

Circuits logiques combinatoires et séquentiels

Guy Bégin

26 octobre 2023

Logique binaire, fonctions logiques et algèbre de Boole

Objectifs

- Situer les opérations de la logique binaire dans leur contexte algébrique
- Se familiariser avec les postulats de l'algèbre de Boole, et les principaux théorèmes
- Exprimer une fonction logique par un tableau de vérité
- Formuler une expression logique à partir d'un tableau de vérité
- Exprimer une fonction logique en *somme de produits*, ou en *produit de sommes*, et convertir d'une forme à l'autre

Logique binaire

- La logique binaire associe une valeur de vérité à des variables, selon une convention préétablie.
- Ces valeurs de vérité sont binaires, à savoir, **vrai** ou **faux**.
- Pour représenter ces valeurs de vérité, on peut utiliser un encodage binaire, par exemple :

Valeur de vérité	Valeur binaire
Vrai	1
Faux	0

Variable binaire

- Une variable binaire, dénotée par une lettre, permet de désigner une valeur binaire pouvant assumer une des deux valeurs possible, 0 ou 1.
- La variable est typiquement associée à une proposition, à l'état d'un élément ou à toute autre condition pouvant admettre deux états distincts.
- En assignant une valeur binaire à la variable, on définit une valeur de vérité associée à cette variable, et ainsi à la condition qu'elle représente.
- Par exemple, soit S une variable binaire qui représente la proposition «le soleil est visible».
- Alors, $S = 0$ peut s'interpréter comme «le soleil est visible est faux» ou «le soleil n'est pas visible».



- Trois opérations logiques de base permettent d'agir sur des variables binaires, de les combiner et de formuler des expressions logiques à partir d'elles.

1. ET : cette opération est représentée (comme la multiplication) par un point central ou par l'absence de signe d'opérateur entre les arguments. Par exemple, $x \cdot y$ ou xy . La valeur de l'expression est 1 si et seulement si toutes les variables ont la valeur 1. Sinon, la valeur est 0.

1. OU : cette opération est représentée (comme l'addition) par un signe $+$. Par exemple, $x + y$. La valeur de l'expression est 1 si au moins une des variables a la valeur 1. Si aucune des variables ne vaut 1, la valeur de l'expression est 0.

1. NON : cette opération est représentée par un prime, par exemple x' , ou par une barre au-dessus de la variable, \bar{x} .
L'opération NON renverse la valeur binaire de son argument : si $x = 0$ alors $x' = 1$; si $x = 1$ alors $x' = 0$. Cette opération de négation, est aussi appelée complément, car complémenter une valeur binaire revient à faire basculer sa valeur.

- Une expression logique combine des variables logiques et des opérations et peut donc assumer une valeur binaire logique.
- Cette valeur logique peut être assignée à une autre variable, en créant ainsi une équation logique.
- Par exemple, $z = x \cdot y$ signifie que z assume la valeur de l'expression $x \cdot y$.
- À partir des valeurs logiques des variables (entrées) x et y , on peut donc déterminer la valeur logique de la sortie z .

Tableaux de vérité

- On peut décrire la valeur logique d'une variable de sortie en fonction des valeurs possibles des variables d'entrée au moyen d'un tableau de vérité.
- Dans un tel tableau, il y a une ligne pour chaque combinaison possible des valeurs d'entrée et, sur chaque ligne, on indique la valeur de sortie correspondante.
- C'est en quelque sorte une description en extension de la valeur de l'expression de sortie.

Voici par exemple les tableaux de vérité pour les opérations de base.

x	y	$x \cdot y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Opération OU

x	y	$x + y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Opération complément

x	x'
0	1
1	0

Un formalisme mathématique, élaboré bien avant l'avènement des circuits électroniques numériques, permet de formuler, analyser et simplifier les expressions de la logique binaire. Il s'agit de l'algèbre de Boole.

Définitions

- Une algèbre est un système mathématique, défini pour un ensemble d'éléments auxquels sont associés un ensemble d'opérateurs et qui respecte un jeu d'axiomes ou postulats.

Une algèbre nécessite donc :

1. Un ensemble S d'éléments
2. Des opérateurs : \cdot , \star , $+$

3. L'application des opérateurs aux différents éléments doit respecter un certain nombre de propriétés appelées postulats, comme :

- Fermeture
- Associativité
- Commutativité
- Existence d'élément identité
- Existence d'élément inverse
- Distributivité

- Selon le choix des postulats, on arrive à définir différents types de systèmes algébriques.
- Par exemple, les nombres réels qui nous sont familiers constituent un système algébrique d'un type appelé **corps**.

Une algèbre de Boole est un type de système algébrique défini sur un ensemble B , muni de deux opérateurs dénotés $+$ et \cdot , et qui respecte les postulats suivants (postulats de Huntington) :

Note : certains postulats viennent en paires ; nous les distinguons ici au moyen d'étiquettes ♠ ou ♥.

1. Fermeture : tout résultat d'une opération sur un élément de l'ensemble donne un élément de l'ensemble.
 - 1.1 ♠ Fermeture par rapport à $+$.
 - 1.2 ♥ Fermeture par rapport à \cdot .
2. Éléments identité
 - 2.1 ♠ Éléments identité de $+$, noté 0 : on a $x + 0 = 0 + x = x$.
 - 2.2 ♥ Éléments identité de \cdot , noté 1 : on a $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$.
3. Commutativité
 - 3.1 ♠ Commutativité par rapport à $+$: on a $x + y = y + x$.
 - 3.2 ♥ Commutativité par rapport à \cdot : on a $x \cdot y = y \cdot x$.

4. Distributivité

4.1 ♠ \cdot est distributif sur $+$: on a $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$.

4.2 ♥ $+$ est distributif sur \cdot : on a $x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$.

5. Pour chaque élément $x \in B$, il existe un élément $x' \in B$ (appelé complément de x) tel que

5.1 ♠ $x + x' = 1$.

5.2 ♥ $x \cdot x' = 0$.

6. Il existe au moins deux éléments $x, y \in B$ tels que $x \neq y$.

Observons des différences entre une algèbre de Boole et le corps des réels :

1. Il n'y a pas de loi d'associativité dans les postulats. On peut en démontrer une, cependant.
2. L'opération $+$ est distributive sur \cdot .
3. Il n'y a pas d'inverse multiplicatif ni d'inverse additif, on ne peut donc pas faire de soustraction ou de division.
4. Il y a un concept de complément.
5. L'ensemble d'éléments est différent. Nous utiliserons pour notre part l'ensemble $B : \{0, 1\}$ pour notre algèbre de Boole.

Algèbre de Boole à deux valeurs

Opérateur $+$

L'ensemble de définition :

$B : \{0, 1\}$.

Opérateur \cdot

x	y	$x \cdot y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

x	y	$x + y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Règle de complémentation

x	x'
0	1
1	0

Vérification des postulats

1. La fermeture est évidente (en regardant les tableaux des opérations).
2. En observant les tableaux de vérité, on constate que
 - 2.1 $0 + 0 = 0, 0 + 1 = 1 + 0 = 1$
 - 2.2 $1 \cdot 1 = 1, 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$ce qui définit les deux éléments identité : 0 pour $+$ et 1 pour \cdot .
3. La commutativité des lois est évidente : les tableaux sont symétriques.
4. Les lois de distributivité se démontrent aisément en établissant des tableaux de vérité pour les différentes valeurs de x, y et z .
5. Par le tableau de complément, on vérifie que
 - 5.1 $x + x' = 1$, car $0 + 0' = 0 + 1 = 1$ et $1 + 1' = 1 + 0 = 1$
 - 5.2 $x \cdot x' = 0$ car $0 \cdot 0' = 0 \cdot 1 = 0$ et $1 \cdot 1' = 1 \cdot 0 = 0$.
6. Le postulat 6 est vérifié car il y a deux éléments distincts : 0 et 1.