

# M2 MPRI - Programmation Probabiliste - BYO-PPL

Guillaume Baudart

17 décembre 2021

## 1 Premiers exemples.

Implémenter les exemples du cours et vérifier expérimentalement les résultats de différent algorithmes d'inférence.

### Exercice 1. *Funny Bernoulli*

On lance trois pièces équilibrées,  $a$ ,  $b$  et  $c$  et on suppose que  $a$  ou  $b$  retombe sur face. Quelle est la distribution associée à la somme  $a + b + c$ ?

### Exercice 2. *Coin*

On veut estimer la distribution associée au biais d'une pièce à partir d'une série d'observations pile/face. On suppose initialement que le biais est équiprobable sur l'intervall  $[0, 1]$ .

### Exercice 3. *Laplace*

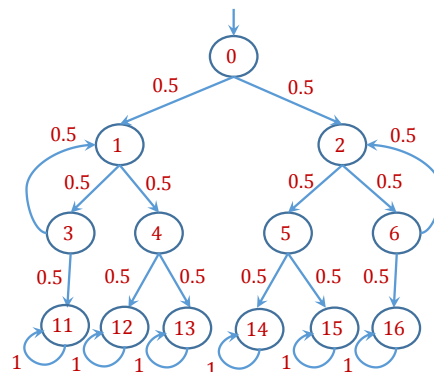
On cherche à estimer les chances de naître femme à Paris en 1770. On sait qu'il y a eu 241945 femmes pour 493472 naissances.

### Exercice 4. *Modèle de Markov Caché*

On cherche à estimer la position courante d'un objet à partir d'observations bruitées. On suppose qu'à chaque instant la position courante suit une distribution Gaussienne autour de la position précédente. On suppose également que l'observation courante suit une distribution Gaussienne autour de la position courante.

## 2 Le dé de Knuth-Yao

Knuth et Yao ont proposé un algorithme qui permet de simuler un dé parfait à 6 faces à partir d'une pièce équilibrée [1]. L'algorithme correspond à la chaîne de Markov discrete représentée ci-dessous [3].



À partir de l'état initial, on suit les transitions en fonction du résultat d'un lancé de pièce (probabilité 0.5 sur chacune des deux branches). On renvoie la valeur obtenue dès qu'on arrive sur une feuille. Les 6 feuilles numérotées de 11 à 16 correspondent aux 6 faces du dé.

**Exercice 5.**

Implémenter ce modèle et vérifier à l'aide de plusieurs méthodes d'inférence qu'on obtient bien un dé équilibré.

### 3 TrueSkills<sup>TM</sup>

TrueSkills<sup>TM</sup> est un système de classement développé par Microsoft pour Xbox Live.<sup>1</sup>

Le niveau de chaque joueur est représenté par une distribution Gaussienne. On suppose initialement que pour tous les jours  $P$ ,  $skill_P \sim \mathcal{N}(100, 10)$ .

À chaque duel, la performance de chacun des joueurs suit une distribution Gaussienne centrée sur leur niveau avec une variance fixe. On observe alors que la performance du vainqueur  $W$  est supérieure à celle du vaincu  $L$  ce qui mets à jours les variables aléatoires  $skill_W$  et  $skill_L$ .

$$perf_W \sim \mathcal{N}(skill_W, 15)$$

$$perf_L \sim \mathcal{N}(skill_L, 15)$$

$$perf_W > perf_L$$

**Exercice 6.**

Implémenter ce modèle pour trois joueurs A, B et C, et trois duels :

- A gagne contre B,
- B gagne contre C,
- A gagne contre C.

Vérifier que les résultats obtenus correspondent à ce qu'on attend.

**Exercice 7.**

Implémenter un modèle plus général qui prend en paramètre un tableau de joueur avec leur niveau initial et une liste de duels. On pourra représenter un duel par une pair d'entiers  $(i, j)$  où  $i$  et  $j$  correspondent aux indices des joueurs dans le tableau. Par convention, le vainqueur du duel sera toujours  $i$ .

## Références

- [1] D. Knuth et A. Yao. *Algorithms and Complexity : New Directions and Recent Results, chapter The complexity of nonuniform random number generation*. Academic Press, 1976.
- [2] R. Herbrich, T. Minka et T. Graepel *TrueSkill<sup>TM</sup> : A Bayesian Skill Rating System*. NIPS, 2006.
- [3] A. Gordon, T. Henzinger, A. Nori et S. Rajamani *Probabilistic programming*. FOSE, 2014.

---

1. <https://en.wikipedia.org/wiki/TrueSkill>