בס"ד

מערכות משוואות דיפרנציאליות

1. פתרון כללי של מערכת משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון.

מערכת משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון ניתן לכתוב כ :

$$(1)\qquad \frac{d\vec{x}(\tau)}{d\tau} = A\vec{x}(\tau)$$

כאשר A מטריצה $n\times n$ ו $\vec{x}(\tau)=\begin{pmatrix} x^1(\tau)\\ x^2(\tau)\\ \vdots \\ x^n(\tau)\end{pmatrix}$ וקטור פונקציה בלתי ידועה.

צריך להוסיף תנאי התחלה $\vec{x}(0)=\begin{pmatrix} x^1(0)\\ x^2(0)\\ \vdots \\ x^n(0)\end{pmatrix}\qquad(2)$.

<u>הגדרה:</u> יהי A מטריצה $n\times n$. נגדיר אקספוננט של המטריצה על ידי טור טילור

$$(0)\qquad \exp A = e^A = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}A^n$$

<u>טענה 1</u> פתרון של מערכת משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון (1) עם תנאי התחלה (2) שווה :

$$(3)\qquad \vec{x}(\tau) = \exp(A\tau)\vec{x}(0)$$

<u>הוכחה:</u>

לפי הגדת האקספוננט נקבל :

$$\frac{d\vec{x}(\tau)}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(A\tau)^n\vec{x}(0)\right) = \frac{d}{d\tau}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\tau^n}{n!}A^n\vec{x}(0)\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\tau^{n-1}}{n!}A^n\vec{x}(0)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau^{n-1}}{(n-1)!}A^n\vec{x}(0) = A\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau^{n-1}}{(n-1)!}A^{n-1}\vec{x}(0) = A\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\tau^n}{n!}A^n\vec{x}(0) = A\vec{x}(\tau)$$

לכן פתרון (3) מקיים משוואה (1)

היות $e^{A\cdot 0} = I$, לכן פתרון (3) מקיים (2) ∎

דרך אחרת לפתרון מערכת משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון (1) היא בעזרת טענה הבאה :

<u>טענה 2</u> עם $\vec{v}$ וקטור עצמי המתאים לערך עצמי λ של אופרטור A , אזי וקטור פונקציה $\vec{x}(\tau) = e^{\lambda\tau}\vec{v}$ מהווה פתרון של מערכת משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון (1)

2. תנוע של מטען חשמלי בשדה אלמ"ג קבוע ע"פ כוח לורנץ

המיקום במכאניקה הקלאסית היה מוגדר כווקטור תלת מימדי. באנלוגיה ביחסות נגדיר את המיקום כווקטור ארבע מימדי. ז"א:

$$x^{\mu} = \begin{pmatrix} ct & x & y & z \end{pmatrix}$$

הגדרנו את המיקום של החלקיק כעת נרצה להגדיר את המהירות שלו.

אי אפשר להרחיב בפשטות את המהירות לארבע מימדים. הרי יש לנו חופש בחירה של רכיב הזמני של המהירות. המהירות הקלאסית הוגדרה כנגזרת ע"פ הזמן של המיקום. כאן הגדרנו אנלוגיה יחסותית לזמן שהוא הזמן העצמי לכן <u>הארבע מהירות</u> תוגדר להיות:

$$\vec{u} = u^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{d\tau}$$

יהי $\vec{E} = (E_1, E_2, E_3)$ הכוח החשמלי ו- $\vec{B} = (B_1, B_2, B_3)$ כוח המגנטי של שדה האלמ"ג קבוע.

כדי לתאר תנוע של מטען q בשדה זה נגדיר אופרטור הכוח:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

ומשוואת התנועה של מטען בשדה זה היא:

$$m\frac{d\vec{u}(\tau)}{d\tau} = qF\vec{u}(\tau)$$

זה אומר שהארבע מהירות של המטען תהיה פתרון של מערכת משוואות דיפרנציאליות ליניאריות מסדר ראשון:

$$(4) \quad \frac{d\vec{u}(\tau)}{d\tau} = \frac{q}{m}\begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}\vec{u}(\tau)$$

עם תנאי התחלה של $\vec{u}(0)$.

לפי (3) פתרון של משוואה זו הוא: $\vec{u}(\tau) = \exp\left(F\frac{q}{m}\tau\right)\vec{u}(0) \quad (5)$.

נעבור למקרים פרטיים.

3. תנוע של מטען חשמלי בשדה חשמלי בכיוון x.

עבור שדה חשמלי בכיוון ציר x אופרטור הכוח הוא: $F=\begin{pmatrix}0&E&0&0\\E&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$. לכן לפי (4)

משוואת תנוע של המטען היא: $\begin{cases}\dfrac{d}{d\tau}\begin{pmatrix}u^0(\tau)\\u^1(\tau)\end{pmatrix}=\dfrac{q}{m}\begin{pmatrix}0&E\\E&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u^0(\tau)\\u^1(\tau)\end{pmatrix}\\ \dfrac{du^2(\tau)}{d\tau}=0,\quad \dfrac{du^3(\tau)}{d\tau}=0\end{cases}$.

ולפי (5) נקבל $u^3(\tau)=u^3(0)$, $u^2(\tau)=u^2(0)$, $\begin{pmatrix}u^0(\tau)\\u^1(\tau)\end{pmatrix}=\exp\left(\begin{pmatrix}0&E\\E&0\end{pmatrix}\dfrac{q}{m}\tau\right)\begin{pmatrix}u^0(0)\\u^1(0)\end{pmatrix}$,

נסמן $\alpha=\dfrac{Eq\tau}{m}$. היות $\begin{pmatrix}0&\alpha\\\alpha&0\end{pmatrix}^2=\alpha^2\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\alpha^2 I$, לפי (0) נקבל

$$(6)\quad \exp\left(\begin{pmatrix}0&E\\E&0\end{pmatrix}\frac{q}{m}\tau\right)=\exp\begin{pmatrix}0&\alpha\\\alpha&0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1+\frac{\alpha^2}{2!}+\frac{\alpha^4}{4!}+\cdots & \alpha+\frac{\alpha^3}{3!}+\frac{\alpha^5}{5!}+\cdots\\ \alpha+\frac{\alpha^3}{3!}+\frac{\alpha^5}{5!}+\cdots & 1+\frac{\alpha^2}{2!}+\frac{\alpha^4}{4!}+\cdots\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cosh\frac{Eq\tau}{m} & \sinh\frac{Eq\tau}{m}\\ \sinh\frac{Eq\tau}{m} & \cosh\frac{Eq\tau}{m}\end{pmatrix}.$$

לכן

$$u^0(\tau)=u^0(0)\cosh\frac{Eq\tau}{m}+u^1(0)\sinh\frac{Eq\tau}{m}$$
$$u^1(\tau)=u^0(0)\sinh\frac{Eq\tau}{m}+u^1(0)\cosh\frac{Eq\tau}{m}$$

עבור מהירות התחלתית אפס, המתאימה ל $\vec{u}(0)=(1\quad 0\quad 0\quad 0)$ נקבל

$$(7)\quad u^0(\tau)=\cosh\frac{Eq\tau}{m},\quad u^1(\tau)=\sinh\frac{Eq\tau}{m},\quad u^2(\tau)=0,\quad u^3(\tau)=0\ .$$

ניתן לפתור בעיה זו גם בעזרת **טענה 2**.

למטריצה $\dfrac{q}{m}\begin{pmatrix}0&E\\E&0\end{pmatrix}$ ישנם שני ערכים עצמיים $\lambda_1=-\dfrac{qE}{m}$ ו $\lambda_2=\dfrac{qE}{m}$ המתאימים לוקטורים

עצמיים: $\vec{v}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ ו- $\vec{v}_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ בהתאמה. לכן לפי טענה 2 פתרון כללי הוא

$\begin{pmatrix} u^0(\tau) \\ u^1(\tau) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-\frac{qE}{m}\tau} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{\frac{qE}{m}\tau}$ שנותן עבור תנאי התחלה הנ"ל פתרון (7).

4. תנוע של מטען חשמלי בשדה מגנטי בכיוון x.

עבור שדה מגנטי בכיוון ציר x אופרטור הכוח הוא: $F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B \\ 0 & 0 & -B & 0 \end{pmatrix}$. לכן לפי (4)

משוואת תנוע של המטען היא: $\begin{cases} \dfrac{du^0(\tau)}{d\tau} = 0, \quad \dfrac{du^1(\tau)}{d\tau} = 0 \\ \dfrac{d}{d\tau}\begin{pmatrix} u^2(\tau) \\ u^3(\tau) \end{pmatrix} = \dfrac{q}{m}\begin{pmatrix} 0 & B \\ -B & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u^2(\tau) \\ u^3(\tau) \end{pmatrix} \end{cases}$.

ולפי (5) נקבל $u^0(\tau) = u^0(0)$, $u^1(\tau) = u^1(0)$, $\begin{pmatrix} u^2(\tau) \\ u^3(\tau) \end{pmatrix} = \exp\left(\begin{pmatrix} 0 & B \\ -B & 0 \end{pmatrix}\dfrac{q}{m}\tau\right)\begin{pmatrix} u^2(0) \\ u^3(0) \end{pmatrix}$,

נסמן $\beta = \dfrac{Bq\tau}{m}$. היות $\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}^2 = -\beta^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -\beta^2 I$, לפי (0) נקבל

$$\exp\left(\begin{pmatrix} 0 & B \\ -B & 0 \end{pmatrix}\frac{q}{m}\tau\right) = \exp\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix} = \quad (8)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - \dfrac{\beta^2}{2!} + \dfrac{\beta^4}{4!} - \cdots & \beta - \dfrac{\beta^3}{3!} + \dfrac{\beta^5}{5!} - \cdots \\ -\beta + \dfrac{\beta^3}{3!} - \dfrac{\beta^5}{5!} + \cdots & 1 - \dfrac{\beta^2}{2!} + \dfrac{\beta^4}{4!} - \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{Bq\tau}{m} & \sin\dfrac{Bq\tau}{m} \\ -\sin\dfrac{Bq\tau}{m} & \cos\dfrac{Bq\tau}{m} \end{pmatrix}.$$

לכן

$$u^2(\tau) = u^2(0)\cos\frac{Bq\tau}{m} + u^3(0)\sin\frac{Bq\tau}{m}$$
$$u^3(\tau) = -u^2(0)\sin\frac{Bq\tau}{m} + u^3(0)\cos\frac{Bq\tau}{m}$$

עבור מהירות התחלתית אפס, המתאימה ל $\vec{u}(0) = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$ נקבל

$$u^0(\tau) = 0, \quad u^1(\tau) = 0, \quad u^3(\tau) = -\sin\frac{Bq\tau}{m}, \quad u^2(\tau) = \cos\frac{Bq\tau}{m} \quad (9).$$

ניתן לפתור בעיה זו גם בעזרת **טענה 2**.

למטריצה $\frac{q}{m}\begin{pmatrix} 0 & B \\ -B & 0 \end{pmatrix}$ ישנם שני ערכים עצמיים $\lambda_1 = -i\frac{qB}{m}$ ו $\lambda_2 = i\frac{qB}{m}$ המתאימים לוקטורים

עצמיים : $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ ו- $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ בהתאמה. לכן לפי טענה 2 פתרון כללי הוא

$\begin{pmatrix} u^2(\tau) \\ u^3(\tau) \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{-i\frac{qB}{m}\tau} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{i\frac{qB}{m}\tau}$ שנותן עבור תנאי התחלה הנ"ל פתרון (7) .

5. תנוע של מטען חשמלי בשדה חשמלי בכיוון x ושדה מגנטי בכיוון z .

עבור שדה חשמלי E בכיוון ציר x ושדה מגנטי $B = E$ בכיוון ציר z אופרטור הכוח הוא :

$F = \begin{pmatrix} 0 & E & 0 & 0 \\ E & 0 & E & 0 \\ 0 & -E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. נשתמש בפתרון (5) למשוואת תנוע (4) של המטען. על מנת לחשב

את $\exp\left(F\frac{q}{m}\tau\right)$, נסמן $\alpha = E\frac{q}{m}\tau$ ו $A = F\frac{q}{m}\tau$ ונחשב

$$A^2 = \alpha^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A^3 = 0$$

לכן , לפי (0)

$$\exp A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\alpha^2}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\frac{\alpha^2}{2} & \alpha & \frac{\alpha^2}{2} & 0 \\ \alpha & 1 & \alpha & 0 \\ -\frac{\alpha^2}{2} & -\alpha & 1-\frac{\alpha^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ופתרון של משוואת תנוע (4)

$$u^0(\tau) = u^0(0)\left(1 + \frac{\alpha^2}{2}\right) + u^1(0)\alpha\tau + u^2(0)\frac{\alpha^2}{2}$$

$$u^1(\tau) = u^0(0)\alpha + u^1(0) + \alpha u^2(0)$$

$$u^2(\tau) = -u^0(0)\frac{\alpha^2}{2} - u^1(0)\alpha + u^2(0)\left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right)$$

$$u^3(\tau) = u^3(0)$$

כאשר $\alpha = E\frac{q}{m}\tau$.