TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHIỆP THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
KHOA KHOA HỌC CƠ BẢN

BÀI TẬP THƯỜNG KỲ

MÔN TOÁN CAO CẤP A3

GVHD: …………………………
Lớp học phần:………………………..Khoa: KHCB
Học kỳ:………Năm học: 2011 – 2012
Danh sách nhóm: (*ghi theo thứ tự ABC*)
1. Nguyễn Văn A
2. Lê Thị B
………..

HƯỚNG DẪN TRÌNH BÀY

1) Trang bìa như trên (***đánh máy, không cần in màu, không cần lời nói đầu***).
2) Trong phần làm bài tập, chép đề câu nào xong thì giải rõ ràng ngay câu đó.
3) Trang cuối cùng là Tài liệu tham khảo:

1. Nguyễn Phú Vinh – *Giáo trình Toán cao cấp A*3 – ĐHCN TP. HCM.
2. Đỗ Công Khanh – *Giải tích hàm nhiều biến* (*tập* 3, 4) – NXB ĐHQG TP. HCM.
3. Nguyễn Đình Trí – *Phép tính Giải tích hàm nhiều biến* – NXB Giáo dục.
4. Nguyễn Thủy Thanh – *Bài tập Giải tích* (*tập* 2) – NXB Giáo dục.
5. James Stewart – *Calculus Early Transcendentals, sixth edition* – USA 2008.

<u>Chú ý</u>

• Phần làm bài ***bắt buộc phải viết tay*** (*không chấp nhận đánh máy*) trên 01 hoặc 02 mặt giấy A4 và đóng thành tập cùng với trang bìa.
• Thời hạn nộp bài: ***Tiết học cuối cùng*** (sinh viên phải tự đọc trước bài học cuối để làm bài!).
• Nếu ***nộp trễ*** hoặc ***ghi sót tên của thành viên trong nhóm*** sẽ ***không được giải quyết và bị cấm thi***.
• Mỗi nhóm chỉ ***từ* 01 *đến tối đa là* 07** sinh viên. Sinh viên ***tự chọn nhóm*** và nhóm ***tự chọn bài tập***.
• Phần làm bài tập, sinh viên phải ***giải bằng hình thức tự luận*** rõ ràng.
***** Sinh viên ***làm đúng yêu cầu mà chỉ chọn toàn câu hỏi dễ*** thì điểm tối đa của nhóm là **7 điểm**.

• Cách chọn bài tập như sau

1) Nhóm chỉ có 1 sinh viên thì chọn làm **42 câu hỏi nhỏ** (***các câu hỏi nhỏ phải nằm trong các câu hỏi khác nhau***) gồm:
Chương 1: chọn 10 câu hỏi nhỏ trong 16 câu của phần I và 3 câu hỏi nhỏ trong 5 câu của phần II;
Chương 2: chọn 6 câu hỏi nhỏ trong 8 câu của phần I và 4 câu hỏi nhỏ trong 4 câu của phần II;
Chương 3: chọn 5 câu hỏi nhỏ trong 5 câu của phần I và 6 câu hỏi nhỏ trong 6 câu của phần II;
Chương 4: chọn 4 câu hỏi nhỏ trong 5 câu của phần I và 4 câu hỏi nhỏ trong 4 câu của phần II.

2) Nhóm có từ 2 đến tối đa 7 sinh viên thì làm như nhóm có 1 sinh viên, đồng thời ***mỗi sinh viên tăng thêm*** phải chọn làm thêm **20 câu hỏi nhỏ khác** (***nằm trong các câu hỏi khác nhau***).

………………………………………………..

ĐỀ BÀI TẬP

Chương 1. HÀM SỐ NHIỀU BIẾN

I. ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN

Câu 1. Tính các đạo hàm riêng $z'_x,\ z'_y$ của các hàm số sau

1) $z = e^{\sin\frac{x}{y}}$; 2) $z = e^{x\cos\frac{1}{y}}$; 3) $z = y^x$; 4) $z = x^{2y}$;

5) $z = \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 - y^2}$; 6) $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$; 7) $z = y^2 \sin\dfrac{x}{y}$; 8) $z = \arctan\dfrac{y^2}{x}$;

9) $z = \arcsin(x^2 - 2y)$; 10) $z = e^{xy}\cos x \sin y$; 11) $z = \ln(x + \ln y)$; 12) $z = \ln\left(x + \ln\dfrac{x}{y}\right)$.

Câu 2. Tính các đạo hàm riêng $f'_x,\ f'_y,\ f'_z$ của các hàm số sau

1) $f(x,y,z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$; 2) $f(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$; 3) $f(x,y,z) = e^{\frac{1}{x^2+y^2+z^2}}$;

4) $f(x,y,z) = (xy)^z$; 5) $f(x,y,z) = \ln[x^2 + \ln(y^2 + z^2)]$; 6) $f(x,y,z) = x^{y^z}$.

Câu 3. Tính đạo hàm $z'_x,\ z'_y$ của các hàm số hợp sau

1) $z = e^{u^2 - 2v^2}$ với $u = \cos x,\ v = \sqrt{x^2 + y^2}$; 2) $z = \ln(u^2 + v^2)$ với $u = xy,\ v = \dfrac{x}{y}$;

3) $z = u^{v^2}$ với $u = 2x,\ v = \sqrt{x^2 + y^2}$; 4) $z = \ln(u^2 + \ln v)$ với $u = xy,\ v = \dfrac{x}{y}$;

5) $z = \arctan(u - v)$ với $u = x^2,\ v = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$; 6) $z = \arcsin(u^2 - v)$ với $u = xy,\ v = x + y^2$;

7) $z = \arctan\dfrac{u}{v}$ với $u = e^{2x} - 1,\ v = e^{2x} + 1$; 8) $z = u^2 \ln v$ với $u = xy,\ v = x^2 - y^2$.

Hướng dẫn. Sử dụng công thức:

$$\boxed{z'_x = z'_u.u'_x + z'_v.v'_x;\ z'_y = z'_u.u'_y + z'_v.v'_y.}$$

Câu 4. Tính đạo hàm $y'(x)$ của các hàm số ẩn $y = y(x)$ xác định bởi các phương trình sau

1) $x^3y - x^2y^2 = \ln x$; 2) $xe^y + y^2e^x = e^{xy}$; 3) $\ln\sqrt{x^2 + y^2} = \arctan\dfrac{y}{x}$; 4) $\dfrac{x}{y} - \ln y = xe^y$;

5) $x\ln y = \ln(x^2 + y^2)$; 6) $\dfrac{1}{x^2 + y^2} = \arctan\dfrac{x}{y}$; 7) $\arcsin\dfrac{x+y}{2} = \ln(x^2 + y)$; 8) $\sin\dfrac{x}{y} - \arccos y = e^y$;

9) $\cos(xy) - e^{xy} = xy^2$; 10*) $x^y - y^x = 0$;

11*) Tính $y'(1)$ và $y''(1)$ biết $x^2 + 2xy + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ và $y(1) = 2$.

Câu 5. Tính đạo hàm riêng $z'_x,\ z'_y$ của các hàm số ẩn $z = z(x,y)$ xác định bởi các phương trình sau

1) $x^3yz - x^2y^2z^2 = \ln(x + y)$; 2) $xe^y + y^2e^{xz} = e^{xy}z$; 3) $\ln\sqrt{x^2 + y^2} = \arctan\dfrac{z}{xy}$;

4) $\dfrac{z}{y} - \ln xy = xe^{yz}$; 5) $\dfrac{1}{x^2+y^2} = \arctan\dfrac{z}{y}$; 6) $\sin\dfrac{z}{y} - x\arccos y = xye^{z}$;

7) $\dfrac{x}{z} = \ln\dfrac{z}{y} + x^2y$; 8) $\dfrac{xy}{z} = z\ln(y+z)$; 9) $z - y = \arctan\left(\dfrac{x}{z-y}\right)$.

Câu 6. Tính đạo hàm của các hàm số ẩn $y = y(x)$, $z = z(x)$ xác định bởi các hệ phương trình sau

1) $\begin{cases} x^3 + y^2 + z = 0 \\ x^2 + y - z^2 = 1 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x^3y + y + z = 0 \\ x^2z + y - z = 1 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} xe^y + y = e^z \\ xe^z + z = e^y \end{cases}$;

4) $\begin{cases} xe^y + y = e^x z \\ xe^z + z = e^x y \end{cases}$; 5) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$; 6) $\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$.

<u>Hướng dẫn.</u> Đạo hàm mỗi phương trình theo x, sau đó giải hệ để tìm $y'(x)$, $z'(x)$.

Câu 7. Tính các đạo hàm cấp cao sau đây

1) $f^{(10)}_{x^5y^5}(x,y)$ với $f(x,y) = e^{2x+3y}$; 2) $f^{(12)}_{y^{12}}(x,y)$ với $f(x,y) = e^{x^2+3y}$;

3) $f^{(7)}_{x^3y^4}(x,y)$ với $f(x,y) = \cos(x-y)$; 4) $f^{(20)}_{x^{11}y^9}(x,y)$ với $f(x,y) = x^{21}y^{11} + x^{10}y^{10}$;

5) $f^{(5)}_{x^2y^3}(x,y)$ với $f(x,y) = x\ln(xy)$; 6) $f^{(8)}_{x^6y^2}(x,y)$ với $f(x,y) = x^{10}y\ln y$;

7) $f^{(20)}_{x^{15}y^5}(x,y)$ với $f(x,y) = e^x\ln y$; 8) $f^{(6)}_{x^3y^3}(x,y)$ với $f(x,y) = \sin(2x-y)$;

9) $f'''_{x^2y}(x,y)$ với $f(x,y) = \arctan(xy)$; 10) $f'''_{xy^2}(x,y)$ với $f(x,y) = \cos(y\sin x)$;

11) $f^{(6)}_{x^2y^4}(x,y)$ với $f(x,y) = x^3\sin y + y^3\cos x$; 12) $f^{(6)}_{x^2y^3z}(x,y,z)$ với $f(x,y) = \ln(x+y-z)$.

Câu 8*. Tính các đạo hàm cấp cao sau đây ($n, m \geq 2$)

1) $f^{(2n)}_{x^ny^n}(x,y)$ với $f(x,y) = x^ne^{-3y}$; 2) $f^{(2n)}_{x^ny^n}(x,y)$ với $f(x,y) = e^{x-3y}$;

3) $f^{(2n)}_{x^ny^n}(x,y)$ với $f(x,y) = x^{n-1}y + x^ny^{2n}$; 4) $f^{(n)}_{x^{n-1}y}(x,y)$ với $f(x,y) = x^n\arctan y$;

5) $f^{(n)}_{x^2y^{n-2}}(x,y)$ với $f(x,y) = e^{2y}\ln x$; 6) $f^{(n)}_{x^{n-2}y^2}(x,y)$ với $f(x,y) = x^ny\ln y$;

7) $f^{(n+m)}_{x^ny^m}(x,y)$ với $f(x,y) = 2^xy^{nm}$; 8) $f^{(n+m)}_{x^ny^m}(x,y)$ với $f(x,y) = \dfrac{1}{2x+y}$;

9) $f^{(n+m)}_{x^ny^m}(x,y)$ với $f(x,y) = \ln(x+y)$; 10) $f^{(n+m)}_{x^ny^m}(x,y)$ với $f(x,y) = \dfrac{1}{(x-y)^2}$.

Câu 9*. Tính đạo hàm riêng cấp hai z''_{x^2}, z''_{y^2}, z''_{xy} của các hàm số hợp sau

1) $z = e^{u^2-2v^2}$ với $u = \cos x$, $v = \sqrt{x^2+y^2}$; 2) $z = \ln(u^2+v^2)$ với $u = xy$, $v = \dfrac{x}{y}$;

3) $z = u^{v^2}$ với $u = 2x$, $v = \sqrt{x^2+y^2}$; 4) $z = \ln(u^2 + \ln v)$ với $u = xy$, $v = \dfrac{x}{y}$;

5) $z = \arctan(u-v)$ với $u = x^2$, $v = \dfrac{1}{x^2+y^2}$; 6) $z = \arcsin(u^2-v)$ với $u = xy$, $v = x+y^2$.

7) $z = \arctan\dfrac{u}{v}$ với $u = e^{2x}-1$, $v = e^{2x}+1$; 8) $z = u^2\ln v$ với $u = xy$, $v = x^2-y^2$.

Câu 10*. Tính đạo hàm cấp hai $y''(x)$ của các hàm số ẩn $y = y(x)$ xác định bởi các phương trình sau

1) $x^3y - x^2y^2 = \ln x$; 2) $xe^y + y^2e^x = e^{xy}$; 3) $\ln\sqrt{x^2+y^2} = \arctan\dfrac{y}{x}$; 4) $\dfrac{x}{y} - \ln y = xe^y$;

5) $x\ln y = \ln(x^2+y^2)$; 6) $\dfrac{1}{x^2+y^2} = \arctan\dfrac{x}{y}$; 7) $\arcsin\dfrac{x+y}{2} = \ln(x^2+y)$; 8) $\sin\dfrac{x}{y} - \arccos y = e^y$.

Câu 11*. Chứng minh rằng:

1) Hàm số $z = \ln\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ thỏa phương trình Laplace $z''_{x^2} + z''_{y^2} = 0$;

2) Hàm số $z = xf\left(\dfrac{y}{x}\right)$ (f là hàm số có đạo hàm cấp hai liên tục) thỏa phương trình $z''_{x^2}.z''_{y^2} = \left(z''_{xy}\right)^2$;

3) Hàm số $z = f\left(\dfrac{y}{x}\right) + xg\left(\dfrac{y}{x}\right)$ (f, g khả vi đến cấp hai) thỏa phương trình $x^2z''_{x^2} + 2xyz''_{xy} + y^2z''_{y^2} = 0$.

4) Hàm số $z = y.f(\cos(x-y))$ (f là hàm số khả vi) thỏa phương trình $z'_x + z'_y = \dfrac{z}{y}$;

5) Hàm số $z = \dfrac{y}{f(x^2-y^2)}$ (f là hàm số khả vi) thỏa phương trình $\dfrac{1}{x}.z'_x + \dfrac{1}{y}.z'_y = \dfrac{z}{y^2}$;

6) Hàm số $z = \dfrac{x^2}{3y}.f(xy)$ (f là hàm số khả vi) thỏa phương trình $x^2 - xy.z'_x + y^2.z'_y = 0$.

Câu 12. Tính vi phân cấp một đã chỉ ra của các hàm số sau đây

1) $df(-1;\log_4 7)$ với $f(x,y) = x^n 4^y$; 2) $df(3;-1)$ với $f(x,y) = \ln\sqrt[5]{x-y}$;

3) $df(1;-2)$ với $f(x,y) = x\arctan(y-x)$; 4) $df(1;-2)$ với $f(x,y) = x^2\arctan(xy^3)$.

Câu 13. Tính vi phân cấp hai của các hàm số sau

1) $z = x^2 - 2xy + \sin(xy)$; 2) $z = \sin^2 x + e^{y^2}$; 3) $z = xe^y + y^2 + y\sin x$;

4) $z = e^{xy} - y\ln x$; 5) $z = x^2 + x\sin^2 y$; 6) $z = x^2 + x\cos^2 y$.

7) $z = x^2y + y^2\sqrt{x}$; 8) $z = \sin(x-y)\cos(xy)$; 9) $z = x^2\ln(x+y)$;

10*) $z = x^{\ln y}$; 11) $z = \arctan\dfrac{y}{x}$; 12*) $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2+y^2}\right)$.

Câu 15. Tính vi phân cấp ba $d^3f(x,y)$ của các hàm số sau

1) $f(x,y) = x^6y + \dfrac{x}{y}$; 2) $f(x,y) = \sin(x-2y)$; 3) $f(x,y) = \ln(2x+y)$;

4) $f(x,y) = e^{x\sin y}$; 5) $f(x,y) = x.3^y$; 6) $f(x,y) = y^2\ln x$.

Câu 16. Tìm vector gradient và tính đạo hàm theo hướng $\vec{v} = (2;-2;-1)$ của các hàm số f tại điểm M sau

1) $f(x,y,z) = x^6y + y\sin z$, $M\left(1;-3;-\dfrac{\pi}{3}\right)$; 2) $f(x,y,z) = \ln(x^2+y^2+z^2)$, $M(1;-4;-5)$;

3) $f(x,y,z) = z^2 - \sqrt{x^2+y^2}$, $M(4;-3;-1)$; 4) $f(x,y,z) = x\sqrt{y^2+z^2}$, $M(1;-4;-3)$;

5) $f(x,y,z) = xe^{xy^2z^3}$, $M(0;-2;1)$; 6) $f(x,y,z) = \dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$, $M(0;-1;-1)$;

II. CỰC TRỊ HÀM HAI BIẾN SỐ

Câu 1. Tìm cực trị địa phương (tự do) của các hàm hai biến số sau

1) $f(x,y) = x^3 + 27x + y^2 + 2y$; 2) $f(x,y) = x^4 - 8x^2 + y^2 + 5$; 3) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 12x - 3y$;

4) $f(x,y) = x^4 - y^4 - 4x + 32y$; 5) $f(x,y) = x^3 - y^2 - 3x + 6y$; 6) $f(x,y) = xy + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$;

7) $f(x,y) = (1 + xy)(x + y)$; 8) $f(x,y) = x^3y + 12x^2 - 8y$; 9*) $f(x,y) = e^{4y - x^2 - y^2}$;

10) $f(x,y) = x + y - xe^y$; 11) $f(x,y) = x^2y^3(3x + 2y + 1)$; 12*) $f(x,y) = xy\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9}}$.

Câu 2. Tìm cực trị địa phương (có điều kiện) của các hàm hai biến số sau

1) Hàm số $z = \ln(x^2 - 2y)$ với điều kiện $x - y - 2 = 0$;

2) Hàm số $z = \ln\left|1 + x^2y\right|$ với điều kiện $x - y = 3$;

3) Hàm số $z = x^2(y - 1) - 3x + 2$ với điều kiện $x - y + 1 = 0$;

4) Hàm số $z = x^2(y + 1) - 3x + 2$ với điều kiện $x + y + 1 = 0$;

5) Hàm số $z = x^3 - 9x + 3y$ với điều kiện $-x^2 + y + 1 = 0$.

Câu 3. Tìm cực trị địa phương (có điều kiện) của các hàm hai biến số sau

1) Hàm số $z = 2x + y$ với điều kiện $x^2 + y^2 = 1$;

2) Hàm số $z = x^2 + 12xy + 2y^2$ với điều kiện $x^2 + 2y^2 = 1$;

3) Hàm số $z = x - y - 8$ với điều kiện $x^2 + y^2 = 2$;

4) Hàm số $z = x^2 + y^2$ với điều kiện $x^2 - 2x + y^2 - 4y = 0$;

5) Hàm số $z = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ với điều kiện $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{1}{4}$.

Câu 4*. Dùng phương pháp nhân tử Lagrange, tìm điểm M thuộc:

1) đường tròn $x^2 + y^2 = 1$ và có khoảng cách đến đường thẳng $x + y = 3$ ngắn nhất, dài nhất;

2) đường tròn $x^2 + y^2 - 4x = 0$ và có khoảng cách đến đường thẳng $x + y = 10$ ngắn nhất, dài nhất;

3) elip $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ và có khoảng cách đến đường thẳng $x - y - 6 = 0$ ngắn nhất, dài nhất;

4) elip $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ và có khoảng cách đến đường thẳng $x - y - 6 = 0$ ngắn nhất, dài nhất.

Câu 5*. Tìm cực trị toàn cục (giá trị max – min) của các hàm hai biến số sau

1) Hàm số $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ trên miền $0 \le x \le 2, -1 \le y \le 2$;

2) Hàm số $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy - x - y$ trên miền $x \ge 0,\ y \ge 0,\ x + y \le 3$;

3) Hàm số $f(x,y) = xy^2$ trên miền $x^2 + y^2 \le 1$;

4) Hàm số $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$ trên miền $|\,x\,| + |\,y\,| \le 1$;

5) Hàm số $f(x,y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4$ trên miền $0 \le |\,x\,| \le 1,\ 0 \le |\,y\,| \le 1$;

6) Hàm số $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 2$ trên miền $0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 2$;

7) Hàm số $f(x,y) = 2x^3 + y^4$ trên miền $x^2 + y^2 \le 1$.

………………………………………………………………………..

Chương 2. TÍCH PHÂN BỘI

I. TÍCH PHÂN BỘI HAI (KÉP)

Câu 1. Đưa các tích phân kép $I = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$ về tích phân lặp, biết miền D giới hạn bởi

1) $y = 3x$ và $y = x^2$;
2) $y = 2x^2 - x$ và $y = x^2 + 2x + 4$;
3) $y = x$ và $y = 2\sqrt{x}$;
4) $y = x^2$ và $y = x^3$;
5) $y = 3x$ và $y = x^2 + 2$;
6) $x = 3, x = 5, 3x - 2y + 4 = 0$ và $3x - 2y + 1 = 0$;
7) $x^2 + y^2 \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0$;
8) $x + y \le 1,\ x - y \le 1,\ x \ge 0$.
9) $y \ge x^2,\ y \le 4 - x^2$;
10) $(x-2)^2 + (y-3)^2 \le 4$;
11) $y = x^2,\ y = \sqrt{x}$;
12) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} \le 1$.

Câu 2. Đổi thứ tự lấy tích phân của các tích phân sau

1) $I = \int\limits_1^2 dx \int\limits_2^{x^2} f(x,y)dy$;
2) $I = \int\limits_1^2 dx \int\limits_2^{4-x} f(x,y)dy$;
3) $I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^3} f(x,y)dy$;
4) $I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_1^{e^x} f(x,y)dy$;
5) $I = \int\limits_0^{\ln 2} dx \int\limits_{e^x}^2 f(x,y)dy$;
6) $I = \int\limits_1^2 dx \int\limits_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy$;
7) $I = \int\limits_1^e dx \int\limits_0^{\ln x} f(x,y)dy$;
8) $I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$;
9) $I = \int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$;
10) $I = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{\sqrt[4]{y}} f(x,y)dx$;
11) $I = \int\limits_0^3 dx \int\limits_{-\sqrt{9-x}}^{\sqrt{9-x}} f(x,y)dy$;
12) $I = \int\limits_0^3 dy \int\limits_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} f(x,y)dx$.

Câu 3. Chuyển các tích phân kép sau sang tọa độ cực

1) $I = \iint\limits_D f(x^2 + y^2)dxdy$, biết miền D giới hạn bởi $x^2 + y^2 \le 4y$;

2) $I = \iint\limits_D f(x^2 + y^2)dxdy$, biết miền D giới hạn bởi $x^2 + y^2 \le 4x$;

3) $I = \iint\limits_D f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)dxdy$, biết miền D giới hạn bởi $x^2 + y^2 \le 1,\ y \ge 0$;

4) $I = \iint\limits_D f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)dxdy$, biết miền D giới hạn bởi $x^2 + y^2 \le 2x,\ y \ge 0$;

5) $I = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$, biết miền D giới hạn bởi $x^2 + y^2 \le 1,\ x - y \ge 1$;

6) $I = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$, biết miền D giới hạn bởi $x^2 + y^2 \le 1,\ x + y \le 1$.

Câu 4. Tính các tích phân kép sau đây

1) $I = \iint\limits_D (\sin x + 2\cos y)dxdy$, trong đó $D: \left\{0 \le x \le \dfrac{\pi}{2};\ 0 \le y \le \pi\right\}$;

2) $I = \iint\limits_D \frac{x}{y}\ln y dxdy$, trong đó $D: \{0 \le x \le 2;\ 1 \le y \le e\}$;

3) $I = \iint\limits_D \sin^5 x \cos^{10} y dxdy$, trong đó $D: \left\{0 \le x \le 2\pi;\ 0 \le y \le \frac{\pi}{4}\right\}$;

4) $I = \iint\limits_D \frac{x^2}{y^2+1} dxdy$, trong đó $D: \{0 \le x \le 1;\ 0 \le y \le 1\}$;

5) $I = \iint\limits_D \frac{dxdy}{(x+y+1)^2}$, trong đó $D: \{0 \le x \le 1;\ 0 \le y \le 1\}$;

6) $I = \iint\limits_D \frac{dxdy}{(x+y)^2}$, trong đó $D: \{1 \le x \le 2;\ 0 \le y \le 1\}$;

7) $I = \iint\limits_D (e^x + e^y) dxdy$, trong đó $D: \{0 \le x \le 1;\ 0 \le y \le 1\}$;

8) $I = \iint\limits_D (\sin x + \cos y) dxdy$, trong đó $D: \{0 \le x \le 2\pi;\ 0 \le y \le \pi\}$;

9) $I = \iint\limits_D \frac{\cos y}{x} dxdy$, trong đó $D: \left\{x = 1;\ x = 2;\ y = 0;\ y = \frac{\pi}{2}\right\}$;

10) $I = \iint\limits_D x \ln y dxdy$, trong đó $D: \{x = 0;\ x = 2;\ y = 1;\ y = e\}$;

11) $I = \iint\limits_D (3x+2) dxdy$, trong đó miền D là ΔOAB với O(0; 0), A(1; 0), B(1; 1);

12) $I = \iint\limits_D 2(x+y) dxdy$, trong đó miền D là ΔOAB với O(0; 0), A(1; 0), B(1; 1);

13) $I = \iint\limits_D e^{\frac{y}{x}} dxdy$, trong đó $D: \{x = 1;\ y = 0;\ y = x\}$;

14) $I = \iint\limits_D 2xy dxdy$, trong đó $D: \{y = x;\ y = \sqrt{x}\}$;

15) $I = \iint\limits_D x dxdy$, trong đó $D: \{y = x^2 - 2x;\ y = 2x^2 - 4x\}$.

Câu 5. Chuyển sang tọa độ cực và tính các tích phân sau trong tọa độ mới

1) $I = \iint\limits_D (x^2+y^2)^2 dxdy$, trong đó D là hình tròn $x^2 + y^2 \le 1$;

2) $I = \iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, trong đó D là hình tròn $x^2 + y^2 \le 9$;

3) $I = \iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2} dxdy$, trong đó D là hình vành khăn $1 \le x^2 + y^2 \le 4$;

4) $I = \iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2} dxdy$, trong đó D là phần hình tròn $x^2 + y^2 \le 4$ thuộc góc phần tư thứ nhất.

5) $I = \iint\limits_D x^2 y^3 dxdy$, trong đó D là nửa hình tròn $x \ge 0,\ x^2 + y^2 \le 1$;

6) $I = \iint\limits_D (x^2+y^2) dxdy$, trong đó D là nửa hình tròn $x^2 + y^2 \le 4,\ y \ge 0$;

7) $I = \iint\limits_D \sqrt{\dfrac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}dxdy$, trong đó $D: \{x^2+y^2 \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$;

8) $I = \iint\limits_D \dfrac{dxdy}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$, trong đó $D: \{x^2+y^2 \le 4,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$;

9) $I = \iint\limits_D \left(\dfrac{y}{x}+1\right)dxdy$, trong đó $D: \{1 \le x^2+y^2 \le 2x\}$;

10) $I = \iint\limits_D \dfrac{x^2-y^2}{y^2}dxdy$, trong đó $D: \{1 \le x^2+y^2 \le 2y\}$;

11*) $I = \iint\limits_D [\ln(x^2+y^2) - xy]dxdy$, trong đó $D: \{e^2 \le x^2+y^2 \le e^4,\ |\,y\,| \le x\}$;

12*) $I = \iint\limits_D \sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}dxdy$, trong đó $D: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} \le 1$.

Câu 6. Tính diện tích hình phẳng S giới hạn bởi

1) $y = 3x^2 + x + 1$ và $7x - y + 1 = 0$;

2) $y = x^2 + 2x + 1$ và $x - y + 1 = 0$;

3) $y = 2x$ và $y = \sqrt{x} + x$;

4) $x = 1,\ y = e^x + x$ và $y = e^{-x} + x$;

5) $x = 2y$ và $x = \dfrac{y^2}{3}$;

6) $y = x^3$ và $y = \sqrt{x}$;

7) $y = \sin x,\ y = \cos x,\ x = 0$ và $x = \dfrac{\pi}{4}$;

8) $y^2 = 4 - x$ và $2y^2 = x + 8$.

Câu 7. Tính thể tích V của miền Ω giới hạn bởi

1) $x^2 + y^2 = 1,\ z = 4,\ z = 0$;

2) $x^2 + y^2 = 2x,\ z = 3,\ z = 0$;

3) $x^2 + y^2 = 2y,\ z = 3,\ z = 0$;

4) $x^2 + y^2 = x,\ z = 7,\ z = 3$;

5) $x^2 + y^2 \le 4,\ x \ge 0,\ z = 7,\ z = 5$;

6) $x^2 + y^2 \le 2,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z = 9,\ z = 5$;

7) $x^2 + y^2 \le 2,\ x \ge 0,\ y \ge x,\ z = 9,\ z = 1$;

8) $x^2 + y^2 \le 2,\ y \ge \sqrt{3}x,\ z = 19,\ z = 15$.

Câu 8*. Tính thể tích V của miền Ω giới hạn bởi

1) $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2},\ x = \pm 1,\ y = \pm 1$;

2) $z = 4 - x^2 - y^2,\ 2z = 2 + x^2 + y^2$;

3) $x^2 + y^2 = 2y,\ x^2 + y^2 = z^2,\ z = 0$;

4) $2z = y^2,\ x^2 + y^2 = 4,\ z = 0$;

5) $z = x^2 + y^2,\ z = 2x^2 + 2y^2,\ y = x^2,\ y = x$;

6) $y = \sqrt{x},\ y = 2\sqrt{x},\ x + z = 6,\ z = 0$;

7) $z = xy,\ x^2 + y^2 = 4,\ z = 0$;

8) $z = a.e^{-x^2-y^2},\ x^2 + y^2 = R^2,\ z = 0\ (a > 0)$.

II. TÍCH PHÂN BỘI BA

Câu 1. Tính các tích phân bội ba sau

1) $I = \iiint\limits_\Omega 2x\,dxdydz$, trong đó miền $\Omega: \left\{0 \le x \le \sqrt{4-y^2},\ 0 \le y \le 2,\ 0 \le z \le y\right\}$;

2) $I = \iiint\limits_\Omega 6xz\,dxdydz$, trong đó miền $\Omega: \{0 \le x \le z,\ 0 \le y \le x + z,\ 0 \le z \le 1\}$;

3) $I = \iiint\limits_{\Omega} 2xyz\,dxdydz$, trong đó miền $\Omega: \{0 \le x \le 1,\ x \le y \le 2x,\ 0 \le z \le y\}$;

4) $I = \iiint\limits_{\Omega} ze^{y}dxdydz$, trong đó miền $\Omega: \left\{0 \le x \le \sqrt{1-z^2},\ 0 \le y \le 3,\ 0 \le z \le 1\right\}$;

5) $I = \iiint\limits_{\Omega} ze^{-y^2}dxdydz$, trong đó miền $\Omega: \{0 \le x \le y,\ 0 \le y \le z,\ 0 \le z \le 1\}$;

6) $I = \iiint\limits_{\Omega} \cos(x+y+z)dxdydz$, trong đó miền $\Omega: \left\{0 \le x \le y,\ 0 \le y \le \dfrac{\pi}{2},\ 0 \le z \le x\right\}$;

7) $I = \iiint\limits_{\Omega} x^2 \sin y\,dxdydz$, trong đó miền $\Omega: \{0 \le x \le \sqrt{\pi},\ 0 \le y \le xz,\ 0 \le z \le x\}$;

8) $I = \iiint\limits_{\Omega} yz\cos(x^5)dxdydz$, trong đó miền $\Omega: \{0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x,\ x \le z \le 2x\}$;

9) $I = \iiint\limits_{\Omega} xy\cos z\,dxdydz$, trong đó miền $\Omega: \left\{0 \le x \le y,\ 0 \le y \le z,\ 0 \le z \le \dfrac{\pi}{2}\right\}$;

10) $I = \iiint\limits_{\Omega} dxdydz$, trong đó miền $\Omega: \left\{-\sqrt{4-2z} \le x \le \sqrt{4-2z},\ x^2 \le y \le 4-2z,\ 0 \le z \le 2\right\}$.

Câu 2. Chuyển các tích phân sau sang tọa độ trụ hoặc tọa độ cầu

1) $I = \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz$, trong đó Ω là miền giới hạn bởi các mặt $z = x^2 + y^2$ và $z = 4$;

2) $I = \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz$, trong đó Ω là phần hình trụ $x^2 + y^2 \le 1$ và $1 \le z \le 4$;

3) $I = \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz$, trong đó Ω là miền giới hạn bởi các mặt $x^2 + y^2 = 2x$, $z = x^2 + y^2$, $z = 0$;

4) $I = \iiint\limits_{\Omega} f(x^2+y^2,z)dxdydz$, trong đó Ω là phần chung của hai hình cầu:

$$x^2 + y^2 + z^2 \le R^2 \text{ và } x^2 + y^2 + (z-R)^2 \le R^2;$$

5) $I = \iiint\limits_{\Omega} (x^2+y^2+z^2)dxdydz$, trong đó Ω là miền $1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4$;

6) $I = \iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$, trong đó Ω là miền $x^2 + y^2 + z^2 \le 4$ $(z \ge 0)$;

7) $I = \iiint\limits_{\Omega} f(x,z)dxdydz$, trong đó Ω là 1/8 hình cầu $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$ thuộc tam diện tọa độ thứ nhất;

8) $I = \iiint\limits_{\Omega} f(x^2+y^2,z)dxdydz$, trong đó Ω là nửa hình cầu $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$ $(x \ge 0)$;

9) $I = \iiint\limits_{\Omega} f(x^2+y^2+z^2)dxdydz$, trong đó miền Ω là phần hình nón $z^2 \ge x^2 + y^2$ $(z \ge 0)$ nằm trong

hình cầu $x^2 + y^2 + z^2 \le 16$.

Câu 3. Tính các tích phân bội ba sau

1) $I = \iiint\limits_{\Omega} 6xy\,dxdydz$, trong đó miền Ω giới hạn bởi $x + y - z + 1 = 0,\ y = \sqrt{x},\ y = 0,\ x = 1,\ z = 0$;

2) $I = \iiint\limits_{\Omega} y\,dxdydz$, trong đó miền Ω giới hạn bởi $2x + 2y + z - 4 = 0,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$;

3) $I = \iiint\limits_{\Omega} x^2 e^y dxdydz$, trong đó miền Ω giới hạn bởi $z = 1 - y^2,\ x = -1,\ x = 1,\ z = 0$;

4) $I = \iiint\limits_{\Omega} xydxdydz$, trong đó miền Ω giới hạn bởi $y = x^2,\ x = y^2,\ z = 0,\ x + y - z = 0$;

5) $I = \iiint\limits_{\Omega} xdxdydz$, trong đó miền Ω giới hạn bởi $x = 4y^2 + 4z^2,\ x = 4$;

6) $I = \iiint\limits_{\Omega} zdxdydz$, trong đó miền Ω giới hạn bởi $y^2 + z^2 = 9,\ y = 3x,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0$;

7) $I = \iiint\limits_{\Omega} ydxdydz$, trong đó miền Ω giới hạn bởi $y = 4 - x^2 - 4z^2,\ y = 0$;

8) $I = \iiint\limits_{\Omega} dxdydz$, trong đó miền Ω giới hạn bởi $z = x^2,\ 2y + z - 4 = 0,\ y = 0$;

9) $I = \iiint\limits_{\Omega} \dfrac{z}{x^2 + z^2} dxdydz$, trong đó miền Ω giới hạn bởi $1 \le x^2 + z^2 \le 2,\ \pi \le y \le 2\pi$;

10) $I = \iiint\limits_{\Omega} \dfrac{xy}{\sqrt{z}} dxdydz$, trong đó miền Ω giới hạn bởi $x^2 + y^2 = 4z^2,\ z = 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0$.

Câu 4. Bằng cách chuyển sang tọa độ trụ hoặc tọa độ cầu, hãy tính các tích phân bội ba sau

1) $I = \iiint\limits_{\Omega} \dfrac{dxdydz}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, trong đó miền $\Omega : \{x^2 + y^2 \le 4,\ 0 \le z \le 2\}$;

2) $I = \iiint\limits_{\Omega} \dfrac{\cos\sqrt{x^2 + y^2}dxdydz}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, trong đó miền $\Omega : \{x^2 + y^2 \le \pi^2,\ 0 \le z \le 3\}$;

3) $I = \iiint\limits_{\Omega} \dfrac{dxdydz}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, trong đó miền Ω giới hạn bởi các mặt $z = 0$ và $z = 4 - x^2 - y^2$;

4) $I = \iiint\limits_{\Omega} \cos\sqrt{x^2 + y^2}dxdydz$, trong đó miền Ω giới hạn bởi các mặt $z = -8$ và $z = 1 - x^2 - y^2$;

5) $I = \iiint\limits_{\Omega} \ln\left(\sqrt{x^2 + y^2} + 1\right)dxdydz$, trong đó miền $\Omega : \{x^2 + y^2 \le 4,\ 0 \le z \le 3\}$;

6) $I = \iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2}dxdydz$, trong đó miền $\Omega : \{x^2 + y^2 \le 9,\ 1 \le z \le 2\}$;

7) $I = \iiint\limits_{\Omega} xydxdydz$, trong đó Ω giới hạn bởi $x^2 + y^2 = 1,\ z = x^2 + y^2,\ z = 0$;

8) $I = \iiint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2)dxdydz$, trong đó Ω giới hạn bởi $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz,\ z = \sqrt{x^2 + y^2},\ z \ge 0$;

9) $I = \iiint\limits_{\Omega} [(x + y)^2 - z]dxdydz$, trong đó Ω giới hạn bởi $(z - 1)^2 = x^2 + y^2,\ z = 0$;

10) $I = \iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dxdydz$, trong đó miền Ω là hình cầu $x^2 + y^2 + z^2 - z \le 0$;

11) $I = \iiint\limits_{\Omega} z\sqrt{x^2 + y^2}\, dxdydz$, trong đó Ω giới hạn bởi $z = x^2 + y^2,\ z = 1$;

12) $I = \iiint\limits_{\Omega} dxdydz$, trong đó Ω giới hạn bởi $z \ge \sqrt{x^2 + y^2},\ x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

……………………………………………………………..

Chương 3. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG – TÍCH PHÂN MẶT

I. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG

Câu 1. Tính các tích phân đường loại 1 sau đây

1) $I = \int\limits_C (x+y)dl$, trong đó C có phương trình $x + y = 1,\ 0 \le x \le 1$;

2) $I = \int\limits_C (x+y)^2 dl$, trong đó C có phương trình $x + y = a,\ 0 \le x \le a$;

3) $I = \int\limits_C (x-y)dl$, trong đó C có phương trình $x + y = 1,\ 0 \le x \le 1$;

4) $I = \int\limits_C x^5 y^2 dl$, trong đó C có phương trình $y = x,\ 0 \le x \le a$;

5) $I = \int\limits_C \sin^5 y\, dl$, trong đó C có phương trình $y = x,\ 0 \le x \le 2\pi$;

6) $I = \int\limits_C (6x + 6y + 2)dl$, trong đó C có phương trình $3y + 4x = 0,\ 0 \le x \le 1$;

7) $I = \int\limits_C (2x + 3y^2)dl$, trong đó C là đoạn thẳng nối các điểm A(0; 0) và B(1; 1);

8) $I = \int\limits_C (x+y)dl$, trong đó C là đoạn thẳng nối các điểm A(0; 1) và B(1; 2);

9) $I = \int\limits_C (x+y)^2 dl$, trong đó C là đoạn thẳng nối các điểm A(2; 0) và B(0; 2);

10) $I = \int\limits_C \dfrac{8x}{\sqrt{1+4x^2}} dl$, trong đó C là parabol $y = x^2$ nối điểm các điểm A(0; 0) và B(1; 1);

11) $I = \int\limits_C xy dl$, trong đó C là đường biên của hình vuông $0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2$;

12) $I = \int\limits_C (x+y)dl$, trong đó C là đường biên của hình vuông $0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2$;

13) $I = \int\limits_C (x+y)dl$, trong đó C là đường biên của tam giác với các đỉnh O(0; 0), A(1; 0) và B(0; 1);

14) $I = \int\limits_C xy dl$, trong đó C là đường biên của tam giác với các đỉnh A(–1; 0), B(0; 1) và C(1; 0);

15) $I = \int\limits_C (x^2 + y^2)dl$, trong đó C là đường tròn $x^2 + y^2 = R^2$;

16) $I = \int\limits_C (x^2 + y^2)dl$, trong đó C là 1/4 đường tròn $x^2 + y^2 = 16,\ x \ge 0,\ y \ge 0$.

Câu 2. Tìm độ dài các cung tròn C có phương trình sau

1) $x^2 + y^2 = 4$ thỏa điều kiện $y \ge x$;

2) $x^2 + y^2 = 4$ thỏa điều kiện $y \ge x,\ y \ge -x$;

3) $x^2 + y^2 = 16$ thỏa điều kiện $y \ge \sqrt{3}x$;

4) $x^2 + y^2 = 25$ thỏa điều kiện $y \ge \sqrt{3}\,x,\ y \ge 0$;

5) $x^2 + y^2 = 25$ thỏa điều kiện $y \ge \sqrt{3}\,x,\ x \ge 0$;

6) $x^2 + y^2 = 144$ thỏa điều kiện $y \le \sqrt{3}\,x,\ y \ge x$;

7) $x^2 + y^2 = 16$ thỏa điều kiện $y \ge -\sqrt{3}\,x,\ y \ge x$;

8) $x^2 + y^2 = 4$ thỏa điều kiện $y \ge -x,\ y \le -\sqrt{3}\,x$.

Câu 3. Tính các tích phân đường loại 2 sau

1) $I = \int\limits_{AB} ydx + xdy$, AB lấy theo đường $x^2 + y^2 = 1$ nằm ở góc phần tư thứ nhất lấy theo chiều dương;

2) $I = \int\limits_{AB} ydx - xdy$, AB lấy theo đường $x^2 + y^2 = 1$ nằm ở góc phần tư thứ hai lấy theo chiều âm;

3) $I = \int\limits_{AB} xdy + ydx$, AB lấy theo đường $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ nằm ở góc phần tư thứ nhất lấy theo chiều âm;

4) $I = \int\limits_{AB} xdy - ydx$, AB lấy theo đường $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ nằm ở góc phần tư thứ hai lấy theo chiều dương;

5) $I = \int\limits_{AB} 2xdx + dy$, AB lấy theo đường $x^2 + y^2 = 1$ nằm ở góc phần tư thứ tư lấy theo chiều dương;

6) $I = \int\limits_{AB} 2xdx - dy$, AB lấy theo đường $x^2 + y^2 = 1$ nằm ở góc phần tư thứ ba lấy theo chiều âm;

7) $I = \int\limits_{AB} 2ydx$, AB lấy theo đường $x^2 + y^2 = 1$ nằm ở phần tư thứ hai lấy theo chiều dương;

8) $I = \int\limits_{AB} 4xdy$, AB lấy theo đường $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ nằm ở góc phần tư thứ tư lấy theo chiều âm.

Câu 4. Tính các tích phân đường loại 2 sau

1) $I = \int\limits_{AB} (2xy + 4x^3 + 1)dx - (2xy + 4y^3 - 1)dy$ lấy theo đường $y = 1$ đi từ điểm A(0; 1) đến B(1; 1);

2) $I = \int\limits_{AB} (2xy + 4x^3 + 1)dx - (2xy + 4y^3 - 1)dy$ lấy theo đường $x = 2$ đi từ điểm A(2; 1) đến B(2; 0);

3) $I = \int\limits_{AB} (y + 2x + 1)dx + (y - 1)dy$ lấy theo đường $y = -x + 1$ đi từ điểm A(0; 1) đến B(1; 0);

4) $I = \int\limits_{OA} 2xydx + x^2dy$ lấy theo đường $x + y = 0$ đi từ gốc toạ độ O đến điểm A(–1; 1);

5) $I = \int\limits_{OA} (xy^2 - 1)dx + (yx^2 + 3)dy$ lấy theo đường $y = 2x^2$ đi từ gốc toạ độ O đến điểm A(1; 2);

6) $I = \int\limits_{AB} 2xydx + x^2dy$ lấy theo cung parabol $y = x^2$ đi từ điểm A(–1; 1) đến B(1; 1);

7) $I = \int\limits_{OA} (y + 2x)dx + (4y + x)dy$ lấy theo cung $y^3 = x$ đi từ điểm O(0; 0) đến A(1; 1);

8) $I = \int\limits_{OA} ydx + (y^3 + x)dy$ lấy theo cung $y^2 = 2x$ đi từ điểm O(0; 0) đến A(2; 2);

9) $I = \int\limits_{AB} 6x^2ydx + 2x^3dy$ lấy theo cung $y = x^4$ đi từ điểm A(–1; 1) đến B(1; 1);

10) $I = \int\limits_{AB} ydx + xdy$ lấy theo cung parabol $y = 2x^2 + 1$ đi từ điểm A(0; 1) đến B(1; 3).

Câu 5. Áp dụng công thức Green, tính các tích phân đường loại 2 sau

1) $I = \oint\limits_{C} y\sin xdx - \cos xdy$, trong đó C là biên của hình vuông $D = [-1; 1] \times [0; 2]$;

2) $I = \oint\limits_{C} xy^2dx + 3x^2ydy$, trong đó C là biên của hình chữ nhật $D = [0; 1] \times [0; 2]$;

3) $I = \oint\limits_{C} (x + y^2 - 3)dx + (2xy + 3x + 2)dy$, trong đó $C : x^2 + y^2 = 1$;

4) $I = \oint\limits_C (x+y+3)dx + (x-3y+5)dy$, trong đó $C: x^2+y^2=1$;

5) $I = \oint\limits_C (x^2+y^2)dx + (x+y)^2dy$, trong đó $C: x^2+y^2=R^2$;

6) $I = \oint\limits_C (3x+y^2)dx + 2x(y+1)dy$, trong đó $C: x^2+y^2=R^2$;

7) $I = \oint\limits_C (y+3\sin x)dx + (2x+\cos y)dy$, trong đó $C: x^2+y^2=16$;

8) $I = \oint\limits_C (3y-4\cos x)dx + (4x+5\cos y)dy$, trong đó $C: \dfrac{x^2}{16}+y^2=1$;

9) $I = \oint\limits_C e^y dx + x(2+e^y)dy$, trong đó $C: (x-1)^2+(y-2)^2=4$;

10) $I = \oint\limits_C y(\sin x+1)dx + (x-\cos x)dy$, trong đó $C: \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

II. TÍCH PHÂN MẶT

Câu 1. Tính các tích phân mặt loại 1 sau

1) $I = \iint\limits_S (2x^2-xy+3)ds$, trong đó S là mặt $y=2x,\ x^2+z^2\le 1$;

2) $I = \iint\limits_S (x^2-y^2-xz+yz+2)ds$, trong đó S là mặt $z=x+y,\ x^2+y^2\le 9$;

3) $I = \iint\limits_S xds$, trong đó S là mặt $x+2y+z=0,\ y^2+z^2\le 6$;

4) $I = \iint\limits_S (x+y)ds$, trong đó S là mặt của hình lập phương $[0;1]\times[0;1]\times[0;1]$;

5) $I = \iint\limits_S (x+y+z)ds$, trong đó S là mặt của hình lập phương $[0;1]\times[0;1]\times[0;1]$;

6) $I = \iint\limits_S (x+y+z)ds$, trong đó S là mặt $x+y+z=2,\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1$;

7) $I = \iint\limits_S (x+y+z)ds$, trong đó S là mặt $x+y+z=1,\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1,\ z\ge 0$;

8) $I = \iint\limits_S xy(2x+2y+z)ds$, trong đó S là mặt $2x+2y+z=2,\ 0\le x\le 2,\ 0\le y\le 2$;

9) $I = \iint\limits_S \dfrac{ds}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}$, trong đó S là mặt $z=x^2+y^2,\ 0\le x\le 2,\ 0\le y\le 3$;

10) $I = \iint\limits_S \dfrac{ds}{\sqrt{1+4y^2+16z^2}}$, trong đó S là mặt $x=y^2+2z^2,\ y^2+z^2\le 4$.

Câu 2. Tính diện tích S của các mặt sau

1) $2x-2y+z=1,\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2$;

2) $2x-2y+z=1,\ 0\le y\le 1,\ 0\le z\le 2$;

3) $x^2+y^2\le 2x,\ z=2$;

4) $z=2x+2y,\ x^2+y^2\le 4x$;

5) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}\le 1,\ z=2$;

6) $2x-2y+z=3,\ \dfrac{x^2}{4}+y^2\le 1$;

7) $z = \sqrt{x^2 + y^2},\ x^2 + z^2 \le 1$;

8) $z = \sqrt{x^2 + y^2},\ x^2 + z^2 \le 4x$;

9) $x + 4y + z = 1,\ \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} \le 1$;

10) $2x + 2y + z = 1,\ \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} \le 1$.

Câu 3

1) Tính diện tích S của phần mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 100$ nằm giữa hai mp $x = -8$ và $x = 6$;

2) Tính diện tích S của phần mặt trụ $x^2 + y^2 = R^2$ $(z \ge 0)$ nằm giữa hai mp $z = 5x$ và $z = 3x$;

3) Tính diện tích S của phần mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ nằm trong mặt trụ elip $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$;

4) Tính diện tích S của phần mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ nằm trong mặt trụ $x^2 + y^2 = Ry$;

5) Tính diện tích S của phần mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ nằm trong mặt trụ $x^2 + y^2 = 1$;

6) Tính diện tích S của phần mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ nằm trong mặt trụ $x^2 + y^2 = 2x$;

7) Tính diện tích S của phần mặt parabolic $z = 2 - x^2 - y^2$ nằm giữa hai mặt $z = 0$ và $z = 1$.

Câu 4. Tính các tích phân mặt loại 2 sau

1) $I = \iint\limits_S z\,dxdy$, trong đó S là mặt trên của mặt $z = 2$ thỏa điều kiện $0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2$;

2) $I = \iint\limits_S xz\,dxdy$, trong đó S là mặt dưới của mặt $z = 2$ thỏa điều kiện $x + y \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0$;

3) $I = \iint\limits_S xy\,dxdy$, trong đó S là mặt trên của mặt $z = 4$ thỏa điều kiện $x^2 + y^2 \le 2$;

4) $I = \iint\limits_S dxdy - z\,dydz$, trong đó S là mặt dưới của mặt $2x + 3y = 4$ thỏa điều kiện $x^2 + y^2 \le 2$;

5) $I = \iint\limits_S \dfrac{dxdy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, trong đó S là mặt dưới của mặt $z = 4$ thỏa điều kiện $x^2 + y^2 \le 9$;

6) $I = \iint\limits_S xyz\,dxdy$, trong đó S là mặt dưới của mặt $z = 4$ thỏa điều kiện $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} \le 1$;

7) $I = \iint\limits_S x^2\,dydz$, trong đó S là mặt trên của mặt $x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \ge 0$;

8) $I = \iint\limits_S x^2\,dydz$, trong đó S là mặt dưới của mặt $x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \ge 0$;

9) $I = \iint\limits_S xy\,dxdy$, trong đó S là mặt ngoài của mặt $x^2 + z^2 = 1,\ 0 \le y \le 2$;

10) $I = \iint\limits_S xy\,dxdy$, trong đó S là mặt trong của mặt $x^2 + z^2 = 4,\ 0 \le y \le 1$.

Câu 5. Cho S là mặt biên ngoài của khối $\Omega = \{x^2 + y^2 + z^2 \le 4z,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \le 2\}$, dùng công thức Gauss – Ostrogradski biến đổi các tích phân mặt loại 2 sau đây sang tích phân bội ba trong tọa độ cầu

1) $I = \oiint\limits_S y^2dydz + z^2dxdz + x^2dxdy$;

2) $I = \oiint\limits_S x^2dydz + y^2dxdz + z^2dxdy$;

3) $I = \oiint\limits_S x^2ydydz + y^2zdxdz + z^2xdxdy$;

4) $I = \oiint\limits_S z^3dydz + y^3dxdz + z^3dxdy$;

5) $I = \oiint\limits_S xz^3dydz + zy^3dxdz + yz^3dxdy$;

6) $I = \oiint\limits_S y^3dydz + 3(x + y + z)ydxdz + x^3dxdy$;

7) $I = \oiint\limits_S xy^3dydz + 3(xy+z)dxdz + x^2dxdy$; 8) $I = \oiint\limits_S yz^3dydz + 3(x+yz)dxdz + y^3dxdy$.

Câu 6. Tính các tích phân mặt loại 2 sau, với S là mặt biên ngoài của miền Ω đã chỉ ra

1) $I = \oiint\limits_S zdxdy + 2xdydz + ydzdx$, trong đó $\Omega: \{0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2,\ 0 \le z \le 3\}$;

2) $I = \oiint\limits_S zdxdy + 3xdydz - 3ydzdx$, trong đó $\Omega: \{x^2 + y^2 \le 4,\ 0 \le z \le 4\}$;

3) $I = \oiint\limits_S zdxdy - xdydz + ydzdx$, trong đó $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \le 1$;

4) $I = \oiint\limits_S zdxdy - 2ydydz + 2ydzdx$, trong đó $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \le 4z$;

5) $I = \oiint\limits_S 2xydxdy + 2xdydz + 4ydzdx$, trong đó $\Omega: x^2 + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{9} \le 1$;

6) $I = \oiint\limits_S 2ydxdy + 3xdydz + ydzdx$, trong đó $\Omega: \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} + z^2 \le 1$;

7) $I = \oiint\limits_S 2xdxdy + xdydz + 3ydzdx$, trong đó $\Omega: \{x^2 + y^2 \le 1,\ 0 \le z \le 1\}$;

8) $I = \oiint\limits_S 2zdxdy + 3ydydz + 6zdzdx$, trong đó $\Omega: \left\{\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} \le 1,\ 0 \le z \le 1\right\}$;

9) $I = \oiint\limits_S zdxdy + xdydz - ydzdx$, trong đó $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \le 9$;

10) $I = \oiint\limits_S 3xdxdy + 2xdydz - ydzdx$, trong đó $\Omega: x^2 + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{9} \le 1$.

……………………………………………………………………..

Chương 4. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

I. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP I

Câu 1. Giải các phương trình vi phân với biến phân ly (tách biến) sau đây

1) $\dfrac{dx}{1+x^2} + \dfrac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0$; 2) $\sqrt{(1-y^2)}dx + x\ln xdy = 0$;

3) $\dfrac{\sqrt{1-y^2}}{y}dx + \sqrt{1+x^2}dy = 0$; 4) $x\sqrt{y^2+1}dx + y\sqrt{x^2+1}dy = 0$;

5) $x(y^2+1)dx + y(x^2+1)dy = 0$; 6) $\dfrac{dx}{x(y-1)} + \dfrac{dy}{y(x+2)} = 0,\ y(1) = 1$;

7) $\cos^2 y\,dx + x\tan y\,dy = 0$; 8) $\dfrac{yy'}{x} + e^y = 0,\ y(1) = 0$;

9) $e^{1+x^2}\tan y\,dx - \dfrac{e^{2x}}{x-1}dy = 0,\ y(1) = \dfrac{\pi}{2}$; 10) $(1+e^{2x})y^2\,dy = e^x\,dx,\ y(0) = 0$;

11) $y' + \cos(x+2y) = \cos(x-2y),\ y(0) = \dfrac{\pi}{4}$; 12) $y' = 2^{x-y},\ y(-3) = -5$;

13) $y\ln^3 y + y'\sqrt{x+1} = 0,\ y\left(-\dfrac{15}{16}\right) = e$;

14) $y' = e^{x+y} + e^{x-y},\ y(0) = 0$.

Câu 2. Giải các phương trình vi phân đẳng cấp sau đây

1) $y' = \dfrac{x^2 - y^2}{y^2 - xy}$;

2) $xy' = y + x$;

3) $(x^2 + 2xy)dx + xydy = 0$;

4) $xy' = y + x\sin\dfrac{y}{x},\ y(1) = \dfrac{\pi}{2}$;

5) $xy'\ln\dfrac{y}{x} = x + y\ln\dfrac{y}{x}$;

6) $xyy' = y^2 + 2x^2$;

7) $xy' - y = x\tan\dfrac{y}{x},\ y(1) = \dfrac{\pi}{2}$;

8) $x^2y' = 4x^2 + xy + y^2,\ y(1) = 2$;

9) $(xy' - y)\arctan\dfrac{y}{x} = x$;

10) $xy' = xe^{\frac{y}{x}} + y,\ y(1) = 0$;

11) $xy' = 2y - 2\sqrt{xy}$;

12) $(x^4 + 6x^2y^2 + y^4)dx + 4xy(x^2 + y^2)dy = 0,\ y(1) = 0$.

Câu 3*. Bằng cách đưa về dạng đẳng cấp hoặc tách biến, hãy giải các phương trình vi phân sau đây

1) $(2x + y + 1)dx + (x + 2y - 1)dy = 0$;

2) $(x + y + 2)dx + (2x + 2y - 1)dy = 0$;

3) $(x - 2y + 3)dx + (2x + y - 1)dy = 0$;

4) $(x - y + 4)dx + (x + y - 2)dy = 0$;

5) $2(x + y)dy + (3x + 3y - 1)dx = 0,\ y(0) = 2$;

6) $(y - x - 4)dy = (x + y - 2)dx,\ y(1) = 1$.

<u>Hướng dẫn.</u> Các phương trình trên có dạng $y' = \dfrac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}$.

Xét hệ $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$, $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ ta có hai trường hợp:

• Nếu $\Delta \neq 0$ thì hệ có nghiệm duy nhất $(\alpha; \beta)$, ta đổi biến $x = u + \alpha$ và $y = v + \beta$.

• Nếu $\Delta = 0$ thì ta đổi biến $t = a_1x + b_1y \Rightarrow b_1dy = dt - a_1dx$ và đưa phương trình về dạng tách biến.

Câu 4. Giải các phương trình vi phân toàn phần sau đây

1) $2(xy + \sin y)dx + (x^2 + x\cos y)dy = 0$;

2) $(e^x + y + \sin y)dx + (e^y + x + x\cos y)dy = 0$;

3) $(x + \sin y)dx + (x\cos y + \sin y)dy = 0$;

4) $(\cos y - 2y\sin 2x)dx - (x\sin y - \cos 2x)dy = 0$;

5) $(y + e^x\sin y)dx + (x + e^x\cos y)dy = 0$;

6) $(\arcsin x + 2xy)dx + (x^2 + \arctan y + 1)dy = 0$;

7) $(y + x\ln y)dx + \left(\dfrac{x^2}{2y} + x + 1\right)dy = 0$;

8) $(3x^2y + \sin x)dx + (x^3 - \cos y)dy = 0$;

9) $(e^{x+y} + 3x^2)dx + (e^{x+y} + 4y^3)dy = 0,\ y(0) = 0$;

10) $(x^2 + y^2 + y)dx + (2xy + x + e^y)dy = 0,\ y(0) = 0$;

11) $(2xye^{x^2} + \ln y)dx + \left(e^{x^2} + \dfrac{x}{y}\right)dy = 0,\ y(0) = 1$;

12) $(\ln y - 5y^2\sin 5x)dx + \left(\dfrac{x}{y} + 2y\cos 5x\right)dy = 0,\ y(0) = e$.

Câu 5. Giải các phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 và Bernoulli sau đây

1) $xy' - y = x^2\cos x$;

2) $y' + 2xy = xe^{-x^2}$;

3) $y'\cos x + y = 1 - \sin x$;

4) $y' + \dfrac{4}{x}y = \dfrac{3}{x^4},\ y(1) = 0$;

5) $(1 + x^2)y' + y = \arctan x$;

6) $y'\sqrt{1 - x^2} + y = \arcsin x,\ y(0) = 0$;

7) $y' - \dfrac{y}{\sin x} = \cos^2 x.\ln\left(\tan\dfrac{x}{2}\right)$;

8) $y' - \dfrac{y}{x\ln x} = x\ln x,\ y(e) = \dfrac{1}{2}e^2$;

9) $y' + 3y\tan 3x = \sin 6x,\ y(0) = \dfrac{1}{3}$;

10) $y'\sin x - y\cos x = 1,\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$;

11*) $(2xy + 3)dy - y^2dx = 0$;

12*) $(y^4 + 2x)y' = y$;

13) $y' + \dfrac{2}{x}y = 3x^2.\sqrt[3]{y^4}$;

14) $y' + \dfrac{2}{x}y = \dfrac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$;

15) $y' - \dfrac{y}{x-1} = \dfrac{y^2}{x-1}$;

16) $4xy' + 3y = -e^x x^4 y^5$;

17) $y' - 2y\tan x + y^2\sin^2 x = 0$;

18) $y' + \dfrac{3x^2y}{x^3 + 1} = y^2(x^3 + 1)\sin x,\ y(0) = 1$;

19*) $ydx + (x + x^2y^2)dy = 0$;

20*) $(y^2 + 2y + x^2)y' + 2x = 0,\ y(1) = 0$.

Hướng dẫn. Trong các câu 11), 12), 19) và 20) ta xem x là hàm chưa biết, nghĩa là $dx = x'dy$.

II. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP CAO

Câu 1. Giải các phương trình vi phân cấp cao (dạng khuyết) sau đây

1) $y^{(4)} = \cos^2 x,\ y(0) = \dfrac{1}{32},\ y'(0) = 0,\ y''(0) = \dfrac{1}{8},\ y'''(0) = 0$;

2) $y''' = x\sin x,\ y(0) = y'(0) = 0,\ y''(0) = 2$;

3) $y''' = xe^{-x},\ y(0) = 0,\ y'(0) = y''(0) = 2$;

4) $y'''\sin^4 x = \sin 2x$;

5) $(1 - x^2)y'' - xy' = 2$;

6) $2xy''y''' = (y'')^2 - 1$;

7) $(1 + x^2)y'' + (y')^2 + 1 = 0$;

8) $(x - 1)y''' - y'' = 0,\ y(2) = 2,\ y'(2) = y''(2) = 1$;

9) $(2y + 3)y'' - 2(y')^2 = 0$;

10) $yy'' - (y')^2 = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2$;

11*) $(y')^2 + yy'' = yy'$;

12*) $3(y')^2 = 4yy'' + y^2$;

Hướng dẫn. Trong 11) ta sử dụng $(yy')'$ và trong 12) ta chia 2 vế cho y^2 rồi đặt $z = \dfrac{y'}{y}$.

Câu 2. Giải các phương trình vi phân tuyến tính cấp cao thuần nhất với hệ số hằng sau đây

1) $3y'' - 8y' + 5y = 0$;
2) $2y'' - 7y' - y = 0$;
3) $y'' - y' + 6y = 0$;
4) $y^{(4)} + y = 0$;
5) $y^{(4)} - 2y''' + y'' = 0$;
6) $y''' + 5y'' + 8y' + 4y = 0$;
7) $y'' + 5y' + 6y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = -6$;
8) $y'' - 10y' + 25y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$;
9) $y'' - 2y' + 10y = 0,\ y\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 0,\ y'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = e^{\frac{\pi}{6}}$;
10) $9y'' + y = 0,\ y\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = 2,\ y'\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = 0$;
11) $y'' + 9y = 0,\ y\left(0\right) = 0,\ y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$;
12) $y'' + y = 0,\ y'\left(0\right) = 1,\ y'\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 0$.

<u>Hướng dẫn</u>

Xét phương trình thuần nhất cấp cao

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \quad (*)$$

$$(a_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, \ldots, n)$$

Nếu phương trình đặc trưng của $(*)$

$$k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \ldots + a_{n-1} k + a_n = 0$$

có n nghiệm thực đơn $k_1,\ k_2, \ldots,\ k_{n-1},\ k_n$ thì phương trình $(*)$ có n nghiệm riêng

$$y_1 = e^{k_1 x},\ y_2 = e^{k_2 x}, \ldots,\ y_{n-1} = e^{k_{n-1} x},\ y_n = e^{k_n x}$$

và nghiệm tổng quát là

$$\boxed{y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + \ldots + C_{n-1} e^{k_{n-1} x} + C_n e^{k_n x}}$$

$$(C_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, \ldots, n).$$

Câu 3. Giải các phương trình vi phân tuyến tính cấp hai với hệ số hằng sau đây

1) $y'' - 4y' + 5 = 0$;
2) $y'' - 7y' - 1 = 0$;
3) $y'' - y' + 6 = 0$;
4) $y'' + y' + 3 = 0$;
5) $y'' + 2y' - 3 = 0$;
6) $y'' + 4y' + 4 = 0$.

Câu 4. Tìm một nghiệm riêng và giải các phương trình vi phân sau đây

1) $y'' - 2y' + 2y = 2e^x$;
2) $y'' + y' = 2\sin x + 3\cos 2x$;
3) $y'' - 4y' - 5y = 4\sin x - 6\cos x$;
4) $y'' + 2y' + 26y = 29e^x$;
5) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}(x^3 - 4x + 2)$;
6) $y'' + 4y' + 4y = \cos x$;
7) $y'' - 4y' + 3y = e^{3x}\sin x$;
8) $y'' + 6y' + 8y = 2x\sin x + \cos x$;
9) $y'' - 8y' + 12y = e^{2x}(x^2 - 1)$;
10) $y'' + 3y' + 2y = e^x x^2$;
11) $y'' + 3y' + 2y = e^{-x} x^2$;
12) $y'' - 6y' + 10y = xe^{3x}\sin x$;
13) $y'' + 3y = x^2 \sin x$;
14) $y'' - 6y' + 8y = e^{2x}\sin 4x$.

………………………………Hết………………………………