VÀ THIẾT KẾ THUẬT TOÁN
HOMEWORK #02: PHÂN TÍCH THUẬT TOÁN ĐỆ QUY

GV hướng dẫn: Huỳnh Thị Thanh Thương

Nhóm thực hiện:
1. Nguyễn Gia Bảo - 22520109
2. Phạm Nguyên Anh - 22520069
3. Phạm Huỳnh Nhựt Anh - 22520068
4. Hoàng Công Chiến - 22520155

TP.HCM, ngày 13 tháng 04 năm 2024

Câu 1: Thành lập phương trình đệ quy kèm giải thích cách thành lập

1.a Gửi ngân hàng 1000 USD, lãi suất 12%/năm. Số tiền có được sau 30 năm là bao nhiêu?

```
calculate_amount(n):
    if n == 0:
    return 1000
else
    return calculate_amount(n-1) * 1.12
#Thời gian
n = 30 năm
```

$$T(n) = \begin{cases} C1 & n = 0 \\ T(n-1) + C2 & n > 0 \end{cases}$$

Vì ta đã thực hiện 1 đệ quy calculate_amount(n-1) nên đa thức của ta là T(n-1).
C(2) là thời gian để thực hiện phép cộng trong biểu thức calculate_amount(n-1) * 1.1.
C(1) là thời gian thực hiện chương trình trong trường hợp dừng (khi n = 0).

1.b

```
long Fibo(int n)
{
    if (n == 0 || n == 1)
    return 1;
    return Fibo(n-1)+Fibo(n-2);
}
```

Vì ta đã thực hiện 1 đệ quy Fibo(n-1) và 1 đệ quy Fibo(n-2) nên đa thức của ta là T(n-1) và T(n-2).
C(2) là thời gian để thực hiện phép cộng trong biểu thức Fibo(n-1) + Fibo(n-2).
C(1) là thời gian thực hiện chương trình trong trường hợp dừng (khi n = 1 hoặc n=0).

$$T(n) = \begin{cases} C(1) & n = 0 \text{ hoặc } n = 1 \\ T(n-1) + T(n-2) + C(2) & n > 1 \end{cases}$$

1.c

```
public int g(int n)
{
    if (n == 11)
      return 2;
    else
      return 3*g(n/2)+g(n/2)+5;
}
```

$$T(n) = \begin{cases} C(1) & n = 1 \\ 2 * T(n/2) + C(2) & n > 1 \end{cases}$$

Vì ta đã thực hiện 2 lần dệ quy của g(n/2) đa thức của g(n/2) là 2*T(n/2).
C(2) là thời gian để thực hiện phép nhân và phép cộng trong biểu thức 3*g(n/2)+g(n/2)+5.
C(1) là thời gian thực hiện chương trình trong trường hợp dừng (khi n = 1).

1.d

```
long xn(int n)
{
    if (n == 0) return 1;
    long s = 0;
    for (int i=1; i<=n; i++);
       s = s + i*i*xn(n - 1)
    return s;
}
```

$$T(n) = \begin{cases} C(1) & n = 0 \\ n * T(n-1) + C(2) * n & n > 0 \end{cases}$$

Mỗi lần vòng lặp for chạy 1 lần thì ta thực hiện 1 lần đề quy xn(n -1)
mà vòng lặp for chạy n lần
=> ta thực hiện n lần đệ quy xn(n - 1).
C(2)là thời gian để thực hiện phép nhân và phép cộng trong biểu thức s = s + i*i*xn(n - 1).
C(1) là thời gian thực hiện chương trình trong trường hợp dừng (khi n = 1).

1.e

```
draw (n)
{   if (n<1) return 0;
    for(i=1;J<=n;i++)
        for (j=1;J<=n;j++)
           print('*');
    Draw(n-3);
}
```

$$T(n) = \begin{cases} C(1) & n < 1 \\ T(n-3) + C(2)n^2 & n \geq 1 \end{cases}$$

Vì ta đã thực hiện 1 lần dệ quy draw(n - 3) nên đa thức của ta là T(n-3)
$C(2) * n^2$ là thời gian phân chia và kết hợp các kết quả của đoạn for).
C(1) là thời gian thực hiện chương trình trong trường hợp dừng (khi n < 1).

1.e

```
hanoi(n,A,B,C)
{   if (n==1) transfer (A,C);
    else
    {    hanoi(n-1,A,C,B);
           transfer (A,C);
         hanoi(n-1,B,A,C)
    }
}
```

$$T(n) = \begin{cases} 1 & n == 1 \\ 2 * T(n-1) + 1 & n > 1 \end{cases}$$

Vì ta đã thực hiện 2 lần dệ quy lần lượt là hanoi(n-1,A,C,B) và hanoi(n-1,B,A,C) nên đa thức của ta là 2*T(n-1)
1 (ta chỉ dùng 1 thao tác tranfer (A,C)) là thời gian phân chia và kết hợp các kết quả của đoạn for).
1 (ta chỉ dùng 1 thao tác tranfer (A,C)) là thời gian thực hiện chương trình trong trường hợp dừng (khi n == 1).

Câu 2: Giải phương trình đệ quy bằng phương pháp truy hồi (thay thế)

2.1/ $T(n) = 2T(n/2) + n^2, \qquad T(1) = 1$

Ta có :

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T(n/2) + n^2 \\ &= 2\left[2T(n/2^2) + \left(\frac{n}{2}\right)^2\right] + n^2 \\ &= 2^2.T(n/2^2) + 2.\frac{n^2}{2^2} + n^2 \\ &= 2^2\left[T(n/2^3) + \left(\frac{n}{2^2}\right)^2\right] + 2.\frac{n^2}{2^2} + n^2 \\ &= 2^3.T(n/2^3) + n^2.(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} \end{aligned}$$

....

$$= 2^i.T(n/2^i) + n^2.\sum_{k=0}^{i-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

Dừng lại khi đạt tới T(1) $\Rightarrow \frac{n}{2^i} = 1 \Rightarrow i = \log_2 n$
Vậy:

$$T(n) = 2^(\log_2 n).T(1) + n^2.\sum_{k=0}^{\log_2 n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

Theo công thức: $\sum_{k=0}^{n}(a^k) = \frac{a^{k+1}-1}{a-1}$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow T(n) &= n + n^2.\left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2 n} - 1}{-\frac{1}{2}}\right] \\
&= n + n^2.\left(2 - \frac{2}{n}\right) \\
&= 2n^2 - n
\end{aligned}$$

2.2/ $T(n) = 2.T(n/2) + \log n \qquad T(1) = 1$

Ta có:

$$\begin{aligned}
T(n) &= 2.T(n/2) + \log n \\
&= 2.\left[2.T(n/2^2) + \log\frac{n}{2}\right] + \log n \\
&= 2^2.T(n/2^2) + \log n + 2.\log\frac{n}{2} \\
&= 2^3.T(n/2^3) + \log\frac{n}{2^0} + 2.\log\frac{n}{2} + 2^2.\log\frac{n}{2^2} \\
&= 2^3.T(n/2^3) + 2^0.(\log n - \log 2^0) + 2^1.(\log n - \log 2^1) + 2^2.(\log n - \log 2^2) \\
&= 2^3.T(n/2^3) + \log n.(2^0 + 2^1 + 2^2) - (2^0.\log 2^0 + 2^1.\log 2^1 + 2^2.\log 2^2)
\end{aligned}$$

Coi hàm log là hàm log cơ số 2, ta được:

$$T(n) = 2^3.T(n/2^3) + \log n.(2^0 + 2^1 + 2^2) - (2^0.0 + 2^1.1 + 2^2.2)$$

....

$$T(n) = 2^i.T(n/2^i) + \log n.\sum_{k=0}^{i-1}(2^k) - \sum_{k=0}^{i-1}(2^k.k)$$

Dừng lại khi đạt tới T(1) $\Rightarrow \frac{n}{2^i} = 1 \Rightarrow i = \log n$. Ta được:

$$T(n) = 2^{\log n}.T(1) + \log n.\sum_{k=0}^{\log n-1}(2^k) - \sum_{k=0}^{\log n-1}(2^k.k)$$

Theo công thức $\sum_{i=1}^{n}(i.2^i) = (n-1).2^{n+1} + 2$, ta được:

$$\begin{aligned}
&= n + \log n.\left[\frac{2^{\log n} - 1}{2-1}\right] - (\log n - 2).2^{\log n} - 2 \\
&= n + \log n.(n-1) - (\log n - 2).n - 2 \\
&= n + n.\log n - \log n - n.\log n + 2n - 2 \\
&= 3n - \log n - 2
\end{aligned}$$

Vậy $T(n) = 3n - \log n - 2$

2.3/ $T(n) = 8.T(n/2) + n^3, \qquad T(1) = 1$

Ta có:

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 8.T(n/2) + n^3 \\
&= 8.\left[8.T(n/2^2) + \left(\frac{n}{2}\right)^3\right] + n^3 \\
&= 8^2.T(n/2^2) + 8.\frac{n^3}{2^3} + n^3 \\
&= 8^2.\left[8.T(n/2^3) + \left(\frac{n}{4}\right)^3\right] + 8.\frac{n^3}{2^3} + n^3 \\
&= 8^3.T(n/2^3) + 8^2.\frac{n^3}{4^3} + 8.\frac{n^3}{2^3} + n^3 \\
&= 8^3.T(n/2^3) + n^3 + n^3 + n^3 \\
&= 8^3.T(n/2^3) + 3n^3 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
&= 8^i.T(n/2^i) + i.n^3
\end{aligned}
$$

Dừng lại khi đạt tới $T(1) \Rightarrow n/2^i = 1 \Rightarrow i = \log_2 n$, coi hàm log là hàm log cơ số 2, ta được:

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 8^{\log n}.T(1) + n^3.\log n \\
&= n^3 + n^3.\log n
\end{aligned}
$$

Vậy $T(n) = n^3 + n^3.\log n$

2.4/ $T(n) = 4T(n/3) + n, \qquad T(1) = 1$

Ta có:

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 4T(n/3) + n \\
&= 4.\left[4.T(n/3^2) + \frac{n}{3}\right] + n \\
&= 4^2.T(n/3^2) + \frac{4n}{3} + n \\
&= 4^2.\left[4.T(n/3^3) + \frac{n}{3^2}\right] + \frac{4n}{3} + n \\
&= 4^3.T(n/3^3) + \frac{4^2.n}{3^2} + \frac{4n}{3} + n \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= 4^i.T(n/3^i) + n.\sum_{k=0}^{i-1}(\left(\frac{4}{3}\right)^k
\end{aligned}
$$

Dừng lại khi đạt tới $T(1) \Rightarrow \frac{n}{3^i} = 1 \Rightarrow i = \log_3 n$, ta được:

$$T(n) = 4^{\log_3 n}.T(1) + n. \sum_{k=0}^{\log_3 n - 1} \left(\frac{4}{3}\right)^k$$

Theo công thức tổng chuỗi cấp số nhân hữu hạn, ta có:

$$\begin{aligned}
&= 4^{\log_3 n} + n. \left[\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^{\log_3 n} - 1}{\frac{4}{3} - 1} \right] \\
&= 4^{\log_3 n} + 3n. \left[\left(\frac{4}{3}\right)^{\log_3 n} - 1 \right] \\
&= 4^{\log_3 n} + 3n. \left(\frac{4}{3}\right)^{\log_3 n} - 3n \\
&= 4^{\log_3 n} + 4^{\log_3 n}.3n. \frac{1}{3^{\log_3 n}} - 3n \\
&= 4^{\log_3 n}.(1+3) - 3n \\
&= 4.4^{\log_3 n} - 3n
\end{aligned}$$

Vậy $T(n) = 4.4^{\log_3 n} - 3n$

2.5/ $T(n) = 9.T(n/3) + n^2, \qquad T(1) = 1$

Ta có:

$$\begin{aligned}
T(n) &= 9.T(n/3) + n^2 \\
&= 9. \left[9.T(n/3^2) + \left(\frac{n}{3}\right)^2 \right] + n^2 \\
&= 9^2.T(n/3^2) + 9. \left(\frac{n}{3}\right)^2 + n^2 \\
&= 9^2. \left[9.T(n/3^3) + \left(\frac{n}{3^2}\right)^2 \right] + 9. \left(\frac{n}{3}\right)^2 + n^2 \\
&= 9^3.T(n/3^3) + 9^2. \left(\frac{n}{3^2}\right)^2 + 9. \left(\frac{n}{3}\right)^2 + n^2 \\
&= 9^3.T(n/3^3) + 9^2.\frac{n^2}{9^2} + 9.\frac{n^2}{3^2} + n^2 \\
&= 9^3.T(n/3^3) + 3.n^2 \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= 9^i.T(n/3^i) + i.n^2
\end{aligned}$$

Dừng lại khi đạt tới $T(1) \Rightarrow \frac{n}{3^i} = 1 \Rightarrow i = \log_3 n$, ta được:

$$\begin{aligned} T(n) &= 9^{log_3 n}.T(1) + n^2.\log_3 n \\ &= n^2 + n^2.\log_3 n \\ &= n^2.(1 + \log_3 n) \\ &= n^2.\log_3(3n) \end{aligned}$$

Vậy $T(n) = n^2.\log_3(3n)$

2.6/ $T(n) = 2.T(\sqrt{n}) + 1, \qquad T(2) = 0$

Ta có:

$$\begin{aligned} T(n) &= 2.T(\sqrt{n}) + 1 \\ &= 2.T(n^{\frac{1}{2}}) + 1 \\ &= 2[2.T(n^{(\frac{1}{2})^2}) + 1] + 1 \\ &= 2^2.T(n^{\frac{1}{2^2}}) + 2 + 1 \\ &= 2^3.T(n^{\frac{1}{2^3}}) + 4 + 2 + 1 \\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &= 2^i.T(n^{\frac{1}{2^i}}) + \sum_{k=0}^{i-1} 2^k \end{aligned}$$

Theo công thức $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$ ta có:

$$T(n) = 2^i.T(n^{\frac{1}{2^i}}) + 2^i - 1 \qquad (*)$$

Dừng lại khi đạt tới $T(2)$, nên:

$$\begin{aligned} n^{\frac{1}{2^i}} &= 2 \\ \frac{1}{2^i} &= \log_n 2 \\ 2^i &= \log_2 n \end{aligned}$$

Thay vào $(*)$, ta có:

$$\begin{aligned} T(n) &= \log_2 n.T(2) + \log_2 n - 1 \\ &= \log_2 n - 1 \end{aligned}$$

Vậy $T(n) = \log_2 n - 1$

Câu 3: Giải phương trình đệ quy dùng phương trình đặc trưng

a/

$$
\begin{aligned}
&T(n) = 4T(n-1) - 3T(n-2)\\
&T(0) = 1\\
&T(1) = 2
\end{aligned}
$$

Xét phương trình $T(n) - 4T(n-1) + 3T(n-2) = 0$
Đặt $x^n = T(n)$
Ta có $x^n - 4x^{n-1} + 3x^{n-2} = 0$
Phương trình đặc trưng: $x^2 - 4x + 3 = 0$
$\Rightarrow (x-1)(x-3) = 0$
$\Rightarrow$ Phương trình có hai nghiệm đơn $x_1 = 1$ và $x_2 = 3$

$$
\begin{aligned}
&T(n) = c_1x_1^n + c_2x_2^n\\
&T(n) = c_1 1^n + c_2 3^n\\
&T(n) = c_1 + c_2 3^n
\end{aligned}
$$

$\begin{cases} T(0) = c_1 + c_2 3^0 = c_1 + c_2 = 1 \\ T(1) = c_1 + c_2 3^1 = c_1 + 3c_2 = 2 \end{cases} \quad \Rightarrow c_1 = \frac{1}{2}$ và $c_2 = \frac{1}{2}$
Kết luận: $T(n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}3^n$

b/

$$
\begin{aligned}
&T(n) = 4T(n-1) - 5T(n-2) + 2T(n-3)\\
&T(0) = 0\\
&T(1) = 1\\
&T(2) = 2
\end{aligned}
$$

Xét phương trình $T(n) - 4T(n-1) + 5T(n-2) - 2T(n-3)$
Đặt $x^n = T(n)$
Ta có: $x^n - 4x^{n-1} + 5x^{n-2} - 2x^{n-3} = 0$
Phương trình đặc trưng: $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$
$\Rightarrow (x-2)(x-1)^2 = 0$
$\Rightarrow$ Phương trình có một nghiệm đơn $x_1 = 2$ và nghiệm kép $x_2 = 1$

$$
\begin{aligned}
&T(n) = c_1x_1^n + c_2x_2^n + c_3nx^n\\
&T(n) = c_1 2^n + c_2 1^n + c_3 n 1^n\\
&T(n) = c_1 2^n + c_2 + c_3 n
\end{aligned}
$$

$$\begin{cases} T(0) = c_1 2^0 + c_2 + 0c_3 = c_1 + c_2 = 0 \\ T(1) = c_1 2^1 + c_2 + 1c_3 = 2c_1 + c_2 + c_3 = 1 \\ T(2) = c_1 2^2 + c_2 + 2c_3 = 4c_1 + c_2 + 2c_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \\ c_3 = 1 \end{cases}$$

Kết luận: $T(n) = n$

c/

$$\begin{aligned} T(n) &= T(n-1) + T(n-2) \\ T(0) &= 1 \\ T(0) &= 1 \end{aligned}$$

Xét phương trình $T(n) - T(n-1) - T(n-2) = 0$
Đặt $x^n = T(n)$
Ta có: $x^n - x^{n-1} - x^{n-2} = 0$
Phương trình đặt trưng: $x^2 - x - 1 = 0$
$\Rightarrow (x - \frac{1+\sqrt{5}}{2})(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2})$
$\Rightarrow$ phương trình có 2 nghiệm đơn $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ và $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$$\begin{aligned} T(n) &= c_1 x_1^n + c_2 x_2^n \\ T(n) &= c_1(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + c_2(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n \end{aligned}$$

$\begin{cases} T(0) = c_1(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^0 + c_2(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^0 \\ T(1) = c_1(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^1 + c_2(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^1 \end{cases}$
$\Rightarrow \begin{cases} T(0) = c_1 + c_2 = 1 \\ T(1) = (\frac{1+\sqrt{5}}{2})c_1 + (\frac{1-\sqrt{5}}{2})c_2 \end{cases}$
$\Rightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} \\ c_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \end{cases}$
Kết luận: $T(n) = (\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}})c_1 + (\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}})c_2$

Câu 4: Giải bằng phương trình dặc trưng

a/ $T(n) = 7T(n-1) - 12T(n-2), \qquad T(0) = 1, T(1) = 0$

Ta có:

$$\begin{aligned} &T(n) = 7.T(n-1) - 12.T(n-2) \\ \Leftrightarrow\ &T(n) - 7.T(n-1) + 12.T(n-2) = 0 \qquad (*) \end{aligned}$$

Đặt $T(n) = x^n$, thay vào $(*)$, ta được:

$$x^n - 7.x^{n-1} + 12.x^{n-2} = 0$$
$$\Leftrightarrow x^{n-2}.(x^2 - 7x + 12) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^{n-2} = 0 & \\ x^2 - 7x + 12 = 0 & (1) \end{array}\right.$$

Ta thấy phương trình (1) chính là phương trình đặc trung của phương trình đệ quy (*). Giải phương trình đặc trưng, ta được:

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x_1 = 4 & \text{(nghiệm đơn} \rightarrow \text{cho 1 đơn thức)} \\ x_2 = 3 & \text{(nghiệm đơn} \rightarrow \text{cho 1 đơn thức)} \end{array}\right.$$

$\Rightarrow T(n)$ có dạng:

$$T(n) = C_1.x_1^n + C_2.x_2^n$$

Thay giá trị của x_1, x_2 vào, ta có:

$$T(n) = C_1.4^n + C_2.3^n$$

Tìm các hệ số:

$$\begin{cases} T(0) = 1 \\ T(1) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ 4C_1 + 3C_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -1 \\ C_2 = 2 \end{cases}$$

Vậy $T(n) = -4^n + 2.3^n$

b/

$$\begin{cases} T(n+1) = T(n) + 3n & n \geq 0 \\ T(0) = 7 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} T(n) = T(n-1) + 3n & n \geq 1 \\ T(0) = 7 \end{cases}$$

Hàm sinh của dãy vô hạn $\{T(n\}_0^\infty$ là:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \Sigma_{n=0}^{\infty} T(n)x^n \\
f(x) &= \Sigma_{n=1}^{\infty}[T(n-1)+3n]x^n + T(0)x^0 \\
f(x) &= x\Sigma_{n=1}^{\infty} T(n-1)x^{n-1} + 3\Sigma_{n=1}^{\infty} nx^n + 7 \\
f(x) &= xf(x) + 3[\frac{x}{(1-x)^2} - 0x^0] + 7 \\
f(x)(1-x) &= \frac{3x}{(1-x)^2} + 7 \\
f(x) &= \frac{3x}{(1-x)^3} + \frac{7}{1-x}
\end{aligned}$$

$\frac{3x}{(1-x)^3}$

$= \frac{3}{2}\Sigma_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)x^{n+1}$

$= \frac{3}{2}\Sigma_{n=0}^{\infty}(n+1)nx^n$

$\frac{7}{1-x}$

$= 7\Sigma_{n=0}^{\infty}x^n$

Vậy $f(x) = \Sigma_{n=0}^{\infty}[\frac{3}{2}n(n+1)+7)x^n]$

$\Rightarrow T(n) = \frac{3}{2}n(n+1)+7$

c/

Lời giải:

$T(n) = \begin{cases} 0 & \text{khi n = 0} \\ \sum_{k=0}^{n-1} T(k) & \text{khi n} \geq 1 \end{cases}$

Giải thích:

-Khi n = 0, số phép cộng cần thực hiện là 0

$\Rightarrow T(0) = 0$

-Khi n > 0, số phép cộng cần thực hiện là tổng các giá trị của T(k) với k chạy từ 0 tới n - 1 và trong vòng lặp có số con k = n, có 2 phép cộng được thực hiện.

$\Rightarrow T(n) = \sum_{k=0}^{n-1} T(k) + 2n$

-Biến đổi T(n):

$T(1) = T(0) + 2 * 1 = 2$

$T(2) = T(0) + T(1) + 2 * 2 = 6$

$T(3) = T(0) + T(1) + T(2) + 2 * 3 = 14$

$T(4) = T(0) + T(1) + T(2) + T(3) + 2 * 4 = 30$

$T(5) = T(0) + T(1) + T(2) + T(3) + T(4) + 2 * 5 = 62$

$\cdots\cdots$

$$\Rightarrow T(n) = \begin{cases} 0 & \text{khi n} = 0 \\ 2T(n-1)+2 & \text{khi n} \geq 1 \end{cases}$$

-Hàm sinh của dãy vô hạn $\{T(n)\}_0^\infty$ là:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} T(n)x^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (2T(n-1)+2)x^n \\ &= 2\sum_{n=1}^{\infty} T(n-1)x^n + 2\sum_{n=1}^{\infty} x^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Cho } A &= \sum_{n=1}^{\infty} T(n-1)x^n \\ &= x\sum_{n=1}^{\infty} T(n-1)x^{n-1} \\ &= xf(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Cho } B &= \sum_{n=1}^{\infty} x^n \\ &= x\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} \\ &= \frac{x}{1-x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(x) &= 2xf(x) + \frac{2x}{1-x} \\ &= \frac{2x}{(1-x)(1-2x)} \\ &= \frac{U}{1-2x} + \frac{V}{1-x} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} U+V=0 \\ -U-2V=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} U=2 \\ V=-2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(x) &= \frac{2}{1-2x} - \frac{2}{1-x} \\ &= 2\sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (2.2^n - 2)x^n \end{aligned}$$

-Vậy:

$T(n) = 2.2^n - 2 = 2^{n+1} - 2$

Câu 5: Giải bằng đoán nghiệm

a) $\begin{cases} T(1) = C_1 \\ T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + n \textbf{ nếu } n \geq 2 \end{cases}$

i.
Đoán $f(n) = an^3$
Cần chứng minh : $T(1) \leq f(1)$
Ta có : $\begin{cases} T(1) = C_1 \\ f(1) = a \end{cases} \rightarrow$ Nếu chọn $C_1 \leq a$ thì $T(1) \leq f(1)$
Giả sử $T(k) \leq f(k), \ \forall \ k < n$
Cần chứng mình : $T(n) \leq f(n)$ tại n

$$T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + n \leq 4f(\frac{n}{2}) + n$$
$$T(n) \leq 4a\frac{n^3}{8} + n$$
$$T(n) \leq a\frac{n^3}{2} + n$$
$$T(n) \leq an^3 - an^3 + a\frac{n^3}{2} + n$$
$$T(n) \leq an^3 + (-a\frac{n^3}{2} + n)$$
$$T(n) \leq f(n) + (-a\frac{n^3}{2} + n)$$

Nếu chọn a sao cho $-a\frac{n^3}{2} + n \leq 0$ thì $T(n) \leq f(n)$
Ta có : $\begin{cases} a \geq C_1 \ (1) \\ -a\frac{n^3}{2} + n \leq 0 \end{cases}$

Chọn $a = C_1 + 2$ (thỏa điều kiện (1)):

$$-(C_1 + 2)\frac{n^3}{2} + n \leq 0$$
$$n[-(C_1 + 2)\frac{n^2}{2} + 1] \leq 0$$
$$-(C_1 + 2)\frac{n^2}{2} + 1 \leq 0 \ (n \geq 1)$$
$$-(C_1 + 2)n^2 + 2 \leq 0$$
$$(C_1 + 2)n^2 \geq 2$$

Do : $\begin{cases} n^2 \geq 1 \ (n \geq 1) \\ C_1 + 2 \geq 2 \ (C_1 \geq 0) \end{cases} \rightarrow (C_1 + 2)n^2 \geq 2$ là đúng $\rightarrow$ Đoán nghiệm thành công

ii.
Đoán $f(n) = an^2$

Cần chứng minh : $T(1) \leq f(1)$

Ta có : $\begin{cases} T(1) = C_1 \\ f(1) = a \end{cases} \rightarrow$ Nếu chọn $C_1 \leq a$ thì $T(1) \leq f(1)$

Giả sử $T(k) \leq f(k),\ \forall\ k < n$

Cần chứng mình : $T(n) \leq f(n)$ tại n

$$\begin{aligned} T(n) &= 4T(\frac{n}{2}) + n \leq 4f(\frac{n}{2}) + n \\ T(n) &\leq 4a\frac{n^2}{4} + n \\ T(n) &\leq an^2 + n \\ T(n) &\leq f(n) + n \end{aligned}$$

Để $T(n) \leq f(n)$ thì $n \leq 0$ (sai do $n \geq 1$) $\rightarrow$ Đoán thất bại

iii.

Đoán $f(n) = an^2 - bn$

Cần chứng minh : $T(1) \leq f(1)$

Ta có : $\begin{cases} T(1) = C_1 \\ f(1) = a - b \end{cases} \rightarrow$ Nếu chọn $C_1 \leq a - b$ thì $T(1) \leq f(1)$

Giả sử $T(k) \leq f(k),\ \forall\ k < n$

Cần chứng mình : $T(n) \leq f(n)$ tại n

$$\begin{aligned} T(n) &= 4T(\frac{n}{2}) + n \leq 4f(\frac{n}{2}) + n \\ T(n) &\leq 4(a\frac{n^2}{4} - b\frac{n}{2}) + n \\ T(n) &\leq an^2 - 2bn + n \\ T(n) &\leq (an^2 - bn) + (-bn + n) \\ T(n) &\leq f(n) + (-bn + n) \end{aligned}$$

Nếu chọn b sao cho $-bn + n \leq 0$ thì $T(n) \leq f(n)$

Ta có : $\begin{cases} a - b \geq C_1 \ (1) \\ -bn + n \leq 0 \end{cases}$

Chọn $a = 2C_1 + 1$ và $b = C_1 + 1$ (thỏa điều kiện (1)):

$$\begin{aligned} -bn + n &\leq 0 \\ -(C_1 + 1)n + n &\leq 0 \\ n(-C_1 - 1 + 1) &\leq 0 \\ -nC_1 &\leq 0 \\ nC_1 &\geq 0 \end{aligned}$$

Do : $\begin{cases} n \geq 1 \\ C_1 \geq 0 \end{cases} \rightarrow nC_1 \geq 0$ là đúng $\rightarrow$ Đoán nghiệm thành công

b) $\begin{cases} T(1) = 1 \\ T(n) = 3T(\frac{n}{2}) + n^2 \textbf{ khi } n > 1 \end{cases}$

Đoán $f(n) = an^2 + b$
Cần chứng minh : $T(1) \leq f(1)$
Ta có : $\begin{cases} T(1) = 1 \\ f(1) = a + b \end{cases}$ $\rightarrow$ Nếu chọn $a + b \geq 1$ thì $T(1) \leq f(1)$
Giả sử $T(k) \leq f(k),\ \forall\ k < n$
Cần chứng mình : $T(n) \leq f(n)$ tại n

$$\begin{aligned} &T(n) = 3T(\frac{n}{2}) + n^2 \leq 3f(\frac{n}{2}) + n^2 \\ &T(n) \leq 3(a\frac{n^2}{4} + b) + n^2 \\ &T(n) \leq \frac{3}{4}an^2 + 3b + n^2 \\ &T(n) \leq (an^2 + b) - an^2 + 2b + \frac{3}{4}an^2 + n^2 \\ &T(n) \leq f(n) + (-an^2 + 2b + \frac{3}{4}an^2 + n^2) \\ &T(n) \leq f(n) + (-a\frac{n^2}{4} + n^2 + 2b) \end{aligned}$$

Nếu chọn a, b sao cho $-a\frac{n^2}{4} + n^2 + 2b \leq 0$ thì $T(n) \leq f(n)$
Ta có : $\begin{cases} a + b \geq 1 \ (1) \\ -a\frac{n^2}{4} + n^2 + 2b \leq 0 \end{cases}$

Chọn $a = 4$ và $b = 0$ (thỏa điều kiện (1)):

$$\begin{aligned} -n^2 + n^2 + 0 &\leq 0 \\ 0 &\leq 0 \text{ (luôn đúng)} \end{aligned}$$

$\rightarrow$ Dự đoán $f(n) = an^2 + b$ là đúng

c) $\begin{cases} T(n) = 1 \textbf{ khi } n \leq 5 \\ T(n) = T(\frac{n}{2}) + T(\frac{n}{4}) + n \end{cases}$

Đoán T(n) = O(n)
Cần chứng minh : $\exists c \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N}$ *sao cho* :
$T(n) \leq cn, \forall n \leq n_0$
Chọn trước $n_0 = 1 \rightarrow n \geq 1$

Đặt f(n) = cn $\rightarrow CM:\ T(n) \leq f(n)$

$$T(n) = T(\frac{n}{2}) + T(\frac{n}{4}) + n \leq f(\frac{n}{2}) + f(\frac{n}{4}) + n$$
$$T(n) \leq c\frac{n}{2} + c\frac{n}{4} + n$$
$$T(n) \leq cn - cn + c\frac{n}{2} + c\frac{n}{4} + n$$
$$T(n) \leq cn + (-c\frac{n}{4} + n)$$
$$T(n) \leq f(n) + (-c\frac{n}{4} + n)$$

Nếu chọn c sao cho $-c\frac{n}{4} + n \leq 0$ thì $T(n) \leq f(n)$

Ta có : $\begin{cases} c > 0\ (1) \\ -c\frac{n}{4} + n \leq 0 \end{cases}$

Chọn c = 5 (thỏa điều kiện (1)):

$$-5\frac{n}{4} + n \leq 0$$
$$n(-\frac{5}{4} + 1) \leq 0$$
$$Do\ n \geq 1$$
$$-\frac{5}{4} + 1 \leq 0$$
$$-\frac{1}{4} \leq 0 \text{(luôn đúng)}$$

$\rightarrow$ Dự đoán T(n) = O(n) là đúng