Câu 1: Thành lập phương trình đệ quy kèm giải thích cách thành lập

1.a Gửi ngân hàng 1000 USD, lãi suất 12%/năm. Số tiền có được sau 30 năm là bao nhiêu?

```
calculate_amount(n):
    if n == 0:
    return 1000
else
    return calculate_amount(n-1) * 1.12
#Thời gian
n = 30 năm
```

$$T(n) = \begin{cases} C1 & n = 0 \\ T(n-1) + C2 & n > 0 \end{cases}$$

Vì ta đã thực hiện 1 đệ quy calculate_amount(n-1) nên đa thức của ta là T(n-1).
C(2) là thời gian để thực hiện phép cộng trong biểu thức calculate_amount(n-1) * 1.1.
C(1) là thời gian thực hiện chương trình trong trường hợp dừng (khi n = 0).

1.b

```
long Fibo(int n)
{
    if (n == 0 || n == 1)
    return 1;
    return Fibo(n-1)+Fibo(n-2);
}
```

Vì ta đã thực hiện 1 đệ quy Fibo(n-1) và 1 đệ quy Fibo(n-2) nên đa thức của ta là T(n-1) và T(n-2).
C(2) là thời gian để thực hiện phép cộng trong biểu thức Fibo(n-1) + Fibo(n-2).
C(1) là thời gian thực hiện chương trình trong trường hợp dừng (khi n = 1 hoặc n=0).

$$T(n) = \begin{cases} C(1) & n = 0 \text{ hoặc } n = 1 \\ T(n-1) + T(n-2) + C(2) & n > 1 \end{cases}$$

1.c

```
public int g(int n)
{
    if (n == 11)
      return 2;
    else
      return 3*g(n/2)+g(n/2)+5;
}
```

$$T(n) = \begin{cases} C(1) & n = 1 \\ 2 * T(n/2) + C(2) & n > 1 \end{cases}$$

Vì ta đã thực hiện 2 lần dệ quy của g(n/2) đa thức của g(n/2) là 2*T(n/2).
C(2) là thời gian để thực hiện phép nhân và phép cộng trong biểu thức 3*g(n/2)+g(n/2)+5.
C(1) là thời gian thực hiện chương trình trong trường hợp dừng (khi n = 1).

1.d

```
long xn(int n)
{
    if (n == 0) return 1;
    long s = 0;
    for (int i=1; i<=n; i++);
       s = s + i*i*xn(n - 1)
    return s;
}
```

$$T(n) = \begin{cases} C(1) & n = 0 \\ n * T(n-1) + C(2) * n & n > 0 \end{cases}$$

Mỗi lần vòng lặp for chạy 1 lần thì ta thực hiện 1 lần đề quy xn(n -1)
mà vòng lặp for chạy n lần
=> ta thực hiện n lần đệ quy xn(n - 1).
C(2)là thời gian để thực hiện phép nhân và phép cộng trong biểu thức s = s + i*i*xn(n - 1).
C(1) là thời gian thực hiện chương trình trong trường hợp dừng (khi n = 1).

1.e

```
draw (n)
{   if (n<1) return 0;
    for(i=1;J<=n;i++)
        for (j=1;J<=n;j++)
           print('*');
    Draw(n-3);
}
```

$$T(n) = \begin{cases} C(1) & n < 1 \\ T(n-3) + C(2)n^2 & n \geq 1 \end{cases}$$

Vì ta đã thực hiện 1 lần dệ quy draw(n - 3) nên đa thức của ta là T(n-3)
$C(2) * n^2$ là thời gian phân chia và kết hợp các kết quả của đoạn for).
C(1) là thời gian thực hiện chương trình trong trường hợp dừng (khi n < 1).

1.e

```
hanoi(n,A,B,C)
{   if (n==1) transfer (A,C);
    else
    {    hanoi(n-1,A,C,B);
           transfer (A,C);
         hanoi(n-1,B,A,C)
    }
}
```

$$T(n) = \begin{cases} 1 & n == 1 \\ 2 * T(n-1) + 1 & n > 1 \end{cases}$$

Vì ta đã thực hiện 2 lần dệ quy lần lượt là hanoi(n-1,A,C,B) và hanoi(n-1,B,A,C) nên đa thức của ta là 2*T(n-1)
1 (ta chỉ dùng 1 thao tác tranfer (A,C)) là thời gian phân chia và kết hợp các kết quả của đoạn for).
1 (ta chỉ dùng 1 thao tác tranfer (A,C)) là thời gian thực hiện chương trình trong trường hợp dừng (khi n == 1).

Câu 2: Giải phương trình đệ quy bằng phương pháp truy hồi (thay thế)

2.1/ $T(n) = 2T(n/2) + n^2, \qquad T(1) = 1$

Ta có :

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T(n/2) + n^2 \\ &= 2\left[2T(n/2^2) + \left(\frac{n}{2}\right)^2\right] + n^2 \\ &= 2^2.T(n/2^2) + 2.\frac{n^2}{2^2} + n^2 \\ &= 2^2\left[T(n/2^3) + \left(\frac{n}{2^2}\right)^2\right] + 2.\frac{n^2}{2^2} + n^2 \\ &= 2^3.T(n/2^3) + n^2.(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} \\ \text{..........} \\ &= 2^i.T(n/2^i) + n^2.\sum_{k=0}^{i-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k \end{aligned}$$

Dừng lại khi đạt tới T(1) $\Rightarrow \frac{n}{2^i} = 1 \Rightarrow i = \log_2 n$
Vậy:

$$T(n) = 2^(\log_2 n).T(1) + n^2.\sum_{k=0}^{\log_2 n - 1}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

Theo công thức: $\sum_{k=0}^{n}(a^k) = \frac{a^{k+1}-1}{a-1}$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow T(n) &= n + n^2.\left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2 n} - 1}{-\frac{1}{2}}\right] \\
&= n + n^2.\left(2 - \frac{2}{n}\right) \\
&= 2n^2 - n
\end{aligned}$$

2.2/ $T(n) = 2.T(n/2) + \log n \qquad T(1) = 1$

Ta có:

$$\begin{aligned}
T(n) &= 2.T(n/2) + \log n \\
&= 2.\left[2.T(n/2^2) + \log\frac{n}{2}\right] + \log n \\
&= 2^2.T(n/2^2) + \log n + 2.\log\frac{n}{2} \\
&= 2^3.T(n/2^3) + \log\frac{n}{2^0} + 2.\log\frac{n}{2} + 2^2.\log\frac{n}{2^2} \\
&= 2^3.T(n/2^3) + 2^0.(\log n - \log 2^0) + 2^1.(\log n - \log 2^1) + 2^2.(\log n - \log 2^2) \\
&= 2^3.T(n/2^3) + \log n.(2^0 + 2^1 + 2^2) - (2^0.\log 2^0 + 2^1.\log 2^1 + 2^2.\log 2^2)
\end{aligned}$$

Coi hàm log là hàm log cơ số 2, ta được:

$$T(n) = 2^3.T(n/2^3) + \log n.(2^0 + 2^1 + 2^2) - (2^0.0 + 2^1.1 + 2^2.2)$$

....

$$T(n) = 2^i.T(n/2^i) + \log n.\sum_{k=0}^{i-1}(2^k) - \sum_{k=0}^{i-1}(2^k.k)$$

Dừng lại khi đạt tới T(1) $\Rightarrow \frac{n}{2^i} = 1 \Rightarrow i = \log n$. Ta được:

$$T(n) = 2^{\log n}.T(1) + \log n.\sum_{k=0}^{\log n - 1}(2^k) - \sum_{k=0}^{\log n - 1}(2^k.k)$$

Theo công thức $\sum_{i=1}^{n}(i.2^i) = (n-1).2^{n+1} + 2$, ta được:

$$\begin{aligned}
&= n + \log n.\left[\frac{2^{\log n} - 1}{2 - 1}\right] - (\log n - 2).2^{\log n} - 2 \\
&= n + \log n.(n-1) - (\log n - 2).n - 2 \\
&= n + n.\log n - \log n - n.\log n + 2n - 2 \\
&= 3n - \log n - 2
\end{aligned}$$

Vậy $T(n) = 3n - \log n - 2$

2.3/ $T(n) = 8.T(n/2) + n^3, \qquad T(1) = 1$

Ta có:

$$\begin{aligned}
T(n) &= 8.T(n/2) + n^3 \\
&= 8.\left[8.T(n/2^2) + \left(\frac{n}{2}\right)^3\right] + n^3 \\
&= 8^2.T(n/2^2) + 8.\frac{n^3}{2^3} + n^3 \\
&= 8^2.\left[8.T(n/2^3) + \left(\frac{n}{4}\right)^3\right] + 8.\frac{n^3}{2^3} + n^3 \\
&= 8^3.T(n/2^3) + 8^2.\frac{n^3}{4^3} + 8.\frac{n^3}{2^3} + n^3 \\
&= 8^3.T(n/2^3) + n^3 + n^3 + n^3 \\
&= 8^3.T(n/2^3) + 3n^3 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
&= 8^i.T(n/2^i) + i.n^3
\end{aligned}$$

Dừng lại khi đạt tới $T(1) \Rightarrow n/2^i = 1 \Rightarrow i = \log_2 n$, coi hàm log là hàm log cơ số 2, ta được:

$$\begin{aligned}
T(n) &= 8^{\log n}.T(1) + n^3.\log n \\
&= n^3 + n^3.\log n
\end{aligned}$$

Vậy $T(n) = n^3 + n^3.\log n$

2.4/ $T(n) = 4T(n/3) + n, \qquad T(1) = 1$

Ta có:

$$\begin{aligned}
T(n) &= 4T(n/3) + n \\
&= 4.\left[4.T(n/3^2) + \frac{n}{3}\right] + n \\
&= 4^2.T(n/3^2) + \frac{4n}{3} + n \\
&= 4^2.\left[4.T(n/3^3) + \frac{n}{3^2}\right] + \frac{4n}{3} + n \\
&= 4^3.T(n/3^3) + \frac{4^2.n}{3^2} + \frac{4n}{3} + n \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= 4^i.T(n/3^i) + n.\sum_{k=0}^{i-1}(\left(\frac{4}{3}\right)^k
\end{aligned}$$

Dừng lại khi đạt tới $T(1) \Rightarrow \frac{n}{3^i} = 1 \Rightarrow i = \log_3 n$, ta được:

$$T(n) = 4^{\log_3 n}.T(1) + n.\sum_{k=0}^{\log_3 n - 1} \left(\frac{4}{3}\right)^k$$

Theo công thức tổng chuỗi cấp số nhân hữu hạn, ta có:

$$\begin{aligned}
&= 4^{\log_3 n} + n.\left[\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^{\log_3 n} - 1}{\frac{4}{3} - 1}\right] \\
&= 4^{\log_3 n} + 3n.\left[\left(\frac{4}{3}\right)^{\log_3 n} - 1\right] \\
&= 4^{\log_3 n} + 3n.\left(\frac{4}{3}\right)^{\log_3 n} - 3n \\
&= 4^{\log_3 n} + 4^{\log_3 n}.3n.\frac{1}{3^{\log_3 n}} - 3n \\
&= 4^{\log_3 n}.(1+3) - 3n \\
&= 4.4^{\log_3 n} - 3n
\end{aligned}$$

Vậy $T(n) = 4.4^{\log_3 n} - 3n$

2.5/ $T(n) = 9.T(n/3) + n^2, \qquad T(1) = 1$

Ta có:

$$\begin{aligned}
T(n) &= 9.T(n/3) + n^2 \\
&= 9.\left[9.T(n/3^2) + \left(\frac{n}{3}\right)^2\right] + n^2 \\
&= 9^2.T(n/3^2) + 9.\left(\frac{n}{3}\right)^2 + n^2 \\
&= 9^2.\left[9.T(n/3^3) + \left(\frac{n}{3^2}\right)^2\right] + 9.\left(\frac{n}{3}\right)^2 + n^2 \\
&= 9^3.T(n/3^3) + 9^2.\left(\frac{n}{3^2}\right)^2 + 9.\left(\frac{n}{3}\right)^2 + n^2 \\
&= 9^3.T(n/3^3) + 9^2.\frac{n^2}{9^2} + 9.\frac{n^2}{3^2} + n^2 \\
&= 9^3.T(n/3^3) + 3.n^2 \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= 9^i.T(n/3^i) + i.n^2
\end{aligned}$$

Dừng lại khi đạt tới $T(1) \Rightarrow \frac{n}{3^i} = 1 \Rightarrow i = \log_3 n$, ta được:

$$\begin{aligned} T(n) &= 9^{log_3 n}.T(1) + n^2.\log_3 n \\ &= n^2 + n^2.\log_3 n \\ &= n^2.(1 + \log_3 n) \\ &= n^2.\log_3(3n) \end{aligned}$$

Vậy $T(n) = n^2.\log_3(3n)$

2.6/ $T(n) = 2.T(\sqrt{n}) + 1, \qquad T(2) = 0$

Ta có:

$$\begin{aligned} T(n) &= 2.T(\sqrt{n}) + 1 \\ &= 2.T(n^{\frac{1}{2}}) + 1 \\ &= 2[2.T(n^{(\frac{1}{2})^2}) + 1] + 1 \\ &= 2^2.T(n^{\frac{1}{2^2}}) + 2 + 1 \\ &= 2^3.T(n^{\frac{1}{2^3}}) + 4 + 2 + 1 \\ &= .... \\ &= 2^i.T(n^{\frac{1}{2^i}}) + \sum_{k=0}^{i-1} 2^k \end{aligned}$$

Theo công thức $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$ ta có:

$$T(n) = 2^i.T(n^{\frac{1}{2^i}}) + 2^i - 1 \qquad (*)$$

Dừng lại khi đạt tới $T(2)$, nên:

$$\begin{aligned} n^{\frac{1}{2^i}} &= 2 \\ \frac{1}{2^i} &= \log_n 2 \\ 2^i &= \log_2 n \end{aligned}$$

Thay vào $(*)$, ta có:

$$\begin{aligned} T(n) &= \log_2 n.T(2) + \log_2 n - 1 \\ &= \log_2 n - 1 \end{aligned}$$

Vậy $T(n) = \log_2 n - 1$

Câu 3: Giải phương trình đệ quy dùng phương trình đặc trưng

a/

$$
\begin{aligned}
&T(n) = 4T(n-1) - 3T(n-2)\\
&T(0) = 1\\
&T(1) = 2
\end{aligned}
$$

Xét phương trình $T(n) - 4T(n-1) + 3T(n-2) = 0$
Đặt $x^n = T(n)$
Ta có $x^n - 4x^{n-1} + 3x^{n-2} = 0$
Phương trình đặc trưng: $x^2 - 4x + 3 = 0$
$\Rightarrow (x-1)(x-3) = 0$
$\Rightarrow$ Phương trình có hai nghiệm đơn $x_1 = 1$ và $x_2 = 3$

$$
\begin{aligned}
&T(n) = c_1x_1^n + c_2x_2^n\\
&T(n) = c_1 1^n + c_2 3^n\\
&T(n) = c_1 + c_2 3^n
\end{aligned}
$$

$\begin{cases} T(0) = c_1 + c_2 3^0 = c_1 + c_2 = 1 \\ T(1) = c_1 + c_2 3^1 = c_1 + 3c_2 = 2 \end{cases} \quad \Rightarrow c_1 = \frac{1}{2}$ và $c_2 = \frac{1}{2}$
Kết luận: $T(n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}3^n$

b/

$$
\begin{aligned}
&T(n) = 4T(n-1) - 5T(n-2) + 2T(n-3)\\
&T(0) = 0\\
&T(1) = 1\\
&T(2) = 2
\end{aligned}
$$

Xét phương trình $T(n) - 4T(n-1) + 5T(n-2) - 2T(n-3)$
Đặt $x^n = T(n)$
Ta có: $x^n - 4x^{n-1} + 5x^{n-2} - 2x^{n-3} = 0$
Phương trình đặc trưng: $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$
$\Rightarrow (x-2)(x-1)^2 = 0$
$\Rightarrow$ Phương trình có một nghiệm đơn $x_1 = 2$ và nghiệm kép $x_2 = 1$

$$
\begin{aligned}
&T(n) = c_1x_1^n + c_2x_2^n + c_3nx^n\\
&T(n) = c_1 2^n + c_2 1^n + c_3 n 1^n\\
&T(n) = c_1 2^n + c_2 + c_3 n
\end{aligned}
$$

$\begin{cases} T(0) = c_1 2^0 + c_2 + 0c_3 = c_1 + c_2 = 0 \\ T(1) = c_1 2^1 + c_2 + 1c_3 = 2c_1 + c_2 + c_3 = 1 \\ T(2) = c_1 2^2 + c_2 + 2c_3 = 4c_1 + c_2 + 2c_3 = 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \\ c_3 = 1 \end{cases}$

Kết luận: $T(n) = n$

c/

$$\begin{aligned} T(n) = T(n-1) + T(n-2) \\ T(0) = 1 \\ T(0) = 1 \end{aligned}$$

Xét phương trình $T(n) - T(n-1) - T(n-2) = 0$
Đặt $x^n = T(n)$
Ta có: $x^n - x^{n-1} - x^{n-2} = 0$
Phương trình đặt trưng: $x^2 - x - 1 = 0$
$\Rightarrow (x - \frac{1+\sqrt{5}}{2})(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2})$
$\Rightarrow$ phương trình có 2 nghiệm đơn $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ và $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$$\begin{aligned} T(n) &= c_1 x_1^n + c_2 x_2^n \\ T(n) &= c_1(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + c_2(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n \end{aligned}$$

$\begin{cases} T(0) = c_1(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^0 + c_2(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^0 \\ T(1) = c_1(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^1 + c_2(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} T(0) = c_1 + c_2 = 1 \\ T(1) = (\frac{1+\sqrt{5}}{2})c_1 + (\frac{1-\sqrt{5}}{2})c_2 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} \\ c_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \end{cases}$

Kết luận: $T(n) = (\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}})c_1 + (\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}})c_2$

4 Bài 4

a. $T(n) = \begin{cases} 1 & \text{khi } n = 0, \\ 2 & \text{khi } n = 1, \\ 7T(n-1) - 12T(n-2) & khi \;\; n \geq 2 \end{cases}$

Giải:

Hàm sinh của dãy vô hạn $\{T(n)\}_{n=0}^{\infty}$ là:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} T(n)x^n = \big(T(0)x^0 + T(1)x^1 + T(2)x^2 + ...\big) \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} [7T(n-1) - 12T(n-2)]x^n + T(0)x^0 + T(1)x^1 \\
&= 7\sum_{n=2}^{\infty} T(n-1)x^n - 12\sum_{n=2}^{\infty} T(n-2)x^n + 1 + 2x \\
\text{Xét} \qquad A &= 7\sum_{n=2}^{\infty} T(n-1)x^n \\
&= 7x\sum_{n=1}^{\infty} T(n-1)x^{n-1} - 7T(0)x^1 \\
&= 7x\big(T(0)x^0 + T(1)x^1 + T(2)x^2 + ...\big) - 7x \\
&= 7xf(x) - 7x \\
\text{Xét} \qquad B &= 12\sum_{n=2}^{\infty} T(n-2)x^n \\
&= 12x^2\sum_{n=2}^{\infty} T(n-2)x^{n-2} \\
&= 12x^2\big(T(0)x^0 + T(1)x^1 + T(2)x^2 + ...\big) \\
&= 12x^2 f(x) \\
\Rightarrow f(x) &= 7xf(x) - 7x - 12x^2 f(x) + 1 + 2x \\
&= -12x^2 f(x) + 7xf(x) - 5x + 1 \\
\Leftrightarrow f(x)(1 + 12x^2 - 7x) &= -5x + 1
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{-5x+1}{12x^2 - 7x + 1}$$

Xét $(1+12x^2-7x)$ có 2 nghiệm $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3} \\ x_2 = \frac{1}{4} \end{cases}$

$$\text{Khi đó, } \frac{1}{3.4}f(x) = \frac{-5x+1}{(x-\frac{1}{3})(x-\frac{1}{4})} = \frac{-5x+1}{(1-3x)(1-4x)}$$

Xét f(x) = $\frac{A_1}{(1-3x)} + \frac{A_2}{(1-4x)}$

Khi đó, A - 4Ax + B - 3Bx = -5x + 1 $\Rightarrow \begin{cases} A_1 + A_2 = 1 \\ -4A_1 - 3A_2 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1 = 2 \\ A_2 = -1 \end{cases}$

$$\text{Khi đó ta có: } f(x) = \frac{2}{1-3x} - \frac{1}{1-4x} = \sum_{n=0}^{\infty} 2(3^n)x^n - \sum_{n=0}^{\infty}(4^n)x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left[2(3^n) - 4^n\right]x^n$$

Vậy: $\begin{cases} T(0) = 1 \\ T(1) = 2 \\ T(n) = 2(3^n) - 4^n \qquad khi \;\; n \geq 2 \end{cases}$

b. $\begin{cases} T(0) = 7 \\ T(n+1) = T(n) + 3n \qquad khi \;\; n \geq 0 \end{cases}$

Giải:

Theo đề bài ta có: $\begin{cases} T(0) = 7 \\ T(n) = T(n-1) + 3(n-1) = T(n-1) + 3n - 3 \qquad khi \;\; n \geq 0 \end{cases}$

Hàm sinh của dãy vô hạn $\{T(n)\}_{n=0}^{\infty}$ là:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} T(n)x^n = \big(T(0)x^0 + T(1)x^1 + T(2)x^2 + ...) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} [T(n-1) + 3n - 3]x^n + T(0)x^0 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} T(n-1)x^n + 3\sum_{n=1}^{\infty} nx^n - 3\sum_{n=1}^{\infty} x^n + 7
\end{aligned}$$

Xét
$$\begin{aligned}
A &= \sum_{n=1}^{\infty} T(n-1)x^n \\
&= x\sum_{n=1}^{\infty} T(n-1)x^{n-1} \\
&= x(\big(T(0)x^0 + T(1)x^1 + T(2)x^2 + ...)) \\
&= xf(x) \qquad (1)
\end{aligned}$$

Xét
$$\begin{aligned}
B &= 3\sum_{n=1}^{\infty} nx^n \\
&= 3\sum_{n=0}^{\infty} nx^n - 0x^0 \\
&= \frac{3x}{(1-x)^2} \qquad (2)
\end{aligned}$$

Xét
$$\begin{aligned}
C &= 3\sum_{n=1}^{\infty} x^n \\
&= 3(\sum_{n=0}^{\infty} x^n - x^0) \\
&= \frac{3}{1-x} - 3 \qquad (3)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\text{Từ (1),(2) và (3) suy ra:} f(x) &= xf(x) + \frac{3x}{(1-x)^2} - \frac{3}{1-x} + 3 + 7 \\
&= xf(x) + \frac{3x}{(1-x)^2} - \frac{3}{1-x} + 10 \\
&\Leftrightarrow f(x)(1-x) = \frac{10x^2 - 14x + 7}{(1-x)^2} \\
&\Rightarrow f(x) = \frac{10x^2 - 14x + 7}{(1-x)^3}
\end{aligned}
$$

$$
\text{Xét } \ f(x) = \frac{A}{(1-x)^3} + \frac{B}{(1-x)^2} + \frac{C}{(1-x)}
$$

Khi đó ta có: $A + B - Bx + C - 2Cx + Cx^2 = 10x^2 - 14x + 7$

$$
\begin{cases} A + B + C = 7 \\ -Bx - 2Cx = -14 \\ C = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 3 \\ B = -6 \\ C = 10 \end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{Lúc này, f(x) trở thành: } \ f(x) &= \frac{3}{(1-x)^3} + \frac{-6}{(1-x)^2} + \frac{10}{(1-x)} \\
&= 3\sum_{n=0}^{\infty} C_{n+3-1}^{n} x^n (*) - 6\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n + 10\sum_{n=0}^{\infty} x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} [3C_{n+2}^{n} - 6(n+1) + 10]x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} [3\frac{n^2+3n+2}{2} - 6n + 4]x^n
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow T(n) = 3\frac{n^2+3n+2}{2} - 6n + 4
$$

Vậy: $\begin{cases} T(0) = 7 \\ T(n) = 3\frac{n^2+3n+2}{2} - 6n + 4 \qquad khi \ \ n \geq 0 \end{cases}$

Reference: (*) https://mathscope.org/showthread.php?t=29788 c, $\dfrac{1}{(1-x)^n} = 1 + nx + \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}x^3 + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} C_{i+n-1}^{i} x^i$ với $n \in N$

c.

Khi $n = 0 \Rightarrow T(0) = 0$

Khi $n > 0$

Xét dòng lệnh $while(k <= n-1)$:

Số lần lặp $=$ số con k chạy từ $0 \to n-1$

Mỗi lần lặp có: $2 + T(k)$ phép cộng

$$\begin{aligned}\Rightarrow T(n) &= \sum_{k=0}^{n-1}(2+T(k)) \\ &= 2n + \sum_{k=0}^{n-1} T(k)\end{aligned}$$

$$\text{Đặt} \qquad \begin{aligned} S(n) &= \sum_{k=0}^{n-1} T(k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} T(k) - T(n)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow T(n) = 2n + S(n)$$

$$\text{Ta có} \qquad \begin{aligned} S(0) &= T(0) - T(0) = 0 \\ S(1) &= T(0) = 0 \\ S(2) &= T(0) + T(1) = S(1) + T(1) \\ S(3) &= T(0) + T(1) + T(2) = S(2) + T(2) \\ &\ldots \\ &\ldots \\ &\ldots \\ S(n) &= S(n-1) + T(n-1) \\ &= S(n-1) + 2(n-1) + S(n-1) \\ &= 2S(n-1) + 2(n-1)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S(0) &= 0 \\ S(1) &= 0 \\ S(n) &= 2S(n-1) + 2(n-1) \qquad khi \;\; n > 1 \end{cases}$$

Hàm sinh của dãy vô hạn $\{S(n)\}_0^\infty$ là:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} S(n)x^n = S(0)x^0 + S(1)x^1 + ... \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} [2S(n-1) + 2(n-1)]x^n + S(0)x^0 + S(1)x^1 \\
&= 2\sum_{n=2}^{\infty} S(n-1)x^n + 2\sum_{n=2}^{\infty} (n-1)x^n
\end{aligned}$$

Xét

$$\begin{aligned}
A(x) &= 2\sum_{n=2}^{\infty} S(n-1)x^n \\
&= 2x\sum_{n=2}^{\infty} S(n-1)x^{n-1} \\
&= 2x[S(1)x^1 + S(2)x^2 + ...] \\
&= 2xf(x) \qquad\qquad (S(0)x^0 = 0) \\
B(x) &= 2\sum_{n=2}^{\infty} (n-1)x^n \\
&= 2x^2 \sum_{n-2=0}^{\infty} (n-2+1)x^{n-2} \\
&= 2x^2 \frac{1}{(1-x)^2} \qquad\qquad \text{(công thức số 2 slide 16)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow f(x) &= 2xf(x) + \frac{2x^2}{(1-x)^2} \\
\Leftrightarrow (1-2x)f(x) &= \frac{2x^2}{(1-x)^2} \\
f(x) &= \frac{2x^2}{(1-x)^2(1-2x)} \\
&= \frac{2}{1-2x} + \frac{-2}{(1-x)^2} \\
&= 2\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n - 2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(2^{n+1} - 2n - 2)x^n \\
\Rightarrow S(n) &= 2^{n+1} - 2n - 2 \\
\Rightarrow T(n) &= 2n + 2^{n+1} - 2n - 2 \\
&= 2^{n+1} - 2
\end{aligned}
$$

Vậy: $\begin{cases} T(0) = 0 \\ T(n) = 2^{n+1} - 2 \qquad \text{khi n} > 0 \end{cases}$

5 Bài 5

a. $\begin{cases} T(1) = C_1 \\ T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n \text{ nếu } n \geq 2 \end{cases}$

Một người dùng phương pháp đoán nghiệm để giải phương trình đệ quy trên. Giả sử anh ta đoán lần lượt 3 nghiệm như sau:

i. $f(n) = an^3$

ii. $f(n) = an^2$

iii. $f(n) = an^2 - bn$

Theo bạn lần đoán nào thành công, thất bại và vì sao? (Gợi ý: thử đoán như anh ta)

i. $f(n) = an^3$

Với $n = 1$ ta có $T(1) = C_1$ và $f(1) = a$

Nếu chọn $a \geq C_1$ thì có $T(1) \leq f(1)$

Giả sử $T(k) \leq f(k), \forall k < n$

Ta có:

$$T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n \leq 4f\left(\frac{n}{2}\right) + n$$
$$T(n) \leq 4.a.\frac{n^3}{8} + n$$
$$T(n) \leq a.\frac{n^3}{2} + n$$
$$T(n) \leq a.n^3 - a.\frac{n^3}{2} + n$$
$$T(n) \leq f(n) - a.\frac{n^3}{2} + n$$

Nếu $-a.\frac{n^3}{2} + n \leq 0 \Leftrightarrow -a.\frac{n^2}{2} + 1 \leq 0$ thì có $T(n) \leq f(n)$.

$\Rightarrow$ cần chọn a sao cho $\begin{cases} a \geq C_1 \\ -a.\frac{n^2}{2} + 1 \leq 0 \end{cases}$

Nếu chọn $a = 2C_1 + 2$ thì ta có $a = 2C_1 + 2 > C_1$, $\forall C_1 \geq 0$

$-a.\frac{n^2}{2} + 1 \Leftrightarrow -\frac{2(C_1+1)n^2}{2} + 1 = -(C_1 + 1)n^2 + 1$

Với $C_1 + 1 \geq 1$ và $n^2 \geq 1 \Rightarrow (C_1 + 1)n^2 \geq 1 \Leftrightarrow -(C_1 + 1)n^2 \leq -1$

$\Leftrightarrow -(C_1 + 1)n^2 + 1 \leq 0$

Kết luận: $T(n) \leq (2C_1 + 2)n^3$, đoán nghiệm thành công.

ii. $f(n) = an^2$

Với $n = 1$ ta có $T(1) = C_1$ và $f(1) = a$

Nếu chọn $a \geq C_1$ thì có $T(1) \leq f(1)$

Giả sử $T(k) \leq f(k), \forall k < n$

Ta có:

$$\begin{aligned}
&T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n \leq 4f\left(\frac{n}{2}\right) + n \\
&T(n) \leq 4.a.\frac{n^2}{4} + n \\
&T(n) \leq an^2 + n \\
&T(n) \leq f(n) + n
\end{aligned}$$

Vì $n > 0$ nên ta không thể chắc chắn rằng $T(n) \leq f(n)$ được. Vì vậy nên đoán thất bại.

iii. $f(n) = an^2 - bn$

Với $n = 1$ ta có $T(1) = C_1$ và $f(1) = a - b$

Nếu chọn $a - b \geq C_1$ thì có $T(1) \leq f(1)$

Giả sử $T(k) \leq f(k), \forall k < n$

Ta có:

$$\begin{aligned}
&T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n \leq 4f\left(\frac{n}{2}\right) + n \\
&T(n) \leq 4\left(a.\frac{n^2}{4} - b.\frac{n}{2}\right) + n \\
&T(n) \leq an^2 - 2bn + n \\
&T(n) \leq (an^2 - bn) + n - bn \\
&T(n) \leq f(n) + n - bn
\end{aligned}$$

Nếu $n - bn \leq 0 \Leftrightarrow 1 - b \leq 0 \Leftrightarrow b \geq 1$ thì ta có $T(n) \leq f(n)$.

$\Rightarrow$ ta cần chọn a, b sao cho $\begin{cases} a - b \geq C_1 \\ b \geq 1 \end{cases}$

Nếu chọn $a = C_1 + 3, b = 2$ ta có: $b = 2 > 1$ và $a - b = C_1 + 3 - 2 = C_1 + 1 > C_1$.

Vậy $T(n) \leq (C_1 + 3)n^2 - 2n$, dự đoán đúng.

b. $T(n) = \begin{cases} 1 \text{ khi } n = 1 \\ 3T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2 \text{ khi n>1} \end{cases}$ Dự đoán $f(n) = an^2 + b$ là đúng không?

Với $n = 1$ ta có $T(1) = 1$, $f(1) = a + b$

Nếu chọn a, b sao cho $a + b \geq 1$ thì có $T(1) \leq f(1)$.

Giả sử $T(k) \leq f(k)$, $\forall k < n$.

Ta có:

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 3T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2 \leq 3f\left(\frac{n}{2}\right) + n^2 \\
T(n) &\leq 3\left(a.\frac{n^2}{4} + b\right) + n^2 \\
T(n) &\leq 3a.\frac{n^2}{4} + 3b + n^2 \\
T(n) &\leq \left(an^2 + b\right) - \frac{1}{4}an^2 + 2b + n^2 \\
T(n) &\leq f(n) - \frac{1}{4}an^2 + 2b + n^2
\end{aligned}
$$

Nếu $-\frac{1}{4}an^2 + 2b + n^2 \leq 0$ thì ta có $T(n) \leq f(n)$.

$\Rightarrow$ cần chọn a, b sao cho $\begin{cases} a + b \geq 1 \\ -\frac{1}{4}an^2 + 2b + n^2 \leq 0 \end{cases}$

Nếu chọn $a = 5, b = 0$ ta có: $a + b = 5 > 1$

$-\frac{1}{4}an^2 + 2b + n^2 = -\frac{5}{4}n^2 + n^2 = \frac{-1}{4}n^2 \leq 0$, $\forall n$

Kết luận: $T(n) \leq 5n^2$, dự đoán đúng.

c. $T(n) = \begin{cases} T\left(\frac{n}{2}\right) + T\left(\frac{n}{4}\right) + n \\ T(n) = 1, \text{ với } n \leq 5 \end{cases}$ Dự đoán $T(n) = O(n)$ là đúng không?

Ta dự đóan $f(n) = an + b$

Với $1 \leq n \leq 5$, ta có $T(n) = 1$ và $f(n) = an + b = a + b + (n - 1)a$

Nếu ta chọn a, b sao cho $a + b \geq 1$ và $(n-1)a \geq 0 \Leftrightarrow a > 0$ (vì $a \neq 0$ và $n \geq 1$) thì có $T(n) \leq f(n)$ với $1 \leq n \leq 5$

Giả sử $T(k) \leq f(k), \forall k < n$

Ta có:

$$\begin{aligned}
T(n) &= T\left(\frac{n}{2}\right) + T\left(\frac{n}{4}\right) + n \leq f\left(\frac{n}{2}\right) + f\left(\frac{n}{4}\right) + n \\
T(n) &\leq \left(a.\frac{n}{2} + b\right) + \left(a.\frac{n}{4} + b\right) + n \\
T(n) &\leq \frac{3}{4}an + 2b + n \\
T(n) &\leq (an + b) - \frac{1}{4}an + b + n \\
T(n) &\leq f(n) - \frac{1}{4}an + b + n
\end{aligned}$$

Nếu $-\frac{1}{4}an + b + n \leq 0$ thì có $T(n) \leq f(n)$

$\Rightarrow$ cần chọn a, b thỏa $\begin{cases} a > 0 \\ a + b \geq 1 \\ -\frac{1}{4}an + b + n \leq 0 \end{cases}$

Nếu chọn $a = 5, b = 0$ ta có $a = 5 > 0$, $a + b = 5 > 1$

$-\frac{1}{4}an + b + n = -\frac{5}{4}n + n = -\frac{1}{4}n < 0, \forall n > 0$

Vậy: $T(n) \leq 5n$, $\forall n \geq 1$

Chọn $c = 5, n_0 = 1$. Theo định nghĩa của big O ta có $T(n) = O(n)$. Do đó dự đoán là đúng