HÀM RIÊNG – TRỊ RIÊNG

$$Au = \lambda u \rightarrow \begin{cases} \det(A - I\lambda) = 0 \\ (A - I\lambda)u = 0 \end{cases}$$

$\det(A - I\lambda) = 0$ ← *phương trình đặc trưng (tìm các trị riêng)*

$\rightarrow V_\lambda = \{u \in R^n \setminus (A - I\lambda)u = 0\}$

các không gian riêng ứng với các trị riêng

$(A - I\lambda)u = 0$

phương trình tìm các vector riêng ứng với các trị riêng

A là ma trận vuông
u là một vector riêng
λ là trị riêng (số thực)

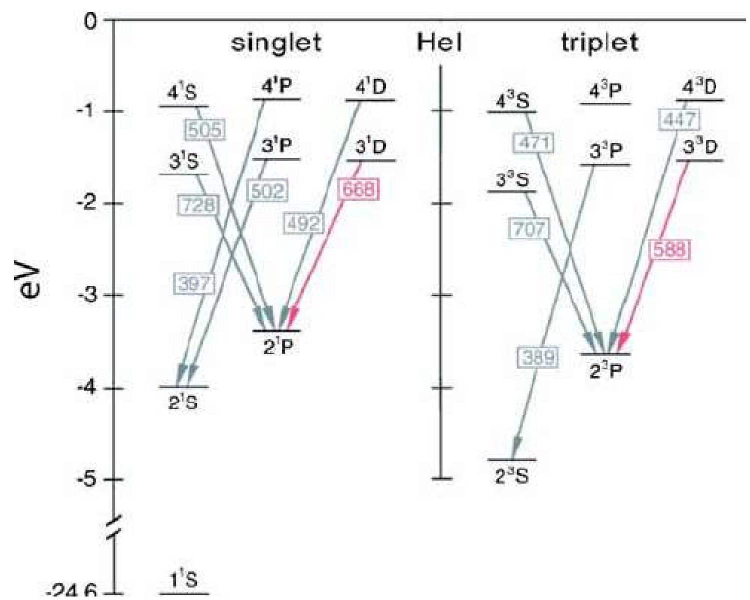
Tìm các trị riêng, vector riêng và không gian riêng với $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$

$$*\det(A - \lambda I_2) = 0 \rightarrow \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 3 & 8-\lambda \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \lambda^2 - 11\lambda + 18 = 0 \rightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = 2 \\ \lambda = 9 \end{array}\right.$$

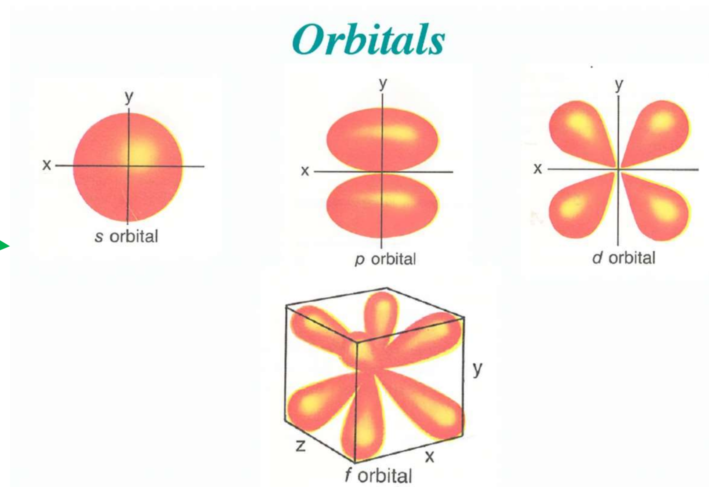
$$*\lambda = 2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -2t \\ x_2 = t \end{cases}, t \neq 0 \in R \rightarrow u = (-2,1) \rightarrow V_\lambda = \{(-2,1)\}$$

$$*\lambda = 9 \rightarrow \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = 3t \end{cases}, t \neq 0 \in R \rightarrow u = (1,3) \rightarrow V_\lambda = \{(1,3)\}$$

$$Au = \lambda u$$



singlet
HeI
triplet
eV
0
-1
-2
-3
-4
-5
-24.6
4¹S
4¹P
4¹D
3¹S
3¹P
3¹D
2¹P
2¹S
1¹S
4³S
4³P
4³D
3³S
3³P
3³D
2³P
2³S
505
728
397
502
492
668
471
707
389
447
588



Orbitals
s orbital
p orbital
d orbital
f orbital

CHÉO HÓA MA TRẬN

Tìm ma trận khả nghịch P sao cho

$$P^{-1}AP = D$$

trong đó D là ma trận chéo. P gọi là ma trận chéo hóa ma trận A.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1/3 \\ 1 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$\to P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- $A_{n\times n}$ chứa n vector ĐLTT ↔ A chéo hóa được
- $A_{n\times n}$ có n trị riêng thực phân biệt ↔ A chéo hóa được

Thuật toán chéo hóa ma trận $A_{n\times n}$

1. Tìm các trị riêng λ của pt $\det(A-\lambda I)=0$.
2. Tìm các không gian riêng V_λ ứng với các trị riêng λ. Nếu tổng số vector của các không gian riêng bằng n → chéo hóa được
3. Lập ma trận P là ma trận cột của các vector riêng u
4. Lập ma trận D có đường chéo là các trị riêng (tương ứng cột vector riêng)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \to \det(A-\lambda I_2) = 0 \to \left[\begin{array}{l} \lambda = -1 \\ \lambda = 2 \end{array}\right.$$

$$*\lambda_1 = -1 \to (A+I_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \to \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_2 \in R \end{cases}$$

$$\to (-x_2, x_2) \to x_2(-1,1) \to u_1 = (-1,1) \to V_{\lambda_1} = \{(-1,1)\}$$

$$*\lambda_2 = 2 \to (A-2I_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \to \begin{cases} x_1 \in R \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\to (x_1, 0) \to x_1(1,0) \to u_1 = (1,0) \to V_{\lambda_2} = \{(1,0)\}$$

$$\sum \dim V_\lambda = n = 2$$

→ chéo hóa được

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}\rightarrow\det\left(A-\lambda I_3\right)=0\rightarrow\left[\begin{array}{l}\lambda_1=1\\\lambda_2=4\end{array}\right.$$

$$*\lambda_1=1\rightarrow\left(A-I_3\right)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0\rightarrow x_1+x_2+x_3=0$$

$$\rightarrow\left(-x_2-x_3,x_2,x_3\right)\rightarrow x_2\left(-1,1,0\right)+x_3\left(-1,0,1\right)$$

$$\rightarrow\begin{cases}u_1=\left(-1,1,0\right)\\u_2=\left(-1,0,1\right)\end{cases}\rightarrow V_{\lambda_1}=\left\{\left(-1,1,0\right),\left(-1,0,1\right)\right\}$$

$$*\lambda_2=4\rightarrow\left(A-4I_3\right)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0\rightarrow x_1=x_2=x_3$$

$$\rightarrow\left(x_3,x_3,x_3\right)\rightarrow x_3\left(1,1,1\right)\rightarrow u_1=\left(1,1,1\right)$$

$$\rightarrow V_{\lambda_2}=\left\{\left(1,1,1\right)\right\}$$

$\sum\dim V_\lambda=n=3\ \rightarrow$ chéo hóa được

$$P=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}-1/3&2/3&-1/3\\-1/3&-1/3&2/3\\1/3&1/3&1/3\end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$D=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}$$

$$P=\begin{pmatrix}-1&1&-1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}-1/3&2/3&-1/3\\1/3&1/3&1/3\\-1/3&-1/3&2/3\end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$D=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$P=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\rightarrow P^{-1}=\begin{pmatrix}1/3&1/3&1/3\\-1/3&2/3&-1/3\\-1/3&-1/3&2/3\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\quad D=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}10 & -9\\ 4 & -2\end{pmatrix}\rightarrow \det\left(A-\lambda I_2\right)=0\rightarrow \lambda=4\rightarrow \left(A-4I_2\right)\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=0\rightarrow \begin{cases}x_1=\dfrac{3}{2}x_2\\ x_2\in R\end{cases}$$

$$\rightarrow\left(\frac{3}{2}x_2,x_2\right)\rightarrow x_2\left(\frac{3}{2},1\right)\rightarrow u\left(3,2\right)\rightarrow V_\lambda=\left\{\left(3,2\right)\right\}\rightarrow \sum \dim V_\lambda=1<n=2$$

→ Không chéo hóa được

Chứng minh không chéo hóa được

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 2 & -5 & 4\end{pmatrix}$$

ỨNG DỤNG CHÉO HÓA MA TRẬN

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & . & 0 \\ 0 & \lambda_2 & . & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & . & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & . & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = D \rightarrow \left(P^{-1}AP\right)^k = D^k$$

$$\rightarrow \underbrace{\left(P^{-1}AP\right).\left(P^{-1}AP\right)\ldots\left(P^{-1}AP\right)}_{k} = D^k$$

$$\rightarrow P^{-1}A^kP = D^k \rightarrow A^k = PD^kP^{-1}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^k = PD^kP^{-1}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

MA TRẬN TRỰC GIAO & CHÉO HÓA

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

- ✓ Ma trận trực giao → hệ các vector hàng (cột) trực giao.
- ✓ $P^T = P^{-1} \leftrightarrow P$ trực giao

$$P^{-1}AP = D$$

- ✓ có P là mt trực giao và thu D là mt chéo
- ✓ A gọi là chéo hóa trực giao được
- ✓ P gọi là mt làm chéo hóa trực giao mt A

- ➢ A có n vector riêng trực chuẩn → chéo hóa được
- ➢ A là mt đối xứng → chéo hóa được

Chéo hóa trực giao ma trận đối xứng thực:
áp dụng quá trình trực chuẩn cho hệ các vector riêng

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_\perp \to P_e$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_\perp \to P_e$$

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_\perp = \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 1 \\ 1 & -1/2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_e = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

DẠNG TOÀN PHƯƠNG

$$f\left(x_1,x_2,\dots,x_n\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$$

$$=a_{11}x_1^2+a_{11}x_1x_2+\dots+a_{1n}x_1x_n$$

$$+a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2^2+\dots+a_{2n}x_2x_n$$

$$+\dots$$

$$+a_{n1}x_nx_1+a_{n2}x_2^2+\dots+a_{nn}x_n^2$$

$$\begin{cases} a_{ij}\in R \\ b_{ij}=\begin{cases} a_{ij}, & i=j \\ a_{ij}/2, & i\neq j \end{cases} \end{cases} \rightarrow B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{11} & . & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & . & b_{2n} \\ . & . & . & . \\ b_{n1} & b_{n2} & . & b_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow f=X^TBX$$

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{pmatrix},\quad X^T=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & . & x_n \end{pmatrix}$$

$$f=2x_1^2-2x_2^2+x_3^2+2x_1x_2-x_1x_3+4x_2x_3$$

$$f=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}B\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1/2 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1/2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

Hạng của dạng toàn phương

$$\rho\left(B\right)=3$$

DẠNG TOÀN PHƯƠNG CHÍNH TẮC

$$\left.\begin{aligned} a_{ij} &= 0,\ i \neq j \\ \lambda_i &= a_{ii} \end{aligned}\right\} \to f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 = X^T D X$$

dạng chính tắc

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & . & 0 \\ 0 & \lambda_2 & . & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & \lambda_n \end{pmatrix}$$

λ = -1, 0 or 1

dạng chuẩn

Đưa về dạng chính tắc

- ✓ Xác định ma trận vuông đối xứng B của dạng toàn phương
- ✓ Thực hiện chéo hóa trực giao B để thu được P, sau đó tìm D

$$D = P^{-1} B P$$

$$f = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_e = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} f &= X^T B X = X^T \left(P D P^{-1} \right) X \\ &= X^T P D P^{-1} X = X^T P D P^T X \\ &= \left(P^T X \right)^T D \left(P^T X \right) \\ &= Y^T D Y = y_1^2 + y_2^2 + 4y_3^2,\ Y = P^T X \end{aligned}$$

Bài 5.1: Tìm trị riêng và cơ sở của các không gian riêng tương ứng của các ma trận sau đây:

a) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Bài 5.2: Chéo hóa các ma trận sau (nếu được)

$$a)\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix} \quad b)\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad c)\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$d)\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad e)\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad f)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

<u>Bài 5.3</u>: Chéo hoá trực giao các ma trận đối xứng sau:

a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$