דוגמא

$y^{(3)} - 3y' + 2y = 0$. המשוואה האופיינית: $R^3 - 3R + 2 = 0$

נוכל לראות ש: $R_1 = 1$ מקיים את המשוואה. נעשה חלוקת פולינומים ב $R-1$

ונקבל: $R^2 + R - 2 = 0$. הפתרונות של המשוואה הזו הן: $R_2 = 1$, $R_3 = -2$.

(כיוון של $R=1$ יש ריבוי אלגברי 2 הוא יופיע פעמיים בפתרון). הפתרון הכללי יהיה:

$$\boxed{y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^{-2x}}$$

טענה

$(D-\alpha)^n y = 0$, לה פונקציות: $y = x^k e^{\alpha x}$ כאשר k שלם אי-שלילי ומקיים $k<n$ הם פתרונות של המשוואה.

דוגמא 2

$$(D-0.5)^2 y = 0 \Rightarrow (D-0.5)(y' - 0.5y) = y'' - 0.5y' - 0.5y' + 0.25y = 0$$

הוכחה (ע' אינדוקציה)

(1) עבור $n=1$: $y' - \alpha y = 0$. $k=0$ אז $y = e^{\alpha x}$ פתרון. נבדוק: ✓ $\alpha e^{\alpha x} - \alpha \cdot e^{\alpha x} = 0$.

(2) נניח שהטענה נכונה עבור n. צריך לבדוק שהטענה נכונה עבור $n+1$ ($k<n+1$, $y = x^k e^{\alpha x}$)

(3) $(D-\alpha)^{n+1} y = (D-\alpha)^n (D-\alpha) y = (D-\alpha)^n (k x^{k-1} e^{\alpha x} - x^k \alpha e^{\alpha x} - \alpha e^{\alpha x} x^k) =$

עפ"י הנחה $k-1<n$ ולכן הקו המסומן באדום שווה ל-0 $\underline{k(D-\alpha)^n x^{k-1} e^{\alpha x}}$

ומכאן הוכחנו שהתשובה 0 והטענה נכונה.

תרגיל 1

$y^{(4)} - 5y''' + 9y'' - 7y' + 2y = 0$. המשוואה האופיינית: $R^4 - 5R^3 + 9R^2 - 7R + 2 = 0$.

ניתן לראות ש $R_1 = 1$ פתרון. נבצע חילוק פולינומים ונקבל: $R^3 - 4R^2 + 5R - 2 = 0$. גם

כן $R_2 = 1$ הוא פתרון. נחלק שוב ונקבל: $R^2 - 3R + 2 = 0$, הפתרונות: $R_3 = 1, R_4 = 2$.

לפי הטענה: $(D-1)^3 (D-2) y = 0$. הפתרון: $\boxed{y = c_1 e^{2x} + c_2 e^x + c_3 x e^x + c_4 x^2 e^x}$

תרגיל 2

$y^{(4)} - 5y''' + 9y'' - 7y' + 2y = 2x$. הפתרון הכללי כמו קודם. רק נצטרך למצוא y_p.

$y_p = a + bx \quad y_p' = b \quad y_p'' = 0 \ldots \Rightarrow -7b + 2(a + bx) = 2x =$

$$\left.\begin{array}{l} (1)\ 2bx = 2x \Rightarrow \boxed{b=1} \\ (2)\ -7b + 2a = 0 \Rightarrow \boxed{a=3.5} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{y_p = 3.5 + x + y_{\text{קודם}}}$$

תרגיל 3

$y^{(4)}-5y'''+9y''-7y'+2y=\cos x$. הפתרון הכללי כמו קודם. נמצא y_p.

$$y_p=a\cos x+b\sin x$$
$$y_p'=-a\sin x+b\cos x$$
$$y_p''=-a\cos x-b\sin x$$
$$y'''=a\sin x-b\cos x$$
$$y^4=a\cos x+b\sin x$$

מקדם $\cos x$: $(1)\; a+5b-9a-7b+2a=1$

מקדם $\sin x$: $(2)\; b-5a-9b+7a+2b=0$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases}(1) & -6a-2b=1\\ (2) & 2a-6b=0\end{cases} \Rightarrow \boxed{a=-\frac{3}{20}} \quad \boxed{b=-\frac{1}{20}}$$

הפתרון הכללי:

$$\boxed{y=-\frac{3}{20}\cos x-\frac{1}{20}\sin x+y_{\text{הום'}}}$$

תרגיל 4

$y^{(4)}-5y'''+9y''-7y'+2y=2e^x-e^{2x}$. כיוון שהפתרונות e^x, e^{2x} הם חלק מהפתרונות ההומוגניות ולכן נכפיל את הת.מ.ג ל: $\{e^x, xe^x, x^2e^x, x^3e^x, e^{2x}, xe^{2x}\}$

ה y_p שלנו יהיה: $y_p=axe^{2x}+bx^3e^x$. גוזרים ומשווים מקדמים כמו קודם.

פתרון משוואה לא הומוגנית בשיטת השתנות הפרמטרים

$y'''+ay''+by'+cy=g(x)$. נקבל פתרון הומוגני: $y_h=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+c_3y_3(x)$

נחפש פתרון y_p מהצורה: $y_p=v_1y_1+v_2y_2+v_3y_3$

$$y_p'=v_1'y_1+v_2'y_2+v_3'y_3+v_1y_1'+v_2y_2'+v_3y_3'$$

והאילוץ שנוסף: $(1)\; v_1'y_1+v_2'y_2+v_3'y_3=0$

נגזור שוב: $y_p''=v_1'y_1'+v_2'y_2'+v_3'y_3'+v_1y_1''+v_2y_2''+v_3y_3''$

והאילוץ: $(2)\; v_1'y_1'+v_2'y_2'+v_3'y_3'=0$

נגזור פעם שלישית: $y_p'''=v_1'y_1''+v_2'y_2''+v_3'y_3''+v_1y_1'''+v_2y_2'''+v_3y_3'''$

אחרי שנציב את הפתרונות במשוואה הכללית ונאפס את הפתרונות ההומוגנים נקבל את המשוואה השלישית: $(3)\; v_1'y_1''+v_2'y_2''+v_3'y_3''=g(x)$

כמו מקודם, הפתרונות יהיו:

$$v_1'=\frac{1}{\omega}\begin{vmatrix}0 & y_2 & y_3\\ 0 & y_2' & y_3'\\ g(x) & y_2'' & y_3''\end{vmatrix} \quad v_2'=\frac{1}{\omega}\begin{vmatrix}y_1 & 0 & y_3\\ y_1' & 0 & y_3'\\ y_1'' & g(x) & y_3''\end{vmatrix} \quad v_3'=\frac{1}{\omega}\begin{vmatrix}y_1 & y_2 & 0\\ y_1' & y_2' & 0\\ y_1'' & y_2'' & g(x)\end{vmatrix}$$

כאשר ω היא הדטרמיננטה של המערכת.

תרגיל

$y'''+9y'=\tan 3x$ $\left(-\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{6}\right)$. המשוואה האופיינית: $R^3+9R=0 \Rightarrow R(R^2+9)=0$

הפתרונות: $R_{2,3}=\pm 3i$, $R_1=0$. הפתרון הכללי: $y_h=C_1+C_2\cos 3x+C_3\sin 3x$

נמצא פתרון מהצורה: $y_p=V_1y_1+V_2y_2+V_3y_3$.

$$W=\begin{vmatrix}1 & \cos 3x & \sin 3x\\ 0 & -3\sin 3x & 3\cos 3x\\ 0 & -9\cos 3x & -9\sin 3x\end{vmatrix}=27\sin^2 3x+27\cos^2 3x=\boxed{27}$$

$$V_1'=\frac{1}{27}\begin{vmatrix}0 & \cos 3x & \sin 3x\\ 0 & -3\sin 3x & 3\cos 3x\\ \tan 3x & -9\cos 3x & -9\sin 3x\end{vmatrix}=\frac{1}{27}\tan 3x\left(3\cos^2 3x+3\sin^2 3x\right)=$$

$$V_1'=\underline{\frac{1}{9}\tan 3x}\qquad V_1=\frac{1}{9}\int\frac{\sin 3x}{\cos 3x}dx=-\frac{1}{27}\int\frac{du}{u}=\boxed{-\frac{1}{27}\ln(\cos 3x)}$$

$$V_2'=\frac{1}{27}\begin{vmatrix}1 & 0 & \sin 3x\\ 0 & 0 & 3\cos 3x\\ 0 & \tan 3x & -9\sin 3x\end{vmatrix}=-\frac{1}{27}3\tan 3x\cos 3x=\underline{-\frac{1}{9}\sin 3x}$$

$$V_2=-\frac{1}{9}\int\sin 3x\,dx=\boxed{\frac{1}{27}\cos 3x}$$

$$V_3'=\frac{1}{27}\begin{vmatrix}1 & \cos 3x & 0\\ 0 & -3\sin 3x & 0\\ 0 & -9\cos 3x & \tan 3x\end{vmatrix}=\underline{-\frac{1}{9}\tan 3x\sin 3x}$$

$$V_3=-\frac{1}{9}\int\frac{\sin^2 3x}{\cos 3x}dx\overset{\text{נכפיל ב } \cos x \text{ מונה ומכנה}}{=}-\frac{1}{9}\int\frac{\sin^2 3x\cos 3x\,dx}{\cos^2 3x}=\left|\begin{array}{l}u=\sin 3x\\ du=3\cos 3x\,dx\end{array}\right|\Rightarrow$$

$$-\frac{1}{9}\int\frac{u^2du}{1-u^2}=\frac{1}{27}\int\frac{u^2du}{u^2-1}\Rightarrow\frac{1}{27}\int\frac{u^2+1-1}{u^2-1}=\frac{1}{27}u-\frac{1}{27}\int\frac{du}{1-u^2}=$$

$$\left|\frac{1}{1-u^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-u}+\frac{1}{1+u}\right)\right|\Rightarrow\frac{1}{27}u-\frac{1}{54}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right|=\frac{1}{27}\sin 3x-\frac{1}{54}\ln\left|\frac{1+\sin 3x}{1-\sin 3x}\right|$$

הפתרון:

$$y=-\frac{1}{27}\ln(\cos 3x)+\underbrace{\frac{1}{27}\cos^2 3x+\frac{1}{27}\sin^2 3x}_{\frac{1}{27}\text{ נכנס בתוך } C_1}-\frac{1}{54}\ln\frac{1+\sin 3x}{1-\sin 3x}\sin 3x+y_h$$

$$\boxed{y=-\frac{1}{27}\ln(\cos 3x)-\frac{1}{54}\ln\frac{1+\sin 3x}{1-\sin 3x}\sin 3x+C_1+C_2\cos 3x+C_3\sin 3x}$$

משוואות קושי-אוילר

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 x y' + a_0 y = g(x)$$ (פתרון או $x>0$ או $x<0$).

נפתור עבור $n=1$ במקרה ההומוגני:

$$a_1 x y' + a_0 y = 0 \Rightarrow a_1 x \frac{dy}{dx} = -a_0 y \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{a_0}{a_1}\frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$\ln|y| = -\frac{a_0}{a_1}\ln|x| \Rightarrow y = c|x|^{-\frac{a_0}{a_1}} = \left| \begin{array}{c}\text{הצבה:}\\ x=e^t\end{array} \right| \Rightarrow \boxed{y = ce^{-\frac{a_0}{a_1}t}}$$

דוגמא

$3x^2y''-2xy'-2y=0$, נציב $t=\ln x \Leftrightarrow x=e^t$.

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx}\cdot\frac{dy}{dt} = \boxed{\frac{1}{x}\cdot\frac{dy}{dt}}$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{dy}{dt}\right) = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right) =$$

$$-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{\cancel{x^2}}\cdot\frac{dt}{dx}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) = \boxed{-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}}$$

נציב במשוואה:

$$3x^2\left(-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}\right) - 2x\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right) - 2y = 0$$

$$= -3\frac{dy}{dt} + 3\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} - 2y = 0 = \underline{3\frac{d^2y}{dt^2} - 5\frac{dy}{dt} - 2y = 0}$$

זו משוואה רגילה מסדר שני (הפתרון: $3R^2-5R-2=0 \Rightarrow R_1=2,\ R_2=-\frac{1}{3}$

כלומר: $y=c_1e^{2t}+c_2e^{-\frac{1}{3}t}$. (נחזור ל-$x$: $\boxed{y=c_1x^2+c_2x^{-\frac{1}{3}}}$

דרך הפתרון של משוואות

$$ax^2y''+bxy'+cy=0 \Rightarrow a\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)+b\frac{dy}{dt}-cy=0 \Rightarrow$$

$$a(R^2-R)+bR-cy=0 \Rightarrow \underline{aR(R-1)+bR-cy=0}$$ משוואה האופיינית

עבור $R_1=R_2$: $y=c_1e^{R_1t}+c_2te^{R_2t}$

עבור $R_1\neq R_2$: $\boxed{y=c_1x^{R_1}+c_2x^{R_2}}$

עבור $R_1=R_2$ נפתח לחזור ל-x: $y=c_1e^{R_1\ln x}+c_2\ln x\, e^{R_2\ln x} = \boxed{c_1x^{R_1}+c_2\ln x\, x^{R_2}}$

נבדוק עבור הנגזרת השלישית:

$$y''' = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}\cdot\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}\right) \Rightarrow -2\cdot\frac{1}{x^3}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{d^3y}{dt^3}$$

$$+\frac{2}{x^3}\frac{dy}{dt} - \frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{x}\frac{d^2y}{dt^2} \Rightarrow x^3y''' = \frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} =$$

$$(D^3-3D^2+2D)y = D(D^2-3D+2)y = \boxed{D(D-1)(D-2)y}$$

אנחנו רואים שזה חוקיות עבור n חזקה. $(D(D-1)(D-2)..(D-n)y)$.