משד"פ לינאריות עם מקדמים קבועים מסדר n

מהצורה: $a_n y^{(n)'} + a_{n-1} y^{(n-1)'} + \dots + a_1 y' + a_0 y = g(x)$.

משפט

אם $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ הם פתרונות בת"ל של משוואה דיפרנציאלית לינארית הומוגנית $(a_n(x)\neq 0)$ מסדר n, אזי הפתרון הכללי של המשוואה הוא:

$$\boxed{y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x)}$$

הגדרה

ורונסקיאן - $y_1(x), \dots, y_n(x)$ פונקציות. הורונסקיאן הוא:

$$W(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & & & \\ y_1^{(n-1)'}(x) & y_2^{(n-1)'}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)'}(x) \end{vmatrix}$$

הדטרמיננטה של המערכת

טענה

אם $W[y_1, y_2 \dots y_n](x) \neq 0$ אפילו עבור איזשהו X אזי $y_1, y_2 \dots y_n$ בת"ל.

הוכחה

$$\begin{cases} c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) = 0 \\ c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x) + \dots + c_n y_n'(x) = 0 \\ \vdots \\ c_1 y_1^{(n-1)'}(x) + c_2 y_2^{(n-1)'}(x) + \dots + c_n y_n^{(n-1)'}(x) = 0 \end{cases}$$

$c_1, c_2, \dots c_n$ - משתנים.
מערכת הומוגנית של n משוואות עם n נעלמים.

פתרון יחיד למערכת כאשר $W\neq 0$ הוא $c_1=0, c_2=0, \dots, c_n=0$ (אם הדטרמיננטה שונה מ-0, אזי המטריצה היא הפיכה ⇔ שקולה למטריצת היחידה ⇒ בת"ל).

הוכחת המשפט

$y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x), y_{n+1}(x)$ - פתרונות של המשוואה.

$$W[y_1, y_2 \dots y_n, y_{n+1}](x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n & y_{n+1} \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' & y_{n+1}' \\ \vdots & & & & \\ y_1^{(n)'} & y_2^{(n)'} & \dots & y_n^{(n)'} & y_{n+1}^{(n)'} \end{vmatrix}$$ (ורונסקיאן)

נסמן: שורה ראשונה - $\overline{R_0}$ ... שורה אחרונה - $\overline{R_n}$.

נקבל: (לפי שורות) $a_n \overline{R_n} + a_{n-1} \overline{R_{n-1}} + \dots + a_0 \overline{R_0} = 0$, וכשניקח את העמודות גם נקבל: $a_n y_1^{(n)'} + a_{n-1} y^{(n-1)'} + \dots + a_0 y_0 = 0$, כלומר ש: $W\equiv 0$

(כי יש שורות אפסים/עמודות אפסים). לכן עמודה אחרונה - ניתן לכתוב כצ.ל. של הקודמים.

פתרון

$y^{(3)}-3y'+2y=0$. המשוואה האופיינית: $R^3-3R+2=0$

נוכל לראות ש: $R_1=1$ מקיים את המשוואה. נעשה חלוקת פולינומים ב $R-1$

ונקבל: $R^2+R-2=0$. הפתרונות של המשוואה הזו הן: $R_2=1$, $R_3=-2$.

(כיוון של $R=1$ יש ריבוי אלגברי 2 הוא יופיע פעמיים בפתרון). הפתרון הכללי יהיה:

$$\boxed{y(x)=c_1e^x+c_2xe^x+c_2x^2e^{-2x}}\ .$$