מערכות משוואות דיפרנציאליות לא-הומוגניות

בלא הומוגני המשוואה: $\bar{X}'(t)=A\bar{x}(t)+\bar{F}(t)$ כאשר $\bar{F}(t)$ הוא הפתרון הפרטי.

הפתרון של המערכת "ראה [illegible]: $X(t)=\bar{x}_h(t)+\bar{x}_p(t)$.

דוגמאות - השוואת מקדמים

$F(t)=\begin{pmatrix}10\\5\end{pmatrix}$ - נחפש פתרון מהצורה: $\bar{x}_p=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$.

$F(t)=e^{\lambda t}\begin{pmatrix}8\\-1\end{pmatrix}$ - נחפש פתרון מהצורה: $\bar{x}_p(t)=e^{\lambda t}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$

$F(t)=\cos t\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$ - נחפש פתרון מהצורה: $\bar{x}_p(t)=\cos t\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}+\sin t\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$

אם ה- $F(t)$ הוא כבר פתרון ההומוגנית אז נכפיל. למשל:

$F=e^{\lambda t}\begin{pmatrix}8\\-1\end{pmatrix}$ מופיע בהומוגנית, נכפיל ב: $x_p=\underline{t}e^{\lambda t}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$.

וריאציית הפרמטרים

$X'(t)=A\bar{x}(t)+F(t)$. הפתרון ההומוגני: $x_h(t)=c_1\bar{x}_1(t)+\dots+c_n\bar{x}_n(t)$

נכתוב את הפתרונות של ההומוגנית במטריצה: $X_c(t)=\begin{pmatrix}x_1(t) & x_2(t) & \dots & x_n(t)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\end{pmatrix}$

הפתרון הפרטי: $\bar{x}_p=\bar{X}_c(t)\begin{pmatrix}V_1(t)\\ \vdots\\ V_n(t)\end{pmatrix}=X_c(t)\cdot\bar{V}(t)$

נגזור (לפי פונקציה מורכבת): $\bar{x}_p'=X_c(t)'\cdot\bar{V}(t)+X_c(t)\cdot\bar{V}'(t)=\underbrace{A\,X_c(t)\cdot V(t)}_{\text{מקבל מהמשוואה נתונה } X'(t)}+\bar{F}(t)$

נציב, כי: $X_c(t)'=AX(t)+\bar{F}(t)$:

$X_c(t)\cdot V'(t)=\bar{F}(t)\Rightarrow\boxed{V'(t)=X_c(t)^{-1}\bar{F}(t)}$

דוגמא

$F(t)=\begin{pmatrix}e^t\\-e^t\end{pmatrix}$ ו- $A=\begin{pmatrix}-28 & -50\\15 & 27\end{pmatrix}$, פתור (מצא פתרון כללי).

$\det(A-\lambda I)=0\Rightarrow\begin{vmatrix}-28-\lambda & -50\\15 & 27-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+\lambda-6=0\Rightarrow\boxed{\lambda_1=2},\boxed{\lambda_2=-3}$

עבור $\lambda_1=2$:

$\begin{pmatrix}-30 & -50\\15 & 25\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=0\xRightarrow[R_2/5]{-R_1/10}\begin{pmatrix}3 & 5\\3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=0$

$=3a+5b=0\Rightarrow\boxed{a=5},\boxed{b=-3}$

$\Big\}\ \underline{X_1(t)=e^{2t}\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}}$

עבור $\lambda_2=-3$:

$$\begin{pmatrix}-25 & -50\\ 15 & 30\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=0 \xRightarrow[R_2/15]{-R_1/25} \begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=0$$

$$a+2b=0 \Rightarrow \boxed{a=2},\ \boxed{b=-1} \qquad \bar{X}_2(t)=e^{-3t}\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}$$

המטריצה שלנו תהיה:

$$X_c(t)=\begin{pmatrix}5e^{2t} & 2e^{-3t}\\ -3e^{2t} & -e^{-3t}\end{pmatrix}$$

$$|X_c(t)| = -5e^{-t}+6e^{-t} = \underline{e^{-t}} \qquad \underline{X_c(t)^{-1}} = \begin{pmatrix}-e^{-3t} & -2e^{-3t}\\ 3e^{2t} & 5e^{2t}\end{pmatrix}e^{t} \ \circledast$$

$\circledast$ לפי הנוסחה: $X_c(t)^{-1} = \frac{1}{|X_c(t)|}\cdot(Adj)$

קיבלנו את V^{-1} לפי הנוסחה:

$$V^{-1}(t) = e^{t}\underbrace{\begin{pmatrix}-e^{-3t} & -2e^{-3t}\\ 3e^{2t} & 5e^{2t}\end{pmatrix}}_{X_c(t)^{-1}}\underbrace{\begin{pmatrix}e^{t}\\ -e^{t}\end{pmatrix}}_{F(t)}$$

$$= e^{t}\begin{pmatrix}-e^{-2t}+2e^{-2t}\\ 3e^{3t}-5e^{3t}\end{pmatrix} \Rightarrow e^{t}\begin{pmatrix}e^{-2t}\\ -2e^{3t}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e^{-t}\\ -2e^{4t}\end{pmatrix}\begin{matrix}\rightarrow V_1'(t)\\ \rightarrow V_2'(t)\end{matrix}$$

קיבלנו את $V_1'(t)$ ו- $V_2'(t)$. נמצא את V_1 ו- V_2:

$$V_1'(t)=e^{-t} \Rightarrow \underline{V_1(t)} = \int e^{-t}dt = \boxed{-e^{-t}}$$

$$V_2'(t)=-2e^{4t} \Rightarrow \underline{V_2(t)} = -2\int e^{4t}dt = \boxed{-\tfrac{1}{2}e^{4t}}$$