סיווג מד"ר רגילות מסדר ראשון

(1) ליניאריות - בד"כ נראות בצורה הזו: $a(x)y' + b(x)y = f(x)$
פותרים באמצעות גורם אינטגרציה.

(2) לא ליניאריות - א. פרידה - מהצורה: $y'=a(x)b(y)$, פותרים ע"י הפרדת משתנים.

ב. הומוגנית - מהצורה: $y'=f(\frac{y}{x})$.

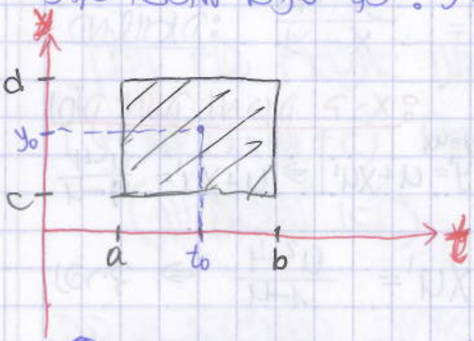
ג. ברנולי - מהצורה: $y'+a(x)y=f(x)y^{\alpha}$

פותרים ע"י החלפת משתנים

צריך לדעת לזהות את המשוואות לפי הסוגים ואז לפתור ע"פ הדרך.

משפט קיום ויחידות של פתרון של מד"ר מסדר ראשון

נתון: $\frac{dy}{dt}=f(t,y)$ ונתון תנאי התחלה: $y(t_0)=y_0$. כדי שנוכל למצוא את הפונקציה, עלינו לדרוש שני תנאים:



(1) הפונקציה: $f(t,y)$ (2) והנגזרת החלקית שלה: $\frac{\partial f}{\partial y}(t,y)$, הן פונקציות רציפות בתחום:
$R=\{(t,y): a<t<b,\ c<y<d\}$, $(t_0,y_0)\in R$

(כמו בשרטוט). אז קיים מספר ממשי כלשהו ($h>0$) וקיים הפתרון היחיד של הבעיה עבור t בקטע (t_0-h, t_0+h).

דוגמא 1

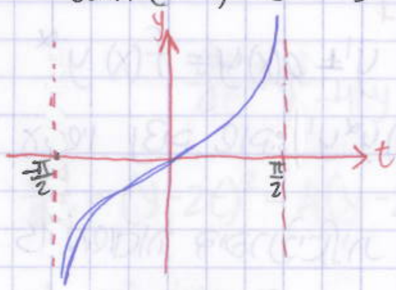
נתונה: $\frac{dy}{dt}=1+y^2$ ונתון התנאי: $y(0)=0$.

$f(t,y)=1+y^2$ - פונקציה רציפה עבור כל y,t. $\frac{\partial f}{\partial y}=2y$ - גם רציפה לכל (t,y).

אז מתקיים משפט הקיום. נפתור את המשוואה: (פרידה).

$$\frac{dy}{dt}=1+y^2 \Rightarrow \int\frac{dy}{1+y^2}=\int dt \Rightarrow \arctan y=t+c \Rightarrow y=\tan(t+c)$$

לפי תנאי ההתחלה: $\tan(0+c)=0 \Rightarrow c=0 \Rightarrow \boxed{y=\tan t}$



הפונקציה הזו לא מוגדרת עבור $t=-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$,

ולכן נקבל פתרון יחיד עבור $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$

לכן $\boxed{h=\frac{\pi}{2}}$.

דוגמא 2

$\frac{dy}{dt}=t^2-ty^3$ ו- $y(1)=4$. האם קיים פתרון יחיד בקטע $(1-h,1+h)$?

$f(t,y)=t^2-ty^3$ רציפה עבור כל t,y, $\frac{\partial f}{\partial y}(t,y)=-3y^2t$ - רציפה עבור כל t,y.

ולכן לפי משפט היחידות קיים פתרון יחידות.

שאלה 3

$t\frac{dy}{dt}=2y$ ו- $y(2)=0$. האם קיים פתרון?

נפרק: $\frac{dy}{dt}=\frac{2y}{t}$, $f(t,y)$ רציפה עבור $t>0$, $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{2}{t}$ רציפה גם באותו תחום. לכן המשפט נכון וקיים פתרון יחיד. בתחום: R : $(0<t<\infty)$ ב. $(2-h,2+h)$.

נפתור את המשוואה:

$$\int\frac{dy}{y}=\int 2\frac{dt}{t} \Rightarrow \ln y=2\ln t+c \Rightarrow e^{\ln y}=e^{\ln t^2+c} \Rightarrow \boxed{y=c\cdot t^2}$$

עבור תנאי ההתחלה: $y(2)=0 \Rightarrow c\cdot 2=0 \Rightarrow c=0 \Rightarrow \boxed{y=0}$

לכן קבל $y=0$ שאכן מקיים את המשפט.

אם אנחנו אלו לפתור את זה אם נקח תנאי $y(0)=1$, נראה ש: $c\cdot 0=1 \Rightarrow X$

שאלה 4

$\frac{dy}{dt}=3y^{\frac{2}{3}}$ ו- $y(2)=0$. האם קיים פתרון יחיד בקטע $(2-h,2+h)$?

$f(t,y)=3y^{\frac{2}{3}}$ רציפה לכל t,y. $\frac{\partial f}{\partial y}(t,y)=\frac{2}{\sqrt[3]{y}}$ - לא רציפה עבור $y=0$, כלומר בנקודה $(2,0)$ לכן המשפט לא מתקיים ואין פתרון יחיד.

נפתור:

$$\frac{dy}{y^{\frac{2}{3}}}=3dt \Rightarrow \int\frac{dy}{y^{\frac{2}{3}}}=3\int dt \Rightarrow 3y^{\frac{1}{3}}=3t+c \Rightarrow y^{\frac{1}{3}}=t+c \Rightarrow \boxed{y=(c+t)^3}$$

לפי תנאי התחלה: $(2+c)^3=0 \Rightarrow c=-2 \Rightarrow \boxed{y_1=(t-2)^3}$

אלא שקיים עוד פתרון. ש.נ. כאשר $y=0$ (נציב dy גם 0 ונקבל $0=0$).

והפתרון הזה יהיה עבור: $\boxed{y_2\equiv 0}$. קבלנו באמת 2 פתרונות ולא אחד.

״שימוש של משפט קיום ויחידות״

$\frac{dy}{dt}=f(t,y)$. נניח שקיימים 2 פתרונות $y_1(t),y_2(t)$ של המשוואה הדיפרנציאלית ונקודה t_0 כך ש: $y_0=y_1(t)=y_2(t)$, אז:

(1) אם בנקודה (t_0,y_0) מתקיים התנאי של המשפט - אז $y_1(t)=y_2(t)$ בסביבת הנקודה t_0.

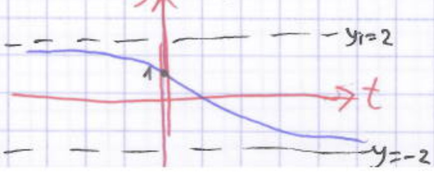
(2) אם בנקודה (t_0,y_0) לא מתקיים התנאי אז $y_1(t)$ ו- $y_2(t)$ הם פתרונות שונים.

מסקנה: אם עבור משפ״פ מתקיים התנאי אזי הפתרונות לא נחתכים.

שאלה 5

$\frac{dy}{dt}=y^2-4$ עם תנאי $y(0)=1$.

המשפט מתקיים (כי y^2-4 רציפה וגם $2y$ רציפה). פתרון ש.נ: $y^2-4=0 \Rightarrow y_1=2,\ y_2=-2$



האם יש פתרון יורד והוא חייב להיות רק בין $-2<y<2$,

בגלל תנאי ההתחלה. האם שהפתרון לא חותך.

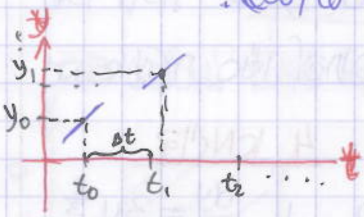
דוגמא לניתוח

$\frac{dy}{dt}=\frac{(1+t)^2}{(1+y)^2}$ ונתון תנאי $y(0)=-0.1$.

ניתן לראות ש $y=t$ מקיים את השוויון ולכן הוא פתרון. לפי משפט היחידות רואים $f(t,y)$ רציף עבור $y\neq-1$ וכן $\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{2(1+t)^2}{(1+y)^3}$ ולכן פתרונות לא נחתכים.
היות ותנאי ההתחלה קטן מ $y=t$ $(-0.1<0)$ ניתן להסיק ש: $\underline{y(t)<t}$.

$\boxed{\text{שיטת אוילר לפתרון נומרי של מד"ר}}$

$\frac{dy}{dt}=f(t,y)$ $y(t_0)=y_0$. מחפשים פתרון בקטע (t_0,t_0+a).



נסתכל כאלו: $t_1=t_0+\Delta t$, $t_2=t_1+\Delta t=t_0+2\Delta t$

לפי הגדרת הנגזרת: $\frac{y_1-y_0}{t_1-t_0}=f(t_0,y_0)$ נגזרת בנק' היא השיפוע.

ולפי זה נקבל: $y_1=y_0+f(t_0,y_0)\underbrace{(t_1-t_0)}_{\Delta t}$

באותו אופן: $\frac{y_2-y_1}{t_2-t_1}=f(t_1;y_1) \Rightarrow y_2=y_1+f(t_1,y_1)(t_2-t_1)$

* במקרים כלליים: עבור: $n=1,2,\dots N$. נקבל: $t_{n+1}=t_n+\Delta t$

והפונקציה: $\boxed{y_{n+1}=y_n+f(t_n,y_n)\Delta t}$

ע"י זה ניתן לחשב את ערכי הפונקציה בקירוב.