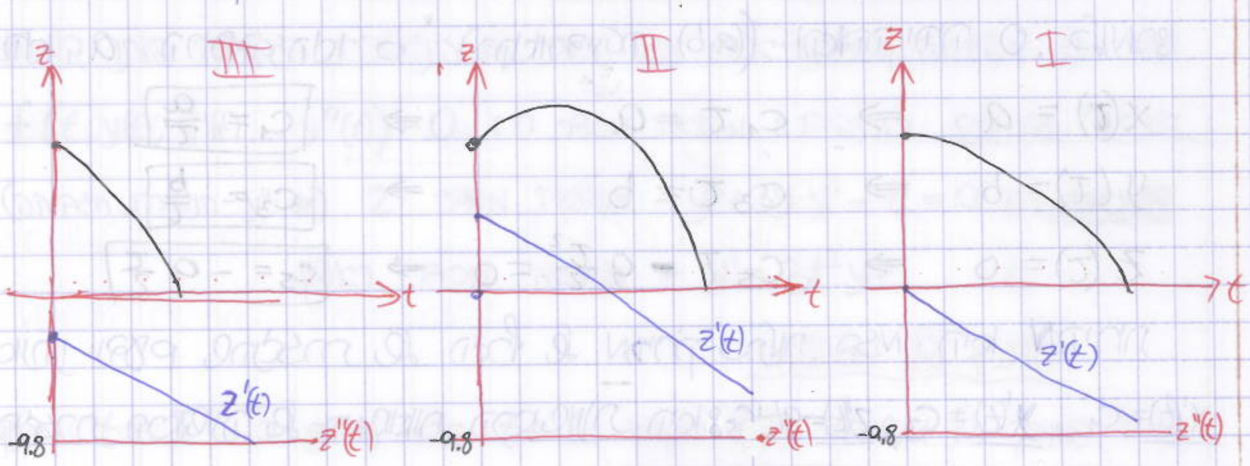
ערכו ניסוי ובו זרקו חפץ מגובה מסוים וכל פעם בדקו את הגרף.




ניוטון גילה שהנגזרת השניה של הפונקציות היתה g ($9.8\frac{m}{s^2}$). כדי לקבל את הפונקציה המקורית, הוא השתמש באינטגרלים:

$$z''(t) = -g \qquad (z'(t))' = -g$$

$$z'(t) = \int -g\, dt = -gt + c_1$$

$$z(t) = \int(-gt+c_1)\, dt = \underline{\frac{-gt^2}{2} + c_1 t + c_2}$$ - (שזו למעשה המשוואה של המרחק)

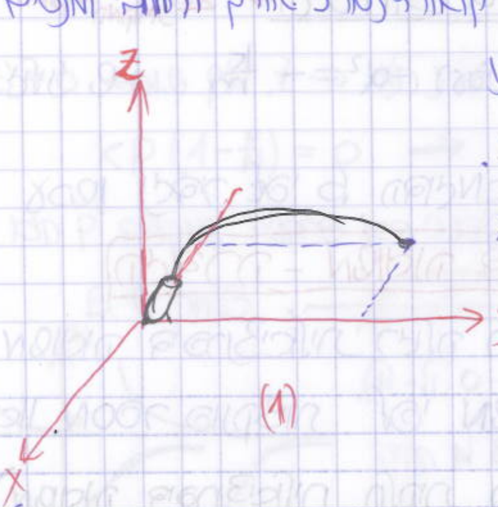
המשוואה שקיבלנו היא משוואה דיפרנציאלית. כפי שלמדנו באלגברה לינארית, יש למשוואה כזו אינסוף פתרונות (כי יש משתנה חופשי), אח"כ המערכת ההומוגנית. נניח ש $g=0$. אז:

$$\underline{z''(t)}=0 \Rightarrow \underline{z'(t)}=c_1 t \Rightarrow \underline{z(t)}=c_1 t + c_2$$

ה- $z(t)$ הוא אוסף הפתרונות, והוא נותנת מישור ( $c_1t$ - קו ישר עם שיפוע, $c_2$ - קו ישר בלי שיפוע $= c_2\cdot 1$). אם כן, יוצא שהמשוואה הדיפרנציאלית שקיבלנו היא מישור (שיש לו אינסוף פתרונות) בתוספת נקודת הצבה שהיא $\frac{gt^2}{2}$.

**דוגמא 2**

עושים ניסוי כדי לבדוק כיוון של תותח. מקבלים קואורדינטות אורך ורוחב ומנסים שהפגז יגיע ליעדו. הציור יראה כך (1). יש לנו




(1)

3 משוואות: גובה - $z(t)$ אורך - $y(t)$ רוחב - $x(t)$.

נבצע את אותה פעולה כמו קודם: $x''(t)=y''(t)=z''(t)=0$

קיבלנו:

$$x(t) = c_1 t + c_2$$

$$y(t) = c_3 t + c_4$$

$$z(t) = c_5 t + c_6$$

מצב ההתחלה, התותח בראשית הצירים (אורך, רוחב וגובה הם 0 $(x(0)=y(0)=z(0)=0)$

ולכן נקבל (כמו מקודם) $c_2=c_4=c_6=0$.

בזמן הפגיעה (נסמן כ- $\tau$) ~~הנקודה~~ הכדור נוחת במיקום הסופי ולכן, האורך הוא $a$ והרוחב הוא $b$ (הקואורדינטה $(a,b)$) והגובה יהיה 0. כלומר:

$$x(\tau)=a \Rightarrow c_1\tau=a \Rightarrow \boxed{c_1=\frac{a}{\tau}}$$

$$y(\tau)=b \Rightarrow c_3\tau=b \Rightarrow \boxed{c_3=\frac{b}{\tau}}$$

$$z(\tau)=0 \Rightarrow c_5\tau-g\frac{\tau^2}{2}=0 \Rightarrow \boxed{c_5=-g\frac{\tau}{2}}$$

אנחנו יודעים שהנגזרת של הגרף של מרחק כתלות בזמן היא מהירות.

הנגזרת הראשונה של המשוואות הראשונות היא $x'(t)=c_1$ , $y'(t)=c_3$ , $z'(t)=-gt+c_5$

המהירות $V_0$ ברגע יציאת הכדור היא השקול של שלושת הרכיבים, ולכן המשוואה למציאת $V_0$ היא לפי משפט פיתגורס: $V_0^2=(x'(0))^2+(y'(0))^2+(z'(0))^2$

פתרון: $V_0^2=c_1^2+c_3^2+c_5^2 \Rightarrow \frac{a^2}{\tau^2}+\frac{b^2}{\tau^2}+\frac{g^2\tau^2}{4}=V_0^2 \Rightarrow$

$$\boxed{g^2\tau^4-4V_0^2\tau^2+4(a^2+b^2)=0}$$

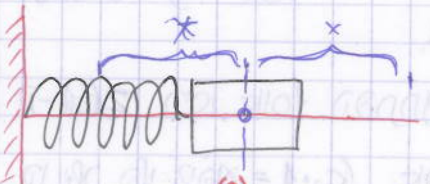
(אנו יודעים מהו $V_0$ כי נתון ומהו $g$)

את המשוואה שקיבלנו אפשר לפתור. (ע"י הצבת $\tau^2=t$). עבור זמן הפגיעה מסוים $\tau_1$, הפתרון יהיה:

$$c_1=\frac{a}{\tau_1} \quad c_3=\frac{b}{\tau_1} \quad c_5=-g\frac{\tau_1}{2}$$

**בעיה 3**

פריקת מתיחות של קפיץ. נתונה לנו הפונקציה של מרחק כתלות ב- $t$. (ציור (2)).


(2)

אנחנו יודעים שהכוח הפועל על הקפיץ הוא $F=-kx$

ע"פ חוק שני של ניוטון: $F=ma=-kx=ma$

המשוואה היא הנגזרת השניה ולכן: $mx''(t)=-kx(t)$,

כלומר: המשוואה תהיה. $x''(t)=-\frac{k}{m}x(t)$. כיוון שזו תנועה מחזורית, הגרף הוא של sin. נמצא נגזרת שניה:

$$x(t)=\sin\alpha t$$

$$x'(t)=\alpha\cos\alpha t \Rightarrow x''(t)=-\alpha^2\sin\alpha t \rightarrow x(t)$$ הפונקציה המקורית

נגיע ל: $-\alpha^2=-\frac{k}{m}$ (עפ"י המשוואה שלמעלה). ולכן הקבוע יהיה $\boxed{\alpha=\sqrt{\frac{k}{m}}}$

עכשיו נסביר לפי כל המשוואות הללו מהי משוואה דיפרנציאלית.

**הגדרה - משוואה דיפרנציאלית רגילה**

משוואה דיפרנציאלית רגילה היא משוואה המכילה נגזרות של פונקציה אחת או מספר פונקציות לפי משתנה אחד.

(משוואה דיפרנציאלית חלקית היא משוואה המכילה נגזרות חלקיות של פונקציה אחת או מספר פונקציות לפי מספר משתנים.)

# סדר של משוואה דיפרנציאלית

סדר של משוואה דיפרנציאלית הוא הסדר של הנגזרת הגבוהה ביותר במשוואה.

בצורה פורמלית כותבים: משוואה מסדר n: $f(t, y(t), y'(t) \dots y^n(t)) = 0$ (I)

דוגמאות: (1) $y''+3y\cdot y'-t=0$ - משוואה מסדר 2 (כי "y" - הנגזרת הגבוהה).

(2) $y'=3t^2y^3$ - משוואה מסדר ראשון.

## פתרון של משוואה

$Y(t)$ פתרון של משוואה (I) בקטע I אם עבור כל $t \in I$ מתקיים:

$\boxed{f(t, Y(t), Y'(t) \dots Y^n(t)) = 0}$.

פתרון כללי - תיאור של כל הפתרונות האפשריים של המשוואה.

## פתרון איכותי

### המשוואה הלוגיסטית

(דוגמא - קצב גידול אוכלוסיה). המשוואה שנבנה מבוססת על שתי הנחות:

(1) אם האוכלוסיה קטנה, אזי קצב הגידול הוא פרופורציוני לגודל האוכלוסיה.

(2) אם האוכלוסיה גדולה מדי והסביבה לא יכולה לספק את הנדרש, אזי האוכלוסיה מתמעטת - קצב גידול שלילי.

נבנה את המודל. $p(t)$-גודל אוכלוסיה בזמן $t$. לפי ההנחות:

(1) אם האוכלוסיה קטנה ($p$ קטן) - $p'(t) = k\cdot p(t)$

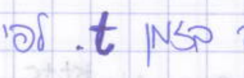
(2) לאחר גודל קריטי $N$ - $p'(t) = kp(1-\frac{p}{N})$ *

* הסבר: כאשר האוכלוסיה מגיע לגודל מקסימלי $N$ המשוואה מתאפסת ולכן לא תהיה גדילה, כאשר $P$ יעבור את הגודל $N$ המשוואה תהיה שלילית ולכן קצב הגידול יהיה שלילי.

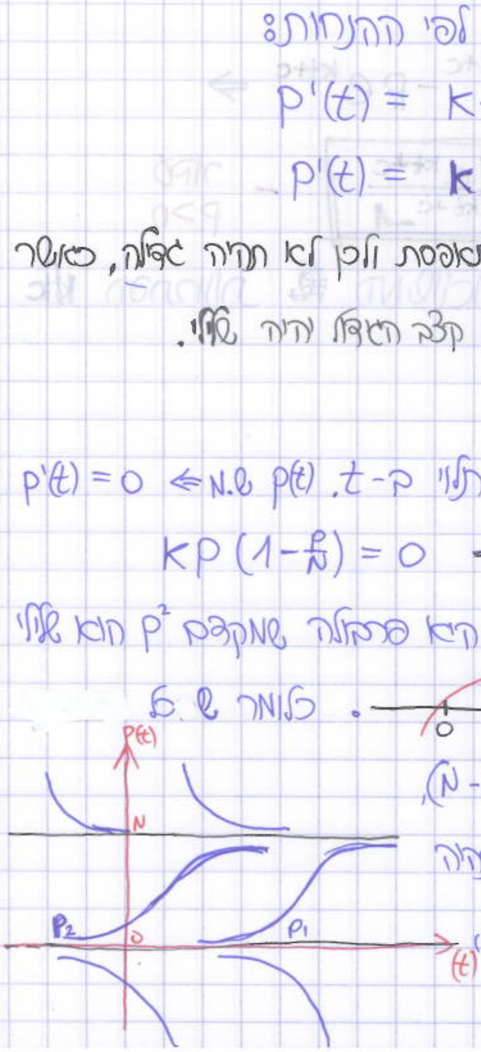
### פתרון שיווי משקל

פתרון שיווי משקל של משוואה הוא פתרון קבוע-בלתי תלוי ב-$t$. $p(t)$ ש.מ $\Leftarrow p'(t)=0$

$$kp(1-\frac{p}{N}) = 0 \Rightarrow p_1 = 0 \qquad p_2 = N$$

נסתכל ראשית על הציר של $p$ בין $N \to 0$. המשוואה היא פרבולה שמקדם $p^2$ הוא שלילי ולכן היא בוכה. הציר ייראה כך: 

. כלומר ש.מ




בטווח הזה יהיו בעליה (כאשר יש אסימפטוטה ל-0 ול-$N$), ובטווחים האחרים הפונקציות בירידה (כאשר מעל $N$ תהיה אסימפטוטה ל-$N$). במקרה שלנו אין פתרונות מתחת לאפס, אך במתמטיקה כן קיימים פתרונות/משוואות.

# משוואה פרידה

כאשר נתונה המשוואה: $\frac{dy}{dt}=f(y)\cdot g(t)$. נפריד בין המקרים:

$$\frac{dy}{f(y)}=g(t)\,dt = \boxed{\int\frac{dy}{f(y)}=\int g(t)\,dt} \to$$ I) משוואה פרידה.

נחזור למשוואה הקודמת. $p'(t)=kp(1-\frac{p}{N}) \Rightarrow \frac{dp}{dt}=kp(1-\frac{p}{N})$

זו משוואה פרידה. הפתרון יהיה:

$$\int\frac{dp}{p(1-\frac{p}{N})}=kt+c$$

נפרק את האינטגרל לפי טכניקת הפירוק:

$$\frac{1}{p(1-\frac{p}{N})}=\frac{a}{p}+\frac{b}{1-\frac{p}{N}}=\frac{a-a\frac{p}{N}+bp}{p(1-\frac{p}{N})} \Rightarrow (1)\ \boxed{a=1} \quad (2)\ -\frac{a}{N}+b=0 \Rightarrow \boxed{b=\frac{1}{N}}$$

$$\Rightarrow \int\frac{dp}{p}+\frac{1}{N}\int\frac{dp}{1-\frac{p}{N}}=kt+c \Rightarrow \ln|p|+\frac{1}{N}\int\frac{dp}{\frac{N-p}{N}}=kt+c \Rightarrow$$

$$\ln|p|+\int\frac{dp}{N-p}=kt+c \Rightarrow \ln|p|-\ln|N-p|=kt+c \Rightarrow$$

$$\ln\left|\frac{p}{N-p}\right|=kt+c \xrightarrow{\boxed{\text{עבור } p<N}} \frac{p}{N-p}=e^{kt+c} \Rightarrow p=Ne^{kt+c}-pe^{kt+c} \Rightarrow$$

$$p(1+e^{kt+c})=Ne^{kt+c} \Rightarrow \boxed{p=\frac{Ne^{kt+c}}{1+e^{kt+c}}}$$ - עבור $p<N$

$\boxed{\text{עבור } p>N}$ $$\Rightarrow \frac{-p}{N-p}=e^{kt+c} \Rightarrow -p=Ne^{kt+c}-pe^{kt+c} \Rightarrow$$

$$p(e^{kt+c}-1)=Ne^{kt+c} \Rightarrow \boxed{p=\frac{Ne^{kt+c}}{e^{kt+c}-1}}$$ - עבור $p>n$

אלו הפתרונות של המשוואה הלוגיסטית.