משוואה לינארית מסדר שני לא-הומוגנית - מקדמים קבועים

כפי שראינו, המשוואה היא מהצורה: $ay''+by'+cy=g(x)$ כש $g(x)\neq 0$

טענה 1

אם $y_p(x)$ פתרון של משוואה לא הומוגנית $ay''+by'+cy=g(x)$ ו- $h(x)$ פתרון של משוואה הומוגנית $ay''+by'+cy=0$ אזי $y_p(x)+h(x)$ ג"כ פתרון של המשוואה הלא-הומוגנית

$$Ly_p=g(x)\ ,\ Lh=0 \Rightarrow L(y_p+h)=Ly_p+Lh=g(x)+0=\boxed{g(x)}$$

טענה 2

אם $y_p(x)$ פתרון של משוואה לא הומוגנית $ay''+by'+cy=g(x)$ ו- $y_q(x)$ ג"כ פתרון של המשוואה הלא הומוגנית, אזי y_q-y_p פתרון של המשוואה ההומוגנית.

$$Ly_p=g(x),\ Ly_q=g(x) \Rightarrow L(y_q-y_p)=Ly_q-Ly_p=g(x)-g(x)=\boxed{0}$$

ולכן: $$y_q-y_p=h(x) \Rightarrow y_q=h(x)+y_p$$

מסקנה

פתרון כללי של משוואה לא-הומוגנית הוא: $\boxed{y=y_p+c_1y_1+c_2y_2}$

כאשר y_p פתרון של המשוואה הלא-הומוגנית ו- y_1, y_2 2 פתרונות בת"ל של המשוואה ההומוגנית.

כדי למצוא את y_p ישנן שתי שיטות:

(1) שיטת השוואת מקדמים

V_n - תת מרחב ממימד n. יהי A אופרטור. אם $A:V_n\to V_n$ נאמר שV_n תת מרחב אינווריאנטי של n (לא משתנה, תת מרחב קבוע).

דוגמא

$V_1=\text{span}\{e^{ax}\}$ (כל הכפולות השונות של e^{ax}) הוא אינווריאנטי ביחס לאופרטור D.

$f(x)=ka^{ax}\in V_1$ אזי נקבל: $Df=(ke^{ax})'=kae^{ax}=k'e^{ax}\in V_1$.

תרגיל 1

$y''+3y'-4y=e^{3x}$. המשוואה האופיינית: $R^2+3R-4=0 \rightleftarrows \begin{matrix}-4\\1\end{matrix}$

נקבל ש: $y_2(x)=e^x$ $y_1(x)=e^{-4x}$. כיון ש- $g(x)$ נמצאת באותו מרחב נבחר $y_p=ke^{3x}$

ונציב אותו במשוואה: $9ke^{3x}+3\cdot 3ke^{3x}-4ke^{3x}=e^{3x} \Rightarrow \underline{14ke^{3x}=e^{3x}}$

מהשוואת מקדמים: $14k=1 \Rightarrow \underline{k=\frac{1}{14}}$. ולכן: $y_p=\frac{1}{14}e^{3x}$

הפתרון הכללי: $\boxed{y=\frac{1}{14}e^{3x}+c_1e^{-4x}+c_2e^{x}}$

תרגיל 2

$y''+3y'-4y=\cos 2x$, (המשוואה האופיינית כמו קודם). במקרה זה $\cos 2x$ הוא לא אינווריאנטי כי נגזרת שלו תיתן $\sin 2x$ שזה לא אותו מרחב (וגם הנגזרת).

לכן נבחר $y_p=\sin 2x+\cos 2x$. אזי:

$$\underline{y_p}=a\cos 2x+b\sin 2x \Rightarrow \underline{y_p'}=-2a\sin 2x+2b\cos 2x \Rightarrow$$

$$\underline{y_p''}=-4a\cos 2x-4b\sin 2x.$$

נציב:

$$-4a\cos 2x-4b\sin 2x-6a\sin 2x+6b\cos 2x-4a\cos 2x-4b\sin 2x=\underline{\cos 2x}$$

השוואת מקדמים:

$$\begin{cases} \mathrm{I}\ \ -4b-6a-4b=0 & (\overset{\text{עבור}}{\sin 2x}) \\ \mathrm{II}\ \ -4a+6b-4a=1 & (\overset{\text{עבור}}{\cos 2x}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{I}\ \ 6a+8b=0 \\ \mathrm{II}\ \ -8a+6b=1 \end{cases}$$

פתרון המערכת יהיה: $\underline{b=0.06}$, $\underline{a=-0.08}$. ולכן הפתרון הכללי יהיה:

$$\boxed{y=0.08\cos 2x+0.06\sin 2x+\underbrace{c_1e^{-4x}+c_2e^{x}}_{\text{פתרון המשוואה ההומוגנית.}}}$$

תרגיל 3

$y''+3y'-4y=e^{3x}\sin x$. נבחין כי $g(x)$ תיתן את $\cos x$, לכן $V_2=\text{span}\{e^{3x},\sin x,\cos x\}$

נבחר: $y_p=ae^{3x}\sin x+be^{3x}\cos x$, אזי: $y_p'=3ae^{3x}\sin x+a\cos x e^{3x}+\ldots=$

$$\underline{y_p'}=(3a-b)e^{3x}\sin x+(a+3b) \Rightarrow \underline{y_p''}=(8a-6b)e^{3x}\sin x+(6a+8b)e^{3}\cos x$$

השוואת מקדמים:

$$\begin{cases} \mathrm{I}\ \ 13a-9b=1 & (\overset{\text{עבור}}{e^{3x}\sin x}) \\ \mathrm{II}\ \ 9a+13b=0 & (\overset{\text{עבור}}{e^{3x}\cos x}) \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \underline{a=0.052} \\ \underline{b=-0.036} \end{matrix}$$

סיכום

עבור כל $g(x)$ מסוים מהטבלה שכאן נחפש y_p כלי מתאים.

$g(x)$	y_p
$ke^{\alpha x}$	$Ae^{\alpha x}$
$a\cos\beta x+b\sin\beta x$	$A\cos\beta x+B\sin\beta x$
$ae^{\alpha x}\cos\beta x+be^{\alpha x}\sin\beta x$	$Ae^{\alpha x}\cos\beta x+Be^{\alpha x}\sin\beta x$
$P_n(x)$	$x^s(A_nx^n+A_{n-1}x^{n-1}\ldots)$

דוגמא לפולינום

$y''+3y'-4y=2x$ נבחר $V_2=span\{x,1\}$. לכן $y_p=ax+b$:

$$\underline{y_p}=ax+b \Rightarrow \underline{y_p'}=a \Rightarrow \underline{y_p''}=0$$

נציב במשוואה:

$$3a-4ax-4b=2x$$

השוואת מקדמים:

$$\begin{cases} \mathrm{I} & -4a=2 \quad (\text{מקדם } x) \\ \mathrm{II} & 3a-4b=0 \quad (\text{חופשי}) \end{cases} \Rightarrow \quad \underline{a=-\frac{1}{2}} \quad \underline{b=-\frac{3}{8}}$$

ומכאן נקבל ש: $\underline{y_p=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{8}}$ ולכן הפתרון הכללי:

$$\boxed{y=-\frac{1}{2}-\frac{3}{8}x+c_1e^{-4x}+c_2e^{x}}$$

תרגיל 3

$\underline{y''+9y=\sin3x}$. המשוואה האופיינית: $R^2+9=0 \Rightarrow R_{1,2}=\pm3i$

הפתרונות יהיו: $y_2=\cos3x$ $y_1(x)=\sin3x$. כאן תהיה לנו בעיה להציב y_p כמו שעשינו $(a\cos\beta x+b\sin\beta x)$ בגלל ש-$\sin3x$ הוא פתרון של המערכת ההומוגנית אז הוא יאפס את ההצבה (ונקבל $\sin3x=0$). לכן כאן נבחר:

$V_2=\{x\sin3x, x\cos3x, \underbrace{\sin3x,\cos3x}_{\text{פתרונות ולכן 0.}}\}$ וה-y_p שלנו יהיה: $y_p=ax\sin3x+bx\cos3x$

נמצא את y_p', y_p'' נציב אותם במשוואה. נשווה מקדמים כמו בכל תרגיל.

תרגיל 4

$\underline{y''+3y'-4y=2x+e^x}$. כאן נבחר את תת-המרחב $V_3=\{x,1,e^x\}$. הפתרון y_p הנבחר הוא:

$$\underline{y_p}=ax+b+ce^x \Rightarrow \underline{y_p'}=a+ce^x \Rightarrow \underline{y_p''}=ce^x$$

נציב:

$$ce^x+3a+3ce^x-4ax-4b-4ce^x=e^x+2x$$

בהשוואת מקדמים של e^x נקבל $0\cdot e^x=e^x$ וזה לא טוב. הסיבה היא מפני שלפי פתרון המשוואה האופיינית $y=e^x$ הוא פתרון. לכן הוא מתאפס. אז ה-y_p שנצטרך לבחור הוא: $y_p=ax+b+cxe^x$ כמו בתרגיל הקודם.

עכשיו רק נשאר להציב את הנגזרות, להשוות מקדמים ולמצוא פתרון כללי.

שיטת השתנות הפרמטרים (2)

$ay''+by'+cy=g(x)$. פתרון של משוואה הומוגנית: $y=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$

נחפש פתרונות של המשוואה הלא הומוגנית מהצורה: $y_p=V_1(x)y_1(x)+V_2(x)y_2(x)$

כיוון שהחלפנו את הפתרונות בפונקציות הרחבנו את דרגות החופש. לכן עלינו גם להוסיף אילוצים לפתרונות. הנגזרת תהיה: $y_p'=V_1'y_1+V_2'y_2+V_1y_1'+V_2y_2'$

האילוץ שנבחר הוא: (1) $V_1'y_1+V_2'y_2=0$ כי בגלל שהחלפנו פרמטר, אנחנו לא רוצים שהנגזרות יפגעו בדרגת החופש.

הנגזרת השניה: $y_p''=V_1'y_1'+V_2'y_2'+V_1y''+V_2y_2''$.

נציב במשוואה המקורית ונקבל:

$$a(V_1'y_1'+V_2'y_2')+V_1ay_1''+V_2y_2''+bV_1y_1'+bV_2y_2'+cV_1y_1+cV_2y_2=g(x) \quad (2)$$

את שסומנו באדום - הלא בעצם - V_1 כפול משותף ובסוגריים - $ay''+by'+cy$.
כיון ש- y_1 הוא פתרון של המשוואה ההומוגנית לכן זה מתאפס. כך גם לגבי את שסומנו בכחול עם V_2 כפול משותף.

קיבלנו מערכת משוואות:

$$\begin{cases} (1)\quad V_1'y_1+V_2'y_2=0 \\ (2)\quad V_1'y_1'+V_2'y_2'=\frac{g(x)}{a} \end{cases}$$

נמצא את V_1' ו- V_2' לפי קרמר:

$$V_1'=\frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ \frac{g}{a} & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} \qquad V_2'=\frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & \frac{g}{a} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}}$$

אחרי שנמצא אותם רק נבצע אינטגרל ונמצא את V_1, V_2.