1. Tập sinh hoặc không

$$A = \left\{(1,1,1);(1,2,1);(2,3,1)\right\} \subset R^3 \quad (Yes)$$

$$B = \left\{(1,1,1);(1,2,3);(3,2,1)\right\} \subset R^3 \quad (No)$$

$$C = \left\{x^2 + x + 1, 2x^2 + 3x + 1, x^2 + 2x\right\} \subset P_2(x) \quad (No)$$

2. Trên $\mathbb{R}^6$ cho tập hợp $W = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \middle| \begin{array}{l} x_4 - 4x_6 + 2x_2 + x_1 - 3x_3 = 0 \\ 3x_5 - 5x_4 - 3x_2 - 2x_1 = 0 \\ 8x_3 - 3x_2 - 2x_5 + 7x_6 - x_1 = 0 \end{array} \right\}$

Hãy tìm cơ sở và xác định số chiều cho W.

3. Trên $\mathbb{R}^6$ cho tập hợp $W = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \middle| \begin{array}{l} 6x_5 - x_6 + 2x_2 + x_1 - 3x_3 = 0 \\ 8x_3 - 20x_5 + 2x_6 + x_4 - 3x_1 - 5x_2 = 0 \\ 5x_3 - 3x_2 + 4x_6 - 5x_5 - x_1 - x_4 = 0 \end{array} \right\}$

Hãy tìm cơ sở và xác định số chiều cho W.

4. Trên $\mathbb{R}^3$ cho tập hợp $a = \{\alpha_1 = (1,0,5), \alpha_2 = (2,1,6), \alpha_3 = (3,4,0)\}$ và

tập hợp $\beta = \{\beta_1 = (1,1,1), \beta_2 = (1,2,2), \beta_3 = (1,2,3)\}$.

a/ Chứng tỏ rằng a và β là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

b/ Cho vector $\alpha = (4,5,2) \in \mathbb{R}^3$. Hãy tìm tọa độ của α theo cơ sở a.

c/ Gọi $\beta_0 = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.

Hãy tìm các ma trận chuyển cơ sở:

$$P = P_{\beta_0 \to a};\ Q = P_{\beta_0 \to \beta};\ \text{và}\ S = P_{a \to \beta}.$$

5. Trên $\mathbb{R}^3$ cho tập hợp $a = \{\alpha_1 = (1,1,0), \alpha_2 = (1,2,1), \alpha_3 = (1,3,1)\}$ và

tập hợp $\beta = \{\beta_1 = (1,0,0), \beta_2 = (2,1,0), \beta_3 = (3,4,-1)\}$.

a/ Chứng tỏ rằng a và β là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

b/ Cho vector $\alpha = (-2,-12,-7) \in \mathbb{R}^3$. Hãy tìm tọa độ của α theo cơ sở a.

c/ Gọi $\beta_0 = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.

Hãy tìm các ma trận chuyển cơ sở:

$$P = P_{\beta_0 \to a};\ Q = P_{\beta_0 \to \beta};\ \text{và}\ S = P_{a \to \beta}.$$

6. Cho ma trận thực $A=\begin{pmatrix} 7 & 9 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$.

Hãy chéo hóa A, rồi sau đó tìm A^m, với mọi m nguyên; $m \geq 0$.

7. Cho ma trận thực $A=\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$.

Hãy chéo hóa A, rồi sau đó tìm A^m, với mọi m nguyên; $m \geq 0$.

8. Cho dạng toàn phương $f:\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$,

và $\beta_0=\{e_1=(1,0,0),e_2=(0,1,0),e_3=(0,0,1)\}$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ sao cho:

$\forall X\in\mathbb{R}^3$, ta có $[X]_{\beta_0}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$, và $f(X)\equiv f(X,X)=2x_1x_2-6x_2x_3+2x_1x_3$.

a/ Hãy chính tắc hóa dạng toàn phương f.

b/ Chỉ ra một cơ sở β ứng với dạng chính tắc hóa này.

9. Cho dạng toàn phương $f:\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$,

và $\beta_0=\{e_1=(1,0,0),e_2=(0,1,0),e_3=(0,0,1)\}$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ sao cho:

$\forall X\in\mathbb{R}^3$, ta có $[X]_{\beta_0}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$, và $f(X)\equiv f(X,X)=3x_1^2+12x_1x_2-18x_2x_3+32x_1x_3-4x_2^2$.

a/ Hãy chính tắc hóa dạng toàn phương f.

b/ Chỉ ra một cơ sở β ứng với dạng chính tắc hóa này.

10. Cho dạng toàn phương $f:\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$,

và $\beta_0=\{e_1=(\ 1,\ \ 0,\ \ 0),\ \ e_2=(\ 0,\ \ 1,\ \ 0),\ \ e_3=(\ 0,\ \ 0,\ \ 1)\}$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$

sao cho: $\forall X\in\mathbb{R}^3$, ta có $[X]_{\beta_0}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$, và $f(X,X)=8x_1x_2-4x_1x_3+12x_2x_3$.

a/ Hãy chính tắc hóa dạng toàn phương f.

b/ Hãy chỉ ra một cơ sở β ứng với dạng chính tắc tìm được ở câu a/.

11. Trực giao hóa và trực chuẩn hóa bằng phương pháp Gram-Schmidt

$$A = \{(1,0,5),(2,1,6),(3,4,0)\}$$

$$B = \{(1,1,1),(1,2,2),(1,2,3)\}$$