שיעור

$f(t) \geq 0$

הגדרנו התמרת לפלס

כאשר האינטגרל מתכנס

נסמן

$$L\{f(t)\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = F(s)$$

ראינו ש:

$$L\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$$

$$L\{f'(t)\} = sL\{f'(s)\}(s) - f(0)$$

$$L\{f''(t)\}(s) = s^2 L\{f(t)\}(s) - sf(0) - f'(0)$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$L\{f^{(n)}(t)\}(s) = s^n L\{f(t) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) \,\text{----}\, - f^{(n-1)}(0)$$

איך משתמשים בנוסחה כדי לחשב:

$$f(t) = \sin at$$

מד״ר של הפונקציה:

$$y'' + a^2 y = 0$$

תנאי התחלה:

$$y(0) = 0 \qquad y' = a\cos at \Rightarrow y'(0) = a$$

נסמן:

$$L\{y(t)\}(s) = Y(s)$$

$$s^2 Y - s\cdot 0 - a + a^2 Y = 0$$

$$s^2 Y + a^2 Y = a \Rightarrow Y = \frac{a}{s^2+a^2}$$

נוסחה:

$$\boxed{L\{\sin at\}(s) = \frac{a}{s^2+a^2}}$$

$$f(t) = \cos at$$

$$y'' + a^2 y = 0 \qquad y(0) = 1 \qquad y'(0) = 0$$

$$s^2 Y - s\cdot 1 + a^2 Y = 0 \Rightarrow Y = \frac{s}{s^2+a^2}$$

נוסחה:

$$\boxed{L\{\cos at\}(s) = \frac{s}{s^2+a^2}}$$

$$f(t) = \sinh at = \frac{e^{at} - e^{-at}}{2}$$

$$L\{f(t)\} = \frac{1}{2}L\left\{\frac{e^{at}}{2}\right\} - \frac{1}{2}L\left\{\frac{e^{-at}}{2}\right\} = \frac{1}{2}\frac{1}{s-a} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+a} = \frac{s+a-(s-a)}{2(s-a)(a+a)} =$$

נוסחה:

$$= \boxed{L\{\sinh at\} = \frac{a}{s^2-a^2}}$$

$$f(t) = \cosh at = \frac{e^{at} + e^{-at}}{2}$$

$$L\{f(t)\} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s-a} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+a} = \frac{(s+a+s-a}{2(s-a)(s+a)} = \frac{s}{s^2-a^2}$$

נוסחה:

$$\boxed{L\{\cosh at\} = \frac{s}{s^2-a^2}}$$

שיעור

משפט ההזזה הראשון: אם $F(s)=L\{f(t)\}(s)$ אזי

$$L\{e^{at}\cdot f(t)\}=F(s-a).$$

הוכחה:

$$L\{e^{at}f(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}e^{at}f(t)\,dt=\int_0^\infty e^{-(s-a)t}f(t)\,dt=F(s-a)$$

את כל הנוסחאות הנ"ל אפשר להכפיל ב e^{at}. למשל:

$$L\{e^{at}\sin bt\}=\frac{b}{(s-a)^2+b^2} \qquad L\{e^{at}\sinh bt\}=\frac{b}{(s-a)^2-b^2}$$

$$L\{e^{at}\cos bt\}=\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2} \qquad L\{e^{at}\cosh bt\}=\frac{s-a}{(s-a)^2-b^2}$$

תרגיל:

$$y''-4y=0 \qquad y(0)=1 \qquad y'(0)=-1$$

$$s^2Y-s\cdot 1+1-4Y=0 \Rightarrow (s^2-4)Y=s-1 \Rightarrow$$

לא לחבר איברים
בד"כ חוסך יותר עבודה

$$\Rightarrow Y=\frac{s-1}{s^2-4}=\frac{s-1}{(s-2)(s+2)}=\frac{a}{s-2}+\frac{b}{s+2}$$

$$s-1=as+2a+bs-2b$$

מקדמים של s:

$$\begin{aligned} 1&=a+b \quad /\cdot 2\\ +\;-1&=2a-2a \\ \hline 1&=4a \end{aligned} \Rightarrow \underline{a=\tfrac{1}{4}} \qquad \underline{b=\tfrac{3}{4}}$$

כי $L\{e^{at}\}=\frac{1}{s-a}$

$$Y=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{s-2}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{s+2} \Rightarrow \boxed{y=\frac{1}{4}e^{2t}+\frac{3}{4}e^{-2t}}$$

תשובה סופית:

תרגיל:

כדאי תמיד לכתוב בסדר הזה
כי זה מקל על ההצבה בנוסחה

$$y''+4y=e^{2t} \qquad y(0)=1 \qquad y'(0)=0$$

$$s^2Y-s\cdot 1+4Y=\frac{1}{s-2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (s^2+4)Y=s+\frac{1}{s-2} \Rightarrow Y=\frac{s}{s^2+2}+\frac{1}{(s-2)(s^2+4)},\leftarrow$$

נפרק אותו

$$\frac{1}{(s-2)(s^2+4)}=\frac{a}{(s-2)}+\frac{bs+c}{(s^2+4)}$$

$$1=as^2+4a+bs^2+cs-2bs-2c$$

מקדמים

$$\begin{aligned} s^2&: \quad a+b=0 \quad \rightarrow a=-b\\ s&: \quad c-2b=0 \quad\;\; c=2b\\ &: \quad 4a-2c=1 \quad -4b-4b=1 \Rightarrow \underline{b=-\tfrac{1}{8}} \quad \underline{a=\tfrac{1}{2}} \quad \underline{c=-\tfrac{1}{4}} \end{aligned}$$

$$Y=\frac{s}{s^2+4}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{s-2}-\frac{1}{8}\frac{s}{(s^2+4)}-\frac{1}{4}\frac{1}{(s^2+4)}=\frac{7}{8}\frac{s}{s^2+4}+\frac{1}{8}\frac{1}{s-2}-\frac{1}{4}\frac{1}{s^2+4}$$

$$\boxed{y(t)=\frac{7}{8}\cos 2t+\frac{1}{8}e^{2t}-\frac{1}{8}\sinh 2t}$$

$$L\{\sin at\}=\frac{a}{s^2+a^2}$$
$\uparrow$ 2^2

לכן את האיבר האחרון צריך להכפיל ולחלק ב-2.

שיעור

מה קורה אם צריך לגזור טרנספורם של פונ?

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = F(s)$$

הערה:

$$F'(s) = \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = \left(\frac{d}{ds}e^{-st} = -te^{-st}\right) = \int_0^\infty -te^{-st} f(t)\,dt =$$

כמו קבוע כשגוזרים לפי s.

$$= -\int_0^\infty e^{-st}\, t f(t)\,dt \Rightarrow L\{t f(t)\} = -F'(s)$$

דוגמה:

$$\boxed{L\{t\sin at\} = -\left(\frac{a}{s^2+a^2}\right)' = -\frac{-a\cdot 2s}{(s^2+a^2)^2} = \frac{2as}{(s^2+a^2)^2}}$$

נוסחאות:

$$\boxed{L\{t\cos at\} = -\left(\frac{s}{s^2+a^2}\right)' = -\frac{1(s^2+a^2)-s\cdot 2s}{(s^2+a^2)^2} = \frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}}$$

$$L\{t^n\} \qquad y(t) = t^n \qquad y^{(n+1)} \overset{\text{סדר הנגזרת}}{=} 0$$

$$y'(t) = nt^{n-1} \qquad y''(t) = n(n-1)t^{n-2} \qquad y^{(n)}(t) = n!$$

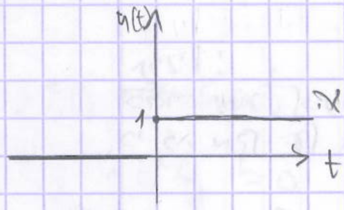
$$y(0) = 0 \qquad y'(0) = 0 \quad \dots \quad y^{(n)}(0) = n!$$

$$s^{n+1}Y - s^n\cdot 0 - s^{n-1}\cdot 0 - \dots - n! = 0$$

$$Y = \frac{n!}{s^{n+1}} \qquad \boxed{L\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}}$$

נוסחה:

פונקציית הביסייד $u(t)$



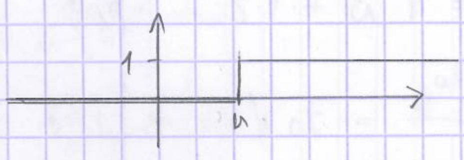
צעד / פונ מדרגה

הגדרה:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

פונ' הביסייד מוזזת

$$u(t-a) = u_a(t)$$



$$u_a(t) = \begin{cases} 0 & t < a \\ 1 & t \geq a \end{cases}$$

$$L\{u_a(t)\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} u_a(t)\,dt = \int_0^a e^{-st} \underset{0}{u_a(t)}\,dt + \int_a^\infty e^{-st} \underset{1}{u_a(t)}\,dt =$$

$$= 0 + \int_a^\infty e^{-st}\,dt = \frac{e^{-st}}{-s}\Big|_a^\infty = -\frac{e^{-sa}}{-s} = \frac{e^{-sa}}{s}$$

$$L\{u_a(t)\cdot f(t-a)\} = \int_0^\infty e^{-st} u_a(t)\cdot f(t-a)\,dt = \int_a^\infty e^{-st} f(t-a)\,dt =$$

הצבה: $v = t-a$, $dv = dt$, $t = a \Leftarrow v = 0$, $t = \infty \Leftrightarrow v = \infty$

$$= \int_0^\infty e^{-s(v+a)} f(v)\,dv = \int_0^\infty e^{-sa}\cdot e^{-sv} f(v)\,dv = e^{-sa}\int_0^\infty e^{-sv} f(v)\,dv =$$

$$= e^{-sa}\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = e^{-sa}\cdot L\{f(t)\}(s)$$

שיעור

$$\boxed{L\{u_a(t)\cdot f(t-a)\}=e^{-sa}\cdot L\{f(t)\}s}$$

$$L\{u_a(t)\cdot f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\cdot u_a(t) f(t)\,dt = \int_a^\infty e^{-st} f(t)\,dt = \Big|\ \text{אינט׳ הצבה}\ \Big| =$$

נסמן $V=t$

$$= \int_0^\infty e^{-s(v+a)} f(v+a)\,dv = e^{-sa}\int_0^\infty f(v+a)\,dv = e^{-sa}\int_0^\infty e^{-st} f(t+a)\,dt =$$

$$= e^{-sa} L\{f(t+a)\} \Rightarrow \boxed{L\{u_a(t)\cdot f(t)\} = e^{-sa} L\{f(t+a)\}}$$

דלתא פונ׳ היא לא בדיוק נקודתית, זה באמת לא פונ׳ כי היא 0 בכל נקודות פרט ל-0, ואינסוף בצורה שהאינטגרל שלה שווה 1.

<u>הגדרה:</u> נסמן $\delta_a(t)=\delta(t-a)$. I - קטע כלשהו. $a\in I$, a נקודה בקטע I

$f(t)$ פונ׳ כלשהי - אז:
$$\int_I f(t)\,\delta_a(t)\,dt = f(a)$$

כאילו שמנו את כל המשקל בנקודה a, ומתעלם משאר הפונ׳.

$$L\{\delta_a(t)\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}\delta_a(t)\,dt \ \Big(\text{נניח } a\ge 0\Big) = e^{-sa}$$

$$L\{\delta_a(t)\cdot f(t)\} = \int_0^\infty \underbrace{e^{-st} f(t)}\cdot \delta_a(t)\,dt \overset{a>0}{=} e^{-sa}\cdot f(a)$$

<u>תרגיל:</u>

$$\frac{dy}{dt} = 2y + u_2(t) \qquad y(0)=1$$

$$sY - 1 = 2Y + \frac{\overset{\text{מתמלא}}{e^{-2s}}}{s} \Rightarrow (s-2)Y = 1 + \frac{e^{-2s}}{s} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y = \frac{1}{s-2} + e^{-2s}\cdot\frac{1}{s(s-2)}$$

$$\frac{1}{s(s-2)} = \frac{a}{s} + \frac{b}{s-2} \Rightarrow 1 = as - 2a + bs$$
$$1 = -2a \rightarrow a = -\tfrac{1}{2}$$
$$a + b = 0 \qquad b = \tfrac{1}{2}$$

$$Y = \frac{1}{s-2} + e^{-2s}\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(s-2)}\right) = \frac{1}{s-2} - \frac{1}{2}e^{-2s}\cdot\frac{1}{s} + \frac{1}{2}e^{-2s}\frac{1}{s-2}$$

$$y(t) = e^{2t} - \frac{1}{2}u_2(t) + \frac{1}{2}u_2(t)\cdot e^{2(t-2)} =$$

$$= e^{2t} - \frac{1}{2}u_2(t) + \frac{1}{2}u_2(t)e^{2t}\cdot e^{-4} =$$

$$= e^{2t}\left(1 + u_2(t)\frac{e^{-4}}{2}\right) - \frac{1}{2}u_2(t).$$

לפלס לרפרנס

$u(t-a)$	$\frac{e^{-sa}}{s}$
$f(t-a)u(t-a)$	$e^{-as}L\{f(t)\}$

כדי להבין את הפונ׳ נפצל ב- $t<2$, $t>2$

$t<2$: $y(t) = e^{2t}$ $\quad y(0)=1$ ✓ $\quad \frac{dy}{dt} = 2e^{2t} = 2y$ ✓ $\quad y(2) = \underline{e^4}$

$t\ge 2$: $y(t) = e^{2t}\left(1+\frac{e^{-4}}{2}\right) - \frac{1}{2}$ $\quad y(2^+) = e^4\left(1+\frac{e^{-4}}{2}\right) - \frac{1}{2} = \underline{e^4}$ ✓

$y'(t) = 2e^{2t}\left(1+\frac{e^{-4}}{2}\right)$ $\quad 2y+1 = 2e^{2t}\left(1+\frac{e^{-4}}{2}\right) - 1 + 1$ ✓

שיעור

לפלס טרנספורם לפונקציות מחזוריות:

הגדרה: $f(t)$ נקראת מחזורית עם מחזור T אם עבור כל t מתקיים

$$f(t+T)=f(t)$$

נניח $f(t)$ - מחזורית עם מחזור T. נזכיר נחשב:

$$L\{f(t)\}(s)=$$

$$=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt=\int_0^T e^{-st}f(t)dt+\int_T^{2T}e^{-st}f(t)dt+\int_{2T}^{3T}e^{-st}f(t)dt+\dots=$$

$$=\int_0^T e^{-st}f(t)dt+\int_0^T e^{-s(v+T)}f(v)dv+\int_0^T e^{-s(z+2T)}f(z)dz+\dots$$

$$=\int_0^T e^{-st}f(t)dt+e^{-sT}\int_0^T e^{-sv}f(v)dv+e^{-2sT}\int_0^T e^{-sz}f(z)dz+\dots$$

$t\to v=t-T$, $dt=dv$, $t=T \leftrightarrow v=$, $t=2T \leftrightarrow v$

$t\to z=t-$, $t=2T \leftrightarrow z$, $t=3T \leftrightarrow z$

כל האינטגרלים זה אותו דבר רק עם שם שונה למשתנה לכן אפשר להוציא את כולם החוצה בגוש אחד.

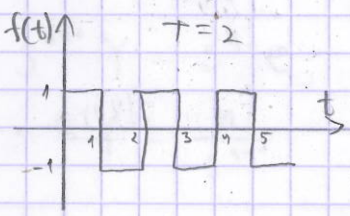
$$=\int_0^T e^{-st}f(t)dt\left(1+e^{-sT}+e^{-2sT}+\dots\right)=\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-st}f(t)dt$$

זה טור הנדסי

$$\boxed{L\{f(t)\}(s)=\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-st}f(t)dt}$$

נוסחא: $f(t)$ - מחזורית

נחשב טרנספורם לפלס של גל מרובע:



$$L\{f(t)\}=\frac{1}{1-e^{-st}}\left[\int_0^1 e^{-st}dt+\int_1^2 e^{-st}(-1)dt\right]=$$

$$=\frac{1}{1-e^{-st}}\left[\frac{e^{-st}}{-s}\Big|_0^1+\frac{e^{-st}}{s}\Big|_1^2\right]=$$

$$=\frac{1}{1-e^{-st}}\left[\frac{e^{-s}}{-s}-\frac{1}{-s}+\frac{e^{-2s}}{+s}-\frac{e^{-s}}{+s}\right]=\frac{1-2e^{-s}+e^{-2s}}{s(1-e^{-st})}=\frac{1(1-e^{-s})^2}{s(1-e^{-s})(1+e^{-s})}=\frac{1-e^{-}}{s(1+e}$$