מערכות משוואות ליניאריות הומוגניות - מקדמים קבועים

מערכת מסוג: $\bar{X}' = A\bar{X}$. $\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{cases}$

האם יש פתרונות של קווים ישרים דרך הראשית?

פתרונות כאלו הם מהסוג $\bar{x}(t) = \bar{v}\,g(t)$ ($g(t)$ - פונקציה המתארת סקלר. $\bar{v}$ - וקטור).

נציב את הביטוי ($\bar{v}$ הוא וקטור, נשאר כמו שהוא):

$$\bar{v}\,g'(t) = \overset{\text{מטריצת המקדמים}}{A}\,\bar{v}\,g(t) \Rightarrow \bar{v}\,g'(t) = g(t)\,A\bar{v} \Rightarrow A\bar{v} = \frac{g'(t)}{g(t)}\,\bar{v}$$

קיבלנו ש $\bar{v}$ וקטור עצמי המתאים לערך עצמי λ כך ש:

$$\lambda = \frac{g'(t)}{g(t)} \Rightarrow g'(t) = \lambda\,g(t) \xrightarrow{\text{כמו שלמדנו}} g(t) = e^{\lambda t}$$

עיקרון ליניאריות

פתרון כללי של מערכת משוואות דיפרנציאליות ליניאריות הוא צ.ל של n פתרונות בלתי-תלויים של המערכת:

$$x(t) = c_1\bar{x}_1(t) + c_2\bar{x}_2(t) + \dots + c_n\bar{x}_n(t)$$

משפט

אם V וקטור עצמי של A המתאים לערך עצמי λ אז: $\bar{x}(t) = e^{\lambda t}\bar{V}$ פתרון של $\bar{x}' = AX$

נניח למערכת $\bar{x}' = A\bar{x}$ ישנם n ערכים עצמיים שונים $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ של מטריצה A המתאימים לוקטורים $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$; אז פתרון כללי של המערכת:

$$\boxed{\bar{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\bar{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\bar{v}_2 + \dots + c_n e^{\lambda_n t}\bar{v}_n}$$

דוגמא

$A = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ של המערכת $\bar{x}' = AX$. $\bar{x}(0) = (1,-1,0)$.

נפתור כמו בליניארית: $|A - \lambda I| = 0$ ונקבל: $(\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda-3)$

עבור $\lambda_1 = 1$: נקבל וקטור עצמי $\bar{V}_1 = (1,1,1)$.

עבור $\lambda_2 = 2$: נקבל: $\bar{V}_2 = (1,1,-1)$.

עבור $\lambda_3 = 3$: נקבל: $\bar{V}_3 = (1,-1,1)$.

הפתרון הכללי: $\bar{x}(t) = c_1 e^{t}(1,1,1) + c_2 e^{2t}(1,1,-1) + c_3 e^{3t}(1,-1,1)$

נציב ת.ה ונקבל: $c_1(1,1,1) + c_2(1,1,-1) + c_3(1,-1,1) = (1,-1,0)$

לפי ליניארית: $c_1 = -\frac{1}{2},\ c_2 = \frac{1}{2},\ c_3 = 1$: הפתרון: $\boxed{x(t) = -\frac{1}{2}e^{t}(1,1,1) + \frac{1}{2}e^{2t}(1,1,-1) + e^{3t}(1,-1,1)}$

ערכים עצמיים מרוכבים

כאשר: $\lambda=\alpha+\beta i$ פתרון של המשוואה $|A-\lambda I|=0$, אזי גם:

$\bar\lambda=\alpha-\beta i$ פתרון של המשוואה.

יהי $\bar v$ וקטור עצמי המתאים לערך λ המקיים $A\bar v=\lambda\bar v$, הקואורדינטות של וקטור $\bar v$ הם מספרים מרוכבים ($v=a+bi$). הצמוד: $v^*=a-bi$

הוא וקטור עצמי של A המתאים לערך $\bar\lambda$.

$$\bar x_1(t)=e^{\lambda t}\bar v=\left(e^{\alpha t}\cos(\beta t)+ie^{\alpha t}\sin(\beta t)\right)(a+bi)=\left(e^{\alpha t}\cos(\beta t)\bar a-e^{\alpha t}\sin(\beta t)\bar b\right)$$
$$+i\left(e^{\alpha t}\sin(\beta t)\bar a+e^{\alpha t}\cos(\beta t)\bar b\right)$$

$$\bar x_2(t)=e^{\bar\lambda t}\bar v^*=\left(e^{\alpha t}\cos\beta t\,\bar a-e^{\alpha t}\sin\beta t\,\bar b\right)-i\left(e^{\alpha x}\sin\beta t\,\bar a+e^{\alpha t}\cos\beta t\,\bar b\right)$$

מקבלים שני פתרונות ממשיים: (1) $e^{\alpha t}\left(\bar a\cos(\beta t)+\bar b\sin(\beta t)\right)$, (2) $e^{\alpha t}\left(b\cos(\beta t)+\bar a\sin(\beta t)\right)$

תרגיל

עבור מערכת $\bar x'=A\bar x$: $A=\begin{pmatrix}4&-2\\5&2\end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix}4-\lambda&-2\\5&2-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-6\lambda+18=0\Rightarrow\lambda_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{36-72}}{2}=\frac{6\pm6i}{2}=\underline{3\pm3i}$$

עבור $\lambda=3+3i$:

$$\begin{pmatrix}4-3-3i&-2\\5&2-3-3i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=0\Rightarrow\begin{cases}(1-3i)a-2b=0 & (1)\\ 5a-(1+3i)b=0 & (2)\end{cases}$$

המשוואות תלויות לינארית ולכן ניקח את (1) ונציב לפי נוחות ב-a:

$$(1-3i)a=2b\xrightarrow{a=2}1-3i\Rightarrow\underline{\bar x_1(t)=\begin{pmatrix}2\\1-3i\end{pmatrix}e^{(3+3i)t}}$$

נפתח ($e^{\alpha i}=\sin\alpha t+\cos\alpha t$):

$$x_1(t)=\begin{pmatrix}2\\1-3i\end{pmatrix}e^{3t}(\cos3t+i\sin3t)$$

כאשר הוקטורים a,b הם: $\bar a=(2,1)\quad\bar b=(0,-3)$

הפתרון:

$$e^{3t}\begin{pmatrix}2\cos3t+2i\sin3t\\\cos3t+i\sin3t-3i\cos3t+3\sin3t\end{pmatrix}=$$

$$\bar x(t)=c_1e^{3t}\begin{pmatrix}2\cos3t\\\cos3t+3\sin3t\end{pmatrix}+c_2e^{3t}\begin{pmatrix}2\sin3t\\\sin3t-3\cos3t\end{pmatrix}$$

נציב ת.ה:

$$\bar x(0)=c_1\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{matrix}c_1=\frac12\\c_2=-\frac12\end{matrix}$$

הפתרון:

$$\bar x(t)=\frac{e^{3t}}{2}\begin{pmatrix}2\cos3t\\\cos3t+3\sin3t\end{pmatrix}+\frac{e^{3t}}{2}\begin{pmatrix}2\sin3t\\\sin3t-3\cos3t\end{pmatrix}=e^{3t}\begin{pmatrix}\cos3t-\sin3t\\2\cos3t+\sin3t\end{pmatrix}$$

הגדרה

תהי A מטריצה ריבועית. λ ערך עצמי של A. אם קיים וקטור $u\neq 0$:
K חיובי שלם כך ש: $(A-\lambda I)^k\bar{u}=0$, אזי נאמר ~~שלם~~ של $\bar{u}$ יש וקטור
עצמי מוכלל של A עבור ערך עצמי λ.

דוגמא

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&0\\0&1&1\end{pmatrix}\quad |A-\lambda I|=\begin{vmatrix}1-\lambda&0&0\\1&2-\lambda&0\\0&1&1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^2(2-\lambda)$$

עבור $\lambda=2$:

$$\begin{pmatrix}-1&0&0\\1&0&0\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}\Rightarrow\begin{cases}a=0\\b-c=0\Rightarrow b=c\end{cases}\Rightarrow\ \bar{V}_{\lambda=2}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

עבור $\lambda=1$:

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=0\Rightarrow\begin{cases}a+b=0\Rightarrow a=-b\\b=0\end{cases}\Rightarrow\ \bar{V}_{\lambda=1}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

חסר לנו וקטור, נבצע הכפלה של המטריצה בעצמה:

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=0\Rightarrow\begin{cases}a+b=0\\ c\text{-מה שרוצים}\end{cases}\Rightarrow\ \bar{V}'_{\lambda=1}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

סיכום מקרה 1

אם $X_0=\bar{V}$ הוא ו.ע של A כלו: $AV=\lambda V\Rightarrow A^nV=\lambda^nV$,

הפתרון הוא:

$$X(t)=e^{tA}\bar{V}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(tA)^n}{n!}\bar{V}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^nA^n}{n!}\bar{V}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n\lambda^n}{n!}\bar{V}=e^{\lambda t}\bar{V}$$

אם ל-A יש n וקטורים עצמיים בלתי-תלויים אזי הפתרון:

$$\boxed{X(t)=c_1e^{\lambda_1t}V_1+c_2e^{\lambda_2t}V_2+\dots+c_ne^{\lambda_nt}V_n}$$

טענה

$\bar{X}'=A\bar{X}$ ‏, λ מספר, ו- $\bar{X}(t)=e^{\lambda t}\bar{Y}(t)$. מה תהיה המשוואה עבור $\bar{Y}(t)$?

הנגזרת של $x(t)$: $\bar{X}'=\lambda e^{\lambda t}\bar{Y}(t)+e^{\lambda t}\bar{Y}'(t)$. נציב במשוואת המערכת:

$$\lambda e^{\lambda t}\bar{Y}(t)+e^{\lambda t}\bar{Y}'(t)=Ae^{\lambda t}\bar{Y}(t)\Rightarrow \bar{Y}'(t)=A\bar{Y}(t)-\lambda\bar{Y}(t)=(A-\lambda I)\bar{Y}(t)$$

u וקטור עצמי מוכלל של A המתאים לערך λ. כ.ש: $\boxed{(A-\lambda I)^m u=0}$.

ה-u עוזר בכך שהוא עוצר את הסכום האינסופי והופך אותו למספר סופי:

$$\bar{Y}(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n(A-\lambda I)^n}{n!}\bar{u}=\sum_{n=0}^{m-1}\frac{t^n(A-\lambda I)^n}{n!}\bar{u}\Rightarrow \bar{X}(t)=e^{\lambda t}\left(\sum_{0}^{m-1}\frac{t^n(A-\lambda I)^n}{n!}\bar{u}\right)\circledast$$

נבין את העניין בעזרת התרגיל.

תרגיל

נתונה המטריצה A: $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$. נמצא את הע.ע.

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}1-\lambda&0&0\\0&1-\lambda&1\\0&0&1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^3=0\Rightarrow\boxed{\lambda_{1,2,3}=1}$$

קיבלנו שהריבוי של $\lambda=1$ הוא 3. נציב $\lambda=1$ במטריצה $A-\lambda I$:

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=0\quad (c=0)$$

יש לנו כאן 2 דרגות חופש (כי a,b יכולים להיות כל מספר שנרצה) ולכן נבחר את: $\bar{V}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\bar{V}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

אבל הריבוי של $\lambda=1$ הוא 3, כלומר חסר לנו וקטור אחד. לכן נכפיל את המטריצה $A-\lambda I$ בעצמה ונקבל את הוקטור הנוסף (לפי המונה n ב- $(A-\lambda I)^n\bar{u}=0$ שמשמאלה):

$$(A-\lambda I)^2=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

קיבלנו שכל האיברים אפסים. לכן נבחר את הוקטור השלישי שלא יהיה תלוי בקודמים: $\bar{V}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

נמלא לפי המשוואה של $x(t)$ לפי סעיף $(\circledast)$: $X_3(t)=e^{\lambda t}\left(\bar{u}+\frac{t(A-\lambda I)}{1}+\frac{t^2}{2}(A-\lambda I)^2\bar{u}\right)$

נציב:

$$\bar{X}_3(t)=e^t\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0\\te^t\\e^t\end{pmatrix}$$

הפתרון הכללי:

$$\boxed{\bar{X}(t)=c_1e^t\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2e^t\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+c_3e^t\begin{pmatrix}0\\t\\1\end{pmatrix}}$$