דוגמא

נתונה המערכת: $\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -x_1 \end{cases}$ ונתונים תנאי התחלה: $\begin{cases} x_1(0) = 2 \\ x_2(0) = 3 \end{cases}$

נגדיר: $y = x_1$, $y' = x_2$ נקבל ש: $y'' = -y$. המטריצה: $\bar{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \bar{x}$

כמו קודם נמצא את A^2: $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$

$$e^{At} = I + At - I\frac{t^2}{2!} - A\frac{t^3}{3!} + I\frac{t^4}{4!} + I\frac{t^5}{5!} + \dots = \cos t\, I + \sin t \cdot A$$

ולכן: $x(t) = e^{tA} x_0 = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

ופתרון: $\boxed{x_1(t) = 2\cos t - 3\sin t}$, $\boxed{x_2(t) = -2\sin t - 3\cos t}$

משפט הקיום והיחידות של פתרונות המערכת

נניח שהפונקציות: $f_1, f_2 \dots f_n$ ונגזרות חלקיות שלהם: $\frac{\partial f_n}{\partial x_n} \dots \frac{\partial f_n}{\partial x_1}, \dots \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \dots \frac{\partial f_1}{\partial x_1}$ רציפות בתחום המכיל נקודה $(t_0, y_1, y_2 \dots y_n)$ אזי למערכת:

$\begin{cases} x_1' = f_1(t, x_1, \dots x_n) \\ \vdots \\ x_n' = f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{cases}$ המקיימת תנאי ההתחלה: $\begin{cases} x_1(t_0) = y_1 \\ \vdots \\ x_n(t_0) = y_n \end{cases}$ יש פתרון יחיד בקטע

בקטע זה: $\begin{cases} x_1 = f_1(t) \\ \vdots \\ x_n = f_n(t) \end{cases}$ בקטע המכיל את t_0.

דוגמא

נתונים $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$: $\begin{cases} x_1' = 3x_1 + 4x_1x_3 - x_2^2 \\ x_2' = t + 3x_1x_3 - x_1x_2 \\ x_3' = x_1 + 4x_2 \end{cases}$ תנאי ההתחלה: $\begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 3 \\ x_3(0) = 4 \end{cases}$

הפונקציות רציפות וגזירות (ונגזרות): $\dots$ $\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 3 + 4x_3\right)$ לכן קיים פתרון יחיד.

מערכות משוואות ליניאריות הומוגניות - מקדמים קבועים

מערכת נוסח: $\bar{X}'=A\bar{X}$.

$$\begin{cases} X_1'(t)=a_{11}X_1+a_{12}X_2+\dots+a_{1n}X_n \\ \vdots \\ X_n'(t)=a_{n1}X_1+a_{n2}X_2+\dots+a_{nn}X_n \end{cases}$$

האם יש פתרונות של קיום ישרים דרך <u>הראשית</u>?

פתרונות כאלו הם מהסוג $\bar{x}(t)=\bar{v}\,g(t)$ ($g(t)$ - פונקציה המתארת סקלר. $\bar{v}$ - וקטור).

נציב את הביטוי ($\bar{v}$ הוא וקטור, נשאר כמו שהוא):

$$\bar{v}\,g'(t)=\overset{\text{מטריצת המקדמים}}{\underline{A}}\,\bar{v}\,g(t) \Rightarrow \bar{v}\,g'(t)=g(t)A\bar{v} \Rightarrow A\bar{v}=\frac{g'(t)}{g(t)}\bar{v}$$

קיבלנו ש $\bar{v}$ וקטור עצמי המתאים לערך עצמי λ כך ש:

$$\lambda=\frac{g'(t)}{g(t)} \Rightarrow g'(t)=\lambda g(t) \xrightarrow{\text{כמו שמצאנו}} \underline{g(t)=e^{\lambda t}}$$

עקרון ליניאריות

פתרון כללי של מערכת (ה) משוואות דיפרנציאליות ליניאריות הוא צ.ל של n פתרונות בלתי-תלויים של המערכת:

$$X(t)=c_1\bar{X}_1(t)+c_2\bar{X}_2(t)+\dots+c_n\bar{X}_n(t)$$

משפט

אם V וקטור עצמי של A המתאים לערך עצמי λ אזי: $\bar{X}(t)=e^{\lambda t}\bar{V}$ פתרון של $\bar{X}'=AX$.

נניח למערכת $\bar{X}'=A\bar{X}$ ישנם n ערכים עצמיים שונים $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ של מטריצה A המתאימים לוקטורים $\bar{V}_1,\bar{V}_2,\dots,\bar{V}_n$; אזי פתרון כללי של המערכת:

$$\boxed{\bar{X}(t)=c_1e^{\lambda_1 t}\bar{V}_1+c_2e^{\lambda_2 t}\bar{V}_2+\dots+c_ne^{\lambda_n t}\bar{V}_n}$$

דוגמא

$A=\begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ של המערכת $\bar{X}'=AX$. $\bar{X}(0)=(1,-1,0)$.

נפתור כמו בליניארית: $|A-\lambda I|=0$ ונקבל: $(\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda-3)$

<u>עבור $\lambda_1=1$</u>: נקבל וקטור עצמי $\bar{V}_1=(1,1,1)$.

<u>עבור $\lambda_2=2$</u>: נקבל: $\bar{V}_2=(1,1,-1)$.

<u>עבור $\lambda_3=3$</u>: נקבל: $\bar{V}_3=(1,-1,1)$.

הפתרון הכללי: $\bar{X}(t)=c_1e^{t}(1,1,1)+c_2e^{2t}(1,1,-1)+c_3e^{3t}(1,-1,1)$

נציב ת.ה ונקבל: $c_1(1,1,1)+c_2(1,1,-1)+c_3(1,-1,1)=(1,-1,0)$

לפי ליניארית: $c_1=-\frac{1}{2},\ c_2=\frac{1}{2},\ c_3=1$. הפתרון: $\boxed{X(t)=-\frac{1}{2}e^{t}(1,1,1)+\frac{1}{2}e^{2t}(1,1,-1)+e^{3t}(1,-1,1)}$

ערכים עצמיים מרוכבים

כאשר: $\lambda=\alpha+\beta i$ פתרון של המשוואה $|A-\lambda I|=0$, אזי גם:

$\bar{\lambda}=\alpha-\beta i$ פתרון של המשוואה.

יהי $\bar{v}$ וקטור עצמי המתאים לערך λ המקיים $A\bar{v}=\lambda\bar{v}$, הקואורדינטות של וקטור $\bar{v}$ הם מספרים מרוכבים ($v=a+bi$). הוקטור: $v^*=a-bi$

הוא וקטור עצמי של A המתאים לערך $\bar{\lambda}$

$$\bar{X}_1(t)=e^{\lambda t}\bar{V}=\left(e^{\alpha t}\cos(\beta t)+ie^{\alpha t}\sin(\beta t)\right)(a+bi)=\left(e^{\alpha t}\cos(\beta t)\bar{a}-e^{\alpha t}\sin(\beta t)\bar{b}\right.$$
$$\left.+i\left(e^{\alpha t}\sin(\beta t)\bar{a}+e^{\alpha t}\cos(\beta t)\bar{b}\right)\right)$$

$$\bar{X}_2(t)=e^{\bar{\lambda}t}\bar{V}^*=\left(e^{\alpha t}\cos\beta t\,\bar{a}-e^{\alpha t}\sin\beta t\,\bar{b}\right)-i\left(e^{\alpha x}\sin\beta t\,\bar{a}+e^{\alpha t}\cos\beta t\,\bar{b}\right)$$

מקבלים שני פתרונות ממשיים: (1) $e^{\alpha t}\left(\bar{a}\cos(\beta t)+\bar{b}\sin(\beta t)\right)$, (2) $e^{\alpha t}\left(b\cos(\beta t)+\bar{a}\sin(\beta t)\right)$

תרגיל

עבור מערכת $\bar{x}'=A\bar{x}$: $A=\begin{pmatrix}4&-2\\5&2\end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix}4-\lambda&-2\\5&2-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-6\lambda+18=0\rightarrow\lambda_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{36-72}}{2}=\frac{6\pm 6i}{2}=\underline{3\pm 3i}$$

עבור $\lambda=3+3i$:

$$\begin{pmatrix}4-3-3i&-2\\5&2-3-3i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=0\Rightarrow\begin{cases}(1-3i)a-2b=0 & (1)\\5a-(1+3i)b=0 & (2)\end{cases}$$

המשוואות תלויות לינארית ולכן נקח את (1) ונציב לפי משהו ב-a:

$$(1-3i)a=2b\xrightarrow{a=2}1-3i\Rightarrow\underline{\bar{X}_1(t)=\begin{pmatrix}2\\1-3i\end{pmatrix}e^{(3+3i)t}}$$

נפתח $(e^{\alpha i}=\sin\alpha t+\cos\alpha t)$:

$$X_1(t)=\begin{pmatrix}2\\1-3i\end{pmatrix}e^{3t}(\cos 3t+i\sin 3t)$$

כאשר הוקטורים a,b הם: $\bar{a}=(2,1)$ $\quad\bar{b}=(0,-3)$

הפתרון:

$$e^{3t}\begin{pmatrix}2\cos 3t+2i\sin 3t\\\cos 3t+i\sin 3t-3i\cos 3t+3\sin 3t\end{pmatrix}=$$

$$\bar{X}(t)=c_1e^{3t}\begin{pmatrix}2\cos 3t\\\cos 3t+3\sin 3t\end{pmatrix}+c_2e^{3t}\begin{pmatrix}2\sin 3t\\\sin 3t-3\cos 3t\end{pmatrix}$$

נציב ת.ה:

$$\bar{X}(0)=c_1\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{matrix}c_1=\frac{1}{2}\\c_2=-\frac{1}{2}\end{matrix}$$

הפתרון:

$$\bar{X}(t)=\frac{e^{3t}}{2}\begin{pmatrix}2\cos 3t\\\cos 3t+3\sin 3t\end{pmatrix}+\frac{e^{3t}}{2}\begin{pmatrix}2\sin 3t\\\sin 3t-3\cos 3t\end{pmatrix}=e^{3t}\begin{pmatrix}\cos 3t-\sin 3t\\2\cos 3t+\sin 3t\end{pmatrix}$$

הגדרה

תהי A מטריצה ריבועית. λ ערך עצמי של A. אם קיים וקטור $u\neq 0$:
K חיובי שלם כך ש: $(A-\lambda I)^{k}\bar{u}=0$, אזי נאמר ~~שלם~~ של $\bar{u}$ יש וקטור
עצמי מוכלל של A עבור ערך עצמי λ.

דוגמא

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&0\\0&1&1\end{pmatrix}\qquad |A-\lambda I|=\begin{vmatrix}1-\lambda&0&0\\1&2-\lambda&0\\0&1&1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^2(2-\lambda)$$

עבור $\lambda=2$:

$$\begin{pmatrix}-1&0&0\\1&0&0\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{matrix}0\\0\\ \end{matrix}\Rightarrow\begin{cases}a=0\\b-c=0\Rightarrow b=c\end{cases}\Rightarrow \bar{V}_{\lambda=2}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

עבור $\lambda=1$:

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=0\Rightarrow\begin{cases}a+b=0\Rightarrow a=-b\\b=0\end{cases}\Rightarrow \bar{V}_{\lambda=1}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

חסר לנו וקטור. נבצע הכפלה של המטריצה בעצמה:

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=0\Rightarrow\begin{cases}a+b=0\\ c\text{-מה שרוצים}\end{cases}\Rightarrow \bar{V}'_{\lambda=1}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$