# סיכום עבור משדי"פ מסדר 2

משוואות מהצורה: $ay''+by'+cy=g(x)$ (a,b,c-מקדמים קבועים)

**I** מוצאים את המשוואה האופיינית: $aR^2+bR+c=0$ (כאשר $g(x)=0$)

יש 3 אפשרויות לפתרון:

(1) כאשר יש שני שורשים שונים $R_1$ ו-$R_2$ $(R_1\neq R_2)$: $y_h=c_1e^{R_1x}+c_2e^{R_2x}$.

(2) כאשר $R_1=R_2$ (יש שורש אחד): $y_h=c_1e^{Rx}+c_2xe^{Rx}$

(3) כאשר $R_{1,2}=\alpha\pm\beta i$: $y_h=c_1e^{\alpha x}\cos\beta x+c_2e^{\alpha x}\sin\beta x$

**II** כאשר $g(x)\neq0$ היא פונקציה אז הפתרון: $y=y_p+c_1y_1+c_2y_2$.

שתי שיטות למציאת $y_p$:

א. שיטת השוואת מקדמים: $g(x)$ שייכת לת.נ אינוריאנטי של D.

פולינומים: $P_n(x)e^{\alpha x}$, $P_n(x)$, $e^{\alpha x}$, $P_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$, $e^{\alpha x}\cos\beta x$

ב. שיטת וריאציות של המשתנים: $y_p=V_1(x)y_1(x)+V_2(x)y_2(x)$

כאשר:
$$V_1'=\frac{\begin{vmatrix}0 & y_2(x)\\ \frac{g(x)}{a} & y_2'(x)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}y_1(x) & y_2(x)\\ y_1'(x) & y_2'(x)\end{vmatrix}},\qquad V_2'=\frac{\begin{vmatrix}y_1(x) & 0\\ y_1'(x) & \frac{g(x)}{a}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}y_1(x) & y_2(x)\\ y_1'(x) & y_2'(x)\end{vmatrix}}$$

## דוגמא לשיטת השוואת מקדמים

המשוואה: $y''+4y'+4y=3e^{-2x}$. המשוואה האופיינית: $R^2+4R+4=0$

פתרון המשוואה האופיינית הוא: $y_h=c_1e^{-2x}+c_2xe^{-2x}$.

במשוואה זו יש בעיה כי $g(x)$ הוא פתרון שגם יש $e^{-2x}$. עבור הפתרונות שקיבלנו מהמשוואה האופיינית- המשוואה מתאפסת, לכן צריך להרחיב את הת.נ לעוד מימד, כלומר: $V=\{e^{-2x}, xe^{-2x}, x^2e^{-2x}\}$. נקבל שהפתרון $y_p$

הוא: $y_p=ax^2e^{-2x}$, נמצא את הנגזרות:

$y'_p=2axe^{-2x}-2ax^2e^{-2x}$, $y''_p=2ae^{-2x}-4axe^{-2x}-4axe^{-2x}+4ax^2e^{-2x}$

נציב אותם במשוואה המקורית $(y''+4y'+4y=g(x))$ ונבצע השוואת מקדמים:

$x^2e^{-2x}$: $4a-8a+4a=0$, $xe^{-2x}$: $8a-8a=0$, $e^{-2x}$: $2a=3\Rightarrow\boxed{a=1.5}$

לכן הפתרון הכללי: $\boxed{y(x)=1.5x^2e^{-2x}+c_2xe^{-2x}+c_1e^{-2x}}$

## פתרון לוריאציות של המשתנים

(אותו תרגיל כמו מקודם עם $R_1$ שמצאנו)

$$V_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & xe^{-2x} \\ 3e^{-2x} & e^{-2x}-2xe^{-2x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-2x} & xe^{-2x} \\ -2e^{-2x} & e^{-2x}-2xe^{-2x} \end{vmatrix}} = \frac{-3xe^{-4x}}{e^{-4x}} = -3x \Rightarrow V_1 = \int -3x\,dx = -\frac{3}{2}x^2$$

$$V_2' = \frac{\begin{vmatrix} e^{-2x} & 0 \\ -2e^{-2x} & 3e^{-2x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-2x} & xe^{-2x} \\ -2e^{-2x} & e^{-2x}-2xe^{-2x} \end{vmatrix}} = \frac{3e^{-4x}}{e^{-4x}} = 3 \Rightarrow V_2 = \int 3\,dx = 3x$$

נציב את $V_1$ ו-$V_2$ ב-$y_p$ לפי הביטוי שראינו $(y_p = V_1y_1 + V_2y_2)$:

$$y_p = -\frac{3}{2}x^2e^{-2x} + 3x\cdot x\cdot e^{-2x} = \boxed{1.5x^2e^{-2x}}$$

והפתרון הכללי המתקבל יהיה אותו פתרון כמו בדוגמא הקודמת:

$$\boxed{y(x) = 1.5x^2e^{-2x} + c_2xe^{-2x} + c_1e^{-2x}}$$

* לכן, תמיד נזכור קודם לבצע את שלב $\boxed{I}$ כדי לקבל את הפתרונות ורק אח"כ אם $g(x) \neq 0$ נבצע גם את שלב $\boxed{II}$.