משפ"ד לינאריות הומוגניות מסדר שני

צורת המשוואה $(a(x)\neq 0)$: $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = g(x)$.

נסמן ע"י אופרטור הגזירה: $L = a_2(x)D^2 + a_1(x)D + a_0(x)$

אם נפעיל אותו על y נקבל את הפונקציה g, כלומר: $\boxed{Ly = g}$.

המשוואה נקראת הומוגנית אם $g(x) = 0$ $(Ly = 0)$.

עובדה

אוסף כל הפתרונות של משוואה דיפרנציאלית לינארית הומוגנית מסדר 2 הוא תת-מרחב ממימד 2. כלומר, אם $y_1(x)$ ו-$y_2(x)$ פתרונות בת"ל, אז כל הפתרונות של המשוואה הם מהצורה:

$$\boxed{y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)}$$ פתרון כללי

כפי שראינו, משפ"ד הומוגנית היא מהצורה $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$

נניח ש: $y_1(x)$ הוא פתרון של המשוואה. נחפש פתרון שני מהצורה: $y_2(x) = f(x)y_1(x)$

לפי זה נמצא נגזרת ראשונה: $y_2'(x) = f'(x)y_1(x) + f(x)y_1'(x)$

ושניה (לפי בינום של ניוטון): $y_2''(x) = f''(x)y_1(x) + 2f'(x)y_1'(x) + f(x)y_1''(x)$

נציב את שלושתם במשוואה המקורית: לפי סדר (f'', f', f, y'', y', y)

$$a(x)f''(x)y_1(x) + a(x)2f'(x)y'(x) + b(x)f'(x)y_1(x) + \underline{a(x)f(x)y_1''(x) + b(x)f(x)y_1'(x) + c(x)f(x)y_1(x)} = 0$$

את המחובר האדום נוציא מכנה משותף $f(x)$: $f(x)\left[a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x)\right]$

לפי הגדרה של משפ"ד לינארית הומוגנית אנחנו יודעים שזה מתאפס. קיבלנו:

$$a(x)f''(x)y_1(x) + 2a(x)f'(x)y_1'(x) + b(x)f'(x)y_1(x) = 0$$

קיבלנו משוואה לינארית מסדר שני חסרה (אין $f(x)$) ואת זה אנו יודעים לפתור.

דוגמא

נתונה: $y'' - \frac{5}{x}y' + \frac{9}{x^2}y = 0$. נתון $y_1(x) = x^3$. מצא פתרון כללי למשוואה.

$$y_2 = fy_1 = fx^3 \to y_2' = f'x^3 + f3x^2 \to y_2'' = f''x^3 + 2f'3x^2 + f6x$$

נציב: $\underline{x^3f''} + \underline{6x^2f'} + \underline{6xf} - \frac{5}{x}(\underline{x^3f'} + \underline{3fx^2}) + \underline{\frac{9}{x^2}x^3f} = 0$

נכנס איברים:

$$x^3f'' - x^2f' = 0 \xrightarrow{:x^2} xf'' - f' = 0 \to (f' = g) \to$$

$$xg' + g = 0 \Rightarrow x\frac{dg}{dx} = -g \Rightarrow \int\frac{dg}{g} = -\int\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|g| = -\ln|x| + c$$

(11) $g = c \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow f(x) = \int \frac{dx}{x} = \ln|x|$

קיבלנו את $f(x)$. נציב ב- y_2 $(y_2 = f y_1(x))$: $y_2(x) = x^3 \ln|x|$

לסיכום, הפתרון הכללי יהיה: $\boxed{y(x) = c_1 x^3 + c_2 x^3 \ln|x|}$

משוואות לינאריות מסדר שני עם מקדמים קבועים

משוואות הומוגניות שהמקדמים מספרים, מהצורה: $\boxed{ay'' + by' + cy = 0}$ (1)

נעביר את המשוואה לאופרטורים: $(aD^2 + bD + c)y = 0$ (2)

תרגיל

מצא וקטורים עצמיים של אופרטור D, כלומר: $Df = Rf$ (R - מספר).

$f' = Rf \Rightarrow \frac{df}{dx} = Rf \Rightarrow \int \frac{df}{f} = \int R\,dx \Rightarrow \ln|f| = Rx + c \Rightarrow \boxed{f = ce^{Rx}}$

קיבלנו ש- e^{Rx} הוא וקטור עצמי של D. נחפש פתרון של משוואה (1) או (2) מהצורה $y(x) = e^{Rx}$ עבור איזשהו מספר R.

$Dy = Ry \rightarrow D^2 y = D(Dy) = D(Ry) = R(Dy) = \boxed{R^2 y}$

נציב במשוואה:

$aR^2 y + bRy + cy = 0 \Rightarrow \boxed{y(aR^2 + bR + c) = 0}$ (3)

המשוואה הזו היא המשוואה האופיינית. נבדוק את האפשרויות:

(1) R_1, R_2 שני פתרונות שונים של המשוואה - הפתרון הכללי יהיה: $\boxed{y(x) = c_1 e^{R_1 x} + c_2 e^{R_2 x}}$

דוגמא 1

מצא פתרון כללי למשוואה $y'' - 5y' + 6y = 0$.

המשוואה האופיינית: $R^2 - 5R + 6 = 0$. הפתרונות הם: $R_1 = 2,\ R_2 = 3$.

הפתרון הכללי יהיה: $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$.

דוגמא 2

מצא פתרון למשוואה $y'' + 2y' - 8y = 0$ עבור ת.ה: $y(0) = 1,\ y'(0) = -2$.

המשוואה האופיינית: $R^2 + 2R - 8 = 0$ הפתרונות הם: $R_1 = 2,\ R_2 = -4$

הפתרון הכללי: $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-4x}$. עבור תנאי ההתחלה:

$$\begin{aligned}
&\text{I}\quad c_1 + c_2 = 1 && \Rightarrow \text{I}\quad c_1 = 1 - c_2 \rightarrow \boxed{c_1 = \tfrac{1}{3}} \\
&\text{II}\quad 2c_1 - 4c_2 = -2 && \quad\ \ \text{II}\quad 2 - 2c_2 - 4c_2 = -2 \Rightarrow \boxed{c_2 = \tfrac{2}{3}}
\end{aligned}$$

הפתרון הוא: $y(x) = \frac{1}{3} e^{2x} + \frac{2}{3} e^{-4x}$

(11) יש פתרון אחד למשוואה האופיינית - נצטרך למצוא פתרון נוסף. $(y_2(x))$.

דוגמא

$y''-6y'+9y=0$. מצא פתרון.

המשוואה האופיינית: $R^2-6R+9=0$. הפתרון: $R_1=3 \Rightarrow \underline{y_1=e^{3x}}$

נבחר $y_2(x)$ מכפלה של הפונקציות: $y_2(x)=f(x)e^{3x}$. הנגזרת הראשונה:

$y_2(x)'=f'(x)e^{3x}+f(x)3e^{3x}$ הנגזרת השניה: $y_2(x)''=f''(x)e^{3x}+2f'(x)3e^{3x}+9f(x)e^{3x}$

נציב:

$$f''(x)e^{3x}+6f'(x)e^{3x}+9f(x)e^{3x}-6f'(x)e^{3x}-18f(x)e^{3x}+9f(x)e^{3x}=0$$

נכנס איברים ונצמצם:

$$f''(x)=0 \Rightarrow f'(x)=c_1 \Rightarrow f(x)=c_1x+c_2.$$

אנחנו מחפשים פתרון מסויים. נבחר: $c_1=1, c_2=0$: $\underline{f(x)=x}$

ומכאן ש: $y_2(x)=xe^{3x}$ והפתרון הכללי: $\boxed{y(x)=c_1e^{3x}+c_2xe^{3x}}$

נבדוק ששני הפתרונות $y_1(x), y_2(x)$ כאשר $R_1\neq R_2$ הם בת"ל?

צריך להוכיח: $c_1y_1(x)+c_2y_2(x)=0 \Longrightarrow c_1=0,\ c_2=0$

נציב: $\mathrm{I}\ c_1e^{R_1x}+c_2e^{R_2x}=0 \xRightarrow{\text{עבור } x=0} \mathrm{I}\ c_1+c_2=0$

נגזור: $\mathrm{II}\ c_1R_1x+c_2R_2e^{R_2x}=0 \xRightarrow{\text{עבור } x=0} \mathrm{II}\ c_1R_1+c_2R_2=0$

קיבלנו מערכת משוואות. לפי כללי הלינאריות עבור מערכת הומוגנית, המשתנים בת"ל אם הדטרמיננטה שונה מ-0.

$$\begin{vmatrix}1&1\\R_1&R_2\end{vmatrix}=R_2-R_1\neq0 \quad (\text{כי } R_1\neq R_2)$$

ולכן קיים פתרון יחיד למערכת והוא $c_1=c_2=0$ ולכן y_1, y_2 בת"ל.

נבדוק עבור הדוגמא שלמעלה ששני הפתרונות בת"ל. $(y_1(x)=e^{3x}\quad y_2(x)=xe^{3x})$

$c_1e^{3x}+c_2xe^{3x}=0 \Rightarrow$ עבור $x=0 \Rightarrow \underline{c_1=0}$

עבור $x=1 \Rightarrow c_2e^3=0 \Rightarrow \underline{c_2=0}$

זה נכון לכל x ולכן קיבלנו מ.ש.ל ומכאן ש: $y_1(x), y_2(x)$ בת"ל.

(III) כאשר אין פתרונות ממשיים - כאשר $b^2-4ac<0$ - הפתרונות: $R_{1,2}=\alpha\pm\beta i$

הפתרון שנקבל הוא $y=e^{R_1x}$. נתאר ע"פ טורי טיילור:

$$e^{\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!}\ ,\qquad \sin\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\alpha^{2n+1}}{(2n+1)!}\ ,\qquad \cos\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\alpha^{2n}}{(2n)!}$$

נפתח את הפתרון שלנו:

$$e^{(i\alpha)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\alpha)^n}{n!}=1+\frac{i\alpha}{1!}+\frac{(i\alpha)^2}{2!}+\frac{(i\alpha)^3}{3!}+\frac{(i\alpha)^4}{4!}=1+i\alpha-\frac{\alpha^2}{2!}-\frac{i\alpha^3}{3!}+\frac{\alpha^4}{4!}+\dots$$

$$=\left(1-\frac{\alpha^2}{2!}+\frac{\alpha^4}{4!}-\dots\right)+i\left(\alpha-\frac{\alpha^3}{3!}+\frac{\alpha^5}{5!}-\dots\right)=\boxed{\cos\alpha-i\sin\alpha}$$

וזאת הוכחה למשפט אויילר (שמצאנו באינפי / לינארית כו').

נקבל שני פתרונות:

$$y_1(x)=e^{\alpha x+i\beta x}=e^{\alpha x}\cdot e^{i\beta x}=e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x)$$

$$y_2(x)=e^{\alpha x-i\beta x}=e^{\alpha x}\cdot e^{-i\beta x}=e^{\alpha x}(\cos\beta x-i\sin\beta x).$$

הפתרונות האלו קת"ל. ~~נשמש~~ נפרק אותם:

(1) $\frac{1}{2}\left(y_1(x)+y_2(x)\right)=e^{\alpha x}\cos\beta x$ פתרון 1 של משוואה:

(2) $\frac{1}{2i}\left(y_1(x)-y_2(x)\right)=e^{\alpha x}\sin\beta x$ פתרון 2 של משוואה:

הפתרון הכללי של המשוואה: $\boxed{y(x)=c_1e^{\alpha x}\cos\beta x+c_2e^{\alpha x}\sin\beta x}$

דוגמא

מצא פתרונות עבור $y''+y'+y=0$. תנאי התחלה: $y(0)=1,\ y'(0)=2$

משוואה אופיינית: $R^2+R+1=0$.

$$R_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

הפתרון הכללי:

$$y(x)=c_1e^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_2e^{-\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

נציב תנאי התחלה $y(0)=1$:

$$1=c_1e^0\cos0^\circ+c_2e^0\sin0^\circ=\boxed{c_1=1}$$

נגזור את y' בשביל ת.ה:

$$y'(x)=-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}c_2e^{-\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}c_2e^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

עבור $y'(0)=2$:

$$2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}c_2\Rightarrow 4=-1+\sqrt{3}c_2\rightarrow\boxed{c_2=\frac{5}{\sqrt{3}}}$$

הפתרון למשוואה הזו יהיה:

$$\boxed{y(x)=e^{-\frac{1}{2}x}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{5}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)}$$