בס"ד

התמרת לפלס

ד"ר נח דנא-פיקארד

התמרת לפלס היא שיטה לפתרון משוואות דיפרנציאליות ע"י הפיכתן למשוואות אלגבריות. השיטה נקראת על שמו של מתמטיקאי צרפתי (1749-1827) Pierre Simon de Laplace.

1. הגדרות ודוגמאות ראשונות.

הגדרה: תהי f פונקציה ממשית של המשתנה הממשי $t \geq 0$. נגדיר:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = \lim_{\lambda\to\infty}\int_0^\lambda e^{-st} f(t)\, dt$$

אם האינטגרל הלא אמיתי הזה מתכנס, התוצאה היא פונקציה של המשתנה הממשי s. הפונקציה הזאת נקראת *התמרת לפלס* של הפונקציה f ומסמנים $F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$.

שימו לב: הפונקציה f היא פונקציה של המשתנה t (בפיזיקה, הוא הזמן), אבל הפונקציה F היא פונקציה של המשתנה s (בפיזיקה, הפזה).

דוגמאות:

1. התמרת לפלס של פונקציה קבועה:

נתון $f(t) = k$, כאשר k הוא מספר ממשי הנתון,. אזי:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}\cdot k\, dt = k\int_0^\infty e^{-st} dt = \lim_{\lambda\to\infty} k\int_0^\lambda e^{-st}\, dt = k\cdot\lim_{\lambda\to\infty}\left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^\lambda = \frac{k}{s},$$

בתנאי ש- $s > 0$.

2. התמרת לפלס של e^{at}:

נתון $f(t) = e^{at}$, כאשר a מספר ממשי הנתון. אזי:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}\cdot e^{at}\, dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}\, dt = \lim_{\lambda\to\infty}\int_0^\lambda e^{-(s-a)t}\, dt = \lim_{\lambda\to\infty}\left[\frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)}\right]_0^\lambda .$$

האינטגרל הזה מתכנס אם $s>a$ ומקבלים $F(s) = \dfrac{1}{s-a}$.

3. פונקציה שאין לה התמרת לפלס:

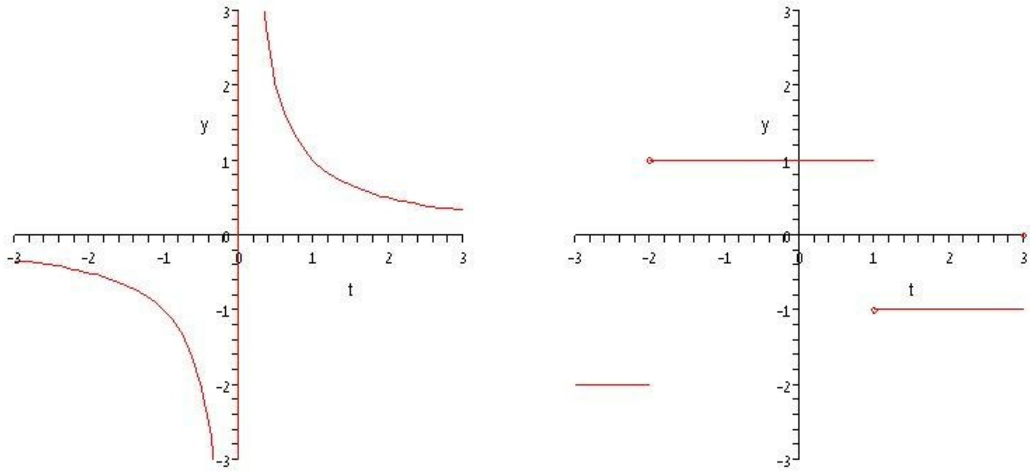
נתון $f(t) = \dfrac{1}{t}$. האינטגרל $\int_0^\infty \frac{e^{-st}}{t}dt = \int_0^1 \frac{e^{-st}}{t}dt + \int_1^\infty \frac{e^{-st}}{t}dt$ מתבדר. בבקשה, תוכיחו את זה.

שאלה: מהן הפונקציות שיש להן התמרת לפלס?

<u>הגדרה (עיין שרטוט 1):</u> אומרים שהפונקציה f **רציפה בחלקים** בקטע I נתון אם

(א) יש לה מספר סופי של נקודות אי-רציפות

(ב) כל נקודת אי-רציפות היא נקודת קפיצה, ז"א שיש לפונקציה f בנקודת אי-רציפות שני גבולות חד-צדדיים סופיים.



קפיצות ב- 2- וב- 1   אי-רציפות שאיננה קפיצה (סוג שני)

שרטוט 1: נקודות אי-רציפות

<u>משפט קיום:</u> תהי f פונקציה רציפה בחלקים על הקטע $[0,\infty)$.
נניח שהיא מקיימת את אי-השוויון $|f(t)| \le Me^{at}$ אם $t \ge T$, כאשר a, M, T הם מספרים ממשיים לא שליליים נתונים.
אזי $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ קיימת ומוגדרת לכל $s > a$.

דוגמאות:

א. נתון $f(t) = e^t$. תנאי משפט הקיום מתקיימים: קחו $a = 1, M = 1$ ו- $T = 0$.
לכן יש התמרת לפלס לפונקציה הנתונה. את החישוב עשינו לעיל.

ב. נתון $f(t) = t^n$ כאשר n הוא מספר טבעי. נוכיח שלכל $t > 0$, $f(t) \le n!e^t$.
בשביל זה נשתמש בטור מקלורין של הפונקציה המעריכית: $e^t = 1 + t + \frac{1}{2!}t^2 + \ldots + \frac{1}{n!}t^n + \ldots$.
אם $t > 0$, כל איברי הסכום חיוביים. מכאן ש- $e^t \ge \frac{t^n}{n!}$ ואי-השוויון המבוקש התקבל.
לכן יש התמרת לפלס לפונקציה הנתונה. את החישוב מבצעים בעזרת הוכחה באינדוקציה.

2. הלינאריות של התמרת לפלס.

<u>משפט:</u> נתונות שתי פונקציות f ו- g של המשתנה הממשי t.
נניח שיש לשתי הפונקציות האלה התמרת לפלס.
אזי לכל שני מספרים ממשיים α ו- β, יש התמרת לפלס לפונקציה $\alpha f + \beta g$, ומתקיים:

$$\mathcal{L}\{\ (\alpha f + \beta g)(t)\ \}(s) = \mathcal{L}\{\ \alpha f(t)\ \}(s) + \mathcal{L}\{\ \beta g(t)\ \}(s)$$

עפ"י ההגדרה

$$\mathcal{L}\{\ \int_0^\infty e^{-st}(\alpha f(t) + \beta g(t))\,dt\ \}(s) = \lim_{\lambda\to\infty}\int_0^\lambda e^{-st}(\alpha f(t) + \beta g(t))\,dt$$

לפי הליניאריות של האינטגרל המסוים מתקיים:

$$\int_0^\lambda e^{-st}(\alpha f(t) + \beta g(t))\,dt = \alpha\int_0^\lambda e^{-st} f(t)\,dt + \beta\int_0^\lambda e^{-st} g(t)\,dt$$

ושאר רק לעבור לגבול בשני האגפים כאשר λ שואף ל- $+\infty$. ♦

3. התמרת לפלס הפוכה.

המילה האנגלית בשביל *התמרה* היא המילה *transform*. במתמטיקה מדברים על *transform* כאשר מדובר בתהליך הפיך. תזכרו את המושג של העתקה (פונקציה) הפיכה. כיון שלא הגדרנו תחום, טווח וכו', אנו לא מדברים כאן במונחים של העתקות.

הגדרה: ניקח פונקציה f של המשתנה t שיש לה התמרת לפלס ונסמן

$$G(s) = \mathcal{L}\{ f(t) \}(s).$$

הפונקציה f תיקרא **התמרת לפלס הפוכה** *של* G. היא תסומן ב- $\mathcal{L}^{-1}\{ G(s) \}(t)$
לדוגמא

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}(t) = e^{2t} \ .$$

<u>משפט</u>: התמרת לפלס הפוכה היא לינארית, כלומר בתנאים המתאימים, מתקיים:

$$\mathcal{L}^{-1}\{ (\alpha F + \beta G)(s) \}(s) = \mathcal{L}^{-1}\{ \alpha F(s) \}(t) + \mathcal{L}^{-1}\{ \beta G(s) \}(t).$$

ניתן להגדיר את ההתמרה ההפוכה הזאת בעזרת נוסחה אינטגרלית (נוסחת Mellin). בגלל הקושי שבה, לא נביא אותה כאן. כדי לחשב את ההתמרת לפלס ההפוכה של פונקציה נתונה נשתמש בטבלה.

דוגמא 1: נתון $F(s) = \dfrac{2s}{(s-1)(s-4)}$. על מנת לחשב את התמרת לפלס ההפוכה של $F(s)$, נפרק את השבר לשברים פשוטים:

$$F(s) = \frac{8}{3(s-4)} - \frac{2}{3(s-1)} \ = \ F(s) = \frac{8}{3}\cdot\frac{1}{(s-4)} - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{(s-1)}$$

ידוע ש- $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-4}\right\}(t) = e^{4t}$ וש- $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-1}\right\}(t) = e^{t}$. בגלל הלינאריות של ההתמרה ההפוכה מתקבל:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t) = \frac{8}{3}e^{4t} - \frac{2}{3}e^{t} \ .$$

דוגמא 2: נתון $F(s) = \dfrac{2s+1}{s^2+9}$. נפרק את השבר לסכום של שני שברים:

$$F(s) = \frac{2s}{s^2+9} + \frac{1}{s^2+9}$$

האיבר הראשון דומה להתמרת לפלס של cos, השני דומה להתמרת לפלס של sin. דרושות רק התאמות קטנות של המקדמים:

$$F(s) = \frac{2s}{s^2+9} + \frac{1}{s^2+9} \ = \ 2\cdot\frac{s}{s^2+9} + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{s^2+9}$$

ובגלל הלינאריות של התמרת לפלס ההפוכה מתקבל:

$$L^{-1}\{F(s)\}(t) = 2L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\}(t) + \frac{1}{3}L^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+9}\right\}(t) = 2\cos 3t + \frac{1}{3}\sin 3t.$$

4. משפטים מתקדמים.

<u>משפט הזזה ראשון:</u> נניח ש- $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = F(s)$ קיינת עבור $s > b$.

אם a הוא מספר ממשי נתון, אזי

$$\mathcal{L}\{ e^{at}f(t) \}(s) = F(s-a),\ s>a+b.$$

<u>רעיון ההוכחה</u>: לכתוב את האינטגרל הלא אמיתי עפ"י ההגדרה של התמרת לפלס.

דוגמא:

ידוע ש- $\mathcal{L}\{ \sin 2t \}(s) = \dfrac{2}{s^2+4}$. לכן $\mathcal{L}\{ e^{5t}\sin(2t) \}(s) = \dfrac{2}{(s-5)^2+4}$.

<u>משפט (התמרת לפלס של הנגזרת ראשונה של פונקציה):</u>

נניח ש:

א. הפונקציה $f(t)$ מקיימת את תנאי משפט הקיום (נשתמש בסימונים של המשפט ההוא);

ב. הפונקציה f גזירה ו- f' רציפה בחלקים על הקטע $[0,+\infty)$.

אזי: יש התמרת לפלס עבור הפונקציה f', ומתקיים:

$$\mathcal{L}\{ f'(t) \}(s) = s\,\mathcal{L}\{ f(t)\}(s) - f(0),\ s>a$$

<u>רעיון ההוכחה</u>: לכתוב את האינטגרל הלא אמיתי עפ"י ההגדרה של התמרת לפלס.

דוגמא:

אם $f(t) = \sin t$, אזי $f'(t) = \cos t$. ידוע ש-

$$\mathcal{L}\{ \sin t \}(s) = \frac{1}{s^2+1} \quad \text{ו-} \quad \mathcal{L}\{ \cos t \}(s) = \frac{s}{s^2+1}$$

אכן מתקיים:

$$\frac{s}{s^2+1} = s\,\frac{1}{s^2+1} - \sin 0.$$

<u>משפט (התמרת לפלס של הנגזרת מסדר n של פונקציה):</u>

נניח ש:

א. הפונקציה $f(t)$ גזירה לפחות n פעמים כאשר $t \ge 0$

ב. כל הנגזרות $f^{(k)}(t)$ מקיימות את תנאי משפט הקיום (כאשר $k = 0,1,2,...,n-1$)

ג. הנגזרת $f^{(n)}(t)$ רציפה בחלקים על הקטע $[0,+\infty)$.

אזי יש התמרת לפלס עבור $f^{(n)}(t)$ ומתקיים:

$$\mathcal{L}\{ f^{(n)}(t) \}(s) = s^n\,\mathcal{L}\{ f(t) \}(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0).$$

ההוכחה באינדוקציה.

דוגמא: אם $f(t) = \sin t$, אזי $f^{(4)}(t) = \sin t$ ואכן:

$$\mathcal{L}\{ \sin t \}(s) = \frac{1}{s^2+1} = s^4\,\mathcal{L}\{ \sin t \}(s) - s^3 \sin 0 - s^2 \cos 0 + s \sin 0 + \cos 0$$

5. פתרון משוואה דיפרנציאלית עם תנאי התחלתי בעזרת התמרת לפלס.

המבנה של תהליך הפתרון:

א. מפעילים התמרת לפלס על שני האגפים של המשוואה.
ב. מבצעים שינויים בעזרת כללים אלגבריים (שברים פשוטים וכו'), על מנת לכתוב צירוף לינארי של "שברים ידועים".
ג. מפעילים התמרת לפלס הפוכה, בשימוש בלינאריות.

בהמשך נשתמש בסימונים שהיו רגילים בפרקים הקודמים: הפונקציה הנעלמת תסומן ב- $y(t)$ וההתמרה שלה תסומן ב- $Y(s)$.

דוגמא 1: מצא את הפתרון של המשוואה הדיפרנציאלית $y''(t)-9y(t)=0$ עם התנאי ההתחלתי $y(0)=1, y'(0)=0$.

א.

$$\mathcal{L}\{\ y''(t)-9y(t)\ \}=0$$

$$s^2\mathcal{L}\{y(t)\}(s)-s\,y(0)-y'(0)-9\mathcal{L}\{y(t)\}(s)=0$$

$$s^2Y(s)-s\,y(0)-y'(0)-9Y(s)=0$$

$$Y(s)=\frac{s}{s^2-9}.$$

ב. נפרק את $Y(s)$ לשברים פשוטים:

$$Y(s)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s-3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+3}$$

ג. הפתרון:

$$y(t)=\frac{1}{2}\cdot L^{-1}\left(\frac{1}{s-3}\right)+\frac{1}{2}\cdot L^{-1}\left(\frac{1}{s+3}\right)=\frac{1}{2}e^{3t}+\frac{1}{2}e^{-3t}$$

דוגמא 2: מצא את הפתרון של המשוואה $y''(t)+4y(t)=e^t$ עם התנאי ההתחלתי $y(0)=1, y'(0)=0$.

א.

$$s^2\mathcal{L}\{y(t)\}(s)-s\,y(0)-y'(0)+4\mathcal{L}\{y(t)\}(s)=\frac{1}{s-1}$$

$$s^2Y(s)-s\,y(0)-y'(0)+4\,Y(s)=\frac{1}{s-1}$$

$$(s^2+4)Y(s)-s=\frac{1}{s-1}$$

$$Y(s)=\frac{1}{(s^2+4)(s-1)}+\frac{s}{(s^2+4)}=\frac{s^2-s+1}{(s^2+4)(s-1)}.$$

ב.נפרק את השבר לשברים פשוטים:

$$Y(s)=\frac{1}{5(s-1)}+\frac{4s-1}{5(s^2+4)}=\frac{1}{5(s-1)}+\frac{4s}{5(s^2+4)}-\frac{1}{10}\cdot\frac{2}{s^2+4}$$

נפעיל התמרת לפלס הפוכה:

$$y(t)=\frac{1}{5}\cdot L^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right)+\frac{4}{5}\cdot L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+4}\right)-\frac{1}{10}L^{-1}\left(\frac{2}{s^2+4}\right)=\frac{1}{5}e^t+\frac{4}{5}\cos 2t-\frac{1}{10}\sin 2t$$.

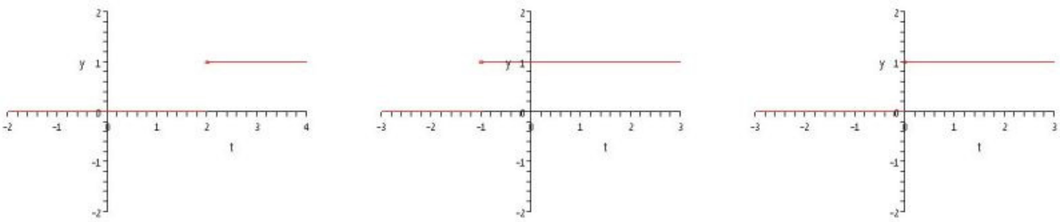
6. פונקציות במדרגות.

פוקצית היביסייד (Heaviside):

נסמן אותה באות u. היא מוגדרת ע״י $\begin{cases} u(t)=0, t<0 \\ u(t)=1, t\ge 0 \end{cases}$. באנגלית היא נקראת גם unit-step function.

מכאן הסימון שבחרנו. הגרף שלה בשרטוט 2א.

פונקצית Heaviside מוזזת: $\begin{cases} u(t-a)=0, t<a \\ u(t-a)=1, t\ge a \end{cases}$.



הגרף שלה עבור $a=-1$ בשרטוט 2ב ועבור $a=2$ בשרטוט 2ג.

(א) (ב) (ג)

שרטוט 2

פונקציה במדרגות היא פונקציה f המקיימת את התנאים הבאים:

א. היא רציפה בכל התחום שלה, פרט לקבוצה דיסקרטית של נקודות אי-רציפות.
ב. בין שתי נקודות אי-רציפות, הפונקציה קבועה.

ניתן לבטא כל פונקציה במדרגות בעזרת פונקציות Heaviside מוזזות.

דוגמא 1: נתון $g(t)=u(t+2)-2u(t)+3u(t-1)$. אזי:

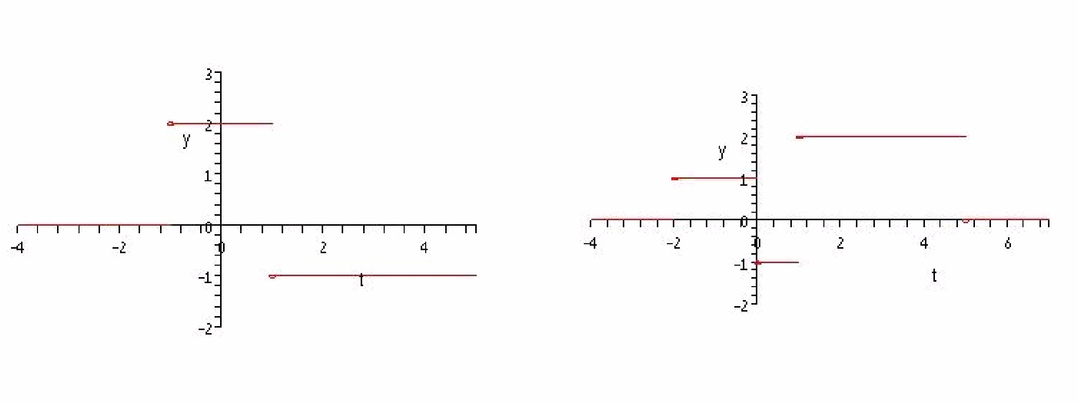
- אם $t<-2$, $\begin{cases} u(t+2)=0 \\ u(t)=0 \\ u(t-1)=0 \end{cases}$. לכן $g(t)=0$.
- אם $0\le t<1$, $\begin{cases} u(t+2)=1 \\ u(t)=1 \\ u(t-1)=0 \end{cases}$. לכן $g(t)=-1$.
- אם $-2\le t<0$, $\begin{cases} u(t+2)=1 \\ u(t)=0 \\ u(t-1)=0 \end{cases}$. לכן $g(t)=1$.
- אם $t\ge 1$, $\begin{cases} u(t+2)=1 \\ u(t)=1 \\ u(t-1)=1 \end{cases}$. לכן $g(t)=2$.

ראו שרטוט 3א.

דוגמא 2: נתון $\begin{cases} f(t)=0, t<-1 \\ f(t)=2, -1\le t<1 \\ f(t)=-1, 1\le t \end{cases}$.

בעצם ניתן לכתוב: $f(t)=2u(t+1)-3u(t-1)$. ראו שרטוט 3ב.

באותה דרך, ניתן לכתוב ביטויים "סגורים" עבור פונקציות רציפות בחלקים.



(ב) (א)

שרטוט 3: הגרפים של שתי פונקציות במדרגות

התמרת לפלס של פונקצית Heaviside (מוזזת):

$$\mathcal{L}\{u(t-a)\}(s)=\int_0^\infty e^{-st}u(t-a)\,dt=\int_a^\infty e^{-st}dt=\frac{e^{-as}}{s}.$$

<u>משפט הזזה שני:</u>

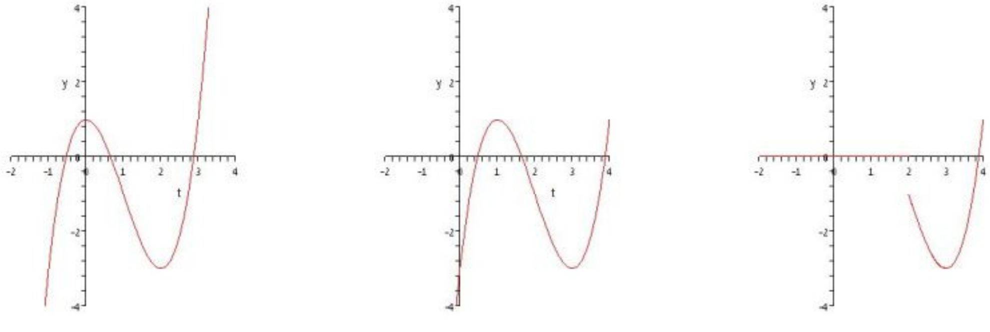
יהי $a>0$ **. אם ל-** $f(t)$ **יש התמרת לפלס, אזי ל-** $u(t-a)\cdot f(t-a)$ **יש התמרת לפלס ומתקיים:**

$$\mathcal{L}\{\, u(t-a)\cdot f(t-a)\,\}(s) = e^{-as}\ \mathcal{L}\{f(t)\}(s).$$

הוכחה: עפ"י ההגדרה. לחשב את האינטגרל.

דוגמא:

בשרטוט 4 מוצגים הגרפים של (a) פונקציה מסוימת f , (b) של $f(t-2)$ ו (c) של $f(t-2)u(t-2)$:



(a) (b) (c)

שרטוט 4

יישום (התמרת לפלס של פונקציה עם קפיצה אחת):
נתון

$$.f(t)=\begin{cases} e^t, & 0\le t<2\pi \\ e^t+\cos t, & t\ge 2\pi \end{cases}$$

לפונקציה הזאת נקודת קפיצה ב- π. ניתן לכתוב:

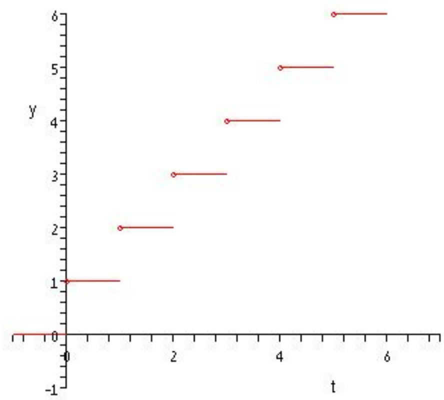
$$f(t)=u(t)\cdot e^t+u(t-2\pi)\cdot\cos t=u(t)\cdot e^t+u(t-2\pi)\cdot\cos(t-2\pi)$$

עפ"י משפט ההזזה השני מתקבל:

$$L\{f(t)\}(s)=L\{e^t\}(s)+e^{-2\pi s}\cdot L\{\cos t\}(s)=\frac{1}{s-1}+e^{-2\pi s}\cdot\frac{s}{s^2+1}.$$

התמרת לפלס של פונקצית החלק השלם (אינסוף מדרגות):
נתון $f(t)=u(t)+u(t-1)+u(t-2)+u(t-3)+\ldots$. ראו שרטוט 5.

שרטוט 5: מדרגות אינסופיות.



$$\mathcal{L}\{\,f(t)\,\}(s)=\frac{1}{s}(1+e^{-s}+e^{-2s}+e^{-3s}+\ldots)$$

זה טור הנדסי בעל מנה e^{-s}. כיון ש- $s>0$, $0<e^{-s}<1$, לכן הטור הזה מתכנס ומתקיים:

$$\mathcal{L}\{\,f(t)\,\}(s)=\frac{1}{s(1-e^{-s})}$$

7. פתרון משוואה דיפרנציאלית עם נקודת אי רציפות.

עבור $a\ge 0$ נגדיר $u_a(t)=\begin{cases} 0 & t<a \\ 1 & t\ge a \end{cases}$, כלומר $u_a(t)=u(t-a)$ לפי הסימנים של הקובץ הקודם. נתבונן במשוואה עם התנאי ההתחלתי הנתון $\begin{cases} \frac{dy}{dt}=-y+u_3(t) \\ y(0)=2 \end{cases}$.

בעצם, $\frac{dy}{dt}=\begin{cases}-y & t<3\\ -y+1 & t\geq 3\end{cases}$.

ניתוח איכותי.

- עבור $t<3$, $\frac{dy}{dt}=-y$ והפתרונות מתקרבים לפתרון שווי משקל כך ש- $y=0$.
- עבור $t\geq 3$, $\frac{dy}{dt}=-y+1$ והפתרון מתקרב לפתרון שוויו משקל $y=1$.
- עבור המשוואה הנתונה עם התנאי ההתחלתי הנתון, הפתרון יורד לקראת $y=0$ $(t<3)$ וכאשר $t\geq 3$ הפתרון הולך ומתקרב ל $y=1$.

שני מקרים אפשריים:

- אם $y(3)<1$ אז הפתרון עובר ממצב של ירידה למצב של עליה עבור $t=3$ (ראה ציור מצורף).
- אם $y(3)>1$ אז הפתרון ממשיך לרדת אל $y=1$ לכל $t>3$.

לכן כדי להחליט אם הפתרון עולה או יורד אל 1 כאשר $t\to\infty$ עלינו לחשב את הערך של $y(3)$.

לבעיה $\begin{cases}\frac{dy}{dt}=-y\\ y(0)=2\end{cases}$ ישנו פתרון אנליטי המוגדר ע"י $y(t)=2e^{-t}$, לכן $y(3)=2e^{-3}<1$. מכאן אנו לומדים שהפתרון עולה עבור $t>3$ אל $y=1$.

שימו לב שעל מנת לקבל מסקנה זו אנו צריכים קודם את הפתרון האנליטי עד לזמן $t=3$.

פתרון המשוואה באמצעות התמרת לפלס

$$\begin{cases}\frac{dy}{dt}=-y+u_3(t)\\ y(0)=2\end{cases}$$

$$L\left\{\frac{dy}{dt}\right\}=-L\{y\}+L\{u_3(t)\}$$

ראינו ש-: $L\{f(t-a)u(t-a)\}=e^{-as}L\{f(t)\}$

לכן $L\{u_3(t)\}=L\{u(t-3)\}=e^{-3s}L\{1\}=\frac{e^{-3s}}{s}$.

$$L\left\{\frac{dy}{dt}\right\}=-L\{y\}+L\{u_3(t)\}$$

$$s\ L\{y\}-y(0)=-L\{y\}+\frac{e^{-3s}}{s}$$

$$s\ L\{y\}-2=-L\{y\}+\frac{e^{-3s}}{s}$$

$$s\,L\{y\}+L\{y\}=2+\frac{e^{-3s}}{s}$$

$$L\{y\}=\frac{2}{s+1}+\frac{e^{-3s}}{s\,(s+1)}$$

$$y = L^{-1}\left(\frac{2}{s+1}\right) + L^{-1}\left(\frac{e^{-3s}}{s\left(s+1\right)}\right)$$

צריכים לפרק את השבר $\frac{e^{-3s}}{s\left(s+1\right)}$ לשברים פשוטים:

$$\frac{e^{-3s}}{s\left(s+1\right)} = \frac{e^{-3s}}{s} - \frac{e^{-3s}}{s+1}$$

לכן

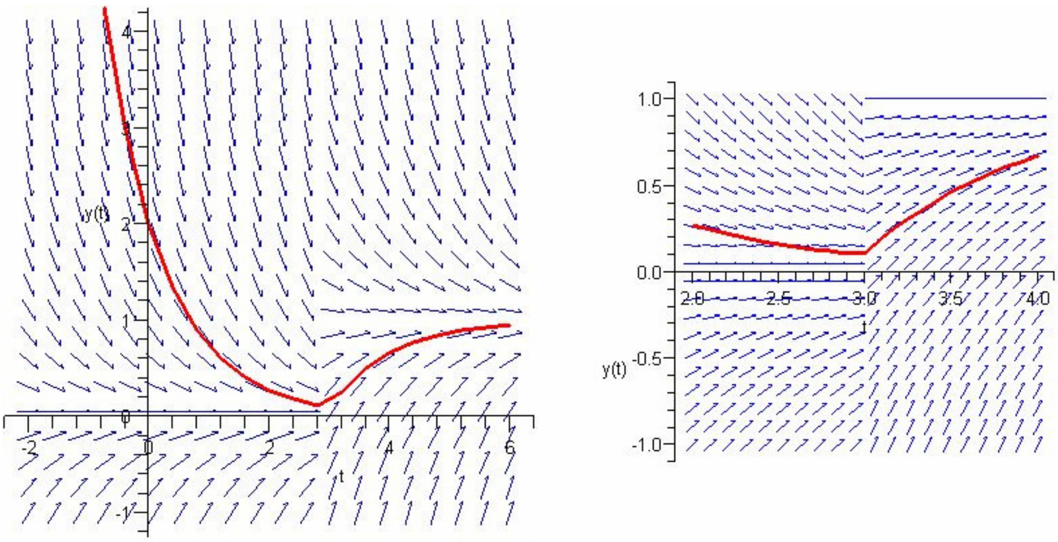
$$y = L^{-1}\left(\frac{2}{s+1}\right) + L^{-1}\left(\frac{e^{-3s}}{s}\right) - L^{-1}\left(\frac{e^{-3s}}{s+1}\right)$$

ומכאן ש- $y = 2\,e^{-t} + u_3(t) - u_3(t)\,e^{-(t-3)}$.

<u>הערות</u>: 1. על מנת לקבל את השורה האחרונה השתמשנו בנוסחה

$$L\{f(t-a)u(t-a)\} = e^{-as}L\{f(t)\}$$

2. להלן שני שרטוטים (מס' 6) של העקומה האינטגראלית (כלומר גרף הפתרון) של המשוואה שזה עתה פתרנו. הגדלנו את האיזור מסביב לנקודה המתאימה ל- $t=3$ על מנת שתראו את נקודת החוד שם. הפונקציה שהתקבלה רציפה ב-3 , אבל יש לה שם שתי נגזרות חד-צדדיות שונות.



שרטוט 6: העקומה האינטגראלית של המשוואה הנתונה לעיל

7. פונקציות מחזוריות.

<u>משפט</u>: תהי $f(t)$ פונקציה רציפה בחלקים בקטע $[0,T]$ ומחזורית בעלת מחזור השווה ל- T.
אזי יש ל- $f(t)$ התמרת לפלס, והיא נתונה ע"י הנוסחה הבאה:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{\int_0^T e^{-st} f(t)\,dt}{1-e^{-sT}}.$$

דוגמא: לחשב את התמרת לפלס של

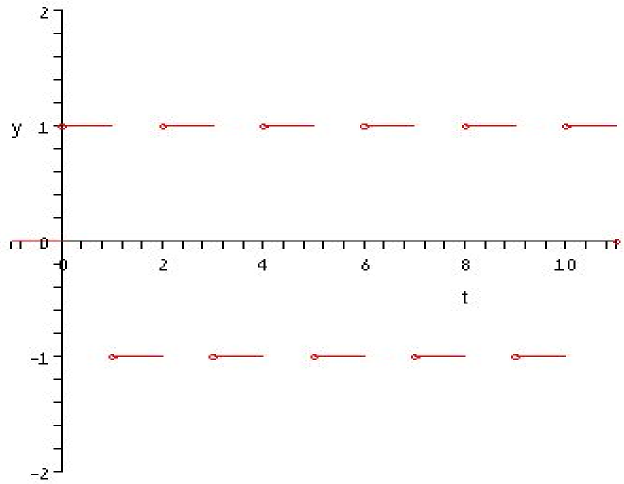
$$.f(t) = \begin{cases} \cos t, & 2\pi k \le t < \pi(2k+1) \\ -\cos t, & \pi(2k+1) \le t < \pi(2k+2) \end{cases}$$

הפונקציה f רציפה בחלקים על R כולו ובעלת מחזור השווה ל-π. לכן

$$\mathcal{L}\{\ f(t)\ \}(s)=\frac{\int_0^{\pi}e^{-st}\cos t\,dt}{1-e^{-\pi s}}=\frac{1}{1-e^{-s\pi}}\left(\frac{se^{-\pi s}}{s^2+1}+\frac{s}{s^2+1}\right)=\frac{1+e^{-\pi s}}{1-e^{-\pi s}}\cdot\frac{s}{s^2+1}=\frac{s}{s^2+1}\coth\left(\frac{\pi s}{2}\right).$$

התמרת לפלס של גל מרובע אינסופי:

נתון $f(t)=u(t)-2u(t-1)+2u(t-2)-2u(t-3)+\dots$. ראו שרטוט 6.



שרטוט 6: גל מרובע.

הפונקציה f מחזורית ובעלת מחזור של 2. לכן:

$$\mathcal{L}\{\ f(t)\ \}(s)=\frac{\int_0^{2}e^{-st}f(t)\,dt}{1-e^{-2s}}=\frac{1}{1-e^{-2s}}\left[\int_0^1 e^{-st}dt-\int_1^2 e^{-st}dt\right]$$

$$=\frac{1}{1-e^{-2s}}\left(\frac{1-e^{-s}}{s}+\frac{e^{-2s}-e^{-s}}{s}\right)=\frac{1}{s}\cdot\frac{1+e^{-2s}}{1-e^{-2s}}=\frac{1}{s}\cdot\coth s\,.$$

פתרון בעזרת התמרת לפלס של משוואה דיפרנציאלית עם אגף ימין מחזורי:

נתונה הבעיה עם תנאי התחלתי $\frac{dy}{dt}-2y=\begin{cases}\cos t, & 2\pi k\le t<\pi(2k+1)\\ -\cos t, & \pi(2k+1)\le t<\pi(2k+2)\end{cases}$, $y(0)=1$.

בעזרת התמרת לפלס מקבלים

$$s\mathcal{L}\{\ y(t)\ \}(s)\text{ - }\ y(0)=\frac{1+e^{-\pi s}}{1-e^{-\pi s}}\cdot\frac{s}{s^2+1}=\frac{s}{s^2+1}\coth\left(\frac{\pi s}{2}\right).$$

$$sL(y(t))=\frac{s}{s^2+1}\coth\left(\frac{\pi s}{2}\right)+y(0)=\frac{s}{s^2+1}\coth\left(\frac{\pi s}{2}\right)+1$$

$$L(y(t))=\frac{1}{s^2+1}\coth\left(\frac{\pi s}{2}\right)+\frac{1}{s}$$

$$y(t)=L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\coth\left(\frac{\pi s}{2}\right)\right)+L^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)=|\sin t|+1$$

8. טבלה קצרה של התמרות לפלס.

$f(t)$	$F(s)$		$f(t)$	$F(s)$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$		$e^{at}\cosh bt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2-b^2}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$		$t\sin at$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$		$t\cos at$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$		$\cos(at)-\cos(bt)$	$\frac{s}{s^2+a^2}-\frac{s}{s^2+b^2}$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}, s>\|a\|$		$\frac{2(\cos at-\cos bt)}{t}$	$\ln\left(\frac{s^2+a^2}{s^2+b^2}\right)$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}, s>\|a\|$		$\frac{2(\sin at-\sin bt)}{t}$	$\ln\left(\frac{s^2+a^2}{s^2+b^2}\right)$
$e^{at}\sin bt$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$		$\sin(at)-\sin(bt)$	$\frac{a}{s^2+a^2}-\frac{b}{s^2+b^2}$
$e^{at}\cos bt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$		$u(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$
$e^{at}\sinh bt$	$\frac{b}{(s-a)^2-b^2}$		$\delta(t-a)$	e^{-as}
$\frac{e^{-bt}-e^{-at}}{t}$	$\ln\left(\frac{s+a}{s+b}\right)$		$f(t-a)u(t-a), a\geq 0$	$e^{-as}F(s)$
$\frac{\sin at}{t}$	$\arctan\frac{a}{s}$		$g(t)u(t-a), a\geq 0$	$e^{-as}L\{g(t+a)\}(s)$
			$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$