$a(t)$ - פונקציה נתונה. נגדיר אופרטור הכפלה בפונקציה $M_{a(t)}$ המיוצג

ע"י: $\boxed{M_{a(t)} = a(t)\cdot f(t)}$

נוכיח שהיא העתקה לינארית:

(1) $M_{a(t)}(f+g) = M_{a(t)}f + M_{a(t)}g = a(t)\,(f(t)+g(t)) = a(t)f(t) + a(t)\cdot g(t) =$

$M_{a(t)}f + M_{a(t)}g \Rightarrow M_{a(t)}(f+g) = M_{a(t)}f + M_{a(t)}g$ ✓

(2) $M_{a(t)}(\alpha f) = M_{a(t)}\alpha f = a(t)\cdot\alpha\cdot f(t) = \alpha\cdot a(t)f(t) = \alpha\cdot M_{a(t)}f$ ✓

לכן זו העתקה לינארית.

אם כן, D - אופרטור גזירה ו- $M_{a(x)}$ - אופרטור הכפלה בפונקציה $a(x)$

אופרטור דיפרנציאלי לינארי מסדר n

$$L = \overset{M(ax)}{a_n(x)}D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1(x)D + a_0(x)$$

(באלגברה: בדומה לפולינום: $P_n = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$)

נגדיר את הפעולה: $L = xD^2 - 3x^2D + e^x$. אם נפעיל על y נקבל: $Ly = xy'' - 3x^2y' + e^xy$.

משוואה דיפרנציאלית לינארית מסדר n היא המשוואה: $\boxed{Ly = f(x)}$

כאשר L הוא אופרטור דיפרנציאלי לינארי מסדר n. $f(x)$ פונקציה נתונה.

אם $f(x)=0$, המשוואה נקראת הומוגנית.

אופרטור דיפרנציאלי לינארי מסדר ראשון

האופרטור מסוג: $\boxed{L = a_1(x)D^1 + a_0(x)}$

משד"ל לינארית מסדר ראשון

מוגדרת כ: $\boxed{a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)}$ $a_1(x)\neq 0$ עבור כל נקודה x בתחום ההגדרה.

דוגמאות

(1) $y' + 3(\sin x)y + \cos x = 0$ - לינארית.

(2) $y' + 3x^2y^2 = x^3$ - לא לינארית, כי יש y^2.

(3) $yy' + 3xy = x^3$ - יש מקדם y ל-y'.

פתרון משד"ל לינארית הומוגנית

$$y' + a(x)y = 0 \Rightarrow y' = -a(x)y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -a(x)y \Rightarrow \frac{dy}{y} = -a(x)dx$$

$$\Rightarrow \int\frac{dy}{y} = -\int a(x)dx \Rightarrow \ln|y| = -\int a(x)dx + c \Rightarrow |y| = \underbrace{e^{-\int a(x)dx}}_{\text{חיובי}}\cdot\underbrace{e^c}_{\text{קבוע חיובי}} \Rightarrow$$

$$\boxed{y = c\cdot e^{-\int a(x)dx}}$$

כל הפתרונות של משוואה מסוג זה הם כפולה בסקלר של פתרון אחד, כלו' תת מרחב ממימד 1.

משפט 2

אוסף פתרונות של משוואות לינאריות הומוגניות מסדר ממש' n, הוא תת מרחב ממימד n.

הוכחה ש-L תת-מרחב

$Ly=0$. נניח ש: y_1 ו-y_2 הם פתרונות, כלומר: $Ly_1=0, Ly_2=0$

$$L(c_1y_1+c_2y_2)=L(c_1y_1)+L(c_2y_2)=c_1\underbrace{Ly_1}_{0}+c_2\underbrace{Ly_2}_{0}=0.$$

הוכחנו שהיא סגורה תחת חיבור (וגם תחת כפל) ולכן L תת-מרחב.

דוגמא

$y'+3xy=0$. נניח שתנאי ההתחלה $y(0)=-2$

הפתרון הכללי יהיה כמו שראינו: $y=ce^{-\int 3x\,dx} \Rightarrow y=ce^{-\frac{3x^2}{2}}$

עבור תנאי ההתחלה $y(0)=-2$, נקבל את הפתרון: $\boxed{y=-2e^{-\frac{3x^2}{2}}}$

משוואות לא הומוגניות

המשוואה היא: $y'+a(x)y=f(x)$. נעזר בגורם אינטגרציה.

מחפשים פונקציה $\mu(x)$ שאם נכפיל את המשוואה ב-$\mu(x)$, נקבל באגף שמאל נגזרת של ביטוי אחד.

המשוואה: $\mu(x)y'+\mu(x)a(x)y=\mu(x)f(x)$

אנחנו יודעים שנגזרת של פונ' מורכבת היא: $(fg)'=f'g+fg'$.

ולכן במקרה שלנו נחפש ש: $\mu(x)a(x)=\mu'(x)$. זו משוואה הומוגנית:

$\mu'(x)-a(x)\mu(x)=0 \Rightarrow \mu(x)=e^{\int a(x)dx}$ (מחפשים פתרון פשוט, נבחר C=1)

אם נציב $\mu(x)=e^{\int a(x)dx}$ נקבל ש: $(\mu(x)y)'=\mu(x)f(x)$

כל נשאר לנו רק לבצע אינטגרל ל-$(\mu(x)y)'$ כדי לפתור את המשוואה המקורית.

דוגמא 1

$$\frac{dy}{dt}+\frac{2}{t}y=t-1 \qquad \left(a(x)=\frac{2}{t},\ f(x)=t-1\right)$$

א. מציאת גורם אינטגרציה:

$$\mu(x)=e^{\int\frac{2}{t}dt}=e^{2\ln t}=e^{\ln t^2}=\boxed{t^2}$$

ב. נכפיל את המשוואה ב-$\mu(x)$:

$$t^2y'+2ty=t^3-t^2 \Rightarrow (t^2y)'=t^3-t^2 \Rightarrow t^2y=\frac{t^4}{4}-\frac{t^3}{3}+c$$

ג. נחלק במכפלה ב-$\mu(x)$:

$$y=\frac{t^2}{4}-\frac{t}{3}+c\cdot\frac{1}{t^2}$$

סיכום - פתרון משוואה לא הומוגנית

(1) מציאת גורם אינטגרציה $\mu(x)$ כך שנקבל: $\mu'(x)y + \mu(x)y'$.

(2) הכפלת המשוואה בגורם האינטגרציה $\mu(x)$. (לא משוואה הומוגנית)

(3) ביצוע אינטגרל כדי למצוא את $\mu(x)y$.

(4) חילוק המשוואה (בחזרה) בגורם האינטגרציה.

(5) שימוש בתנאי ההתחלה כדי למצוא את C.

* הערה: אם בשלב (3) ביצענו אינטגרל, וקיבלנו אינטגרל שלא ניתן לפתוח, פתרון המשוואה "ישאר עם האינטגרל" ($y'=\frac{1}{\mu(x)}\int f\cdot ay + c$) כמובן שצריך לחלק בגורם האינטגרציה (לא לשכוח!!!)

לפעמים אפשר לפתור משוואות לא לינאריות לינאריות כשמבצעים הצבה.

דוגמא 1

מצא את y במשוואה: $\frac{dy}{dt} = -\frac{y}{t} + \frac{t-1}{2y}$

נכפיל ב-2y: $2yy' = -\frac{2y^2}{t} + t - 1 \Rightarrow \frac{2y^2}{t} + 2yy' = t-1$

נציב $u=y^2$, $u'=2yy'$: $\frac{2u}{t} + u' = t-1$, $\mu(t) = e^{\int\frac{2}{t}dt} = t^2$

$$t^2u' + 2tu = t^3 - t^2 \Rightarrow (t^2u)' = t^3 - t^2 \Rightarrow t^2u = \frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{3} + c$$

$$\Rightarrow u = \frac{t^2}{4} - \frac{t}{3} + \frac{c}{t^2} \Rightarrow \boxed{y = \pm\sqrt{\frac{t^2}{2} - \frac{t}{3} + \frac{c}{t^2}}}$$

דוגמא 2

מצא את הפונקציה y במשוואה: $\frac{dy}{dt} = y^2 - 4ty + 4t^2 - 4y + 8t - 3$

$$\frac{dy}{dt} = (y-2t)^2 - 4(y-2t) - 3 \rightarrow \left| \begin{matrix} u = y-2t \\ u' = y'-2 \end{matrix} \right| \Rightarrow u'+2 = u^2 - 4u - 3 \Rightarrow$$

$$u' = u^2 - 4u - 5$$

פתרון ש.ש: $u^2 - 4u - 5 = 0 < \begin{matrix} u_1 = 5 \\ u_2 = -1 \end{matrix}$

נמצא פתרון כללי: $\int\frac{du}{u^2-4u-5} = \int dt \Rightarrow \frac{a}{u-5} + \frac{b}{u+1} = \frac{1}{(u-5)(u+1)}$

$$\Rightarrow au + a + bu - 5b = 1 < \begin{matrix} \text{I} & au + bu = 0 \Rightarrow \boxed{b = -a} \\ \text{II} & a + 5a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{6} \end{matrix}$$

$$\boxed{\begin{matrix} a = \frac{1}{6} \\ b = -\frac{1}{6} \end{matrix}}$$

$$\int \frac{1}{6}\int\frac{1}{u-5} + \frac{1}{6}\int\frac{1}{u+1} = \int dt \Rightarrow \frac{1}{6}\ln|u-5| - \frac{1}{6}\ln|u+1| = t+c \Rightarrow$$

$$\frac{1}{6}\ln\left|\frac{u-5}{u+1}\right| = t+c \Rightarrow \ln\left|\frac{u-5}{u+1}\right| = 6t+c \Rightarrow \frac{u-5}{u+1} = ce^{6t}$$ (קבוע חדש $c=e^{c}$)

$$u-5=(u+1)ce^{6t} = u-5 = uce^{6t}+ce^{6t} = u(1-ce^{6t}) = ce^{6t}+5$$

$$\Rightarrow u = \frac{5+ce^{6t}}{1-ce^{6t}} \Rightarrow \left| \text{נציב בחזרה} \; y=u+2t \right| \Rightarrow \boxed{y = \frac{5+ce^{6t}}{1-ce^{6t}}+2t}$$

משוואות הומוגניות מיוחדות

$y'=f(x,y)$ כאשר $f(x,y)$ היא פונקציה של $\frac{y}{x}$. הצבה $u=\frac{y}{x}$.

דוגמא

המשוואה: $y'=\frac{y-4x}{x-y}$

נחלק מונה ומכנה ב-x:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x}-4}{1-\frac{y}{x}} \Rightarrow \left|u=\frac{y}{x}\right| \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{u-4}{1-u} \quad \left|\begin{array}{l} y=ux \\ y'=u+xu' \end{array}\right| \Rightarrow u+xu' = \frac{u-4}{1-u}$$

$$xu' = \frac{u-4}{1-u}-u \Rightarrow xu' = \frac{u-4-u+u^2}{1-u} \Rightarrow xu' = \frac{u^2-4}{1-u} \Rightarrow$$ נפריד

$$\frac{du}{dx}x = \frac{u^2-4}{1-u} \Rightarrow \int\frac{1-u}{u^2-4}du = \int\frac{x}{dx} \Rightarrow$$ פירוק חלקים $$\Rightarrow \frac{a}{u-2}+\frac{b}{u+2} = \frac{1-u}{u^2-4}$$

$$\Rightarrow au+2a+bu-2b = 1-u \begin{cases} \text{I} & au+bu=-u \Rightarrow a+b=-1 \\ \text{II} & -2b+2a=1 \Rightarrow -b+a=\frac{1}{2} \end{cases} \quad \boxed{a=-\frac{1}{4}} \quad \boxed{b=-\frac{3}{4}}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{4}\ln|u-2| - \frac{3}{4}\ln|u+2| = \ln|x|+c \Rightarrow \ln|u-2|+3\ln|u+2| = -4\ln|x|+c$$

$$\Rightarrow \ln(u-2)(u+2)^3 = -4\ln|x|+c \Rightarrow |(u-2)(u+2)^3| = c\cdot\frac{1}{|x|^4} \Rightarrow \left(\text{נציב חזרה} \; u=\frac{y}{x}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{y}{x}-2\right)\left(\frac{y}{x}+2\right)^3 = c\cdot\frac{1}{x^4} \Rightarrow \left(\frac{y-2x}{x}\right)\left(\frac{y+2x}{x}\right)^3 = c\cdot\frac{1}{x^4} \Rightarrow \boxed{(y-2x)(y+2x)^3 = c}$$

משוואות ברנולי

$y' \pm a(x)y = f(x)y^{\alpha}$ $(\alpha\neq 0,1)$. לאחר שנחלק ב-y^{α}: $\boxed{y^{-\alpha}y' \pm a(x)y^{(1-\alpha)} = f(x)}$

עכשיו נציב שוב: $u=y^{1-\alpha}$, $u'=(1-\alpha)y^{\alpha}y'$ נקבל: $\boxed{\frac{1}{1-\alpha}u' \pm a(x)u = f(x)}$

זו משוואה דיפרנציאלית מסדר ראשון שאותה אנחנו יודעים לפתור.