Trường hợp 1: Giả sử $a_{ii} \neq 0$ với i nào đó. Sau một phép đánh số lại các phần tử của cơ sở $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ nếu cần, ta có thể giả sử $a_{11} \neq 0$. Khi đó

$$\begin{aligned} H &= a_{11}(x_1^2 + 2x_1 \sum_{i=2}^{n} \frac{a_{1i}}{a_{11}} x_i) + (\text{những số hạng không chứa } x_1) \\ &= a_{11}(x_1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{a_{1i}}{a_{11}} x_i)^2 + (\text{một dạng toàn phương của } x_2, ..., x_n) \\ &= a_{11} y_1^2 + \sum_{k,\ell=2}^{n} b_{k,\ell} y_k y_\ell \qquad (b_{k\ell} = b_{\ell k}), \end{aligned}$$

trong đó

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{a_{1i}}{a_{11}} x_i, \\ y_k = x_k \qquad (k = 2, 3, ..., n) \end{cases}$$

là một phép biến đổi toạ độ không suy biến.

Trường hợp 2: Mọi $a_{ii} = 0$ $(i = 1, ..., n)$ nhưng có $a_{ij} \neq 0 (i \neq j)$. không giảm tổng quát ta giả sử $a_{12} \neq 0$. Thực hiện phép biến đổi toạ độ không suy biến

$$\begin{cases} x_1 &= y_1 + y_2, \\ x_2 &= y_1 - y_2, \\ x_k &= y_k \qquad (k = 3, ..., n), \end{cases}$$

ta có

$$2a_{12}x_1x_2 = 2a_{12}(y_1^2 - y_2^2).$$

Từ đó

$$H = \sum_{ij} a_{ij}x_ix_j = \sum_{ij} b_{ij}y_iy_j$$

có hệ số của y_1^2 là $2a_{12} \neq 0$. Ta trở về trường hợp 1 đã xét.

Áp dụng: **Trường hợp 1 giải các bài 1 và 2**, và **Trường hợp 2 giải các bài 3 và 4** bên dưới

1. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$

2. $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$

3. $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$

4. $f(X, X) = 8x_1x_2 - 4x_1x_3 + 12x_2x_3$

$$f(X) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$$

$$= 1.\left[x_1^2 + 2x_1(x_2 + x_3)\right] + x_2^2 + x_3^2 - 2x_2x_3$$

$$= \left[x_1^2 + 2x_1(x_2 + x_3) + (x_2 + x_3)^2\right] - (x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_2x_3$$

$$= \left[x_1 + (x_2 + x_3)\right]^2 - x_2^2 - 2x_2x_3 - x_3^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_2x_3$$

$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 4x_2x_3$$

$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 4\left[\left(\frac{x_2 + x_3}{2}\right)^2 - \left(\frac{x_2 - x_3}{2}\right)^2\right]$$

$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 - (x_2 + x_3)^2 + (x_2 - x_3)^2$$

$$f(Y) = y_1^2 - y_2^2 + y_3^2, \quad \begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = x_2 + x_3 \\ y_3 = x_2 - x_3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \overline{e}_1 = (a_1, a_2, a_3) \\ \overline{e}_2 = (b_1, b_2, b_3) \\ \overline{e}_3 = (c_1, c_2, c_3) \end{cases}$$

$$f(X) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$

$$= 2.\left[x_1^2 + 2x_1(x_2 - x_3)\right] + 5x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_2x_3$$

$$= 2\left[x_1^2 + 2x_1(x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2\right] - 2(x_2 - x_3)^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_2x_3$$

$$= 2\left[x_1 + (x_2 - x_3)\right]^2 - 2x_2^2 + 4x_2x_3 - 2x_3^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + \left(\sqrt{3}x_2\right)^2 - 2.\sqrt{3}x_2.\frac{2x_3}{\sqrt{3}} + \frac{4}{3}x_3^2 + \frac{5}{3}x_3^2$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + \left(\sqrt{3}x_2 - \frac{2x_3}{\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{5}{3}x_3^2$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3\left(x_2 - \frac{2x_3}{3}\right)^2 + \frac{5}{3}x_3^2$$

$$\Rightarrow f(Y) = 2y_1^2 + 3y_2^2 + \frac{5}{3}y_3^2, \quad \begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - x_3 \\ y_2 = x_2 - \frac{2}{3}x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$f\left(X\right)=2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$$

$$f\left(Y\right)=2\left(y_1+y_2\right)\left(y_1-y_2\right)+2\left(y_1+y_2\right)y_3+2\left(y_1-y_2\right)y_3,\quad \begin{cases} x_1=y_1+y_2 \\ x_2=y_1-y_2 \\ x_3=y_3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&=2y_1^2-2y_2^2+4y_1y_3\\
&=2\left[y_1^2+2y_1.y_3\right]-2y_2^2\\
&=2\left[y_1^2+2y_1.y_3+y_3^2\right]-2y_3^2-2y_2^2\\
&=2\left(y_1+y_3\right)^2-2y_2^2-2y_3^2
\end{aligned}$$

$$f\left(Z\right)=2z_1^2-2z_2^2-2z_3^2,\quad \begin{cases} z_1=y_1+y_3=\dfrac{x_1+x_2}{2}+x_3 \\ z_2=y_2=\dfrac{x_1-x_2}{2} \\ z_3=y_3=x_3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f(X) = 8x_1x_2 - 4x_1x_3 + 12x_2x_3$$

$$f(Y) = 8(y_1+y_2)(y_1-y_2) - 4(y_1+y_2)y_3 + 12(y_1-y_2)y_3, \quad \begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

$$= 8y_1^2 - 8y_2^2 + 8y_1y_3 - 16y_2y_3$$

$$= 8\left[y_1^2 + 2y_1.\frac{y_3}{2}\right] - 8y_2^2 - 16y_2y_3$$

$$= 8\left[y_1^2 + 2y_1\frac{y_3}{2} + \frac{1}{4}y_3^2\right] - 2y_3^2 - 8y_2^2 - 16y_2y_3$$

$$= 8\left(y_1 + \frac{y_3}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{8}y_2\right)^2 - 2.\sqrt{8}y_2.\sqrt{8}y_3 - 8y_3^2 + 6y_3^2$$

$$= 8\left(y_1 + \frac{y_3}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{8}y_2 + \sqrt{8}y_3\right)^2 + 6y_3^2$$

$$= 8\left(y_1 + \frac{y_3}{2}\right)^2 - 8(y_2 + y_3)^2 + 6y_3^2$$

$$f(Z) = 8z_1^2 - 8z_2^2 + 6z_3^2, \quad \begin{cases} z_1 = y_1 + \frac{1}{2}y_3 = \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{1}{2}x_3 \\ z_2 = y_2 + y_3 = \frac{x_1 - x_2}{2} + x_3 \\ z_3 = y_3 = x_3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$