התמרת לפלס

$f(t)$ - פונקציה ממשית עבור $t\geq 0$. נגדיר את ההתמרה.

$F(s)$ נקראות התמרת לפלס של $f(t)$ בנקודה s, כך ש:

$$F(s)=\underbrace{\mathcal{L}}_{\text{סימון של ההתמרה}}\{f(t)\}(s)=\int_0^{\infty}e^{-st}f(t)\,dt=\lim_{M\to\infty}\int_0^{M}e^{-st}f(t)\,dt$$

דוגמא 1

$f(t)$ הוא k שהוא קבוע:

$$F(s)=\int_0^{\infty}e^{-st}k\,dt=\begin{vmatrix} st=\tau \\ d\tau=s\,dt \\ dt=\frac{d\tau}{s}\end{vmatrix}=\frac{k}{s}\int_0^{\infty}e^{-\tau}d\tau=\frac{k}{s}\left(-e^{-\tau}\right)\Big|_0^{\infty}=\boxed{\frac{k}{s}}$$

דוגמא 2

$f(t)=e^{at}$.

$$F(s)=\int_0^{\infty}e^{-st}e^{at}dt=\int_0^{\infty}e^{-(s-a)t}dt=\boxed{\frac{1}{s-a}}$$

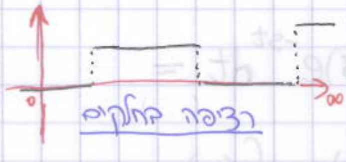
דוגמא 3

$f(t)=\frac{1}{t}$.

$$F(s)=\int_0^{\infty}e^{-st}\cdot\frac{1}{t}dt=\underbrace{\int_0^{1}\frac{e^{-st}}{t}dt}_{\infty}+\int_1^{\infty}\frac{e^{-st}}{t}dt$$

אינטגרל כזה לא ניתן לחשב. כדי לדעת אלו כן אפשר, ישנה הגדרה:

הגדרה



נאמר שפונקציה f רציפה בחלקים בקטע I אם:

(1) יש לה רק מס' סופי של נק' אי-רציפות בקטע I.

(2) כל נקודת אי"ר היא קפיצה-צומר, יש לה גבולות חד-צדדיים סופיים.

משפט

אם $f(t)$ פונקציה רציפה בחלקים ב- $[0,\infty)$ ונניח ש $|f(t)|<Me^{at}$ כאשר $t>T$ אזי התמרת לפלס - $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$, מוגדרת עבור כל $s>a$

בפרט לא נשתמש בפונקציות כגון e^{t^2} וכדו' כיוון שהם גדלות ל-∞ מאוד מהר ולא נמצאו לפלס. כל שאר הפונקציות הרגילות כמו: $\ln t, \sin t, \cos t\ldots$ עומדות בדרישה של המשפט, ולכן אין בעיה לבצע עליהן התמרה.

התמרת לפלס - פעולה לינארית

$$\mathcal{L}\{f_1(t)+f_2(t)\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}(f_1(t)+f_2(t))\,dt = \int_0^\infty (e^{-st}f_1(t)+e^{-st}f_2(t))\,dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-st}f_1(t)\,dt + \int_0^\infty e^{-st}f_2(t)\,dt = \mathcal{L}\{f_1(t)\}(s)+\mathcal{L}\{f_2(t)\}(s) \quad \text{מ.ש.ל}$$

הקושי בהתמרת לפלס הוא לחזור בחזרה אל הפונקציה המקורית (התמרה עוזרת לפתור את הבעיה, אבל בדר"כ צריך לבדוק את התכונות של הפונקציה).

דוגמא

נמצא את הפונקציה המקורית $f(t)$. $F(s)=\frac{2s}{(s-1)(s-4)}$

נפרק $F(s)$ לחלקים: $\frac{2s}{(s-1)(s-4)} = \frac{a}{s-1}+\frac{b}{s-4} \overset{\circledast}{\Rightarrow} -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{s-1}+\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{s-4}$

$\circledast\ 2s = sa-4a+sb-b \Rightarrow \begin{cases} (1)\ 2=a+b \\ (2)\ 0=-4a-b \end{cases} \Rightarrow (2)\ b=-4a \Downarrow (1)\ 2=-3a \Rightarrow \boxed{a=-\frac{2}{3}},\ \boxed{b=\frac{8}{3}}$

ראינו בפרק קודם ש: $\frac{1}{s-a}=e^{at}$ ולכן:

$$\boxed{f(t)=-\frac{2}{3}e + \frac{8}{3}e^{4t}}$$

התמרת לפלס עבור נגזרות

$$\boxed{\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(s) = s^n\mathcal{L}\{f(t)\}(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\dots-f^{(n-1)}(0)}$$

דוגמא (עבור n=1)

$$\mathcal{L}\{f'(t)\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}f'(t)\,dt = f(t)e^{-st}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty f(t)(-s)e^{-st}\,dt =$$

$$= -f(0)+s\int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt = s\mathcal{L}\{f(t)\}(s)-f(0)$$

תרגיל

המשוואה: $y''(t)-9y(t)=0$. תנאי התחלה: $y(0)=1,\ y'(0)=0$

$$\mathcal{L}\{y''(t)\}-9\mathcal{L}\{y(t)\}=0 \Rightarrow s^2\mathcal{L}\{y\}-s\cdot 1-0-9\mathcal{L}\{y\}=0$$

$$=(s^2-9)\mathcal{L}\{y\}=s \Rightarrow \mathcal{L}(y)=\frac{s}{s^2-9} \Rightarrow y=\mathcal{L}^{-1}\frac{s}{s^2-9}$$

נבצע כעת התמרה הפוכה כמו בדוגמא של מעלה: $\frac{s}{s^2-9}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s-3}$

$$y=\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\}+\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\}=\boxed{\frac{1}{2}e^{-3t}+\frac{1}{2}e^{3t}}$$

טבלת התמרות

$f(t)$	$F(t)$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
$e^{at}\sin(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$
$e^{at}\cos(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$