מערכות משדי"ם ליניאריות מסדר 1

מהסלם: $a_n(x)y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{n-1}+\dots+a_0(x)y=g(x)$

נגדיר: $y'(x)=y_1(x)\ ,\ y''(x)=y_1'(x)=y_2(x)\dots$

$$(y^{(n)})\quad y_{n-1}'=-a_0(x)y-a_1(x)y_1(x)-\dots-a_{n-1}(x)y_{n-1}(x)+g(x)$$

נקבל וקטור: $(y(x),y_1(x),\dots,y_{n-1}(x))$

מערכת n משוואות מסדר 1

המשוואות הן כפונקציה של t, כמו: $x_1(t),x_2(t)\dots x_n(t)$

סימון: $\bar{x}(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\\vdots\\x_n(t)\end{pmatrix}$ וקטור הנגזרת יהיה: $\bar{x}(t)'=\begin{pmatrix}x_1(t)'\\x_2(t)'\\\vdots\\x_n(t)'\end{pmatrix}$

כיוון הנגזרת הנגזרת היא: $\bar{x}(t)'=\lim_{\Delta t\to0}\frac{\bar{x}(t+\Delta t)-\bar{x}(t)}{\Delta t}$

מערכת של n משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון מוגדרת כך:

$$\begin{cases}x_1'(t)=f_1(t,x_1,x_2,\dots,x_n)\\x_2'(t)=f_2(t,x_1,x_2,\dots,x_n)\\\vdots\\x_n'(t)=f_n(t,x_1,x_2,\dots,x_n)\end{cases}$$

דוגמא

נתונה המשוואה: $y''+9y=0$ נהפוך אותה למערכת משוואות:

נגדיר: $(y'')\begin{cases}y'=y_1\\y_1'=-9y\end{cases}$ ונגדיר: $\begin{cases}y=x_1(t)\\y_1=x_2(t)\end{cases}$

נציב ונקבל: $\begin{cases}x_1'=x_2\\x_2'=-9x_1\end{cases}$ או במטריצה:

$$\underset{\bar{x}'}{\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\end{pmatrix}}=\underset{A}{\begin{pmatrix}0&1\\-9&0\end{pmatrix}}\cdot\underset{\bar{x}}{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}}$$

מערכת משוואות מסדר ראשון נקראת ליניארית הומוגנית. אם:

$$\begin{cases}x_1'=a_{11}(t)x_1+a_{12}(t)x_2+\dots+a_{1n}(t)x_n\\x_2'=a_{21}(t)x_1+a_{22}(t)x_2+\dots+a_{2n}(t)x_n\\\vdots\\x_n'=a_{n1}(t)x_1+a_{n2}(t)x_2+\dots+a_{nn}(t)x_n\end{cases}$$

או בקצרה: $\bar{x}'(t)=A(t)\bar{x}$

המטריצה: $A(t)=\begin{pmatrix}a_{11}(t) & a_{12}(t)\\ a_{21}(t) & a_{22}(t)\end{pmatrix}$ נגזרתה: $A'(t)=\begin{pmatrix}a_{11}'(t) & a_{12}'(t)\\ a_{21}'(t) & a_{22}'(t)\end{pmatrix}$

אותו הדבר לגבי אינטגרל של מטריצה.

פונקציה של מטריצה

נניח שיש מטריצה $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. איך נמצא את הפונקציה e^A?

הגדרה של אקספוננטה היא: $e^A=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{n!}$

נחשב: $A^2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=A$

וכן הלאה. נקבל טור של אקספוננטה:

$$e^A=I+A+\frac{I}{2!}+\frac{A}{3!}+\frac{I}{4!}+\dots=I\left(1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}+\dots\right)+A\left(1+\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\dots\right)$$

$$=I\cosh 1+A\sinh 1=\begin{pmatrix}\cosh 1 & 0\\ 0 & \cosh 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & \sinh 1\\ \sinh 1 & 0\end{pmatrix}=$$

קיבלנו ש e^A יהיה:

$$e^A=\begin{pmatrix}\cosh 1 & \sinh 1\\ \sinh 1 & \cosh 1\end{pmatrix}$$

מקרה כללי

עבור: $\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ ו- $\bar{X}(0)=X_0$, הפתרון יהיה: $X(t)=e^{At}X_0$.

בדיקה

$$\underline{\underline{\bar{X}(t)}}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(At)^n}{n!}\right)\bar{X}_0\Rightarrow \underline{\underline{\bar{X}'(t)}}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(At)^n}{n!}\right)'\bar{X}_0=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A^n n t^{n-1}}{n!}\bar{X}_0\Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A^n t^{n-1}}{(n-1)!}\bar{X}_0=A\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A^{n-1}t^{n-1}}{(n-1)!}\bar{X}_0\Rightarrow\boxed{\text{נסדר: } n-1\to n}\Rightarrow A\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n t^n}{n!}\bar{X}_0}_{\text{ראינו קודם שזה } X(t)}$$

אם בתוצאה כאשר נציב את תנאי ההתחלה נקבל $\bar{X}(0)=X_0$.

אז ראינו שבהצבת $X(t)=e^{At}\bar{X}_0$ קיבלנו פתרון (מוכח) למשוואה $\bar{X}'(t)=A\bar{X}$.

ראינו קודם איך נראית הפונקציה e^A, ולכן נוכל להסיק ש:

$$X(t)=e^{At}\bar{X}_0=\begin{pmatrix}\cosh t & \sinh t\\ \sinh t & \cosh t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$$ (כאשר $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$)

קיטאן

נתונה המערכת: $\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -x_1 \end{cases}$ ונתונים תנאי התחלה: $\begin{cases} x_1(0) = 2 \\ x_2(0) = 3 \end{cases}$

עבור: $\begin{matrix} y = x_1 \\ y' = x_2 \end{matrix}$ נקבל ש: $y'' = -y$. המטריצה: $\bar{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \bar{x}$

כמו קודם נמצא את A^2: $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$

$$e^{At} = I + At - I\frac{t^2}{2!} - A\frac{t^3}{3!} + I\frac{t^4}{4!} + I\frac{t^5}{5!} + \dots = \cos t\, I + \sin t \cdot A$$

ולכן: $x(t) = e^{tA} x_0 = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

נפתח: $\boxed{x_1(t) = 2\cos t - 3\sin t}$, $\boxed{x_2(t) = -2\sin t - 3\cos t}$