מערכת משוואות דיפרנציאליות מספר 1

נתונים $X_1(t), X_2(t)...X_n(t)$. המערכת היא הגדרת המשוואה של כל אחד מהם:

$$\frac{dX_1(t)}{dt} = f_1(t, X_1, X_2, \dots, X_n),\quad \frac{dX_2(t)}{dt} = f_2(t, X_1, X_2, \dots, X_n) \dots \frac{dX_n(t)}{dt} = f_n(t, X_1, \dots X_n)$$

פתרון שיווי משקל

הפתרון שבו כל הנגזרות יהיו 0, כלומר שישנה נקודה או אוסף נקודות שבהן המערכת נשארת באותו המצב (כלומר: למשל שבה המערכת לא תלוי, או הזמן לא עוצר).

כלומר:
$$\frac{dX_1(t)}{dt} = \frac{dX_2(t)}{dt} = \dots = \frac{dX_n(t)}{dt} = 0$$

$\boxed{\text{דוגמא 1 - מודל טורף - (נטרף)}}$

R - נטרפים (באלפי יחידות), F - טורפים (באלפי יחידות).

* הנחות: (1) הנטרף גדל באופן לא מוגבל. (*אם זה מוגבל לוגיסטית $R \to R(1-\frac{R}{K})$)

(2) הטורף תלוי בנטרף כדי לשרוד.

(3) קצב הטריפה תלוי בסבירות המפגש בין הטורף לנטרף.

(4) קצב הגידול של הטורף פרופורציוני לקצב הטריפה.

* משוואות הנטרף: $\frac{dR}{dt} = \underbrace{a}_{\text{מקדם גידול}}R^{*} - \underbrace{b}_{\text{מקדם טריפה}}RF$ (השינוי במס' הנטרפים כתלות בזמן)

* משוואות הטורף: $\frac{dF}{dt} = \underbrace{-cF}_{\text{מקדם תמותה (אם אין נטרפים)}} + \underbrace{dRF}_{\text{מקדם גידול עקב הטריפה}}$ (השינוי במס' הטורפים כתלות בזמן)

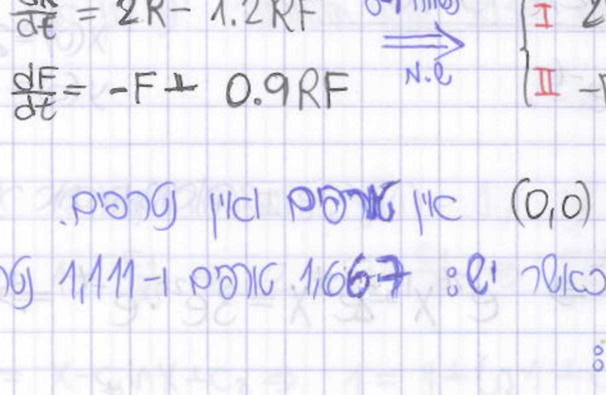
נבחר דוגמא מס"ית עם מספרים.

$$\begin{cases} \mathrm{I} & \frac{dR}{dt} = 2R - 1.2RF \\ \mathrm{II} & \frac{dF}{dt} = -F + 0.9RF \end{cases} \xrightarrow[N.E]{\text{נשווה ל-0}} \begin{cases} \mathrm{I} & 2R - 1.2RF = 0 \Rightarrow \\ \mathrm{II} & -F + 0.9RF = 0 \Rightarrow \end{cases} \boxed{\begin{matrix} R=0 \\ \Downarrow \\ F=0 \end{matrix}}, \boxed{\begin{matrix} F=1.67 \\ \Downarrow \\ R=1.1 \end{matrix}}$$

קיבלנו 2 אפשרויות של N.E: (1) (0,0) אין טורפים ואין נטרפים.

(2) כאשר יש: 1.667 טורפים ו-1.111 נטרפים.

אם נצייר את הגרפים שלהם נקבל:



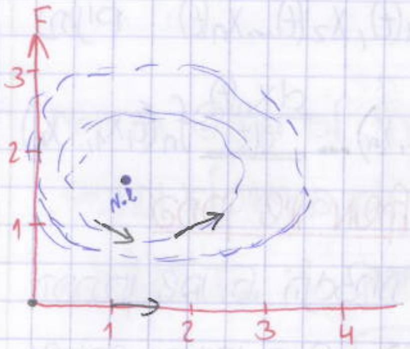
R(t) - נטרפים.

F(t) - טורפים.

מישור הפאזה

נסתכל על השינוי של F כתלות ב-R (שינוי בקצב).

נבדוק נקודות מסוימות במשוואות.



$\boxed{R=0\,,\ F=0} \rightarrow \frac{dR}{dt}=0\,,\ \frac{dF}{dt}=0 \rightarrow (0,0)$

$\boxed{R=1\,,\ F=0} \rightarrow \frac{dR}{dt}=2\,,\ \frac{dF}{dt}=0 \rightarrow (2,0)$

$\boxed{R=1\,,\ F=1} \Rightarrow \frac{dR}{dt}=0.8\quad \frac{dF}{dt}=-0.1 \rightarrow (0.8,-0.1)$

$\boxed{R=2\,,\ F=1} \Rightarrow \frac{dR}{dt}=1.6\quad \frac{dF}{dt}=0.8 \rightarrow (1.6,0.8)$

השיפועים ינועו סביב נקודת ש.מ

מערכות מוצמדות

מערכת משד"פ נקראת <u>מוצמדת</u> אם קצב השינוי של כל משתנה תלוי באופן של משתנים אחרים, <u>כלומר</u>:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}=ax+by \\ \frac{dy}{dt}=cx+dy \end{cases}$$

משוואות כאלו אנחנו לא פותרים. (נלמד בהמשך)

נסתכל על מערכת לא מוצמדת (כאשר משוואה אחת תלויה בשניה או נפרדת לגמרי).

דוגמא 1

$$\begin{cases} \mathrm{I}\quad \frac{dx}{dt}=-2x \xRightarrow{\text{פרידה}} x(t)=c_1e^{-2t} \\ \mathrm{II}\quad \frac{dy}{dt}=-y \xRightarrow{\text{פרידה}} y(t)=c_2e^{-t} \end{cases} \quad \left| \begin{matrix} \text{עבור תנאי התחלה} \\ x(0)=2 \\ y(0)=1 \end{matrix} \right| \Rightarrow \begin{matrix} x(t)=2e^{-2t} \\ y(t)=e^{-t} \end{matrix}$$

נמצא את הקשר של x ב-y:

$$x=2(e^{-t})^2 \Rightarrow \boxed{x=2y^2}$$

מכאן ניתן לצייר שיפועים במישור הפאזה.

דוגמא 2

$$\begin{cases} \mathrm{I}\quad \frac{dx}{dt}=-2x+3y \xRightarrow{\text{נציב } \mathrm{II}} \underline{\frac{dx}{dt}=-2x+3c_1e^{-t}} \\ \mathrm{II}\quad \frac{dy}{dt}=-y \xRightarrow{\text{פרידה}} y(t)=c_1e^{-t} \end{cases}$$

<u>תנאי התחלה</u>

$x(0)=2$

$y(0)=1$

נפתור את המשוואה I:

$$\frac{dx}{dt}=-2x+3c_1e^{-t} \xrightarrow{\text{גורם אינטגרציה}} e^{2t} \Rightarrow e^{2t}x'+2e^{2t}x=3e^{2t}\cdot e^{-t} \Rightarrow$$

$$(e^{2t}x)'=3e^{t} \Rightarrow e^{2t}x=3c_1e^{t}+c_2 \Rightarrow \underline{x(t)=3c_1e^{-t}+c_2e^{-2t}}$$

$$y(0)=1 \Rightarrow \underline{y(t)=e^{-t}} \rightarrow \overset{\text{נציב ב}}{x(t)} \Rightarrow 2=3+c_2 \Rightarrow \boxed{c_2=-1}$$

המשוואה הסופית אם כן תהיה: $X(t) = 3y(t) - y(t)^2$

זאת משוואה פרבולית (ax^2+bx+c). קודקודה

יהיה עבור $y = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{-2} = 1.5$

$X = 3\cdot 1.5 - (1.5)^2 = 2.25$

מכיון שעבור $t \to \infty$ נקבל $y=0$, $X=0$, כי

המשוואה הן כולות ב- e^{-t}. ולכן הגרף ייראה כך:

משוואות דיפרנציאליות מסדר שני

כאשר יש פונקציה $y''(x) = f(x, y, y')$. המשפ"פ מסדר 2 נקראת חסרה

אם ה- y שלה לא קיים בפונקציה, כלומר: $y''(x) = f(x, y')$.

אם משפ"פ חסרה - מציבים $y'(x) = v(x)$ ואז: $y''(x) = v'(x)$. וממילא נקבל

משוואה חדשה מסדר ראשון שאותה אנחנו יודעים לפתור.

דוגמא

$$y'' = \frac{1-y'}{x} \Rightarrow \boxed{y'=v} \Rightarrow v' = \frac{1-v}{x} \Rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{1-v}{x} \Rightarrow \frac{dv}{1-v} = \frac{dx}{x} \quad \text{(פריד)}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dv}{1-v} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow -\ln|1-v| = \ln|x| + c_1 \Rightarrow \ln|1-v| = -\ln|x| + c_1 \Rightarrow$$

$$|1-v| = c_1 \frac{1}{|x|} \Rightarrow 1-v = \frac{c_1}{|x|} \Rightarrow \boxed{v = 1 - \frac{c_1}{|x|}}$$

ע"פ v נמצא את y:

$$y' = 1 - \frac{c_1}{|x|} \Rightarrow \boxed{y = x - c_1 \ln x + c_2}$$

* הערה חשובה: עבור משפ"פ מסדר 2, צריכים לשני תנאי התחלה (y, y')

כיוון שיש לנו שני c שאותם צריכים למצוא. תנאי ההתחלה y' יתן את c_1,

תנאי ההתחלה y יתן את c_2.

נבחר תנאי התחלה: $y'(1) = 2$, $y(1) = 1$. המשוואה תהיה:

$$y' = 1 - \frac{c_1}{|x|} \Rightarrow 2 = 1 - \frac{c_1}{1} \Rightarrow \boxed{c_1 = -1}$$

$$y = x - c_1 \ln x + c_2 \Rightarrow 1 = 1 + \ln 1 + c_2 \Rightarrow \boxed{c_2 = 0}$$

קיבלנו שהמשוואה המקורית היא:

$$\boxed{y = x + \ln x}$$

* הערה: במקרים בהם נקבל $y = A$ כאשר A מספר, הוא יהיה פתרון N.S.