Câu 2: Sắp xếp tăng dần theo Big O nhỏ nhất,giải thích cách so sánh

Group 1

$$f_1(n) = \binom{n}{100}$$
$$f_2(n) = n^{100}$$
$$f_3(n) = \frac{1}{n}$$
$$f_4(n) = 10^{1000}n$$
$$f_5(n) = n\log n$$

Ta có :
$f_1(n) = \binom{n}{100} = \frac{n!}{100!(n-100)!} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-99)}{100!} = O(n^{100})$
$f_2(n) = n^{100} = O(n^{100})$
$f_3(n) = \frac{1}{n}$
$f_4(n) = 10^{1000}n = O(n)$
$f_5(n) = n\log n = O(n.n^c) = O(n^{c+1})$
Vì f_3 giảm dần khi n tiến đến vô cùng nên f_3 bé nhất
$\rightarrow f_3 < f_4 < f_5 < f_1 = f_2$

Group 2

$$f_1(n) = 2^{2^{1000000}}$$
$$f_2(n) = 2^{100000n}$$
$$f_3(n) = \binom{n}{2}$$
$$f_4(n) = n\sqrt{n}$$

Ta có :
$f_1(n) = O(c)$
$f_2(n) = O(2^n)$
$f_3(n) = \frac{n(n-1)}{2} = O(n^2)$
$f_4(n) = n * n^{1/2} = n^{3/2} = O(n^{3/2})$

$\rightarrow f_1 < f_4 < f_3 < f_2$

Group 3

$$f_1(n) = n^{\sqrt{n}}$$
$$f_2(n) = 2^n$$
$$f_3(n) = n^{10}.2^{n/2}$$
$$f_4(n) = \sum_{i=1}^{n}(i+1)$$

Ta có:
$f_1(n) = 2^{\sqrt{n}.\log n} = 2^{n^{1/2}.\log n} = 2^{O(n^{1/2+c})}$ (với c rất nhỏ) (1)
$f_2(n) = 2^n = 2^{O(n)}$
$f_3(n) = n^{10}.2^{n/2} = \left(2^{\log n}\right)^{10}.2^{n/2} = 2^{10.\log n + n/2} = 2^{O(n)}$
$f_4(n) = \sum_{i=1}^{n}(i) + \sum_{i=1}^{n}(1)$
$= \frac{(n+1).n}{2} + n$
$= \frac{n^2}{2} + \frac{3n}{2} = \frac{1}{2}.(2^{log_n})^2 + \frac{3}{2}(2^{\log n})$
$= \frac{1}{2}.2^{2\log n} + \frac{3}{2}(2^{\log n}) = 2^{O(n^c)}$ (với c rất nhỏ)

Với c là một hằng số rất nhỏ, ta thấy: $n > n^{1/2+c} > n^c$ vậy nên $2^n > 2^{1/2+c} > 2^c$.

Vậy ta được $f_3(n) > f_1(n) > f_4(n)$
Mà $f_2(n) = 2^{O(n)}$ và $f_3(n) = 2^{O(n)}$, nên xét theo Big-O, ta được:

$$f_4(n) < f_1(n) < f_3(n) = f_2(n)$$

Xét hàm $y_1 = n$, khi lấy đạo hàm ta được $y_1' = 1$, vậy hàm số y_1 sẽ là hàm đồng biến và tăng với tốc độ không đổi là 1 hằng số. Trong khi đó hàm số $y_2 = 10.\log n + n/2$, khi đạo hàm ta sẽ được $y_2' = \frac{10}{n.\ln 10} + \frac{1}{2}$, ta thấy hàm y_2' là hàm đồng biến tăng với tốc độ phụ thuộc vào biến n, khi n càng lớn thì hàm tăng càng chậm. Từ đó suy ra khi n đủ lớn, thì $y_1 > y_2$ hay $2^n > 2^{10.\log n + n/2}$

Vậy $f_2(n) > f_3(n)$, nên:

$$f_4(n) < f_1(n) < f_3(n) < f_2(n)$$

Group 4

$$f_6(n) = n^{\sqrt{n}} = 2^{\sqrt{n}\log n}$$
$$f_7(n) = \pi^n = 2^{n\log\pi}$$
$$f_8(n) = 2^{n^4}$$
$$f_9(n) = n^{4logn} = 2^{4logn^2}$$

Ta có: $O(\sqrt{n}) > O(\log n)$

$\rightarrow O(\sqrt{n}\log n) > O(\log n^2)$

$\rightarrow O(2^{\sqrt{n}\log n}) > O(2^{4logn^2})$

$\rightarrow f_6 > f_9 \quad (1)$

Ta có: $O(\sqrt{n}) > O(\log n)$

$\rightarrow O(\sqrt{n}^2) > O(\sqrt{n}\log n)$

$\rightarrow O(2^{nlog\pi}) > O(2^{\sqrt{n}\log n})$

$\rightarrow f_7 > f_6 \quad (2)$

Ta có: $O(n^4) > O(n)$

$\rightarrow O(2^{n^4}) > O(2^{n\log\pi})$

$\rightarrow f_8 > f_7 \quad (3)$

Từ $(1), (2), (3) \Rightarrow f_9 < f_6 < f_7 < f_8$

Group 5

$$f_5(n) = n^n$$
$$f_7(n) = n\log n$$
$$f_8(n) = 2^{n/2}$$
$$f_9(n) = 3^{\sqrt{n}}$$
$$f_{10}(n) = 4^{n^{1/4}}$$

Ta có :
$f_6(n) = n^{\sqrt{n}} = n^{n^{\frac{1}{2}}} = 2^{n^{\frac{1}{2}}\log n} = 2^{O(n^c.n^{\frac{1}{2}})} = 2^{O(n^{c+\frac{1}{2}})}$
$f_7(n) = n\log n = 2^{\log n}.2^{\log(\log n)} = 2^{\log n+\log(\log n)} = 2^{O(\log n)}$
$f_8(n) = 2^{\frac{n}{2}} = 2^{O(n)}$
$f_9(n) = 3^{\sqrt{n}} = 3^{n^{\frac{1}{2}}} = 2^{\log 3.n^{\frac{1}{2}}} = 2^{O(n^{\frac{1}{2}})}$
$f_{10}(n) = 4^{n^{\frac{1}{4}}} = 2^{2n^{\frac{1}{4}}} = 2^{O(n^{\frac{1}{4}})}$

Vì $n^{\frac{1}{4}}$vẫn là hàm mũ của n nên độ phức tạp của nó sẽ vẫn lớn hơn logn khi n đủ lớn
$\rightarrow f_7(n) < f_{10}(n) < f_9(n) < f_6(n) < f_8(n)$

Group 6

$$f_1(n) = n^{0.999999} * log(n)$$
$$f_2(n) = 10000000n$$
$$f_3(n) = 1.000001^n$$
$$f_4(n) = n^2$$

Ta có :
$f_1(n) = n^{0.999999} * log(n) = O(n^{0.999999}.n^c) = (n^{c+0.999999})$ với c rất bé và c > 0

$f_2(n) = O(n)$
$f_3(n) = O(1.000001^n)$(hàm lũy thừa => tăng nhanh nhất)
$f_4(n) = O(n^2)$
Với c + 0.999999 < 1 thì ta có:
$\rightarrow f_1 < f_2 < f_4 < f_3$

Group 7

$$f_1(n) = n^\pi$$
$$f_2(n) = \pi^n$$
$$f_3(n) = \binom{n}{5}$$
$$f_4(n) = \sqrt{2\sqrt{n}}$$
$$f_5(n) = \binom{n}{n-4}$$
$$f_6(n) = 2^{(\log n)^4}$$
$$f_7(n) = n^{5.(\log n)^2}$$
$$f_8(n) = n^4.\binom{n}{4}$$

Ta có: (với c là hằng số rất nhỏ, c « 1)

$$f_1(n) = O(n^\pi) \tag{1}$$
$$f_2(n) = \pi^{O(n)} \tag{2}$$
$$f_3(n) = \frac{n!}{5!.(n-5)!} = \frac{1}{5!}.[n.(n-1).(n-2).....(n-4)] = O(n^5) \tag{3}$$
$$f_4(n) = (2^{n^{1/2}})^{1/2} = 2^{\frac{n^{1/2}}{2}} = 2^{O(n^{\frac{1}{2}})} \tag{4}$$
$$f_5(n) = \binom{n}{n-4} = \frac{n!}{(n-4)!.4!} = \frac{1}{4!}.[n.(n-1).(n-2).(n-3)] = O(n^4) \tag{5}$$
$$f_6(n) = 2^{(\log n)^4} = 2^{O(n^{4c})} \tag{6}$$
$$f_7(n) = n^{5.(\log n)^2} = (2^{\log n})^{5.\log^2 n} = 2^{5.\log^3 n} = 2^{O(n^{3c})} \tag{7}$$
$$f_8(n) = n^4.\frac{n!}{4!.(n-4)!} = n^4.\frac{1}{4!}.[n.(n-1).(n-2).(n-3)] = O(n^8) \tag{8}$$

Từ (1), (3), (5), (8), ta có:

$$\pi < 4 < 5 < 8$$
$$\Leftrightarrow O(n^\pi) < O(n^4) < O(n^5) < O(n^8)$$
$$\Leftrightarrow f_1(n) < f_5(n) < f_3(n) < f_8(n)$$

Từ (4), (6), (7), ta có:

$$\begin{aligned}
&3c < 4c < \frac{1}{2}\\
&\Leftrightarrow n^{3c} < n^{4c} < n^{\frac{1}{2}}\\
&\Leftrightarrow O(n^{3c}) < O(n^{4c}) < O(n^{\frac{1}{2}})\\
&\Leftrightarrow 2^{O(n^{3c})} < 2^{O(n^{4c})} < 2^{O(n^{\frac{1}{2}})}\\
&\Leftrightarrow f_7(n) < f_6(n) < f_4(n)
\end{aligned}$$

Xét $f_8(n)$ là một hàm số với bậc cao nhất là n^8. Xét $n^8 = (2^{\log n})^8 = 2^{8.\log n} = 2^{O(n^c)}$. Vì $n^c < n^{3c}$ nên $f_8(n) < f_7(n)$, vậy, ta được:

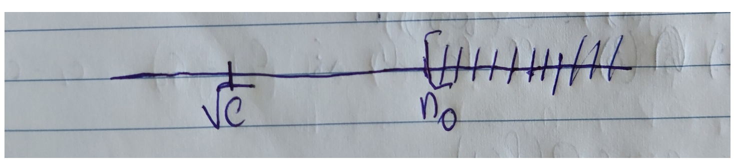
$$f_1(n) < f_5(n) < f_3(n) < f_8(n) < f_7(n) < f_6(n) < f_4(n)$$

Xét: $n^{\frac{1}{2}} < n \Leftrightarrow 2^{n^{\frac{1}{2}}} < 2^n < \pi^n \Leftrightarrow 2^{O(n^{\frac{1}{2}})} < 2^{O(n)} < \pi^{O(n)}$. Vậy $f_4(n) < f_2(n)$, nên:

$$f_1(n) < f_5(n) < f_3(n) < f_8(n) < f_7(n) < f_6(n) < f_4(n) < f_2(n)$$

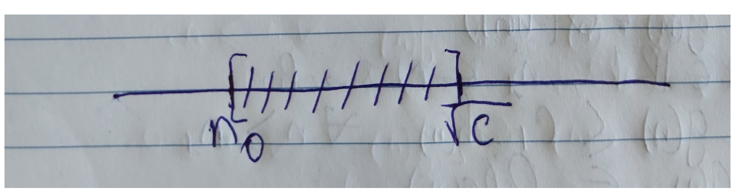
Chứng minh, dùng định nghĩa của các ký hiệu tiệm cận, không dùng lim
a. $n^4 + n + 1 \notin O(n^2)$
Giải:
Giả sử $n^4 + n + 1 \in O(n^2)$
$\Rightarrow \exists c \in R^+, n_0 \in N$ sao cho:
$n^4 + n + 1 \leq O(n^2) \qquad \forall n \geq n_0$
Mà ta có: $n^4 \leq n^4 + n + 1 \qquad \forall n \geq n_0, n \geq 0$
Từ đó suy ra: $n^4 \leq cn^2 \Rightarrow n^2 \leq c \Rightarrow n \leq \sqrt{c} \qquad \forall n \geq n_0, n \geq 0$

Trường hợp 1: $\sqrt{c} \leq n_0$



Nhận xét: $\forall n \geq n_0, n \geq 0$, vô lý do không có giá trị nào để thỏa $n \leq \sqrt{c}$ và $n \geq n_0$

Trường hợp 2: $\sqrt{c} \geq n_0$



Nhận xét: $\forall n \geq n_0, n \geq 0$, vô lý do chỉ tồn tại hữu hạn giá trị n để thỏa $n \leq \sqrt{c}$ và $n \geq n_0$
Do đó, giả sử ban đầu sai.
Vậy $n^4 + n + 1 \notin O(n^2)$

b. $O(cf(n)) = O(f(n))$ với c là hằng số
Giải:
Chứng minh: $O(cf(n)) \subseteq O(f(n)$ (1)
Xét 1 phần tử hàm bất kỳ $a(n) \in O(cf(n))$
$\Rightarrow \exists c_1 \in R^+, n_1 \in N$ sao cho
$a(n) \leq c_1 cf(n) \quad \forall n \geq n_1$
Và $\exists c_2 \in R^+, n_2 \in N$ sao cho
$a(n) \leq c_2 f(n) \quad \forall n \geq n_2$
$\Rightarrow a(n) \in O(f(n))$
Vậy, ta cần chọn $c_2 = c_1 c$ để thỏa chứng minh trên với c là hằng số

Chứng minh: $O(f(n)) \subseteq O(cf(n)$ (2)
Xét 1 phần tử hàm bất kỳ $b(n) \in O(f(n))$
$\Rightarrow \exists d_1 \in R^+, n_1 \in N$ sao cho
$b(n) \leq d_1 f(n) \quad \forall n \geq n_1$
Và $\exists d_2 \in R^+, n_2 \in N$ sao cho
$b(n) \leq d_2 cf(n) \quad \forall n \geq n_2$
$\Rightarrow b(n) \in O(cf(n))$
Vậy, ta cần chọn $d_2 = \dfrac{d_1}{c}$ để thỏa chứng minh trên với c là hằng số
Từ 2 chứng minh trên: (1) và (2), ta có $O(cf(n)) \subseteq O(f(n))$ và $O(f(n)) \subseteq O(cf(n))$
Kết luận: $O(cf(n)) = O(f(n))$ (dpcm)

c. Nếu $f(n) \in O(g(n))$ và $g(n) \in O(h(n))$ thì $f(n) \in O(h(n))$
Giải:
Ta có:

1) $f(n) \in O(g(n))$
$\Rightarrow \exists c_1 \in R^+, n_1 \in N$ sao cho
$f(n) \leq c_1 g(n) \quad \forall n \geq n_1$

2) $g(n) \in O(h(n))$

$\Rightarrow \exists c_2 \in R^+, n_2 \in N$ sao cho
$g(n) \le c_2 h(n) \qquad \forall n \ge n_2$

Khi đó ta có:
$f(n) \le c_1 g(n) \le c_1 c_2 h(n) \qquad \forall n \ge n_1, n \ge n_2$
$\Rightarrow f(n) \le c_1 c_2 h(n) \qquad \forall n \ge n_1, n \ge n_2$
Đặt $c_3 = c_1 c_2$, khi đó:
$\exists c_3 \in R^+, n_3 \in N, n_3 \ge n_1, n_3 \ge n_2$ sao cho
$f(n) \le c_3 h(n) \qquad \forall n \ge n_3$
Vậy $f(n) = O(h(n)) \qquad \forall n \ge n_3$ (dpcm)

d.$max(f(n), g(n)) = \Theta(f(n) + g(n))$
Giả sử ta có:
$\exists c_1, c_2 \in R^+, n_0 \in N$ sao cho
$c_1(f(n) + g(n)) \le max(f(n), g(n)) \le c2(f(n) + g(n)) \qquad \forall n \ge n_0$

Ta thấy $\forall n \ge n_0$:
$f(n) \le max(f(n), g(n)) \qquad (1)$
$g(n) \le max(f(n), g(n)) \qquad (2)$
$max(f(n), g(n)) \le f(n)+g(n)$ Từ (1) và (2)$\Rightarrow f(n)+g(n) \le 2max(f(n), g(n))$
$\Rightarrow \dfrac{1}{2}(f(n) + g(n)) \le max(f(n), g(n))$

Khi đó, ta có:
$\dfrac{1}{2}(f(n) + g(n)) \le max(f(n), g(n)) \le f(n) + g(n) \qquad \forall n \ge n_0$
Do đó, ta có thể chọn $c_1 = \dfrac{1}{2}, c_2 = 1 \forall n \ge n_0$ để có điều cần chứng minh:
$max(f(n), g(n)) = \Theta(f(n) + g(n))$

e. $g(n) \in O(h(n)) \Rightarrow O(g(n)) \subseteq O(h(n))$
Ta có: $g(n) \in O(h(n))$
$\Rightarrow \exists c_1 \in R^+, n_1 \in N$ sao cho
$g(n) \le c_1 h(n) \qquad \forall n \ge n_1$

Xét 1 hàm bất kỳ $a(n) \in O(g(n))$, ta có:
$\Rightarrow \exists c_2 \in R^+, n_2 \in N$ sao cho
$a(n) \le c_2 g(n) \qquad \forall n \ge n_2$

Chứng minh: $a(n) \in O(h(n))$
Ta có:
$a(n) \leq c_2 g(n) \leq c_1 c_2 h(n) \qquad \forall n \geq n_1, n \geq n_2$
$\Rightarrow a(n) \leq c_1 c_2 h(n) \qquad \forall n \geq n_1, n \geq n_2$

Đặt $c_3 = c_1 c_2, n_3 = max(n_1, n_2)$
$\exists c_3 \in R^+, n_3 \in N$ sao cho
$a(n) \leq c_3 h(n) \qquad \forall n \geq n_3$
$\Rightarrow a(n) \in O(h(n))$
Vậy: $O(g(n)) \subseteq O(h(n))$ (dpcm)

f. $\Theta(g(n)) = O(g(n)) \cap \Omega(g(n))$
Xét 1 phần tử hàm bất kỳ $a(n) \in \Theta(g(n))$, ta có:
$\exists c_1, c_2 \in R^+, n_1 \in N$ sao cho
$c_1 g(n) \leq a(n) \leq c_2 g(n) \qquad \forall n \geq n_1$
$$\Rightarrow \begin{cases} a(n) \geq c_1 g(n) \\ a(n) \leq c_2 g(n) \end{cases}$$
Ta thấy rằng a(n) bị chặn dưới bởi $c_1 g(n)$ và chặn trên bởi $c_2 g(n)$
Điều đó có nghĩa theo định nghĩa của big O với $a(n) \leq c_2 g(n)$
$\Rightarrow a(n) \in O(g(n)) vic_2 \in R^+, n_1 \in N$
Và theo định nghĩa của big Ω với $a(n) \geq c_1 g(n)$
$\Rightarrow a(n) \in \Omega(g(n)) vic_1 \in R^+, n_1 \in N$
Mà a(n) nằm giữa 2 khoảng này nên $a(n) \in O(g(n)) \cap \Omega(g(n))$
Vậy $\Theta(g(n)) \subseteq O(g(n)) \cap \Omega(g(n))$ (1)

Xét 1 phần tử hàm bất kỳ $b(n) \in O(g(n)) \cap \Omega(g(n))$
$\Rightarrow \exists c_3, c_4 \in R^+, n_3, n_4 \in N$ sao cho

$$\begin{cases} b(n) \leq c_4 g(n) & \forall n \geq n_4 \\ b(n) \geq c_3 g(n) & \forall n \geq n_3 \end{cases}$$
Điều đó có nghĩa $c_3 g(n) \leq b(n) \leq c_4 g(n) \forall n \geq n_3, n \geq n_4$
$\Rightarrow b(n) \in \Theta(g(n))$
Vậy $O(g(n)) \cap \Omega(g(n)) \subseteq \Theta(g(n))$ (2)

Từ (1) và (2) ta kết luận: $\Theta(g(n)) = O(g(n)) \cap \Omega(g(n))$ (dpcm)

g. $n + n^2 O(\ln(n)) = O(n^2 \ln(n))$

Với $O(\ln(n))$, xét 1 phần tử hàm bất kỳ $a(n) \in O(\ln(n))$, ta có:
$\exists c_1 \in R^+, n_1 \in N$ sao cho
$a(n) \leq c_1 \ln(n) \qquad \forall n \geq n_1$
Nhân 2 vế cho n^2, ta được:
$n^2 a(n) \leq n^2 c_1 \ln(n) \qquad \forall n \geq n_1$

$\Rightarrow n^2 a(n) \in O(n^2 \ln(n)) \qquad \forall n \geq n_1$

$\Rightarrow n^2 O(\ln(n)) \subseteq O(n^2 \ln(n)) \qquad (1)$

Với $O(n^2 \ln(n))$, xét 1 phần tử hàm bất kỳ $b(n) \in O(n^2 \ln(n))$, ta có:

$\exists c_2 \in R^+, n_2 \in N$ sao cho

$b(n) \leq c_2 n^2 \ln(n) \qquad \forall n \geq n_2$

$\Rightarrow \dfrac{b(n)}{n^2} \leq c_2 \ln(n) \qquad \forall n \geq n_2$

$\Rightarrow \dfrac{b(n)}{n^2} \in O(\ln(n)) \qquad \forall n \geq n_2$

$\Rightarrow O(n^2 \ln(n)) \subseteq n^2 O(\ln(n)) \qquad \forall n \geq n_2$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $O(n^2 \ln(n)) = n^2 O(\ln(n)) \qquad \forall n \geq max(n_1, n_2)$
Mà $n \in O(n)$ và $O(n) \subseteq O(n^2 \ln(n))$
Do đó $n + n^2 O(\ln(n)) = O(n^2 \ln(n))$ (dpcm)

Bài tập 4: Các khẳng định bên dưới là đúng hay sai? Vì sao?

1. Nếu f(n) = Θ(g(n)) và g(n) = Θ(h(n)), thì h(n) = Θ(f(n))

   Ta có: f(n) = Θ(g(n))
   $\Rightarrow \exists a_1, a_2 \in \mathbb{R}^+, n_a \in \mathbb{N}$ sao cho: $a_1.g(n) \leq f(n) \leq a_2.g(n) \quad \forall n \geq n_a \quad (1)$

   Ta có: g(n) = Θ(h(n))
   $\Rightarrow \exists b_1, b_2 \in \mathbb{R}^+, n_b \in \mathbb{N}$ sao cho: $b_1.h(n) \leq g(n) \leq b_2.h(n) \quad \forall n \geq n_b$
   $\Rightarrow \frac{1}{b_2}.g(n) \leq h(n) \leq \frac{1}{b_1}.g(n) \quad \forall n \geq n_b \qquad (2)$

   Đặt: $n_0 = max(n_a, n_b)$
   Từ (1) $\Rightarrow \frac{1}{a_2}.f(n) \leq g(n) \leq \frac{1}{a_1}.f(n) \quad \forall n \geq n_a$
   $\Rightarrow \frac{1}{b_1}.g(n) \leq \frac{1}{a_1 b_1}.f(n)$ và $\frac{1}{a_2 b_2}.f(n) \leq \frac{1}{b_2}.g(n) \quad \forall n \geq n_0 \qquad (3)$
   Từ (2) và (3) $\Rightarrow \frac{1}{a_2 b_2}.f(n) \leq h(n) \leq \frac{1}{a_1 b_1}.f(n) \quad \forall n \geq n_0$
   Đặt: $c_1 = \frac{1}{a_1 b_1}$ và $c_2 = \frac{1}{a_2 b_2}$
   Suy ra: $\exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho: $c_1.f(n) \leq h(n) \leq c_2.f(n) \quad \forall n \geq n_0$
   $\Leftrightarrow h(n) = \Theta(f(n))$
   Vậy: khẳng định này là đúng.

2. Nếu f(n) = O(g(n)) và g(n) = O(f(n)), thì f(n) = g(n)

   (Các tính chất trong câu này có trong file C1T6 trang 22)
   Ta có tính chất: f(n) = O(g(n)) và g(n) = O(f(n)) ⇔ O(f(n)) = O(g(n))
   Xét ví dụ: f(n) = n, g(n) = 2n (1)
   Ta có tính chất: O(Cf(n)) = O(f(n)) với C là hằng số (2)
   Từ (1), (2) suy ra: O(f(n)) = O(g(n)) nhưng f(n) ≠ g(n)
   Tức là: f(n) = O(g(n)) và g(n) = O(f(n)), thì có thể f(n) ≠ g(n)
   Vậy: khẳng định này là sai.

3. f(n) + O(f(n)) = Θ(f(n))

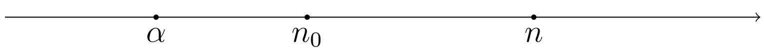
   Xét 1 hàm bất kỳ $g(n) \in O(f(n))$
   $\Rightarrow \exists a \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho: $g(n) \leq a.f(n) \quad \forall n \geq n_0$

$\Rightarrow 1.f(n) \leq f(n)+g(n) \leq (a+1)f(n)$ (Vì g(n) là hàm chi phí nên không thể âm)
Đặt $c_1 = 1$, $c_2 = a+1$
Suy ra: $c_1 f(n) \leq f(n) + g(n) \leq c_2 f(n) \quad \forall n \geq n_0$
$\Rightarrow f(n) + O(f(n)) = \Theta(f(n))$
Vậy: khẳng định này là đúng.

4. $2^{10n} = \mathrm{O}(2^n)$

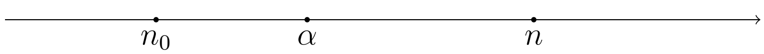
   Giả sử: $2^{10n} = O(2^n)$
   $\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho: $2^{10n} \leq c.2^n \quad \forall n \geq n_0$
   $\Leftrightarrow 2^{9n} \leq c \Leftrightarrow n \leq \dfrac{1}{9}.\log_2 c \quad \forall n \geq n_0$
   Đặt: $\alpha = \dfrac{1}{9}.\log_2 c \Rightarrow n \leq \alpha \quad \forall n \geq n_0$

   - Xét trường hợp 1: $\alpha < n_0$

     Với $n \geq n_0$ thì $n > \alpha \Rightarrow$ Mâu thuẫn.

   - Xét trường hợp 2: $\alpha \geq n_0$

     Sẽ có những trường hợp $n > \alpha$ như trên trục số $\Rightarrow$ Mâu thuẫn.

   Vậy: Giả sử sai $\Rightarrow$ Khẳng định này là sai.

5. $2^{n+10} = \mathrm{O}(2^n)$

   Ta có: $2^{n+10} = 2^{10}.2^n \leq 2^{10}.2^n \quad \forall n \geq 1$
   Chọn $c = 2^{10}$, $n_0 = 1$, theo định nghĩa của Big-O, ta có: $2^{n+10} = \mathrm{O}(2^n)$
   Vậy: khẳng định này là đúng.

6. $\log_a n = \Theta(\log_b n)$

   Điều kiện xác định: a>1, b>1 (bởi vì $n \in \mathbb{N}$ nên a, b không thể nhỏ hơn 1)
   Giả sử: $\log_a n = \Theta(\log_b n)$
   $\Rightarrow \exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho:

$$c_1.\log_b n \leq \log_a n \leq c_2.\log_b n \quad \forall n \geq n_0$$
$$\Leftrightarrow c_1.\log_b n \leq \log_a b.\log_b n \leq c_2.\log_b n \quad \forall n \geq n_0$$
$$\Leftrightarrow c_1 \leq \log_a b \leq c_2 \quad \forall n \geq n_0$$

   Luôn tồn tại c_1, c_2 và $n_0 > 1$ thoải mãn điều kiện trên $\Rightarrow$ Giả sử đúng.
   Vậy: khẳng định này là đúng.

Bài tập 5: Ước lượng nhanh độ phức tạp của giải thuật đệ quy dùng Định lý Master

1. $T(n) = 3T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2$ (Dạng đơn giản 1)

$a = 3, b = 2, d = 2$
$\to$ Vì $3 < 2^2$ nên trường hợp 1 được áp dụng
$T(n) \in \Theta(n^d) = \Theta(n^2)$

2. $T(n) = 7T\left(\frac{n}{3}\right) + n^2$ (Dạng đơn giản 1)

$a = 7, b = 3, d = 2$
$\to$ Vì $7 < 3^2$ nên trường hợp 1 được áp dụng
$T(n) \in \Theta(n^d) = \Theta(n^2)$

3. $T(n) = 3T\left(\frac{n}{3}\right) + \frac{n}{2}$ (Dạng đơn giản 1)

$a = 3, b = 3, d = 1$
$\to$ Vì $3 = 3^1$ nên trường hợp 2 được áp dụng
$T(n) \in \Theta(n^d \log n) = \Theta(n \log n)$

4. $T(n) = 16T\left(\frac{n}{4}\right) + n$ (Dạng đơn giản 1)

$a = 16, b = 4, d = 1$
$\to$ Vì $16 > 4^1$ nên trường hợp 3 được áp dụng
$T(n) \in \Theta(n^{\log_b a}) = \Theta(n^2)$

5. $T(n) = 2T\left(\frac{n}{4}\right) + n^{0.51}$ (Dạng đơn giản 1)

$a = 2, b = 4, d = 0.51$
$\to$ Vì $2 < 4^{0.51}$ nên trường hợp 1 được áp dụng
$T(n) \in \Theta(n^d) = \Theta(n^{0.51})$

6. $T(n) = 3T\left(\frac{n}{2}\right) + n$ (Dạng đơn giản 1)

$a = 3, b = 2, d = 1$
$\to$ Vì $3 > 2^1$ nên trường hợp 3 được áp dụng
$T(n) \in \Theta(n^{\log_b a}) = \Theta(n^{\log_2 3})$

7. $T(n) = 3T\left(\frac{n}{3}\right) + \sqrt{(n)}$ (Dạng đơn giản 1)

$a = 3, b = 3, d = \frac{1}{2}$

$\rightarrow$ Vì $3 > 3^{\frac{1}{2}}$ nên trường hợp 3 được áp dụng
$T(n) \in \Theta(n^{\log_b a}) = \Theta(n)$

8. $T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + cn$ (Dạng đơn giản 1)

$a = 4, b = 2, d = 1$
$\rightarrow$ Vì $4 > 2^1$ nên trường hợp 3 được áp dụng
$T(n) \in \Theta(n^{\log_2 4}) = \Theta(n^2)$

9. $T(n) = 4T\left(\frac{n}{4}\right) + 5n$ (Dạng đơn giản 1)

$a = 4, b = 4, d = 1$
$\rightarrow$ Vì $4 = 4^1$ nên trường hợp 2 được áp dụng
$T(n) \in \Theta(n^d \log n) = \Theta(n \log n)$

10. $T(n) = 5T\left(\frac{n}{4}\right) + 4n$ (Dạng đơn giản 1)

$a = 5, b = 4, d = 1$
$\rightarrow$ Vì $5 > 4^1$ nên trường hợp 3 được áp dụng
$T(n) \in \Theta(n^{\log_b a}) = \Theta(n^{\log_4 5})$

11. $T(n) = 4T\left(\frac{n}{5}\right) + 5n$ (Dạng đơn giản 1)

$a = 4, b = 5, d = 1$
$\rightarrow$ Vì $4 < 5^1$ nên trường hợp 1 được áp dụng
$T(n) \in \Theta(n^d) = \Theta(n)$

12. $T(n) = 25T\left(\frac{n}{5}\right) + n^2$ (Dạng đơn giản 1)

$a = 25, b = 5, d = 2$
$\rightarrow$ Vì $25 = 5^2$ nên trường hợp 2 được áp dụng
$T(n) \in \Theta(n^d \log n) = \Theta(n^2 \log n)$

13. $T(n) = 10T\left(\frac{n}{3}\right) + 17n^{1.2}$ (Dạng đơn giản 1)

$a = 10, b = 3, d = 1.2$
$\rightarrow$ Vì $10 > 3^{1.2}$ nên trường hợp 3 được áp dụng
$T(n) \in \Theta(n^{\log_b a}) = \Theta(n^{\log_3 10})$

14. $T(n) = 7T\left(\frac{n}{2}\right) + n^3$ (Dạng đơn giản 1)

$a = 7, b = 2, d = 3$
$\rightarrow$ Vì $7 < 2^3$ nên trường hợp 1 được áp dụng
$T(n) \in \Theta(n^d) = \Theta(n^3)$

15. $T(n) = 4T\left(\dfrac{n}{2}\right) + \log n$ (Dạng tổng quát 2)

$a = 4, b = 2$ và $n^{\log_b a} = n^{\log_2 4} = n^2$
Ta thấy: $f(n) = \log n = O(n^c) = O(n^{2-\epsilon})(\epsilon > 0)$
$\rightarrow$ Áp dụng trường hợp 1 ta được: $T(n) = \Theta(n^2)$

16. $T(n) = 4T\left(\dfrac{n}{5}\right) + \log n$ (Dạng tổng quát 2)

$a = 4, b = 5$ và $n^{\log_b a} = n^{\log_5 4}$
Ta thấy: $f(n) = \log n = O(n^c) = O(n^{\log_5 4-\epsilon})(\epsilon > 0)$
$\rightarrow$ Áp dụng trường hợp 1 ta được: $T(n) = \Theta(n^{\log_5 4})$

17. $T(n) = \sqrt{2}T\left(\dfrac{n}{2}\right) + \log n$ (Dạng tổng quát 2)

$a = \sqrt{2}, b = 2$ và $n^{\log_b a} = n^{\log_2 \sqrt{2}} = n^{0.5}$
Ta thấy: $f(n) = \log n = O(n^c) = O(n^{0.5-\epsilon})(\epsilon > 0)$
$\rightarrow$ Áp dụng trường hợp 1 ta được: $T(n) = \Theta(n^{0.5})$

18. $T(n) = 2T\left(\dfrac{n}{3}\right) + n\log n$ (Dạng tổng quát 2)

$a = 2, b = 3$ và $n^{\log_b a} = n^{\log_3 2}$
Ta thấy: $f(n) = n\log n = \Omega(n^{\log_3 2+\epsilon})(\epsilon > 0)$ (Vì $n\log n = O(n^{1+c})$, c có thể rất nhỏ)
và $af\left(\dfrac{n}{b}\right) \leq cf(n)$
vì $2\dfrac{n}{3}\log\dfrac{n}{3} = \dfrac{2n}{3}(\log n - \log 3) \leq cn\log n$ với $c = \dfrac{2}{3}$
$\rightarrow$ Áp dụng trường hợp 3 ta được: $T(n) = \Theta(f(n)) = \Theta(n\log n)$

19. $T(n) = 3T\left(\dfrac{n}{4}\right) + n\log n$ (Dạng tổng quát 2)

$a = 3, b = 4$ và $n^{\log_b a} = n^{\log_4 3}$
Ta thấy: $f(n) = n\log n = \Omega(n^{\log_4 3+\epsilon})(\epsilon > 0)$ (Vì $n\log n = O(n^{1+c})$, c có thể rất nhỏ)
và $af\left(\dfrac{n}{b}\right) \leq cf(n)$
vì $3\dfrac{n}{4}\log\dfrac{n}{4} = \dfrac{3n}{4}(\log n - \log 4) \leq cn\log n$ với $c = \dfrac{3}{4}$
$\rightarrow$ Áp dụng trường hợp 3 ta được: $T(n) = \Theta(f(n)) = \Theta(n\log n)$

20. $T(n) = 6T\left(\dfrac{n}{3}\right) + n^2\log n$ (Dạng tổng quát 2)

$a = 6, b = 3$ và $n^{\log_b a} = n^{\log_3 6}$
Ta thấy: $f(n) = n^2\log n = \Omega(n^{\log_3 6+\epsilon})(\epsilon > 0)$ (Vì $n\log n = O(n^{2+c})$, c có thể rất nhỏ)
và $af\left(\dfrac{n}{b}\right) \leq cf(n)$

vì $6(\frac{n}{3})^2 \log\frac{n}{3} = \frac{2n^2}{3}(\log n - \log 3) \le cn^2 \log n$ với $c = \frac{2}{3}$
$\rightarrow$ Áp dụng trường hợp 3 ta được: $T(n) = \Theta(f(n)) = \Theta(n^2 \log n)$

21. $T(n) = 3T\left(\frac{n}{5}\right) + \log^2 n$ (Dạng tổng quát 2)

$a = 3, b = 5$ và $n^{\log_b a} = n^{\log_5 3}$
Ta thấy: $f(n) = \log^2 n = O(n^{\log_5 3-\epsilon})(\epsilon > 0)$ (Vì $\log^2 n = O(n^{2c})$, c có thể rất nhỏ)
$\rightarrow$ Áp dụng trường hợp 1 ta được: $T(n) = \Theta(n^{\log_5 3})$

22. $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \frac{n}{\log n}$ (Dạng tổng quát 2)

$a = 2, b = 2$ và $n^{\log_b a} = n^{\log_2 2} = n$
Ta thấy: $f(n) = \frac{n}{\log n} = \Theta(n \log^{-1} n)$
Ta thấy có dạng giống ở trường hợp 2 nhưng vì ở đây $k = -1 < 0$ nên cần tham khảo thêm một phần mở rộng hữu dụng của định luật Master có thể tìm thấy ở đường dẫn `https://en.wikipedia.org/wiki/Master_theorem_(analysis_of_algorithms)#Generic_form` ở trong bảng thứ 2.
$\rightarrow$ Áp dụng trường hợp 2b ta được: $T(n) = \Theta(n^{\log_2 2} \log\log n) = \Theta(n \log\log n)$

23. $T(n) = 2^n T\left(\frac{n}{2}\right) + n^n$

Không áp dụng được định lý Master.
Vì $a = 2^n$ không thể được biểu diễn như một hằng số

24. $T(n) = 0.5T\left(\frac{n}{2}\right) + n$

Không áp dụng được định lý Master. Vì $a = 0.5 < 1$

25. $T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + n(2 - \cos n)$

$a = 1, b = 2$ và $n^{\log_b a} = n^{\log_2 1} = n^0$
Ta thấy: $f(n) = n(2 - \cos n) = 2n - 2\cos n = \Omega(n^\epsilon)(\epsilon > 0)$
và $af\left(\frac{n}{b}\right) \le cf(n)$
$\frac{n}{2}(2 - \cos\frac{n}{2}) \le cn(2 - \cos n)$
$\Leftrightarrow c \ge \frac{2-\cos\frac{n}{2}}{4-2\cos n}$
$\Leftrightarrow c \ge \frac{3}{2}$ (Vì $\frac{2-\cos\frac{n}{2}}{4-2\cos n} \le \frac{3}{2}$)

Nhưng vì $\nexists c < 1$ sao cho $af\left(\dfrac{n}{b}\right) \leq cf(n)$ nên không thể áp dụng được định lý Master.

26. $T(n) = 64T\left(\dfrac{n}{8}\right) - n^2 \log n$

Không áp dụng được định lý Master.
Vì $f(n) = -n^2 \log n$ không tiến đến dương khi tiệm cận

27. $T(n) = T\left(\dfrac{n}{2}\right) + 2^n$ (Dạng tổng quát 2)

$a = 1, b = 2$ và $n^{\log_b a} = n^{\log_2 1} = n^0$
Ta thấy: $f(n) = 2^n = \Omega(n^{\epsilon})(\epsilon > 0)$ (Ví dụ hàm 2^n có tốc độ tăng nhanh hơn hàm n^2)
và $af\left(\dfrac{n}{b}\right) \leq cf(n)$
vì $2^{\frac{n}{2}} \leq c2^n, c = 0.9$
$\rightarrow$ Áp dụng trường hợp 3 ta được: $T(n) = \Theta(f(n)) = \Theta(2^n)$

28. $T(n) = 16T\left(\dfrac{n}{4}\right) + n!$ (Dạng tổng quát 2)

$a = 16, b = 4$ và $n^{\log_b a} = n^{\log_4 16} = n^2$
Ta thấy: $f(n) = n! = \Omega(n^{2+\epsilon})(\epsilon > 0)$ (Ví dụ hàm $n!$ có tốc độ tăng nhanh hơn hàm n^3)
và $af\left(\dfrac{n}{b}\right) \leq cf(n)$
vì $16.(\frac{n}{4})! \leq cn!, c = 0.5$
$\rightarrow$ Áp dụng trường hợp 3 ta được: $T(n) = \Theta(f(n)) = \Theta(n!)$