M1 informatique – module Traitement d’images

Projet : Transfert de couleurs dans des images RGB par transport optimal « par tranches » (sliced)

Contexte et but du projet :

« Le transport optimal est un problème ancien, formulé par Monge au XVIIIᵉ siècle. Il consiste à chercher le moyen le plus économique, par exemple en temps, pour transporter des objets entre un ensemble de points de départ et de points d’arrivée.

Pour illustrer le problème et sa formulation mathématique, intéressons-nous à la façon optimale de distribuer les croissants depuis les boulangeries vers les cafés, le matin dans Paris. Pour simplifier, nous allons supposer qu’il y a uniquement six boulangeries et cafés. On suppose que toutes les boulangeries produisent le même nombre de croissants et que tous les cafés demandent également ce même nombre de croissants. Dans son texte original, Monge fait l’hypothèse que le coût du déplacement d’une unité de masse est égal à la distance parcourue, mais on peut utiliser n’importe quel coût adapté au problème à résoudre. Le coût à minimiser que nous allons considérer est le temps total des trajets, et l’on note $C_{i,j}$ le temps entre la boulangerie $i \in \{1, \ldots, 6\}$ et le café $j \in \{1, \ldots, 6\}$. Par exemple, on a $C_{3,4} = 10$, ce qui signifie qu’il y a dix minutes de trajet entre la boulangerie numéro 3 et le café numéro 4. Afin de satisfaire la contrainte d’approvisionnement, il faut que chaque boulangerie soit connectée à un seul café et que chaque café soit connecté à une seule boulangerie. Ceci implique en particulier qu’il y a autant de cafés que de boulangeries. On va noter

$$\mathbf{s} : i \in \{1, \ldots, 6\} \longmapsto j \in \{1, \ldots, 6\}$$

un tel choix de connexions. On appelle un tel choix **s** de connexions satisfaisant la contrainte d’approvisionnement une **permutation**. Le transport optimal est depuis peu au cœur de problématiques plus appliquées en sciences des données, en particulier pour résoudre des problèmes en traitement d’image et en apprentissage machine.

La première idée, la plus immédiate, est d’utiliser la permutation **s** afin de transformer des données, par exemple des images. Dans ce cas, on considère les pixels $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots , y_n)$ de deux images couleurs. Chaque pixel $x_i, y_j \in \mathbf{R}^3$ est un vecteur de dimension 3, qui représente les intensités de chacune des trois couleurs élémentaires, rouge, vert et bleu.

Afin de changer les couleurs de la première image, et lui imposer la palette de la deuxième image, on calcule le transport **s** en utilisant un coût $C_{i,j}$ qui prend en compte la similarité entre la couleur x_i et la couleur y_j des deux pixels, ce qui signifie que $C_{i,j}$ est d’autant plus faible que les couleurs des deux pixels sont proches. L’image avec les couleurs modifiées est $(y_{s(1)}, \ldots, y_{s(n)})$, c’est-à-dire que l’on remplace dans la première image le pixel x_i par le pixel $y_{s(i)}$. Cette image ressemble à la première, mais a la palette de couleurs de la deuxième image.

La fig. 1 de la page suivante illustre ce procédé pour imposer la palette de couleurs de Picasso à un tableau de Cézanne. Sur la ligne du haut de la figure, les pixels sont sur la grille d’affichage pour former une image couleur. Sur la ligne du bas, les pixels sont placés à leurs positions dans $\mathbf{R}^3$ pour former un nuage de points. Les deux nuages de points au centre et à droite sont les mêmes : le transport optimal appliqué aux pixels du tableau de Cézanne donne une nouvelle image (montrée à droite) dont l’ensemble des pixels est une permutation des pixels du tableau de Picasso. » tiré de **[1]**.

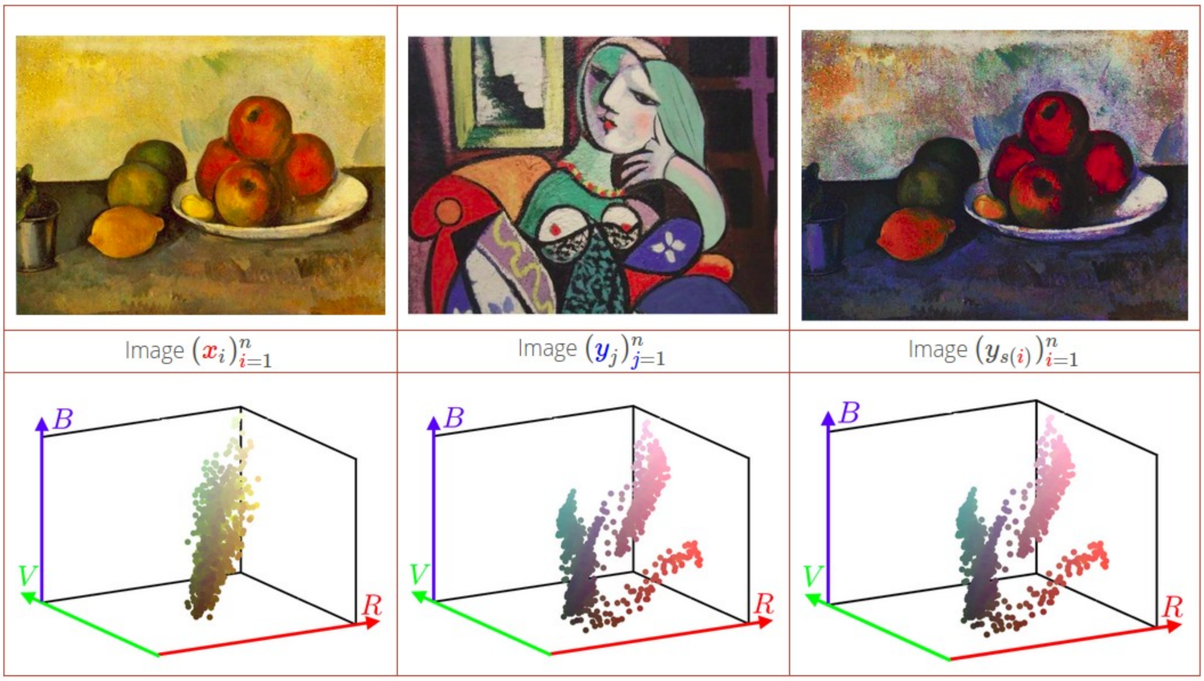
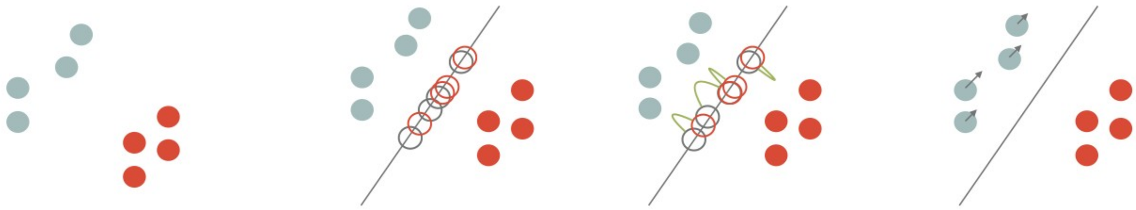


fig. 1 :** illustration du principe de transfert de couleurs entre 2 images pour ici imposer la palette de couleurs de Picasso à un tableau de Cézanne. Image tirée de* ***[1].

Travail demandé :

Le but de ce projet est de réaliser le transfert de couleurs entre 2 images couleurs, tel que décrit ci-dessus. Pour cela, on se basera sur la méthode de transport optimal « par tranches » (ou sliced optimal transport en anglais), décrite dans **[2,3]**. Le principe est de se définir plusieurs directions $\boldsymbol{\theta}$ (des droites dans l'espace $\mathbf{R}^3$ des couleurs) de façon aléatoire et de projeter les points des 2 nuages de points (dans le cas du transfert des couleurs, il s'agit des couleurs des pixels dans l'espace $\mathbf{R}^3$ de nos 2 images) sur la droite $\boldsymbol{\theta}$ tel qu'illustré par la fig. 2 ci-dessous.



(a) (b) (c) (d)

***fig. 2 :** illustration du principe du transport optimal « par tranches » entre 2 nuages de points discrets (représentés en bleu clair et rouge) ayant le même nombre de points. Étant donné une direction de projection (la droite tracée entre les 2 nuages en (b)), chaque point est alors projeté sur cette droite et réordonné pour associer à tout point bleu un point rouge (c) et ensuite le déplacer dans la direction de la droite (d).*

Les projections sont itérées sur un grand nombre de droites $\boldsymbol{\theta}$ (de direction choisie aléatoirement), de façon à s'approcher du résultat souhaité.

Une fois l'algorithme mis en place :

- une première étude s'intéressera à la vitesse de convergence du résultat,

- une seconde intéressera à afficher les histogrammes et les images intermédiaires obtenus lors de la progression de l'image source vers l'image résultat (grâce à une interpolation des histogrammes décrite à la fin de **[4]**).

Il est bien sûr demandé de présenter les résultats obtenus sur plusieurs images et d'identifier les forces et les limites/faiblesses de la technique réalisée.

Liens :

[1] http://images.math.cnrs.fr/Le-transport-optimal-numerique-et-ses-applications-Partie-1.html?lang=fr

[2] https://dcoeurjo.github.io/OTColorTransfer/

[3] https://codimd.math.cnrs.fr/s/2eRBqV9zl#Color-Transfer-via-Discrete-Optimal-Transport-using-the-sliced-approach

[4] https://codimd.math.cnrs.fr/s/2eRBqV9zl#Advanced-features

Contact : Céline Roudet

- **Bureau :** Aile des Sciences de l'Ingénieur (Bâtiment ESIREM), bureau G213 (2ème étage)
- **Mail :** Celine.Roudet@u-bourgogne.fr