Circuits logiques combinatoires et séquentiels

Guy Bégin

26 octobre 2023

Théorèmes et propriétés

Objectifs

- Bien saisir les relations de dualité entre les opérations
- Connaître les principaux théorèmes de l'algèbre de Boole et les appliquer correctement
- Appliquer les théorèmes de DeMorgan
- Passer d'une version d'un théorème à sa version duale
- Connaître les autres fonctions logiques importantes
- Construire un tableau de vérité

Dualité

- Les postulats ont été formulés en paires, identifiés par ♠ et ♡.
- En interchangeant les opérateurs et les éléments identité, on transforme un postulat de forme ♠ en un postulat de forme ♡.
- C'est le principe de dualité.
- Ainsi, n'importe quelle expression algébrique demeurera valide si les opérateurs et les valeurs d'éléments identité sont interchangés.
- Puisque notre algèbre ne comporte que deux éléments, les deux éléments identité sont en fait les deux seuls éléments, 0 et 1.
- On obtient donc le dual d'une expression en changeant les 0 pour des 1, les 1 pour des 0 et les ET pour des OU, les OU pour des ET.

Théorèmes de base

Le tableau 1 résume les postulats et théorèmes de base de notre algèbre. On présente en parallèle chaque version et sa version duale.

Théorèmes de base ... 2

Table 1 – Théorèmes de l'algèbre de Boole

	Version ♠	Version ♡
Postulat 2	$x + 0 = x$	$x \cdot 1 = x$
Postulat 5	$x + x' = 1$	$x \cdot x' = 0$
Théorème 1	$x + x = x$	$x \cdot x = x$
Théorème 2	$x + 1 = 1$	$x \cdot 0 = 0$
Théorème 3	$(x')' = x$	
Postulat 3	$x + y = y + x$	$xy = yx$
Théorème 4	$x + (y + z) = (x + y) + z$	$x(yz) = (xy)z$
Postulat 4	$x(y + z) = xy + xz$	$x + yz = (x + y)(x + z)$
Théorème 5	$(x + y)' = x'y'$	$(xy)' = x' + y'$
Théorème 6	$x + xy = x$	$x(x + y) = x$

Autres fonctions logiques

- Nous avons vu que les opérateurs logiques ET, OU et NON, qu'on peut aussi appeler fonctions logiques, sont à la base même de la définition de notre algèbre de Boole.
- Il est possible de concevoir d'autres fonctions logiques qui vont s'avérer utiles pour la formulation, la conception et la réalisation de systèmes logiques. Voici quelques-unes des plus souvent utilisées.

Fonction NON-ET

- La fonction NON-ET, souvent désignée NAND, est obtenue en complémentant la sortie d'une fonction ET : $(x \cdot y)'$.

Table 2 – Tableau de vérité de la fonction NON-ET

x	y	$(x \cdot y)'$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Fonction NON-OU (NOR)

- La fonction NON-OU, souvent désignée NOR, est obtenue en complémentant la sortie d'une fonction OU : $(x + y)'$.

Table 3 – Tableau de vérité de la fonction NON-OU

x	y	$(x+y)'$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Fonction OU-exclusif (XOR)

- La fonction OU-exclusif, souvent désignée XOR, est obtenue en évaluant $x \cdot y' + x' \cdot y$.
- La sortie est 1 seulement si une seule des entrées est 1.
- On verra plus loin que cette fonction joue un rôle important dans la formulation d'un additionneur.

Table 4 – Tableau de vérité de la fonction OU-exclusif

x	y	$(x \cdot y' + x' \cdot y)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Fonctions de plusieurs entrées

- La plupart des fonctions logiques simples peuvent naturellement se formuler en fonction de plus de deux entrées.
- Par exemple, $a \cdot b \cdot c$ nous donne une fonction ET à trois entrées, et on peut facilement imaginer des fonctions ET ou des fonctions OU avec encore plus d'entrées.

Expressions et fonctions binaires

- Une fonction binaire peut être décrite par une expression algébrique booléenne.
- Selon les valeurs des variables, la valeur de l'expression booléenne détermine la valeur de la fonction.
- Par exemple, F_1 est une fonction de trois entrées a, b et c définie par l'expression

$$F_1 = a + b \cdot c'$$

Expressions et fonctions binaires . . . 2

- La priorité des opération dans les expressions algébriques est (1) parenthèses, (2) NON, (3) ET, (4) OU.
- Il est possible de construire le tableau de vérité pour F_1 en évaluant la fonction pour les $2^3 = 8$ combinaisons d'entrées possibles, comme dans le tableau 5.

Expressions et fonctions binaires . . . 3

Table 5 – Fonction de trois variables

a	b	c	F_1
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

En général, pour une fonction à n entrées, le tableau de vérité comportera 2^n lignes.

Théorèmes de DeMorgan

- Le complément d'une fonction F, F', s'obtient en remplaçant tous les 0 par des 1 et tous les 1 par des 0 dans les valeurs de la fonction.
- Par exemple, en complémentant ainsi les valeurs dans le tableau de vérité, on effectue ce changement.
- On peut aussi effectuer ce changement en appliquant les théorèmes de DeMorgan (Théorème 5 ♠ et ♡ du tableau 1) qui peuvent se généraliser à plus de deux variables.