GIẢI ĐỀ THI THỬ

Câu 1. (1,5 điểm) Thay đổi thứ tự lấy tích phân sau

$$I = \int_0^2 dx \int_{\sqrt{8x-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} f(x,y)dy$$

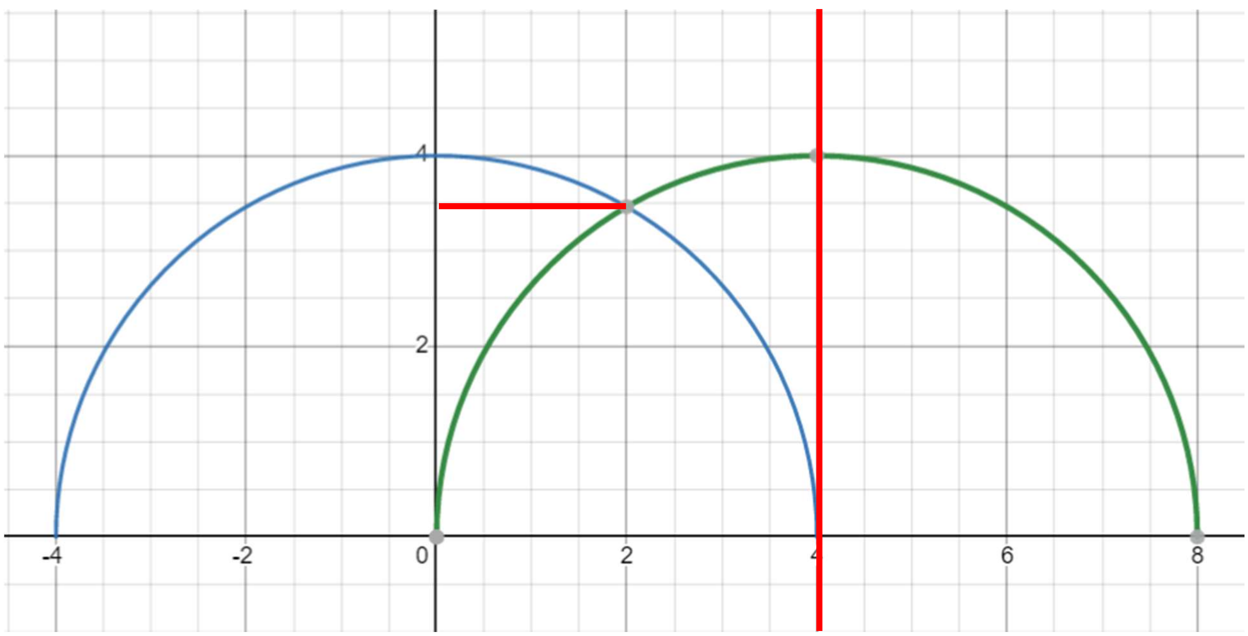
Giải:

Bước 1:Xác định điều kiện từ đề bài

$$D = \{0 \le x \le 2, \sqrt{8x - x^2} \le y \le \sqrt{16 - x^2}\}$$

Bước 2:Vẽ hình và xác định miền giới hạn

Ta có: $(x-4)^2 + y^2 = 4^2,\ x^2 + y^2 = 4^2.$



Bước 3:Thay đổi thứ tự tích phân

Giao điểm của 2 đồ thị là A(2, $2\sqrt{3}$). Khi đó, ta được 2 miền:

$D1$: $0 \le y \le 2\sqrt{3}, 0 \le x \le -\sqrt{16-y^2} + 4$

$D2$: $2\sqrt{3} \le y \le 4, 0 \le x \le \sqrt{16-y^2}$

Vậy: $I = \int_0^{2\sqrt{3}} dy \int_0^{-\sqrt{16-y^2}+4} f(x,y)dx + \int_{2\sqrt{3}}^{4} dy \int_0^{\sqrt{16-\ ^2}} f(x,y)dx$

Câu 2. (1,5 điểm) Tính thể tích khối vật thể V được giới hạn bởi

$$V: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \le 9 \\ x^2 + y^2 \le 4 \\ z \ge \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$$

Giải:

Đặt: $\begin{cases} x = rcos\varphi \\ y = rsin\varphi \\ z = z \end{cases}$, ta được: $\begin{cases} 0 \le r \le 2 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ r \le z \le \sqrt{9 - r^2} \end{cases}$

và $J = \begin{vmatrix} x'(r) & x'(\varphi) \\ y'(r) & y'(\varphi) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} cos\varphi & -rsin\varphi \\ sin\varphi & rcos\varphi \end{vmatrix} = r$

Khi đó, thể tích là: $V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 rdr \int_r^{\sqrt{9-r^2}} dz \ = \ \frac{19-\ \sqrt{5}}{3}.2\pi.$

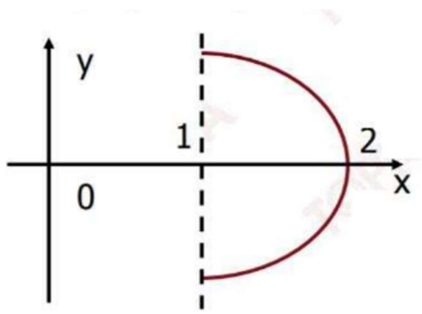
Câu 3. (2 điểm) Tính $I = \int_C (x^2 + y^2)ds$, C là nửa đường tròn

$$x^2 + y^2 = 2x\,, x \ge 1$$

Giải:

Ta có: $(x-1)^2 + y^2 = 1$

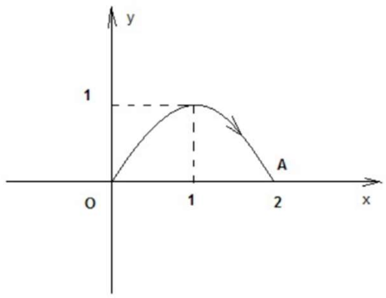
Đặt $\begin{cases} x = \cos t + 1 \\ y = \sin t \end{cases}, -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$



Vi phân cung $ds = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt = dt$

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left((1 + \cos t)^{\ 2} + sin^2 \ t \right) dt = 2\pi + 4$$

Câu 4. (2 điểm) Tính $I = \int_L ydx - (y + x^2)dy$, L là cung parabol $y = 2x - x^2$ nằm trên trục Ox theo chiều kim đồng hồ



Ta có $\widehat{OA}$: $\begin{cases} y = 2x - x^2 \\ 0 \le x \le 2 \end{cases} => \begin{cases} dy = 2 - 2x\,dx \\ 0 \le x \le 2 \end{cases}$

Khi đó

$$I = \int_0^2 [(2x - x^2) - ((2x - x^2) + x^2).(2 - 2x)dx$$

$$= \int_0^2 (3x^3 - 2x^2)dx = 4$$

Câu 5. (3 điểm) Giải các phương trình vi phân sau.

a) $ycosxdx + sinxdy = cos2xdx, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 5$

Giải:

$$\Leftrightarrow (ycosx - cos2x)dx + sinxdy = 0$$

$$Ta\ thấy \begin{cases} p = ycosx - cos2x \to P'(y) = cosx \\ Q = sinx \to Q'(x) = cosx \end{cases} \to P'(x) = Q'(y)$$

➔ Là PTVPTP

- Chọn $(x_0, y_0) = \left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ để P, Q xác định

$$\int_{x_0}^{x} P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y)dy = C$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} (cosx - cos2x)dx + \int_1^y sinxdy = C$$

$$\to \sin - \frac{\sin 2x}{2}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{x} + ysinx|_1^y = C$$

$$\to sinx - \frac{sin2x}{2} - 1 + ysinx - sinx = C$$

$$\to -\frac{sin2x}{2} - 1 + ysinx = C: NTQ$$

$$Ta\ có\ x = \frac{\pi}{2} \rightarrow y = 5(\ theo\ đề) \rightarrow thay\ vào\ ta\ được: C = 4$$

Vậy nghiệm riêng của pt là $-\frac{sin2x}{2} + ysinx = 5$

b) $y'' - 5y' + 4y = (x^2 + 1)\ sinx$

Giải:

- Bước 1: Tìm nghiệm tổng quát

  xét PTTN $y'' - 5y' + 4y = 0$

  Xét PTDDT : $k^2 - 5k + 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} k_1 = 1 \\ k_2 = 4 \end{cases}$

➔ NTQ : $\bar{y} = C_1.e^{1x} + C_2.e^{4x}$

- Bước 2: tìm nghiệm riêng

  PTKTN: $y'' - 5y' + 4y = (x^2 + 1)sinx$

Ta có $f(x) = e^{0x}(0.cosx + (x^2 + 1)sinx) \rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 1 \end{cases}$

Ta thấy $0 \pm 1i\ không\ là\ nghiệm\ của\ PTĐT\ nên\ m = 0$

$$nghiệm\ riêng\ của\ PTKTN\ có\ dạng:$$

$Y = e^{\alpha x}(H(x).\cos\beta x + R(x).sin\beta x)\ x^m$

$$Y = (Ax^2 + Bx + C).cosx + (Dx^2 + Ex + F).sinx$$

$$\rightarrow Y' = (2Ax + B)cosx + (Ax^2 + Bx + C)(-sinx)$$

$$+(2Dx + E)sinx + (Dx^2 + Ex + F).cosx$$

$$\rightarrow Y'' = 2Acosx + (2Ax + B).(-sinx) + (2Ax + B).(-sinx)$$
$$+ (Ax^2 + Bx + C).(-cosx) + 2Dsinx + (2Dx + E)cosx$$
$$+ (2Dx + E)cosx + (Dx^2 + Ex + F).(-sinx)$$

Thay vào phương trình ta được:

$$\begin{cases} \left((3A - 5D)x^2 + (4D - 10A - 5E + 3B)x + (2E + 2A - 5B - 5F + 3C)\right) = 0 \\ \left((3D + 5A)x^2 + (3E + 5B - 10D - 4A)x + (3F + 5C - 5E - 2B + 2D)\right) = x^2 + 1) \end{cases}$$

Dùng đồng nhất thức ta giải dược:

$$\begin{cases} A = \dfrac{5}{34} \\ D = \dfrac{3}{34} \\ B = \dfrac{267}{578} \\ E = \dfrac{31}{578} \\ C = \dfrac{5077}{9826} \\ F = -\dfrac{930}{4913} \end{cases}$$

Vậy nghiệm riêng của PTKTN là

$$Y = \left(\frac{5}{34}x^2 + \frac{91}{286}x + \frac{2085}{9826}\right)cosx + \left(\frac{3}{34}x^2 - \frac{10}{289}x - \frac{2557}{9826}\right)sinx$$

- Bước 3: Nghiệm tổng quát của PTKTN là

$$y = \bar{y} + Y = C_1.e^{1x} + C_2.e^{4x} + \left(\frac{5}{34}x^2 + \frac{267}{578}x + \frac{5077}{9826}\right)cosx + \left(\frac{3}{34}x^2 + \frac{31}{578}x - \frac{930}{4913}\right)sinx$$